Premessa

Espressioni booleane e funzioni

In questa premessa richiamiamo alcuni concetti di algebra di Boole che ci permetteranno nel seguito di studiare in modo efficiente le reti logiche. Richiediamo al lettore una conoscenza elementare dell'algebra, ricordandone alcune proprietà importanti per il nostro studio. Chi desiderasse approfondire l'argomento potrà avvalersi di un testo specializzato.

P.1 Proprietà dell'algebra

Operiamo in un sistema binario, su *variabili* che assumono, a seconda delle circostanze, uno tra due valori indicati con 0, 1, e su *costanti* che mantengono uno di questi stessi valori. Una *funzione* $z = f(x_1, ..., x_n)$ è una legge $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ che fa corrispondere un valore binario di z a ogni combinazione di valori delle variabili $x_1, ..., x_n$. Una funzione può essere assegnata tramite una *tabella* che elenca i valori di z per tutte le suddette combinazioni, che sono ovviamente in numero finito. Esempi di funzioni costruite su una o due variabili sono:

x	$f_1(x)$
0	1
1	0

$x_1 x_2$	$f_2(x_1, x_2)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

$x_1 x_2$	$f_3(x_1, x_2)$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Tali funzioni sono anche descrivibili tramite i ben noti operatori booleani per la *negazione* (o *complementazione*, o NOT), l'OR (o *somma*),

Scansionato con CamScanner

l'AND (o *prodotto*), espressi con i simboli $^{-}$, $+$, $\cdot$:

$$f_1(x)=\bar{x}, \quad f_2(x_1,x_2)=x_1+x_2, \quad f_3(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2.$$

Le f_1, f_2 e f_3 sono cioè rappresentate con (semplicissime) *espressioni booleane*; e come vedremo qualsiasi funzione ammette un'espressione algebrica costruita con gli operatori suddetti, ed eventuali parentesi impiegate nel modo usuale. (Si suole anche stabilire la gerarchia di priorità: $^{-}$, $\cdot$, $+$ tra gli operatori, in modo da eliminare le parentesi quando tale gerarchia determina in modo univoco l'ordine delle operazioni.)

Le proprietà degli operatori $^{-}$, $+$ e $\cdot$ sono completamente definite dalle tabelle delle funzioni f_1, f_2 e f_3. In particolare abbiamo:

P_1) $x+0=x$

P_2) $x+1=1$

P_3) $x+x=x$

P_4) $x+\bar{x}=1$

P_5) $x_1+x_2=x_2+x_1$,

P_6) $(x_1+x_2)+x_3=x_1+(x_2+x_3)$

P_7) $(x_1\cdot x_2)+(x_1\cdot x_3)=x_1\cdot(x_2+x_3)$

P'_1) $x\cdot 1=x$

P'_2) $x\cdot 0=0$

P'_3) $x\cdot x=x$

P'_4) $x\cdot\bar{x}=0$

P'_5) $x_1\cdot x_2=x_2\cdot x_1$

P'_6) $(x_1\cdot x_2)\cdot x_3=x_1\cdot(x_2\cdot x_3)$

P'_7) $(x_1+x_2)\cdot(x_1+x_3)=x_1+(x_2\cdot x_3)$.

Notiamo che le proprietà sono formulate a coppie: P_i e P'_i; esse sono derivabili l'una dall'altra scambiando gli operatori $+$ e $\cdot$ e i simboli 0 e 1. E' questo il *principio di dualità* dell'algebra di Boole, che può essere usato per dimostrare direttamente una proprietà, nota la validità della proprietà duale.

Una proprietà autoduale è la seguente:

P_8) $\bar{\bar{x}}=x$.

Scansionato con CamScanner

Ogni proprietà può essere dimostrata tramite proprietà precedenti, o per ispezione diretta di tutti i casi: per esempio la proprietà P_7 può essere dimostrata valutandone il primo e il secondo membro in tutti i casi possibili (cioè le 2^3 configurazioni di valori di x_1, x_2 e x_3), e verificando che tali membri siano uguali caso per caso. Inoltre una proprietà rimane valida se vi si sostituiscono le variabili con delle espressioni.

Le proprietà P_5, P_6 e P_7, e le loro duali, sono rispettivamente la proprietà commutativa, associativa e distributiva degli operatori $+$ e $\cdot$. E' opportuno sottolineare che la P'_7 non è valida nell'algebra ordinaria, il che causa notevoli disuniformità formali rispetto a quella.

