Esercizi

2.3 Sulla mappa di Karnaugh per quattro variabili rappresentare le funzioni: $x_3\bar{x}_4$; $x_1x_3x_4$; $\bar{x}_2$; $\bar{x}_2 + x_3$; $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

2.4 Sulla mappa per 3, 4 e 5 variabili riportare funzioni somma e funzioni prodotto a piacere.

2.5 Sulla mappa per cinque variabili riportare la funzione f che vale 1 se e solo se due o tre variabili valgono 1. Scegliere gruppi di 1 e di 0 della f che corrispondono a funzioni prodotto e funzioni somma, e scriverne le espressioni algebriche.

2.6 "Inventare" la mappa per sei variabili, definendo in modo completo le regole di adiacenza.

2.3 Implicanti e implicati

Come abbiamo visto, una funzione prodotto p di k variabili è rappresentata sulla mappa da 1 contenuti in un insieme di 2^{n-k} caselle adiacenti. Tale insieme, che nella rappresentazione bidimensionale della mappa ha forma di rettangolo, si dice in generale *sottocubo relativo a p* (l'intera mappa si dice *cubo*): i suoi *vertici* (caselle) corrispondono alle configurazioni per cui k variabili hanno valore costante, e le restanti $n-k$ assumono tutti i valori possibili. Si noti come la definizione di sottocubo sia indipendente dalla rappresentazione su mappe.

Conversamente si constata subito come a ogni sottocubo contenente 1 corrisponda una funzione prodotto: vi è cioè corrispondenza biunivoca tra le due entità.

Definizione Una funzione prodotto p si dice *implicante* di una funzione f, se $f=1$ almeno in tutti i vertici del sottocubo relativo a p.

Scriveremo $p \to f$ (*p implica f*, in senso logico), e diremo che *f copre p*.

Possiamo ora enunciare un'importante proprietà:

Proprietà 1 Data una funzione f e un insieme di suoi implicanti $p_1, p_2, \dots, p_h$, se la f vale 1 in tutti e soli i vertici dei sottocubi relativi ai p_i, essa si può esprimere come:

$$f = p_1 + p_2 + \dots + p_h.$$

La dimostrazione della proprietà 1 discende immediatamente dalla definizione di implicante. La forma di f che appare nella proprietà 1 è di tipo SP (somma di prodotti).

Da quanto detto risulta evidente che ogni forma SP per la f è una somma di implicanti di f. In particolare lo è la prima forma canonica, poiché ogni mintermine coperto da f è implicante di f.

Un implicante $p \to f$ si dice *implicante primo di* f, se non esiste alcun altro implicante $p' \to f$ tale che $p \to p'$ (cioè p' copra p). Intuitivamente gli implicanti primi di f sono associati ai sottocubi contenenti 1 e coperti da f, non contenuti in sottocubi con la stessa proprietà.

Nella figura 2.9a è indicata una funzione z sulla mappa per quattro variabili, e tutti i suoi implicanti primi.

L'importanza degli implicanti primi deriva da alcune proprietà che li riguardano.

Proprietà 2 Per ogni funzione f esiste almeno un insieme di implicanti primi $Q = \{p_1, \ldots, p_q\}$ tale che f può essere espressa come:

$$f = \sum_{p_i \in Q} p_i.$$

Per dimostrare questa proprietà supponiamo che la f sia espressa come somma di implicanti, e tra questi esistano implicanti non primi. Per ciascuno di questi implicanti p_j deve allora esistere un implicante primo p_j', $p_j \to p_j'$ e $p_j' \to f$. Dunque p_j' potrebbe essere sostituito a p_j nella somma senza pregiudicare la realizzazione di f.

