Capitolo 5

Descrizione e sintesi di reti sequenziali sincrone

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, una rete sequenziale assume diversi stati interni ed evolve tra essi. Per descrivere simili evoluzioni in modo astratto, indipendentemente dal modello fisico di rete, introdurremo il concetto di *automa finito*: questo, oltre a rappresentare il funzionamento di una rete sequenziale, serve più in generale alla descrizione di un qualsiasi fenomeno che evolva in tempi discreti e possa trovarsi in un numero finito di stati diversi.

5.1 L'automa finito

Il comportamento di un *automa finito* (o semplicemente automa) è descritto attraverso gli stati diversi in cui può trovarsi e l'evoluzione tra essi, gli ingressi che può accettare e le eventuali uscite che può produrre.

Formalmente l'automa si definisce attraverso gli elementi seguenti.

1) $S = \{S_1, \ldots, S_h\}$, *insieme degli stati interni*; uno di essi S_i, può essere designato come stato iniziale: in questo caso l'automa è posto nello stato S_i all'inizio delle operazioni.

2) $X = \{X_1, \ldots, X_p\}$, *insieme degli stati di ingresso*, cioè degli stimoli applicati all'automa dall'esterno.

3) $Z = \{Z_1, \ldots, Z_q\}$, *insieme degli stati di uscita*, cioè degli stimoli trasmessi all'esterno dall'automa.

4) *Il diagramma degli stati*, che è un grafo orientato di h nodi, uno

per ogni stato interno S_i: da ogni stato partono p archi orientati; su ciascuno di essi è indicato uno stato di ingresso e uno stato di uscita separati da "/".

Il funzionamento dell'automa è descritto dal diagramma degli stati nel modo seguente (fig. 5.1): se l'automa si trova nello stato interno S_v e gli viene applicato l'ingresso X_i, esso si sposta nello stato S_w producendo l'uscita Z_j.

Consideriamo come esempio il funzionamento di un flipper un po' speciale, in cui la pallina rimane sempre in gioco. Il flipper ha due buche B_1 e B_2, e due lampade L_1 e L_2, inizialmente spente. Se la pallina viene mandata in B_1 (o in B_2) si accende la lampada L_1 (o L_2). Se tutt'e due le lampade vengono accese il flipper dà un premio (WOW!). Quando L_1 e L_2 sono accese, se la pallina va in B_1 si spegne L_2, se va in B_2 si spegne L_1, se non viene colpita alcuna buca si spengono ambedue le lampade.

Il funzionamento del flipper descritto come automa appare nel diagramma degli stati della figura 5.2. L'insieme degli stati interni $\{A, B, C, D\}$ comprende le quattro possibili situazioni di accensione delle lampadine L_1, L_2; la notazione L_i, o $\overline{L_i}$, indica che la lampada L_i è accesa o spenta. Lo stato iniziale è A (lampade entrambe spente: $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$). Per gli ingressi la notazione B_i, o $\overline{B_i}$, indica che la buca i è stata colpita o meno dalla pallina. L'insieme degli stati di ingresso è $\{\overline{B_1}\,B_2,\ B_1\,\overline{B_2},\ \overline{B_1}\,\overline{B_2}\}$: lo stato $B_1 B_2$ non si presenta mai, poiché la pallina non può colpire contemporaneamente le due buche. L'insieme degli stati di uscita è {NO, WOW}; il significato dei due stati è: nessun premio oppure WOW!

Una rappresentazione alternativa al diagramma degli stati è la *tabella*

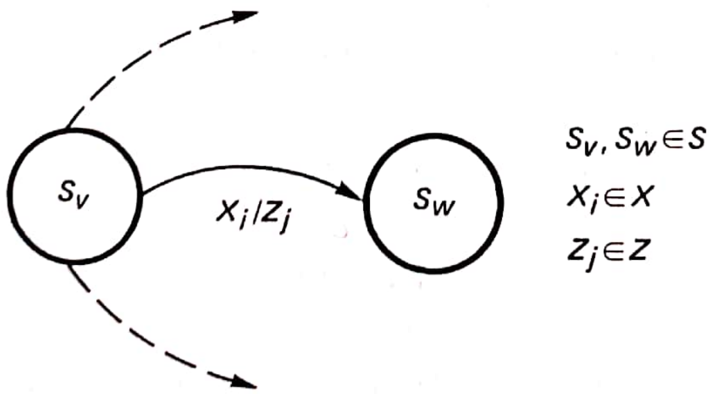


Figura 5.1
Parte di un diagramma degli stati.

