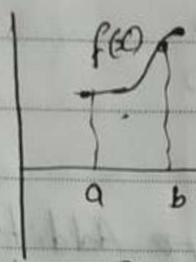
Numerical Integration:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$ الغرض: إيجاد القيمه التقريبية للتكامل

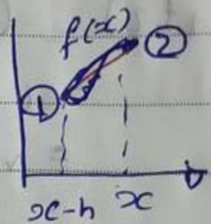


طريقة حل المساحة

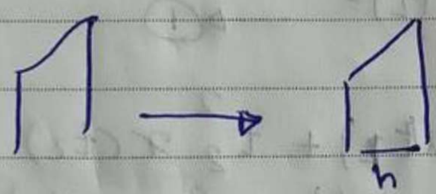
عايزين نحسب المساحه تحت منحنى الداله

1 Trapezoidal Rule:

طريقه اشباه المنحرفات



هوصل البداية بالنهاية بخط مستقيم



$$I = \int_{x-h}^{x} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x-h}^{x}$$

تكامل داله في x بيدي داله في x برده

$$\boxed{I = F(x) - F(x-h)}$$

$$F(x-h) = F(x) - h\,F'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) - \dots$$

$$I = \underbrace{F(x) - F(x-h)}_{} = \underbrace{hF'(x) - \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots}_{I}$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$I = h f(x) - \frac{h^2}{2!} f'(x) + \frac{h^3}{3!} f''(x)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2!} f''(x) + \cdots$$

$$I = h f(x) - \frac{h^2}{2!} \left[\frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2!} f''(x) + \cdots \right] + \frac{h^3}{3!} f''(x)$$

$$I = \frac{h}{2} f(x) + \frac{h}{2} f(x-h) \quad - \frac{h^3}{4} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f''(x) + \cdots$$

$$I = \frac{h}{2} [f(x) + f(x-h)]$$

مساحة شبه المنحرف

اثبات

$$T.E \leq \frac{h^3}{12} |f''(c)| \simeq O(h^3)$$

$$x-h < c < x$$

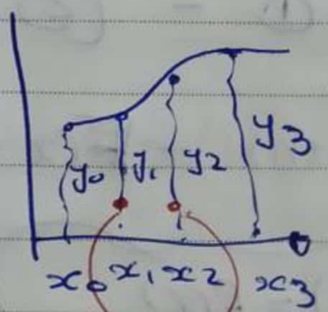
Composite Trapezoidal Rule:

هقسم المساحة الى اكتر من شبه منحرف عشان اقلل الخطأ

(لما نعمل شبه منحرف بوصل نقطة البداية بالنهاية فبالتالي بيضيع

قطعة وبلغي قطعة من المنحنى)

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx$$



$$I = \frac{h}{2} \left[y_0 + y_n + 2 \left(\text{باقي الحدود} \right) \right.$$

مستطرها مرتين

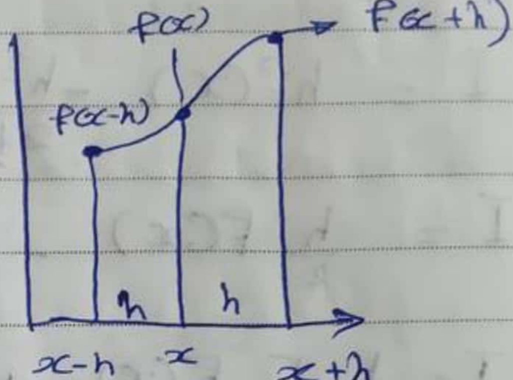
$$T.E \leq n \frac{h^3}{12} |f''(c)|$$

② Simpsons Rules:

لازم اقسم عدد تقسيمات (even)

لو ادانى عدد تقسيمات فردية هعمل ب Simpson الزوجى

وهبقى واحده اعملها Trapezoidal



مش هوصل بينهم بخط مستقيم هوصلهم

بينهم عن طريق parabola

$$I = \int_{x-h}^{x+h} f(x)\,dx$$

$$I = F(x)\Big|_{x-h}^{x+h}$$

$$I = F(x+h) - F(x-h)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots \longrightarrow ①$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots \longrightarrow ②$$

