

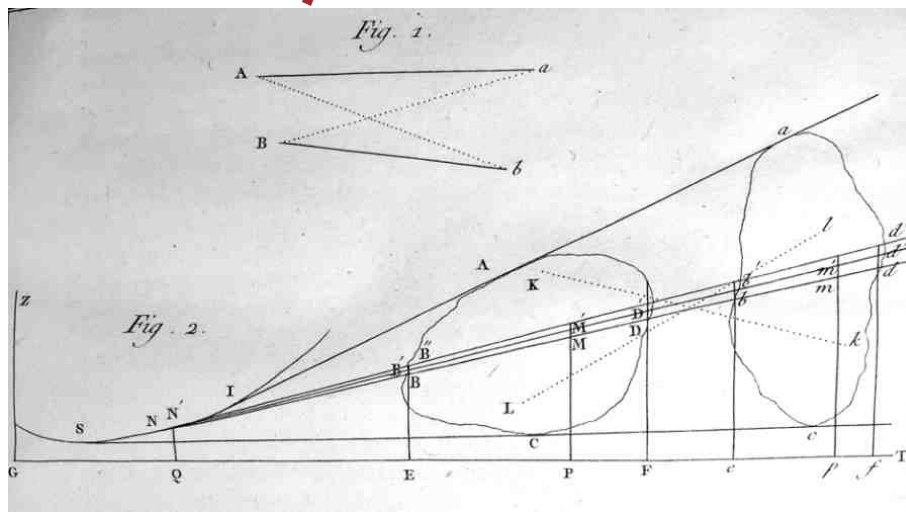
Level set, transport optimal, applications à l'image

Cours proposé aux, et corédigé par les étudiants de l'Ensimag 3A et du Master MIA de l'UFR IM2AG

Enseignant : Emmanuel Maitre*

Etudiants 2012-2013 : Arguillère Quentin, Balbastre Yaël, Casseau Benoît,
Coulet Flavien, Foare Marion, Guetat Abdefettah, Laurent Gilles,
Louis Thibault, Métayer Anne, Mouterde Clémence, Notheisen Sabine,
Rannaud Victor, Rouot Jérémy, Roussel Cédric, Skandalis Jason.

30 septembre 2013



"C'est en traitant une de ces applications que Monge a donné sa théorie de la courbure des surfaces ; on la trouve exposée pour la première fois dans le Mémoire sur les déblais et remblais publié dans les mémoires de l'académie des sciences de Paris, pour l'année 1781. Monge y fait voir que les routes suivies pour aller du déblai au remblai étant supposées rectilignes, elles sont les normales d'une surface unique ; il part de là pour décomposer le faisceau de ces normales en groupes de surfaces développables qui ont pour arêtes de rebroussement, les lignes, lieux des centres de courbure de la surface indiquée, et qui tracent autant de lignes de courbure sur cette surface, limite la plus avantageuse du déblai ou du remblai supposés indéfinis d'un côté seulement. "

Charles Dupin, *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*. Paris, Bachelier 1819, p. 230.

Image et texte récupérés sur le site <http://alta.mathematica.pagesperso-orange.fr>

*Emmanuel.Maitre@imag.fr, <http://ljk.imag.fr/membres/Emmanuel.Maitre/>

Table des matières

1	Introduction	5
2	Outils mathématiques	5
2.1	Notations pour le calcul différentiel	5
2.2	Courbes caractéristiques	5
2.3	Rappel des notations	7
2.4	Formules de Reynolds	7
2.5	Equation de transport	9
2.6	Réarrangements d'ensembles et de fonctions	10
2.7	Réarrangements et modèle AHT	12
3	Méthodes de segmentation par Level Set en analyse d'image	13
3.1	Introduction	13
3.2	Représentation Level Set	13
3.3	Opérations ensemblistes et fonctions niveau	14
3.4	Principe général de la segmentation d'images et des contours actifs	15
3.5	Contours actifs en Level-set : généralisation	16
3.5.1	Calcul d'intégrales de volume et de surface	16
3.5.2	Déformations et Level Set	18
3.5.3	Energie et force élastiques en Level Set	20
3.5.4	Cas de l'énergie de courbure	21
3.5.5	Formulation level-set générale d'une méthode de contour actif à gradient	21
3.6	Méthodes sans gradient ou par régions	21
3.7	Aspects numériques de la méthode level-set	23
3.7.1	Réinitialisation ou renormalisation de ϕ ?	23
3.7.2	Schémas WENO pour l'équation de transport	25
4	Introduction au transport optimal et application à l'analyse d'images	29
4.1	Problèmes de Kantorovich et de Monge	29
4.2	Les minimiseurs sont des gradients de fonctionnelles convexes	31
4.3	Formulation mécanique des fluides	31
4.4	Résolution numérique	34
4.4.1	Résolution du problème avec trajectoire : algorithme Benamou-Brenier	34
4.4.2	Résolution du problème sans trajectoire : Algorithme de Angenent-Haker-Tanenbaum	36
4.4.3	Construction d'une application non optimale	37
4.4.4	Annuler le rotationnel de T^0	37
4.4.5	Autre algorithme	37
4.5	Applications existantes à l'image	37
4.5.1	Distance élastique de Younes	37
4.5.2	Exemples d'application de l'algorithme de Benamou-Brenier	38
4.5.3	Algorithme de registration/déformation de Haker-Tannenbaum-Angenent	38
4.5.4	Articles plus récents	39
4.6	Assimilation de données images vs transport optimal	39
5	Transport optimal et énergies plus générales	39
5.1	Distance mixte L^2 -Wasserstein	39
5.2	Cas où les densités n'ont pas la même masse	41

6	Pour aller plus loin : revue d'articles par les étudiants	42
6.1	Anne Metayer : <i>Fast and robust clinical triple region image segmentation using one level set function</i> de Shuo Li, Thomas Fevens, Adam Krzyzak, Chao Jin, and Song Li, Lecture Notes in Computer Science (2006)	42
6.1.1	Méthodes existantes	42
6.1.2	Méthode proposée	42
6.1.3	Résultats	43
6.1.4	Conclusion	43
6.2	Thibault Louis : <i>A Binary Level Set Model and some Applications to Mumford-Shah Image Segmentation</i> de Johan Lie, Marius Lysaker and Xue-Cheng Tai, IEEE Transactions on Image Processing (2006)	43
6.3	Clémence Mouterde : <i>Graph Cut Optimization for the Piecewise Constant Level Set Method Applied to Multiphase Image Segmentation</i> , de Egil Bae and Xue-Cheng Tai, Lecture Notes in Computer Science (2009)	45
6.3.1	Le modèle de Mumford-Shah et la méthode PCLSM	45
6.3.2	L'optimisation par coupure de graphes	46
6.3.3	Quelques résultats	47
6.4	Cédric Roussel : <i>Four-Color Theorem and Level Set Methods for Watershed Segmentation</i> , de Erlend Hodneland, Xue-Cheng Tai, Hans-Hermann Gerdes, Int J Comput Vis (2009)	48
6.4.1	Théorie.	48
6.4.2	Applications	51
6.4.3	Conclusion	52
6.5	Jérémy Rouot : <i>Active contours with selective local or global segmentation : A new formulation and level set method</i> , de Kaihua Zhang, Lei Zhang, Huihui Song, Wengang Zhou, Image and Vision Computing (2010)	52
6.5.1	Introduction	52
6.5.2	État de l'art	53
6.5.3	Le nouveau modèle proposé	53
6.6	Yaël Balastre : <i>Image Sequence Interpolation Based on Optical Flow, Segmentation, and Optimal Control</i> , Kanglin Chen and Dirk A. Lorenz, IEEE Transactions on Image Processing (2012)	54
6.6.1	Introduction	54
6.6.2	Méthode	54
6.6.3	Conclusion	55
6.7	Victor Ranaud : <i>Colour, texture, and motion in levelset based segmentation and tracking</i> , Thomas Broxa, Mikaël Roussonb, Rachid Derichec, Joachim Weickert, Image and Vision Computing (2010)	55
6.7.1	Récupération des propriétés de l'image	56
6.7.2	Segmentation du domaine	56
6.8	Sabine Notheisen : <i>A Review of Statistical Approaches to Level Set Segmentation : Integrating Color, Texture, Motion and Shape</i> , D. Cremers et al, International Journal of Computer Vision (2007)	57
6.8.1	Méthodes de level set pour la segmentation de l'image	57
6.8.2	Formulation statistique de la segmentation	57
6.8.3	Intensité, couleur, texture et texture dynamique	58
6.8.4	Mouvement	58
6.9	Marion Foare : <i>Geodesic Shape Retrieval via Optimal Mass Transport</i> , Julien Rabin, Gabriel Peyré, and Laurent D. Cohen, 11th European Conference on Computer Vision, Heraklion, Crete : Greece (2010)	58

6.9.1	Distance géodésique	58
6.9.2	Descripteurs géodésiques	59
6.9.3	Recherche via transport optimal	59
6.9.4	Exemples	59
6.10	Benoît Casseau : <i>A high-throughput active contour scheme for segmentation of histopathological imagery</i> , Jun Xu, Andrew Janowczyk, Sharat Chandran, Anant Madabhushi, Medical Image Analysis (2011)	60
6.10.1	Introduction	60
6.10.2	Etude de l'algorithme	60
6.10.3	Résultats	61
6.10.4	Conclusion	61
6.11	Flavien Coulet : <i>Segmentation of interest region in medical volume images using geometric deformable model</i> , Myungeun Lee, Wanhyun Cho, Sunworl Kim, Soonyoung Park, Jong Hyo Kim, Computers in Biology and Medicine (2012)	61
6.11.1	Introduction	61
6.11.2	Modèles actifs déformables au level set	61
6.11.3	Méthode "hybride"	61
6.11.4	Analyses	62
6.12	Quentin Arguillière : <i>Tensor diffusion level set method for infrared targets contours extraction</i> , Meng Li, Chuanjiang He, Yi Zhan, Infrared Physics & Technology (2012)	63
6.12.1	Approche théorique	63
6.12.2	Résultats expérimentaux	64
6.12.3	Conclusion	64
6.13	Jason Skadalis : <i>Combinatorial Optimization of the piecewise constant Mumford-Shah functional with application to scalar/vector valued and volumetric image segmentation</i> , Noha El-Zehiry, Prasanna Sahoo, Adel Elmaghraby, Image and Vision Computing (2011)	64
6.13.1	Introduction et rappels	64
6.13.2	Méthode proposée	65
6.13.3	Performances et conclusion	65

1 Introduction

Une image peut être considérée comme une application d'un domaine de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3 dans le cas d'images tridimensionnelles) à valeurs dans un sous-ensemble de \mathbb{R} (ou de \mathbb{R}^3 pour des images couleurs). De nombreux algorithmes de détection de contour, de reconnaissance de formes, de débruitage, sont basés sur des formules équations aux dérivées partielles.

C'est une première partie de ce cours qui correspond à introduire une représentation eulérienne des régions d'intérêt de l'image. On commencera par donner les grands principes de la description eulérienne des interfaces et de ce qu'on peut en tirer géométriquement. Puis on détaillera quelques algorithmes de contour actifs développés ces dernières années. On explicitera les outils numériques nécessaires à la mise en oeuvre de ces algorithmes.

Le transport optimal est une thématique ancienne puisqu'introduite en 1781 par Gaspard Monge à propos de l'optimisation du transport de matériaux de construction. Elle a des applications en économie et a été formulée sous une forme mécanique des fluides par Brenier, sous la forme d'une équation de conservation de la masse agissant comme la contrainte d'une énergie cinétique.

L'utilisation de cet outil en analyse d'images a été proposée par Benamou-Brenier puis par Haker et al. Leur travail a permis de mettre au point une méthode permettant d'interpoler entre deux images (ou plus) d'une manière prenant en compte le déplacement d'une image sur l'autre. Jusqu'à présent ces méthodes ont été étudiées avec des énergies de type cinétique.

Ce cours considère le rapprochement de ces deux thématiques, à savoir l'étude du transport optimal pour des énergies plus générales dans un contexte de traitement d'images, au moyen de formulation issues de représentation level-set. Le but est de comprendre comment caractériser le minimum du problème de transport optimal associé à ces énergies et proposer un algorithme pour le calculer de manière efficace.

2 Outils mathématiques

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , et $T > 0$. On considère un champ de vecteurs $u : \overline{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que

$$(H) \quad u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [0, T]) \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T]$$

2.1 Notations pour le calcul différentiel

Les dérivées partielles seront notées parfois en indice : $\partial_t \phi := \frac{\partial \phi}{\partial t}$. Si la quantité dérivée comporte un indice, on sépare l'indice de la variable de dérivation par une virgule : f_{i,x_j} . On note pour une fonction f de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , Df sa différentielle et ∇f son gradient. On a donc pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, $Df(x)(h) = \nabla f(x) \cdot h$. Pour un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $[Dv]$ est la différentielle de v , c'est à dire l'application linéaire de matrice ∇v ou v_x , la matrice carrée de taille d dont l'élément ligne i colonne j vaut v_{i,x_j} . Avec ces notations, pour $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $X : \mathbb{R}^d \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ on a les formules de dérivations composées suivantes :

$$\partial_t(\phi(X)) = \nabla \phi(X) \cdot \partial_t X, \quad D[\phi(X)] = D\phi(X)[DX], \quad D[v(X)] = [Dv](X)[DX]$$

où l'on a noté multiplicativement la composition des applications.

2.2 Courbes caractéristiques

Pour $\xi \in \Omega$ et $s \in]0, T]$, On note $\tau \rightarrow X(\tau; \xi, s)$ la solution du système différentiel $X_\tau = u(X, \tau)$ muni de la condition initiale $X(s) = \xi$. La solution de ce système existe et est unique dans le cadre classique par exemple sous l'hypothèse que le champ de vitesse est lipschitzien en x , uniformément en t . Des solutions plus générales, définies presque partout, ont été introduites par Lions et DiPerna [35].

Nous nous sommes placés dans le cadre d'un champ de vitesse régulier (hypothèse (H)), qui est plus forte que u uniformément lipschitzien car Ω est borné), de sorte que nous considérons ici des solutions classiques.

L'interprétation physique de $X(\tau; \xi, s)$ est la position à l'instant τ d'une particule du milieu continu située à l'instant s à la position ξ . Intuitivement, le lemme suivant est évident :

Lemme 1 *Sous l'hypothèse (H) on a*

$$\forall (t_1, t_2) \in [0, T]^2, \forall x \in \Omega, \quad X(t_1; X(t_2; x, t_1), t_2) = x$$

Démonstration. Soit $\xi = X(t_2; x, t_1)$. Alors $X(\tau; \xi, t_2)$ est solution du système différentiel $X_\tau = u(X, \tau)$ muni de la condition $X(t_2) = \xi$. Mais $X(\tau; x, t_1)$ est solution du même système et vérifie $X(t_2; x, t_1) = \xi$. D'après (H) la solution de ce système est unique donc $X(\tau; x, t_1) = X(\tau; \xi, t_2)$. En particulier nous avons l'identité annoncée en $\tau = t_1$, puisque $X(t_1; x, t_1) = x$. \square

La propriété ci-dessus nous indique que la transformation $x \rightarrow X(t_1; x, t_2)$ est inversible, d'inverse $X(t_2; \cdot, t_1)$. En fait nous avons plus :

Proposition 1 *L'application $x \rightarrow X(t_1; x, t_2)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de Ω dans lui-même. Son jacobien $J(t_1; x, t_2)$, continu en x , est strictement positif, est tel que $t \rightarrow J(t; x, t_2)$ est de classe \mathcal{C}^1 en t et vérifie*

$$\partial_t J(t_1; x, t_2) = (\operatorname{div} u)(X(t_1; x, t_2), t_1) J(t_1; x, t_2)$$

Démonstration. L'inversibilité de $x \rightarrow X(t_1; x, t_2)$ provient du lemme ci-dessus. La régularité \mathcal{C}^1 de X est classique sous les hypothèses faites sur u ; cela correspond en effet à un résultat de régularité de la solution d'un système différentiel par rapport à des paramètres. Pour voir ceci, posons $Z(\tau; x, t) = X(\tau + t; x, t) - x$. Le système différentiel en X est équivalent au système différentiel $Z_\tau = u(Z + x, \tau + t)$ avec la condition initiale $Z(0) = 0$. Comme u a été supposé de classe \mathcal{C}^1 en (x, t) , on en déduit que X est de classe \mathcal{C}^1 par rapport à (τ, x, t) , en appliquant, par exemple, le théorème page 286 de [33] ou le théorème 3.6.1 page 151 de [21]. On pourra aussi consulter [34], pages 182 à 192. En différentiant la relation du lemme 1 par rapport à x , on a

$$[DX](t_1; X(t_2; \xi, t_1), t_2)[DX](t_2; x, t_1) = \mathbb{I}_d$$

où \mathbb{I}_d représente la matrice identité de $M_d(\mathbb{R})$. Soit en prenant le déterminant

$$J(t_2; x, t_1) J(t_1; X(t_2; \xi, t_1), t_2) = 1$$

qui prouve que J ne s'annule pas. A (x, t) fixé, comme $\tau \rightarrow X_x(\tau; x, t)$ vérifie $Y_\tau = u_x(X(\tau; x, t), \tau)Y$ et $Y(t) = \mathbb{I}_d$, et que $\tau \rightarrow u_x(X(\tau; x, t), \tau)$ est continu, $\tau \rightarrow X_x(\tau; x, t)$ et donc $\tau \rightarrow J(\tau; x, t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 . Comme $J(t; x, t) = 1$, et que J ne s'annule pas, il est donc toujours strictement positif. D'autre part en dérivant J par ligne, on a en dimension deux,

$$\begin{aligned} \partial_t J &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} X_{1,x_1} & X_{1,x_2} \\ X_{2,x_1} & X_{2,x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} X_{1,x_1} & \frac{\partial}{\partial t} X_{1,x_2} \\ X_{2,x_1} & X_{2,x_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_{1,x_1} & X_{1,x_2} \\ \frac{\partial}{\partial t} X_{2,x_1} & \frac{\partial}{\partial t} X_{2,x_2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_{1,x_1}(X)X_{1,x_1} + u_{1,x_2}(X)X_{2,x_1} & u_{1,x_1}(X)X_{1,x_2} + u_{1,x_2}(X)X_{2,x_2} \\ X_{2,x_1} & X_{2,x_2} \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} X_{1,x_1} & X_{1,x_2} \\ u_{2,x_1}(X)X_{1,x_1} + u_{2,x_2}(X)X_{2,x_1} & u_{2,x_1}(X)X_{1,x_2} + u_{2,x_2}(X)X_{2,x_2} \end{vmatrix} \\ &= u_{1,x_1}(X) \begin{vmatrix} X_{1,x_1} & X_{1,x_2} \\ X_{2,x_1} & X_{2,x_2} \end{vmatrix} + u_{1,x_2}(X) \begin{vmatrix} X_{2,x_1} & X_{2,x_2} \\ X_{2,x_1} & X_{2,x_2} \end{vmatrix} + u_{2,x_1}(X) \begin{vmatrix} X_{1,x_1} & X_{1,x_2} \\ X_{1,x_1} & X_{1,x_2} \end{vmatrix} + u_{2,x_2}(X) \begin{vmatrix} X_{1,x_1} & X_{1,x_2} \\ X_{2,x_1} & X_{2,x_2} \end{vmatrix} \\ &= u_{1,x_1}(X) \times J + u_{1,x_2}(X) \times 0 + u_{2,x_1}(X) \times 0 + u_{2,x_2}(X) \times J = (\operatorname{div} u)(X) J \end{aligned}$$

La démonstration se généralise sans difficulté à la dimension d . \square

Remarque 1 On peut se demander que ce l'on obtient en dérivant la fonction $t \rightarrow X(\tau; x, t)$, à τ, x fixés. Pour cela on dérive l'identité démontrée au lemme 1 : $X(\tau; X(t; x, \tau), t) = x$ par rapport à t ce qui donne

$$\partial_t X(\tau; X(t; x, \tau), t) + [DX](\tau; X(t; x, \tau), t)X_\tau(t; x, \tau) = 0$$

D'autre part $\partial_\tau X(\tau; x, t) = u(X(\tau; x, t), \tau)$ et on note $[DX]u$ sous la forme $u \cdot \nabla X$. En renommant $X(\tau; x, t)$ en x , on a donc

$$\partial_t X(\tau; x, t) + u(x, t) \cdot \nabla X(\tau; x, t) = 0$$

Donc la fonction $(x, t) \rightarrow X(\tau; x, t)$ vérifie l'équation de transport $\partial_t X + u \cdot \nabla X = 0$ accompagnée de la condition initiale en $t = \tau$: $X(\tau; x, \tau) = x$.

Exercice 1 Soit $J(x, t) = \det \nabla Y(x, t)$, montrer que $\partial_t J + u \cdot \nabla J = -J \operatorname{div} u$.

Avec ces notations, on appelle variables lagrangiennes (ξ, t) , et variables eulériennes (x, t) où $x = X(t; \xi, 0)$. Dorénavant on notera pour simplifier $x = X(t, \xi)$. A noter que de manière symétrique, on a d'après le lemme ci-dessus $\xi = X(0; x, t)$. On notera ces caractéristiques rétrogrades $Y(t, x)$. La régularité du changement de variables eulérien-lagrangien dans notre cadre nous permet donc de passer d'une représentation à l'autre très simplement.

2.3 Rappel des notations

Dans la suite nous utiliserons souvent les courbes caractéristiques du champ de vitesse du milieu continu. On notera $(x, t) \rightarrow X(x, t)$ les caractéristiques (resp. $(x, t) \rightarrow Y(x, t)$ les caractéristiques rétrogrades) solutions de $\partial_t X = u(X, t)$ et $X(0, x) = x$ (resp. $\partial_t Y + u \cdot \nabla Y = 0$ et $Y(0, x) = x$). Sous des hypothèses de régularité sur u (par exemple $W^{1, \infty}$ en espace) on a donc vu que $x \rightarrow X(x, t)$ et $x \rightarrow Y(x, t)$ sont deux difféomorphismes inverses l'un de l'autre : $X(Y(x, t), t) = x$ et $Y(X(x, t), t) = x$. Leurs jacobiens ne s'annulent donc pas et si on note $J(x, t) = \det \nabla Y(x, t)$, on a $\partial_t J + u \cdot \nabla J = -J \operatorname{div} u$.

2.4 Formules de Reynolds

Nous aurons à dériver des fonctionnelles intégrales dont le domaine d'intégration est une des variables d'optimisation. La formulation choisie ici est de considérer que cette variable d'optimisation se déplace avec un champ de vitesse u au cours du temps, et du coup la variation temporelle d'énergie se trouve être la différentielle par rapport à la courbe appliquée au vecteur vitesse. Cela simplifie l'expression et évite de manipuler des dérivées fonctionnelles abstraites. Soit $f(\cdot, t)$ une fonction intégrable sur Ω et $\omega \subset \Omega$. Soit $\omega(t) = X(t; \omega)$ qui représente la position à l'instant t des particules situées initialement dans ω . Alors d'après la proposition 1, le changement de variables $x = X(t; \xi)$, de jacobien strictement positif, donne

$$\int_{\omega(t)} f(x, t) dx = \int_{\omega} f(X(t; \xi), t) J(t, \xi) d\xi$$

Cette formule de changement de variables nous permet de démontrer le théorème de dérivation de Reynolds.

Proposition 2 Soit un ouvert $\omega \subset \Omega$, et soit $\omega(t) = X(t; \omega)$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$, alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} f(x, t) dx = \int_{\omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fu) dx \quad (1)$$

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} f(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\omega} f(X(t; \xi), t) J(t, \xi) d\xi \\ &= \int_{\omega} \left[\frac{\partial X}{\partial t}(t; \xi) \cdot \nabla f(X(t; \xi), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(X(t; \xi), t) \right] J(t, \xi) + f(X(t; \xi), t) \frac{\partial J}{\partial t}(t, \xi) d\xi \end{aligned}$$

D'après la proposition 1 nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} f(x, t) dx &= \int_{\omega} \left[u(X(t; \xi), t) \cdot \nabla f(X(t; \xi), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(X(t; \xi), t) \right] J(t, \xi) \\ &\quad + f(X(t; \xi), t) (\operatorname{div} u)(X(t; \xi), t) J(t, \xi) d\xi \\ &= \int_{\omega} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fu) \right] (X(t; \xi), t) J(t, \xi) d\xi = \int_{\omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fu) dx \end{aligned}$$

□

Remarque 2 (Conservation du volume : incompressibilité) *Un milieu est dit incompressible si tout ouvert ω se déforme en un ouvert $\omega(t) = X(\omega, t)$ de même mesure pour tout t . On a donc*

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} dx = 0$$

d'où en appliquant la formule de Reynolds, $\int_{\omega(t)} \operatorname{div} u dx = 0$ et ceci pour tout $\omega(t)$. D'où la condition d'incompressibilité :

$$\operatorname{div} u = 0$$

D'après la formule de dérivation de J on voit que cette condition s'écrit aussi $J = 1$.

On dispose d'un résultat analogue pour une surface se déplaçant avec le milieu continu :

Proposition 3 *Soit S une hypersurface régulière incluse dans Ω et $S(t) = X(t; S)$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$, alors*

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} f(x, t) d\sigma = \int_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fu) - f(\nabla u \cdot n) \cdot n d\sigma \quad (2)$$

où n est un champ de vecteurs unitaires normal à $S(t)$.

Démonstration. On se place, par exemple, dans \mathbb{R}^3 . Quitte à localiser on suppose que S admet un paramétrage $\gamma : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$ et on note, pour $s \in [0, 1]^2$, $x(s, t) = X(t; \gamma(s))$. On a

$$\int_{S(t)} f(x) d\sigma = \int_{[0, 1]^2} f(x(s, t), t) |x_{s_1} \wedge x_{s_2}| ds = \int_{[0, 1]^2} f(x(s, t), t) |X_x \gamma_{s_1} \wedge X_x \gamma_{s_2}| ds$$

Or pour un vecteur v quelconque,

$$(X_x \gamma_{s_1} \wedge X_x \gamma_{s_2}) \cdot X_x v = \det(X_x \gamma_{s_1}, X_x \gamma_{s_2}, X_x v) = \det(X_x [\gamma_{s_1}, \gamma_{s_2}, v])$$

ou encore

$$X_x^t (X_x \gamma_{s_1} \wedge X_x \gamma_{s_2}) \cdot v = J \det(\gamma_{s_1}, \gamma_{s_2}, v) = J(\gamma_{s_1} \wedge \gamma_{s_2}) \cdot v$$

pour tout vecteur v . Donc

$$X_x \gamma_{s_1} \wedge X_x \gamma_{s_2} = J X_x^{-t} (\gamma_{s_1} \wedge \gamma_{s_2})$$

En notant

$$n(t) = \frac{x_{,s_2} \wedge x_{,s_1}}{|x_{,s_2} \wedge x_{,s_1}|} \quad N = \frac{\gamma_{,s_2} \wedge \gamma_{,s_1}}{|\gamma_{,s_2} \wedge \gamma_{,s_1}|}$$

(N est indépendant de t) on a donc les relations

$$|X_x \gamma_{,s_1} \wedge X_x \gamma_{,s_2}| n = J |\gamma_{,s_2} \wedge \gamma_{,s_1}| X_x^{-t} N \quad n = \frac{X_x^{-t} N}{|X_x^{-t} N|} \quad N = \frac{X_x^t n}{|X_x^t n|}$$

Reprenons l'intégrale de surface

$$\int_{S(t)} f(x, t) d\sigma = \int_{[0,1]^2} f(X(t; \gamma), t) J |X_x^{-t} N| |\gamma_{,s_1} \wedge \gamma_{,s_2}| ds$$

et dérivons la par rapport à t pour obtenir

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} f(x, t) d\sigma = \int_{[0,1]^2} [((\partial_t f + u \cdot \nabla f) J + \partial_t J f) |X_x^{-t} N| + f J \partial_t |X_x^{-t} N|] |\gamma_{,s_1} \wedge \gamma_{,s_2}| ds$$

avec $\partial_t J = J \operatorname{div} u$. Or

$$\partial_t |X_x^{-t} N| = \frac{X_{xt}^{-t} N \cdot X_x^{-t} N}{|X_x^{-t} N|} = X_{xt}^{-t} N \cdot n$$

et en dérivant $X_x X_x^{-1} = \mathbb{I}$, on a $X_{xt} X_x^{-1} + X_x X_{xt}^{-1} = 0$ avec $X_{xt} = u_x X_x$. Donc $X_{xt}^{-1} = -X_x^{-1} u_x$ et $X_{xt}^{-t} = -u_x^t X_x^{-t}$. Finalement nous avons donc

$$\partial_t |X_x^{-t} N| = -u_x^t X_x^{-t} N \cdot n = -u_x^t n \cdot n |X_x^{-t} N| = -u_x n \cdot n |X_x^{-t} N|$$

ce qui démontre la formule. \square

2.5 Equation de transport

L'équation de transport par un champ de vitesse de classe \mathcal{C}^1 nul au bord d'un domaine Ω d'une fonction ϕ_0 s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \phi + u \cdot \nabla \phi = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \phi = \phi_0 & \text{sur } \Omega \times \{0\} \end{cases}$$

Passons en revue quelques propriétés de ces équations linéaires :

Proposition 4 *Supposons ϕ_0 de classe \mathcal{C}^1 , le problème ci-dessus admet une solution unique de classe \mathcal{C}^1 donnée par*

$$\phi(x, t) = \phi_0(Y(x, t)).$$

Démonstration. Calculons

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(X(\tau; x, t), \tau) = \partial_t \phi(X(\tau; x, t), \tau) + X_\tau(\tau; x, t) \cdot \nabla \phi(X(\tau; x, t), \tau) = 0$$

en remarquant que $\partial_\tau X(\tau; x, t) = u(X(\tau; x, t), \tau)$, et en utilisant l'équation. Donc $\phi(X(\tau; x, t), \tau)$ ne dépend pas de τ , si bien qu'en prenant $\tau = t$ et $\tau = 0$ on obtient $\phi(X(t; x, t), t) = \phi(X(0; x, t), 0)$ soit $\phi(x, t) = \phi_0(Y(x, t))$. \square

Remarque 3 *On retrouve ainsi le résultat de la remarque 1 coordonnée par coordonnée : en effet dans le cas du choix $\phi_0(x) = x_i$, on obtient $\phi(x, t) = Y_i(x, t)$ qui vérifie bien l'équation de transport.*

Le corollaire ci-dessous est intéressant pour construire une fonction solution d'une équation de transport à partir de solutions correspondant à des conditions initiales élémentaires.

Corollaire 1 Supposons que la condition initiale ϕ_0 soit de la forme $\phi_0(x) = F(\phi_0^1(x), \dots, \phi_0^N(x))$ où F est une fonction régulière de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} et les ϕ_0^k sont \mathcal{C}^1 . Alors

$$\phi(x, t) = F(\phi^1(x, t), \dots, \phi^N(x, t))$$

où ϕ^k est la solution de l'équation de transport de condition initiale ϕ_0^k .