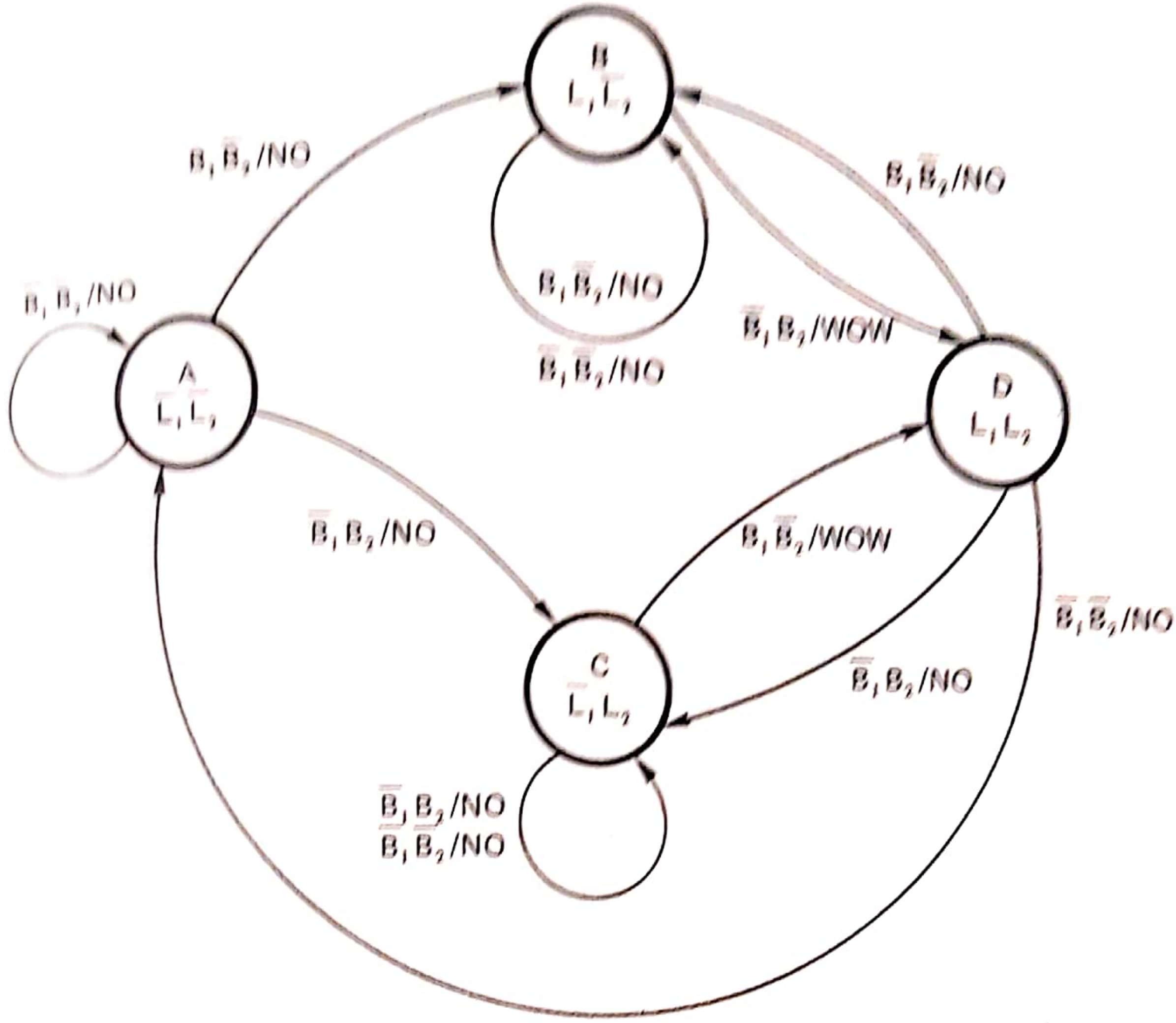


Figura 5.2
Il diagramma degli stati del flipper.

di flusso. In questa ciascuna riga corrisponde a uno stato interno S_i e ciascuna colonna a uno stato di ingresso X_j. In ogni casella S_i, X_j, con $1 \leqslant i \leqslant h$ e $1 \leqslant j \leqslant p$, è specificato il prossimo stato interno, e, separato da una virgola, lo stato di uscita.

