Soutenance mi-parcours PFE

Timothe Schmoderer

December 14, 2017

Au menu

Introduction

- Gaspard Monge 1871 - *Mmoire sur la thorie des dblais et des remblais*
- Leon,id Kantorovitch 1942
- JD. Benamou et Y. Brenier

Soient 2 mesures de probabilits μ et ν sur $\mathcal{R}^N$.
Un transport est une application $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ qui envoie μ sur ν, cd. :

$$\forall B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \mu\left(T^{-1}(B)\right) = \nu(B)$$

C'est une relation de conservation de masse. On note $T_{\#}\mu = \nu$.

Supposons que $\mu = f_0 dx$ et $\nu = f_1 dx$.

Notons $\mathcal{T}(f_0, f_1)$ l'ensemble des applications transport qui vrifient
On se donne un cot : $C : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$, dans notre cas, $C(x, y) = \|x - y\|^2$
Le problme de transport optimal est alors de trouver $T \in \mathcal{T}(f_0, f_1)$ qui ralise le

$$\min_{T \in \mathcal{T}(f_0, f_1)} \int C\left(x, T(x)\right) dx$$

Cette valeur est alors appele distance L^2 de Wasserstein entre f_0 et f_1.

unnumbered lists

- Introduction to LaTeX
- Course 2
- Termpapers and presentations with LaTeX
- Beamer class

lists with pause

Soient deux densits de probabilits $f_0 dx$ et $f_1 dx$ alors

$$\min_{T \in \mathcal{T}(f_0, f_1)} \int \|x - T(x)\|^2 dx = \min_{(\rho, v) \in C_v} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \rho(t,x) \|v(t,x)\|^2 dt dx$$

O :

- $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est la densit > 0.
- $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est un champ de vitesses.
- $C_v = \left\{ (\rho, v) \mid \partial_t \rho + div_x(\rho v) = 0, \; \rho(0, \dot{}) = f_0, \; \rho(1, \dot{}) = f_1 \right\}$

On pose, $m = \rho v$ et :

$$J(t,x) = \begin{cases} \frac{\|m(t,x)\|^2}{\rho(t,x)} & \text{si} \quad \rho(t,x) > 0 \\ 0 & \text{si} \quad (\rho(t,x), m(t,x)) = (0,0) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que, si $\rho \to +\infty$ alors $J(t,x) \to 0$ donc la fonctionnelle n'ets pas coercive ce qui rend l'existence minimiseurs non trivial. Et si $\rho \to 0$ alors $J(t,x) \to +\infty$ donc le gradient n'est pas lipschitz, ce qui nous empeche d'utiliser les algorithmes de minimisation classique comme (algo du gradient conjusgu).

Dans ce qui suit, on se place en dimension 1 en espace.

Avantages

- rapidit de mise en oeuvre
- extensible facielement en dimension N

Inconvnients

- asymtrie de la drive

Avantages

- rapidit de mise en oeuvre
- calcul rapide

Inconvnients

- matrices trs mal conditionnes

Avantages

- prcision

Inconvnients

- difficile mettre en oeuvre

Exemple 1

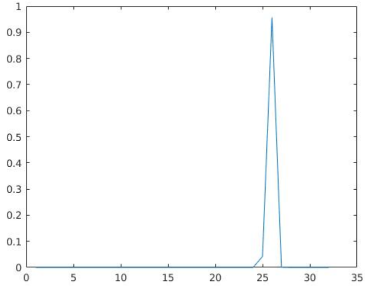

Figure: f_0

Exemple 1

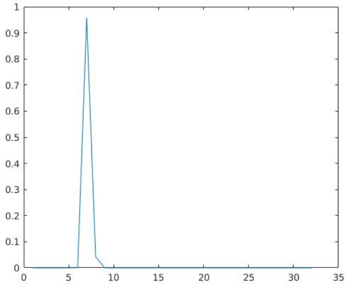

Figure: f_1

Exemple 1

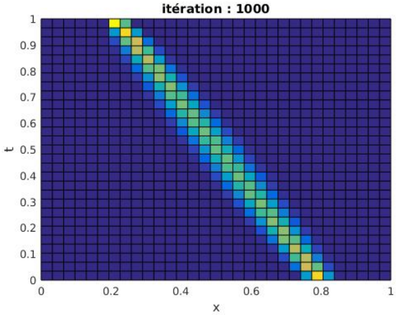

Figure: Transport f_0 sur f_1

Exemple 2

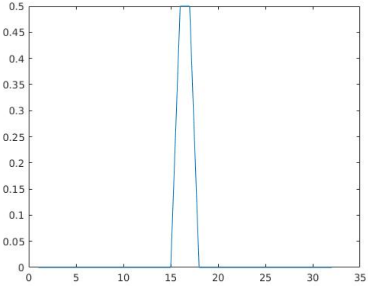

Figure: f_0

Exemple 2

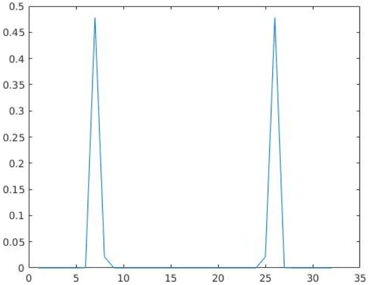

Figure: f_1

Exemple 2

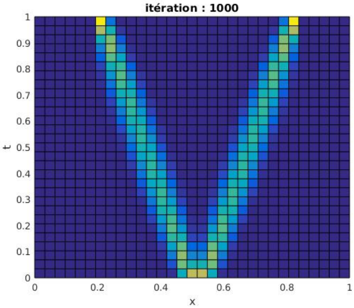

Figure: Transport f_0 sur f_1

Exemple 3

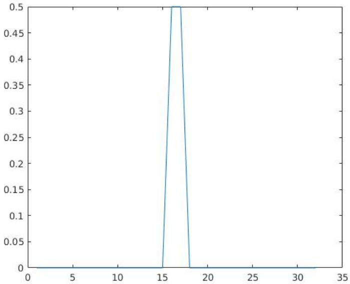

Figure: f_0

Exemple 3

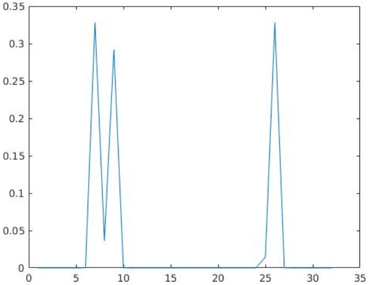

Figure: f_1

Exemple 3

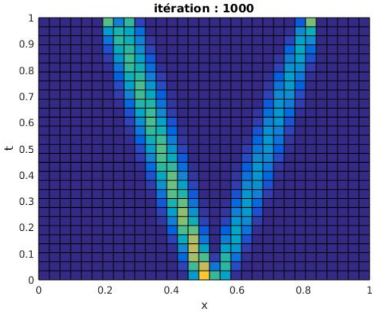

Figure: Transport f_0 sur f_1