Démonstration. Cela découle trivialement de l'expression de la solution donnée dans la proposition précédente. \square

A noter qu'on peut donner facilement, par dualité, un sens à la solution d'une équation de transport pour une condition initiale de type mesure. Rappelons que l'on note $\mathcal{M}(\Omega)$ le dual de l'espace $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ des fonctions continues à support compact sur Ω . En particulier les fonctions $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ sont dans cet espace et $\langle f, h \rangle = \int_{\Omega} f(x)h(x)dx$.

Proposition 5 Soit $\phi_0 \in \mathcal{M}(\Omega)$ et u vérifiant (H). Alors l'équation de transport de condition initiale ϕ_0 admet une unique solution $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{M}(\Omega))$, au sens

$$\forall h \in \mathcal{C}_c^1(\Omega) \langle \partial_t \phi, h \rangle - \langle \phi, \operatorname{div}(uh) \rangle = 0$$

Elle est définie par

$$\forall h \in \mathcal{C}_c^0(\Omega), \quad \langle \phi, h \rangle = \langle \phi_0, \xi \rightarrow h(X(t; \xi))J(t; \xi) \rangle$$

On la note symboliquement $\phi_0(Y(x, t))$.

Démonstration. Ces outils sont unes des briques de bases des méthodes particulières : Voir [26] ou [75, 76]. Formellement on écrit, pour $h \in \mathcal{C}_c^1$, et en utilisant la proposition 1,

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \phi, h \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \phi, h \rangle = \frac{d}{dt} \langle \phi_0, \xi \rightarrow h(X)J(t; \xi) \rangle \\ &= \langle \phi_0, \xi \rightarrow \partial_t X(t, \xi) \cdot \nabla h(X)J(t, \xi) + h(X)\partial_t J(t, \xi) \rangle \\ &= \langle \phi_0, \xi \rightarrow u(X, t) \cdot \nabla h(X)J(t, \xi) + h(X)(\operatorname{div} u)(X, t)J(t, \xi) \rangle \\ &= \langle \phi_0, \xi \rightarrow \operatorname{div}(uh)(X)J(t, \xi) \rangle = \langle \phi, \operatorname{div}(uh) \rangle \end{aligned}$$

\square

2.6 Réarrangements d'ensembles et de fonctions

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction mesurable, on dit que f^* est un réarrangement de f si pour toute fonction $H : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $H \circ f$ est intégrable sur \mathbb{R}^n , on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(f(x))dx = \int_{\mathbb{R}^n} H(f^*(x))dx.$$

Remarque 4 Cela signifie que seules les valeurs de la fonction comptent, pas nécessairement l'endroit où ces valeurs sont prises. Autrement dit, la mesure des ensembles de même niveau (au sens généralisé si $p > 1$) de f et f^* sont égales. Ainsi la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1, 1]$ et celle de l'union d'intervalles $[-2, -1] \cup [1, 2]$ sont-elles des réarrangements l'une de l'autre.

Un exemple fondamental est la solution $\phi(x, t)$ d'une équation de transport par un champ u à divergence nulle. On a $\phi(x, t) = \phi^0(Y(x, t))$ avec $\det \nabla X = 1$ du fait de $\operatorname{div} u = 0$. D'où le résultat par changement de variables. De même les flots $x \rightarrow X(x, t)$ et $x \rightarrow Y(x, t)$ d'un champ incompressible sont deux réarrangements de l'identité. Mais on peut aussi construire des réarrangements à la main : par exemple en reprenant un passage du livre de Lieb and Loss [61] qu'on pourra consulter pour des cas plus

généraux (p. 26 et 80). Soit A un sous-ensemble de mesure finie (de Lebesgue) de \mathbb{R}^n , on définit son réarrangement symétrique A^* comme la boule ouverte centrée à l'origine de même mesure (volume dans \mathbb{R}^3) que A . Pour réarranger des fonctions, nous allons utiliser cette définition sur les ensembles de niveau de celles-ci. On notera χ_A la fonction caractéristique d'un ensemble A (valant 1 sur A et 0 en dehors). Le réarrangement symétrique monotone de χ_A est alors naturellement défini par χ_{A^*} . Pour des fonctions plus générales on utilise le théorème du mille-feuille :

Proposition 6 *Soit f une fonction positive ou nulle, mesurable sur \mathbb{R}^n . Alors on a presque partout,*

$$f(x) = \int_0^\infty \chi_{\{f>t\}}(x) dt.$$

Le nom de mille-feuille est bien illustré si on remplace l'intégrale par une somme de Riemann et qu'on fait un petit dessin. Cette formule s'obtient en écrivant

$$f(x) = \int_0^{f(x)} dt = \int_0^\infty \chi_{\{f>t\}}(x) dt.$$

Pour une fonction mesurable quelconque on définit alors son réarrangement symétrique monotone par

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}}(x) dt.$$

Un résultat important et en lien avec le transport optimal a été obtenue en 1991 par Brenier :

Théorème 1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné de mesure non nulle. Soit $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ telle que $\text{mes}(f^{-1}(N)) = 0$ pour tout N de mesure nulle dans \mathbb{R}^n . Alors il existe un réarrangement unique $\nabla\Psi \in L^2$ de f , avec Ψ convexe, et une unique application s conservant la mesure tels que*

$$f = \nabla\Psi \circ s.$$

De plus, s est l'unique projection L^2 de f sur l'ensemble des applications conservant la mesure, c'est à dire qu'il minimise $\|f - \sigma\|_{L^2(\Omega)}$ parmi toutes les applications σ conservant la mesure.

Démonstration. Par préserver la mesure nous entendons que pour tout ensemble mesurable A , $s^{-1}(A)$ est mesurable et de même mesure que A . La démonstration originale est dans [14]. Une démonstration élémentaire figure dans [43]. Voir aussi [87]. \square

Remarque 5 *Dans quelques cas simples on peut écrire les choses à la main :*

- *Considérons une matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ (matrice inversible d'ordre n), et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = Mx$. Comme $\det M \neq 0$, on a bien $\text{mes}(f^{-1}(N)) = 0$ donc le théorème ci-dessus s'applique à f . De fait, comme M est inversible, le théorème de factorisation polaire des matrices stipule qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice symétrique définie positive S telles que $M = SQ$. Donc $f(x) = SQx$ ce qui en posant $\Psi(x) = \frac{1}{2}Sx \cdot x$ et $s(x) = Qx$ donne bien $f = \nabla\Psi \circ s$ comme annoncé.*
- *On peut aussi faire un lien avec la décomposition de Helmholtz des champs de vecteurs (selon laquelle tout champ de vecteurs se décompose comme la somme d'un champ à divergence nulle et d'un champ de gradient, donc irrotationnel). Cette décomposition est en fait une version linéarisée de la factorisation polaire ci-dessus comme l'a remarqué Brenier. En effet, considérons un champ de vecteurs u perturbation de l'identité : $u(x) = x + \varepsilon z(x)$ où $\varepsilon > 0$ est petit et z un champ de vecteurs quelconque. On va chercher à factoriser u sous la forme polaire $\nabla\Psi \circ s$ mais étant donnée la forme de u , on cherche Ψ sous la forme $\Psi(x) = \frac{1}{2}|x|^2 + \varepsilon p(x) + O(\varepsilon^2)$ (pour ε assez petit Ψ est convexe) et s comme $s(x) = x + \varepsilon w(x) + O(\varepsilon^2)$. On a donc $\nabla\Psi(x) = x + \varepsilon p(x) + O(\varepsilon^2)$ et $\nabla\Psi \circ s = x + \varepsilon(\nabla p + w) + O(\varepsilon^2)$. On voit donc que nécessairement le*

champ z , qui était quelconque au départ, s'écrit sous la forme $z(x) = w + \nabla p$. Mais dans la décomposition polaire, s préserve la mesure. Si bien que

$$\int_{\Omega} f(x + \varepsilon w(x) + O(\varepsilon^2)) dx = \int_{\Omega} f(x) dx$$

En développant f , puis en divisant par ε et en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ on obtient

$$\int_{\Omega} w \cdot \nabla f dx = 0$$

et ceci pour tout f . D'après le théorème de la divergence, il s'agit d'une forme faible de $\operatorname{div} w = 0$.

2.7 Réarrangements et modèle AHT

Cette section a pour point de départ [16]. Le modèle Angenent-Haker-Tanenbaum (AHT) est un modèle EDP dont l'asymptotique donne un réarrangement d'une fonction y^0 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , pas nécessairement convexe. Il est intéressant car on peut l'étendre à des dynamiques plus complexes. Soit $y : \Omega \subset \mathbb{R}^d \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\partial_t y + (v \cdot \nabla) y = 0, \quad Kv + \nabla p = y, \quad \operatorname{div} v = 0$$

munie de la condition initiale $y(x, 0) = y_0(x)$. L'opérateur K est dissipatif, par exemple $K = id$ ou $K = -\Delta$ et les conditions aux limites correspondant à chacun de ces cas sont u tangent ou nul au bord. les inconnues de ce système sont (y, v, p) . En s'inspirant des méthodes de projection utilisées sur les équations de Navier-Stokes on peut écrire un algorithme simple pour approcher une solution de ces équations. En effet considérons la discrétisation temporelle de pas $h > 0$ des variables et notons (y^k, v^k, p^k) l'itéré courant, avec, par exemple, $(y^0, v^0, p^0) = (y_0, 0, 0)$. Pour déterminer $(y^{k+1}, v^{k+1}, p^{k+1})$ nous effectuons les étapes suivantes :

- Calcul de $y^{k+1} = y^k - h(v^k \cdot \nabla) y^k$.
- Résolution de $Kw^{k+1} = y^{k+1}$.
- Résolution de l'équation $\operatorname{div}(K^{-1} \nabla p^{k+1}) = -\operatorname{div} w^{k+1}$ (soit $-\Delta p^{k+1} = \operatorname{div} w^{k+1}$ dans le cas $K = id$).
- Calcul de $v^{k+1} = w^{k+1} + K^{-1} \nabla p^{k+1}$.

Justifions formellement que lorsque t (ou k) tend vers l'infini la solution y pourrait tendre vers le réarrangement convexe de y^0 . En effet notons tout d'abord que l'équation de transport en y , d'après le corollaire 1, est telle que pour toute fonction F régulière à support compact, $F(y)$ vérifie la même équation et par conséquent d'après les conditions aux limites sur v on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(y) dx = 0.$$

La fonction $x \rightarrow y(x, t)$ est donc un réarrangement de $y_0(x)$ pour tout $t > 0$. D'autre part si on calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |y(x, t) - x|^2 dx &= \int_{\Omega} (y(x, t) - x) \cdot \partial_t y = - \int_{\Omega} (y - x) \cdot (v \cdot \nabla) y dx \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} v \cdot \nabla |y - x|^2 dx - \int_{\Omega} v \cdot (y - x) dx = - \int_{\Omega} v \cdot Kv - \int_{\Omega} v \cdot \nabla (p - \frac{1}{2} |x|^2) dx = - \int_{\Omega} v \cdot Kv \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait qu'un champ à divergence nul et tangentiel ou nul au bord est dans l'orthogonal L^2 des gradients. On voit donc que si K est dissipatif, on va avoir pour $t \rightarrow 0$ de manière non rigoureuse une convergence de v vers 0, ce qui dans l'équation de transport donnera une convergence forte de y vers un y^∞ . Celui-ci est un réarrangement de y^0 comme tous les $y(x, t)$. En passant à la limite dans la deuxième équation on voit qu'il est le gradient d'une fonctionnelle p . Pour l'instant on ne sait pas

si p est convexe. En général c'est d'ailleurs faux, par exemple dans le cas où $y^0 = \nabla p^0$ avec p^0 non convexe car dans ce cas on a une solution triviale à vitesse nulle. Si on part d'une condition initiale y^0 de jacobien strictement positif, on pourrait espérer que la limite est le réarrangement convexe de y^0 mais ceci est un problème ouvert.

3 Méthodes de segmentation par Level Set en analyse d'image

3.1 Introduction

Pour représenter une interface délimitant deux zones d'intérêt mobiles, plusieurs représentations sont possibles. En particulier, on peut considérer un paramétrage de l'interface (pour simplifier supposons que c'est une courbe Γ_t). On parle de représentation lagrangienne : soit $\gamma : [0, M] \times [0, T] \rightarrow \gamma(r, t)$ un paramétrage régulier de Γ_t transporté par le champ de vitesse du milieu continu, c'est à dire $\gamma(r, t) = X(t; \gamma_0(r))$ ou de manière équivalente la solution du système différentiel :

$$\begin{cases} \partial_t \gamma(r, t) = u(\gamma(r, t), t), & r \in [0, M], t \in]0, T] \\ \gamma(r, 0) = \gamma_0(r), & r \in [0, M]. \end{cases} \quad (3)$$

En pratique, pour délimiter une zone, on va donc considérer une discrétisation de $[0, M]$ de la forme $(r_i)_{i=0 \dots N}$ puis déplacer les point $\gamma(r_i, t)$ pour délimiter à chaque instant notre zone. Le fait que l'espacement entre les points puisse varier suite à la déformation de la courbe est de nature à provoquer des sous ou sur échantillonnages. Par ailleurs, cette représentation rend difficile de gérer efficacement les changements de topologie du contour.

3.2 Représentation Level Set

Nous allons maintenant changer notre mode de représentation de l'interface pour contourner les écueils de la représentation lagrangienne. On représente Γ_t , que l'on suppose maintenant fermée¹ par l'intermédiaire d'une fonction auxiliaire $\phi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que

$$\Gamma_t = \{x \in \Omega, \quad \phi(x, t) = 0\}.$$

Le domaine borné délimité par Γ_t , qu'on appellera l'intérieur du contour, est $\Omega_t^- = \{x \in \Omega, \quad \phi(x, t) < 0\}$ et l'extérieur du contour est $\Omega_t^+ = \{x \in \Omega, \quad \phi(x, t) > 0\}$. Comme $\phi(\gamma(r, t), t) = 0$ sur $[0, M] \times [0, T]$, et $\partial_t \gamma = u(\gamma, t)$, on a en dérivant par rapport à t

$$\partial_t \phi(\gamma(r, t), t) + u(\gamma(r, t), t) \cdot \nabla \phi(\gamma(r, t), t) = 0$$

La méthode Level Set [66] consiste alors à se donner une fonction initiale ϕ_0 représentant Γ_0 et à chercher une fonction ϕ qui vérifie l'équation ci-dessus sur tout le domaine :

$$\begin{cases} \partial_t \phi + u \cdot \nabla \phi = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, T[\\ \phi = \phi_0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}. \end{cases} \quad (4)$$

On choisit souvent la fonction ϕ_0 comme la distance signée à l'interface :

$$\phi_0(x) = \begin{cases} -\text{dist}(x, \Gamma_0) & \text{si } x \text{ est à l'intérieur de } \Gamma_0 \\ \text{dist}(x, \Gamma_0) & \text{si } x \text{ est à l'extérieur de } \Gamma_0 \end{cases}$$

1. Il est possible de lever cette hypothèse moyennant l'ajout d'une autre fonction auxiliaire.

- Remarque 6** 1. Il est remarquable qu'une fonction régulière en temps et espace puisse représenter une évolution de courbe très singulière : fusion de courbes, ou au contraire scission d'une courbe. C'est qu'on a rajouté une dimension au problème, et que dans ce nouvel espace, ces situations ne sont pas singulières ! Le prix à payer est de travailler avec cette dimension supplémentaire : au lieu d'une discrétisation 1D, on va considérer une discrétisation de tout l'espace. On verra néanmoins qu'il existe des méthodes pour restreindre les calculs à une zone proche du contour (narrow-band).
2. La méthode par ligne de niveau offre "gratuitement" un moyen direct de savoir si un point de l'espace est à l'intérieur ou à l'extérieur du contour, en inspectant le signe de ϕ en ce point. Ceci n'est en général pas trivial avec l'autre représentation. Par contre l'accès aux coordonnées des points du contour n'est pas du tout naturelle, et on tâchera de contourner ce besoin tant que possible.

Avec le choix de signe de ϕ_0 fait ci-dessus, **que l'on fera systématiquement dorénavant**, la normale extérieure au domaine entouré par Γ_t , ainsi que sa courbure s'expriment en chacun de ses points en fonction de ϕ comme suit :

$$n(x) = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad \kappa(x) = \operatorname{div} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

La démonstration générale peut être trouvée dans le livre [50], pages 354 à 357. Justifions la formule de la courbure en dimension deux. Considérons un paramétrage régulier $s \rightarrow \gamma(s)$ de Γ_t tel que, en parcourant la courbe dans le sens de γ_s , on ait l'intérieur ($\phi < 0$) sur sa gauche. La courbure s'exprime en fonction du paramétrage par

$$\kappa = \frac{[\gamma_s, \gamma_{ss}]}{|\gamma_s|^3}$$

En dérivant l'identité $\phi(\gamma(s)) = 0$ on a $\gamma_s \cdot \nabla \phi = 0$. En dérivant $\gamma_s \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = 0$ on a

$$\gamma_{ss} \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + \gamma_s \cdot \left(D \left[\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right] \gamma_s \right) = 0$$

Comme $\gamma_s \perp \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ on a compte tenu du choix d'orientation de la courbe, $[\gamma_s, \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}] < 0$, donc

$$[\gamma_s, \gamma_{ss}] = |\gamma_s| \gamma_s \cdot \left(D \left[\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right] \gamma_s \right)$$

En dimension deux, si l'on note $\nabla \times \phi$ le vecteur rotationnel de ϕ , obtenu en appliquant une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ au vecteur $\nabla \phi$, le vecteur tangent correspondant est alors

$$\tau(x) = \frac{\nabla \times \phi}{|\nabla \phi|}$$

d'où

$$\kappa = \frac{\nabla \times \phi}{|\nabla \phi|} \left(D \left[\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right] \frac{\nabla \times \phi}{|\nabla \phi|} \right)$$

On conclut gr,ce au lemme élémentaire suivant laissé au soin du lecteur (\mathbb{S}^1 est le cercle de rayon 1).

Lemme 2 Soit $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$, de classe \mathcal{C}^1 , tels que $u \cdot v = 0$ sur Ω . Alors $[Du]v \cdot v = \operatorname{div} u$.

3.3 Opérations ensemblistes et fonctions niveau

Soient deux ouverts Ω_1 et Ω_2 . Si on a déjà construit deux fonctions niveau pour représenter ces ensembles, soit ϕ_1 et ϕ_2 , telles que $\phi_i < 0$ dans Ω_i , alors $\min(\phi_1, \phi_2)$ est une fonction niveau pour $\Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\max(\phi_1, \phi_2)$ pour $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Comme ϕ_i est une fonction niveau pour Ω_i , $-\phi_i$ en est une pour le complémentaire Ω_i^c . Par conséquent, $\max(-\phi_1, \phi_2)$ est une représentation level set de $\Omega_2 \setminus \Omega_1$. Enfin $\min(\max(-\phi_1, \phi_2), \max(\phi_1, -\phi_2))$ représente la différence symétrique $\Omega_1 \Delta \Omega_2$.

3.4 Principe général de la segmentation d'images et des contours actifs

Considérons une image (en niveaux de gris pour commencer) définie sur le domaine Ω , c'est à dire $\mathbb{I} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Pour pouvoir repérer des zones dans cette image, une première idée est de regarder l'histogramme des niveaux de gris de celle-ci, et de segmenter l'image en fonctions de seuils sur cet histogramme. On va donc considérer comme appartenant à une même région d'intérêt des pixels ayant une intensité comprise dans une certaine bande. Le problème de ce type de segmentation est qu'il ne permet pas en général d'obtenir une région connexe, et est très sensible au bruit. On cherche donc des méthodes de segmentation suffisamment robustes pour s'accomoder de bruit et d'images faiblement contrastées. Parmi les méthodes de segmentation existantes, à part le seuillage décrit ci-dessus, on peut énumérer les contours actifs, les modèles déformables, les modèles à croissance, ... Nous nous intéressons dans cette partie aux modèles de contours actifs, dont nous présentons le principe.

Il s'agit de déplacer une courbe (ou une surface pour une image 3D) de manière à ce qu'elle finisse par se trouver sur les contours de l'objet que l'on veut identifier dans l'image. Pour déplacer le contour Γ_t , en représentation lagrangienne, on cherche classiquement à minimiser une fonctionnelle du type :

$$F(\gamma(t)) = \alpha \int_0^M |\partial_r \gamma(r, t)| dr + \beta \int_0^M |\partial_{rr}^2 \gamma(r, t)|^2 dr - \lambda \int_0^M |\nabla \mathbb{I}(\gamma(r, t))|^2 dr, \quad (5)$$

où $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \lambda > 0$ sont des paramètres. Les deux premiers mesurent la régularité de la courbe, le dernier va tendre à entrainer la courbe γ vers les zones de forts gradients de l'image.

Pour écrire la dynamique du déplacement, plutôt que d'écrire une dérivée par rapport à la courbe, utilisons notre champ de vitesse censé déplacer la courbe γ de sorte à minimiser F lorsque t augmente. On a

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = dF_{\gamma(t)}(\partial_t \gamma(t)) = dF_{\gamma(t)}(u(\gamma(t))) = \nabla F(\gamma(t)) \cdot u(\gamma(t))$$

On voit qu'il suffit de choisir $u(\gamma) = -\rho \nabla F(\gamma(t))$, où $\rho > 0$ est un paramètre de descente, pour obtenir une décroissance de F . C'est la méthode des "snakes" introduite par Kass, Witkin, Terzopoulos en 1987. Le pré-supposé de ces méthodes est donc que les régions à identifier sont délimitées par des zones de variations fortes du gradient de l'image. Par ailleurs, s'il y a plusieurs objets à capturer, si la zone de départ encercle ces objets, alors le contour englobera toujours l'union de ces objets donc ne permettra pas de les capturer individuellement. C'est un grave défaut de la méthode. En général on introduit une fonction $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ strictement décroissante et telle que $g(r) \rightarrow 0$ pour $r \rightarrow \infty$, par exemple $g(s) = \frac{1}{1+s^2}$, on considère le cas $\beta = 0$ et donc l'énergie :

$$F(\gamma(t)) = \alpha \int_0^M |\partial_r \gamma(r, t)| dr + \lambda \int_0^M g(|\nabla \mathbb{I}(\gamma(r, t))|) dr, \quad (6)$$

Une remarque apparue au bout de quelques années dans le développement de la méthode est la dépendance au paramétrage de la courbe. Remarquée par Caselles, Kimmel et Sapiro en 1997, celle ci s'explique par le fait que si on définit une nouvelle paramétrisation de la courbe par un changement de variable $r = \phi(s)$ avec $\phi : [0, L] \rightarrow [0, M]$, $\phi' > 0$ on a respectivement

$$\int_0^M |\partial_r \gamma(r, t)| dr = \int_0^L |\partial_s \gamma(\phi(s), t)| ds$$

ce qui ne change rien, mais

$$\int_0^M g(|\nabla \mathbb{I}(\gamma(r, t))|) dr = \int_0^L g(|\nabla \mathbb{I}(\gamma(\phi(s), t))|) \phi'(s) ds$$

ce qui est complètement dépendant du paramétrage (nb : si on prend un carré dans le premier terme de l'énergie comme dans les articles cités, ce terme dépend lui aussi du paramétrage). L'astuce employée

par Caselles, Kimmel et Sapiro est simplement d'écrire une énergie de rappel tenant compte de la métrique de la courbe elle-même, de sorte qu'elle soit invariante par changement de paramétrage :

$$\int_0^M g(|\nabla \mathbb{I}(\gamma(r, t))|) |\partial_r \gamma(r, t)| dr = \int_0^L g(|\nabla \mathbb{I}(\gamma(\phi(s), t))|) |\partial_r \gamma(\phi(s), t)| ds$$

La forme générale de l'énergie est donc maintenant

$$F(\gamma(t)) = \int_0^M g(|\nabla \mathbb{I}(\gamma(r, t))|) |\partial_r \gamma(r, t)| dr, \quad (7)$$

puisque en effet l'énergie (6) peut être mise sous la forme ci-dessus quitte à remplacer g par $\alpha + \lambda g$. Calculons donc le flow généré par une telle énergie : on fait le calcul et on trouve

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \int_0^M [-g(\nabla \mathbb{I}(\gamma)) \kappa n + (\nabla(g(\nabla \mathbb{I}))(\gamma) \cdot n) n] \cdot u(\gamma) dr$$

où n est la normale entrante, ce qui nous conduit donc à choisir une vitesse de descente selon ce gradient, et donne comme évolution de γ :

$$\partial_t \gamma = -\rho [-g(\nabla \mathbb{I}(\gamma)) \kappa n + (\nabla(g(\nabla \mathbb{I}))(\gamma) \cdot n) n].$$

Mais voyons comment traduire ceci avec notre représentation eulérienne. D'abord si une courbe évolue avec la vitesse normale V , i.e. on a

$$\partial_t \gamma = V n$$

alors l'équation de transport sur la fonction niveau représentant la courbe donne

$$\partial_t \phi + V n \cdot \nabla \phi = 0$$

mais comme justement n est unitaire et colinéaire, mais opposé à $\nabla \phi$ on obtient

$$\partial_t \phi = V |\nabla \phi|$$

Du coup l'équation sur ϕ devient (pour $\rho = 1$) :

$$\partial_t \phi = g(\nabla \mathbb{I}) |\nabla \phi| \operatorname{div} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + \nabla(g(\nabla \mathbb{I})) \cdot \nabla \phi$$

3.5 Contours actifs en Level-set : généralisation

3.5.1 Calcul d'intégrales de volume et de surface

La représentation implicite permet de calculer de manière approchée des intégrales de surface et de volume attachées au domaine représenté par une fonction niveau.

Lemme 3 Soit $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne sur \mathbb{R}^d et $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. On suppose qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que $\inf_{|\phi| < \eta_0} |\nabla \phi| > 0$. Alors pour $\eta \in]0, \eta_0[$,

$$\int_{|\phi(x)| < \eta} g(x) dx = \int_{-\eta}^{\eta} \int_{\phi(x)=\nu} g(x) |\nabla \phi|^{-1} d\sigma d\nu$$

Démonstration. Dans [41], proposition 3 page 118, il est montré sous ces hypothèses que

$$\frac{d}{ds} \left(\int_{\phi > s} g(x) dx \right) = - \int_{\phi = s} g |\nabla \phi|^{-1} d\sigma \quad \text{p.p. } s$$

Le résultat ci-dessus s'en déduit facilement en posant $s = -t$ et en prenant ϕ et $-\phi$ dans cette formule puis en ajoutant les deux nouvelles identités. On les intègre alors de $-\eta$ à η .

Une démonstration plus intuitive est de décomposer au voisinage de x le volume dx sous la forme $dx = d\sigma \times dh$, où dh est compté suivant la normale $\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ et on remarque que

$$\nu \pm d\nu := \phi(x \pm dh \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}) = \phi(x) \pm dh |\nabla \phi| + O(dh^2)$$

d'où $dx = |\nabla \phi|^{-1} d\sigma d\nu$. □

En faisant l'hypothèse de régularité suivante sur les lignes de niveau de ϕ ,

$$(H_\phi) \quad \forall t \in [0, T], \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n), \quad s \rightarrow \int_{\{|\phi(x,t)| < s\}} f(x) dx \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ au voisinage de } s = 0$$

nous avons le résultat suivant :

Proposition 7 *Soit $r \rightarrow \zeta(r)$ une fonction continue à support dans $[-1, 1]$, telle que $r \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \zeta(\frac{r}{\varepsilon})$ converge vers δ_0 au sens des distributions. Alors sous l'hypothèse (H_ϕ) , lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,*

$$\frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) |\nabla \phi| \rightharpoonup \delta_{\{\phi=0\}} \quad \text{dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration. Pour une fonction continue $g(r)$, on a par hypothèse

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) g(r) dr = g(0).$$

Appliquons ceci, pour une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, à

$$g(r) = \int_{\{\phi=r\}} f d\sigma$$

On a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \int_{\{\phi=r\}} f d\sigma dr = \int_{\{\phi=0\}} f d\sigma$$

soit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\{\phi=r\}} \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) f d\sigma dr = \int_{\{\phi=0\}} f d\sigma$$

Or d'après le support de ϕ , et le lemme 3,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\{\phi=r\}} \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) f d\sigma dr &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{\{\phi=r\}} \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) f d\sigma dr = \int_{|\phi(x)| < \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) f |\nabla \phi| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) f |\nabla \phi| dx \end{aligned}$$

on a donc finalement pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) |\nabla \phi| f(x) dx = \int_{\{\phi=0\}} f(x) d\sigma.$$

On voit donc qu'une approximation volumique raisonnable de $\delta_{\{\phi=0\}}$ est donnée par $|\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right)$. □

Remarque 7 Cette approximation n'est pas aussi anodine qu'elle pourrait paraître. En effet nous avons remplacé un objet purement géométrique, $\delta_{\{\phi=0\}}$, indépendant du choix de ϕ représentant l'interface, par un objet qui en dépend. Ceci est la source de difficultés numériques dans la méthode Level Set, et sans doute de problème de stabilité de cette méthode dans certaines situations. Nous verrons plus loin comment pallier les difficultés et quel genre d'instabilités nous avons observé (pour ce dernier point on pourra se reporter à la thèse de Claire Bost [11]).

3.5.2 Déformations et Level Set

Ce qui est plus original et que nous avons démontré dans [27] est que dans le cas d'un champ de vitesse incompressible, l'étirement de la surface est enregistré par la fonction ϕ , ce qui va nous permettre de reformuler tout le problème avec cette fonction. Il y a plusieurs manières de démontrer ce fait assez intuitif, qui se généralise d'ailleurs au cas d'écoulements compressibles en faisant intervenir le jacobien J (cet aspect a été développé récemment dans [18, 17] dans le cadre de la modélisation de la croissance tumorale ainsi que dans [3]). On peut partir de l'étirement en paramétrique comme dans [27] et démontrer que $|\nabla\phi|$ vérifie la même équation, à savoir

$$|\nabla\phi|_t + u\nabla|\nabla\phi| = -|\nabla\phi| \frac{\nabla\phi^T \nabla u \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} = -|\nabla\phi| \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \otimes \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} : \nabla u \quad (8)$$

Cependant j'ai un faible pour la démonstration plus intrinsèque qui se résume en les deux propositions suivantes.

En faisant l'hypothèse de régularité suivante sur les lignes de niveau de ϕ ,

$$(H_\phi) \quad \forall t \in [0, T], \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n), \quad s \rightarrow \int_{\{|\phi(x,t)| < s\}} f(x) dx \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ au voisinage de } s = 0$$

nous avons le résultat suivant :

Proposition 8 Soit $u : \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 avec $\operatorname{div} u = 0$ et ϕ solution \mathcal{C}^1 de $\partial_t \phi + u \cdot \nabla \phi = 0$, $\phi = \phi_0$ avec $|\nabla\phi| \geq \alpha > 0$ au voisinage de $\{\phi = 0\}$ et vérifiant (H_ϕ) . Alors pour toute fonction f continue à support compact,

$$\int_{\{\phi_0(\xi)=0\}} f(\xi) |\nabla\phi_0|^{-1}(\xi) d\sigma(\xi) = \int_{\{\phi(x,t)=0\}} f(Y(x,t)) |\nabla\phi|^{-1}(x,t) d\sigma(x) \quad (9)$$

ce qui signifie que $|\nabla\phi|/|\nabla\phi_0|$ représente la variation de mesure surfacique de Γ_t par rapport à Γ_0 .

