Ch3:-

~~Numerical Method for Solving~~

ordinary differential equations

* First order First degree

(Intial Value Problems) I.V.P

* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ شكل المعادلة

* $y' = f(x, y)$

* كل معادلة ليها intial Condition عشان هي First order

$y(x_0) = y_0 \longrightarrow$ intial Conditions

* لو third order يبقى ليها تلت شروط وهكذا

* بسميت بيها الاكم عشان ليها Condition

I one step method:-

يبنى الحل انتاجي على النقطة اللي قبلي اللي هي y_0

يعني أول قيمة هتبقى بدلاله y_0 تاني قيمة بدلالة y_1

$y_1 \xrightarrow{\text{بدلالة}} y_0 \quad y_2 \xrightarrow{\text{بدلالة}} y_1$

* Euler method:

تعتمد على Euler Expantion

$$F(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \underbrace{y_i'}_{f(x,y)} + \underbrace{\frac{h^2}{2!} y_i'' + \cdots}_{T.E}$$

* أ تبدأ من الصفر ليست قيم سالبة

* الفرق بين y_i , y_{i+1} $\leftarrow h$

$$\therefore y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

أكبر قيمة للمشتقة التانية في الفترة

الاقصى $T.E \le \frac{h^2}{2!} |y''(s)| \simeq O(h^2)$ بتاعتي

at $i=0$

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = \checkmark$$

at $i=2$

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = \square$$ هكون لسة حاسبها فوق

$$y_0 \longrightarrow y_1 \longrightarrow y_2$$

كل مرة يبنى ع اللى قبلى

---

ex: Solve the I.V.P $\frac{dy}{dx} = 2x - y$, $y_0 = -1$

Req y at $x = 1$ with $n = 10$ Compare the Value with excact solution $y(x) = e^{-x} + 2x - 2$

SoL:: $h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{1-0}{10} = .1$

* أنا بحتاج أعوض تلت مرات فى القانون

$h = .1$

x_0	x_1	x_2	x_3
0	.1	.2	.3
$y_0 = -1$	$y_1 = ?$	$y_2 = ?$	$y_3 = ?$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i + y_i)$$

$$= y_i + h(2x_i - y_i) \quad ; \quad i = 0, 1, 2, 3$$

at $i=0$

$$y_1 = y_0 + h(2x_0 - y_0)$$
$$= -1 + .1(-(-1))$$
$$= -0.9$$

at $i=1$

$$y_2 = y_1 + h(2x_1 - y_1)$$
$$= -.9 + .1(2(.1) - (-.9))$$
$$= \checkmark$$

الأقصى

at $i=2$ $\quad y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)$

$$= y_2 + h(2x_2 - y_2)$$

$$= \square$$

Error = | Exact − app |

* اللى أنا واقفه عندها هى x_3

~~Exa~~ . Exact $= y(.3) = e^{-.3} + 2(.3) - 2$

$$= \checkmark$$

Error $= | \checkmark - \square |$

---

* Taylor's methods:
  1. 2^{nd} Taylor method
  2. 3^{rd} Taylor method

* بستخدمه عشان أحسب الـ T.E غير Euler

$$y_{i+1} = y_i + h y_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \underbrace{\frac{h^3}{3!} y_i'''}_{T.E}$$

$$y' = f(x_i, y_i) \longrightarrow \text{givin data}$$

$$= f_i$$

2^{nd} order Taylor method: (three term)

$$y_{i+1} = y_i + h y_i' + \frac{h^2}{2!} y_i''$$

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2!} f_i''$$

$$T.E \leq \frac{h^3}{3!} |y'''(s)| \simeq O(h^3)$$

3^{rd} order Taylor method:- (Four term)

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2!} f_i' + \frac{h^3}{3!} f_i''$$