Per l'esempio del flipper otteniamo la seguente tabella di flusso:

	$B_1 \overline{B}_2$	$\overline{B}_1 B_2$	$\overline{B}_1 \overline{B}_2$
A	*B*, NO	*C*, NO	*A*, NO
B	*B*, NO	*D*, WOW	*B*, NO
C	*D*, WOW	*C*, NO	*C*, NO
D	*B*, NO	*C*, NO	*A*, NO

5.2 La rete sequenziale come automa

Consideriamo il caso in cui il diagramma degli stati (o la tabella di flusso) rappresenti il funzionamento di una rete sequenziale. Lo schema della rete è quello della figura 4.9. La rete può trovarsi in h stati interni, ciascuno rappresentato da una configurazione delle variabili di anello $y_1, ..., y_k$ e memorizzato nel registro posto sugli anelli. I p stati di ingresso e i q stati di uscita della rete sono rappresentati da configurazioni delle variabili di ingresso $x_1, ..., x_n$, e delle variabili di uscita $z_1, ..., z_m$. Si ha quindi:

$$h \leq 2^k, \quad p \leq 2^n, \quad q \leq 2^m.$$

La tabella di flusso ha h righe, denominate $S_1, ..., S_h$. Poiché ogni S_i corrisponde a una configurazione di $y_1, ..., y_k$, la tabella di flusso può essere riscritta in termini di queste variabili: la nuova tabella ottenuta codificando stati interni, stati di ingresso e stati di uscita con le rispettive variabili si chiama *tabella delle transizioni*.

Consideriamo come esempio il diagramma degli stati, la tabella di flusso e la tabella delle transizioni di una rete sequenziale con un morsetto di ingresso x e un morsetto di uscita z, che *riconosce* l'occorrenza di una sequenza 111 all'ingresso (cioè produce $z=1$ in questo caso, $z=0$ altrimenti).

Un esempio di sequenza di ingresso e corrispondente sequenza di uscita, rappresentate nel tempo da sinistra verso destra, è il seguente:

$$\begin{array}{ll} x & 0\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1 \\ z & 0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \end{array}$$

Il diagramma, con il significato dei suoi stati, è mostrato in figura 5.3. Si noti che, se arriva un 1 quando la rete è nello stato C, questa riconosce la sequenza e ritorna in C, in quanto gli ultimi due 1 della

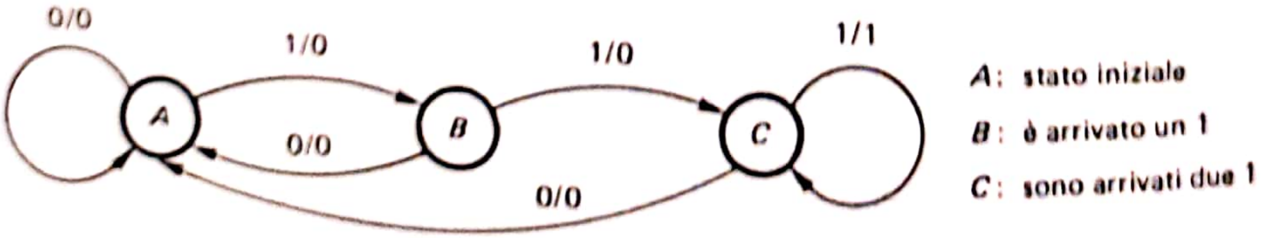


Figura 5.3
Diagramma degli stati del riconoscitore della sequenza 111.

sequenza riconosciuta possono essere i primi due 1 di una nuova sequenza.

Dal diagramma degli stati si ricava la tabella di flusso:

	$x=0$	$x=1$
A	$A,0$	$B,0$
B	$A,0$	$C,0$
C	$A,0$	$C,1$

Poiché sono necessarie $2=\lceil \log 3 \rceil$ variabili y_1, y_2 per rappresentare i tre stati A, B, C, la rete deve avere due anelli. Essa ha cioè la forma di figura 5.4.

Scelta ad arbitrio la corrispondenza: $A:00$, $B:01$, $C:11$, tra stati e valori delle variabili di anello, otteniamo la tabella delle transizioni:

$y_1 y_2$	$x=0$	$x=1$
00	00,0	01,0
01	00,0	11,0
11	00,0	11,1

$y'_1 y'_2, z$

All'interno di ogni casella sono specificati i valori assunti dalle variabili y'_1 e y'_2 che indicano il prossimo stato interno, e dalla z che rappresenta lo stato di uscita.