Démonstration. L'hypothèse (H_ϕ) entraîne d'après le lemme précédent que l'application

$$s \rightarrow \int_{\{\phi_0=s\}} f(\xi) |\nabla\phi_0|^{-1}(\xi) d\sigma(\xi)$$

est continue. Donc d'après le lemme 3,

$$\int_{\{\phi_0(\xi)=0\}} f(\xi) |\nabla\phi_0|^{-1}(\xi) d\sigma(\xi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}} \int_{\phi_0=\nu} f(\xi) |\nabla\phi_0|^{-1}(\xi) d\sigma(\xi) d\nu = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_{|\phi_0| < \frac{\eta}{2}} f(\xi) d\xi$$

On effectue le changement de variables $\xi = Y(x, t)$ dont le jacobien $J(x, t)$ vaut 1 car $\operatorname{div} u = 0$. Comme ϕ vérifie l'équation de transport on a $\phi^0(Y(x, t)) = \phi(x, t)$ et donc

$$\int_{\{\phi_0(\xi)=0\}} f(\xi) d\sigma(\xi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_{|\phi(x,t)| < \frac{\eta}{2}} f(Y(x, t)) dx$$

ce qui donne le résultat annoncé d'après le lemme 3. □

Remarque 8 Une autre démonstration de la proposition précédente est possible en utilisant la formule de dérivation de Reynolds pour les surfaces. Profitons de l'occasion pour traiter le cas compressible. En effet d'après la formule, pour une fonction g de classe \mathcal{C}^1 ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\{\phi(x,t)=0\}} g(x,t) d\sigma = \int_{\{\phi(x,t)=0\}} \partial_t g + \operatorname{div}(gu) - g[\nabla u]n \cdot n d\sigma$$

et sur la surface $\{\phi = 0\}$ on a d'après (8)

$$[\nabla u]n \cdot n = [\nabla u] \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = -\frac{1}{|\nabla \phi|} (\partial_t |\nabla \phi| + u \cdot \nabla |\nabla \phi|)$$

En regroupant les termes on a donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\{\phi(x,t)=0\}} g(x,t) d\sigma = \int_{\{\phi(x,t)=0\}} (\partial_t (g|\nabla \phi|) + u \cdot \nabla (g|\nabla \phi|)) \frac{1}{|\nabla \phi|} + g \operatorname{div} u d\sigma$$

D'autre part on a $\partial_t J^{-1} + u \cdot \nabla J^{-1} = J^{-1} \operatorname{div} u$, ce qui substitué dans $\operatorname{div} u$ donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\{\phi(x,t)=0\}} g(x,t) d\sigma = \int_{\{\phi(x,t)=0\}} (\partial_t (gJ^{-1}|\nabla \phi|) + u \cdot \nabla (gJ^{-1}|\nabla \phi|)) \frac{J}{|\nabla \phi|} d\sigma$$

On applique alors cette formule avec $g(x,t) = f(Y(x,t))J(x,t)|\nabla \phi|^{-1}(x,t)$, en calculant

$$\partial_t (gJ^{-1}|\nabla \phi|) + u \cdot \nabla (gJ^{-1}|\nabla \phi|) = f(Y)_t + u \cdot \nabla [f(Y)] = 0$$

car $f(Y)$ est la fonction f transportée. On a donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\{\phi(x,t)=0\}} f(Y(x,t))J(x,t)|\nabla \phi|^{-1}(x,t) d\sigma = 0$$

ce qui revient après intégration entre 0 et t à la formule (9), si $J = 1$. Dans le cas compressible on retrouve les résultats de [17, 3] qui expriment l'étirement comme $J^{-1}|\nabla \phi|$.

Remarque 9 Du point de vue théorie de la mesure la formule (9) traduit simplement le fait que la mesure $|\nabla \phi_0|^{-1}(x)\delta_{\{\phi_0=0\}}$ est l'image de $|\nabla \phi|^{-1}(x,t)\delta_{\{\phi=0\}}$ par le difféomorphisme $x \rightarrow Y(x,t)$. Voir chapitre transport optimal.

Corollaire 2 En 2D, on se donne un paramétrage $s \in [0, M] \rightarrow \gamma(s, 0) \in \mathbb{R}^2$ de $\Gamma(0)$ et qui se transporte en un paramétrage $s \rightarrow \gamma(s, t)$ de $\Gamma(t)$. Après expression de la mesure surfacique en fonction du paramétrage on a du fait de $Y(\gamma(s, t), t) = \gamma(s, 0)$:

$$\int_0^M f(\gamma(s, 0))|\nabla \phi_0|^{-1}(\gamma(s, 0))|\gamma_s|(s, 0) ds = \int_0^M f(\gamma(s, 0))|\nabla \phi|^{-1}(\gamma(s, t), t)|\gamma_s|(s, t) ds$$

pour toute fonction f continue et à support compact. D'où

$$\frac{|\nabla \phi|(\gamma(s, t), t)}{|\nabla \phi_0|(\gamma(s, 0))} = \frac{|\gamma_s(s, t)|}{|\gamma_s(s, 0)|}$$

En 3D, si $(r, s) \in \omega \rightarrow \gamma(r, s, t) \in \mathbb{R}^3$ est un (morceau de) paramétrage de $\Gamma(t)$, alors comme là encore $Y(\gamma(r, s, t), t) = \gamma(r, s, 0)$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\omega} f(\gamma(r, s, 0))|\nabla \phi_0|^{-1}(\gamma(r, s, 0))|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, 0) dr ds \\ = \int_{\omega} f(\gamma(r, s, 0))|\nabla \phi|^{-1}(\gamma(r, s, t), t)|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, t) dr ds \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{|\nabla \phi|(\gamma(r, s, t), t)}{|\nabla \phi_0|(\gamma(r, s, 0))} = \frac{|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, t)}{|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, 0)}$$

En pratique, on construit ϕ_0 d'une part de sorte que sa ligne de niveau zéro représente Γ_0 , et d'autre part de manière à ce que

$$|\nabla\phi_0|(\gamma(r, s, 0)) = \frac{|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, 0)}{|\theta_r \times \theta_s|(r, s)}$$

ce qui correspond à la variation d'aire entre la configuration initiale et la configuration au repos. On a alors

$$|\nabla\phi|(\gamma(r, s, t), t) = \frac{|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, t)}{|\theta_r \times \theta_s|(r, s)}$$

Si la variation d'aire initiale ne dépend pas de (r, s) , ce qui est le cas fréquent d'une membrane élastique uniformément étirée, il suffit d'initialiser ϕ_0 à cet étirement fois la distance signée à la surface.

3.5.3 Energie et force élastiques en Level Set

Nous sommes donc en position de formuler l'énergie élastique d'un contour en fonction de la fonction Level Set. A ceci près que nous devons nous occuper de la représentation de l'intégrale de surface dans notre formulation. On pourrait donc introduire une énergie analogue au premier terme de (5) en posant (pour une surface à étirement constant et égal à 1 au repos)

$$\mathcal{E}[\phi] = \int_{\{\phi=0\}} E(J^{-1}|\nabla\phi|) \frac{1}{|\nabla\phi|} d\sigma$$

puis dériver cette énergie par rapport au temps pour identifier la force élastique singulière (voir à ce sujet la thèse de Thomas Milcent [64]). On pourrait alors mettre en oeuvre une méthode de type éléments finis pour donner un sens à cette mesure, ce qui est fait dans [9, 10] dans le cadre de la méthode de frontière immergée classique. Cependant nous avons choisi, comme dans la méthode Level Set usuelle, d'approcher la mesure surfacique par une mesure non singulière, qui la régularise. Ceci permet de mettre ensuite en oeuvre une méthode de type différences finies plus naturelle dans un contexte traitement d'images. En utilisant la proposition 7, on voit donc qu'une approximation volumique raisonnable de $\delta_{\{\phi=0\}}$ est donnée par $|\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)$, ce qui permet de définir une énergie régularisée par

$$\mathcal{E}_\varepsilon(\phi) = \int_{\Omega} E(J^{-1}|\nabla\phi|) \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) dx. \quad (10)$$

Remarque 10 *Cette approximation n'est pas aussi anodine qu'elle pourrait paraître. En effet nous avons remplacé un objet purement géométrique, $\delta_{\{\phi=0\}}$, indépendant du choix de ϕ représentant l'interface, par un objet qui en dépend. Ceci est la source de difficultés numériques dans la méthode Level Set, et sans doute de problème de stabilité de cette méthode dans certaines situations. Nous verrons plus loin comment pallier les difficultés et quel genre d'instabilités nous avons observé (pour ce dernier point on pourra se reporter à la thèse de Claire Bost [11]).*

Remarque 11 *Thomas Milcent a démontré dans sa thèse [64] la consistance de cette approximation (dans le cas d'une énergie beaucoup plus générale) par rapport à l'obtention de la force élastique par dérivation. C'est à dire la force qu'on obtient par dérivation de l'énergie régularisée, converge lorsque ε tend vers 0 vers la force qu'on obtient en dérivant l'énergie singulière.*

En dérivant cette énergie on obtient à un gradient près (voir [29] pour le détail du calcul)

$$F_\varepsilon(x, t) = \operatorname{div} \left(E'(|\nabla\phi|) |\nabla\phi| \left(\mathbb{I} - \frac{\nabla\phi \otimes \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} \right) \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \right). \quad (11)$$

Si on développe la divergence on peut obtenir après quelques calculs

$$F_\varepsilon(x, t) = \left\{ \mathbb{P}_{\nabla\phi^\perp} (\nabla[E'(|\nabla\phi|)]) - E'(|\nabla\phi|)\kappa(\phi) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right\} |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)$$

ce qui est conforme à l'expression (??) obtenue en variables lagrangiennes. Les termes de gradient n'ont pas d'importance dans le cas incompressible car un gradient ne travaille pas sur un déplacement à volume constant et nul au bord.

3.5.4 Cas de l'énergie de courbure

Le deuxième terme de l'énergie classique considéré dans une méthode de contours actifs correspond à la courbure moyenne. Cela revient à considérer dans la représentation level set :

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\phi) = \int_\Omega G(\kappa(\phi)) |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) dx$$

le cas le plus standard correspondant à $G(r) = \frac{1}{2}r^2$. Comme précédemment la dérivée temporelle de l'énergie de courbure correspond au signe près à la puissance des forces de courbure $H_\varepsilon(x, t)$, et nous avons

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}_\varepsilon(\phi) = d\mathcal{G}_\varepsilon(\phi)(\partial_t \phi) = d\mathcal{G}_\varepsilon(\phi)(-u \cdot \nabla \phi) = - \int_\Omega H_\varepsilon(x, t) \cdot u dx \quad (12)$$

ce qui donne par identification (voir cours M2R, et article en préparation [58]) :

$$H_\varepsilon(x, t) = \operatorname{div} \left[-G(\kappa(\phi)) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} + \frac{1}{|\nabla\phi|} \mathbb{P}_{\nabla\phi^\perp} (\nabla[|\nabla\phi| G'(\kappa(\phi))]) \right] \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \nabla\phi.$$

Il est possible de déterminer une forme en divergence des forces de courbure qui fait apparaître dans le tenseur sous la divergence la projection de la seconde forme fondamentale sur le plan tangent à la surface. On trouve dans [58] l'expression $H_\varepsilon(x, t) = \operatorname{div} \sigma_c^\varepsilon$ avec

$$\sigma_c^\varepsilon = \left\{ |\nabla\phi| \left[G(\kappa(\phi)) \mathbb{I} + \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \otimes \nabla G'(\kappa(\phi)) \right] \left(\mathbb{I} - \frac{\nabla\phi \otimes \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} \right) - G'(\kappa(\phi)) \left(\mathbb{I} - \frac{\nabla\phi \otimes \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} \right) D^2\phi \left(\mathbb{I} - \frac{\nabla\phi \otimes \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} \right) \right\} \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \quad (13)$$

3.5.5 Formulation level-set générale d'une méthode de contour actif à gradient

En combinant les énergies décrites ci-dessus concernant la formulation level-set, nous obtenons la forme générale d'une méthode de contour actif basée sur une représentation level-set, et pilotée par le gradient de l'image. Elle correspond à la minimisation le long d'une équation de transport d'une énergie de la forme :

$$F(\phi) = \alpha \int_\Omega E(|\nabla\phi|) \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) dx + \beta \int_\Omega G(\kappa(\phi)) |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) dx + \lambda \int_\Omega g(|\nabla\mathbb{I}|) \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) |\nabla\phi| dx$$

Considérons le cas $\alpha = \beta = 0$, $\lambda = 1$, et calculons la dérivée de cette énergie indépendamment de la dimension.

3.6 Méthodes sans gradient ou par régions

Dans les méthodes ci-dessus, l'un des inconvénients est qu'il est nécessaire de faire intervenir le gradient de l'image, ce qui peut être assez malvenu pour des images bruitées. D'autres méthodes ont vu le jour, qui entrent dans la catégorie des méthodes dont les énergies tendent à identifier des régions

plutôt que des contours séparant deux régions. La méthode historique, la plus connue, est celle de Chan & Vese (2001), dite aussi méthode des régions similaires. Cette méthode est basée sur la fonctionnelle énergie de Mumford et Shah :

$$E^{MS}(u, \Gamma) = \sum_i \int_{\Omega_i} |c_i - \mathbb{I}|^2 dx + \mu |\Gamma| + \nu \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla \mathbb{I}|^2 dx.$$

Un minimiseur de cette énergie est ainsi régulier en dehors de Γ , et tend à valoir c_i sur la région Ω_i , tout en minimisant la longueur du contour de ces régions. Partant de cette énergie, Chan & Vese ont proposé le critère suivant utilisant le formalisme level-set :

$$E^{CV}(\phi, c_1, c_2) = \int_{\Omega} |c_1 - \mathbb{I}|^2 H(\frac{\phi}{\varepsilon}) + |c_2 - \mathbb{I}|^2 (1 - H(\frac{\phi}{\varepsilon})) dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta(\frac{\phi}{\varepsilon}) dx + \nu \int_{\Omega} H(\frac{\phi}{\varepsilon}) dx.$$

Notons tout d'abord qu'en écrivant un gradient on trouve tout de suite que nécessairement

$$c_1 = \frac{\int_{\Omega} \mathbb{I}(x) H(\frac{\phi}{\varepsilon}) dx}{\int_{\Omega} H(\frac{\phi}{\varepsilon}) dx}, \quad c_2 = \frac{\int_{\Omega} \mathbb{I}(x) (1 - H(\frac{\phi}{\varepsilon})) dx}{\int_{\Omega} 1 - H(\frac{\phi}{\varepsilon}) dx}$$

et le flot de gradient associé à cette énergie s'écrit comme précédemment :

$$\partial_t \phi = [\mu \kappa(\phi) - \nu - (\mathbb{I} - c_1)^2 + (\mathbb{I} - c_2)^2] |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta(\frac{\phi}{\varepsilon})$$

avec c_1, c_2 déterminés ci-dessus. On prend typiquement $\nu = 0$, et une fonction $\frac{1}{\varepsilon} \zeta(\frac{\phi}{\varepsilon}) > 0$ pour rendre possible la création de nouvelles régions. Quelques extensions proposées sont les suivantes : tout d'abord on peut chercher à caler des patrons inconnus plutôt que des constantes sur les zones.

$$E^{CV}(\phi, u_1, u_2) = \int_{\Omega} |u_1(x) - \mathbb{I}|^2 H(\frac{\phi}{\varepsilon}) + |u_2(x) - \mathbb{I}|^2 (1 - H(\frac{\phi}{\varepsilon})) dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta(\frac{\phi}{\varepsilon}) dx \\ + \nu \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 H(\frac{\phi}{\varepsilon}) dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla u_2|^2 (1 - H(\frac{\phi}{\varepsilon})) dx.$$

ce qui donne comme équations d'Euler-Lagrange :

$$u_2 - \mathbb{I} = \nu \Delta u_2 \text{ sur } \phi > 0, \quad u_1 - \mathbb{I} = \nu \Delta u_1 \text{ sur } \phi < 0$$

avec des conditions de Neumann homogènes sur $\phi = 0$ pour les u_i . Puis la descente sur l'énergie donne :

$$\partial_t \phi = [\mu \kappa(\phi) - \nu - (\mathbb{I} - u_1)^2 + (\mathbb{I} - u_2)^2 - \nu |\nabla u_2|^2 + \nu |\nabla u_1|^2] |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta(\frac{\phi}{\varepsilon})$$

Une autre extension est de considérer le cas de multiples régions. Faut-il considérer autant de fonctions niveau ? Heureusement non, et ceci grâce au théorème des quatre couleurs. On sait que toute partition de \mathbb{R}^2 en zones peut-être coloriée au moyen de 4 couleurs de sorte que la même couleur ne soit pas sur deux régions contigües. Cela se traduit, avec deux fonctions level-set, sur le fait qu'on peut repérer les régions d'un pavage quelconque du plan en région en regardant les quatre combinaisons possibles des signes de ces deux fonctions. On introduit donc

$$E(\phi_1, \phi_2, u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = \int_{\Omega} |u_{11}(x) - \mathbb{I}|^2 H(\frac{\phi_1}{\varepsilon}) H(\frac{\phi_2}{\varepsilon}) + |u_{12}(x) - \mathbb{I}|^2 (1 - H(\frac{\phi_1}{\varepsilon})) H(\frac{\phi_2}{\varepsilon}) \\ + |u_{21}(x) - \mathbb{I}|^2 (1 - H(\frac{\phi_2}{\varepsilon})) H(\frac{\phi_1}{\varepsilon}) + |u_{22}(x) - \mathbb{I}|^2 (1 - H(\frac{\phi_1}{\varepsilon})) (1 - H(\frac{\phi_2}{\varepsilon})) dx \\ + \nu \int_{\Omega} |\nabla u_{11}|^2 H(\frac{\phi_1}{\varepsilon}) H(\frac{\phi_2}{\varepsilon}) + |\nabla u_{12}|^2 (1 - H(\frac{\phi_1}{\varepsilon})) H(\frac{\phi_2}{\varepsilon}) + |\nabla u_{21}|^2 (1 - H(\frac{\phi_2}{\varepsilon})) H(\frac{\phi_1}{\varepsilon}) \\ + |\nabla u_{22}|^2 (1 - H(\frac{\phi_1}{\varepsilon})) (1 - H(\frac{\phi_2}{\varepsilon})) dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla \phi_1| \frac{1}{\varepsilon} \zeta(\frac{\phi_1}{\varepsilon}) + |\nabla \phi_2| \frac{1}{\varepsilon} \zeta(\frac{\phi_2}{\varepsilon}) dx$$

et on généralise la descente ci-dessus.

Exercice 2 Calculer le flot de gradient associé à cette énergie et écrire l'algorithme de contour actif associé.

3.7 Aspects numériques de la méthode level-set

3.7.1 Réinitialisation ou renormalisation de ϕ ?

Supposons qu'un milieu de codimension une, ou l'interface entre deux milieux soit repérée par la ligne de niveau zéro d'une fonction ϕ que l'on advecte par un champ de vitesse calculé par ailleurs. Lorsqu'il s'agit simplement de localiser l'interface entre les deux milieux, seule la ligne de niveau zéro de ϕ pour tout temps intervient, et la norme de son gradient, à condition qu'elle ne s'annule pas, importe peu. Par contre dès que l'on veut se servir de ϕ pour mesurer une distance à l'interface afin d'y localiser une force, on se rend compte qu'il n'y a aucune raison pour que ϕ soit une distance pour tout temps. D'ailleurs on a même montré dans le cas d'une structure de codimension une que $|\nabla\phi|$ représentait localement le changement de mesure (longueur, surface), si bien qu'on est sûr *a priori* que $|\nabla\phi| \neq 1$ pour $t > 0$. Or une distance est justement telle que la norme de son gradient vaut 1 partout où il est défini.

A partir de cette constatation, plusieurs approches sont possibles. La première consiste à redresser ϕ en une distance à chaque pas de temps. Ceci peut être fait par exemple en résolvant l'équation d'Hamilton-Jacobi suivante

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \text{sgn}(\phi_0)(|\nabla\phi| - 1) = 0. \quad (14)$$

dont on cherche un état stationnaire. En pratique, du fait de l'hyperbolicité de cette équation, le redressement de ϕ est propagé à partir de $\phi = 0$ si bien qu'il suffit de quelques itérations pour avoir $|\nabla\phi| \approx 1$ au voisinage de $\phi = 0$. En effet, l'équation ci-dessus peut être écrite comme une équation de transport avec second membre :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \text{sgn}(\phi_0) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \cdot \nabla\phi = -\text{sgn}(\phi_0). \quad (15)$$

Ainsi les caractéristiques sont issues de $\phi_0 = 0$ et perpendiculaires à cette interface. On peut effectivement montrer que cette équation ne modifie pas la ligne de niveau zéro de la fonction initiale (i.e. $\{\phi = 0\} = \{\phi^0 = 0\}$ pour tout t). L'inconvénient de cette approche est déjà qu'il faut résoudre cette équation supplémentaire qui d'autre part peut induire numériquement un petit déplacement de l'interface [38]. Elle est de plus responsable de la perte de volume attribuée à tort à la méthode level set par de nombreux auteurs. La raison est que le champ de vitesse équivalent $\text{sgn}(\phi_0) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ n'est pas à divergence nulle, et ceci d'autant plus que la courbure de l'interface est importante. Il va donc localement changer le volume et ceci a vraisemblablement des conséquences sur la conservation du volume à l'intérieur de $\{\phi = 0\}$. Une batterie de méthodes pour pallier ce problème ont été mises en oeuvre : ajouter une contrainte de volume [84, 83], rajouter des particules de chaque côté de l'interface [38] ou carrément relever ou baisser la fonction level-set [80, 81] ! Enfin dans notre cas une réinitialisation nous ferait perdre les informations mécaniques (étirement) contenues dans $\nabla\phi$, si bien qu'il faudrait réinitialiser cet étirement à chaque pas pour pouvoir continuer à utiliser la méthode décrite dans les paragraphes précédents.

Une autre méthode consiste à transporter ϕ en dehors de l'interface de manière à ce que l'on ait toujours $|\nabla\phi| = 1$. Une méthode, introduite initialement par Osher et ses co-auteurs d'après une idée d'Evans et Spruck, puis reprise par Gomes et Faugeras et récemment par Delfour et Zolésio, consiste à déterminer ϕ comme la solution de

$$\partial_t\phi(x, t) + (u \cdot \nabla\phi)(x - \phi\nabla\phi(x, t)) = 0$$

ce qui revient à l'équation de transport sur l'interface, et dont la solution est toujours une fonction distance, si la fonction initiale l'est. Malheureusement cette équation est non locale et délicate à utiliser

numériquement. D'autre part il faut disposer par ailleurs de l'étirement de la structure qui du coup n'est plus porté par ϕ .

Nous avons choisi de conserver ϕ sans réinitialisation à une distance, de sorte qu'il porte une information d'étirement. Il nous faut alors un moyen de récupérer à partir de ϕ la distance à $\{\phi = 0\}$. Dans cette direction G.-H. Cottet a remarqué que si $d(x, t)$ désigne la distance signée à la courbe $\{\phi = 0\}$, la quantité $\frac{\phi}{|\nabla\phi|}$ approche d au voisinage de l'interface. En effet pour $d(x)$ assez petit le point $x - d(x)\nabla d(x)$ est sur cette courbe donc $\phi(x - d(x)\nabla d) = 0$. En effectuant un développement au voisinage de $d(x) = 0$ on montre que

$$d(x) = \frac{\phi}{|\nabla\phi|}(x) + o(\phi)$$

On a donc un moyen simple d'estimer la distance d'un point x suffisamment voisin de $\{\phi = 0\}$ à cette courbe, en divisant la valeur de ϕ par celle de son gradient. La fonction $\psi(x) = \frac{\phi}{|\nabla\phi|}(x)$ est, à l'ordre un en ϕ , de gradient unitaire. D'autre part sa ligne de niveau zéro coïncide avec celle de ϕ . Donc d'après la proposition 7, on a

$$\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\psi}{\varepsilon}\right)|\nabla\psi| \rightharpoonup \delta_{\{\psi=0\}} = \delta_{\{\phi=0\}} \quad \text{dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

Or $|\nabla\psi| = 1 + o(\phi)$ ce qui justifie l'approximation de $\delta_{\{\phi=0\}}$ par

$$\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon|\nabla\phi|}\right)$$

qui au premier ordre en ϕ , représente une approximation de la masse de Dirac dont le support reste de largeur 2ε . En pratique on prend ε de l'ordre de quelques pas d'espace (typiquement $\varepsilon = 1,5dx$).

Pour tester la capacité de la renormalisation ci-dessus à permettre un calcul correct de la largeur d'interface, nous empruntons l'exemple de [38] où un champ de vitesse donné, de type vortex, transporte une interface en l'étirant. Nous comparons alors l'allure de l'interface obtenue par rapport à un suivi d'interface à haute résolution, et la précision du calcul de la longueur de la courbe. Ce calcul de longueur représente ici un prototype de force surfacique qu'il s'agit de bien calculer. Dans la figure 1, la courbe supérieure est la courbe de référence obtenue en suivant un grand nombre de marqueurs. Les courbes solides sont obtenues par notre méthode de renormalisation et les courbes en pointillés par réinitialisation. Les tests sont menés avec 64, 128 et 256 points. Il apparaît clairement que la méthode de renormalisation est une contrepartie tout à fait performante à la méthode de réinitialisation. Un autre exemple frappant de ce bon comportement de la renormalisation est sur le test proposé par [79] pour introduire une nouvelle manière d'approcher la mesure de Dirac. Dans cet article l'auteur construit deux fonctions de Dirac discrètes approchant la mesure à l'ordre 1 et 2, puis calcule la longueur d'une ellipse dont l'orientation est aléatoirement choisie pour éviter les effets de grille. L'erreur moyenne commise est alors enregistrée. Nous constatons sur le tableau ci-dessous que la renormalisation se situe, au niveau précision, au même niveau que la première approximation proposée par l'auteur, et constitue donc, au vu de sa simplicité, une alternative efficace pour approcher une mesure de surface dans la méthode level set. Une étude complète de l'approximation des fonctions de Dirac a été menée dans [37].

Pas de discrétisation	Smereka 1		Renormalisation		Smereka 2	
	Erreur Rel.	Ordre	Erreur Rel.	Ordre	Erreur Rel.	Ordre
0.2	9.38×10^{-3}		1.5×10^{-1}		2.68×10^{-3}	
0.1	2.23×10^{-3}	2.07	5×10^{-3}		5.49×10^{-4}	2.29
0.05	8.12×10^{-4}	1.46	1.3×10^{-3}	1.9	1.32×10^{-4}	2.05
0.025	2.71×10^{-4}	1.58	3×10^{-4}	2.1	2.90×10^{-5}	2.18
0.0125	7.58×10^{-5}	1.83	8×10^{-5}	1.9	7.79×10^{-6}	1.90
0.00625	3.04×10^{-5}	1.32	2×10^{-5}	2	1.84×10^{-6}	2.08

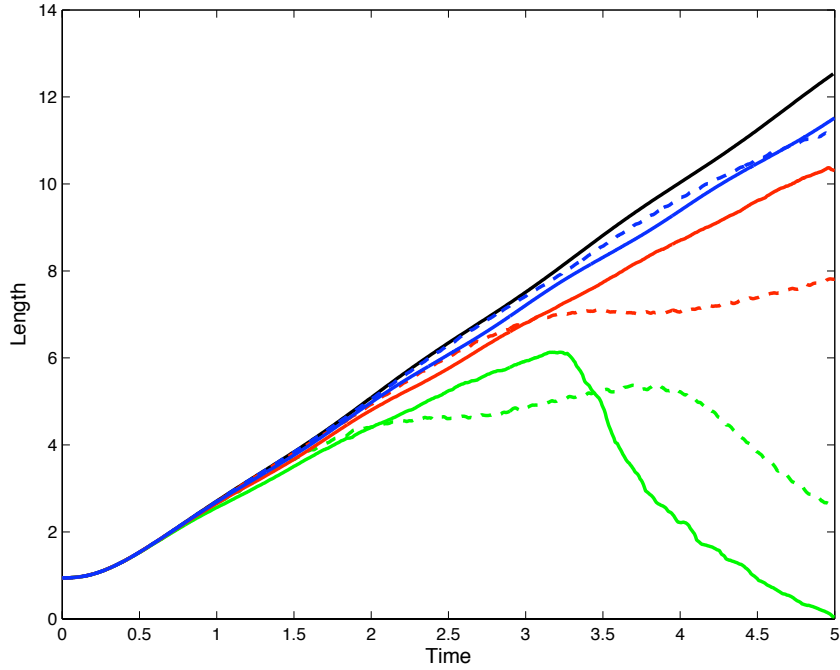


FIGURE 1 – Comparaison de la réinitialisation et de la renormalisation

3.7.2 Schémas WENO pour l'équation de transport

Le coeur de la méthode présentée ici réside dans une équation de transport d'une fonction (vectorielle) niveau qui va enregistrer les déformations du milieu lors de son déplacement par un champ de vitesse calculé par ailleurs. Il est donc important de résoudre numériquement cette équation de manière précise. De nombreux schémas numériques existent pour l'équation de transport : le schéma amont est le plus classique, mais est assez diffusif. Le schéma de Lax-Wendroff est d'une part compliqué à écrire en dimension deux et d'autre part se comporte assez mal pour une solution irrégu-

lière. La méthode des caractéristiques souffre du même défaut du fait de l'interpolation qui l'accompagne. Au milieu des années 80 des schémas non linéaires généralisant le schéma amont ont été introduits par Harten, Engquist, Osher et Chakravarthy. Ces schémas prennent en compte la régularité locale de la solution numérique pour déterminer sur quels points les différences finies doivent être calculées : il s'agit des schémas ENO (Essentially Non Oscillatory). Plus récemment, les schémas WENO (Weighted Essentially Non Oscillatory), qui consistent à prendre une combinaison optimale des stencils de discrétisation (un polycopié de Shu complet sur ces schémas se trouve à l'adresse <http://citeseer.ist.psu.edu/shu97essentially.html>).

