

Rapport de projet

OT

Département de Génie Mathématique
Semestre 9 - 2017/2018

Auteur :

Timothée SCHMODERER

Référente :

Carole LE GUYADER

Vincent DUVAL

Table des matières

1	Introduction	3
2	Notions générales	4
2.1	Problème de transport optimal	4
2.2	Formulation de J.D. Benamou et Y. Brenier	5
2.3	Une autre utilité au transport optimal	8
2.4	Conclusion	8
3	Opérateurs proximaux	9
4	Pbm de transport optimal	16
5	Formulation de Benamou et Brenier	16
6	Méthodes numériques	16
7	Opérateurs	17
7.1	Interpolation	17
7.2	Divergence	17
7.3	Frontières	17
7.4	Problème discrétisé	17
8	Résolution par algorithme de séparation de proximité	18
8.1	Opérateur de proximité de G_2	18
8.2	Opérateur de proximité de J	19
8.3	Opérateur de proximité de ι_C	19
9	Algorithme de Douglas Rachford	19
	Table des figures	20
	Liste des Codes	20

1 Introduction

Le problème de transport optimal fut étudié dans sa forme primitive par *Gaspard Monge* dans son *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais* de 1781 [?]. Il s'intéressait au déplacement de tas de matériaux d'un site d'extraction à un site de construction en minimisant le coût de transport (le coût de déplacement d'une unité est le produit de la charge déplacée par la distance).

La formulation moderne a été introduite par *Leonid Kantorovitch*, prix Nobel d'économie en 1975 pour sa contribution aux allocations optimales.

Nous essaierons d'être le plus exhaustif possible dans la présentation des résultats, la plupart des énoncés seront démontrés.

Le plan de rapport est le suivant, nous commencerons par présenter les notions liées au transport optimal, puis nous ferons un court aparté sur les opérateurs proximaux. Enfin,

Nous attaquerons la discrétisation et la mise en œuvre numérique. Plan :

- 1 - Théorie sur le transport optimal
- 2 - Théorie sur les opérateurs proximaux
- 3 - Numérique
 - 3.1 - Idées générales de l'implémentation
 - 3.2 - Implémentation Grosse matrice
 - 3.3 - Implémentation centrée
 - 3.3.1 - 1D
 - 3.3.2 - 2D
 - 3.4 - Implémentation staggered FFT
- 4 - Galerie du Fun

2 Notions générales

Introduisons des notions essentielles qui nous amèneront à définir le problème de transport optimal et sa formulation en terme de géodésiques.

2.1 Problème de transport optimal

Définition 2.1 : *Transport*

Soient deux mesures de probabilité ν et μ sur \mathbb{R}^n munie de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Un transport est une application $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui envoie la mesure μ sur ν . C'est à dire :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad \mu(T^{-1}(B)) = \nu(B) \quad (1)$$

C'est une relation de conservation de masse. Nous notons $T_{\#}\mu = \nu$.

Introduisons petit à petit des hypothèses simplificatrices mais pas aberrantes. Supposons que les mesures aient une densité : $\mu = f_0 dx$ et $\nu = f_1 dx$. La relation (1) devient alors :

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad \int_B f_1(y) dy &= \int_{T^{-1}(B)} f_0(x) dx \\ &= \int_B \sum_{x \in T^{-1}(y)} \left(\frac{f_0(x)}{|\det \nabla T(x)|} \right) dy \end{aligned}$$

C'est à dire $f_1(y) = \sum_{x \in T^{-1}(y)} \left(\frac{f_0(x)}{|\det \nabla T(x)|} \right)$.

Supposons de plus que le transport est injectif et lisse, i.e. $x \in T^{-1}(y) \leftrightarrow y = T(x)$. Nous obtenons alors l'équation dite de Jacobienne :

$$f_1(T(x)) = \frac{f_0(x)}{|\det \nabla T(x)|} \quad (2)$$

Notons $\mathcal{T}(f_0, f_1)$ l'ensemble des applications qui vérifient (2).

Définition 2.2 : *Coût*

Le coût est une application

$$C : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto C(x, y) \end{cases}$$

qui représente intuitivement le coût d'affecter x en y .

Nous pouvons alors donner la définition qui donne le titre à ce projet.

Définition 2.3 : *Problème de transport optimal*

Soient, f_0 et f_1 deux densités de probabilité et un coût C . Le problème de transport optimal est alors le suivant.

Trouver $T \in \mathcal{T}(f_0, f_1)$ qui réalise le

$$\min_{T \in \mathcal{T}(f_0, f_1)} \int C(x, T(x)) f_0(x) dx \quad (3)$$

Remarques :

1. Un ensemble de coût est particulièrement intéressant, ce sont ceux qui s'écrivent sous la forme $C(x, y) = \|x - y\|^p$. Et plus précisément dans notre problème $p = 2$. Nous verrons que le problème de transport optimal possède alors de jolies propriétés.
2. La valeur de (3) est alors appelée distance L^2 de Wasserstein entre f_0 et f_1 , et est notée $d(f_0, f_1)$.