Le proprietà P_6 e P'_6 indicano come l'ordine in cui viene eseguita una serie di $+$, o di $\cdot$, sia inessenziale: è dunque legittimo estendere la definizione di questi operatori a n variabili, ove $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ rappresenta la funzione che vale 0 se e solo se tutte le x_i valgono 0; $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ rappresenta la funzione che vale 1 se e solo se tutte le x_i valgono 1.

Nuove proprietà, utili nella semplificazione di espressioni algebriche sono le seguenti:

P_9) $\quad x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x}_2 = x_1$

P_{10}) $\quad x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1$

P'_9) $\quad (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x}_2) = x_1$

P'_{10}) $\quad x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1$.

Citiamo infine due importanti proprietà note come *teoremi di De Morgan*:

P_{11}) $\quad \overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n$

P'_{11}) $\quad \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \ldots + \overline{x}_n$.

Si noti che questi teoremi non possono essere dimostrati per ispezione diretta poiché riguardano funzioni di n variabili, per n generico: si dimostrano per esempio per induzione.

P.2 Forme canoniche, SP e PS

Nelle tabelle di definizione delle funzioni è utile ordinare le configurazioni di valori delle n variabili come 2^n numeri binari consecutivi,

Scansionato con CamScanner

e riferirsi a una configurazione (o alla riga corrispondente) indicando il numero da essa rappresentato. Si veda la figura P.1, ove è definita una funzione z di tre variabili a, b, c in una tabella di $2^3 = 8$ righe indicate con 0, ..., 7.

Funzioni di particolare importanza sono i mintermini e i maxtermini, definiti come segue.

Un *mintermine* p_i è una funzione che vale 1 in corrispondenza alla sola configurazione i di valori delle variabili.

Un *maxtermine* s_i è una funzione che vale 0 in corrispondenza alla sola configurazione i di valori delle variabili.

Mintermini e maxtermini costruiti su n variabili sono ovviamente 2^n. Esempi di queste funzioni sono indicati in figura P.1.

Si può immediatamente dimostrare che ogni mintermine p_i ammette un'espressione algebrica consistente nell'AND *di tutte le variabili*, ove ogni variabile compare diretta (cioè non negata) se vale 1 nella configurazione i, compare negata se vale 0 in tale configurazione. La corrispondenza tra mintermini e AND di tutte le variabili è biunivoca, poiché ognuna di tali espressioni rappresenta un mintermine.

Dualmente ogni maxtermine s_i ammette un'espressione algebrica consistente nell'OR *di tutte le variabili*, negate se valgono 1 in i, dirette se valgono 0. Conversamente ciascun OR di tutte le variabili rappresenta un maxtermine.

Una funzione qualsiasi può essere rappresentata mediante un'espressione algebrica utilizzando le sue forme canoniche, definite come segue.

La *prima forma canonica* di una funzione f è l'OR di tutti i mintermini p_i, per le configurazioni i ove $f = 1$.

	$a\ b\ c$	z	$p_0 p_2 p_4 p_5 p_6$	$s_1 s_3 s_7$
0	0 0 0	1	1 0 0 0 0	1 1 1
1	0 0 1	0	0 0 0 0 0	0 1 1
2	0 1 0	1	0 1 0 0 0	1 1 1
3	0 1 1	0	0 0 0 0 0	1 0 1
4	1 0 0	1	0 0 1 0 0	1 1 1
5	1 0 1	1	0 0 0 1 0	1 1 1
6	1 1 0	1	0 0 0 0 1	1 1 1
7	1 1 1	0	0 0 0 0 0	1 1 0

$p_0 = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ $\quad s_1 = a + b + \bar{c}$

$p_2 = \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$ $\quad s_3 = a + \bar{b} + \bar{c}$

$p_4 = a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ $\quad s_7 = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$

$p_5 = a \cdot \bar{b} \cdot c$

$p_6 = a \cdot b \cdot \bar{c}$

Figura P.1
Una funzione $z(a, b, c)$, ed esempi di mintermini e maxtermini.

Scansionato con CamScanner

La *seconda forma canonica* di una funzione f è l'AND di tutti i maxtermini s_i, per le configurazioni i ove $f=0$.

La legittimità di rappresentare funzioni nelle suddette forme è dimostrata in modo classico nell'algebra di Boole, e deriva immediatamente dalle proprietà degli operatori $+, \cdot, \bar{\ }$.

