

Capitolo 2

Descrizione e sintesi di reti combinatorie

Le reti combinatorie, come già è stato detto, hanno la proprietà che i segnali di uscita dipendono unicamente dai segnali di ingresso nell'istante considerato, a parte il ritardo proprio della rete. Associando le variabili binarie x_1, x_2, \dots, x_n ai segnali di ingresso, e le variabili binarie z_1, z_2, \dots, z_m ai segnali di uscita, il comportamento ai morsetti della rete si specifica tramite una tabella del tutto analoga a quella che si impiega per assegnare le funzioni booleane (vedi Premessa), ove x_1, x_2, \dots, x_n rappresentano le variabili indipendenti, e per ciascuna configurazione dei valori di queste, si riportano nella tabella i valori di z_1, z_2, \dots, z_m . *Ciascuna variabile di uscita z_i è quindi esprimibile in forma algebrica, come espressione booleana delle variabili di ingresso.*

2.1 Blocchi e reti combinatorie

Le reti combinatorie elementari, dette *blocchi*, realizzano di solito funzioni semplicissime, esprimibili con i singoli operatori dell'algebra di Boole. Esistono diversi simboli per indicare tali blocchi: nella figura 2.1 sono riportati i simboli usati in questo testo, e altri simboli ritenuti standard in alcuni ambienti.

Impiegheremo di qui in avanti i blocchi combinatori come elementi costruttivi delle reti, senza entrare nel merito della loro struttura interna. Negli schemi indicheremo i collegamenti tra blocchi con linee, come d'uso nei circuiti elettrici.

Consideriamo la rete logica di figura 2.2, ottenuta dall'interconnessione di vari blocchi combinatori, e tentiamo di effettuare l'*analisi*

Definizione Si dice *ciclo* in una rete un percorso chiuso che attraversa k blocchi ($k \geq 1$) tutti nella loro direzione di funzionamento.

Possiamo quindi affermare che la rete di figura 2.2 non ha cicli. Poiché in assenza di cicli si può sempre condurre un procedimento di analisi del tipo descritto, concludiamo che *tutte le reti logiche composte di blocchi combinatori e prive di cicli sono reti combinatorie*.

Inversamente all'analisi ora descritta, la *sintesi* di una rete logica consiste nell'ottenere la sua struttura in blocchi logici e loro interconnessioni, partendo dal comportamento ai morsetti. La parentela tra funzioni logiche e reti combinatorie fornisce immediatamente soluzioni al problema della sintesi di queste reti: dalla tabella dei valori dei segnali si esprime infatti ogni variabile di uscita come funzione logica delle variabili di ingresso, e si ricava la struttura della rete realizzando tali funzioni mediante blocchi combinatori interconnessi.

Poniamo per esempio che la tabella riportata in figura 2.3a descriva il comportamento ai morsetti di una rete combinatoria a tre ingressi a , b , c e un'uscita z . Diverse espressioni algebriche per la funzione z , già costruite nella Premessa (fig. P.1 e conseguente analisi), sono per esempio:

$$z = (a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \text{ seconda forma canonica;}$$

$$z = \bar{c} + a\bar{b};$$

$$z = (a \downarrow (\downarrow c)) \downarrow ((\downarrow b) \downarrow (\downarrow c)).$$

Possiamo quindi realizzare le reti corrispondenti a tali forme, mostrate nelle figure 2.3b, c e d; similmente possiamo realizzare reti corrispondenti a qualsiasi altra forma algebrica della z . Tutte queste reti sono *equivalenti* agli effetti esterni (salvo per il comportamento in transitorio che discuteremo nel § 2.10). Nel seguito studieremo modi per scegliere la realizzazione di z che soddisfi opportuni criteri di ottimalità.

La legittimità del procedimento di sintesi ora descritto, per qualsiasi rete combinatoria, mostra come queste reti siano sempre realizzate con interconnessioni di blocchi prive di cicli, che si ottengono traducendo in struttura di rete le espressioni booleane delle variabili di uscita in funzione esplicita delle variabili di ingresso.