Théorème 2.4 : *Existence et unicité du transport optimal*

Preuve :

□

Théorème 2.5 :

Dans le cas du coût quadratique, il existe une unique application de transport optimal qui s'écrit comme le gradient d'une fonction convexe.

$$T(x) = \nabla \Psi(x) \quad (4)$$

Preuve :

□

A partir de l'équation de la jacobienne (2), Ψ est solution de l'équation de *Monge - Ampère*

$$f_1(\nabla \Psi(x)) = \frac{f_0(x)}{\det H\Psi(x)} \quad (5)$$

2.2 Formulation de J.D. Benamou et Y. Brenier

Pour le moment, le coût ne dépend que des densités initiales et finale, cependant il semble pertinent de chercher à connaître ce qu'il se passe pendant le transport, cela nous amènera à prendre en compte la notion d'obstacles. Dans leur article de 1999 [?], J.D. Benamou et Y. Brenier ont donné une autre formulation au problème de transport optimal en réintroduisant le temps comme variable. Ils obtiennent alors une interprétation très simple du problème de transport optimal en terme de mécanique des fluides.

Théorème 2.6 : *Benamou, Brenier*

Soient f_0 et f_1 deux densités de probabilité assez régulières. Alors,

$$\min_{T \in \mathcal{T}(f_0, f_1)} \int \|x - T(x)\|^2 dx = \min_{(f, v) \in \mathcal{C}_v} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 f(t, x) \|v(t, x)\|^2 dt dx \quad (6)$$

Avec,

$$\begin{aligned} f(t, x) &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{la densité} \\ v(t, x) &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{champ de vecteurs vitesses} \end{aligned}$$

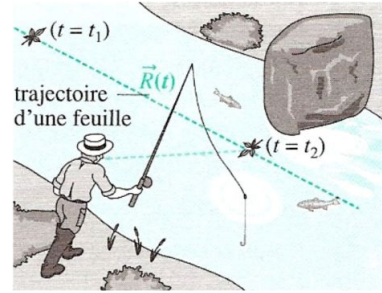
et

$$\mathcal{C}_v = \left\{ (f, v) \mid \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_x(fv) = 0, f(0, \cdot) = f_0, f(1, \cdot) = f_1 \right\} \quad (7)$$

Preuve :

Nous redonnons la preuve donnée par Benamou et Brenier en complétant les points qui nous semble obscurs.

La preuve repose sur l'utilisation des variables lagrangiennes $X(t, x)$ qui décrivent le comportement d'un fluide en "suivant" les particules. Supposons f_0 et f_1 bornées et à support compact de \mathbb{R}^n . Considérons (f, v) , suffisamment régulières, vérifiant (7).



En termes formels, cela donne,

$$X(0, x) = x \quad \frac{\partial X}{\partial t}(t, x) = v(t, X(t, x)) \quad (8)$$

Ainsi, pour toute fonction test ϕ :

$$\int \phi(t, x) f(t, x) dx dt = \int \phi(t, X(t, x)) f_0(x) dx dt \quad (9)$$

$$\int \phi(t, x) f(t, x) v(t, x) dx dt = \int \frac{\partial X}{\partial t}(t, x) \phi(t, X(t, x)) f_0(x) dx dt \quad (10)$$

la première égalité vient du changement de variable $x = X(t, x)$, or, $f(t, X(t, x))$ décrit la densité de la particule de fluide déplacée le long du champ de vitesse v à l'instant t , c'est donc la densité initiale en x , $f_0(x)$.

Remarquons que (9) et la condition $f(0, \cdot) = f_0$, $f(1, \cdot) = f_1$ impliquent que $T(x) = X(1, x)$ est un transport valide. En effet, pour tout borélien B , $\int_{T(x) \in B} f_0(x) dx =$

$\int_{X(1, x) \in B} f_0(x) dx$ Ce qui signifie, qu'au temps 1, la particule x est dans le borélien

B , comme la densité au temps 1 est donnée par f_1 on a bien : $\int_{X(1,x) \in B} f_0(x) dx = \int_B f_1(x) dx$.

