Rapport de projet

OT

Département de Génie Mathématique
Semestre 9 - 2017/2018

Auteur :
Timothée Schmoderer

Référente :
Carole Le Guyader
Vincent Duval

Table des matières

1 Pbm de transport optimal

Soient deux densités f_0 et f_1 de même masse, suffisamment régulière, sur un domaine $[0,1]^d$. Un transport de f_0 sur f_1 est une application T telle que :

$$f_0(x) = f_1(T(x))|det(\partial T(x))|$$

Le transport optimal est celui qui minimise le coût $\displaystyle\int c(x, T(x)dx$ parmi tous les transports de f_0 sur f_1. Dans notre problème : $C(x,y) = \|x-y\|^2$.

2 Formulation de Benamou et Brenier

On montre que la géodésique entre f_0 et f_1 est :

$$f(x,t) = f_0((1-t)Id + tT(x))|det((1-t)Id + t\partial T(x))|$$

et que ce chemin minimise le problème suivant :

$$\min_{(f,v)\in C_v} \int_{[0,1]^d}\int_0^1 f(x,t)\|v(x,t)\|^2 dtdx$$

Où : $C_v = \{(f,v)|\partial_t f + div_x(v) = 0; v(0,.) = 0, v(1,.) = 0, f(.,0) = f_0, f(.,1) = f_1\}$
On pose $m = fv$ pour obtenir le problème de minimisation

$$\min_{(f,m)\in C} J(m,f) = \int_{[0,1]^d}\int_0^1 \theta(m,f) dtdx$$

avec $\theta(m,f) = \dfrac{\|m\|^2}{f} sif > 0 \quad 0si(m,f) = (0,0) \quad \infty sinon$
Rq : on a ramené le pbm de transport optimal à celui de trouver la géodésique entre les deux densités.

3 Méthodes numériques

On présente le cas 1D qui nous a accaparé.
Carré espace temps : $[0,1]^2$ que l'on discrétise :

$$G_c = \{(x_i = \frac{i}{N}, t_j = \frac{j}{P})|0 \le i \le N,\ 0 \le j \le P\}$$

On notre $E_c = (\mathbb{R}^2)^{G_c}$ l'espace des variables centrées et $V = (m_{ij}, f_{ij}) \quad 0 \le i \le N,\ 0 \le j \le P$ les variables discrétisées.

Dans le but de capturer l'équation de continuité, on introduit une grille décentrée :

$$G_s^x = \{(x_i = \frac{i+1/2}{N}, t_j = \frac{j}{P})| -1 \le i \le N,\ 0 \le j \le P\}$$

et

$$G_s^t = \{(x_i = \frac{i}{N}, t_j = \frac{j+1/2}{P})|0 \le i \le N,\ -1 \le j \le P\}$$

On note $E_s = \mathbb{R}^{G_s^x} \times \mathbb{R}^{G_s^t}$ l'espace des variables décentrées, et $U = (\bar{m_{ij}} \quad 1 \le i \le N,\ 0 \le j \le P, \bar{f_{ij}}, \quad 0 \le i \le N,\ -1 \le j \le P$

4 Opérateurs

On introduit plusieurs opérateurs pour lier les variables décentrées et les variables centrées.

4.1 Interpolation

$$I : E_s \to E_c$$

tq

$$m_{ij} == (\bar{m}_{i+1/2,j} + \bar{m}_{i-1/2,j})/2.$$

et

$$f_{ij} == (\bar{f}_{i,j+1/2} + \bar{f}_{i,j-1/2})/2.$$

Cet opérateur s'interprète matriciellement :

$$m = \bar{m} I_m$$

et

$$f = I_f \bar{f}$$

4.2 Divergence

l'opérateur qui approxime la divergence

$$div : E_s \to \mathbb{R}^{G_c}$$

et

$$div(\bar{m}, \bar{f})_{ij} = (\bar{m}_{i+1/2,j} - \bar{m}_{i-1/2,j}) + (\bar{f}_{i,j+1/2} - \bar{f}_{i,j-1/2})$$

4.3 Frontières

Un opérateur pour extraire les frontières :

$$b(\bar{m}, \bar{f}) = ((\bar{m}_{-1/2,j}, \bar{m}_{N+1/2,j}); (\bar{f}_{i,-1/2}, \bar{f}_{i,P+1/2}))$$

et on impose les conditions aux frontières suivantes :

$$b(\bar{m}, \bar{f}) = b_0 = (0, 0, f_0, f_1);$$

4.4 Problème discrétisé

On a le problème suivant

$$\min_{U=(\bar{m},\bar{f}) \in E_s} \theta(I(\bar{m}, \bar{f})) + \iota_C(U)$$

avec l'ensemble des contraintes :

$$C = \{(\bar{m}, \bar{f}) \in E_s | \ div(\bar{m}, \bar{f}) = 0 \ b(\bar{m}, \bar{f}) = b_0\}$$

5 Résolution par algorithme de séparation de proximité

Ces algorithmes sont des généralisation des algos de gradient conjugués.