Per la funzione z della figura P.1 le forme canoniche sono le seguenti (l'operatore prodotto può non essere indicato se non vi sono ambiguità):

$$z=\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{a}b\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}c+ab\bar{c};$$

$$z=(a+b+\bar{c})(a+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}).$$

Le forme canoniche si rappresentano anche con notazione contratta. Per le due forme ora viste sarà:

$$z=\Sigma_3(0,2,4,5,6),$$

$$z=\Pi_3(1,3,7),$$

ove l'indice 3 apposto a Σ e Π indica il numero di variabili. (Si noti che tale indice è indispensabile: per esempio $\Pi_3(1,3,7)\neq\Pi_4(1,3,7)$.)

Le forme canoniche possono essere semplificate mediante le proprietà dell'algebra. Consideriamo per esempio la prima forma canonica della funzione z:

$$\begin{aligned}
z&=\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{a}b\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}c+ab\bar{c}\\
&\overset{P_9}{=}\bar{a}\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}c+ab\bar{c}\\
&\overset{P_3}{=}\bar{a}\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}c+ab\bar{c}\\
&\overset{P_9}{=}\bar{a}\bar{c}+a\bar{b}+a\bar{b}\bar{c}+ab\bar{c}\\
&\overset{P_9}{=}\bar{a}\bar{c}+a\bar{b}+a\bar{c}\\
&\overset{P_9}{=}\bar{c}+a\bar{b}.
\end{aligned}$$

Per la seconda forma canonica avremo:

$$\begin{aligned}
z&=(a+b+\bar{c})(a+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\\
&\overset{P'_9}{=}(a+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\\
&\overset{P'_{10}}{=}(a+\bar{c})(a+\bar{c}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\\
&\overset{P'_9}{=}(a+\bar{c})(\bar{b}+\bar{c}).
\end{aligned}$$

Scansionato con CamScanner

Si noti come tali riduzioni possano essere ottenute impiegando proprietà diverse, e come richiedano fantasia e intuito: per esempio riducendo la prima forma canonica della z si è applicata la P_3 per aggiungere il mintermine $a\bar{b}\bar{c}$, in vista di un impiego futuro che richiedeva la doppia apparizione di tale mintermine nell'espressione. Nel seguito esporremo procedimenti più sistematici per la semplificazione di espressioni.

La prima forma canonica è detta di *tipo SP* (somma di prodotti), perché ottenuta componendo con l'operazione OR un insieme di risultati di operazioni AND. Sono parimenti forme SP tutte quelle sopra ottenute nella semplificazione della prima forma canonica della funzione z, e in particolare la forma finale $\bar{c}+a\bar{b}$ (il primo termine $\bar{c}$ costituisce un caso limite di AND a una sola variabile).

Dualmente, la seconda forma canonica è detta di *tipo PS* (prodotto di somme), e sono dello stesso tipo, per esempio, tutte le forme ottenute nella semplificazione della seconda forma canonica della z.

P.3 Completezza funzionale e operatori NAND e NOR

L'esistenza delle forme canoniche è una dimostrazione che gli operatori $+$, $\cdot$ e $^-$ costituiscono un insieme *funzionalmente completo*, nel senso che qualsiasi funzione può essere rappresentata in una forma algebrica che impiega unicamente questi tre operatori.

Esistono vari insiemi di operatori, funzionalmente completi. In particolare, negando entrambi i membri della P_{11} costruita su due variabili abbiamo:

$$x_1+x_2=\overline{(\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2)},$$

che indica come l'OR possa essere ottenuto per mezzo di AND e complementazione. Da ciò deriva che, essendo funzionalmente completa la scelta di operatori $+, \cdot, ^-$, lo è anche la scelta $\cdot, ^-$.

Analogamente, negando entrambi i membri della P'_{11} si ricava:

$$x_1\cdot x_2=\overline{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)},$$

che indica come anche la scelta di operatori $+, ^-$, sia funzionalmente completa.

Possiamo di converso notare che la scelta $+, \cdot$ non è funzionalmente completa, osservando che la semplicissima funzione di una variabile

Scansionato con CamScanner

$f(x)=\overline{x}$ vale 0 se $x=1$, il che non è ottenibile con alcuna combinazione degli operatori + e · applicati a x.