Puis remarquons, en prenant comme fonction test $\phi(t, x) = \|v(t, x)\|^2$ dans (9), que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 f(t, x) \|v(t, x)\|^2 dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 f_0(x) \|v(t, X(t, x))\|^2 dx dt$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 f_0(x) \left\| \frac{\partial X}{\partial t}(t, x) \right\|^2 dx dt \quad \text{par (8)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) \int_0^1 \left\| \frac{\partial X}{\partial t}(t, x) \right\|^2 dt dx \end{aligned}$$

par l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) \left\| \int_0^1 \frac{\partial X}{\partial t}(t, x) dt \right\|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) \|X(1, x) - X(0, x)\|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) \|X(1, x) - x\|^2 dx \quad \text{par (8)} \end{aligned}$$

Nous reconnaissons ici la forme qui apparaît dans la distance L^2 de Wasserstein, pour le transport $T(x) = X(1, x)$. Prenons $\nabla \Psi(x)$ le transport optimal, nous avons alors :

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) \|\nabla \Psi(x) - x\|^2 dx$$

Finalement, nous avons montré que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 f(t, x) \|v(t, x)\|^2 dx dt \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) \|\nabla \Psi(x) - x\|^2 dx = d(f_0, f_1)^2$$

Il reste à trouver un couple (f, v) tel que nous ayons l'égalité et la preuve sera complète. Choisissons $X(t, x) = x + t(\nabla \Psi(x) - x)$, ce qui correspond à la paire (f, v) vérifiant pour toute fonction test ϕ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \phi(t, x) f(t, x) dt dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \phi(t, x + t(\nabla \Psi(x) - x)) f_0(x) dx dt \\ \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \phi(t, x) f(t, x) v(t, x) dt dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 (\nabla \Psi(x) - x) \phi(t, x + t(\nabla \Psi(x) - x)) f_0(x) dt dx \end{aligned}$$

Et en reprenant le raisonnement de la première étape, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 f(t, x) \|v(t, x)\|^2 dt dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 f_0(x) \|v(t, X(t, x))\|^2 dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 f_0(x) \left\| \frac{\partial X}{\partial t}(t, x) \right\|^2 dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) \|\nabla \Psi(x) - x\|^2 dx \end{aligned}$$

■ Ce qui achève la preuve. □

La première équation dans l'ensemble des contraintes correspond à une équation de continuité. Tandis que les conditions sur les bords temporels imposent l'attache au problème initial.

2.3 Une autre utilité au transport optimal

Dans les années 1990, la théorie du transport optimal est devenu un outil de démonstration puissant et élégant pour démontrer de nombreuses inégalités géométriques et fonctionnelles. L'exemple le plus simple est fourni par *l'inégalité isopérimétrique*, solution du problème de Didon [?]. Ce problème, peut s'énoncer ainsi : de toutes les courbes fermées de longueur donnée, celle qui entoure l'aire la plus grande est le cercle. Ce problème se généralise, en dimension n .

Théorème 2.7 : *Problème de Didon*

Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue λ_n , pour tout compact K ,

$$\frac{(\lambda_{n-1}B)^n}{(\lambda_n B)^n} \leq \frac{(\lambda_{n-1}K)^n}{(\lambda_n K)^n}$$

Avec B , la boule unité.

En particulier en dimension $n = 3$

Preuve :

Considérons les fonctions de densité uniforme et d'intégrale 1, d'une part sur le domaine de volume V et d'autre part sur une boule unité, donc de volume $\frac{4\pi}{3}$. Cela induit l'existence d'un potentiel ϕ permettant le transport de la première vers la seconde, solution de l'équation de Monge - Ampère en tout point x du volume V :

$$\frac{1}{V} = \det(I + H\phi(x)) \frac{1}{B}$$

□

2.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons introduit le problème de transport optimal. Démontrer l'existence et l'unicité du transport. Le problème se reformule alors.

Et nous avons montré avec Benamou et Brenier que ce problème est équivalent au suivant : qui a une interprétation en terme de mécanique des fluides très pratiques.

Avant d'entamer la résolution numérique du problème de transport optimal, nous présentons les opérateurs proximaux qui joueront un rôle central dans notre modèle.

3 Opérateurs proximaux

L'opérateur proximal d'une fonction convexe généralise la notion de projection sur un ensemble convexe. Cette notion fût introduite pour répondre aux problèmes de minimisation de fonctions non nécessairement différentiables.

Suivant la présentation de *P.L. Combettes* et *J.C. Pesquet* [?] nous présentons une série de résultats sur les opérateurs proximaux, en complétant quelques preuves.

Notation : Le domaine d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$. Notons $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions convexes semi-continues inférieurement à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ telles que $\mathcal{D}(f) \neq \emptyset$.

Définition 3.1 : Sous - différentiel

Soit $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$, le sous - différentiel de f est l'application suivante,

$$\partial f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \\ x & \longmapsto \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n, \langle u, y - x \rangle + f(x) \leq f(y)\} \end{cases}$$

Avec $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des parties de \mathbb{R}^n .

L'interprétation géométrique du sous-différentiel est la suivante. Il est formé par toutes les directions des hyperplan qui passent par le point $(x, f(x))$ et restent "sous" le graphe de la fonction f .