① − ②

$$F(x+h) - F(x-h) = I = 2hF'(x) + \frac{2h^3}{3!} F'''(x)$$

$$F'(x) = f(x) \qquad + \frac{2h^5}{5!} F^{(5)}(x) + \cdots$$

$$I = 2h\, f(x) + \frac{h^3}{3} f''(x) + \frac{h^5}{60} f^{(4)}(x)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f'(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x)$$

$$I = 2h\, f(x) + \frac{h^3}{3} \left[\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) \right] + \frac{h^5}{60} f^{(5)}(x$$

عامل مشترك

$$I = \underbrace{2h\, f(x)} + \frac{h}{3} f(x+h) - \underbrace{\frac{2h}{3} f(x)} + \frac{h}{3} f(x-h)$$

$\frac{6}{3}$ $$- \frac{h^5}{36} f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{60} f^{(4)}(x) + \ldots$$

$$I = \frac{4}{3} f(x) + \frac{h}{3} f(x+h) + \frac{h}{3} f(x-h) - \frac{h^5}{90} f$$

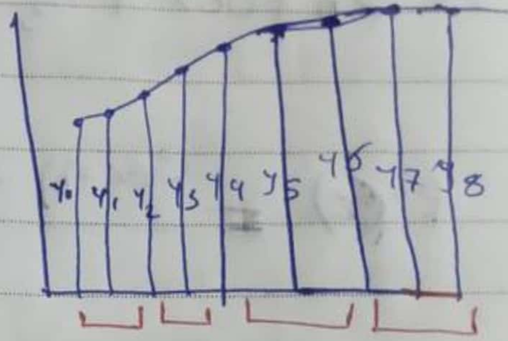
$$I = \frac{h}{3} \left[f(x-h) + f(x+h) + 4 f(x) \right]$$

$$T.E \le \frac{h^5}{90} \left| f^{(4)}(\xi) \right| \approx O(h^5)$$

الخطا تباعة احسن من ال Trapizoidal

$x-h < \xi < x+h$

Composite Simpsons Rules



$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \dots$$

$n = \text{even}$: عدد التقسيمات n

$$= \frac{h}{3}[y_0 + y_2 + 4y_1] +$$

[الاول + الاخير + 4 * اللى فى النص] * $\frac{h}{3}$

كل 2 ← فترة

$$\frac{h}{3}[y_2 + y_4 + 4y_3]$$

$$I = \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 4(\text{الفردى}) + 2(\text{الزوجى})]$$

لان y_2, y_4 متكررة مرتين

$$T.E \le \frac{n}{2} * \frac{h^5}{90} \left|f^{(4)}(c)\right| \simeq O(h^5)$$

n عدد التقسيمات

EX! use Trapzoidal and simpson rule with $n = 6$ to approximate the Integral

$$I = \int_0^1 (7 + 14x^6)\,dx = 9$$

Solution

$$h = \frac{\overset{②}{\text{نهاية}} - \overset{①}{\text{بداية}}}{n}$$

$$f(x) = 7 + 14x^6$$

$x_0 = 0$, $x_n = 1$ $\qquad h = \frac{1}{6}$

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
f(x)	0	7.003					21
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

مفروض في B العادلة عشان اجيب قيمة f(x) عند كل قيمة لـ

Composite trapzoidal Rule :-

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2 * \text{باقي الحدود}\right]$$

$$I_t = \frac{1}{12}\left[7 + 21 + 2\left[y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\right]\right] = \boxed{}$$

Absolute $= |\text{exact} - \text{approximate}| = |9 - \text{ح}| = \boxed{}$

$$T.E \leq \frac{n h^3}{12} |f''(c)|$$

$n = 6$
$h = \frac{1}{6}$

$f(x) = 7 + 14x^6$

$f'(x) = 6 * 14 x^5$

$f''(x) = 5 * 6 * 14 x^4$

$F''(c) = 5 * 6 * 14 * (1)^4 =$

$c = 1$

$f'''(c) = 4 * 5 * 6 * 14 x^3$

$F^{(4)}(c) = 4 * 5 * 6 * 14 * 3x^2$

$c = 1 \rightarrow$ max $f'(4)$

Composite Simpson Rule:-

$$I = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4 * (\text{الفردي}) + 2 * (\text{الزوجي})\right]$$

$$= \frac{1/6}{3}\left[7 + 21 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)\right]$$

$$= 9.007059$$

جموع الارقام كلها

absolute error $= |9 - 9.007059| = 7.059 \times 10^{-3}$

$$T.E \leq \frac{n}{2} \frac{h^5}{90} |f^{(4)}(c)| = \cancel{7.059 \times 10^{-3}}$$

$$= 0.021605$$