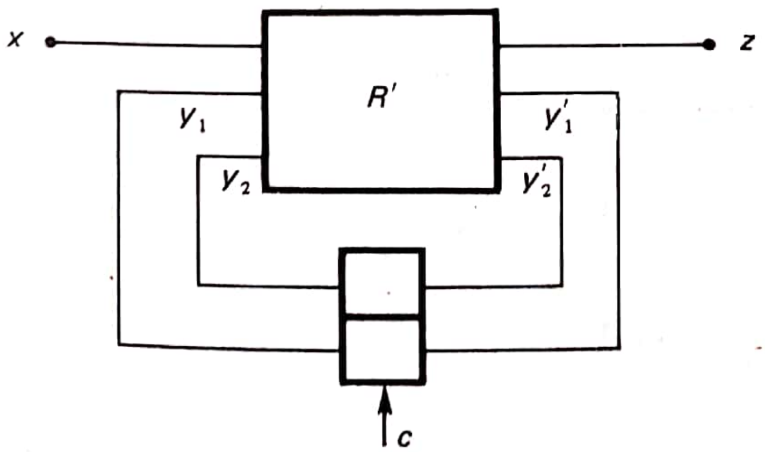


Figura 5.4
Schema del riconoscitore.

Notiamo che la rete non fa uso della configurazione delle variabili $y'_1 = 1$, $y'_2 = 0$, cioè tali valori non si presentano mai sugli anelli. Le funzioni combinatorie generate dalla rete R' di figura 5.4 si costruiscono sulla base dell'informazione contenuta nella tabella delle transizioni, come vedremo nel prossimo paragrafo.

5.3 Sintesi di reti sequenziali

Il procedimento che porta al progetto completo di una rete sequenziale a partire dalla descrizione a parole di un problema è detto *sintesi* della rete.

Il primo passo è quello di ricavare il diagramma degli stati dalla descrizione del problema: vedremo come questa sia la fase più difficile, poiché non esistono regole generali a cui attenersi. Le fasi successive della sintesi sono la costruzione della tabella delle transizioni, e quindi della rete combinatoria R' di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente.

Seguiamo ora il procedimento completo attraverso la costruzione di una rete sequenziale che somma tre numeri binari positivi di n bit, per n qualsiasi, in n tempi elementari. I numeri sono presentati contemporaneamente su tre ingressi x_1, x_2, x_3, come sequenze di bit, a partire dal bit meno significativo; ogni successivo gruppo di tre bit è applicato agli ingressi tra due impulsi di sincronismo c. La somma è generata sull'uscita z, anch'essa in forma di sequenza a partire dal bit meno significativo. Lo schema dei collegamenti con l'esterno è cioè quello di figura 5.5.

Notiamo anzitutto che nell'addizione di tre numeri si può generare a ogni stadio un riporto a uno stadio successivo, o a due stadi succes-

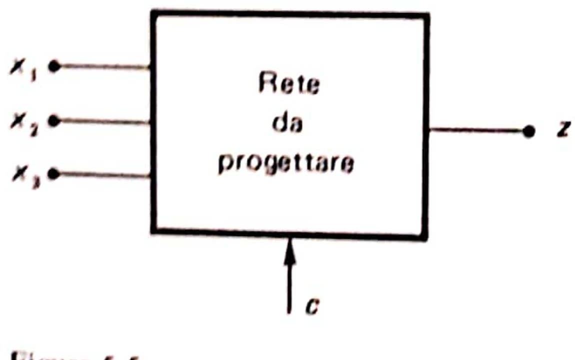
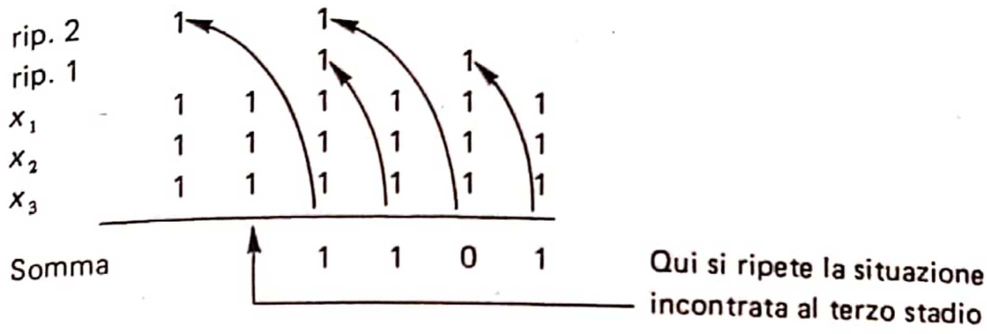


Figura 5.5
Schema esterno del sommatore.

sivi, come mostra l'esempio seguente, ove evidentemente si generano e si propagano il massimo numero di riporti:



Un diagramma degli stati per il sommatore è indicato nella figura 5.6, ove la notazione (100), o (110), indica tutte le configurazioni dei segnali di ingresso che contengono un 1, o due 1. Quando le sequenze di ingresso sono terminate, lo stato interno raggiunto indica l'eventuale riporto che occorre a completare il risultato.