Combinando i risultati dell'analisi e della sintesi, possiamo quindi

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>z</i>
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(a)

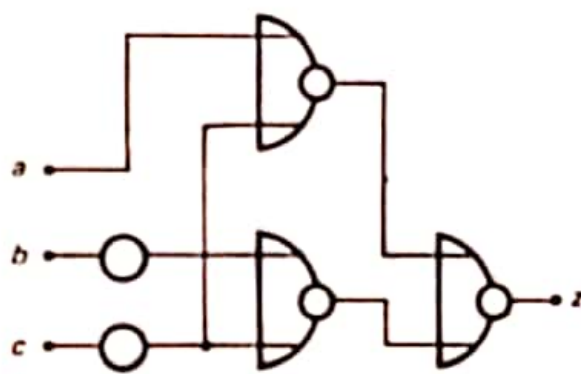
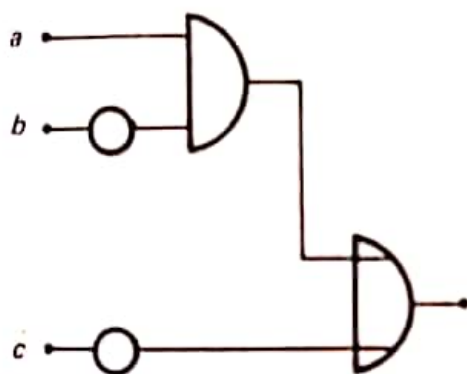
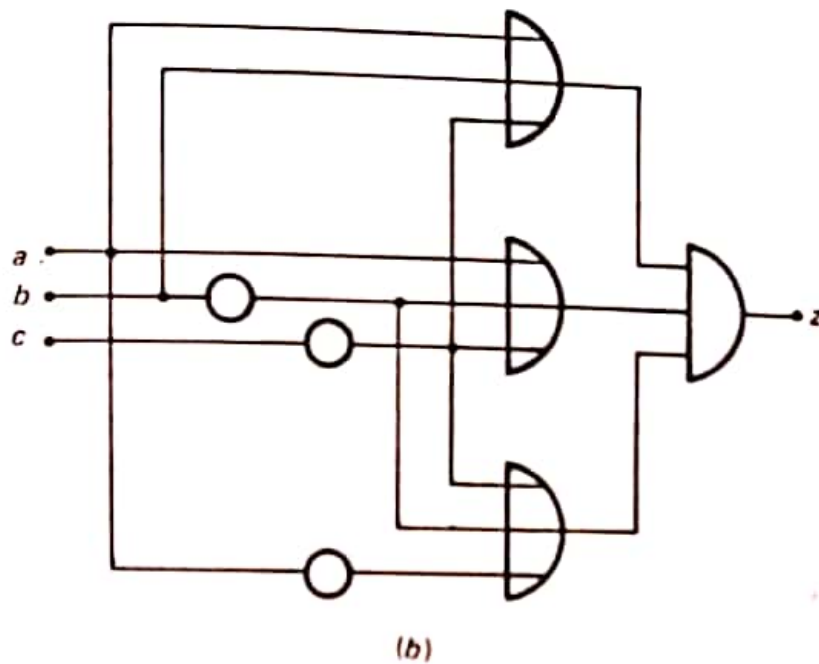


Figura 2.3

(a) Comportamento ai morsetti di una rete combinatoria; (b), (c), (d) tre realizzazioni per la rete, corrispondenti a tre espressioni di z .

affermare che *la famiglia delle reti combinatorie coincide con quella delle reti prive di cicli*.

Notiamo infine che, in corrispondenza agli insiemi di operatori booleani funzionalmente completi, esistono insiemi di blocchi combinatori funzionalmente completi: in particolare la possibilità di realizzare ogni rete combinatoria con soli blocchi NAND, o con soli blocchi NOR, rende conto della grande importanza che questi elementi costruttivi hanno assunto nella tecnica, per ovvi motivi di modularità e standardizzazione.

Esercizi

2.1 Disegnare alcune reti logiche equivalenti, a tre ingressi a , b , c e un'uscita z , che abbiano il seguente comportamento ai morsetti:

a	b	c	z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

2.2 In una rete logica a tre ingressi a , b , c e un'uscita z il segnale z deve valere 1 se e solo se due segnali di ingresso valgono 1.