In particolare la f può essere espressa come somma di tutti i suoi implicanti primi. In genere non tutti questi implicanti sono indispensabili: per la z di figura 2.9a, per esempio, l'implicante primo $\bar{a}cd$ può essere escluso se si impiegano gli implicanti $\bar{a}\bar{b}d$ e bcd, poiché gli 1 di $\bar{a}cd$ sono rispettivamente coperti da $\bar{a}\bar{b}d$ e bcd (o, se si vuole, $\bar{a}cd \to \bar{a}\bar{b}d + bcd$). Nasce così il concetto di *insieme irridondante di implicanti primi* $R = \{p_1, \ldots, p_r\}$ tale che:

$$f = \sum_{p_i \in R} p_i,$$

ma $f \neq \sum_{p_i \in T} p_i$ per ogni $T \subset R$. (Cioè non esiste $p_j \in R$ tale che:

$$p_j \to \sum_{p_i \in R - \{p_j\}} p_i).$$

La $\sum_{p_i \in R} p_i$ si dirà *forma SP prima irridondante* di f.

Due forme SP prime irridondanti per la z di figura 2.9a sono indicate nella figura 2.9b; ad esse corrispondono due diversi insiemi irridondanti di implicanti primi di z.

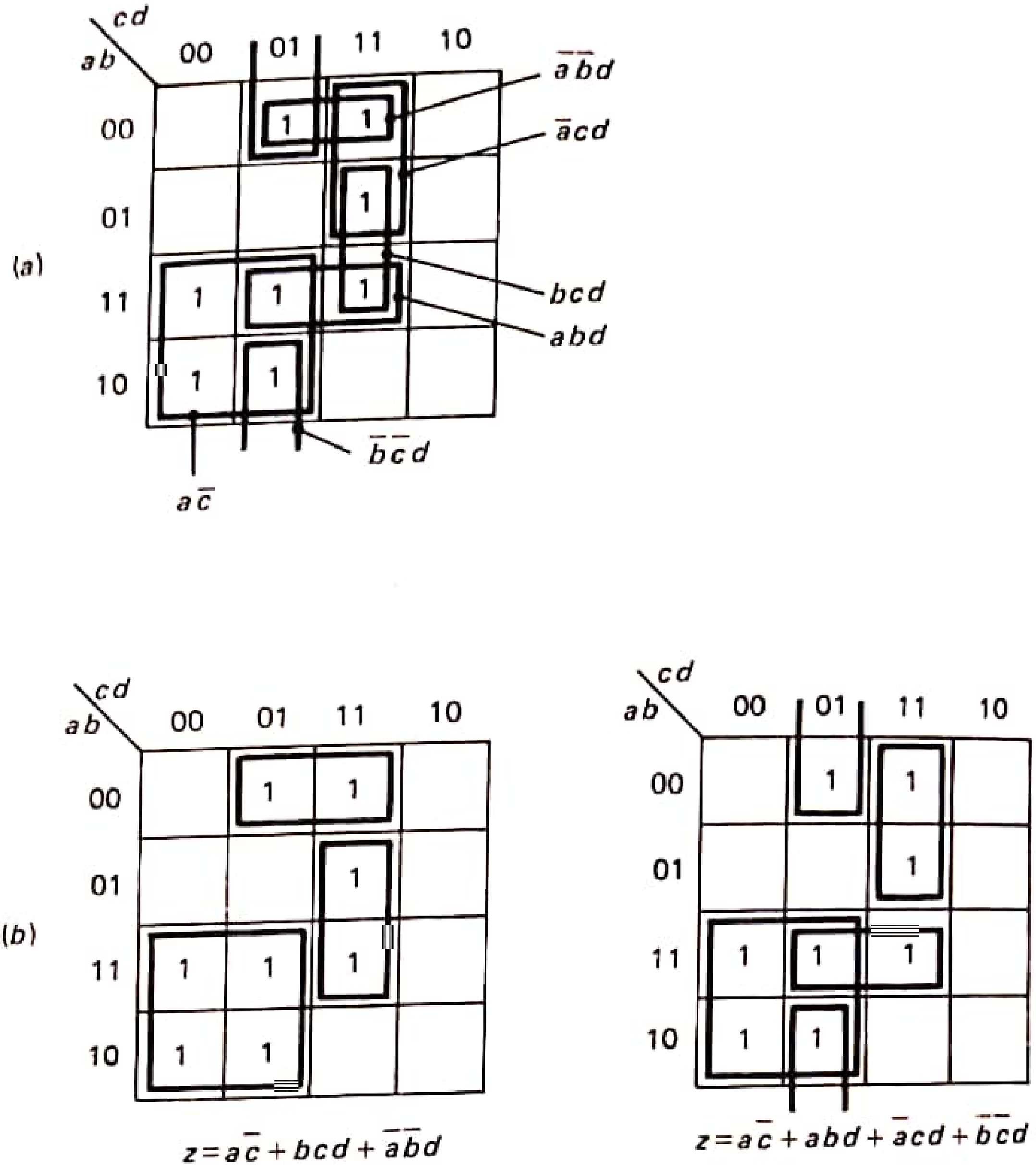


Figura 2.9
(*a*) Implicanti primi. (*b*) Forme SP prime irridondanti.

Possiamo ora enunciare la:

Proprietà 3 Qualsiasi funzione f può essere espressa in forma SP prima irridondante.

Questo enunciato equivale ad affermare che esiste sempre almeno un insieme irridondante di implicanti primi di f, e si dimostra partendo dall'insieme Q della proprietà 2: se un implicante $p_i \in Q$ implica la somma di altri implicanti di Q, p_i può essere tolto da Q (e dalla somma che compare nella proprietà 2) senza pregiudicare la realizzazione della