Pour comprendre comment ils fonctionnent, plaçons nous en dimension une, en considérant l'équation de transport semi-dicrétisée

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + u^n \phi_x^n = 0 \quad (16)$$

Au noeud i d'une discrétisation de l'intervalle d'étude, l'équation est donc

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u_i^n (\phi_x)_i^n = 0 \quad (17)$$

Le schéma amont consiste simplement à approcher la dérivée en x de ϕ au noeud i en tenant compte du signe de u_i . On pose $(\phi_x^-)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}$ et $(\phi_x^+)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}$ et on écrit (en omettant le n)

$$(\phi_x)_i \approx \begin{cases} (\phi_x^-)_i & \text{si } u_i > 0 \\ (\phi_x^+)_i & \text{si } u_i < 0 \end{cases} \quad (18)$$

sachant que la valeur choisie pour $u_i = 0$ n'a pas d'importance dans (17). Ce schéma est stable sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max |u|} \quad (19)$$

Le schéma WENO que nous considérons utilise les valeurs $\{\phi_{i-3}, \phi_{i-2}, \phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}, \phi_{i+2}\}$ pour déterminer une approximation de $(\phi_x^-)_i$ (resp. $\{\phi_{i-2}, \phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}, \phi_{i+2}, \phi_{i+3}\}$ pour $(\phi_x^+)_i$). Posons

$$v_1 = \frac{\phi_{i-2} - \phi_{i-3}}{\Delta x}, \quad v_2 = \frac{\phi_{i-1} - \phi_{i-2}}{\Delta x}, \quad v_3 = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}, \quad v_4 = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}, \quad v_5 = \frac{\phi_{i+2} - \phi_{i+1}}{\Delta x}$$

On montre alors après quelques développements limités (cf polycopié de Shu cité ci-dessus) que les trois quantités

$$\phi_x^1 = \frac{v_1}{3} - \frac{7v_2}{6} + \frac{11v_3}{6}, \quad \phi_x^2 = -\frac{v_2}{6} + \frac{5v_3}{6} + \frac{v_4}{3}, \quad \phi_x^3 = \frac{v_3}{3} + \frac{5v_4}{6} - \frac{v_5}{6}$$

sont des approximations à l'ordre trois de ϕ_x^- . Un schéma ENO d'ordre 3 choisirait la meilleure de ces approximations au moyen d'un critère minimisant les différences divisées d'ordre trois de ϕ . Ce faisant, on obtient un schéma d'ordre trois. Il a été remarqué ensuite qu'en prenant plutôt une combinaison convexe optimale des trois quantités ci-dessus pour approcher ϕ_x^- , on pouvait atteindre l'ordre 5 dans les régions où ϕ est régulière. On prend donc

$$(\phi_x^-)_i \approx \omega_1 \phi_x^1 + \omega_2 \phi_x^2 + \omega_3 \phi_x^3$$

où $0 \leq \omega_k \leq 1$ sont des poids tels que $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Dans les régions où ϕ est régulière, le choix optimal est $\omega_1 = 0.1, \omega_2 = 0.6$ et $\omega_3 = 0.3$, mais ce choix peut s'avérer catastrophique lorsque ϕ est moins régulière. Dans ce cas un schéma ENO serait meilleur (i.e. un ω_k égal à 1 et les autres nuls). Finalement les recherches sur ces schémas ont abouti à déterminer les poids ω_k grâce à des indicateurs de régularité de la solution numérique. On pose

$$S_1 = \frac{13}{12}(v_1 - 2v_2 + v_3)^2 + \frac{1}{4}(v_1 - 4v_2 + 3v_3)^2 \quad (20)$$

$$S_2 = \frac{13}{12}(v_2 - 2v_3 + v_4)^2 + \frac{1}{4}(v_2 - v_4)^2 \quad (21)$$

$$S_3 = \frac{13}{12}(v_3 - 2v_4 + v_5)^2 + \frac{1}{4}(3v_3 - 4v_4 + v_5)^2 \quad (22)$$

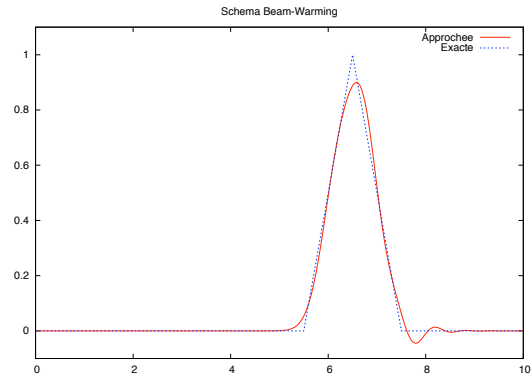
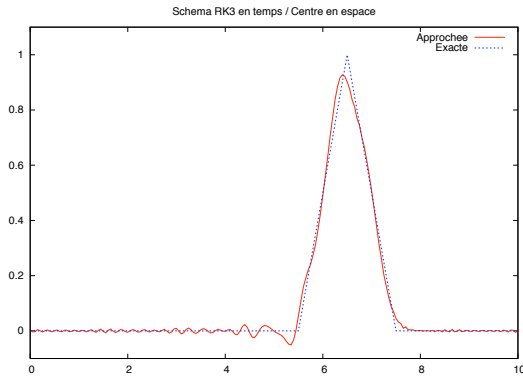
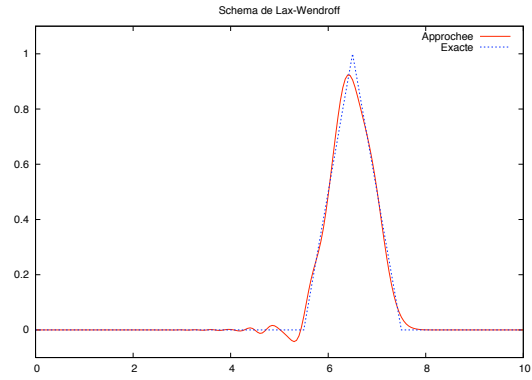
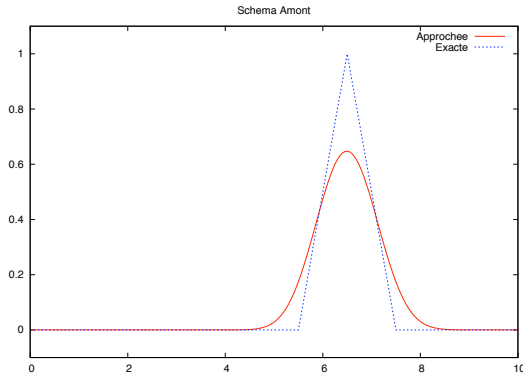
puis on définit

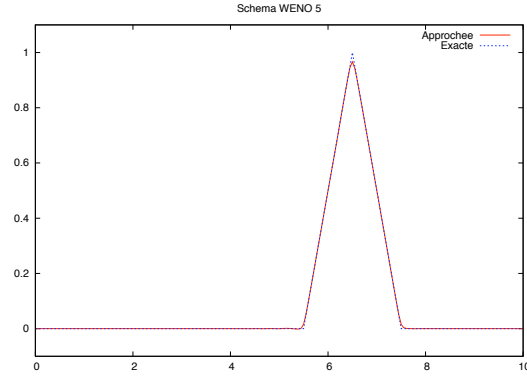
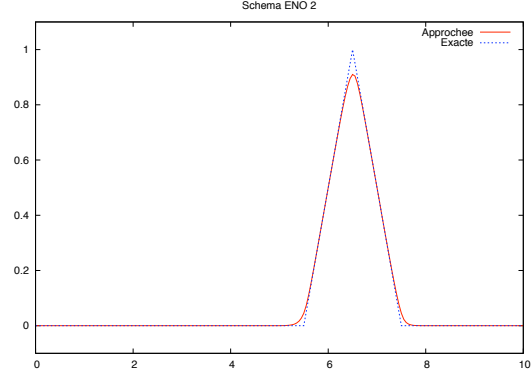
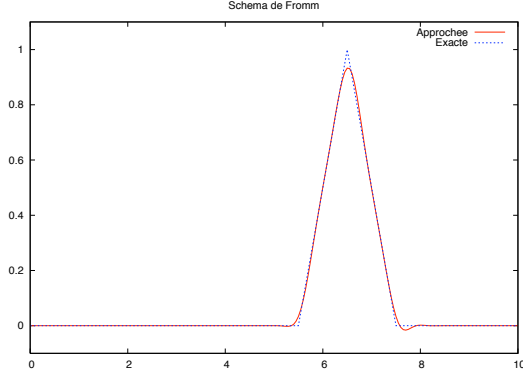
$$\alpha_1 = \frac{0.1}{(S_1 + \varepsilon)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{0.6}{(S_2 + \varepsilon)^2}, \quad \alpha_3 = \frac{0.3}{(S_3 + \varepsilon)^2}$$

où $\varepsilon > 0$ est petit (par exemple $\varepsilon = 10^{-6} \max\{v_k^2\} + 10^{-99}$), et enfin les poids

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \quad k = 1, 2, 3$$

Ces choix donnent presque les poids optimaux dans les régions où ϕ est régulière, et reproduisent un comportement de schéma ENO ailleurs. A titre d'exemple les figures suivantes donnent les résultats de simulation de l'équation de transport monodimensionnelle d'une fonction prototype de fonction distance, par plusieurs schémas. On a prit dans ces exemples 200 points en espace sur l'intervalle $[0, 10]$, soit $\Delta x = 0.05$, et une CFL de 0.2. Le choix de cette CFL s'explique par le fait qu'en pratique, le pas de temps n'est pas souvent imposé par l'équation de transport, mais plutôt par la diffusion, si on est en explicite, ou la raideur de l'interface. Il est donc important que notre schéma de transport de l'interface ne soit pas trop diffusif à basse CFL. Le schéma temporel utilisé dans cet exemple est celui d'Euler, à l'exception du schéma RK3 en temps / centré en espace. Le schéma WENO est clairement meilleur que tous les autres schémas, y compris les schémas sophistiqués de Fromm et Beam-Warming. On remarque en outre que les schémas (W)ENO, au même titre que le schéma amont sur lequel ils sont basés, sont les seuls à ne pas présenter de post ou pré-oscillations.





4 Introduction au transport optimal et application à l'analyse d'images

La problématique du transport optimal a été formulée la première fois par le français Gaspard Monge, dans son *Mémoire sur les déblais et les remblais* (1781) où il se posait le problème de déplacer une certaine quantité de sable sur un lieu de construction de manière optimale. Une autre formulation consiste à supposer qu'on dispose d'un tas de sable, et d'un trou à remplir. Il s'agit de déterminer où mettre chaque unité de masse de sable pour optimiser un coût.

4.1 Problèmes de Kantorovich et de Monge

Mathématiquement le tas et le trou peuvent être modélisés par des mesures de probabilité μ et ν sur deux espaces X et Y : si $A \subset X$ (resp. $B \subset Y$) est un ensemble μ -mesurable (resp. ν -mesurable), la quantité de sable (resp. la quantité de sable qu'on peut placer) dans A (resp. dans B) est donnée par $\mu(A)$ (resp. $\nu(B)$). Le coût est introduit par une fonction $(x, y) \rightarrow c(x, y)$ définie sur $X \times Y$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui représente le coût nécessaire au déplacement d'une unité de masse de sable du point x au point y . Pour évaluer le coût total en vue de l'optimiser il nous faut l'intégrer sur l'espace produit $X \times Y$ en le pondérant par une mesure de la probabilité des déplacements qui s'opèrent de x vers y . Notons π cette mesure de probabilité. Par conservation de la masse elle doit vérifier

$$\int_Y d\pi(x, y) = d\mu(x) \quad \int_X d\pi(x, y) = d\nu(y)$$

ce qui signifie que la totalité du sable émanant de la position x vaut $d\mu(x)$ et que la totalité du sable déposée en y correspondant à la capacité du trou en y , soit $d\nu(y)$. On dit que la mesure π sur l'espace

produit admet μ et ν comme mesures marginales. Cela revient à supposer

$$\pi(A \times Y) = \pi(A) \quad \pi(X \times B) = \nu(B) \quad (23)$$

pour tous sous-ensembles mesurables $A \subset X$ et $B \subset Y$. On note $\Pi(\mu, \nu)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur l'espace produit qui vérifient (23). Le plus trivial exemple d'une telle mesure est la mesure produit $\mu \otimes \nu$ qui correspond à répartir chaque unité de masse de sable uniformément sur tout le trou, ce qui n'est certainement pas optimal.

Nous pouvons alors formuler le problème de transport optimal de Kantorovich :

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) \quad (24)$$

Le problème de Monge est en fait plus une version plus stricte de ce problème où on n'autorise pas la masse à être divisée et répartie en plusieurs endroits. Cela signifie alors qu'il existe une application mesurable $T : X \rightarrow Y$ telle que la masse en x est déplacée en $y = T(x)$. Sur les mesures ci-dessus, cela s'exprime par

$$d\pi(x, y) = d\mu(x) \delta_{\{y=T(x)\}}(x, y)$$

ce qui signifie contre une fonction f intégrable,

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\pi(x, y) = \int_X f(x, T(x)) d\mu(x).$$

La condition (23) devient dans ce cas, en considérant une fonction $f(x, y) = g(y)$,

$$\int_X g \circ T d\mu(x) = \int_Y g(y) d\nu(y),$$

condition qui doit être réalisée pour toute fonction intégrable g . En termes de mesures cela correspond à écrire que pour tout ensemble mesurable $B \subset Y$, $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$. On dit que ν est la mesure image de μ par T (push-forward), ou que T transporte μ sur ν (terminologie à rapprocher de la proposition 5). On note aussi $\nu = T\#\mu$. Le problème de transport optimal de Monge s'écrit alors :

$$\min_{\{T: X \rightarrow Y, T\#\mu = \nu\}} \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) \quad (25)$$

Le problème de Kantorovich a été résolu assez rapidement après avoir été formulé, par Appell en 1887. Par contre le problème de Monge est beaucoup plus difficile et a été résolu pour certaines fonctions coût ($c(x, y) = |x - y|$) de manière complète qu'en 1999 par Evans et Gangbo [40]. En effet dans ce dernier problème, la contrainte $\nu = T\#\mu$, si T est \mathcal{C}^1 et μ et ν ont des densités f et g , revient à une formule de changement de variable dans une intégrale qui s'écrit

$$g(T(x)) |\det \nabla T(x)| = f(x).$$

C'est une contrainte très non linéaire, délicate à prendre en main avec les outils classiques du calcul des variations. On se reportera à [44] pour la résolution du problème pour $c(x, y) = h(x - y)$ avec h strictement convexe ou strictement concave.

Remarque 12 Lorsque $\mu(\mathbb{R}^n) = \nu(\mathbb{R}^n) = 1$, l'ensemble $\Gamma(\mu, \nu)$ n'est pas vide car il contient toujours la mesure produit $\mu \otimes \nu$. L'ensemble $C(\mu, \nu) = \{T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, T\#\mu = \nu\}$, par contre, peut être vide. C'est par exemple le cas pour $\mu = \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_y)$ et $\nu = \frac{1}{3}(\delta_x + \delta_y + \delta_z)$ lorsque x, y, z sont distincts dans \mathbb{R}^n .

4.2 Les minimiseurs sont des gradients de fonctionnelles convexes

Considérons le cas de $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$ et supposons en reprenant une construction de L.C. Evans [39] qu'on dispose d'une application T^* minimisant (25), qui donc s'écrit

$$I[T] = \frac{1}{2} \int_X |x - T(x)|^2 d\mu(x).$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{k=1 \dots m}$ des points de X dans le support de μ . On suppose qu'on peut ajuster les rayons de petites boules autour des x_k de sorte que les $E_k := B(x_k, r_k)$ soient tous de mesure $\mu(E_k) = \varepsilon$. Comme T^* préserve la mesure, les ensembles $F_k := T^*(E_k)$, qui contiennent $y_k := T^*(x_k)$ sont aussi de mesure $\nu(F_k) = \varepsilon$. On construit alors une autre application T à partir de T^* en opérant une permutation cyclique des y_k . T vérifie $T(x_k) = y_{k+1}$ et $T(E_k) = F_{k+1}$ (avec la convention $y_{m+1} = y_1$ et $F_{m+1} = F_1$), et coïncide avec T^* sur $X \setminus \bigcup_{k=1}^m E_k$. Notons que T préserve encore la mesure. Comme T^* est un minimiseur de I , on a $I[T^*] \leq I[T]$ ce qui s'écrit

$$\sum_{k=1}^m \int_{E_k} |x - T^*(x)|^2 d\mu(x) \leq \sum_{k=1}^m \int_{E_k} |x - T(x)|^2 d\mu(x)$$

Comme T et T^* préservent la mesure, on a $\int_{E_k} |T^*(x)|^2 d\mu(x) = \int_{F_k} |y|^2 d\nu(y)$ et $\int_{E_k} |T(x)|^2 d\mu(x) = \int_{F_{k+1}} |y|^2 d\nu(y)$ si bien que l'inégalité ci-dessus se simplifie en

$$\sum_{k=1}^m \int_{E_k} x \cdot (T(x) - T^*(x)) d\mu(x) \leq 0.$$

En divisant par la mesure de E_k , soit ε , et en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient en supposant μ régulière,

$$\sum_{k=1}^m x_k \cdot (y_{k+1} - y_k) \leq 0,$$

et ceci pour tout $x_k, y_k = T^*(x_k), y_{m+1} = y_1, k = 1 \dots m$.

En analyse convexe, il est classique que le gradient M d'une fonctionnelle convexe Φ de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} est monotone c'est à dire vérifie pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, $(M(x) - M(y)) \cdot (x - y) \geq 0$. Cette notion généralise la notion de fonction monotone d'une variable réelle. La réciproque n'est pas vraie. Comme l'a démontré R.T. Rockafellar ([77], théorème 24.8, page 238), pour qu'une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^p soit le gradient d'une fonction convexe, il faut et il suffit qu'elle soit cycliquement monotone, au sens : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute famille de couples $(x_k, y_k)_{k=1 \dots n} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, tels que $y_k = T(x_k)$, on a $\sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) \cdot y_k \leq 0$ avec la notation $x_{n+1} = x_1$. Cette relation est équivalente à celle obtenue ci-dessus. On en déduit que l'application optimale T^* est le **gradient d'une fonctionnelle convexe** sur X .

4.3 Formulation mécanique des fluides

On considère maintenant que les mesures μ et ν sont en fait régulières c'est à dire associées à des densités ρ_0 et ρ_1 positives ou nulles sur \mathbb{R}^n , et donc d'après les hypothèses faites ci-dessus sur μ et ν telles que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_1(x) dx = 1.$$

Une application $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ réalise le transfert de ρ_0 sur ρ_1 si pour tout sous-ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_A \rho_1(x) dx = \int_{\{T(x) \in A\}} \rho_0(x) dx \quad (26)$$

Si T est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme, alors cette identité signifie par changement de variables,

$$\det(\nabla T(x))\rho_1(T(x)) = \rho_0(x)$$

qui est une équation sous-déterminée. Notons $\Gamma(\rho_0, \rho_1)$ l'ensemble des applications T transférant ρ_0 sur ρ_1 . La distance L^p de Kantorovich-Wassertein entre ρ_0 et ρ_1 est alors définie par

$$d_p(\rho_0, \rho_1)^p = \inf_{T \in \Gamma(\rho_0, \rho_1)} \int |T(x) - x|^p \rho_0(x) dx.$$

Le problème L^p de Monge-Kantorovitch (MKP) est alors de déterminer une application T pour laquelle cet infimum est atteint. Dans le cas $p = 2$, ce problème admet une unique solution (voir Villani [87] page 66), et on a justifié ci-dessus qu'elle s'écrit comme le gradient d'une fonctionnelle convexe sur \mathbb{R}^n :

$$T(x) = \nabla \Psi(x).$$

Ce résultat est à rapprocher du théorème de factorisation polaire de Brenier [14]. La fonction convexe Ψ est donc solution de l'équation de Monge-Ampère :

$$\det(D^2 \Psi) \rho_1(\nabla \Psi(x)) = \rho_0(x).$$

Cette équation est complètement non linéaire et du coup ce n'est que récemment que des méthodes numériques pour la résoudre directement ont vu le jour [32]. Ces méthodes permettent de trouver $\nabla \Psi$ mais si on est intéressés par une application passant continûment de ρ_0 à ρ_1 alors on peut se tourner la méthode de Benamou et Brenier [6] qui ont eu l'idée de rendre le problème plus facile numériquement en y ajoutant une dimension, le temps, et en le plaçant dans un contexte mécanique des milieux continus qui est pertinent pour ce que l'on veut faire dans ce cours. L'idée est de fixer un intervalle de temps $[0, t_m]$ et de considérer l'ensemble de toutes les fonctions $\rho(x, t) \geq 0$ et champs de vecteurs $v(x, t) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant l'équation de continuité munie de conditions initiale et finale :

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad \rho(x, t_m) = \rho_1(x). \quad (27)$$

On a alors :

Proposition 9 Dans le cas $p = 2$ la distance KW entre ρ_0 et ρ_1 vérifie :

$$d_2(\rho_0, \rho_1)^2 = \inf_{\rho, v} \int_0^{t_m} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x, t) |v(x, t)|^2 dx dt$$

L'infimum étant pris sur tous les ρ, v vérifiant (27).

Démonstration. Soient les caractéristiques $X(t, x)$ du champ de vecteur v , c'est à dire vérifiant $X_t = v(X(t, x), t)$ et $X(0, x) = x$. Remarquons d'abord que si ρ et v sont vérifiant (27), on a $\rho(t, X(t, x))_t = \partial_t \rho + X_t \cdot \nabla \rho = -\rho \operatorname{div} v$ donc d'après la proposition 1, on a $(\rho(t, X(t, x))J(x, t))_t = 0$ donc

$$\rho(t, X(t, x))J(x, t) = \rho_0(x).$$

En particulier en intégrant sur un ensemble A , on a

$$\int_A \rho(t_m, x) dx = \int_{X(t_m, x) \in A} \rho_0(x) dx$$

ce qui montre que $X(t_m, \cdot) \in \Gamma(\rho_0, \rho_1)$. On a donc pour toute fonction test f ,

$$\int f(t, x) \rho(t, x) dx dt = \int f(t, X(t, x)) \rho_0(x) dx dt.$$

De même on a

$$\int f(t, x) \rho(t, x) v(x, t) dx dt = \int \partial_t X(t, x) f(t, X(t, x)) \rho_0(x) dx dt.$$

Ainsi si on considère la fonctionnelle à minimiser

$$t_m \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{t_m} \rho(x, t) |v(x, t)|^2 dx dt = t_m \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{t_m} \rho_0(x) |\partial_t X(t, x)|^2 dx dt$$

En utilisant l'inégalité de Jensen, valable pour une fonction convexe Φ et qui s'écrit

$$\Phi\left(\frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} f(t) dt\right) \leq \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} \Phi(f(t)) dt$$

on a

$$t_m \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{t_m} \rho_0(x) |\partial_t X(t, x)|^2 dx dt \geq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(x) |X(t_m, x) - X(0, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(x) |X(t_m, x) - x|^2 dx.$$

Cette dernière intégrale est nécessairement supérieure ou égale à

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(x) |\nabla \Psi(x) - x|^2 dx$$

puisque $\nabla \Psi(x)$ réalise le minimum de cette fonctionnelle parmi les applications de $\Gamma(\rho_0, \rho_1)$. Donc l'infimum sur (ρ, v) vérifiant (27) qui nous intéresse est minoré par cette même quantité. Montrons qu'il est atteint pour un couple vérifiant (27). En effet prenons $X(t, x) = x + \frac{t}{t_m}(\nabla \Psi(x) - x)$, ce qui correspond à $v(X(x, t), t) = \frac{1}{t_m}(\nabla \Psi(x) - x)$, et $\rho(x, t)$ solution pour ce v de (27). Ce couple réalise le minimum recherché. \square

Exemples :

Cas 1D. En dimension une le fait que T transporte la mesure de densité ρ_0 vers celle de densité ρ_1 (condition 26) s'écrit, sur $]0, 1[$ et pour $A =]0, T(x)[$,

$$\int_0^{T(x)} \rho_1(y) dy = \int_{T(y) \in A} \rho_0(y) dy.$$

Comme T est optimal si et seulement s'il est gradient d'une fonction convexe, c'est une fonction croissante sur $]0, 1[$, qui vérifie $T(0) = 0$ d'après l'égalité précédente. Donc on a

$$\int_0^{T(x)} \rho_1(y) dy = \int_0^x \rho_0(y) dy.$$

En particulier pour T régulier sa détermination revient à la résolution de l'équation différentielle du premier ordre

$$T'(x) \rho_1(T(x)) = \rho_0(x), \quad x \in]0, 1[, \quad T(0) = 0.$$

Soit F_i la fonction de répartition associée à ρ_i . Alors nous avons de manière équivalente

$$F_1(T(x)) = F_0(x)$$

soit si $\rho_1 > 0$, $T(x) = F_1^{-1}(F_0(x))$.

Cas translation-homothétie. Supposons que ρ_1 s'obtienne à partir de ρ_0 par la composée d'une translation et d'une homothétie :

$$\rho_1(x) = \lambda^d \rho_0(\lambda(x - c))$$

où le coefficient λ^d permet de d'assurer, dans \mathbb{R}^d , que les deux mesures ont même masse. Alors l'application réalisant le transport optimal est $T(x) = \frac{1}{\lambda}x + c$. En effet, T est bien le gradient d'une fonctionnelle convexe, plus précisément

$$T(x) = \nabla \left(\frac{1}{2\lambda} |x|^2 + c \cdot x \right)$$

qui est convexe, et de jacobien $\frac{1}{\lambda^d}$. D'où

$$\det \nabla T \rho_1(T(x)) = \frac{1}{\lambda^d} \lambda^d \rho_0(\lambda(T(x) - c)) = \rho_0(x)$$

4.4 Résolution numérique

La difficulté dans la résolution du problème de transport optimal, même dans sa version quadratique

$$\inf_{T \in \Gamma(\rho_0, \rho_1)} \int |T(x) - x|^2 \rho_0(x) dx.$$

réside dans le fait que la contrainte $T \in \Gamma(\rho_0, \rho_1)$ est non linéaire dégénérée puisqu'elle correspond à

$$\det(\nabla T(x)) \rho_1(T(x)) = \rho_0(x).$$

L'introduction du temps dans le problème, malgré l'ajout d'une dimension, permet de simplifier la contrainte. D'une contrainte non linéaire dégénérée faisant intervenir le déterminant, on considère une équation de transport, qui peut être associée à un problème d'optimisation convexe. Ceci fait que les articles résolvant directement et efficacement le problème stationnaire via l'équation de Monge-Ampère sont apparus après l'article de Benamou-Brenier résolvant le problème temporel.

4.4.1 Résolution du problème avec trajectoire : algorithme Benamou-Brenier

C'est l'algorithme de Benamou et Brenier [6], qui se déroule dans l'espace produit $\mathbb{R}^2 \times]0, t_m[$. Plus précisément on considère le domaine spatial $\Omega = [0, 1]^2$ avec conditions aux limites périodiques (i.e. le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$). Pour minimiser l'énergie sous la contrainte de l'équation (27), on introduit d'abord les variables ρ et $m = \rho v$ (pour linéariser la contrainte) et on cherche donc

$$\inf_{\rho, m} t_m \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{t_m} \frac{|m|^2}{\rho} dx dt$$

sous la contrainte

$$\rho_t + \operatorname{div}(m) = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad \rho(x, t_m) = \rho_1(x). \quad (28)$$

On considère le Lagrangien

$$L(\phi, \rho, m) = \int_0^{t_m} \int_{\Omega} \frac{|m|^2}{\rho} - \partial_t \phi \rho - \nabla_x \phi \cdot m dx dt - \int_{\Omega} \phi(0, x) \rho_0(x) - \phi(t_m, x) \rho_1(x) dx$$

Etant données deux densités ρ_0 et ρ_1 , le problème est donc équivalent au problème de point-selle :

$$\inf_{\rho, m} \sup_{\phi} L(\phi, \rho, m).$$

Benamou et Brenier observent que

$$\frac{|m|^2}{\rho} = \sup_{(a,b) \in K} a(t,x)\rho(t,x) + b(t,x) \cdot m(t,x)$$

avec

$$K = \left\{ (a,b) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \quad a + \frac{1}{2}|b|^2 \leq 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ceci est évident puisque $(\rho, m) \rightarrow a\rho + b \cdot m$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ qui ne peut prendre sa borne supérieure que sur un bord de K . Pour simplifier les notations, on introduit les variables groupées $\mu = (\rho, m)$ et $q = (a, b)$, ainsi que la fonction support de K , F telle que $F(q) = 0$ pour $q \in K$ et $F(q) = +\infty$ sinon. On a donc $\frac{|m|^2}{\rho} = \sup_{q \in K} \mu \cdot q$. Enfin on pose

$$G(\phi) = \int_{\Omega} \phi(0, x)\rho_0(x) - \phi(t_m, x)\rho_1(x)dx.$$

On montre maintenant que le problème de point selle peut s'écrire

$$\sup_{\mu} \inf_{\phi, q} F(q) + G(\phi) + \langle \mu, \nabla_{x,t}\phi - q \rangle \quad (29)$$

Dans cette formule le crochet scalaire signifie $\int_0^{t_m} \int_{\Omega} \rho(\partial_t \phi - a) + m \cdot (\nabla \phi - b) dx dt$. Pour démontrer cette nouvelle forme, on a

$$-\inf_{\rho, m} \sup_{\phi} L(\phi, \rho, m) = \sup_{\rho, m} \inf_{\phi} G(\phi) + \int_0^{t_m} \int_{\Omega} \mu \cdot \nabla_{x,t}\phi - \sup_{q \in K} \mu \cdot q dx dt.$$

On remarque enfin que

$$\int_0^{t_m} \int_{\Omega} \sup_{q \in K} \mu \cdot q dx dt = \sup_q -F(q) + \int_0^{t_m} \int_{\Omega} \mu \cdot q dx dt = \sup_q -F(q) + \langle \mu, q \rangle.$$

ce qui mène à la forme annoncée. Les problèmes de type (29) ont été l'objet de nombreuses études théoriques et des méthodes numériques performantes ont été développées pour leur résolution [42]. Ce sont des méthodes dites de Lagrangien augmenté, que l'on définit pour $r > 0$ par

$$L_r(\phi, q, \mu) = F(q) + G(\phi) + \langle \mu, \nabla_{x,t}\phi - q \rangle + \frac{r}{2} \langle \nabla_{x,t}\phi - q, \nabla_{x,t}\phi - q \rangle \quad (30)$$

et dont on cherche un point-selle. Ce dernier sera solution du même problème que précédemment car à l'optimum on verra se réaliser $\nabla_{x,t}\phi - q = 0$. L'algorithme de résolution est alors donné par les trois étapes suivantes permettant de passer de $(\phi^{n-1}, q^{n-1}, \mu^n)$ à l'itéré suivant :

Etape 1 Trouver ϕ^n minimisant $\phi \rightarrow L_r(\phi, q^{n-1}, \mu^n)$.

Etape 2 Trouver q^n minimisant $q \rightarrow L_r(\phi^n, q, \mu^n)$.

Etape 3 Mettre à jour $\mu^{n+1} = \mu^n + r(\nabla_{x,t}\phi^n - q^n)$.