Exemple : Calculons le sous différentiel en tout point de

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto |x| \end{cases}$$

Considérons deux cas,

1. $x > 0$, le cas $x < 0$ est identique. Soit une direction u appartient au sous différentiel de f en x , alors $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(y - x) + f(x) &\leq f(y) \\ u(y - x) + x &\leq f(y) \end{aligned}$$

En particulier, pour $y = 0$ on obtient $x(1 - u) \leq 0$, ainsi $u \geq 1$. Et donc en prenant $y > x$ (en particulier, $y > 0$) on obtient $u(y - x) + x \geq y$ ce qui est contraire à notre définition sauf si $u = 1$.

2. $x = 0$ Soit $u \in \partial f(0)$, alors u doit vérifier pour tout $y \in \mathbb{R}$,

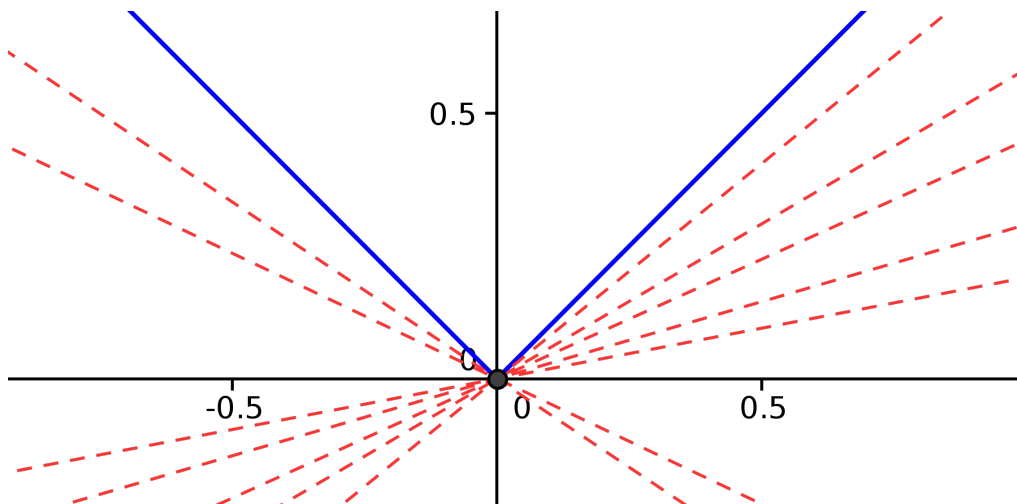
$$uy \leq |y|$$

En prenant $y > 0$ on obtient que $u \leq 1$ et en prenant $y < 0$, on a $u \geq -1$.

En somme,

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\} & x < 0 \\ [-1, 1] & x = 0 \\ \{1\} & x > 0 \end{cases}$$

Ce qui correspond bien à l'interprétation géométrique donnée et à la figure 1.

FIGURE 1 – Illustration du sous - différentiel de $|x|$ en 0**Propriété :**

Soit $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$. Si f est différentiable sur son domaine, alors

$$\forall x \in \mathcal{D}(f)^\circ, \partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

Preuve :

Comme une f est convexe différentiable, nous avons la caractérisation suivante du gradient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(x), y - x \rangle + f(x) \leq f(y)$$

qui implique que $\nabla f(x) \in \partial f(x)$.

Supposons à présent que $p \in \partial f(x)$. Soit une suite y_n^1 de \mathbb{R}^n qui tend vers x . Écrivons, $y_n^1 = x + k_n$ avec $\|k_n\| \rightarrow 0$. Posons alors y_n^2 une seconde suite de \mathbb{R}^n telle que $y_n^2 = x - k_n$, alors :

$$\begin{cases} \langle p, k_n \rangle \leq f(x + k_n) - f(x) \\ \langle p, -k_n \rangle \leq f(x - k_n) - f(x) \end{cases}$$

Comme f est différentiable dans son domaine, on peut écrire,

$$f(x \pm k_n) = f(x) \pm \langle \nabla f(x), k_n \rangle$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{cases} \langle p, k_n \rangle \leq \langle \nabla f(x), k_n \rangle \\ \langle p, k_n \rangle \geq \langle \nabla f(x), k_n \rangle \end{cases}$$

Ainsi $\langle p, k_n \rangle = \langle \nabla f(x), k_n \rangle$. En faisant tendre n vers $+\infty$, comme la suite k_n converge fortement vers 0, elle va aussi converger faiblement. Ce qui implique que $p = \nabla f(x)$. \square

Cette propriété est cohérente avec l'exemple précédent, $\partial f(x) = f'(x)$ partout où, f est différentiable, c'est à dire $x \neq 0$.

Propriété :

Si $f = \alpha f_1 + \beta f_2$, avec $f_1, f_2 \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha, \beta \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned}\partial f(x) &= \alpha \partial f_1(x) + \beta \partial f_2(x) \\ &= \{u \in \mathbb{R}^n \mid \exists (u_1, u_2) \in \partial f_1(x) \times \partial f_2(x), u = \alpha u_1 + \beta u_2\}\end{aligned}$$

Preuve :

$\alpha \partial f_1(x) + \beta \partial f_2(x) \subset \partial(\alpha f_1 + \beta f_2)(x)$: $u \in \mathbb{R}^n$ est dans $\partial(\alpha f_1 + \beta f_2)(x)$ si et seulement si pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\langle u, y - x \rangle + \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \leq \alpha f_1(y) + \beta f_2(y)$$

En particulier en prenant $u \in \alpha \partial f_1(x) + \beta \partial f_2(x)$, au sens donné dans la propriété, cette inégalité est vérifiée.