f. Ripetendo questa operazione sull'insieme $Q - \{p_i\}$ finché è possibile, si ottiene un insieme irridondante.

Mostriamo ora che, se una funzione f è espressa come somma di implicanti primi, la presenza di alcuni di questi può essere indispensabile. Un implicante primo $p \to f$ si dice *implicante primo essenziale di* f se esiste almeno un vertice del sottocubo relativo a p, che non appartiene al sottocubo di alcun altro implicante primo di f. Un implicante primo è cioè essenziale se è l'unico a coprire un dato 1 della f.

Nell'esempio di figura 2.9*a* l'implicante primo $a\bar{c}$ è essenziale per z, perché unico a coprire gli 1 nelle celle 1000 e 1100, e compare nelle forme prime irridondanti della figura 2.9*b*; in questo esempio non vi sono altri implicanti primi essenziali.

Da quanto detto discende la:

Proprietà 4 In ogni insieme Q che soddisfi la proprietà 2, e quindi anche in ogni forma SP prima irridondante, appaiono tutti gli implicanti primi essenziali di f.

La figura 2.10 presenta una funzione che può essere espressa come somma dei soli implicanti primi essenziali, e una funzione che non ha implicanti primi essenziali.

Accanto alla teoria degli implicanti se ne sviluppa una duale, prendendo in considerazione gli zeri anziché gli 1 delle funzioni. Anzitutto