Plus précisément, voyons quelles équations il convient de résoudre pour accomplir ces étapes. La première correspond, en considérant l'équation d'Euler-Lagrange associée, à trouver ϕ^n solution de

$$G(\phi) + \langle \mu^n, \nabla_{x,t}\phi \rangle + r \langle \nabla_{x,t}\phi^n - q^{n-1}, \nabla_{x,t}\phi \rangle = 0, \quad \forall \phi$$

Ceci correspond d'une part, en prenant ϕ à support compact dans $\Omega \times]0, t_m[$, à l'EDP de Laplace en espace-temps :

$$-r\Delta_{x,t}\phi^n = \operatorname{div}_{x,t}(\mu^n - r q^{n-1}) \quad (x, t) \in \Omega \times]0, t_m[$$

et d'autre part aux conditions aux limites périodiques en espace. Pour les conditions aux limites temporelles (conditions initiales et finales) on a en multipliant l'EDP par ϕ et en intégrant par parties sur $\Omega \times]0, t_m[$, d'une part :

$$\int_0^{t_m} \int_{\Omega} -r \Delta_{x,t} \phi^n \phi dx dt = \int_0^{t_m} \int_{\Omega} r \langle \nabla_{x,t} \phi^n, \nabla_{x,t} \phi \rangle dx dt - r \int_{\Omega} \partial_t \phi^n(x, t_m) \phi(x, t_m) dx - \partial_t \phi^n(x, 0) \phi(x, 0) dx$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \int_0^{t_m} \int_{\Omega} \operatorname{div}_{x,t}(\mu^n - r q^{n-1}) \phi dx dt &= - \int_0^{t_m} \int_{\Omega} (\mu^n - r q^{n-1}) \cdot \nabla \phi dx dt \\ &+ \int_{\Omega} (\rho^n(x, t_m) - r a^{n-1}(x, t_m)) \phi(x, t_m) - (\rho^n(x, 0) - r a^{n-1}(x, 0)) \phi(x, 0) dx \end{aligned}$$

Donc les conditions initiales et finales correspondantes sont :

$$r \partial_t \phi^n(x, 0) = \rho_0(x) - \rho^n(0, x) + r a^{n-1}(x, 0) \quad r \partial_t \phi^n(x, t_m) = \rho_1(x) - \rho^n(t_m, x) + r a^{n-1}(t_m, x) \quad (31)$$

Pour la deuxième étape, on ne peut pas différencier directement à cause du terme en F . On doit donc résoudre

$$\inf_q F(q) + \langle \mu^n, \nabla_{x,t} \phi^n - q \rangle + \frac{r}{2} \langle \nabla_{x,t} \phi^n - q, \nabla_{x,t} \phi^n - q \rangle$$

ce qui revient à

$$\inf_{q \in K} \left\langle \nabla_{x,t} \phi^n + \frac{\mu^n}{r} - q, \nabla_{x,t} \phi^n + \frac{\mu^n}{r} - q \right\rangle.$$

C'est un problème très simple car si on note $(\alpha^n, \beta^n) = \nabla_{x,t} \phi^n + \frac{\mu^n}{r}$ qui est connu à ce stade, on cherche $q^n(x, t) = (a^n(x, t), b^n(x, t))$ réalisant point par point sur $\Omega \times]0, T[$,

$$\inf \left\{ (a - \alpha^n(t, x))^2 + |b - \beta^n(x, t)|^2, \quad a + \frac{|b|^2}{2} \leq 0 \right\}$$

qu'on peut résoudre analytiquement ou numériquement, puisqu'il s'agit de projeter orthogonalement le point de $(\alpha^n, \beta^n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ sur le paraboloïde $a = \frac{1}{2}|b|^2$. On trouve une équation du troisième degré. Enfin la dernière étape est une simple mise à jour et ne nécessite pas plus de développement.

L'avantage de cet algorithme est qu'on résout exactement le problème d'optimisation qui découle de la formulation eulérienne du transport optimal. L'inconvénient est qu'il nécessite la résolution d'une équation de Poisson en dimension 3 par itération pour une image 2D et en dimension 4 si on considère des images volumiques. Malgré l'existence de méthodes rapides par transformée de Fourier (par exemple la librairie FISHPACK) cela peut poser des problèmes de coût de calcul. On pourra se tourner vers des méthodes de résolution adaptées aux problèmes de grandes dimensions (par exemples les travaux de C. Lebris, T. Lelièvre, et Y. Maday [54]).

4.4.2 Résolution du problème sans trajectoire : Algorithme de Angenent-Haker-Tanenbaum

La méthode fondamentale est celle de Angenent, Haker et Tannenbaum [1]. L'idée est de commencer par construire une application T^0 qui conserve la mesure, donc vérifie la contrainte, mais qui n'est pas optimale. Puis de la modifier pour la rendre optimale. Dans ce but, l'application de l'algorithme AHT étudié en 2.7 qui permet d'obtenir la factorisation polaire de l'application initiale. L'inconvénient dans cette approche est de devoir construire une application initiale, qui conserve la mesure. Il existe une méthode pour y parvenir mais l'application obtenue est peu régulière. Une méthode plus récente [51] propose de partir d'une application ne conservant pas nécessairement la mesure, de la projeter à un certain sens pour lui conférer cette qualité et ensuite de résoudre un problème d'optimisation qui pénalise le rotationnel afin de récupérer une fonction sous la forme d'un gradient (ce qui résout le problème de Monge du même coup).

4.4.3 Construction d'une application non optimale

Supposons que $\Omega = [0, 1]^2$. L'algorithme marche aussi dans \mathbb{R}^3 , et il existe des algorithmes pour des domaines plus généraux, voir les travaux de Dacorogna et Moser [31]. Soit ρ_0 et ρ_1 des fonctions régulières strictement positives. On commence par construire $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\int_0^{a(x)} \int_0^1 \rho_1(r, s) dr ds = \int_0^x \int_0^1 \rho_0(r, s) dr ds.$$

Comme on a supposé les densités strictement positives, cette relation définit une fonction a strictement croissante, dont une approximation numérique peut être obtenue par intégration numérique. Une fois cette fonction a construite, remarquons qu'en dérivant l'égalité ci-dessus on a

$$a'(x) \int_0^1 \rho_1(a(x), s) ds = \int_0^1 \rho_0(x, s) ds$$

si bien qu'on peut réitérer le processus (plusieurs fois en dimension > 2) en cherchant, à x fixé, $b(x, \cdot)$ telle que

$$a'(x) \int_0^{b(x, y)} \rho_1(a(x), s) ds = \int_0^y \rho_0(x, s) ds. \quad (32)$$

On pose alors $T^0(x, y) = (a(x), b(x, y))$, qui vérifie

$$\nabla T^0 = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ \partial_x b & \partial_y b \end{pmatrix}, \quad \det \nabla T^0 = a'(x) \partial_y b(x, y).$$

En dérivant (32) par rapport à y on a

$$a'(x) \partial_y b \rho_1(a(x), b(x, y)) = \rho_0(x, y)$$

ce qui correspond bien à la contrainte de conservation de la mesure.

4.4.4 Annuler le rotationnel de T^0

Une fois construite cette application non optimale T^0 , on va chercher l'application optimale sous la forme $T^0 \circ s^{-1}$ où s est un difféomorphisme préservant la mesure (DPM). Comme la composée de deux DPM est un DPM, il ne reste plus qu'à le transformer en le gradient d'une fonctionnelle convexe. Pour cela on peut soit appliquer l'algorithme AHT ci-dessus, qui va converger vers une application ∇p qui sera un réarrangement de T^0 . En pratique on va jusqu'à un temps $\tau > 0$ telle que le rotationnel de T soit en dessous d'une valeur seuil. Alors si $T(x, \tau) \approx \nabla p(x, \tau)$ pour p calculé par l'algorithme AHT, on a $T(x, \tau) = T^0(Y(x, \tau))$ où Y représente toujours les caractéristiques rétrogrades, qui est la solution de notre problème.

4.4.5 Autre algorithme

On peut plutôt chercher directement à pénaliser le rotationnel => article à lire par Mr V.

4.5 Applications existantes à l'image

Ci-dessous on liste de manière chronologique les contributions des différents auteurs. Avant l'article de Benamou-Brenier, Younes avait commencé à étudier la distance entre deux courbes en faisant intervenir une énergie élastique, et a inspiré les articles suivants.

4.5.1 Distance élastique de Younes

Article à lire par Mr W.

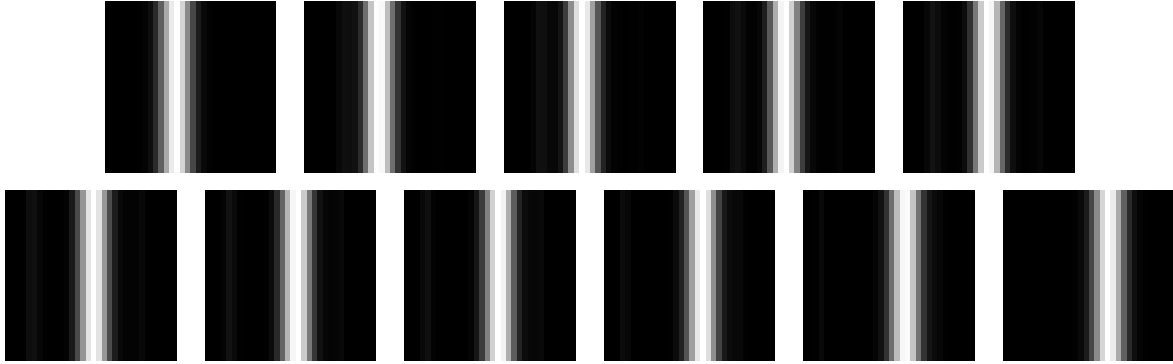


FIGURE 2 – Translation d’une bande verticale, sans influence des conditions aux limites périodiques.

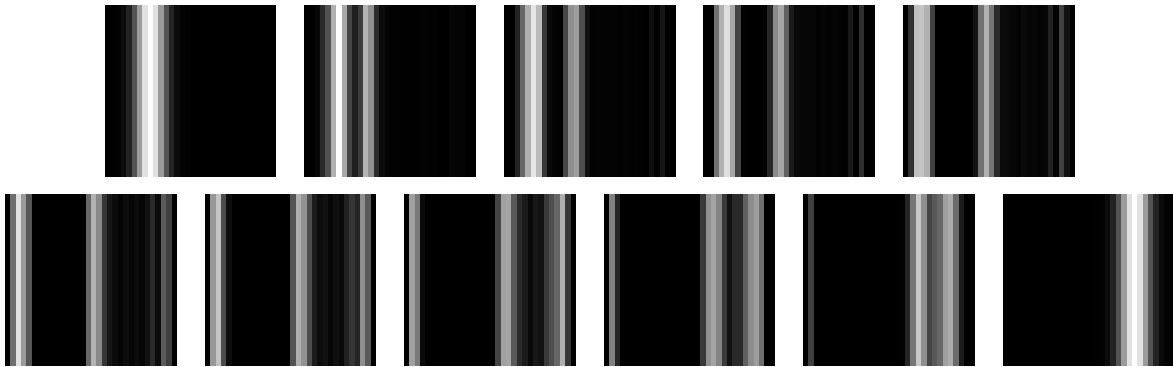


FIGURE 3 – Translation d’une bande verticale, avec influence des conditions aux limites périodiques.

4.5.2 Exemples d’application de l’algorithme de Benamou-Brenier

L’implémentation de l’algorithme est assez simple, pourvu qu’on dispose d’un solveur rapide d’équations de Poisson. Nous avons choisi la bibliothèque FISHPACK qui a le défaut d’être écrite en FORTRAN 77, d’où quelques errements à prévoir pour l’interfaçage avec un langage moderne, mais aussi l’avantage d’être quasi-imbattable en vitesse. Ci-dessous on discute quelques cas tests élémentaires. Dans la première série de figures (Fig 2) on considère comme première image une bande verticale blanche sur fond noir (en fait une gaussienne dans la direction x) et comme seconde image cette même bande translatée horizontalement. On considère d’abord le cas où les deux bandes sont assez proches du milieu du domaine, et on constate, comme prévu, que la solution transport optimal est la simple translation de la première bande vers la deuxième. Il faut néanmoins se rappeler que nous avons résolu un problème avec conditions aux limites périodiques, donc le carré du domaine est en fait un tore. Du coup si la bande verticale précédente est trop proche d’un bord, il peut être plus avantageux en termes de distance de passer par le bord, comme pac-man dans son tunnel ! C’est ce que nous constatons sur le test de la figure 3. Enfin le dernier test proposé est celui de Benamou et Brenier qui considèrent un décalage dans un réseau : on part d’un réseau de gaussiennes centré au milieu de la boîte (on est en périodique) et on veut arriver à ce même réseau mais décalé d’une demi-diagonale de boîte. La solution n’est pas une translation mais un éclatement en quatre de chaque gaussienne, voir Fig. 4.

4.5.3 Algorithme de registration/déformation de Haker-Tannenbaum-Angenent

Article à lire par Mr X.

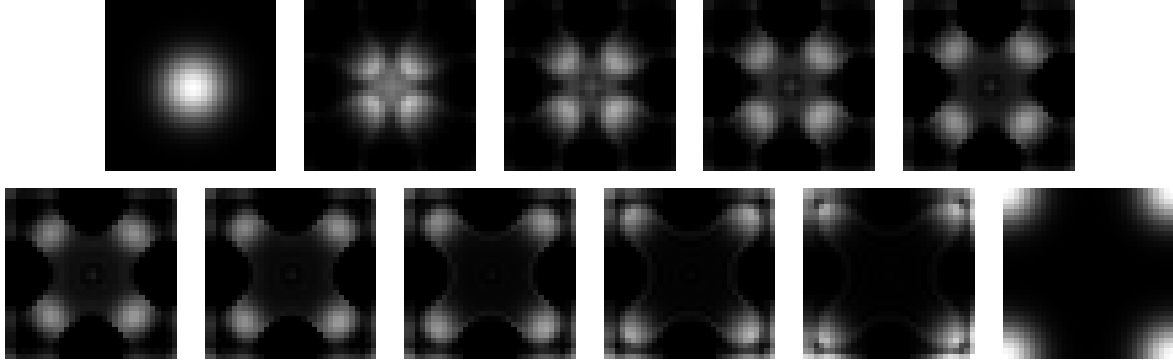


FIGURE 4 – Translation diagonale d'un réseau de gaussiennes

4.5.4 Articles plus récents

Articles à lire par Mr Y. Articles de Memin ? Clarysse-Picq-Pousin (convergence)

4.6 Assimilation de données images vs transport optimal

Articles à lire par Mr Z.

5 Transport optimal et énergies plus générales

5.1 Distance mixte L^2 -Wasserstein

Rappelons qu'on a introduit la distance de Wasserstein et son interprétation mécanique des fluides dans la proposition 9 :

$$d_2(\rho_0, \rho_1)^2 = \inf_{\rho, v \in C(\rho_0, \rho_1)} t_m \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{t_m} \rho(x, t) |v(x, t)|^2 dx dt$$

où $C(\rho_0, \rho_1) = \{(\rho, v), \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \rho(x, 0) = \rho_0(x), \rho(x, t_m) = \rho_1(x)\}$. Cette distance jouit de propriétés intéressantes par rapport aux translations et aux homothéties de ρ_0 vers ρ_1 . Ainsi par exemple si $\rho_1(x) = \rho_0(x - \mu)$ alors $\rho(x, t) = \rho_0(x - \frac{t}{t_m}\mu)$ et $d_2(\rho_0, \rho_1)^2 = \mu^2 \int_{\Omega} \rho_0 dx = \mu^2$ si ρ_0 est de masse 1. Par contre pour mesurer la distance entre deux densités, il est nécessaire qu'elles aient la même masse. Il est bien sûr facile de ramener les deux densités ρ_0, ρ_1 à des densités de masse unité en les divisant par $\int_{\Omega} \rho_i, i = 0, 1$. Mais le transport optimal entre ces deux densités modifiées ne permet pas en général d'obtenir un transport satisfaisant entre les deux densités initiales. Au contraire, la distance L^2 ,

$$d_{L^2}(\rho_0, \rho_1)^2 := \int_{\Omega} |\rho_0(x) - \rho_1(x)|^2 dx$$

n'impose pas cette contrainte mais se comporte beaucoup moins bien par rapport aux translations et aux homothéties. Dans [7], il est proposé de mixer ces deux distances en remarquant que la distance L^2 peut s'écrire sous une forme analogue à la distance de Wasserstein. En effet on a

$$d_{L^2}(\rho_0, \rho_1)^2 = \inf_{(\rho, v) \in C(\rho_0, \rho_1)} t_m \int_0^{t_m} \int_{\Omega} |\partial_t \rho|^2 dx dt$$

. Pour justifier cette formule, on considère l'équation d'Euler-Lagrange $\partial_{tt}^2 \rho = 0$ et comme $\rho(0) = \rho_0$ et $\rho(t_m) = \rho_1$ on a par simple intégration $\partial_t \rho = \frac{1}{t_m}(\rho_1 - \rho_0)$, d'où le résultat en remplaçant dans la

formule ci-dessus. Il est donc naturel d'introduire une distance intermédiaire en posant

$$d_{W_2}^\theta = \inf_{(\rho, v) \in C(\rho_0, \rho_1)} t_m \int_0^{t_m} \int_\Omega \theta \frac{1}{2} \rho v^2 + (1 - \theta) \frac{\alpha}{2} |\partial_t \rho|^2 dx dt$$

Par analogie avec ce qui a été fait dans [6] l'auteur propose pour donner un algorithme de calcul de cette distance de considérer le lagrangien

$$L(\phi, \rho, m) = t_m \int_0^{t_m} \int_\Omega \theta \frac{m^2}{2\rho} + (1 - \theta) \alpha |\partial_t \rho|^2 - \rho \partial_t \phi - m \cdot \nabla \phi dx dt - \int_\Omega \phi(x, 0) \rho_0(x) - \phi(x, t_m) \rho_1(x) dx.$$

dont le système d'optimalité s'écrit

$$\partial_t \phi + \theta \frac{m^2}{2\rho^2} + (1 - \theta) \alpha \partial_{tt}^2 \rho = 0, \quad \frac{m}{\rho} = \nabla \phi$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} m = 0, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \rho(t_m) = \rho_1.$$

La difficulté dans ce système d'EDP (dans lequel peut être éliminé m) est la condition initiale et finale sur ρ . La forme particulière de l'énergie ne donne pas de méthode évidente pour appliquer la méthode de [6] à ce lagrangien. D'où l'idée, qui sera utilisée encore plus loin, de relaxer la contrainte de conditions initiales et finales sur ρ . Plutôt que de considérer la contrainte correspondant à $C(\rho_0, \rho_1)$, on va relaxer la condition $\rho(t_m) = \rho_1$, qui rend le l'équation en ρ non classique. Plutôt que de minimiser l'énergie sur $C(\rho_0, \rho_1)$ on va minimiser, pour λ très grand,

$$E_\lambda := \int_0^{t_m} \int_\Omega \theta \frac{m^2}{2\rho} + (1 - \theta) \alpha |\partial_t \rho|^2 dx dt + \frac{1}{2} \lambda \int_\Omega |\rho(x, t_m) - \rho_1(x)|^2 dx.$$

sous la contrainte $\partial_t \rho + \operatorname{div} m = 0$ et $\rho(0) = \rho_0$. Comme dans [6] on considère alors le Lagrangien

$$\begin{aligned} L(\rho, m, \phi) = & \int_0^{t_m} \int_\Omega \theta \frac{m^2}{2\rho} + (1 - \theta) \alpha |\partial_t \rho|^2 + \phi(\partial_t \rho + \operatorname{div} m) dx dt \\ & - \int_\Omega \phi(x, 0)(\rho_0(x) - \rho(x, 0)) dx + \frac{1}{2} \lambda \int_\Omega |\rho(x, t_m) - \rho_1(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Ce qui en intégrant par partie donne

$$\begin{aligned} L(\rho, m, \phi) = & \int_0^{t_m} \int_\Omega \theta \frac{m^2}{2\rho} + (1 - \theta) \alpha |\partial_t \rho|^2 - \rho \partial_t \phi - m \cdot \nabla \phi dx dt \\ & - \int_\Omega \phi(x, 0) \rho_0(x) - \phi(x, t_m) \rho(x, t_m) dx + \frac{1}{2} \lambda \int_\Omega |\rho(x, t_m) - \rho_1(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

L'écriture des équations d'Euler-lagrange au point selle donnent alors (exercice : vérifier les signes)

$$\partial_t \phi + \theta \frac{m^2}{2\rho^2} + (1 - \theta) \alpha \partial_{tt}^2 \rho = 0, \quad \phi(x, t_m) = -\lambda(\rho(x, t_m) - \rho_1(x)) - (1 - \theta) \alpha \partial_t \rho(x, t_m)$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} m = 0, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \frac{m}{\rho} = \nabla \phi$$

C'est un système beaucoup plus simple à résoudre que précédemment ; en effet on peut résoudre l'équation en ρ de 0 à t_m , étant donné m . Puis avec le ρ obtenu, on résout de manière rétrograde de t_m à 0 l'équation en ϕ . Les deux équations étant couplées, on procède de manière itérative. D'où l'algorithme : étant donné ϕ^k, ρ^k, m^k ,

1. Calculer ρ^{k+1} solution de $\partial_t \rho + \operatorname{div} m^k = 0, \quad \rho(0) = \rho_0$.

2. Calculer ϕ^{k+1} solution de $\partial_t \phi + \theta \frac{1}{2} \left(\frac{m^k}{\rho^{k+1}} \right)^2 + (1 - \theta) \alpha \partial_{tt}^2 \rho^{k+1} = 0$, $\phi(x, t_m) = -\lambda(\rho^{k+1}(x, t_m) - \rho_1(x)) - (1 - \theta) \alpha \partial_t \rho^{k+1}(x, t_m)$.

Si $|\frac{m^k}{\rho^{k+1}} - \nabla \phi^{k+1}| < \varepsilon$ STOP, sinon $m^{k+1} = \rho^{k+1} \nabla \phi^{k+1}$.

Remarque 13 On pourrait aussi considérer l'algorithme : étant donné ϕ^k, ρ^k , tant que $|\partial_t \rho^k + \text{div } \rho^k \nabla \phi^k| > \varepsilon$,

1. Calculer ρ^{k+1} solution de $\partial_t \rho + \text{div } \rho \nabla \phi^k = 0$, $\rho(0) = \rho_0$.
2. Calculer ϕ^{k+1} solution de $\partial_t \phi + \theta \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + (1 - \theta) \alpha \partial_{tt}^2 \rho^{k+1} = 0$, $\phi(x, t_m) = -\lambda(\rho^{k+1}(x, t_m) - \rho_1(x)) - (1 - \theta) \alpha \partial_t \rho^{k+1}(x, t_m)$.

qui semble présenter l'avantage de résoudre des EDP plus naturelles.

Une question légitime est celle de la convergence de la solution que procure cet algorithme vers la solution du problème de départ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. Pour cela, [7] remarquent que E_λ est majorée par la distance mixte $d_{W2}^\theta(\rho_0, \rho_1)$ car (ρ, m) réalisant ce minimum annule le terme de pénalisation. Ceci permet de donner des bornes supérieures pour les suites dépendant de ρ^k, m^k, ϕ^k en supposant pour simplifier que $\theta \in]0, 1[$: $\frac{m^k}{2\rho^k}$, $\partial_t \rho^k$ et $\lambda(\rho^k(\cdot, t_m) - \rho_1)$ sont bornés dans L^2 . Ceci permet d'extraire des sous-suites convergentes et de conclure. En particulier on voit qu'à la limite si $\lambda(\rho^k(\cdot, t_m) - \rho_1)$ est borné dans L^2 , on a nécessairement $\rho^k(\cdot, t_m)$ convergent dans L^2 vers ρ_1 . C'est à dire qu'à la limite la condition que nous avons relaxée est réalisée.

Remarque 14 Il n'y a aucune raison de privilégier la contrainte $\rho(0) = \rho_0$ et de la réaliser exactement, alors que $\rho(t_m) = \rho_1$ est pénalisée. Il est évidemment possible de faire l'inverse, et on se retrouve alors avec une équation de transport rétrograde et une équation en ϕ à intégrer de 0 à t_m . Il serait intéressant d'essayer un algorithme faisant alternativement ces deux pénalisations possibles.

5.2 Cas où les densités n'ont pas la même masse

La méthode précédente pourrait être appliquée au cas où les densités n'ont pas la même masse en se plaçant dans le cas $\theta = 1$. En effet l'utilisation de la pénalisation lève l'obligation de masse constante qui était introduite par la contrainte $C(\rho_0, \rho_1)$. L'inconvénient néanmoins est qu'elle ne s'applique pas à des images comportant des zones où $\rho = 0$, contrairement à l'algorithme global de [6]. Benamou a donc proposé dans [5] une autre manière de lever l'hypothèse $\int_\Omega \rho_0 = \int_\Omega \rho_1$. L'idée générale est de remplacer $C(\rho_0, \rho_1)$ par $C(\rho_0, \bar{\rho}_1)$ où $\bar{\rho}_1$ vérifie $\int_\Omega \rho_0 = \int_\Omega \bar{\rho}_1$ et où on pénalise la distance de ρ_1 à $\bar{\rho}_1$ comme précédemment. Cela correspond donc en fait à rajouter une variable d'optimisation ($\bar{\rho}_1$). On définit donc

$$d_\lambda^2(\rho_0, \rho_1) = \inf_{(\rho, m, \bar{\rho}_1) \in \bar{C}(\rho_0, \bar{\rho}_1)} t_m \int_\Omega \int_0^{t_m} \frac{m^2}{2\rho} dx dt + \lambda \int_\Omega |\rho_1 - \bar{\rho}_1|^2 dx$$

où $\bar{C}(\rho_0, \bar{\rho}_1) = \{(\rho, m, \bar{\rho}_1), \partial_t \rho + \text{div } m = 0, \rho(0) = \rho_0, \rho(t_m) = \bar{\rho}_1\}$ et le lagrangien associé s'écrit

$$\begin{aligned} L(\rho, m, \phi, \bar{\rho}_1) = & \int_\Omega \int_0^{t_m} \frac{m^2}{2\rho} - \rho \partial_t \phi - m \cdot \nabla \phi dx dt \\ & - \int_\Omega \phi(x, 0) \rho_0(x) - \phi(x, t_m) \bar{\rho}_1(x) dx + \frac{1}{2} \lambda \int_\Omega |\rho_1(x) - \bar{\rho}_1(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

On applique alors la même technique que dans [6], en remarquant que le terme de pénalisation, au même titre que $\frac{m^2}{2\rho}$, peut aussi se mettre sous une forme duale (par transformée de Legendre) :

$$\frac{1}{2} |\rho_1 - \bar{\rho}_1|^2 = \sup_c \left[c(\rho_1 - \bar{\rho}_1) - \frac{c^2}{2} \right]$$

qui l'exprime comme un supremum de fonctions linéaires. A partir de là on peut dérouler toute la stratégie de [6] et on obtient un algorithme modifié essentiellement dans la résolution de l'équation de Poisson qui change de conditions aux limites (conditions mixtes), voir [5].

6 Pour aller plus loin : revue d'articles par les étudiants

Cette section a été rédigée par les étudiants de troisième année Ensimag et du Master 2 MIA de l'UFR IM2AG, ayant suivi le cours en 2012-2013.

6.1 Anne Metayer : *Fast and robust clinical triple region image segmentation using one level set function* de Shuo Li, Thomas Fevens, Adam Krzyzak, Chao Jin, and Song Li, Lecture Notes in Computer Science (2006)

L'article de recherche étudié concernait la segmentation d'images cliniques composées de trois régions par une unique fonction level-set. En effet, les images obtenues dans le domaine médical (rayons X, scanner...) sont souvent constituées de trois régions plus ou moins sombres. Les méthodes utilisées dans ce domaine doivent être à la fois rapides et robustes. Dans ce contexte, une nouvelle méthode a été développée.

Ce rapport s'articulera autour des points suivants : inventaire des méthodes existantes pour la segmentation d'images à trois régions par level-set, la méthode proposée et enfin, les résultats obtenus.

6.1.1 Méthodes existantes

Fonctions level set couplées La première approche consiste à effectuer la segmentation en utilisant plusieurs fonctions level-set simultanément. Plusieurs méthodes sont mentionnées. Certaines considèrent un nombre de fonctions égal au nombre de régions à segmenter, la méthode proposant le nombre de fonctions minimum utilise $\log_2 N$ fonctions pour N régions. Le nombre de régions à segmenter peut être soit donné, soit estimé par un mélange gaussien. L'approche par fonctions couplées a cependant des inconvénients tels que sa convergence lente et une possibilité de retourner des minimums locaux.

Méthode hiérarchique L'approche hiérarchique est une méthode récursive. On segmente d'abord l'image en deux régions. Ensuite, grâce à une analyse de variance, on décide de segmenter à nouveau ou non chaque région trouvée. Les segmentations successives sont arrêtées lorsque toutes les régions ont été séparées. Cette approche a pour avantage d'être simple mais entraîne un lourd coût en temps : deux segmentations sont nécessaires pour segmenter une image à trois régions.

Bien que la méthode level-set soit efficace, ces approches ne conviennent pas à l'imagerie médicale. On recherche une méthode rapide et qui ne dépend pas de la courbe initiale.

6.1.2 Méthode proposée

Formulation level set L'idée de la méthode proposée est de considérer les trois régions de l'image en deux régions duales blanc/gris et gris/noir. On cherche alors à minimiser la fonction suivante :

$$E(\Phi) = \lambda_1 \int \int_{\Omega_-} \min\left(\frac{(u - c_{BR})^2}{\sigma_{BR}^2}, \frac{(u - c_{DR})^2}{\sigma_{DR}^2}\right) dx dy + \lambda_2 \int \int_{\Omega_+} \frac{(u - c_{GR})^2}{\sigma_{GR}^2} dx dy$$

On introduit la fonction hybride à minimiser :

$$E = E(\Phi) + \gamma_1 E_{LAP} - \gamma_2 E_{GAC}$$

où $E(\Phi)$ permet à la fonction de respecter les trois zones de l'image,

$E_{LAP}(C) = \int_C \nabla \cdot n ds + \int \int_{\Omega_C} K_u |\nabla u| dx dy$ (avec n le vecteur normal unitaire à la courbe et K_u la courbure) permet de trouver un contour optimal,

et $E_{GAC}(C) = \int g(C) dx dy$ correspond au modèle de contour actif géodésique.

La fonction Φ est alors solution de :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \delta_\epsilon(\Phi) [\gamma_2 \operatorname{div}(g(\frac{\nabla \Phi}{|\nabla u|})) - \lambda_2 \frac{(u - c_{GR})^2}{\sigma_{GR}^2} H(\Phi) - \gamma_1 u_{\xi\xi} + \lambda_1 \min(\frac{(u - c_{BR})^2}{\sigma_{BR}^2}, \frac{(u - c_{DR})^2}{\sigma_{DR}^2}) (1 - H(\Phi))]]$$

où H est la fonction heaviside et $u_{\xi\xi} = \delta u - K_u |\nabla u|$.

Amélioration statistique L'accélération de la segmentation est due à deux étapes :

- L'étape d'apprentissage. Pour cette étape, des images à trois régions sont choisies et segmentées par la méthode proposée ci-dessus. On effectue alors une analyse en composantes principales (ACP) pour réduire le nombre de dimensions, puis on entraîne une SVM (support vector machine).
- L'étape de segmentation. La SVM préalablement entraînée permet d'effectuer une classification de l'image à segmenter et retourne le contour initial à utiliser. Cela permet d'avoir un contour initial qui n'est pas complètement éloigné de celui que l'on cherche. On applique alors la méthode proposée à partir de ce contour pour obtenir la segmentation.