Convincerli del fatto che deve trattarsi di una rete combinatoria.

Determinare due reti corrispondenti a una espressione NAND e una espressione NOR di z .

2.2 Mappe, funzioni prodotto e funzioni somma

Lo studio delle reti combinatorie ha come principale obiettivo la realizzazione (sintesi) di reti che rispondano a un assegnato comportamento ai morsetti. A tale scopo è opportuno introdurre le *mappe di Karnaugh*, che si impiegano per specificare funzioni logiche in luogo della tabella di definizione.

Una mappa per n variabili ha 2^n caselle, ove si trascrivono i valori della funzione f (in genere vi si riportano solo gli 1, o solo gli 0, di f). La figura 2.4 indica le mappe per due, tre, quattro e cinque variabili; le caselle corrispondono alle 2^n configurazioni di valori delle variabili, secondo un ordine opportuno ove l'*adiacenza logica* tra due configurazioni (cioè la proprietà di differire nel valore di una sola variabile) si riflette in *adiacenza geometrica* tra due caselle con un lato in comune. Perché questa regola sia sempre rispettata si deve ammettere che i due lati verticali del contorno della mappa si tocchino (cioè la mappa sia avvolta su sé stessa come su un cilindro), e così pure i due lati orizzontali. Nella mappa per cinque variabili, inoltre, sono adiacenti le caselle che occupano uguale posizione nelle mezze mappe per $x_5 = 0$ e $x_5 = 1$.