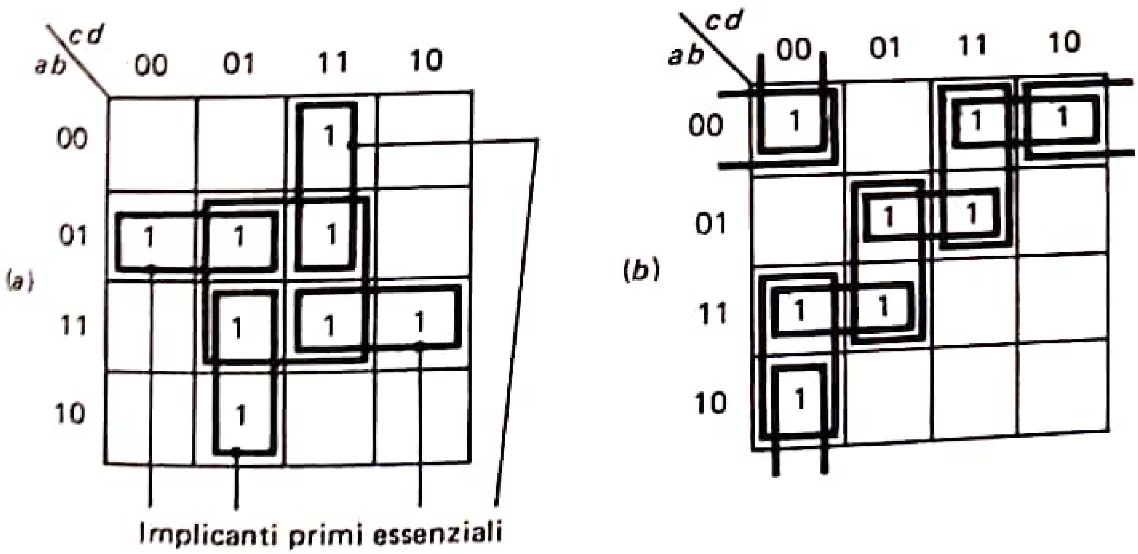


Figura 2.10
(*a*) Funzione coperta dalla somma dei soli implicanti primi essenziali.
(*b*) Funzione priva di implicanti primi essenziali.

si nota che vi è una corrispondenza biunivoca tra funzioni somma di k variabili e sottocubi di 2^{n-k} vertici contenenti zeri.

Definizione Una funzione somma s si dice *implicato* di una funzione f, se $f=0$ almeno in tutti i vertici del sottocubo relativo a s.

Scriveremo $s \leftarrow f$ (s è *implicato* da f).

Un implicato $s \leftarrow f$ si dice *implicato primo di* f, se non esiste alcun altro implicato $s' \leftarrow f$ tale che $s \leftarrow s'$ (cioè tale che gli zeri di s' coprano gli zeri di s).

Infine un implicato primo $s \leftarrow f$ si dice *essenziale* se esiste almeno un vertice del sottocubo relativo a s che non appartiene al sottocubo di alcun altro implicato primo di f.

Nella figura 2.11a è indicata una funzione sulla mappa per cinque variabili, e tutti i suoi implicati primi. Si notino i tre implicati primi essenziali.

Le proprietà 1, 2, 3 e 4 ammettono le loro duali:

Proprietà 1' Data una funzione f e un insieme di suoi implicati $s_1, s_2, \ldots, s_h$, se la f vale 0 in tutti e soli i vertici dei sottocubi relativi agli s_i, essa si può esprimere come:

$$f = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_h .$$

Proprietà 2' Per ogni funzione f esiste almeno un insieme di implicati primi $Q' = \{s_1, \ldots, s_q\}$ tale che f può essere espressa come:

$$f = \prod_{s_i \in Q'} s_i .$$

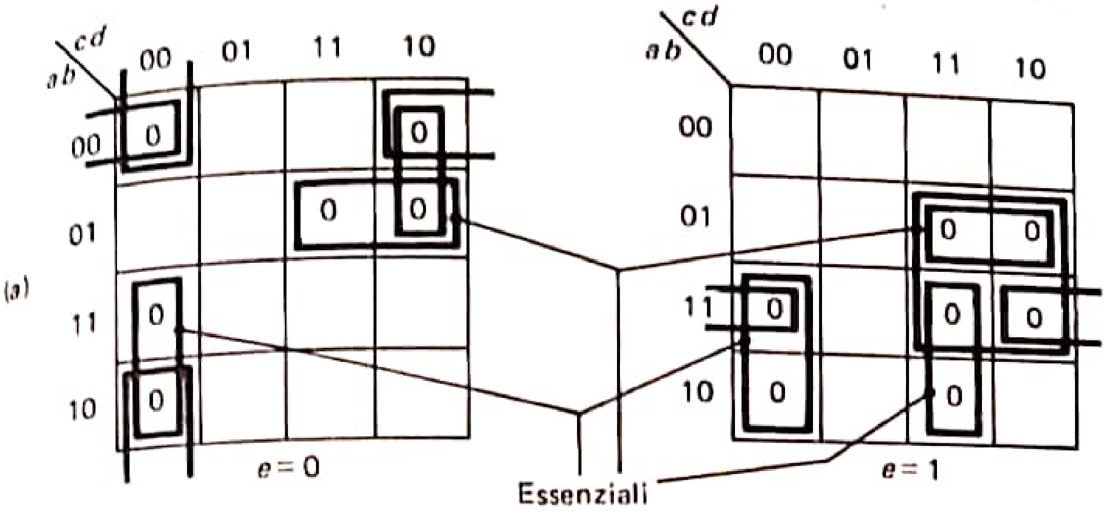
In particolare la f può essere espressa come prodotto di tutti i suoi implicati primi. Tuttavia è sufficiente un *insieme irridondante di implicati primi* $R' = \{s_1, \ldots, s_r\}$ tale che $f = \prod_{s_i \in R'} s_i$, ma $f \neq \prod_{s_i \in T} s_i$ per ogni $T \subset R'$. La $\prod_{s_i \in R'} s_i$ si dice *forma PS prima irridondante* di f. Una forma PS prima irridondante è mostrata nella figura 2.11b.