$\alpha \partial f_1(x) + \beta \partial f_2(x) \supset \partial(\alpha f_1 + \beta f_2)(x)$: Soit $u \in \partial(\alpha f_1 + \beta f_2)(x)$, par contradiction, supposons que $u \notin \alpha \partial f_1(x) + \beta \partial f_2(x)$, c'est à dire :

$$\forall (u_1, u_2) \in \partial f_1(x) \times \partial f_2(x), \quad u \neq \alpha u_1 + \beta u_2$$

EMPTY

□

La notion de sous - différentiel est centrale car il permet de caractériser les minimiseurs d'une fonctions (même non différentiable).

Théorème 3.2 :

Soit $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$. Le point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point de minimum global de f si et seulement si

$$0 \in \partial f(x^*)$$

Preuve :

\Rightarrow Soit x^* le minimum global de f alors $\forall y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}f(x^*) &\leq f(y) \\ \langle 0, y - x^* \rangle + f(x^*) &\leq f(y)\end{aligned}$$

Et donc $0 \in \partial f(x^*)$.

\Leftarrow Si $0 \in \partial f(x^*)$ alors $\forall y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\langle 0, y - x^* \rangle + f(x^*) &\leq f(y) \\ f(x^*) &\leq f(y)\end{aligned}$$

et x^* est un minimum global de f .

□

L'opérateur proximal est un outil important dans l'optimisation de fonctions convexes non différentiables. C'est une application minimisant une fonction fortement convexe dépendant de la fonction originale f . En trouvant un compromis entre trouver le minimum de la fonction non différentiable f et en forçant une proximité avec l'argument, nous approchons le minimum de f .

Définition 3.3 : Opérateur proximal

Soit $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$. L'opérateur proximal de f est noté $prox_f$ et il est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par :

$$prox_f(x) = \arg \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2$$

Exemple : Prenons, l'indicatrice d'un ensemble convexe non vide C :

$$i_C = \begin{cases} 0 & x \in C \\ +\infty & x \notin C \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} prox_{i_C}(x) &= \arg \min_{y \in \mathbb{R}^n} i_C(y) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \\ &= \arg \min_{y \in C} \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \\ &= P_C(x) \end{aligned}$$

Où, P_C désigne la projection orthogonale sur C .

Sur la figure 2 (tirée de [?]), nous avons en **gras** la frontière de la fonction f , les lignes fines sont les lignes de niveaux de f . Évaluer $prox_f$ sur les points bleus les associent aux points rouges correspondant. Les trois points dans le domaine restent dans le domaine et se déplacent vers le minimum, et les deux à l'extérieur du domaine se placent que la frontière de celui-ci en direction du minimum. Un scalaire $\gamma > 0$ peut être introduit dans cette définition $prox_{\gamma f}$, ce paramètre contrôle le poids apporté à la minimisation de f . Un γ grand, forcera de se rapprocher fortement du minimum de f , alors qu'un γ petit favorisera les points proches de x . Le résultat important est le suivant.

Propriété :

Soit une fonction f convexe semi continue inférieurement. Alors, $prox_f(x)$ existe et est unique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. De plus, il est caractérisé par :

$$\forall (x, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad p = prox_f x \quad \Longleftrightarrow \quad x - p \in \partial f(p)$$

En particulier, si f est différentiable alors :

$$\forall (x, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad p = prox_f x \quad \Longleftrightarrow \quad x - p = \nabla f(p)$$

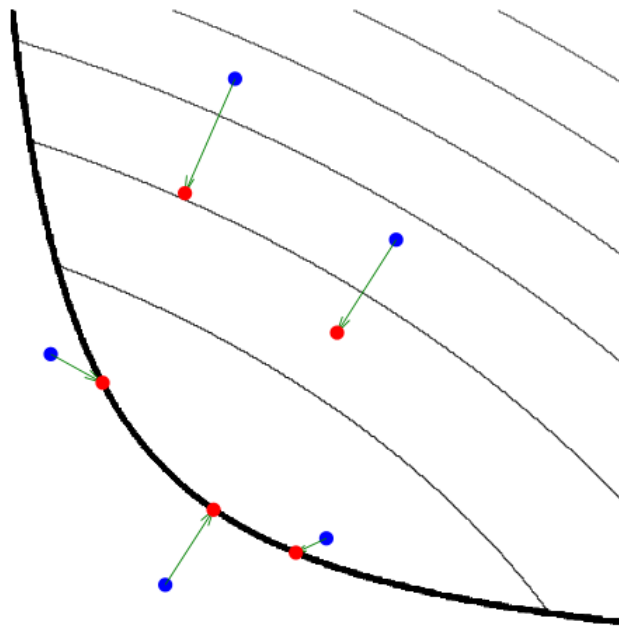


FIGURE 2 – Illustration de l'opérateur proximal

Preuve :

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $g : y \rightarrow f(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2$ est strictement convexe et dans $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ (i.e. identiquement égale à $+\infty$). Ce qui montre que le minimum de g est toujours atteint.