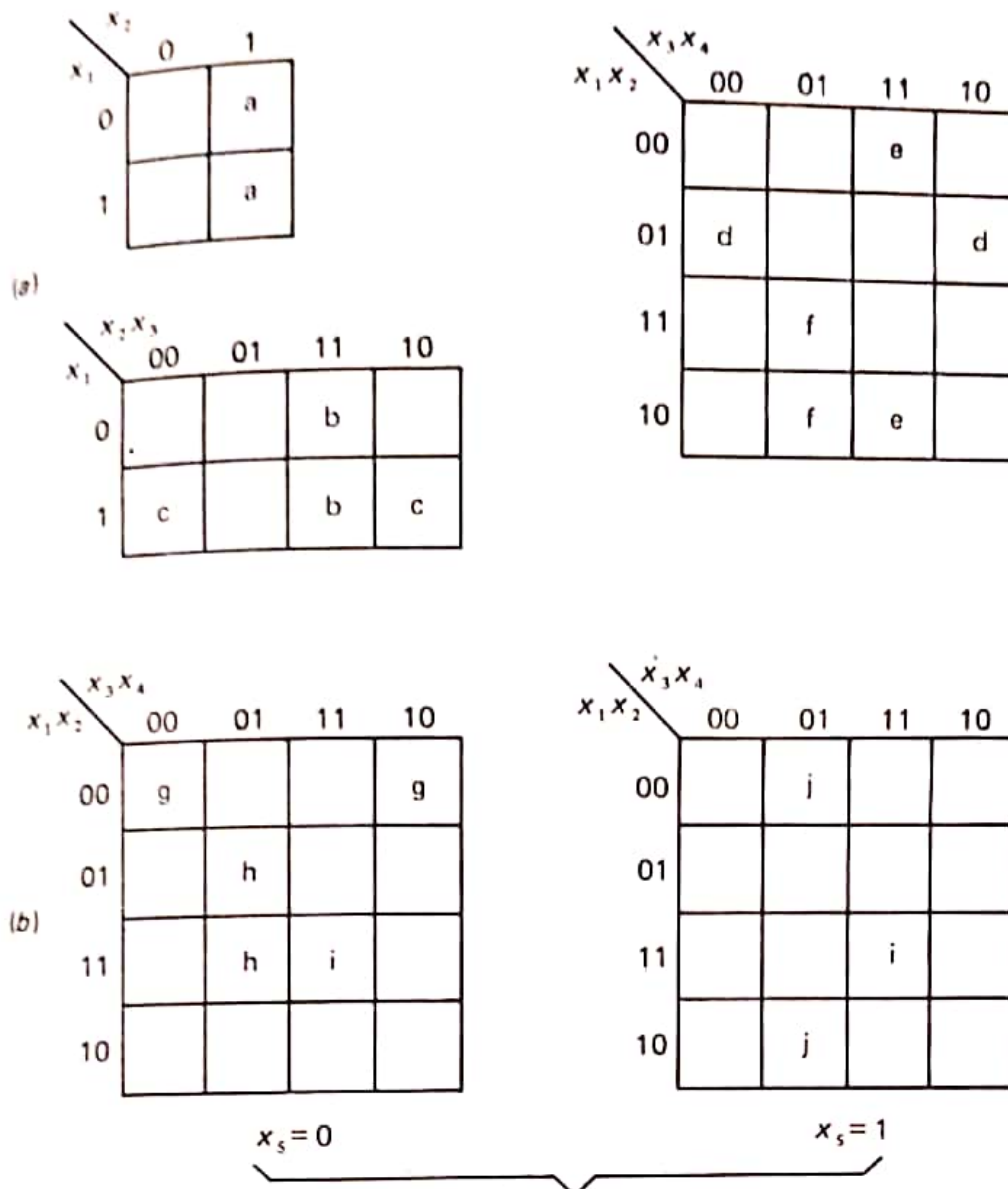


Figura 2.4

Mappe di Karnaugh con indicazione di alcune coppie di celle adiacenti.

(a) Mappe per due, tre e quattro variabili. (b) Mappa per cinque variabili.

Nella figura 2.4 alcune coppie di celle adiacenti sono contrassegnate dalla stessa lettera.

Come vedremo, il concetto di adiacenza gioca un ruolo importante nello studio delle funzioni logiche.

Per esempio la funzione z della figura 2.3a è rappresentata (attraverso i suoi 1) nella mappa di tre variabili della figura 2.5. Vi si contano cinque situazioni di adiacenza tra celle contenenti 1.

Notiamo che una mappa per n variabili è composta di due mappe

bc	00	01	11	10
a				
0	1			1
1	1	1		1

Figura 2.5

La funzione z di figura 2.3a.

per $n-1$ variabili accostate l'una all'altra, relative ai valori 0 e 1 della nuova variabile. Perciò la funzione $f = x_i$ è rappresentata, sulla mappa, da 1 nella semimappa relativa a $x_i = 1$ (e da zeri nella semimappa relativa a $x_i = 0$). Similmente la funzione $f = \bar{x}_i$ è rappresentata da 1 nella semimappa per $x_i = 0$ (e da zeri nell'altra).

Una funzione f espressa dall'AND di k variabili dirette o negate, $1 \leq k \leq n$, sarà allora rappresentata sulla mappa da 1 nella zona intersezione delle semimappe relative alle singole k variabili (e zeri altrove). Tale zona, che si individua cercando sulla mappa le caselle per cui le variabili dirette della f valgono 1, e le negate valgono 0, ha la forma di un "rettangolo" di 2^{n-k} caselle adiacenti. La f è detta *funzione prodotto* e comprende come caso particolare i mintermini, per $k = n$. Esempi di funzioni prodotto su diverse mappe sono riportati nelle figure 2.6, 2.7 e 2.8.

Si noti che, per una funzione prodotto f che non contiene la variabile x_i la zona di 1 si spezza in due rettangoli identici sulle semimappe per $x_i = 0$ e $x_i = 1$. Ciò è evidente sulle mappe per cinque variabili (fig. 2.8), dove la zona di 1 di una funzione indipendente dalla variabile e è di fatto composta da due rettangoli, contenuti nelle semimappe per $e = 0$ e $e = 1$.

Dualmente, una funzione f espressa dall'OR di k variabili dirette o negate, $1 \leq k \leq n$, è rappresentata sulla mappa da zeri in un "rettangolo" di 2^{n-k} celle adiacenti, che si trovano nell'intersezione delle semimappe relative alle negazioni delle variabili di f : notiamo infatti che f ha 0 dove \bar{f} ha 1; per il primo teorema di De Morgan si ha

$$\bar{f} = \overline{x_1 + \dots + x_k} = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_k,$$

che si può trattare come funzione prodotto. La f è detta *funzione somma* e comprende i maxtermini come caso particolare. Esempi di funzioni somma sono riportati nelle figure 2.6, 2.7 e 2.8.