Dal diagramma della figura 5.6 si ricava la seguente tabella di flusso. (Ricordiamo che il diagramma degli stati e la tabella di flusso contengono esattamente la stessa informazione, e non è quindi indispensabile

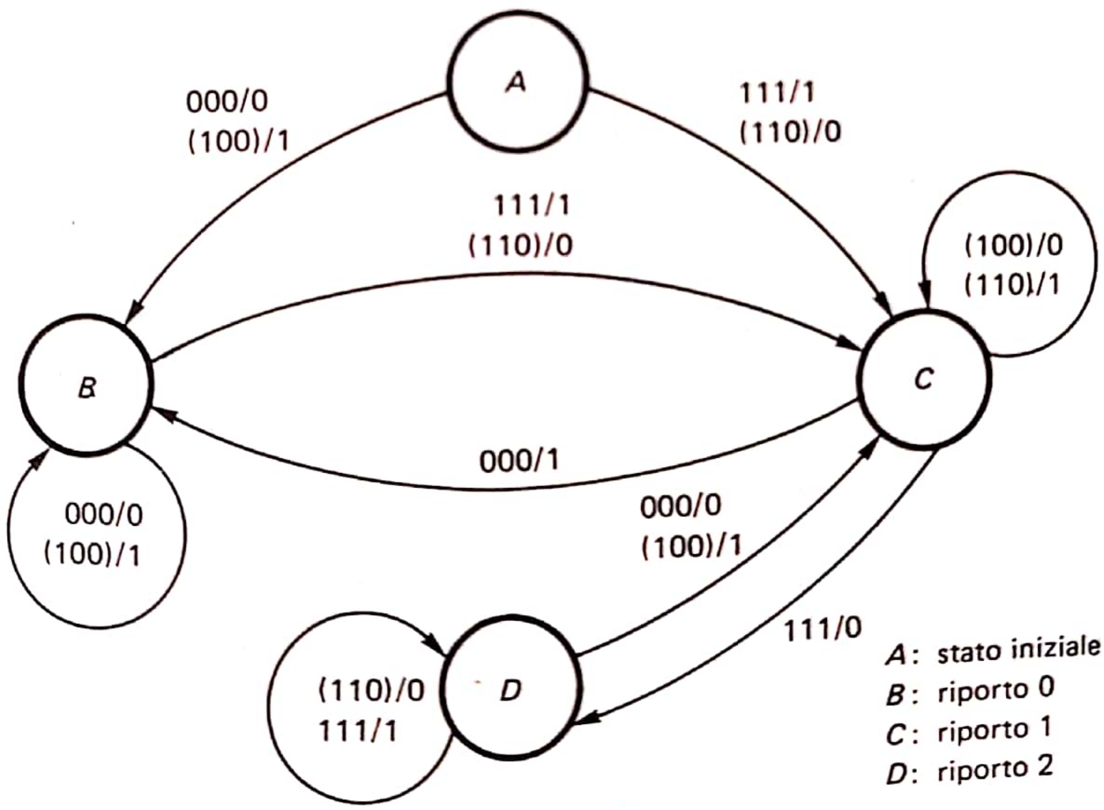


Figura 5.6
Diagramma degli stati del sommatore.

ricavarli ambedue: la scelta del procedimento dipenderà dai gusti e dalle abitudini del progettista.)

$x_1x_2x_3$	000	001	011	010	100	101	111	110
A	*B*, 0	*B*, 1	*C*, 0	*B*, 1	*B*, 1	*C*, 0	*C*, 1	*C*, 0
B	*B*, 0	*B*, 1	*C*, 0	*B*, 1	*B*, 1	*C*, 0	*C*, 1	*C*, 0
C	*B*, 1	*C*, 0	*C*, 1	*C*, 0	*C*, 0	*C*, 1	*D*, 0	*C*, 1
D	*C*, 0	*C*, 1	*D*, 0	*C*, 1	*C*, 1	*D*, 0	*D*, 1	*D*, 0

Si noti che nel diagramma degli stati, quindi nella tabella di flusso, potrebbero apparire alcuni stati ridondanti, nel senso che due o più stati potrebbero svolgere la stessa funzione. E' questo il caso degli stati A, B della figura 5.6, le cui funzioni potrebbero essere svolte da un unico stato. Ciò non deve preoccupare, poiché studieremo nel capitolo 7 un metodo sistematico per ottenere una tabella di flusso a minimo numero di stati.