Remarque : On a $J(m,f) = \int_{[0,1]^d}\int_0^1 \frac{\|m\|^2}{f} dtdx$ donc si $f \to \infty$ on a $J \to 0$ donc ce n'est pas coercif ce qui rend l'existence de minimiseurs non triviale. Et si $f \to 0$, on a $j \to \infty$ donc les méthodes de gradient conjugués ne peuvent pas s'appliquer, le gradient n'est pas lipschitz.

On veut résoudre le pbm suivant :

$$\min_{z=(U,V)\in E_s\times E_c} G_1(z) + G_2(z)$$

où, $G_1(z) = J(U) + \iota_C(U)$ et $G_2(z) = \iota_{C_s}(z)$ et $C_s = \{z = (U,V) \in E_s \times E_c \mid V = I(U)\}$
Remarque : G_1 est la fonctionnelle originelle et G_2 vient de notre introduction des variables décalées.

On va alors calculer les opérateurs de proximités de G_1 et G_2.On dit que G_1 est **simple** dans la mesure ou :

$$Prox_{\gamma G_1}(U,V) = (Prox_{\gamma C}(U), Prox_{\gamma J}(V))$$

5.1 Opérateur de proximité de G_2

$$Prox_{\gamma C_s}(U,V) = arg \min_{z'\in C_s} \frac{1}{2}\|z - z'\|^2 = Proj_{C_s}(U,V)$$

Suivant l'article de Papadakis, Peyré et Oudet on a :

$$Prox_{\gamma C_s}(U,V) = (\tilde{U}, I(\tilde{U}))$$

et

$$\tilde{U} = (Id + I^\star I)^{-1}(U + I^\star(V))$$

Ou $I^\star$ est l'adjointe de I. ce qui nous donne en terme de matrice :

$$\tilde{\bar{m}} = (\bar{m} + mI_m^\star)(Id + I_m I_m^\star)^{-1}$$

et

$$\tilde{\bar{f}} = (Id + I_f^\star I_f)^{-1}(\bar{f} + I_f^\star f)$$

enfin : $\tilde{m} = \tilde{\bar{m}} I_m$ et $\tilde{f} = I_f \tilde{\bar{f}}$
Comme l'opérateur d'interpolation s'interprète matriciellement, son adjoint est donné par la transposée.

5.2 Opérateur de proximité de J

$Prox_{\gamma J}(V) = (Prox_{\gamma J}(V_k))_{k \in G_c}$ et

$$Prox_{\gamma J}(m_k, f_k) = (\frac{f_k^\star m_k}{f_k^\star + 2\gamma}, f_k^\star) \ si \ f^\star > 0 \qquad (0,0) \ sinon$$

et $f_k^\star$ est la plus grande racine réelle du polynôme de degré 3 donné par :

$$P(x) = (X - f_k)(X + 2\gamma)^2 - \gamma \|m_k\|^2$$

La racine est calculée rapidement avec l'algorithme de Newton.

5.3 Opérateur de proximité de ι_C

$$Prox_{\gamma C} = Proj_C$$

on réécrit l'ensemble des contraintes sous la forme :

$$C = \{U \in E_s \mid AU = y\} \qquad A = (div, b)^T \qquad y = (0, b0)^T$$

et on obtient $Proj_C(U) = (Id + A^\star \Delta^{-1} A)U + A^\star \Delta^{-1} y$ avec $\Delta^{-1} = (A^\star A)^{-1}$ et son problème requiert la résolution d'un problème de poisson.

6 Algorithme de Douglas Rachford

On procède à l'itération suivante : $(z^l, w^l) \in (E_s \times E_c) \times (E_s \times E_c)$ avec un w^0 donné :

$$z^{l+1} = Prox_{\gamma G_2}(w^l)$$

et

$$w^{l+1} = (1 - \frac{\alpha}{2})w^l + \frac{\alpha}{2} RProx_{\gamma G_2} \circ RProx_{\gamma G_1}(w^l)$$

Où on a posé : $RProx_{\gamma G} = 2Prox_{\gamma G} - Id$.
On montre alors que pour $\alpha \in]0, 2[$ et $\gamma > 0$ la méthode converge $z^l \to z^\star$ ce qui permet de retrouver la géodésique, car :

$$z^l = (U^l, V^l) \to (U^\star, V^\star) \qquad V^\star = (m^\star, f^\star)$$

Table des figures

Liste des Codes