In conclusione possiamo affermare:

Proprietà 3' Qualsiasi funzione f può sempre essere espressa in forma PS prima irridondante.

Proprietà 4' In ogni insieme Q' che soddisfi la proprietà 2', e quindi anche in ogni forma PS prima irridondante, appaiono tutti gli implicati primi essenziali di f.

(a)

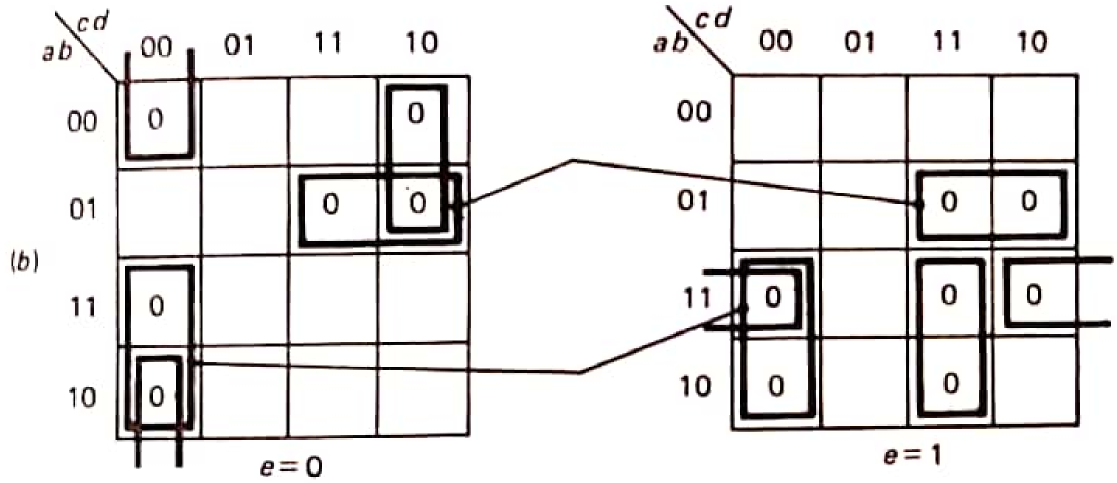


Implicati primi:

$\bar{a}+c+d$, $a+\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{a}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e}$, essenziali;

$b+c+d+e$, $a+b+d+e$, $a+\bar{c}+d+e$, $\bar{a}+\bar{b}+d+\bar{e}$, $\bar{b}+\bar{c}+\bar{e}$.

(b)



$$z=(\bar{a}+c+d)\cdot(a+\bar{b}+\bar{c})\cdot(\bar{a}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e})\cdot(b+c+d+e)\cdot(a+\bar{c}+d+e)\cdot(\bar{a}+\bar{b}+d+\bar{e})$$

Figura 2.11
(*a*) Implicati primi. (*b*) Una forma PS prima irridondante.

Esercizi

2.7 Determinare gli implicanti primi, gli implicanti primi essenziali e una forma SP prima irridondante, per ciascuna delle funzioni:

$\Sigma_4(0, 2, 4, 5, 8, 9, 12, 14)$;

$\Sigma_5(0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15)$;

$\Sigma_4(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$.

2.8 Esistono forme SP prime irridondanti per la funzione di figura 2.9, oltre quelle indicate nella stessa figura?

2.9 Esistono forme PS prime irridondanti per la funzione di figura 2.11, oltre quella indicata nella stessa figura?

2.10 Per funzioni di n variabili, dimostrare che: non esiste alcuna funzione significativa priva di implicanti primi essenziali, per $n=2$; esistono tali funzioni per ogni $n \geqslant 3$.