$$T.E \le \frac{h^4}{4!} |y^{(4)}(s)| \simeq o(h^4)$$

$\hookrightarrow$ exact $y(x)$

ex:- 3rd order Taylor المثال السابق بس ب

Sol

~~هنشتق مرة بالنسبة لـ x ومرة بالنسبة y~~

* هنفاضل مرة بالنسبة لـ x ومرة بالـ y وهنفاضل الـ y بالنسبة للـ x

$$f \to x, \; y \to x$$

$$\boxed{f' = f_x + f_y \cdot f_i} \; \#$$

$$f'' = \frac{\partial}{\partial x}(f_x + f_y \cdot f)$$

$$f_x \to x, y$$

$$= f_{xx} + f_{xy} \cdot f$$

$$f_y \to x, y$$

$$= f_{xy} + f_{yy} \cdot f$$

$$\boxed{f'' = f_{xx} + 2 f_x f + f_{yy} f_i^2 + f_x f_y + f_y^2 f_i} \; \#$$

Taylor

نحل المثال الأول بس بطريقة 3rd order

Sol

$f_i = 2x_i - y_i$

$f_i' = 2 - (2x_i - y_i) \rightarrow$ من القانون

$f_i' = 2 - 2x_i + y_i$

$f_i'' = -2 + 2x_i - y_i$ من القانون

$\therefore y_{i+1} \simeq y_i + h(2x_i - y_i) + \frac{h^2}{2!}(2 - 2x_i - y_i)$

$+ \frac{h^3}{3!}(-2 + 2x_i + y_i)$

at $i=0$

$y_1 = y_0 + h(2x_0 - y_0) + \frac{h^2}{2}(2 - 2x_0 + y_0)$

$+ \frac{h^3}{3!}(-2 + 2x_0 - y_0)$

at $i = 1$ $y_2 = \checkmark$

* كلهم يعتمدوا ع h

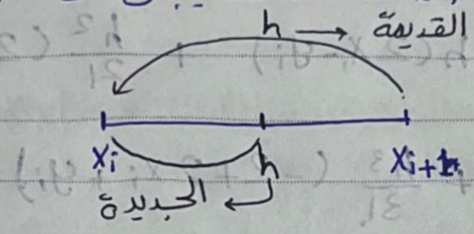
* Runge Kutta methods:-

① Mid point
② 2^{nd} order
③ 4^{th} order

~~① Mid point~~

احسب القيمة بتاعت $F(x,y)$ بين x_i , x_{i+1}

فده معناه إن الـ h قلت يبقى T.E زاد



① Mid point:-

$$y_{i+1} = y_i + h k_2$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \longrightarrow \text{givin}$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2})$$

يعوض في الـ X ←   → يعوض بالقيمة دي في الـ y

② 2^{nd} order:-

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[k_1 + k_2]$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \longrightarrow \text{givin}$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

* حل المثال السابق بطريقة 2nd order Runge

Sol :-

$$h = \frac{1-0}{10} = ,1$$

$f(x, y) = 2x - y$

$x_0 = 0$	$x_1 = ,1$	$x_2 = ,2$
$y_0 = -1$	$y_1 = ?$	$y_2 = ?$

$k_1 = f(x_i, y_i) = 2x_i - y_i$

$k_2 = 2(x_i + h) - (y_i + h k_1)$

at $i=0$ $\quad y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[k_1 + k_2]$ #

at $i=0$

$k_1 = 2x_0 - y_0 = 0 - (-1) = 1$

$k_2 = 2(x_0 + h) - (y_0 + h k_1)$

$= 2(0 + ,1) - (-1 + ,1 \times 1)$

$= ,2 - (-1 + ,1)$

$= 1,1$

$\therefore y_1 = -1 + \frac{,1}{2}[1 + 1,1] = ✓$

at $i=1$ ______

at $i=2$ ______

Error = |Exact - app|

$y(,3)$

└ y_3 at $i=2$

mid point باستخدام

$h = \frac{1-0}{10} = ,1$

$h = ,1$

$x_0 = 0$ $x_1 = ,1$ $x_2 = ,2$

$y_0 = -1$

$F(x, y) = 2x - y$

$k_1 = 2x - y$

$k_2 = 2(x_i + \frac{h}{2}) - (y_i + \frac{hk_1}{2})$

at $i=0$ $k_1 = 2\times 0 - (-1) = 1$

$k_2 = 2(0 + \frac{,1}{2}) - (-1 + \frac{,1}{2})$

$= 1,05$

at $i=1$ $k_1 = 2\times ,1 - (-,895) = 1,095$

$k_2 = 2(,1 + \frac{,1}{2}) - (-,895 + \frac{,1}{2})$

$= 1,145$

$y_{i+1} = y_i + hk_2$

$y_1 = y_0 + hk_2$
$= -1 + ,1 \times 1,05$
$= -,895$

$y_2 = y_1 + hk_2$
$= -,895 + ,1 \times 1,145$
$= -,7805$