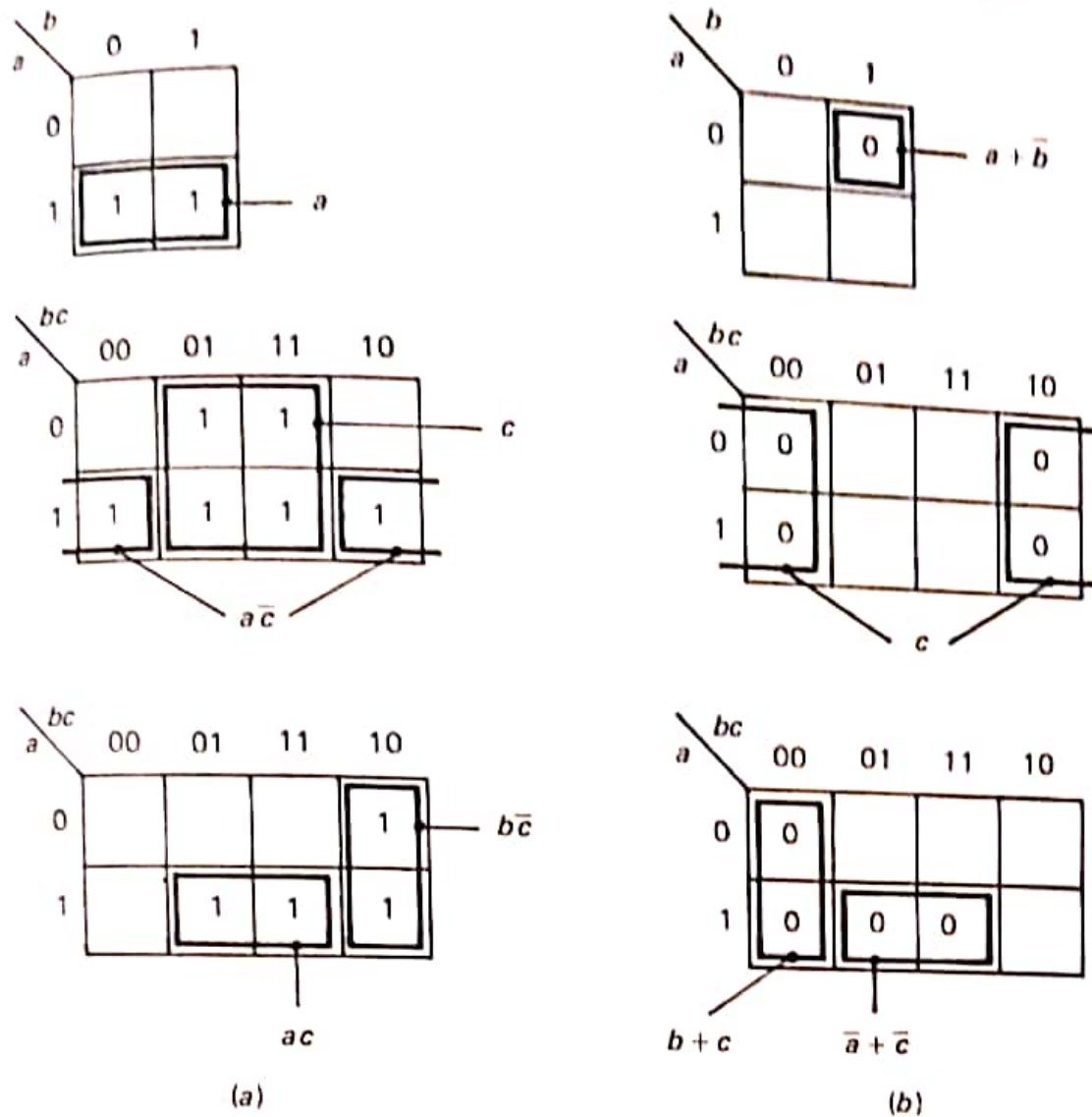


Figura 2.6

Funzioni sulle mappe per due e tre variabili: (a) funzioni prodotto; (b) funzioni somma.