Definiamo ora due nuovi operatori detti NAND e NOR (simboli | e ↓), attraverso le seguenti tabelle:

$x_1 x_2$	$x_1 \| x_2$
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

NAND

$x_1 x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	0

NOR

E' immediato constatare che:

$$P_{12})\quad x_1 | x_2 = \overline{(x_1 \cdot x_2)}$$

$$P_{13})\quad x_1 \downarrow x_2 = \overline{(x_1 + x_2)}$$

(in effetti i nomi NAND e NOR sono contrazioni per NOT-AND e NOT-OR).

L'interesse per questi operatori risiede nel fatto che ciascuno di essi costituisce singolarmente una scelta funzionalmente completa. Infatti:

$\overline{x} \overset{P_{12}}{=} x|x$ (indicato anche come $|x$, o semplicemente come $\overline{x}$),

$x_1 \cdot x_2 \overset{P_{12}}{=} |(x_1|x_2)$;

cioè si possono realizzare gli operatori · e ¯ mediante |. Analogamente:

$\overline{x} \overset{P_{13}}{=} x \downarrow x$ (indicato anche come $\downarrow x$, o semplicemente come $\overline{x}$),

$x_1 + x_2 \overset{P_{13}}{=} \downarrow(x_1 \downarrow x_2)$;

cioè si possono realizzare gli operatori + e ¯ mediante ↓.

E' possibile inoltre dimostrare che NAND e NOR sono gli unici operatori che costituiscono singolarmente scelte funzionalmente complete.

Analogamente a quanto fatto per gli operatori + e ·, possiamo estendere la definizione di NAND e NOR a n variabili, riscrivendo le P_{12} e P_{13} come:

$$P^*_{12})\quad x_1 | x_2 | \ldots | x_n = \overline{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)}$$

$$P^*_{13})\quad x_1 \downarrow x_2 \downarrow \ldots \downarrow x_n = \overline{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}.$$

Scansionato con CamScanner

Semplici manipolazioni algebriche permettono di trasformare le espressioni che impiegano operatori +, · e ¯ in espressioni NAND e NOR. Importante è la trasformazione delle forme SP e PS, che si ottiene attraverso la proprietà P_8, come ora indicheremo utilizzando alcune forme della funzione z studiata in precedenza. Per le forme SP:

$$z = \bar{a}\bar{c} + a\bar{b} + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c}$$

$$\overset{P_8}{=} \overline{\overline{\bar{a}\bar{c} + a\bar{b} + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c}}}$$

$$\overset{P_{11}}{=} \overline{\overline{(\bar{a}\bar{c})} \cdot \overline{(a\bar{b})} \cdot \overline{(a\bar{b}\bar{c})} \cdot \overline{(ab\bar{c})}}$$

$$\overset{P_{12}^{*}}{=} (\bar{a}|\bar{c})|(a|\bar{b})|(a|\bar{b}|\bar{c})|(a|b|\bar{c})$$

$$= ((|a)|(|c))|(a|(|b))|(a|(|b)|(|c))|(a|b|(|c)).$$

Per le forme PS:

$$z = (a + \bar{c})(\bar{b} + \bar{c})$$

$$\overset{P_8}{=} \overline{\overline{(a + \bar{c})(\bar{b} + \bar{c})}}$$

$$\overset{P'_{11}}{=} \overline{\overline{(a + \bar{c})} + \overline{(\bar{b} + \bar{c})}}$$

$$\overset{P_{13}^{*}}{=} (a \downarrow \bar{c}) \downarrow (\bar{b} \downarrow \bar{c})$$

$$= (a \downarrow (\downarrow c)) \downarrow ((\downarrow b) \downarrow (\downarrow c)).$$

Il meccanismo utilizzato per trasformare le forme SP e PS rispettivamente in forme NAND e NOR, basato sulla "doppia complementazione" (P_8) e successiva applicazione di teoremi di De Morgan, può essere all'atto pratico saltato costruendo direttamente il risultato finale: questo si ottiene *sostituendo tutti gli operatori con NAND, nelle forme SP, e con NOR nelle forme PS* (si vedano gli esempi precedenti). E' però indispensabile far bene attenzione a due casi limite in cui è facile sbagliare: li discutiamo per le forme SP, lasciando al lettore lo studio, identico, delle forme PS.