\Leftarrow Supposons que $x - p \in \partial f(p)$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\langle x - p, y - p \rangle + f(p) \leq f(y)$$

Or,

$$\begin{aligned} \langle x - p, y - p \rangle &= \frac{1}{2}\langle x - p, y - x + x - p \rangle + \frac{1}{2}\langle x - y + y - p, y - p \rangle \\ &= \frac{1}{2}\|x - p\|^2 + \frac{1}{2}\|y - p\|^2 + \frac{1}{2}(\langle x - p, y - x \rangle + \langle x - y, y - p \rangle) \\ &= \frac{1}{2}\|x - p\|^2 + \frac{1}{2}\|y - p\|^2 - \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|x - p\|^2 + \frac{1}{2}\|y - p\|^2 - \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + f(p) &\leq f(y) \\ \frac{1}{2}\|x - p\|^2 + f(p) &\leq f(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Donc $p = \text{prox}_f(x)$.

\Rightarrow Soit $(x, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telle que $p = \text{prox}_f(x)$. Alors $\forall y \in \mathbb{R}^n$, je me demande si c'est pas eja prouvé \square

De plus,

Propriété :

Le point x^* minimise f si et seulement si

$$x^* = \text{prox}_f(x^*)$$

Preuve :

\Rightarrow Supposons que x^* minimise f alors, comme $\|x^* - y\|^2 > 0$ si $y \neq x^*$. Nous avons $\text{prox}_f(x^*) = x^*$.

\Leftarrow Utilisons la caractérisation de minimisation donnée par le sous - différentiel. Le point \tilde{x} minimise $f(x) + \frac{1}{2}\|x - v\|^2$, c'est à dire $\tilde{x} = \text{prox}_f(v)$, si et seulement si

$$0 \in \partial f(\tilde{x}) + (\tilde{x} - v)$$

Où la somme est entendu au sens de la somme entre un ensemble et un singleton.

En prenant $x^* = v = \tilde{x}$, nous obtenons $0 \in \partial f(x^*)$. Et donc x^* minimise f . \square

Cela suggère des algorithmes de point fixes. Cela fonctionnerait si prox_f était une contraction (i.e. c -lipschitzienne, $0 < c < 1$). Ce n'est pas le cas, cependant nous avons une propriété de non expansivité qui est suffisante pour une itération de point fixe :

$$\|\text{prox}_f(x) - \text{prox}_f(y)\|^2 \leq \langle \text{prox}_f(x) - \text{prox}_f(y), x - y \rangle$$

C'est un cas particulier d'opérateur non expansif (comme par exemple, $-Id$ ou les rotations, $[\cdot, \cdot]$).

Définition 3.4 : *Application non expansive*

Une application $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite non expansive si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \|N(x) - N(y)\| \leq \|x - y\|$$

C'est à dire que N est 1-lipschitzienne. Nous avons la caractérisation suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \|N(x) - N(y)\|^2 \leq \langle N(x) - N(y), x - y \rangle$$

Si N est un opérateur non expansif alors $\forall \alpha \in]0, 1[$ l'opérateur $T = (1 - \alpha)I + \alpha N$ a les mêmes point fixes que N , et qu'en itérant T , il y a convergence vers les point fixes. C'est à dire, la suite

$$x_{n+1} = (1 - \alpha)x_n + N(x_n)$$

converge vers un point fixe de N .

Soit le problème de minimisation :

Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ telles que $f_1 + f_2 \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$, en particulier le support de $f_1 + f_2$ est non vide. Supposons que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f_1(x) + f_2(x) = +\infty$$

Considérons alors le problème de minimisation, Trouver $x \in \mathbb{R}^n$ qui réalise le

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_1(x) + f_2(x) \quad (11)$$

Propriété :

Le problème 11 admet une unique solution et pour $\forall \gamma > 0$, elle est caractérisée par :

$$\begin{cases} x &= \text{prox}_{\gamma f_2} y \\ \text{prox}_{\gamma f_2} y &= \text{prox}_{\gamma f_1} (2\text{prox}_{\gamma f_2} y - y) \end{cases}$$

Preuve :

$f_1 + f_2$ est une fonction convexe, infinie à l'infini donc l'existence est l'unicité du minimiseur est immédiate. \square

Suivant les idées d'algorithmes de point fixes sur les opérateurs proximaux, nous introduisons l'algorithme suivant dit de *Douglas - Rachford*.