Le mappe di Karnaugh possono essere costruite per sei variabili al costo di una certa difficoltà nel determinare le adiacenze, e non sono comunque utilizzabili per $n > 6$, poiché le regole di adiacenza diverrebbero troppo complicate.

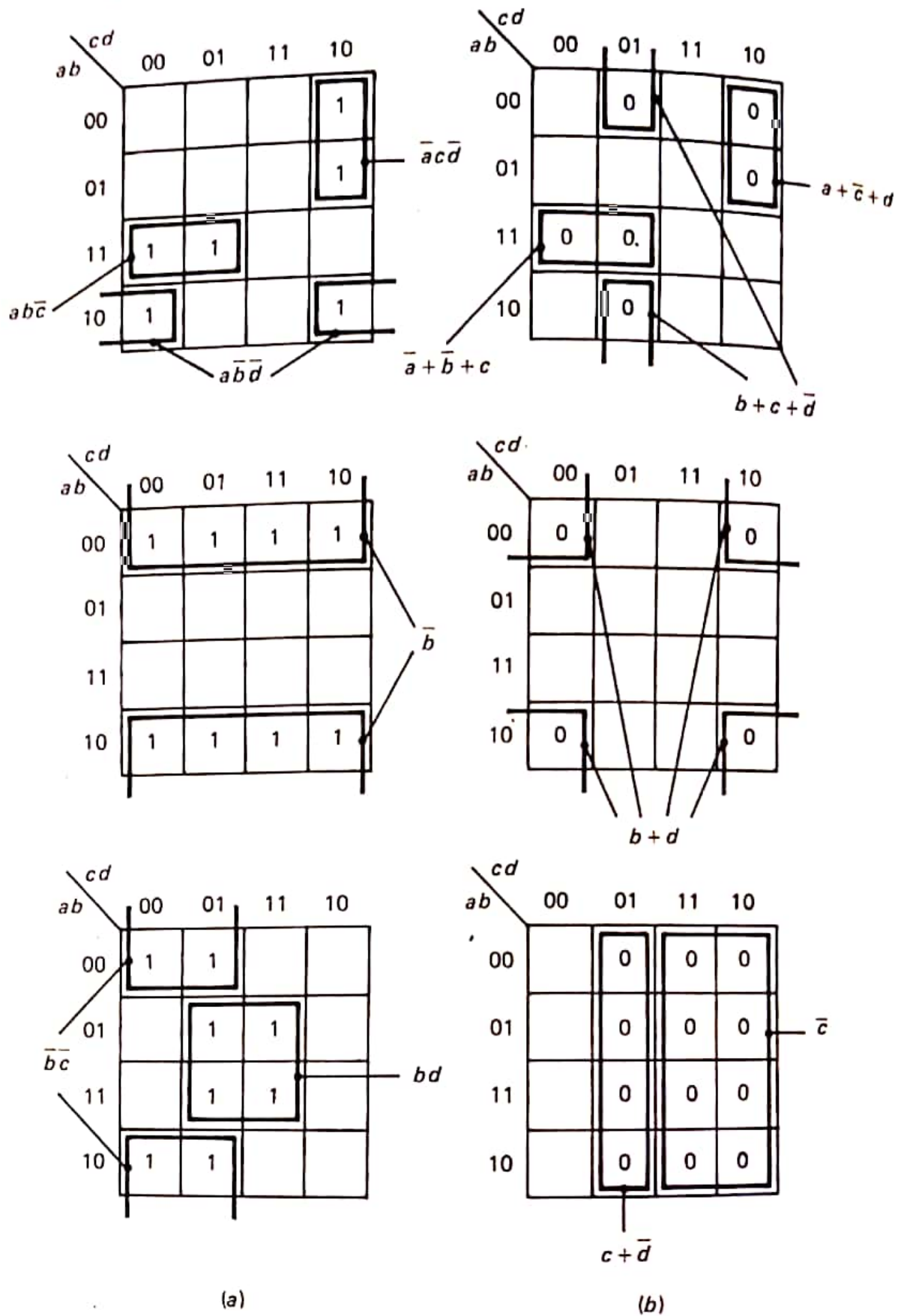


Figura 2.7

Funzioni sulla mappa per quattro variabili: (a) funzioni prodotto; (b) funzioni somma.