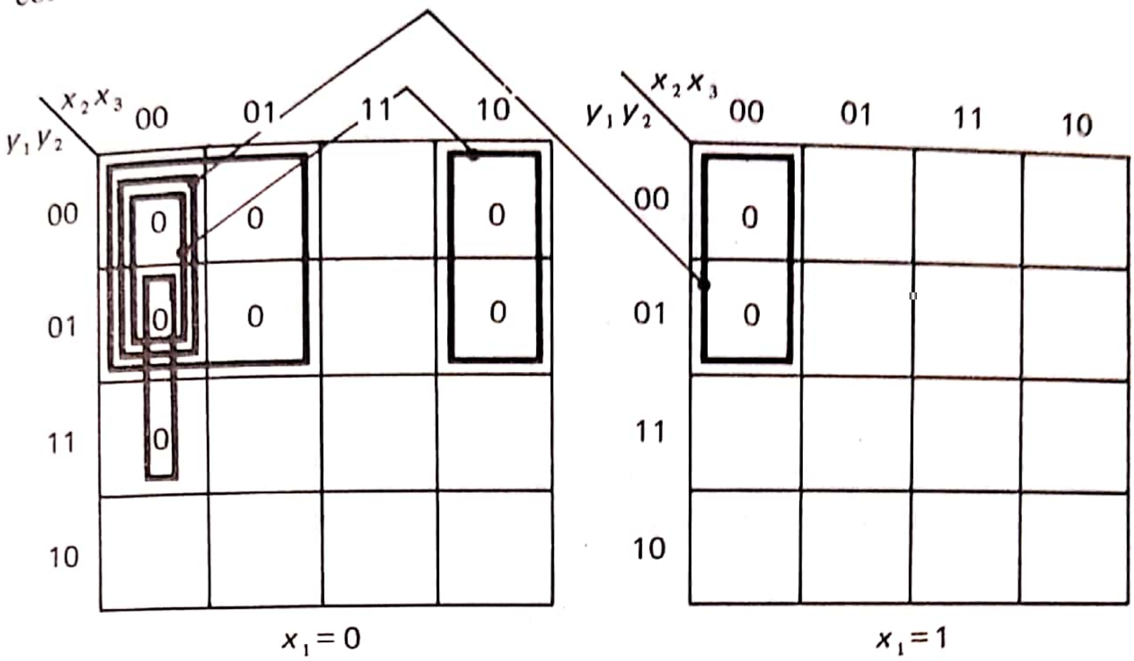
Per codificare i quattro stati dell'esempio occorrono due variabili di anello y_1, y_2. Scelto l'assegnamento: $A:00, B:01, C:11, D:10$, otteniamo la tabella delle transizioni:

y_1y_2 \ $x_1x_2x_3$	000	001	011	010	100	101	111	110
00	01,0	01,1	11,0	01,1	01,1	11,0	11,1	11,0
01	01,0	01,1	11,0	01,1	01,1	11,0	11,1	11,0
11	01,1	11,0	11,1	11,0	11,0	11,1	10,0	11,1
10	11,0	11,1	10,0	11,1	11,1	10,0	10,1	10,0

$y'_1 y'_2, z$

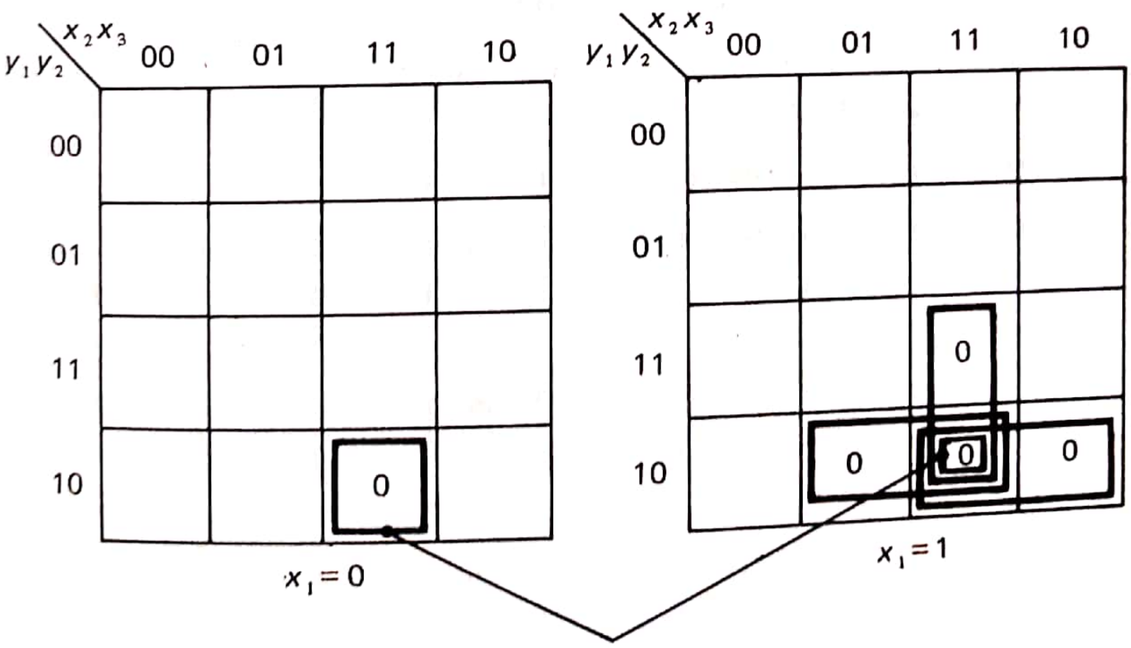
Siamo ora in grado di determinare le funzioni y'_1, y'_2, z e quindi di progettare la parte combinatoria della rete. Notiamo che, nell'esempio, la tabella delle transizioni è stata scritta in modo da poterne ricavare direttamente le mappe di Karnaugh nelle cinque variabili x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, per le tre funzioni y'_1, y'_2, z (tali mappe si dividono in due semimappe per $x_1 = 0$ e $x_1 = 1$).