Algorithme 1 Douglas-Rachford

Soit $\epsilon \in]0, 1[$, $\gamma > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$

for $n = 0, 1, \dots$ **do**

$x_n = \text{prox}_{\gamma f_2} y_n$

$\lambda_n \in [\epsilon, 2 - \epsilon]$

$y_{n+1} = y_n + \lambda_n(\text{prox}_{\gamma f_1}(2x_n - y_n) - x_n)$

end for

Propriété :

Toute suite (x_n) générée par l'algorithme de Douglas - Rachford converge vers une solution du problème 11.

4 Pbm de transport optimal

Soient deux densités f_0 et f_1 de même masse, suffisamment régulière, sur un domaine $[0, 1]^d$. Un transport de f_0 sur f_1 est une application T telle que :

$$f_0(x) = f_1(T(x))|det(\partial T(x))|$$

Le transport optimal est celui qui minimise le coût $\int c(x, T(x))dx$ parmi tous les transports de f_0 sur f_1 . Dans notre problème : $C(x, y) = \|x - y\|^2$.

5 Formulation de Benamou et Brenier

On montre que la géodésique entre f_0 et f_1 est :

$$f(x, t) = f_0((1 - t)Id + tT(x))|det((1 - t)Id + t\partial T(x))|$$

et que ce chemin minimise le problème suivant :

$$\min_{(f, v) \in C_v} \int_{[0, 1]^d} \int_0^1 f(x, t) \|v(x, t)\|^2 dt dx$$

Où : $C_v = \{(f, v) | \partial_t f + div_x(v) = 0; v(0, \cdot) = 0, v(1, \cdot) = 0, f(\cdot, 0) = f_0, f(\cdot, 1) = f_1\}$

On pose $m = fv$ pour obtenir le problème de minimisation

$$\min_{(f, m) \in C} J(m, f) = \int_{[0, 1]^d} \int_0^1 \theta(m, f) dt dx$$

avec $\theta(m, f) = \frac{\|m\|^2}{f} si f > 0 \quad 0 si(m, f) = (0, 0) \quad \infty sinon$

Rq : on a ramené le pbm de transport optimal à celui de trouver la géodésique entre les deux densités.

6 Méthodes numériques

On présente le cas 1D qui nous a accaparé.

Carré espace temps : $[0, 1]^2$ que l'on discrétise :

$$G_c = \{(x_i = \frac{i}{N}, t_j = \frac{j}{P}) | 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq P\}$$

On note $E_c = (\mathbb{R}^2)^{G_c}$ l'espace des variables centrées et $V = (m_{ij}, f_{ij}) \quad 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq P$ les variables discrétisées.

Dans le but de capturer l'équation de continuité, on introduit une grille décentrée :

$$G_s^x = \{(x_i = \frac{i + 1/2}{N}, t_j = \frac{j}{P}) | -1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq P\}$$

et

$$G_s^t = \{(x_i = \frac{i}{N}, t_j = \frac{j + 1/2}{P}) | 0 \leq i \leq N, -1 \leq j \leq P\}$$

On note $E_s = \mathbb{R}^{G_s^x} \times \mathbb{R}^{G_s^t}$ l'espace des variables décentrées, et $U = (\bar{m}_{ij}, \bar{f}_{ij}) \quad 1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq P, \bar{f}_{ij}, \quad 0 \leq i \leq N, -1 \leq j \leq P$

7 Opérateurs

On introduit plusieurs opérateurs pour lier les variables décentrées et les variables centrées.

7.1 Interpolation

$$I : E_s \rightarrow E_c$$

tq

$$m_{ij} == (\bar{m}_{i+1/2,j} + \bar{m}_{i-1/2,j})/2.$$

et

$$f_{ij} == (\bar{f}_{i,j+1/2} + \bar{f}_{i,j-1/2})/2.$$

Cet opérateur s'interprète matriciellement :

$$m = \bar{m} I_m$$

et

$$f = I_f \bar{f}$$

7.2 Divergence

l'opérateur qui approxime la divergence

$$div : E_s \rightarrow \mathbb{R}^{G_c}$$

et

$$div(\bar{m}, \bar{f})_{ij} = (\bar{m}_{i+1/2,j} - \bar{m}_{i-1/2,j}) + (\bar{f}_{i,j+1/2} - \bar{f}_{i,j-1/2})$$

7.3 Frontières

Un opérateur pour extraire les frontières :

$$b(\bar{m}, \bar{f}) = ((\bar{m}_{-1/2,j}, \bar{m}_{N+1/2,j}); (\bar{f}_{i,-1/2}, \bar{f}_{i,P+1/2}))$$

et on impose les conditions aux frontières suivantes :

$$b(\bar{m}, \bar{f}) = b_0 = (0, 0, f_0, f_1);$$

7.4 Problème discrétisé

On a le problème suivant

$$\min_{U=(\bar{m}, \bar{f}) \in E_s} \theta(I(\bar{m}, \bar{f})) + \iota_C(U)$$

avec l'ensemble des contraintes :

$$C = \{(\bar{m}, \bar{f}) \in E_s \mid div(\bar{m}, \bar{f}) = 0 \text{ } b(\bar{m}, \bar{f}) = b_0\}$$

8 Résolution par algorithme de séparation de proximité

Ces algorithmes sont des généralisation des algos de gradient conjugués.