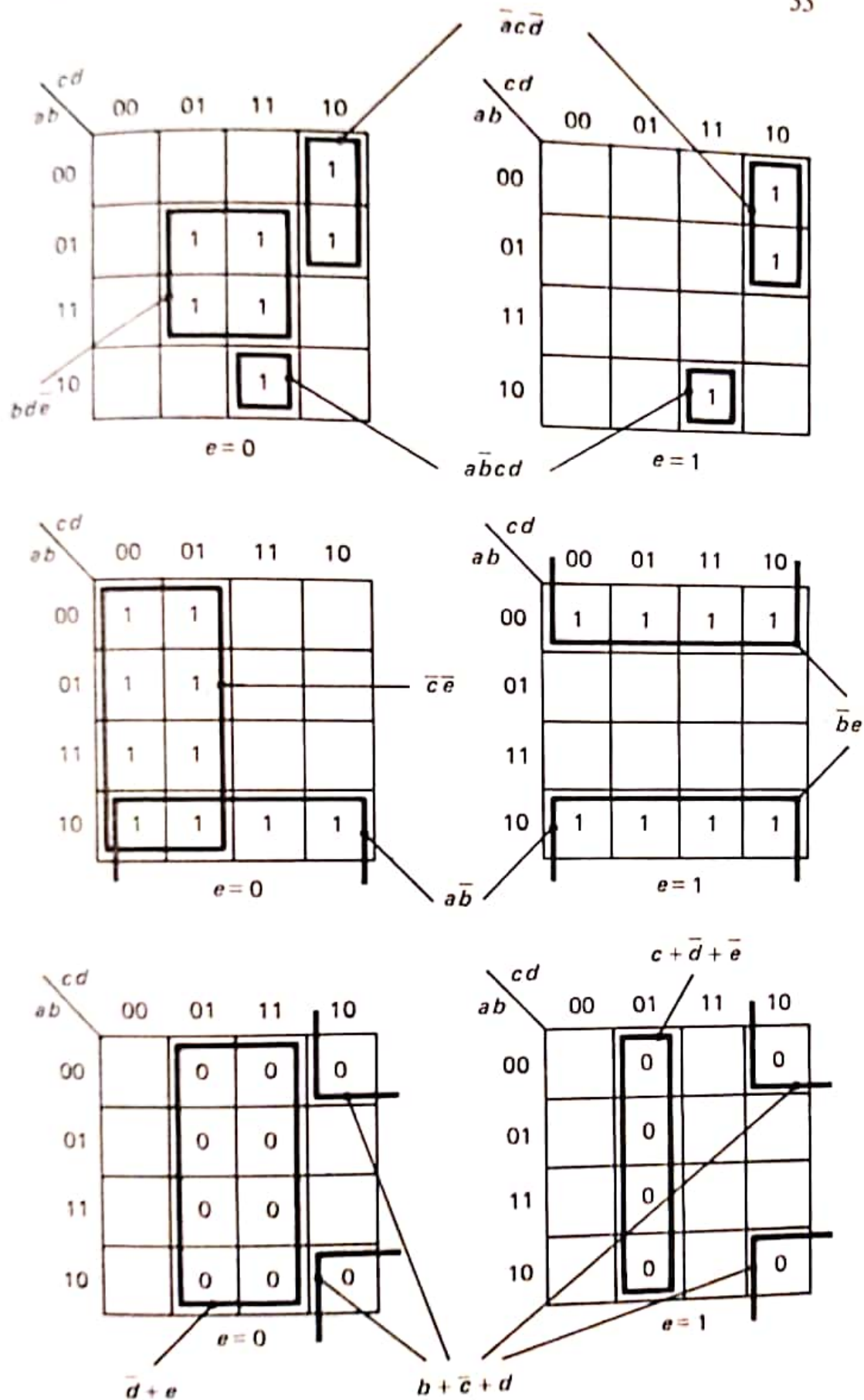


Figura 2.8
Funzioni prodotto e funzioni somma sulla mappa per cinque variabili.