Considerando gli 0 della funzione, la y'_1 si esprime in forma PS come:



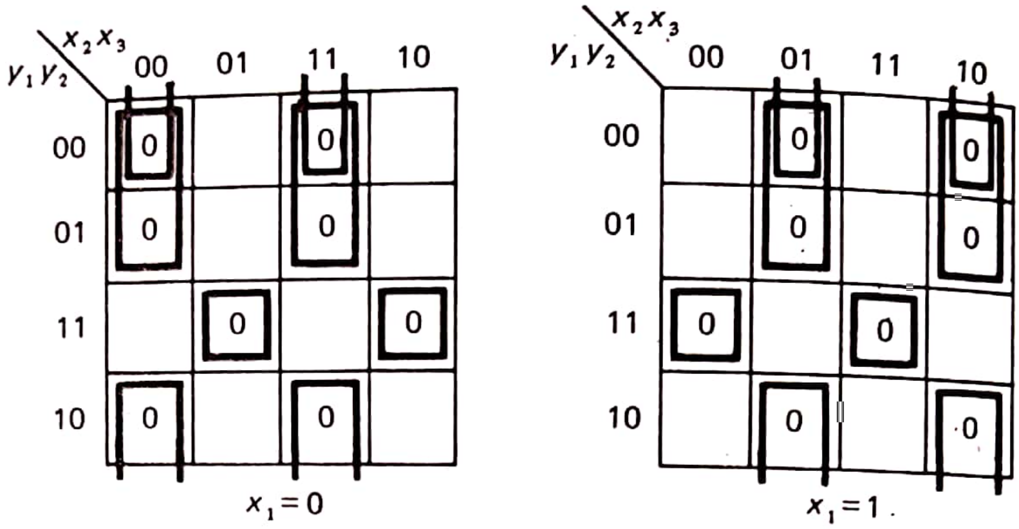
$$y'_1 = (x_1 + x_2 + y_1)(x_1 + x_3 + y_1)(x_2 + x_3 + y_1)(x_1 + x_2 + x_3 + \bar{y}_2).$$

Per la y'_2 abbiamo:



$$y'_2 = (\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{y}_1 + y_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_3 + \bar{y}_1 + y_2)$$
$$(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{y}_1 + y_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{y}_1).$$

Infine per la z abbiamo:



con conseguente derivazione dell'espressione algebrica. Abbiamo così tutte le informazioni necessarie al disegno complessivo della rete, che lasciamo al lettore.

L'esempio visto illustra il procedimento generale di sintesi di una rete sequenziale, che si riassume nelle fasi seguenti:

1) determinazione del diagramma degli stati dalla descrizione del problema;

2) costruzione della tabella di flusso;

3) minimizzazione della tabella (vedi cap. 7);

4) codifica degli stati interni mediante associazione tra stati e valori delle variabili di anello;

5) costruzione della tabella delle transizioni;

6) determinazione delle funzioni di prossimo stato e di uscita, attraverso le specificazioni di tali funzioni contenute nella tabella delle transizioni;

7) disegno complessivo della rete, che comprende la parte combinatoria (definita attraverso le funzioni della fase 6), gli anelli e il registro degli stati.