6.1.3 Résultats

La méthode proposée a été testée suivant deux critères : la qualité de la segmentation et la vitesse de l'algorithme. Les tests ont été effectués avec des images synthétisées et des images médicales.

Concernant la qualité de la segmentation, les tests montrent que la méthode proposée est robuste. La méthode converge indépendamment du choix du contour initial. De plus, les résultats pour des images bruitées ou dont les trois régions ne sont pas clairement séparées sont corrects.

L'approche statistique pour l'initialisation du contour est très efficace. En effet, le contour initial est donné proche des limites des trois régions à segmenter. Ainsi, il suffit de peu d'itérations à la méthode level-set pour segmenter l'image. Le nombre d'itération peut alors passer de 100 (sans accélération statistique) à 15. De plus, l'ACP, qui réduit la dimension des données, permet d'accélérer l'apprentissage et la classification de la SVM.

6.1.4 Conclusion

En conclusion, le domaine de l'imagerie médicale impose un certain nombre de contraintes lors de la segmentation d'images constituées de trois régions. Le cadre des fonctions level-set permet cette segmentation mais les techniques développées (fonctions couplées et segmentation hiérarchique) sont peu robustes en terme de convergence ou coûteuse en temps. La méthode proposée permet avec une unique fonction level-set de segmenter trois régions. De plus, le couplage de cette formulation à des méthodes statistiques permet de diminuer significativement le temps de traitement de l'image. L'article se concentre sur les images composées de trois régions mais cette méthode pourrait être étendue de manière récursive à un nombre de régions plus grand.

6.2 Thibault Louis : *A Binary Level Set Model and some Applications to Mumford-Shah Image Segmentation* de Johan Lie, Marius Lysaker and Xue-Cheng Tai, IEEE Transactions on Image Processing (2006)

Cet article traite de la segmentation d'image, et de l'utilisation de fonctions de level set dans ce domaine de recherche. Plus précisément, ce papier présente une méthode par fonction de level set à

valeurs binaires. Cette méthode a été mise au point par les chercheurs Johan Lie, Marius Lysaker et Xue-Cheng Tai.

L'article commence par présenter l'existant en 2006, et donc les travaux sur lesquels les auteurs se sont basés pour créer leur algorithme.

La première méthode de segmentation connue est la méthode des contours actifs (connue sous le nom de "snake"). Elle consiste à créer une courbe dans l'image et à la déplacer jusqu'à ce qu'elle soit confondue avec les bordures des zones à séparer. Pour cela, on utilise une fonction souvent basée sur un calcul de gradient et de laplacien, pour savoir si notre courbe est actuellement au niveau des frontières. Cette méthode utilisant une courbe explicite, elle présente des difficultés à révéler des contours discontinus.

L'utilisation de fonctions de level set pour la segmentation d'image a été motivée par la représentation mathématiques qu'offrent ces fonctions. En effet, il est simple de segmenter en deux une image si l'on parvient à associer à chaque point une valeur soit positive, soit négative, soit nul à la frontière. De plus, les propriétés des fonctions des distances en font des candidates très pratiques et simples pour arriver à ces fins.

Une méthode utilisant les fonctions de level set a donc vu le jour. Cette méthode veut détecter les contours indépendamment du gradient de l'image afin de pouvoir détecter tout types de bordures. Cette méthode mise au point par Chan-Vese se base sur la minimisation de la fonction de Mumford-Shah, représentant l'écart entre l'image initiale et sa représentation, en calculant à la fois les différences de valeurs en chaque point, mais aussi la longueur de la bordure et le laplacien de l'image dans chacune des zones séparées. Minimiser ces trois critères permet d'être sûr de trouver la séparation la plus petite et la plus juste, à la fois au niveau des valeurs et au niveau de la stabilité des zones.

L'avantage de la méthode par fonction de level set est que l'on peut ainsi délimiter jusqu'à 2 puissance N zones avec N fonctions de level set indépendantes. Ainsi, la méthode ne sera pas plus complexe pour un plus grand nombre de zones et restera toujours solvable.

Dans ce contexte, l'article présente une approche nouvelle, qui se base sur une séparation binaire de l'image : tout point interne à la frontière aura une valeur de 1 et tout point externe une valeur de -1. Cette approche permet de simplifier grandement les notations et de définir une base à partir des différentes fonctions de level set. Chaque vecteur de cette base représente l'une des formes délimitées par cette méthode, i.e. représente une fonction qui vaut 1 pour chaque point interne à sa forme et 0 pour chaque point appartenant à n'importe quelle autre forme.

Cette représentation, plus propre et plus simple offre une équation de minimisation à 2 variables (le vecteur des fonctions de level set et un paramètre témoignant de la bonne approximation de l'image résultante par rapport à l'image initiale. Cette équation est sujette à une condition étant donné les contraintes imposées aux fonctions de level set.

Pour résoudre algorithmiquement cette équation, le papier propose une approche Lagrangienne. En effet, en introduisant un multiplicateur de Lagrange, et en additionnant à notre fonction de minimisation un paramètre de Lagrange non nul si la condition n'est pas vérifiée, on peut faire varier le multiplicateur de Lagrange, et le maximiser, car en l'état recherché, ce dernier paramètre sera nul car la condition sera respectée. Ainsi, on recherche un point col, ce qui est parfaitement approprié à un algorithme récursif.

Cette équation se résout donc algorithmiquement, par récursion, en commençant par choisir des valeurs par défaut de nos paramètres. A chaque étape, on déplace un seul paramètre à la fois, de sorte de minimiser l'équation vis à vis des paramètres actuels, on sais que, cherchant un point col, on s'approchera toujours de la solution de cette manière. Une fois nos deux paramètres mis à jour, on recalcule le multiplicateur de Lagrange en fonctions de ces nouvelles valeurs, et si la convergence n'est pas encore suffisante, on itère de nouveau.

Enfin, cet algorithme peut être théoriquement optimisé en ajoutant un paramètre de pénalisation, proportionnel au carré de la distance à la condition. Ainsi lorsque la condition n'est pas respectée, ce paramètre pénalisera grandement la fonction de minimisation. Cependant, cette méthode peut rendre

instable la résolution et est donc à manier avec parcimonie. En pratique, ce paramètre de pénalisation n'est pas toujours utilisé, et est bien souvent maintenu constant au cours des itérations afin d'éviter de rendre instable la résolution.

Le papier s'achève sur 5 exemples des résultats obtenus avec cet algorithme. Les 2 premiers avec une seule fonction de level set, les suivants avec 2 fonctions. Les premiers exemples montrent les différences obtenues avec l'algorithme lorsqu'on fait varier l'importance du terme représentant l'exactitude de l'image résultante et celui représentant sa douceur. Plus on offre d'importance à ce dernier, plus l'image obtenue est connectée (plus grossière mais plus propre).

Les derniers exemples montrent la robustesse de cet algorithme au bruit et son applicabilité à des images réelles (types photos). Les résultats sont tout à fait cohérents, et la convergence est toujours rapide.

En conclusion, l'approche par fonctions de level set à valeurs binaires dans la segmentation d'image est très efficace et très précise. Elle offre des résultats tout aussi convenables que la méthode par fonction de level set continue (présentée dans leur précédent papier de 2003, référence [14]), mais est beaucoup plus performante et moins contraignante pour son initialisation.

6.3 Clémence Mousterde : *Graph Cut Optimization for the Piecewise Constant Level Set Method Applied to Multiphase Image Segmentation*, de Egil Bae and Xue-Cheng Tai, *Lecture Notes in Computer Science* (2009)

Cet article présente une alternative à la résolution des équations de Euler-Lagrange dans le cas de la segmentation d'image. La méthode PCLSM (Piecewise Constant Level Set Method) introduisant des fonctions level set constantes, permet de simplifier le calcul de l'énergie à minimiser dans le modèle de Mumford-Shah, sans pour autant détériorer la qualité du résultat. Ensuite, la minimisation de cette énergie est optimisée par coupure de graphes. Les résultats obtenus sont très concluants, ils sont nettement supérieurs en terme d'efficacité tout en maintenant la même qualité.

Tout d'abord, nous présenterons le modèle de Mumford-Shah ainsi que la méthode PCLSM. Puis, nous expliquerons l'optimisation par coupures de graphes. Et enfin, nous présenterons quelques résultats.

6.3.1 Le modèle de Mumford-Shah et la méthode PCLSM

On note : $\begin{cases} u_0 & \text{l'image initiale} \\ \{\Omega_i\}_{i=0}^n & \text{une partition de } \Omega \\ \{\Gamma_i\}_{i=0}^n & \text{les interfaces entre les régions de } \Omega \end{cases}$

Selon le modèle de Mumford-Shah, on cherche u minimisant la fonctionnelle :

$$E(\{c_i\}, \Gamma_i) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \mu \int_{\Omega - \cup_i \Gamma_i} |\nabla u|^2 dx + \sum_{i=1}^n \nu \int_{\Gamma_i} ds$$

En supposant que u est constant entre les interfaces, on peut réécrire cette fonctionnelle sous la forme :

$$E(\{c_i\}, \Gamma_i) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \sum_{i=1}^n \nu \int_{\Gamma_i} ds$$

avec $u = \sum_{i=1}^n c_i \Psi_i$, Ψ_i étant la fonction caractéristique de Ω_i .

Dans le cadre de la méthode PCLSM (Piecewise Constant Level Set Method), on décrit chaque partition Ω_i de Ω par une fonction de level set constante sur Ω_i comme suit :

$$\phi_i = i \text{ sur } \Omega_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

Ainsi la fonctionnelle de Mumford-Shah se réécrit ainsi :

$$E(c, \phi) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^n \nu \int_{\Omega} |\nabla \psi_i| dx$$

avec $u = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i$, ψ_i étant la fonction caractéristique de Ω_i définie par :

$$\psi_i = \frac{1}{\alpha_i} \prod_{j=1, j \neq i} (\phi - j) \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \prod_{k=1, k \neq i} (i - k)$$

L'énergie peut alors être approximée par :

$$E(c, \phi) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \phi| dx$$

Pour obtenir une solution prenant des valeurs entières, on ajoute la contrainte : $\prod_{i=1}^n (\phi - i) = 0$.

6.3.2 L'optimisation par coupure de graphes

Nous cherchons à résoudre ce problème de minimisation par coupure de graphes. pour cela, nous commençons par discrétiser le problème sur une grille P avec des noeuds notés p . L'énergie se réécrit alors :

$$E(c, \phi) = \sum_{p \in P} \delta^2(u_p - u_p^0)^2 dx + \nu \sum_{p \in P} \sum_{q \in N_k(p)} \frac{1}{2} w_{pq} |\phi_p - \phi_q|$$

Soit $G = (V, \varepsilon)$ un graphe de sommets V , et d'arrêtes ε . On cherche alors à couper ce graphe en deux ensembles : V_s et V_p en minimisant le coût de la coupure défini par :

$$|C| = \sum_{e \in C} c(e)$$

avec $C = \{(a, b) | a \in V_s, b \in V - t, \text{ et } (a, b) \in \varepsilon\}$. (c étant le coût de chaque arrête e)

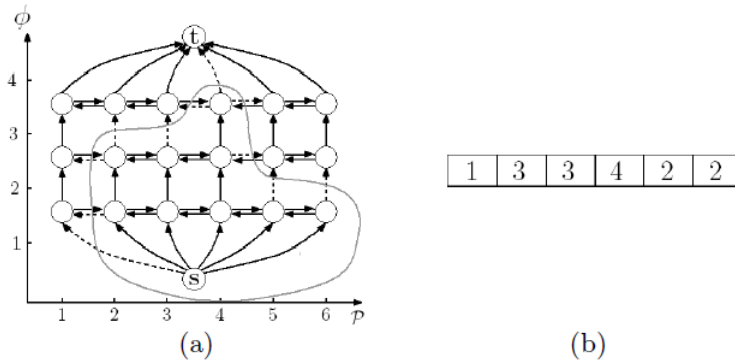
On veut construire un graphe tel que le problème de minimisation de E soit équivalent à :

$$\min_C \text{cut on } G |C| = \min_{\phi} E_d(c, \phi) + \sigma \quad (*)$$

Le graphe est alors défini par les sommets

$$V = \{v_{p,l} | p \in P, l \in \{1, \dots, n-1\} \cup \{s\} \cup \{t\}\}$$

(s étant la source et t le puit) (A chaque point p de la grille P , on associe $n-1$ sommets notés $v_{p,l}$).



Exemple de graphe d'une grille de 6 points pour une segmentation en 4 phases et valeurs de ϕ pour chaque point de la grille

Pour assurer l'équivalence (*), les coûts sont données par :

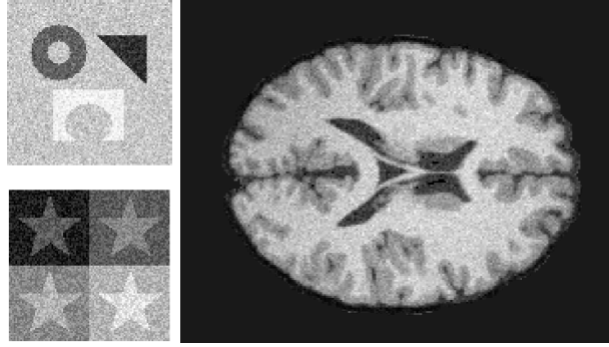
$$\begin{cases} c(s, v_{p,1}) &= \delta^2 |u_p^0 - c_1|^2 + \frac{\sigma}{|P|} & \forall p \in P \\ c(v_{p,l}, v_{p,l+1}) &= \delta^2 |u_p^0 - c_{l+1}|^2 + \frac{\sigma}{|P|} & \forall p \in P \\ c(v_{p,n}, t) &= \delta^2 |u_p^0 - c_n|^2 + \frac{\sigma}{|P|} & \forall p \in P \end{cases}$$

Et cela conduit à définir $\phi : \phi_p = \begin{cases} 1 & \text{si } (s, v_{p,1}) \in C \\ l+1 & \text{si } (v_{p,l}, v_{p,l+1}) \in C \\ n & \text{si } (v_{p,n-1}, t) \in C \end{cases}$

Selon l'article, il existe une unique coupure C minimale admissible pour G , et pour celle-ci, la fonction ϕ définie précédemment vérifie bien $|C| = E_d(c, \phi)$

6.3.3 Quelques résultats

Cette méthode de segmentation et d'optimisation a été testée sur les 3 images suivantes :

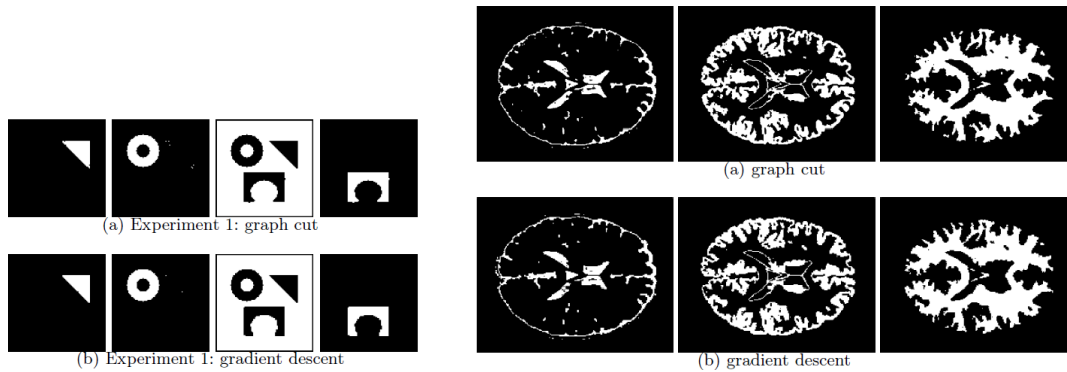


Images de tests

Des calculs de performances ont été effectués pour comparer cette méthode avec une segmentation par gradient. Nous remarquons que cette méthode PCLSML est vraiment beaucoup plus efficace et plus rapide. De plus, comme le montre les images suivantes, résultats de la segmentation des images de test, cette méthode n'altère en rien la qualité du résultat obtenu :

	Size	Number of Phases	Gradient descent	Graph Cut
Experiment1	100x100	4	50.3	0.120
Experiment2	100x100	5	70.0	0.179
Experiment3	92x98	5	55.4	0.165
Brain	933x736	4	5401	25.22

Tableau des temps de calcul en secondes de la segmentation des images par la méthode du gradient et par la méthode PCLSM



Images résultants de la segmentation pour 4 phases (exp 1) et 3 phases (brain)

Conclusion

La méthode PCLSM permet donc de minimiser l'énergie induite par le modèle de Mumford-Shah. Cette méthode de minimisation basée sur la coupure de graphes est relativement efficace et performante quant à la qualité du résultat obtenu.

6.4 Cédric Roussel : *Four-Color Theorem and Level Set Methods for Watershed Segmentation*, de Erlend Hodneland, Xue-Cheng Tai, Hans-Hermann Gerdes, Int J Comput Vis (2009)

6.4.1 Théorie.

Introduction. Dans cette subsubsection sont décrites deux types de méthodes pour la segmentation d'images.

La première regroupe les méthodes par régions et par contours actifs vues en cours : ce sont les méthodes basées sur l'énergie.

La deuxième famille de méthodes est la segmentation par ligne de partage des eaux (watershed-based segmentation).

Ces méthodes peuvent elles aussi être divisées en deux sous-groupes.

Le premier est basé sur l'algorithme d'inondation récursif.

Principe : On considère une image à niveaux de gris comme un relief. On calcule la ligne partage des eaux du dit relief en l'inondant. Les régions de la partition sont les endroits où les eaux de bassins différents se rejoignent.

Le second utilise différentes fonctions de distance.

Principe : Les fonctions de distance sont calculées comme variantes de la distance topographique. Les régions de partition sont les ensembles de points équidistants de deux minimas.

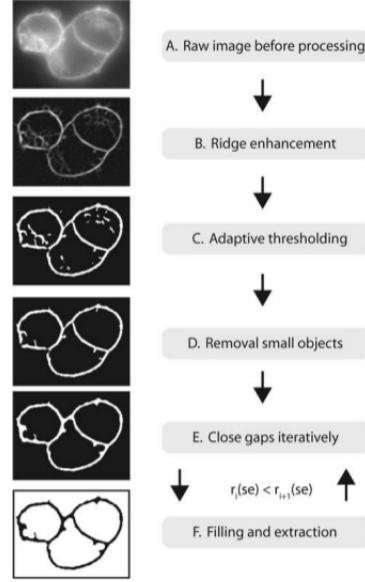
La segmentation par ligne de partage des eaux pose le problème de la sur-segmentation. Une implémentation utilisant un jeu de marqueurs calculé à partir de l'image initiale permet d'éviter ce problème.

Les auteurs de l'article combinent des méthodes des level-sets avec celles de segmentation par ligne de partage des eaux.

Seront détaillées les bases de la méthodes : création des marqueurs, fonctions de distance utilisées et théorème des 4 couleurs.

La partie suivante est consacrée au détail des méthodes level-sets et segmentation par ligne de partage des eaux combinées.

Étapes préliminaires.



Création des marqueurs. Chaque marqueur est lié à une et seulement une région de la ligne de partage des eaux. Les caractéristiques de la segmentation sont donc déterminées une fois l'image des marqueurs produite. Les méthodes en sont strictement dépendantes et les algorithmes se limitent à détecter les arêtes voulues dans un contour autour de chaque marqueur.

Fonction de distance topographique. La fonction de distance topographique utilisée pour mesurer la distance entre deux points x et y est : $L(x, y) = \inf_{\gamma \in [x \rightarrow y]} \int_{\gamma} |\nabla u(\gamma(s))| ds$.

On définit de plus $L_i(x) = \inf_{y \in M_i} L(x, y)$, M_i le i -ème marqueur. Il existe donc $y_i^* \in M_i$ tel que $L_i(x) = L(x, y_i^*)$.

On pose K le nombre de marqueurs et $\alpha_i = u(y_i^*)$.

On définit le bassin versant (catchment basin) comme $CB(M_i) = \{x \in \Omega \mid \forall j \neq i, 1 \leq j \leq K, \alpha_i + L_i(x) < \alpha_j + L_j(x)\}$

Les lignes de partage des eaux $W(u)$ sont définies comme les ensembles de points qui n'appartiennent à aucun bassin versant. $W(u)$ équivaut donc aux points où $\alpha_i + L_i(x) = \alpha_j + L_j(x)$, $i = j$, $i, j = 1, \dots, K$.

Théorème des 4 couleurs et zone d'influence Euclidienne. · Pour un pavage d'une région du plan, il suffit de 4 couleurs pour colorier les régions pavées de telle sorte que deux régions contigües n'aient pas la même couleur. Il est donc possible de segmenter un nombre arbitraire d'objet en utilisant seulement 4 phases.

· Le théorème des 4 couleurs doit être appliqué à un graphe planaire sans vide entre les régions. On ne peut par conséquent pas l'appliquer directement aux marqueurs en raison des trous entre objets. Les auteurs de l'article calculent donc une approximation de la partition de l'objet final.

Pour obtenir cette approximation, la distance Euclidienne est calculée autour de chaque marqueur. Chaque pixel de l'image est assignée à la zone d'influence d'un marqueur, de sorte que chaque point dans la zone d'influence de ce marqueur ait une plus petite distance à celui-ci qu'à tous les autres.

L'image de la zone d'influence Euclidienne fIZ est donc définie par :

$$fIZ(x) = \{ i | dist(x, M_i) \leq dist(x, M_j), \forall j = 1, \dots, K \}, \text{ avec } K \text{ le nombre de marqueurs.}$$

Donc $fIZ = i$ si la distance entre x et M_i est minimum. fIZ est donc une fonction constante par morceaux prenant ses valeurs dans $\{1, \dots, K\}$.

La région où $fIZ(x) = i$ est la zone du marqueur M_i .

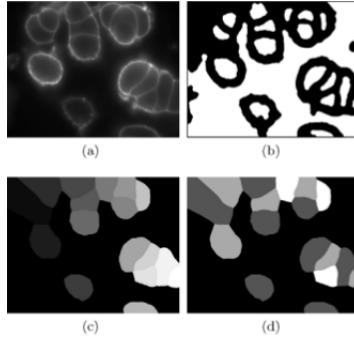


FIGURE 5 – (a) Image initiale, (b) Marqueurs, (c) fIZ, (d) Théorème des 4 couleurs

Détail des méthodes. Une partition $\{\Omega_i\}_{i=1}^4$ minimise la fonctionnelle $E(\Omega_1, \dots, \Omega_4) = \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \{\alpha_i + L_i(x)\} dx$ si et seulement si c'est une segmentation par ligne de partage des eaux autour du groupe de marqueurs défini par les 4 couleurs.

Pour résoudre ce problème, 3 méthodes de segmentation sont proposées : le "Chan-Vese level set", le Binary level set, et le Piecewise constant level set (PCLS).

Chan-Vese level set. Soient $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues qui partitionnent le domaine en 4 sous-régions.

$$\text{Les fonctions caractéristiques de ces sous-régions sont } \begin{cases} \psi_1(\phi_1, \phi_2) &= H(\phi_1)H(\phi_2), \\ \psi_2(\phi_1, \phi_2) &= (1 - H(\phi_1))H(\phi_2), \\ \psi_3(\phi_1, \phi_2) &= H(\phi_1)(1 - H(\phi_2)), \\ \psi_4(\phi_1, \phi_2) &= (1 - H(\phi_1))(1 - H(\phi_2)) \end{cases}$$

, avec H la fonction de Heaviside.

$$\text{Avec } \Omega_i = \{x | \psi_i(x) = 1\}, \text{ on a } \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \{\alpha_i + L_i(x)\} dx = \int_{\Omega_i} \sum_{i=1}^4 \{\alpha_i + L_i(x)\} \psi_i(\phi_1, \phi_2) dx.$$

Donc si $\{\phi_i\}_{i=1}^2$ minimise le problème $\min_{\phi_1, \phi_2} \int_{\Omega_i} \sum_{i=1}^4 \{\alpha_i + L_i(x)\} \psi_i dx$, alors $\{\Omega_i\}_{i=1}^4$ est une segmentation par ligne de partage des eaux.

Pour régulariser les contours de la segmentation, un terme de régularisation est introduit.

$$\text{On cherche à minimiser } \min_{\phi_1, \phi_2} \int_{\Omega_i} \sum_{i=1}^4 \{\alpha_i + L_i(x)\} \psi_i dx + \lambda \int_{\Omega_i} \sum_{i=1}^4 s |\nabla(\psi_i)| dx.$$

Une minimisation de ce problème aboutit aux équations de Euler-Lagrange suivantes

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_1} \left(\alpha_i + L_i(x) - \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi_i}{\nabla \psi_i} \right) \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_2} \left(\alpha_i + L_i(x) - \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi_i}{\nabla \psi_i} \right) \right) = 0 \end{cases}.$$

Avec des conditions initiales pour $\{\phi_i\}_{i=1}^2$, on a est amené à résoudre les équations de flot du gra-

dient suivantes
$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_1} \left(\alpha_i + L_i(x) - \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi_i}{\nabla \psi_i} \right) \right) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_2} \left(\alpha_i + L_i(x) - \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi_i}{\nabla \psi_i} \right) \right) \end{cases}.$$

Binary level set. Cette méthode est semblable à la précédente. On prend deux fonctions $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ telle que $\phi_i(x)^2 = 1$.

Les fonctions caractéristiques sont $\psi_{i+1+2j} = \frac{1}{4} \left(1 + (-1)^i \frac{\phi_1}{|\phi_1|} \right) \times \left(1 + (-1)^j \frac{\phi_2}{|\phi_2|} \right)$.

On cherche à minimiser $\min_{\phi_1, \phi_2} \int_{\Omega_i} \sum_{i=1}^4 \{\alpha_i + L_i(x)\} \psi_i dx + \lambda \int_{\Omega_i} \sum_{i=1}^4 |\nabla(\psi_i)| dx + \sigma \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} (\phi_i^2 - 1)^2 dx$

On aboutit aux équations de Euler-Lagrange
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_1} \left(\alpha_i + L_i(x) - \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi_i}{\nabla \psi_i} \right) \right) + 4\sigma \phi_1(\phi_1^2 - 1) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_2} \left(\alpha_i + L_i(x) - \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi_i}{\nabla \psi_i} \right) \right) + 4\sigma \phi_2(\phi_2^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Piecewise constant level set (PCLS). On prend ici une seule fonction $\phi(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $k(\phi) = (\phi - 1)(\phi - 2)(\phi - 3)(\phi - 4) = 0$.

Les fonctions caractéristiques sont $\psi_i(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi - i + 0.5}{\sqrt{(\phi - i + 0.5)^2 + \epsilon}} - \frac{\phi - i - 0.5}{\sqrt{(\phi - i - 0.5)^2 + \epsilon}} \right)$.

On cherche à minimiser $\min_{\phi_1, \phi_2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^4 \{\alpha_i + L_i(x)\} \psi_i dx + \lambda \int_{\Omega} \sum_{i=1}^4 |\nabla(\psi_i)| dx + \gamma \int_{\Omega} k(\phi)^2 dx$

On aboutit aux équations de Euler-Lagrange $\sum_{i=1}^4 \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi} \left(\alpha_i + L_i(x) - \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi_i}{\nabla \psi_i} \right) \right) + 2\gamma k \frac{\partial k}{\partial \phi}$

6.4.2 Applications

Cadre applicatif Dans le cadre d'une observation de cellules de rat au microscope, ces dernières sont colorées à l'aide de WGA-Alexa Fluor. Si la membrane de la cellule est d'abord bien mise en surbrillance, peu de temps après l'image de la cellule est parasitée. Il en résulte un problème de segmentation d'image.

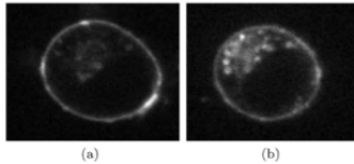


FIGURE 6 – (a) Cellule immédiatement après application, (b) Cellule après 1h

Quelques résultats L'accroissement des valeurs de λ produit des lignes de partage des eaux plus lisses. On constate également que la méthode PCLS en (f) produit de meilleurs résultats que (c), le standard Watershed.

A priori, appliqués à une image de haute qualité, les trois modèles se comportent de façon similaire.

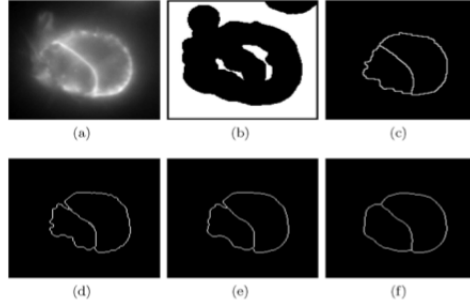


FIGURE 7 – (a) Image initiale, (b) Marqueurs, (c) Standard Watershed segmentation, (d) PCLS, $\lambda = 0$ (e) PCLS, $\lambda = 0.01$ (f) PCLS, $\lambda = 0.1$.

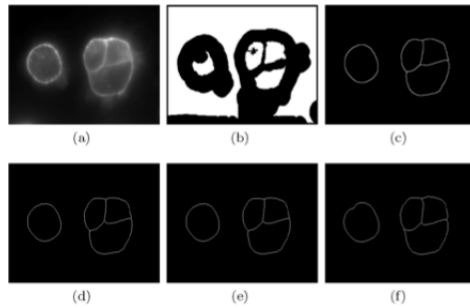


FIGURE 8 – (a) Image initiale, (b) Marqueurs, (c) Standard Watershed segmentation, (d) Chan-Vese Model, (e) Binary Level-set, (f) PCLS.

6.4.3 Conclusion

La méthode des Level-set et de segmentation par ligne de partage des eaux contrôlée par des marqueurs ont été associées pour créer une méthode de segmentation de cellules (ou d'objets de structure semblable).

Un jeu de marqueurs (appelés régions d'initialisation) est généré par seuillage adaptatif. Basé sur ces marqueurs, on calcule la fonction de distance topographique et on regroupe ensuite les marqueurs en un maximum de 4 groupes grâce au théorème des 4 couleurs.

Les résultats expérimentaux montrent que les 3 méthodes présentées produisent une segmentation correcte en comparaison des méthodes déjà existantes.

6.5 Jérémy Rouot : *Active contours with selective local or global segmentation : A new formulation and level set method*, de Kaihua Zhang, Lei Zhang, Huihui Song, Wengang Zhou, Image and Vision Computing (2010)

6.5.1 Introduction

L'article présente une nouvelle méthode de contours actifs pour la segmentation d'images. L'implémentation du modèle est réalisée par une méthode Level Set robuste et efficace : *Selective Binary and Gaussian Filtering Regularized Level Set*. Ceci permet de détecter les objets de manière globale au sens où on détecte tous les contours (peu importe l'état initial du contour), ou bien de manière locale (on extrait seulement les objets ciblés).

6.5.2 État de l'art

Les auteurs rappellent les deux méthodes classiques pour la segmentation d'image : *edge-based model* (EBM) et *region-based model* (RBM).