2.11 Costruire funzioni che abbiano le seguenti proprietà:

1) una funzione di tre variabili priva di implicati primi essenziali;
2) una funzione di quattro variabili la cui espressione algebrica rimanga invariata se si scambiano due variabili;
3) una funzione di cinque variabili per cui esistano almeno tre forme PS prime irridondanti.

2.4 Il problema della sintesi

Nella sintesi di reti combinatorie esiste in genere un'ampia gamma di scelte. Pur ammettendo che la tecnologia sia decisa in più generali ambiti di progetto, e che la ripartizione di un sistema digitale in singole reti preceda il progetto delle reti stesse, rimane il fatto fondamentale che a uno specificato comportamento ai morsetti rispondono molte reti diverse, corrispondenti alle diverse espressioni algebriche di una stessa funzione.

Tra tutte queste reti, la scelta dipende da criteri di ottimalità legati a fattori tecnologici vari e talvolta contingenti, per cui è lecito affermare che non esiste un criterio assoluto. Alcune linee di progetto sono comunque sempre accettate, ed è necessario studiarle, quanto meno per confrontarne i risultati con quelli ottenuti artigianalmente per altre vie.

Ci limiteremo in questo testo a una breve trattazione.

Finché i circuiti logici elettronici sono stati costruiti con componenti discreti, cioè collegando su schede transistori, diodi, resistori ecc., il costo dei componenti era quello predominante nel costo complessivo della rete: ne derivava che il criterio per valutare la complessità (e quindi il costo) di una rete era quello di contarne i blocchi logici, o il numero complessivo di morsetti di ingresso a tali blocchi (corrispondente in genere al numero di transistori e diodi). Il criterio è ovviamente ancora valido per piccole reti costruite con tecnologie discrete.

Si sono poi sviluppate le tecnologie integrate a varie scale, ove i blocchi logici vengono costruiti come unici componenti, oppure gruppi di blocchi logici vengono realizzati in un unico componente, o intere reti logiche, anche piuttosto complesse, vengono realizzate in un unico componente.

Questi componenti, detti circuiti integrati, saranno studiati nel capitolo 8. Per il momento ricordiamo che la loro costruzione è così altamente automatizzata da consentire la produzione a bassissimo costo di esemplari riprodotti in gran numero (§ 1.4).

La principale conseguenza è che il criterio di progetto di una rete varia con il livello di integrazione dei componenti, passando dalla minimizzazione del numero di componenti alla possibilità di impaccare molti componenti su una scheda; all'uniformità delle schede, che in reti da produrre in gran numero di esemplari devono essere costruite in pochi tipi diversi; alla semplicità delle connessioni tra componenti, realizzate come collegamenti stampati sulla scheda; alla ripartizione di componenti tra schede e alla semplicità delle connessioni tra queste.

E' opportuno però notare che, mentre all'aumentare del livello di integrazione il problema del progetto di una rete si trasforma in un insieme di problemi di connessioni, la sintesi tradizionale di reti si ripropone all'interno dei componenti, divenendo costituente essenziale del progetto di circuiti integrati che realizzano funzioni complesse. Cosicché nell'integrazione su larga scala, ove è necessario contenere l'area dei cristalli su cui si realizzano circuiti molto complessi, la minimizzazione del numero di componenti torna a essere un criterio fondamentale.

Poiché tante diverse esigenze non possono dar luogo a un unico metodo di progetto, esamineremo il problema della sintesi nel suo classico contesto delle reti corrispondenti a forme algebriche SP o PS, o delle corrispondenti forme NAND e NOR ottenute per immediata trasformazione delle prime. E' questo l'unico caso in cui la soluzione ottimale si costruisce in modo ragionevolmente semplice e sistematico e, come ancora avremo modo di discutere, è comunque significativo in pratica.

2.5 Sintesi ottima per reti a due livelli

Una rete combinatoria si dice *rete a h livelli* se *h* è il numero massimo di blocchi logici che un segnale, che attraversa la rete, incontra tra morsetto di ingresso e morsetto di uscita. Per esempio, la rete di