Tutte le tabelle di flusso fin qui considerate sono completamente specificate, nel senso che, per ogni coppia S_i, X_j sono definiti il prossimo stato interno e l'uscita. Ciò potrebbe non avvenire in alcune condizioni, per il comportamento imposto alla rete dall'esterno (vedi eserc. 5.2). Tale situazione, che sarà approfondita in seguito, dà luogo a tabelle di flusso incompletamente specificate, che producono condizioni di indifferenza per la determinazione delle funzioni combinatorie.

Ulteriori condizioni di non specificazione nascono quando non tutte le configurazioni delle variabili di stato o di ingresso compaiono nella tabella delle transizioni. Un esempio in tal senso è quello studiato nel paragrafo precedente, ove la configurazione 10 delle variabili di stato non è presente. Al momento di determinare le funzioni combinatorie è però necessario prendere in considerazione anche tali configurazioni, che si traducono in condizioni di indifferenza nelle posizioni corrispondenti.

Esercizi

5.1 Individuare il diagramma degli stati di una rete sequenziale con un ingresso x e un'uscita z, che produca $z=1$ se e solo se gli ultimi quattro bit ricevuti sulla x costituiscono un palindromo (cioè una stringa che si legge ugualmente nei due sensi).

5.2 Eseguire la sintesi di una rete sequenziale che riconosca se il numero di 1 di una stringa di quattro bit è pari o dispari. La rete interpreta la sequenza di ingresso (variabile x) come una successione di stringhe di lunghezza quattro, e dà la risposta (variabile z) in corrispondenza al quarto bit di ogni stringa.

Esempio:

x	0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0
z	– – – 1 – – – 0 – – – 1 – – – 0

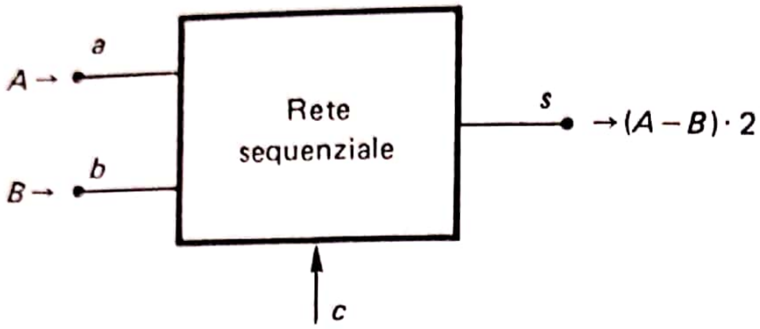
5.3 Eseguire la sintesi di una rete sequenziale a due ingressi x_1, x_2 e un'uscita z. Gli ingressi codificano le lettere A, B, C, D come segue:

$x_1 x_2$	
0 0	= A
0 1	= B
1 0	= C
1 1	= D

La rete deve riconoscere ($z=1$) solo le due sequenze: BACCA oppure DACA.

5.4 Una rete sequenziale ha due ingressi a, b e un'uscita s. Su a, b entrano in sequenza due numeri binari positivi in codice naturale A, B

$(A \geq B)$ a partire dai bit meno significativi. Su s si produce un numero $S = (A - B) \cdot 2$. L'assetto è dunque:

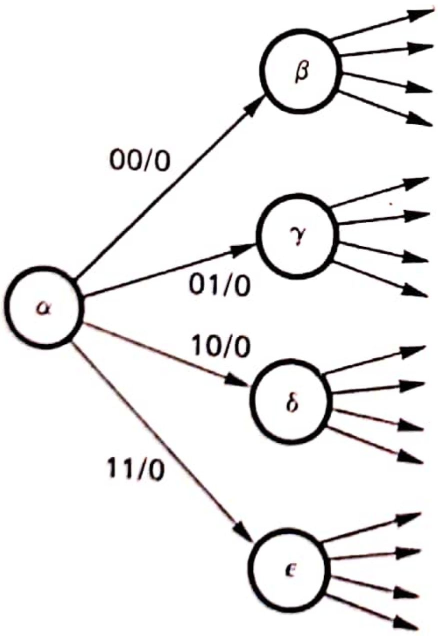


Realizzare la rete.

Cenni alla soluzione. Ogni stato della rete ha associata doppia informazione: valore precedente di $A - B$, che deve essere l'attuale uscita, e valore del riporto.

Per esempio

			−1			−1	
A	0	1	1	0	1	1	0
B	0	0	0	1	1	0	1
$A-B$	0	1	0	1	0	0	1
S	1	0	1	0	0	1	0



	Uscita precedente	Riporto
α	0	0
β	0	0
γ	1	−1
δ	1	0
ϵ	0	0
⋮	⋮	⋮