Edge Based Model : L'EBM est une méthode de segmentation locale. L'équation vérifiée par la fonction Level-Set ϕ s'écrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g(|\nabla I|)|\nabla \phi|(\operatorname{div}(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}) + \alpha) + \nabla g \cdot \nabla \phi. \quad (1)$$

où g est la *Edge Stopping Function* ie qu'elle s'annule sur les contours (forts gradients). De fait, on est amené à calculer $|\nabla I|$ où ∇ est un filtre passe haut qui amplifie donc aussi le bruit. La méthode peut être améliorée par convolution de l'image avec un noyau gaussien ($G_\sigma \star I$) mais σ est un paramètre critique (s'il est élevé, le smooth est important et les contours de l'image risquent d'être trop atténués ; à l'inverse la réponse en bruit risque d'être trop importante).

Aussi, cette méthode ne permet pas de détecter des objets dont les contours ne sont pas saillants (ie quand le gradient sur l'arête n'est pas un échelon mais plutôt une gaussienne).

Region Based Model : L'RBM permet de détecter les objets soit en étendant ou rétrécissant le contour. Celui-ci fait intervenir des données statistiques (contrairement à l'EBM), à savoir la valeur moyenne des niveaux de gris des régions interne et externe de l'objet. Ceci permet de détecter un objet avec un contour initial à l'intérieur de celui-ci.

L'équation Level-Set s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta(\phi)[\mu \nabla(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}) - (I - c_1)^2 + (I - c_2)^2]. \quad (2)$$

La fonction Dirac est approchée par $x \rightarrow \frac{\epsilon}{\pi(\epsilon^2 + x^2)}$, d'où, lorsque ϵ est petit, $\delta(0)$ aussi. Ceci peut entraîner $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ petit sur un voisinage et donc obtenir un minimum local (un seul objet de détecter) et la méthode n'est plus globale. En outre, cette méthode ne permet pas de détecter les objets lorsque les niveaux de gris à l'intérieur de ces objets ne sont pas homogènes : on cherche à minimiser une variance, si au départ cette variance est élevée avec de gros écarts types alors on aura du mal à la minimiser.

6.5.3 Le nouveau modèle proposé

Description : Le nouveau modèle (SPF) se base sur les deux méthodes précédentes. On définit une *Signed Pressure Force* : $spf(I(x)) = \frac{I(x) - 0.5(c_1 + c_2)}{\max(|I(x) - 0.5(c_1 + c_2)|)}$ qui va agir sur le contour de manière similaire à des forces de pression : si le contour est à l'intérieur du domaine (la spf est négative) alors le contour s'étend, sinon il rétrécit (caractère global).

Cette fonction apparaît aussi comme une *Edge Stopping Function* au sens où elle passe par 0 à l'interface de l'objet. Dès lors, on ré-injecte cette fonction dans l'équation (1) puis on effectue les simplifications suivantes : le terme $\operatorname{div}(\frac{1}{|\nabla \phi|} \nabla \phi)$ est en fait un laplacien (en supposant $|\nabla \phi| = 1$ et en utilisant l'égalité : $\frac{g_h \star I(x) - I(x)}{h} = \Delta u(x) + O(h)$). Dès lors, on peut enlever ce terme en le compensant par une opération de convolution gaussienne avec l'image (c'est ce qui est fait dans l'algorithme SBGFRSL). On obtient alors une équation de Level Set simplifiée :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = spf(I(x)).\alpha |\nabla \phi|. \quad (3)$$

Résultats : Une implémentation Matlab est fourni par les auteurs. Les performances entre les modèles sont à l'avantage du modèle ESP (100 itérations pour quelques secondes pour l'ESP contre plus de 7000 itérations et plus de 45min pour l'EBM). Ces performances sont dues notamment au fait que l'algorithme ne nécessite pas de ré-initialisation de la fonction level set ce qui peut être coûteux (au bout de certaines itérations, on recalcule ϕ comme une distance signée entre le contour et l'objet).

La méthode d'implémentation offre le choix entre une segmentation globale et locale. Pour la caractéristique locale, on normalise ϕ de manière signée ($\phi = 1$ si $\phi > 0$ -1 sinon). Puis, les points loin de la ligne de niveau $\{x \mid \phi(x, t) = 0\}$ sont tels que $|\nabla \phi| \approx 0$. Dès lors, seul ϕ proche du contour va évoluer. Enfin, l'algorithme peut être initialisé par une fonction signée constante (on n'est pas obligé de calculer la fonction distance signée classique qui peut prendre du temps). De plus, de par son caractère global, l'endroit où se situe le contour initial n'a pas d'importance pour une détection globale des objets.

6.6 Yaël Balastre : *Image Sequence Interpolation Based on Optical Flow, Segmentation, and Optimal Control*, Kanglin Chen and Dirk A. Lorenz, IEEE Transactions on Image Processing (2012)

6.6.1 Introduction

Le problème que les auteurs de l'article se proposent de résoudre est celui de l'interpolation de deux images (d'une séquence vidéo par exemple). Cela peut par exemple être utile pour augmenter le nombre d'images par secondes d'une vidéo en comportant peu.

De nombreuses méthodes permettent de réaliser une telle interpolation, notamment les méthodes se basant sur le flux optique. Cependant, ces méthodes rencontrent un problème majeur lorsque une partie de l'information est cachée dans une image et apparait dans la suivante. En effet le flot optique permet de traduire un mouvement mais ne peut pas inventer d'information.

Pour remédier à ce problème, les auteurs proposent de détecter les zones de l'image contenant de l'information qui est révélée entre les deux *frames* pour lui appliquer une interpolation inverse (de la seconde image vers la première : *backward interpolation*), tandis qu'une interpolation classique (de la première vers la seconde : *forward interpolation*) est appliquée au reste de l'image.

6.6.2 Méthode

On note Ω le domaine de l'image. Une image est donc une application $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On notera u_0 la première image et u_T la seconde. Soit $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on notera également de façon générale $f_t = \partial_t f = \frac{\partial}{\partial t} f$.

Flot Optique et Contrôle Optimal On présente dans un premier temps la méthode permettant de calculer l'interpolation entre u_0 et u_T . On cherche donc une application $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(t = 0) = u_0$ et (dans un cas parfait) $u(t = T) = u_T$. Pour déterminer une telle application à l'aide du flot optique on définit $b : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ le champ d'écoulement du flot. La connaissance de b et u_0 détermine entièrement u par l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + b(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = 0 & \forall (t, x) \in]0, T] \times \Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \forall x \in \Omega \\ u_n(t, x) = 0 & \forall (t, x) \in]0, T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

On souhaite obtenir u minimisant $\|u(T) - u_T\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2$. On détermine donc b en minimisant la quantité ($\lambda > 0$ fixé) :

$$J(b) = \frac{1}{2} \|u(T) - u_T\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \|\nabla b(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 dt$$

sous la contrainte $\text{div } b = 0$.

Segmentation On présente ici la méthode de segmentation par level set utilisée pour déterminer les zones *forward* et *backward*. La méthode utilisée est celle de Chan et Vese qui a pour particularité de ne pas utiliser détecteur de bords ou gradient.

On note Ω Le domaine de l'image, $\omega \in \Omega$ un ouvert représentant la partie de l'image sur laquelle sera appliquée l'interpolation avant, et C la frontière entre ω et $\Omega \setminus \bar{\omega}$. On notera de plus c_1 la valeur moyenne de u sur ω et c_2 sa valeur moyenne sur $\Omega \setminus \bar{\omega}$. On note également $|C| = \text{length}(C)$ et $|\omega| = \text{area}(\omega)$. On cherche alors à minimiser :

$$F(C) = \lambda_1 \int_{\omega} |u - c_1|^2 dx + \lambda_2 \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} |u - c_2|^2 dx + \mu |C| + \nu |\omega|$$

Ainsi, dans le cas d'un objet binaire ($u = 1$ dans l'objet, $u = 0$ à l'extérieur par exemple), les deux intégrales sont nulles dans le cas où ω est exactement l'objet. Les termes dépendants de la longueur du contour et de l'aire de l'objet servent de régularisateurs.

On écrit ensuite cette minimisation à l'aide d'une formalisation level set, c'est à dire en utilisant ϕ telle que $C = \{x | \phi(x) = 0\}$ et $\omega = \{x | \phi(x) > 0\}$. Cette formulation n'est pas explicitée ici.

Flot Optique + Segmentation On peut ainsi écrire l'ensemble du problème d'interpolation à l'aide des deux méthodes présentées. Les auteurs écrivent l'ensemble du modèle en une seule minimisation sous contrainte. On note alors $\hat{u} : [0, T] \times \Omega$ l'interpolation avant, $\tilde{u} : [0, T] \times \Omega$ l'interpolation arrière, b le champ du flot optique :

$$L(b, C) = \frac{1}{2} \|\hat{u}(T) - u_T\|_{\mathcal{L}^2(\omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{u}(T) - u_0\|_{\mathcal{L}^2(\Omega \setminus \bar{\omega})}^2 + \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla b|^2 + \epsilon} dx dt + \mu |C| + \nu |\omega|$$

sous les conditions

$$\begin{aligned} \text{— transport avant : } & \begin{cases} \hat{u}_t(t, x) + b(t, x) \cdot \nabla \hat{u}(t, x) = 0 & \forall (t, x) \in]0, T] \times \Omega \\ \hat{u}(0, x) = u_0(x) & \forall x \in \Omega \end{cases} \\ \text{— transport arrière : } & \begin{cases} \tilde{u}_t(t, x) + b(t, x) \cdot \nabla \tilde{u}(t, x) = 0 & \forall (t, x) \in [0, T[\times \Omega \\ \tilde{u}(T, x) = u_T(x) & \forall x \in \Omega \end{cases} \\ \text{— divergence : } & \text{div } b = 0 \end{aligned}$$

$$\text{On peut alors calculer } u(t, x) = \begin{cases} \hat{u}(t, x) & \text{si } x \in \omega \\ \tilde{u}(t, x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \bar{\omega} \end{cases}.$$

Encore une fois, pour la résolution pratique ces équations sont réécrites à l'aide d'un formalisme level set que l'on ne présente pas ici.

6.6.3 Conclusion

Cette méthode corrige le problème des objets cachés que les méthodes à flot optique habituelles ne peuvent résoudre. Les résultats sont probants à condition que l'illumination de la scène soit constante.

6.7 Victor Ranaud : *Colour, texture, and motion in levelset based segmentation and tracking*, Thomas Broxa, Mikaël Roussonb, Rachid Derichec, Joachim Weickert, Image and Vision Computing (2010)

Lorsqu'on cherche à effectuer du suivi d'objets dans une séquence d'images, une méthode classique est d'effectuer une segmentation, pour mettre en évidence ces objets ; cependant, l'approche "classique" est de ne traiter que les niveaux de gris de la séquence. Or cette méthode est peu robuste, à moins d'ajouter des contraintes ; cependant, ces contraintes sont spécifiques à l'image et font que cette méthode est peu générale. L'idée des auteurs de l'article est de traiter plus d'informations, plutôt qu'ajouter des contraintes : ainsi, ils présentent une méthode de segmentation robuste tirant profit des propriétés de texture et de mouvement de l'image.

6.7.1 Récupération des propriétés de l'image

Propriétés de texture Pour récupérer les propriétés de l'image, on utilise un tenseur de structure non linéaire. En effet, avec un tenseur de structure "classique", on a une convolution avec un noyau gaussien ; cela cause un lissage qui risque d'adoucir les contours sur notre image, et donc de rendre la segmentation plus difficile.

D'où l'idée de remplacer cette convolution par un filtrage par diffusion non linéaire. En effet, une équation de diffusion non linéaire s'écrit comme suit :

$$\partial_t u = \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\nabla u)$$

avec u une image, et $g(|\nabla u|)$ un coefficient de diffusion dépendant de u . Or puisque g dépend de u , on peut le choisir décroissant avec $|\nabla u|$. Ce qui nous permet d'avoir une faible diffusion aux contours, et donc de les préserver pour obtenir une segmentation robuste !

L'équation ci-dessus s'applique pour une image u en niveaux de gris, donc avec un seul signal, mais on peut tout à fait l'appliquer à une image dotée de plusieurs canaux $(u_i)_{i=1,\dots,N}$. On obtient alors les équations :

$$\partial_t u_i = \operatorname{div} \left(g \left(\sum_{k=1}^N |\nabla u_k|^2 \right) \nabla u_i \right) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (33)$$

Mouvement Pour déterminer les propriétés de mouvement, on utilise le flot optique. Cette méthode consiste à déterminer le mouvement (u, v) d'un pixel entre deux images consécutives. La détermination du flot optique en un point (x_0, y_0) revient à un problème de minimisation d'énergie :

$$\begin{cases} \min E(u, v) = \frac{1}{2} \int_{B_\rho(x_0, y_0)} (I_x u + I_y v + I_z)^2 dx dy \\ (I_x u + I_y v + I_z) = 0 \end{cases}$$

avec $B_\rho(x_0, y_0)$ un voisinage de rayon ρ autour du point (x_0, y_0) . Il est fréquent de remplacer cette fenêtre par un noyau gaussien ; mais on peut aussi, comme pour les textures, procéder à un filtrage par diffusion non linéaire.

Au minimum, $\partial_u E = 0$ et $\partial_v E = 0$. En utilisant cela et en dérivant l'expression précédente, on ramène ce problème à la résolution d'un système linéaire. En le résolvant, on peut trouver u et v pour chaque point.

Combinaison des données On stocke toutes les données (couleur, texture, mouvement) dans un seul vecteur. Cependant, vu (1), il y a une interdépendance entre chacune des composantes du vecteur. De fait, pour éviter d'obtenir des résultats aberrants, il faut s'assurer que toutes les composantes s'échelonnent sur la même plage de données. Une fois que cette "normalisation" a eu lieu, on peut appliquer l'équation de diffusion linéaire, puis procéder à la segmentation.

6.7.2 Segmentation du domaine

Formulation du problème On sépare notre domaine Ω en deux sous-domaines : Ω_1 et Ω_2 , l'un correspondant aux objets, l'autre au fond ; soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ la fonction renvoyant les propriétés de l'image déterminées précédemment pour un point du domaine. On considère également $p_{ij}(x)$ la probabilité d'avoir la valeur $u_j(x)$ dans Ω_i .

Si l'on considère les deux sous-domaines équiprobables et les pixels indépendants, le problème de segmentation se ramène à un problème de minimisation d'énergie.

Pour minimiser cette énergie, on introduit une fonction level-set $\Phi(x) > 0$ si $x \in \Omega_1$, < 0 si $x \in \Omega_2$. La frontière entre les domaines, que l'on cherche, est définie par l'ensemble des points x du domaine

tels que $\Phi(x) = 0$. Considérons $H(s)$ une fonction échelon régularisée, *i.e.* tendant vers 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$, et valant $\frac{1}{2}$ en 0. On définit $\chi_1(s) = H(s)$ et $\chi_2(s) = 1 - H(s)$. On a alors la formulation level-set suivante :

$$E(\Phi, p_{ij}) = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_i} \log p_{ij}(x) \chi_i(\Phi(x)) dx \right) \quad (34)$$

Résolution Cette équation se résout à l'aide d'une descente de gradient ; cependant, avant cela, il faut déterminer $p_{ij}(x)$, qui n'est pour le moment pas défini ! Il est courant d'affirmer que p_{ij} est une densité de probabilité gaussienne. Il suffit alors d'en estimer les paramètres pour définir entièrement le problème et pouvoir ainsi appliquer une descente de gradient à l'équation (2) pour trouver Φ , et donc la frontière qui nous intéresse.

Bilan Les résultats de cette méthode sont très satisfaisants. Pour obtenir des résultats encore plus satisfaisants, on peut par exemple utiliser d'autres densités de probabilité que la densité gaussienne pour p_{ij} , ajouter un terme de lissage pour limiter l'apparition d'artéfacts ou attribuer des poids différents aux différentes propriétés en fonction de leur utilité dans la segmentation.

6.8 Sabine Notheisen : *A Review of Statistical Approaches to Level Set Segmentation : Integrating Color, Texture, Motion and Shape* , D. Cremers et al, International Journal of Computer Vision (2007)

Dans cet article écrit par Daniel Cremers, Mikael Rousson et Rachid Deriche, il est exposé comment utiliser des méthodes de level-set et des principes statistiques pour segmenter une image. Le but d'une segmentation d'image est de partitionner l'image en différentes parties significatives. Elle est obtenue en minimisant une fonction de coût. Le principe de base est celui des contours actifs, aussi appelés snakes, dont deux désavantages (trop de dépendance de l'initialisation et les algorithmes se coincent dans des minimum locaux indésirés) sont mis en reliefs et sont résolus par l'approche statistique étudiée.

6.8.1 Méthodes de level set pour la segmentation de l'image

On calcule la segmentation d'une image $\mathcal{I} : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$ avec l'évolution du contour implicite qui se calcule en cherchant la minimisation locale de la fonction :

$$E(\mathcal{C}) = - \int |\nabla \mathcal{I}(\mathcal{C})|^2 ds + v_1 \int |\mathcal{C}_s|^2 ds + v_2 \int |\mathcal{C}_{ss}|^2 ds(1).$$

On obtient ensuite la formulation suivante pour l'énergie de contour actif :

$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g(\mathcal{I}) |\nabla \phi| \text{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) + \nabla g(\mathcal{I}) \cdot \nabla \phi$ où le gradient $|\nabla \mathcal{I}|$ dans l'équation (1) a été remplacé par une fonction de bord plus générale $g(\mathcal{I})$, c'est l'approche contours actifs géodésiques.

Nous allons maintenant voir une formulation probabiliste du problème de segmentation qui se base sur des fonctions basées régions et non basées contours (Snake).

6.8.2 Formulation statistique de la segmentation

Après calculs, la formulation suivante de l'énergie est obtenue :

$E(\Omega_1, \dots, \Omega_n) = - \sum_i \int_{\Omega_i} \log(p_i(f(x))), dx + \nu |\mathcal{C}|$ avec $f(x)$ une fonction qui représente les valeurs caractéristiques (texture, couleur, ...) associées à chaque position de l'image, Ω_i une région d'intérêt. Dans le cas d'une segmentation en intensité, on choisit $f=1$.

Dans le cas particulier de la segmentation binaire, on obtient alors la formulation level set suivante : $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta(\phi)(\nu \text{div}(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}) + \log(\frac{p(f(x))|\theta_1}{p(f(x))|\theta_2}))$.

Dans le cas d'une image scalaire, les intensités sont issues d'une distribution gaussienne. Pour une image vectorisée, on utilise une distribution gaussienne multivariée.

6.8.3 Intensité, couleur, texture et texture dynamique

Pour les images en teintes de gris, on utilise une distribution gaussienne. La courbe est initialisée avec des petits cercles et au fur et à mesure ils évoluent vers la segmentation voulue. Cela peut être directement étendu aux images colorées en utilisant une distribution gaussienne multivariée.

Concernant la texture, les valeurs des pixels ne sont plus spatialement indépendantes ; il faut donc prendre en compte cette dépendance. Il va falloir utiliser une structure de tenseur qui permet de donner une valeur qui reflète la probabilité d'un sommet mais aussi l'orientation de la texture. Seulement cette méthode n'est pas efficace parce qu'il y a une dislocation des bords. On remplace donc le lissage avec des noyaux gaussiens par une diffusion non linéaire. Les textures dynamiques sont des modèles de textures variant dans le temps comme par exemple des vagues.

Dans ces séquences, on peut associer à chaque point de l'image une signature locale $\xi(x)$ caractérisant la dynamique spatio temporelle. On considère que la signature correspond à deux distributions gaussiennes, on peut donc appliquer ce qu'on a vu précédemment.

6.8.4 Mouvement

Voyons maintenant le mouvement comme un critère de segmentation dans une scène animée. En adaptant le schéma de segmentation statistique vu auparavant pour incorporer les informations de mouvement donnés par deux images consécutives d'une animation, on obtient des résultats satisfaisants.

Finalement, l'approche basée sur les régions est plus robuste au bruit et aux variations de l'initialisation que l'approche traditionnelle basée sur les contours. Les résultats obtenus sont satisfaisants, cependant comme le montre cet article dans la dernière section, cette approche peut échouer, parce que les hypothèses sur les propriétés de bas niveaux sont insuffisantes.

6.9 Marion Foare : *Geodesic Shape Retrieval via Optimal Mass Transport*, Julien Rabin, Gabriel Peyré, and Laurent D. Cohen, 11th European Conference on Computer Vision, Heraklion, Crete : Greece (2010)

Cet article présente une nouvelle méthode robuste pour certaines déformations pour rechercher des formes en 2-D ou 3-D parmi une base de données, en se basant sur la notion de distance géodésique. On considère que les formes sont des variétés compactes $\Omega \in \mathbb{R}^s$, pour $s = 2$ (formes planes) ou $s = 3$ (surfaces).

6.9.1 Distance géodésique

La longueur d'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ est donnée par $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$. La distance géodésique entre deux points $x, y \in \Omega$ est définie par $d_\Omega(x, y) = \min_{\gamma(0)=x, \gamma(1)=y} L(\gamma)$.

L'article mentionne que pour un $x_s \in \Omega$ fixé, la fonction $U_{x_s}(x) = d_\Omega(x_s, x)$ est l'unique solution de l'EDP non linéaire

$$\begin{cases} \|\nabla U_{x_s}(x)\| = 1 & \text{dans } \Omega \\ U_{x_s}(x_s) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, après discrétisation de Ω , on peut calculer les distances géodésiques entre x_s et chaque point x de la forme en résolvant cette EDP.

6.9.2 Descripteurs géodésiques

Pour mesurer les similarités entre deux formes, les auteurs proposent de choisir des caractéristiques particulières de la forme, qui soient invariantes ou quasi-invariantes pour certaines classes de déformations afin de pouvoir effectuer des comparaisons entre les deux formes. Ces descripteurs sont de deux types : locaux et globaux.

Etant donné un sous-ensemble $\mathcal{S} \in \Omega$ et un point $x \in \mathcal{S}$, le descripteur local est le vecteur $p_x = Q_x(\alpha_l)_{1 \leq l \leq d} \in \mathbb{R}^d$ où $0 \leq \alpha_l \leq 1$ sont des valeurs équiréparties et où $Q_x(\alpha) = \max_{\delta \in \mathbb{R}^+} \{P(d_\Omega(x, y) \leq \delta) \leq \alpha, y \in \partial\Omega\}$.

Pour construire le descripteur global, on s'intéresse à plusieurs points x_i de \mathcal{S} , calculés de la façon suivante :

- initialisation : on choisit au hasard $x_0 \in \mathcal{S}$
- étape k (x_0, \dots, x_{k-1} connus) : $x_k = \operatorname{argmax}_{x \in \Omega} \min_{0 \leq i < k} d_\Omega(x_i, x)$.

On définit alors le descripteur global comme le nuage des n descripteurs locaux p_{x_i} , ie : $\varphi(\Omega) = \{p_{x_i}\}_{0 \leq i \leq n-1}$. Ce descripteur global a la propriété importante d'être invariant pour des déformations qui préservent les distances géodésiques, au sens où si R est une telle déformation, alors $\varphi(R\Omega) = \varphi(\Omega)$. Par ailleurs, pour des déformations de type courbure, ou au niveau des articulations, R ne modifie pas trop les distances et alors $\varphi(R\Omega) \approx \varphi(\Omega)$.

6.9.3 Recherche via transport optimal

Pour mesurer les similarités entre les formes, ils choisissent de comparer les descripteurs globaux de chaque forme avec la distance de Wasserstein L^2 (associée au problème de transport optimal de Monge-Kantorovich). Ainsi, la mesure des similarités est définie par

$$\Delta(\Omega_0, \Omega_1) = W(\varphi(\Omega_0), \varphi(\Omega_1)) = \left(\min_{\sigma \in \Sigma_n} \sum_{i=0}^{n-1} \|\varphi(\Omega_0)_i - \varphi(\Omega_1)_{\sigma(i)}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } \Sigma_n \text{ est l'ensemble de toutes}$$

les permutations de n éléments.

Si le nuage de points $\varphi(\Omega_0)$ satisfait la propriété d'invariance précédente, alors la mesure des similarités vérifie $\Delta(\Omega_0, R(\Omega_0)) \approx 0$.

Pour des soucis de coût de calcul (nombre important de points dans le nuage), les auteurs utiliseront plutôt une approximation de la distance de Wasserstein :

$\tilde{W}(X, Y) = \|X - X^{(\infty)}\|$ où $X^{(\infty)}$ est calculé par récurrence en minimisant une énergie E_Y grâce à un algorithme de descente :

- initialisation : $X^{(0)} = X$
- étape $k+1$: $X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} - \lambda (\nabla^2 E_Y^{(k)}(X^{(k)}))^{-1} \nabla E_Y^{(k)}(X_i^{(k)})$ avec $\lambda \in]0, 2[$

De plus, $X^{(k)}$ vérifie : $X^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Y$.

6.9.4 Exemples

Etant donnée une base de données de variétés $\{\Omega_j\}_{j \in J}$, l'algorithme de recherche commence par calculer les descripteurs globaux (signatures) $\varphi(\Omega_j)$ pour chaque Ω_j . Ainsi, lorsqu'on soumet comme requête une variété Ω , l'algorithme calcule son descripteur global $\varphi(\Omega)$ et mesure les similarités entre

Ω et chaque Ω_j grâce à l'approximation de la distance de Wasserstein $\tilde{W}(\varphi(\Omega), \varphi(\Omega_j))$. Cela permet d'ordonner les Ω_j de la base de données et de trouver les plus similaires à la requête Ω .

Dans les deux expérimentations suivantes, ils considèrent un échantillon de $n = 500$ points (les x_i) et ils choisissent $d = 3$ quantiles : $Q_x(0)$ (minimum), $Q_x(\frac{1}{2})$ (médian), $Q_x(1)$ (maximum). Il comparent alors les performances de l'algorithme en utilisant deux descripteurs différents :

- le descripteur précédemment décrit auquel on associe comme quatrième composante la moyenne \bar{m} des distances géodésiques : $\varphi(\Omega) = \{p_{x_i}\}_{0 \leq i \leq 500} = \{(Q_{x_i}(0), Q_{x_i}(\frac{1}{2}), Q_{x_i}(1), \bar{m})\}_{0 \leq i \leq 500}$
- un descripteur composé de la distance géodésique maximale : $\psi(\Omega) = \{q_{x_i}\}_{0 \leq i \leq 500} = \{\max_{y \in \partial\Omega} d_\Omega(x_i, y)\}_{0 \leq i \leq 500}$

Les résultats montrent que l'utilisation du descripteur $\varphi(\Omega)$ avec la distance de Wasserstein approchée converge plus rapidement que l'utilisation du descripteur $\psi(\Omega)$ en association avec la distance Euclidienne pour la mesure des similarités, que ce soit pour une recherche de forme en 2-D ou en 3-D (où on prend les max pour les $y \in \Omega$ pour construire le descripteur $\psi(\Omega)$). En effet, le nombre plus important d'informations sur les distances géodésiques permet de trouver plus rapidement les formes recherchées parmi les formes ressemblant à la requête.

6.10 Benoît Casseau : *A high-throughput active contour scheme for segmentation of histopathological imagery*, Jun Xu, Andrew Janowczyk, Sharat Chandran, Anant Madabhushi, Medical Image Analysis (2011)

6.10.1 Introduction

Les récents progrès des scanners permettent de numériser de grands échantillons de tissus prélevés sur un patient (biopsie). L'étude de tissu est très utilisée pour l'analyse de la prostate pour prévenir l'apparition d'un cancer. En effet il s'agit de contrôler la taille, la forme de certaines glandes qui changent d'aspect en cas de cancer. La taille des images traitées ici est très grande et on veut trouver un système qui requiert un minimum d'interaction, qui soit le plus autonome possible. Le nombre d'objets à segmenter (les glandes) est aussi conséquent. Donc on recherche une méthode level-set efficace qui ne demande pas une initialisation précise des contours, qui peut détecter de nombreux contours sur de grandes images. On veut aussi travailler sur des images en couleurs

6.10.2 Etude de l'algorithme

L'algorithme possède deux étapes : premièrement une "étape de découpe" de l'image pour une rapide spécification des objets d'intérêt (les glandes). Puis on applique une méthode level set sur le résultat de la première étape avec un détecteur de contour spécial qui prend en compte les couleurs de l'image.

En ce qui concerne la phase d'initialisation : l'utilisateur crée une sélection $S1$ de couleurs qui sont représentatives de l'objet d'intérêt puis après un processus complexe l'image finale ne contient plus que des ensembles qui comportent toutes les couleurs de $S1$. Cela permet d'éliminer des contours inutiles (l'algorithme sera donc plus rapide) et d'identifier tous les pixels de l'image qui peuvent être des glandes.

Color gradient Un des inconvénients de la conversion d'une image couleur vers une image en niveau de gris est l'altération des contours. Pour un vecteur unité un résultat d'optimisation est que la forme quadratique $x^t G x$ atteint son maximum lorsque la direction du vecteur x est un vecteur propre de la matrice G . df^2 indique le taux de changement dans l'image suivant la direction x . On calcule les valeurs propres. Ainsi les valeurs propres représentent les taux de changements extrêmes dans la direction de leur vecteur propre. On les utilisera ensuite pour construire la fonction qui servira à détecter les contours.

Formulation de l'énergie Les deux premiers termes (E_1 et E_2) servent à entraîner la courbe vers les zones à fort gradient, le dernier terme (E_3) permet de maintenir la régularité de la courbe.

6.10.3 Résultats

L'article compare avec beaucoup de détails divers algorithmes avec la méthode présentée dans l'article.

6.10.4 Conclusion

Dans cet article une méthode level set a été présentée détectant les contours avec une intervention de l'utilisateur minimale, sur de grandes images contenant beaucoup d'objets à détecter. La comparaison avec d'autres méthodes montre que c'est la méthode la plus performante sur le type de données utilisé ici.

6.11 Flavien Coulet : *Segmentation of interest region in medical volume images using geometric deformable model*, Myungeun Lee, Wanhyun Cho, Sunworl Kim, Soonyoung Park, Jong Hyo Kim, Computers in Biology and Medicine (2012)

6.11.1 Introduction

Ce document est un résumé concernant l'article de recherche "Segmentation of interest region in medical volume images using geometric deformable model, Myungeun Lee, Wanhyun Cho, Sunworl Kim, Soonyoung Park, Jong Hyo Kim, Computers in Biology and Medicine (2012)". Cet article se place dans le domaine de l'application médicale, en particulier en ce qui concerne la segmentation de région d'intérêt pour les images volumiques. Ce problème promet un vaste champs d'application, notamment en ce qui concerne l'analyse et les diagnostics de données anatomiques par exemple. Toutefois, c'est aussi un problème très compliqué.

Dernièrement, les solutions à base de modèles actifs déformables sont devenues la référence en terme de segmentation par région d'intérêt, dont la méthode du level set fait partie. Cet article présente une nouvelle approche de cette dernière méthode pour la segmentation de tumeurs et autre tissus normaux dans des images médicales volumiques.