Remarque : On a $J(m, f) = \int_{[0,1]^d} \int_0^1 \frac{\|m\|^2}{f} dt dx$ donc si $f \rightarrow \infty$ on a $J \rightarrow 0$ donc ce n'est pas coercif ce qui rend l'existence de minimiseurs non triviale. Et si $f \rightarrow 0$, on a $j \rightarrow \infty$ donc les méthodes de gradient conjugués ne peuvent pas s'appliquer, le gradient n'est pas lipschitz.

On veut résoudre le pbm suivant :

$$\min_{z=(U,V) \in E_s \times E_c} G_1(z) + G_2(z)$$

où, $G_1(z) = J(U) + \iota_C(U)$ et $G_2(z) = \iota_{C_s}(z)$ et $C_s = \{z = (U, V) \in E_s \times E_c \mid V = I(U)\}$

Remarque : G_1 est la fonctionnelle originelle et G_2 vient de notre introduction des variables décalées.

On va alors calculer les opérateurs de proximités de G_1 et G_2 . On dit que G_1 est **simple** dans la mesure où :

$$Prox_{\gamma G_1}(U, V) = (Prox_{\gamma C}(U), Prox_{\gamma J}(V))$$

8.1 Opérateur de proximité de G_2

$$Prox_{\gamma C_s}(U, V) = \arg \min_{z' \in C_s} \frac{1}{2} \|z - z'\|^2 = Proj_{C_s}(U, V)$$

Suivant l'article de Papadakis, Peyré et Oudet on a :

$$Prox_{\gamma C_s}(U, V) = (\tilde{U}, I(\tilde{U}))$$

et

$$\tilde{U} = (Id + I^* I)^{-1}(U + I^*(V))$$

Où I^* est l'adjointe de I . ce qui nous donne en terme de matrice :

$$\tilde{m} = (\bar{m} + m I_m^*)(Id + I_m I_m^*)^{-1}$$

et

$$\tilde{f} = (Id + I_f^* I_f)^{-1}(\bar{f} + I_f^* f)$$

enfin : $\tilde{m} = \tilde{m} I_m$ et $\tilde{f} = I_f \tilde{f}$

Comme l'opérateur d'interpolation s'interprète matriciellement, son adjoint est donné par la transposée.

8.2 Opérateur de proximité de J

$Prox_{\gamma J}(V) = (Prox_{\gamma J}(V_k))_{k \in G_c}$ et

$$Prox_{\gamma J}(m_k, f_k) = \left(\frac{f_k^* m_k}{f_k^* + 2\gamma}, f_k^* \right) \text{ si } f^* > 0 \quad (0, 0) \text{ sinon}$$

et f_k^* est la plus grande racine réelle du polynôme de degré 3 donné par :

$$P(x) = (X - f_k)(X + 2\gamma)^2 - \gamma \|m_k\|^2$$

La racine est calculée rapidement avec l'algorithme de Newton.

8.3 Opérateur de proximité de ι_C

$$Prox_{\gamma C} = Proj_C$$

on réécrit l'ensemble des contraintes sous la forme :

$$C = \{U \in E_s \mid AU = y\} \quad A = (div, b)^T \quad y = (0, b_0)^T$$

et on obtient $Proj_C(U) = (Id + A^* \Delta^{-1} A)U + A^* \Delta^{-1} y$ avec $\Delta^{-1} = (A^* A)^{-1}$ et son problème requiert la résolution d'un problème de poisson.

9 Algorithme de Douglas Rachford

On procède à l'itération suivante : $(z^l, w^l) \in (E_s \times E_c) \times (E_s \times E_c)$ avec un w^0 donné :

$$z^{l+1} = Prox_{\gamma G_2}(w^l)$$

et

$$w^{l+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)w^l + \frac{\alpha}{2} RProx_{\gamma G_2} \circ RProx_{\gamma G_1}(w^l)$$

Où on a posé : $RProx_{\gamma G} = 2Prox_{\gamma G} - Id$.

On montre alors que pour $\alpha \in]0, 2[$ et $\gamma > 0$ la méthode converge $z^l \rightarrow z^*$ ce qui permet de retrouver la géodésique, car :

$$z^l = (U^l, V^l) \rightarrow (U^*, V^*) \quad V^* = (m^*, f^*)$$

Table des figures

1	Illustration du sous - différentiel de $ x $ en 0	10
2	Illustration de l'opérateur proximal	13

Liste des Codes