1) Uno dei termini cui è applicato l'operatore OR è costituito da una sola variabile x. Tale termine deve considerarsi anch'esso un prodotto, e quindi nella trasformazione si deve applicare un operatore NAND anche alla x, complementandone così la forma originale. Per

Scansionato con CamScanner

esempio:

$$z=\bar{c}+a\bar{b}=\left\{\overline{\overline{\bar{c}+a\bar{b}}}=\overline{\overline{(\bar{c})}\cdot\overline{(a\bar{b})}}\right\}=(|(\bar{c}))|(a|\bar{b})=c|(a|\bar{b}).$$

2) La forma SP è costituita da un unico termine, consistente in un prodotto p. L'intera forma deve comunque considerarsi una somma, e si deve applicare un operatore NAND all'espressione che si ottiene trasformando p. Per esempio:

$$w=ab\bar{c}=\overline{\overline{ab\bar{c}}}=|(a|b|\bar{c}).$$

Concludiamo la discussione sugli operatori NAND e NOR notando che le proprietà dell'algebra che li riguardano sono spesso formalmente diverse da quelle viste per AND, OR e negazione. In particolare vale ancora la proprietà commutativa:

$$P_{14})\quad x_1|x_2=x_2|x_1,$$

$$P'_{14})\quad x_1\downarrow x_2=x_2\downarrow x_1;$$

mentre non vale la proprietà associativa:

$$(x_1|x_2)|x_3\neq x_1|(x_2|x_3),$$

$$(x_1\downarrow x_2)\downarrow x_3\neq x_1\downarrow(x_2\downarrow x_3);$$

come il lettore potrà per proprio conto dimostrare.

P.4 Enumerazione di funzioni

Per concludere, ricordiamo che esistono $2^{(2^n)}$ funzioni distinte di n variabili. Infatti le configurazioni delle variabili sono 2^n, e quindi esi-

a	b	f_0 = costante 0	$f_1=a\cdot b$	$f_2=p_2$	$f_3=a$	$f_4=p_1$	$f_5=b$	$f_6=a\oplus b$	$f_7=a+b$	$f_8=a\downarrow b$	$f_9=a\equiv b$	$f_{10}=\bar{b}$	$f_{11}=s_1$	$f_{12}=\bar{a}$	$f_{13}=a\rightarrow b$	$f_{14}=a\mid b$	f_{15} = costante 1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

n (variables a, b); 2^n (rows); $2^{(2^n)}$ (functions)

Figura P.2
Le funzioni di 2 variabili, e le più semplici espressioni che le rappresentano.

Scansionato con CamScanner

stono tante funzioni quante sono le disposizioni con ripetizione di due elementi (0 e 1 della funzione) a 2^n a 2^n. Le 16 funzioni di 2 variabili sono riportate nella figura P.2. Notiamo che le funzioni f_1, f_7, f_8, f_{10}, f_{12} e f_{14} rappresentano i principali operatori logici. La funzione $f_6 = a \oplus b$ rappresenta l'operatore *OR esclusivo* ($f_6 = 1$ se e solo se $a \neq b$). La $f_9 = a \equiv b$ rappresenta l'*identità* ($f_9 = 1$ se e solo se $a = b$). La $f_{13} = a \to b$ rappresenta l'*implicazione* ($f_{13} = 0$ se e solo se $a = 1$ e $b = 0$).

Esercizi

Questi esercizi sono utili come breve esercitazione per chi non avesse dimestichezza con l'algebra di Boole.

P.1 Dimostrare che le seguenti identità sono vere:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \bar{x}_1x_3 = x_1x_2 + \bar{x}_1x_3;$$
$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_3) = (x_1 + x_2)(\bar{x}_1 + x_3).$$

P.2 Impiegando le proprietà dell'algebra, cercare le forme più semplici possibili per le espressioni:

1) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}bd + bcd + abd$

Soluzione: $\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{c}\bar{d} + bd$;

oppure: $\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c} + bd$.

2) $(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + b)$

Soluzione: $\bar{a}\bar{b}$.

P.3 Esprimere le espressioni indicate come soluzioni nell'esercizio P.2 in forma NAND o NOR.

Soluzione: è banale, e non indicata perché il lettore la trovi da solo, per le due prime espressioni; è delicata per l'espressione $\bar{a} + \bar{b}$, che può essere vista sia come forma PS (con un solo fattore) sia come forma SP (con termini di una variabile). Si ha, nei due casi:

$$\bar{a} + \bar{b} = \downarrow(\bar{a} \downarrow \bar{b}),$$
$$\bar{a} + \bar{b} = a | b.$$

P.4 Esistono dieci operatori distinti e significativi per legare due variabili. Perché? (La risposta si può ricavare da un esame della fig. P.2.)

Scansionato con CamScanner