6.11.2 Modèles actifs déformables au level set

Etant donné que l'article se penche sur des données volumiques, la segmentation en région d'intérêt est définie par une surface. Une surface active déformable est une surface qui minimise une certaine énergie $E(S)$. La descente de gradient, procédé dynamique permettant de transformer une surface quelconque vers la surface minimisant l'énergie, est donnée par la formule (1) $\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial E(S)}{\partial S} = F.N$ où N est la normale de la surface. Grâce à la méthode des level set, il est possible de passer à une représentation implicite de la surface, en définissant $\phi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, où $S(w, t) = \{w | \phi(w, t) = 0\}$. Ainsi comme il a été vu en cours, (1) se ramène, $\forall x \in \Omega$, à l'équation (2) $\phi_t = |\nabla \phi|.F$

Le but est donc de trouver la fonction vitesse F permettant de placer le mieux possible la surface au niveau de la région d'intérêt. Pour ce faire, il faut donc définir correctement l'énergie $E(S)$.

6.11.3 Méthode "hybride"

Cette méthode permet de définir une énergie E permettant de placer correctement la surface S autour de la région d'intérêt, comme autour d'une tumeur par exemple. Elle est composée de trois termes aux rôles différents.

Terme sur un alignement robuste Le but est de trouver une énergie permettant que la surface se colle correctement autour d'une région. Un critère utilisé pour caractériser cette propriété est de regarder la valeur du produit scalaire entre le gradient de l'image (volumique dans ce contexte) et les normales de la surface. La valeur sera élevée lorsque les normales de la surfaces "colleront" au mieux le gradient de l'image.

Toutefois, les images médicales sont des images avec des intensités non homogènes, et qui présentent une certaine texture donc un simple gradient ne suffit pas pour permettre une convergence correcte de la méthode. C'est pourquoi il est utilisé à la place le "Gradient Vector Flow" (GVF) qui résout ces problèmes. Ainsi, en notant V_{GVF} le GVF, l'énergie peut être définie comme $E_A = \int \int_S \langle V_{GVF}, N \rangle ds dr$. L'extremum de cette énergie revient à l'équation d'Euler Lagrange suivante : $\frac{\partial S}{\partial t} = \text{sign}(\langle V_{GVF}, N \rangle) \text{div}(V_{GVF})N$. Ainsi, d'après la formule (1) et (2), nous avons $F = \text{sign}(\text{sign}(\langle V_{GVF}, N \rangle) \text{div}(V_{GVF}))$.

Terme concernant la région active Le but est de trouver une énergie minimale lorsque la surface se trouve au niveau de la région d'intérêt mais que le gradient n'est pas pertinent (image floue p.ex). Pour ce faire, sont considérés deux volumes Ω_1 et Ω_2 séparés par la surface S , et deux probabilités p_1 et p_2 caractérisant respectivement la région d'intérêt et l'extérieur. Le but étant de trouver les volumes Ω_i (donc la surface S) qui maximisent la vraisemblance de ces deux lois. Ainsi, l'énergie peut s'écrire $E(S(\Omega_1, \Omega_2)) = -(\int_{\Omega_1} \log(p_1(I(w)))dw + \int_{\Omega_2} \log(p_2(I(w)))dw)$ (opposé de la fonction de vraisemblance). Il est possible l'exprimer selon ϕ et la fonction de Heaviside ce qui permet, d'après les équation (1) et (2) et trouver F de la forme suivante $F = \log p_1(I(w)) - \log p_2(I(w))$.

Toutefois, l'inconvénient majeur est de trouver les bonnes probabilités p_1 et p_2 . Etant donné que la région volumique d'intérêt est homogène (p.ex la tumeur), et que l'autre partie volumique est trop complexe pour être décrite, deux lois gaussiennes sont utilisées. Le maximum de vraisemblance est utilisé pour déterminer les paramètres de ces deux lois gaussiennes.

Terme lissant Le but de ce terme est de placer la surface au niveau de régions à fort gradient tout en conservant un aspect lisse de la surface. En ce qui concerne la première partie, on peut considérer la fonction suivante : $g(w) = \frac{1}{1+|\nabla I(w)|^2}$. Ainsi, minimiser $\int_S g(w)dw$ revient à maximiser le gradient de l'intensité de l'image sur la surface, ce que l'on cherche à faire. Toutefois, à cause du bruit notamment, la surface peut ne pas être lisse mais les surfaces actives géodésiques n'y sont que peu sensibles. L'équation à laquelle on aboutit est : $\frac{\partial E_G(S)}{\partial S} = (g(S)k - \langle \nabla g, N \rangle)N$, avec k la courbure en un point. De ce fait, $F = g(I) \text{div}(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}) - \langle \nabla g(I), \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \rangle$.

Formulation et algorithme

Pour obtenir la fonction vitesse pour la méthode de level set, il suffit de faire une somme pondérée des trois formules décrites précédemment, à savoir :

$$F = \alpha \text{sign}(\langle V_{GVF}, N \rangle) \text{div}(V_{GVF}) + \beta * \log p_1(I(w)) - \log p_2(I(w)) + \gamma * g(I) \text{div}(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}) - \langle \nabla g(I), \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \rangle$$

D'où, la formulation en level set est la suivante : $\phi^t = \phi^{t-1} + \nabla t.F.|\nabla \phi^{t-1}|$, où $\nabla t < \frac{1}{\max(F, |\nabla \phi|)}$ pour assurer la consistance et la stabilité sur schéma numérique.

6.11.4 Analyses

Initialisation Afin de montrer la robustesse de la méthode concernant les conditions initiales, l'expérience suivante fut effectuée. Elle correspondait à faire tourner 300 itérations de l'algorithme à partir d'une même image volumique mais aux conditions initiales différentes. Pour comparer les résultats, la valeur moyenne des voxels fut employée. Il est ainsi constaté que la largeur de l'intervalle de confiance

de la valeur moyenne des voxels chute rapidement à partir d'une centaine d'itérations, pour finir par devenir extrêmement faible, donc précis et identique pour n'importe quelles conditions initiales.

Choix des paramètres L'inconvénient majeur est l'ajustement des trois paramètres de l'énergie présentée : α, β, γ . Diverses tests sur trois types d'images différentes (texturées, floutées et bruitées) ont permis de définir trois types de valeurs différents selon les cas. Pour les définir, trois mesures concernant la justesse du résultat furent utilisées. La première énergie permet de corriger au mieux les images texturées, la seconde les images floues et la dernière les images bruitées.

Résultats En comparaison avec un résultat manuel, la technique obtient de meilleurs résultats que les autres techniques existantes, avec une taille de volume à correspondance à 90%, une distance JM variant de 72% à 94% et une mesure de Hausdorff inférieure.

6.12 Quentin Arguillière : *Tensor diffusion level set method for infrared targets contours extraction*, Meng Li, Chuanjiang He, Yi Zhan, Infrared Physics & Technology (2012)

6.12.1 Approche théorique

Contexte L'acquisition de contours pour une image infrarouge (IR) est une technique clé du fonctionnement de systèmes d'alertes et de reconnaissance automatique de cibles. Cependant, le traitement d'images IR est hautement complexe, car elles présentent généralement un arrière plan très difficile à traiter, avec énormément de bruit, comme les réfractions de la lumière du soleil par exemple. Ce problème étant au cœur du traitement d'images IR, de nombreuses méthodes sont mises au point par les chercheurs du domaine. On utilise des techniques de seuillage, d'ondelettes, des algorithmes stochastiques ou encore des techniques de level set. Cet article parle d'une nouvelle technique de level set pour extraire les contours de l'image. Les méthodes par level set consistent à considérer l'image comme étant le zero level set d'une fonction de dimension supérieure. On essaye alors de minimiser une énergie sur un espace de fonction, notamment via des méthodes de gradient descendant. Cependant, les méthodes existantes considèrent l'image comme un vecteur, ce qui cause la perte de certaines données intéressantes lors du traitement. En particulier, elles ont beaucoup de mal à gérer les phénomènes de "clutter". Le clutter apparaît pour des raisons d'éclairage, et a pour conséquence que parfois l'arrière plan génère des niveaux de gris plus élevés que ceux des objets, rendant la détection de contours très difficile.

Méthode proposée La méthode présentée dans l'article se base sur une combinaison d'un tenseur de diffusion et des valeurs propres d'une image-tenseur, où on se rapporte à un problème de minimisation d'énergie de level set. L'énergie est modélisée par un terme d'énergie externe $E_{ext}(\phi)$, un terme régulier $E_{reg}(\phi)$ et un terme interne $P(\phi)$. L'énergie totale est donc modélisée par : $E(\phi) = vE_{ext}(\phi) + \lambda E_{reg}(\phi) + \mu P(\phi)$ avec $v, \lambda, \mu > 0$ et :

$$E_{ext}(\phi) = \int_{\Omega} \text{div}(J_{\sigma}(\nabla I) \nabla I) \cdot H_{\epsilon}(-\phi) dx dy$$

(Où $H_{\epsilon}(\cdot)$ est la fonction smooth Heaviside)

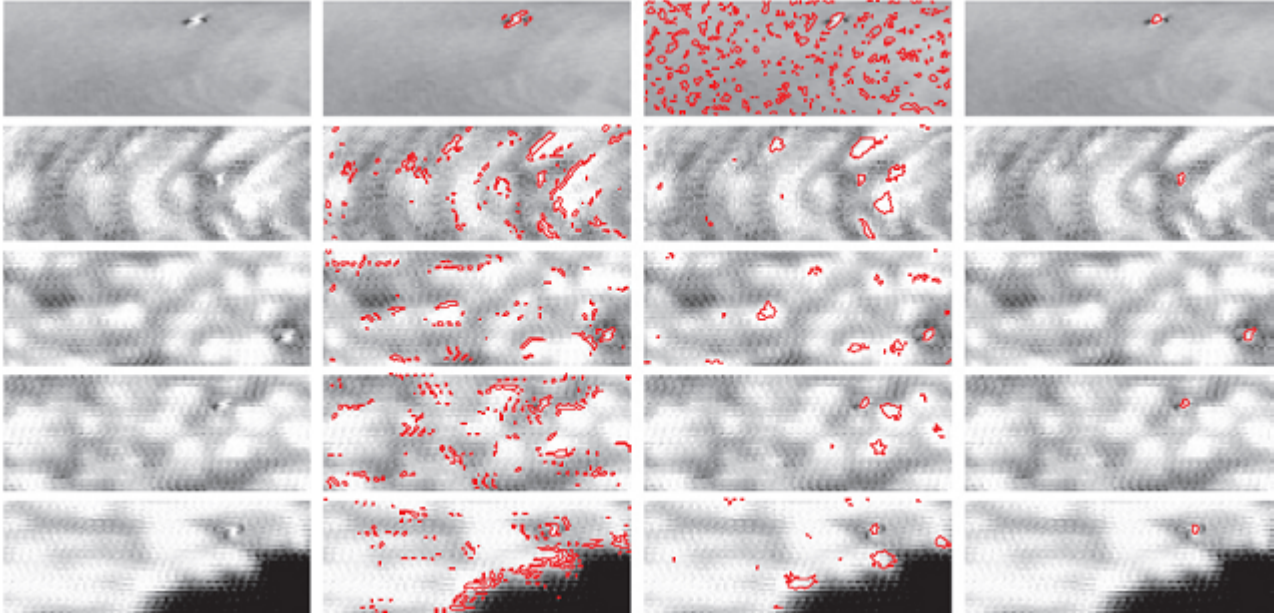
$$E_{reg}(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(\lambda_1, \lambda_2)} H'_{\epsilon}(\phi) |\nabla \phi|^{p(\lambda_1, \lambda_2)} dx dy$$

avec $\lambda_1 \geq \lambda_2$ les valeurs propres du tenseur $J_{\sigma}(\nabla I)$
et $p(\lambda_1, \lambda_2) = 1$ si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$, $p(\lambda_1, \lambda_2) = 1 + \frac{1}{2} \exp(-(\lambda_1 - \lambda_2)^2)$ sinon.

$$P(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \phi| - 1)^2 dx dy$$

6.12.2 Résultats expérimentaux

Voici les résultats que l'on peut obtenir. La première colonne représente l'image d'origine. Sur la deuxième, le résultat à la première itération. Sur la troisième colonne, à la 5ème itération. Enfin, sur la dernière colonne, à la 40ème itération.



On a donc une grande précision même pour des images très bruitées.

6.12.3 Conclusion

La méthode présentée est très efficace, et arrive à des meilleurs résultats que les existantes en seulement une quarantaine d'itérations, contre plus de 10 000 pour d'autres méthodes.

De plus, elle est également très robuste et fonctionne avec trois initialisations différentes pour la fonction zero level set : celle ci peut être une constante non nulle, une distance signée, ou bien encore une fonction binaire. Les contours sont extraits efficacement et avec précision, quelle que soit l'initialisation.

6.13 Jason Skadalis : *Combinatorial Optimization of the piecewise constant Mumford-Shah functional with application to scalar/vector valued and volumetric image segmentation*, Noha El-Zehiry, Prasanna Sahoo, Adel Elmaghraby, Image and Vision Computing (2011)

6.13.1 Introduction et rappels

On se place ici dans le cadre de la segmentation d'images : le regroupement de pixels d'une image selon certain critère. On va évoquer ici une méthode sans gradient, par région, qui permet d'effectuer la segmentation d'une image.

On étudie ici une image $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sur son domaine de définition Ω de frontière Γ .

On cherche à approximer le mieux possible une région ω de Ω (représentant un objet spécifique de notre image). Pour cela, on se donne un contour initial C quelconque, et on cherche à obtenir la meilleure approximation possible de $\delta\omega$.

Nous avons déjà étudié une telle méthode, celle de Chan et Vese, qui consistait à trouver le contour C minimisant l'énergie suivante :

$$\int_{\text{int}(C)} (u - c_1)^2 dx dy + \int_{\text{ext}(C)} (u - c_2)^2 dx dy$$

(où c_1 représente la valeur moyenne de u à l'intérieur de C , $\text{int}(C)$, et c_2 celle à l'extérieur de C , $\text{ext}(C)$)
Néanmoins, cette méthode, mettant en jeu des fonctions de level set, a une complexité très importante. De plus, elle est très dépendante des choix d'initialisation.

Afin de remédier à cela, nous allons présenter une autre méthode, faisant appel à la théorie des graphes.

6.13.2 Méthode proposée

Notations On utilisera donc par la suite les notations de graphes suivantes :

$\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \epsilon\}$ désignera le graphe d'ensemble de sommet $v \in \mathcal{V}$ et d'arêtes $e \in \epsilon$, où chacun des pixels $p = (x, y)$ de notre image sera représenté par un sommet $v_p \in \mathcal{V}$, et les arêtes allant d'un sommet v_p à un sommet v_q seront notés e_{pq} .

On distingue deux sommets auxiliaires \mathcal{S} la source et \mathcal{T} la cible du graphe.

Méthode La méthode présentée peut s'écrire sous forme de l'algorithme suivant :

1. On se donne initialement un contour C quelconque dans Ω .
On associe à chaque pixel p de notre image, une valeur binaire x_p qui vaut 0 si p est extérieur à C et 1 sinon.
2. On calcule c_1 et c_2 par les formules suivantes :
$$c_1 = \frac{\sum_p u(p)x_p}{\sum_p x_p} \text{ et } c_2 = \frac{\sum_p u(p)(1-x_p)}{\sum_p (1-x_p)}$$
3. Pour chaque pixel p , on calcule les valeurs $E^1(x_p) = (u(p) - c_1)^2$ et $E^0(x_p) = (u(p) - c_2)^2$. Si $E^1(x_p) > E^0(x_p)$ on crée une arête $\mathcal{S}v_p$ de poids $E^1(x_p)$. Sinon on crée une arête $v_p\mathcal{T}$ de poids $E^0(x_p)$. Pour chaque pixel q accolé à p , on crée une arête $v_p v_q$ de poids $w_{pq} = \frac{\delta^2 \Delta\theta_{p,q}}{2*d(p,q)}$, où $d(p, q)$ désigne la distance entre les deux pixels et $\Delta\theta_{p,q}$ l'angle formé entre les deux sommets et l'axe horizontal.
4. On sépare les sommets en deux sous ensembles disjoints S et \bar{S} (ceux de S sont les extrémités d'une arête partant de \mathcal{S}). On actualise les valeurs $x_p = 0$ si $v_p \in S$ et $x_p = 1$ sinon.

On réitère les étapes 2 à 4 jusqu'à obtenir des valeurs constantes pour c_1 et c_2 .

Cet algorithme permet d'obtenir une approximation de u : $c_1 x_p + c_2 (1 - x_p)$, et d'obtenir finalement une bonne approximation C de $\delta\omega$.

Extensions On a ici étudié seulement le cas d'images 2-D à valeur dans \mathbb{R} (en niveau de gris par exemple).

Mais la méthode peut aisément être adaptée pour des images plus sophistiquées (en RGB ou pour des images 3D par exemple).

6.13.3 Performances et conclusion

La méthode ici décrite est indépendante du choix d'initialisation du contour. Cette méthode étant indépendante du gradient de l'image (ce qui n'est pas le cas pour la méthode de Chan et Vese), elle est plus performante pour des images fortement bruitées.

Voici quelques exemples de segmentation d'image obtenues via cette méthode :



Références

- [1] S. Ageton, S. Haker and A. Tannenbaum, *Minimizing flows for the Monge-Kantorovich problem*, SIAM J. Math. Analysis, 35 :61–97 (2003)
- [2] V. Arnold, *Equations différentielles ordinaires*, 5ième éditions, Editions Mir-Librairie du Globe (1996)
- [3] J. T. Beale and J. Strain. Locally corrected semi-lagrangian methods for stokes flow with moving elastic interfaces. *J. Comp. Phys.*, 227(8) :3896–3920, 2008.
- [4] J.B. Bell, P. Colella, et H.M. Glaz, *A second order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comp. Phys. 85 (1989)
- [5] J.-D. Benamou, *Numerical resolution of an "unbalanced" mass transfer problem*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis Vol. 37, No 5, 851–868, (2003)
- [6] J.-D. Benamou and Y. Brenier, *A computational fluid mechanics solution of the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Numer. Math. 84 :375–393 (2000)
- [7] J.-D. Benamou and Y. Brenier, *Mixed L^2 -Wasserstein optimal mapping between prescribed density functions*, J. Opt. Theory and Applications, 111, (2) :255–271 (2001)
- [8] T. Biben et C. Misbah, *Tumbling of vesicles under shear flow within an advected field approach*, Physical Review E 67, 031908 (2003)
- [9] D. Boffi, L. Gastaldi, and L. Heltai. Numerical stability of the finite element immersed boundary method. *M3AS*, 17 :1479–1505, 2007.
- [10] D. Boffi, L. Gastaldi, and L. Heltai. Stability results and algorithmic strategies for the finite element approach to the immersed boundary method, preprint available on <http://www.ing.unibs.it/~gastaldi/paper.html>. *Proceeding of the Sixth European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications*, pages 557–566, 2005.
- [11] C. Bost. *Méthodes Level-Set et pénalisation pour le calcul d'interactions fluide-structure*. Thèse de l'Université de Grenoble, oct 2008.
- [12] M. Boulakia, *Modélisation et analyse mathématique de problèmes d'interaction fluide-structure*, Thèse de l'Université de Versailles, Novembre 2004, disponible sur <http://www.ann.jussieu.fr/~boulakia/these.pdf>.
- [13] J. Brackbill, D. Kothe et C. Zemach, *A continuum method for modelling surface tension*, J. Comput. Phys. 100, 335–354 (1992)
- [14] Y. Brenier, *Polar Factorization and Monotone Rearrangement of Vector-Valued Functions*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLIV, 375–417 (1991)
- [15] Y. Brenier and W.-A. Yong. Derivation of particle, string, and membrane motions from the born-infeld electromagnetism. *Journal of Mathematical Physics*, 46(6) :062305, 2005.
- [16] Y. Brenier. Optimal transport, convection, magnetic relaxation and generalized boussinesq equations. *preprint HAL*, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00202710/fr/>, 2008.
- [17] D. Bresch, T. Colin, E. Grenier, B. Ribba, and O. Saut. Computational modeling of solid tumor growth : the avascular stage. *soumis*, 2009.
- [18] D. Bresch, Th. Colin, E. Grenier, B. Ribba, O. Saut, O. Singh, and C. Verdier. Quelques méthodes de paramètre d'ordre avec applications à la modélisation de processus cancéreux. *ESAIM : Proceedings*, 18 :163–180, 2007.
- [19] D. Brown, R. Cortez et L. Minion, *Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations*, J. Comp. Phys., 168, 464–499 (2001)
- [20] Y.C. Chang, T.Y. Hou, B. Merriman, S. Osher, *A Level Set Formulation of Eulerian Interface Capturing Methods for Incompressible Fluid Flows*, J. Comp. Phys., 124, 449–464 (1996)

- [21] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann (1977)
- [22] P.G. Ciarlet *Elasticité tridimensionnelle*, Masson (1985)
- [23] P. Clarysse, B. Delhay, M. Picq and J. Pousin, *Optimal extended optical flow subject to a statistical constraint*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234 (4), 1291–1302 (2010)
- [24] G.-H. Cottet, *Multi-physics and particle methods*, in Computational Fluid and Solid Mechanics 2003, K.J. Bathe (ed.), Elsevier (2003)
- [25] R. Cortez, C.S. Peskin, J.M. stockie et D. Varela, *Parametric resonance in immersed elastic boundaries*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 65(2) :494–520 (2004)
- [26] G.-H. Cottet et P. Koumoutsakos, *Vortex methods : theory and practice*, Cambridge University Press (2000)
- [27] G.-H. Cottet et E. Maitre, *A level-set formulation of immersed boundary methods for fluid-structure interaction problems*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338, 581–586 (2004).
- [28] G.-H. Cottet et E. Maitre, *A level-set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces*, M3AS (2006).
- [29] G.-H. Cottet, E. Maitre and T. Milcent, *Existence result for an eulerian formulation of a coupled fluid-structure problem*, à paraître dans M2AN, 2008.
- [30] D. Coutand and S. Shkoller. Motion of an elastic solid inside an incompressible viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 176 :25–102, 2005.
- [31] B. Dacorogna and J. Moser, *On a partial differential equation involving the Jacobian determinant*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 7 :1–26 (1990)
- [32] E.J. Dean and R. Glowinski, *Numerical methods for fully nonlinear elliptic equations of the Monge-Ampère type*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 195 (13-16) :1344–1386 (2006)
- [33] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, PUF (1992)
- [34] M. Demazure, *Catastrophes et bifurcations*, Ellipses (1989)
- [35] R.J. DiPerna et P.-L. Lions, *Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory*, Invent. Math., 98, 511–547 (1989)
- [36] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Dunod (1998)
- [37] B. Engquist, A.-K. Tornberg, and R. Tsai. Discretization of dirac delta functions in level set methods. *Journal of Computational Physics*, 207(1) :28–51, 2005.
- [38] D. Enright, R. Fedkiw, J. Ferziger et I. Mitchell, *A Hybrid Particle level-set Method for Improved Interface Capturing*, J. Comput. Phys. 183, 83-116 (2002).
- [39] L.C. Evans, *Partial Differential Equations and Monge-Kantorovich Mass Transfer*, Notes de cours sur <http://math.berkeley.edu/~evans/>.
- [40] L.C. Evans and W. Gangbo, *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Memoirs of the American Mathematical Society, 1999.
- [41] L.C. Evans et R. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press (1992).
- [42] M. Fortin and R. Glowinski, *Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Solution of Boundary Value Problems*, Studies in Mathematics and its Applications 15, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [43] W. Gangbo, *An elementary proof of the polar factorization of vector-valued functions*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume 128, Number 4, 381–399 (1994)
- [44] W. Gangbo and R.E. McCann, *The geometry of optimal transportation*, Acta Math., 177, 113-161 (1996).

- [45] J. Glaunès, A. Trounev and L. Younes, *Modeling planar shape variation via hamiltonian flows of curves*, Statistics and Analysis of Shapes, H. Krim and A. Yezzi (Eds), Birkhauser, 335–361 (2006)
- [46] J. Glaunès, A. Qiu, M. I. Miller, and L. Younes, *Large Deformation Diffeomorphic Metric Curve Mapping*, International Journal of Computer vision, **80**, 317–336 (2008)
- [47] B.E. Griffith and C.S. Peskin. On the order of accuracy of the immersed boundary method : Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems. *J. Comp. Phys.*, 208 :75–105, 2005.
- [48] J.L. Guermond, P. Mineev, et Jie Shen, *An overview of projection methods for incompressible flows*, <http://www.math.purdue.edu/~shen/ma692b/papers/overview.pdf> (2005)
- [49] C. Grandmont et Y. Maday, *Existence for an unsteady fluid–structure interaction problem*, M2AN, 34 (2000), no. 3, 609–636.
- [50] D. Gilbarg et N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag (2001)
- [51] E. Haber, T. Rehman and A. Tannenbaum, *An efficient numerical method for the solution of the L_2 optimal mass transfer problem*, SIAM J. Sci. Comp. 32 (1), 197–211 (2010)
- [52] G. A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering*. Wiley, 2000.
- [53] J. Kim et P. Moin, *Application of a fractional-step method to solve incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comput. Phys. 59 323–360 (1985)
- [54] C. Le Bris, T. Lelièvre and Y. Maday, *Results and Questions on a Nonlinear Approximation Approach for Solving High-dimensional Partial Differential Equations*, Constr. Approx. 30 : 621–651 (2009)
- [55] L. Lee et R.J. Leveque, *An immersed interface method for incompressible Navier-Stokes equations*, SIAM J. Sci. Comp. 25, No. 3, 832–856 (2003)
- [56] P. Le Tallec et J. Mouro, *Fluid structure interaction with large structural displacements*, Compt. Meth. Appl. Mech. Engrg. 190, 3039–3067 (2001)
- [57] R. J. LeVeque et Z. Li, *Immersed interface methods for Stokes flow with elastic boundaries or surface tension*, SIAM J. Sci. Comput. 18, No. 3, 709–735 (1997).
- [58] E. Maitre, C. Misbah, P. Peyla, and A. Raoult. Comparison between advected-field and level-set methods in the study of vesicle dynamics. *soumis*, 2010.
- [59] J.E. Marsden et Th. Hughes, *Mathematical foundations of elasticity*, Dover (1994)
- [60] H. Le Dret et A. Raoult, *The membrane shell model in nonlinear elasticity : A variational asymptotic derivation*, J. Nonlinear Sci. 6, No.1, 59–84 (1996)
- [61] E.H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, AMS (2001)
- [62] F.-H. Lin, C. Liu, and P. Zhang. On hydrodynamics of viscoelastic fluids. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 58(11) :1427–1471, 2005.
- [63] P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Oxford (1996)
- [64] T. Milcent. *Formulation eulerienne du couplage fluide structure, analyse mathématique et applications en biomécanique*. Thèse de l’Université de Grenoble, mai 2009.
- [65] R.W. Ogden, *Nonlinear elasticity, anisotropy, material stability and residual stresses in soft tissue*, Biomechanics of Soft Tissue in Cardiovascular Systems (edited by G.A. Holzapfel and R.W. Ogden), CISM Course and Lectures Series 441, Springer, Wien, 65–108 (2003)
- [66] S. Osher et R. P. Fedkiw, *Level set methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer (2003).

- [67] N. Papadakis and E. Mémin, *A variational technique for time consistent tracking of curves and motion*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, Volume 31, Issue 1, pages 81–103, (2008)
- [68] N. Papadakis and E. Mémin, *Variational assimilation of fluid motion from image sequence*, SIAM Journal on Imaging Sciences, Volume 1, Issue 4, pages 343–363 (2008)
- [69] C.S. Peskin, *Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart*, J. Comp. Phys., 25 (1977) 220–252.
- [70] C.S. Peskin, *The immersed boundary method* Acta Numerica, 11 (2002) 479–517.
- [71] S. Peskin et B.F. Printz, *Improved volume conservation in the computation of flows with immersed boundaries*, J. Comput. Phys. 105 33–46 (1993)
- [72] J. Pousin, M. Picq and P. Clarysse, *Optimal extended optical flow and statistical constraint*, Proceedings of the International Conference on Computational and Mathematical Methods in Sciences and Engineering, J.V.Aguilar(Ed.), CMMSE 2009, vol. 3, 843–854 (2009)
- [73] E.G. Puckett, A.S. Almgren, J.B. Bell, D.L. Marcus, et W.J. Rider *A high-order projection method for tracking fluid interfaces in variable density incompressible flows*, J. Comp. Phys. 130 (1997) 269–282.
- [74] A. Raoult. Symmetry groups in nonlinear elasticity : An exercise in vintage mathematics. preprint HAL - CCSD, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00275450/en/>, 2008.
- [75] P.-A. Raviart, *An analysis of particle methods*, Numerical methods in fluid dynamics, Vol. 1127 des Lectures Notes in Mathematics Series, Springer-Verlag (1983)
- [76] P.-A. Raviart, *Méthodes particulières*, Ecole d’été CEA-INRIA-EDF (1987)
- [77] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics and Physics, Princeton University Press (1996)
- [78] C.-W. Shu, *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*, ICASE Report No. 97-65
<http://techreports.larc.nasa.gov/icase/1997/icase-1997-65.pdf>
- [79] P. Smereka. The numerical approximation of a delta function with application to level-set methods. *J. Comp. Phys.*, 211 :77–90, 2003.
- [80] A. Smolianski. Numerical Modeling of Two-Fluid Interfacial Flows. *PhD Thesis, University of Jyväskylä*, http://www.math.unizh.ch/user/antsmol/pdf/phd_thesis.pdf, 2001.
- [81] A. Smolianski. Finite-element/level-set/operator-splitting (FELSOS) approach for computing two-fluid unsteady flows with free moving interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48(3) :231–269, 2005.
- [82] J. Stockie, *Analysis of Stiffness in the immersed boundary method and implications for time-stepping schemes*, J. Comp. Phys., 154 (1999) 41–64. Disponible en ligne sur <http://www.math.sfu.ca/stockie/papers/jcp98.pdf>.
- [83] M. Sussman and E. Fatemi. An efficient, interface-preserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow. *SIAM J. Sci. Comp.*, 20(4) :1165–1191, 1999.
- [84] M. Sussman, E. Fatemi, P. Smereka, , and S. Osher. An improved level set method for incompressible two-phase flows. *Comp. Fluids*, 27 :663–680, 1998.
- [85] M. Sy, D. Bresch, F. Guillén-González, J. Lemoine, M.A. Rodríguez-Bellido, *Local strong solution for the incompressible Korteweg model*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 342, 169–174 (2006)

- [86] C. Tu et C.S. Peskin, *Stability and instability in the computation of flows with moving immersed boundaries : A comparison of three methods*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 13 (1992), pp. 1361–1376.
- [87] C. Villani, *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 50, AMS (2003)
- [88] L. Younes, *Computable elastic distances between shapes*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 58, No. 2, 565–586 (1998)
- [89] S. Zhang, L. Younes, J. Zwecl, and J. T. Ratnanather, *Diffeomorphic surface flows : a novel method of surface evolution*, SIAM J. Applied Math, Vol. 68, No. 3, pp. 806–824 (2008)