Université de Nouakchott Al Aasriya
Faculté des Sciences et Techniques
Département Mathématiques et Informatiques

2017-2018
MP1

TD S2
Série 1

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1 : En utilisant la définition de limite montrer que :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \sin(x^2) = 0.$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} (x^2 + 1) = 5.$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = 0.$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2+2x+5}\right) = 0.$

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)} - x, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$

(b) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}.$

(c) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1}\right).$

(d) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$

Exercice 3 : Montrer que $x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante tandis que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 5 : Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$; on suppose que

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

Determine f.

Exercice 6 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ Montrer que f admet un point fixe si :

1. f croissante.
2. f continue.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = l$ et bornée sur tout inte

fermé. Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$

Exercice 8 :

1. Trouver un équivalent lorsque $x \longrightarrow 1$ de la fonction définie par $f(x) = e^{x^2+1} - e^{3x-1}$.
2. Trouver un équivalent lorsque $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ de la fonction définie par $f(x) = \sin(x) + \cos(2x)$.

Exercice 9 : Calculer, à l'aide des fonctions équivalentes, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}{x(x+2)}$.
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{(1-\cos(x))(1-e^x)}{x^3+x}$.
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{x\log(1+x)}{\tan(x)^2}$.
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2}$.
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} e^{x-\sin(x)}$.

Exercice 10 : Montrer que $f \sim_{x_0} g$

1. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}, x_0 = +\infty$
2. $f(x) = x^{2n} - \pi^{2n}$ et $g(x) = 2n\pi^{2n-1}\tan(x), x_0 = \pi$.

Exercice 11 : Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \Big(f(x) - f(y)\Big)\Big(g(x) - g(y)\Big) = 0.$$

Montrer que l'une de deux applications f, g est constante.

Exercice 12 : Trouver toutes les fonctions

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) + f\left(\frac{-1}{x+1}\right) = 2 + 3x.$$

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$xf(x) + f(1-x) = x^3 + 1.$$

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y^2) = f(x^2) + f(y).$$