Relazione al progetto

I Parte

Test di Uniformità

Il gruppo ha deciso di sottoporre ad un Test di Uniformità (basato sulla statistica *Chi-Quadro)* il generatore di *Lehmer* con moltiplicatore e modulo rispettivamente $(a, m) = (48271, 2^{31} – 1)$.

Note Teoriche sul test

Il test si basa sulla suddivisione dell'intervallo (0,1) (sul quale opera il generatore di *Lehmer*) in *k bins* , sulla generazione di *n* chiamate a *random()* e il conseguente conteggio di osservazioni che cadono all'interno del *bin x-esimo* ($\forall x \in \{0,1,\ldots,k-1\}$).
Indichiamo con:

o[x] := "il numero di osservazioni che cadono nel *bin x-esimo"*;

e[x] := "il numero atteso di osservazioni che cadono nel *bin x-esimo* quando esse sono realizzazioni di variabili aleatorie *U*(0,1) (ossia *e[x]= n/k*)".

Ebbene, quando il campione è un insieme fatto di realizzazioni di variabili aleatorie indipendenti e *U(0,1)* e quando *n/k* è sufficientemente grande (*n/k* ≥ 10) si dimostra che la seguente statistica tende ad una variabile aleatoria *Chi-Quadro(k-1)*:

$$\mathrm{v} = \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\mathrm{o[x]} - \mathrm{n/k})^2}{\mathrm{n/k}}$$

Intuitivamente, quando *random()* genera effettivamente realizzazioni di variabili aleatorie *U(0,1)* la quantità al numeratore tende ad essere piccola (poiché *o[x]* tende ad *n/k*). Sotto questa ipotesi tutta la statistica v tende ad essere piccola. Per questo motivo, fissato un livello di confidenza $(1-\alpha)$ con α solitamente pari a *0.05*, e posti v_1^* e v_2^*:

$v_1^* = \mathrm{idfChisquare}(k\text{-}1\ ,\ \alpha/2\ )$ e $v_2^* = \mathrm{idfChisquare}(k\text{-}1\ ,\ 1 - \alpha/2\ )$, ovvero i quantili della *Chi-Quadro(k-1)* rispettivamente di ordine $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$

Allora:

$$\Pr(v_1^* \leq v \leq v_2^*) = 1 - \alpha$$

Per questo motivo si asserisce che se la statistica v è tale per cui $v > v_2^*$ o $v < v_1^*$ allora il test fallisce: questo accade evidentemente con probabilità α (di solito *0.05*) se la densità è effettivamente *U(0,1)*.

In effetti, come verrà illustrato nel seguito della trattazione, per testare l'uniformità del generatore sotto esame verranno prodotte *s* statistiche, una per ogni *stream* messo a disposizione dal generatore di *Lehmer* della libreria *rngs* (in tutto 256 *streams*). In caso di uniformità ci si aspetta il fallimento del test da parte di $s*\alpha$ (256*0.05 ≈ 13) statistiche: qualora ci si discostasse troppo da questo valore (per eccesso o per difetto) si solleverebbero profondi dubbi sull'uniformità del generatore.

Motivazioni di impiego del test e relativi punti di forza e debolezza

Certamente il primo test da sottoporre ad un generatore è il test di uniformità. Esso svolge un ruolo essenziale per l'identificazione di tutte le implementazioni non corrette già dal punto di vista della *flatness*. Tuttavia l'aver superato il test in questione da parte di un generatore non implica la sua bontà: ad esempio questo test non tiene affatto conto dell'ordine con il quale sono riempiti i *bins*. Per questo motivo viene detto test di randomicità statisticamente *debole*.

Codice

L'implementazione del test è stata sviluppata in linguaggio *C*, utilizzando le librerie *rngs* (generatore di *Lehmer multistream*) e *rvms* (quantili *Chi-Quadro*). Di seguito il codice nel file *chisquare.c*:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "rngs.h"
#include "rvms.h"

#define K 1000        /*It is the number of bin (K >= 1000)*/
#define N 10000       /*It is the number of variate for STREAM (N >=
10*K)*/
#define ALFA 0.05     /*Level of confidence of Chi-Square test*/
#define STREAMS 256   /*Considered STREAMS*/

double chiSquareByStream(int index){
/*Return the Chi-Square statistic based on N variates selected by STREAM
index*/

      double expected = (N/K);
      double statistic = 0;

      int o[K];
      int x;
      int i;

      for(x = 0 ; x < K ; x++)
            o[x] = 0;

      SelectStream(index);

      for(i = 0 ; i < N ; i++){
            x = floor((Random())*K);
            o[x]++;
      }

      for(x = 0 ; x < K ; x++){
            statistic = statistic + (double)(pow((o[x] - expected) , 2)) /
(expected);
      }

      return statistic;
}
```

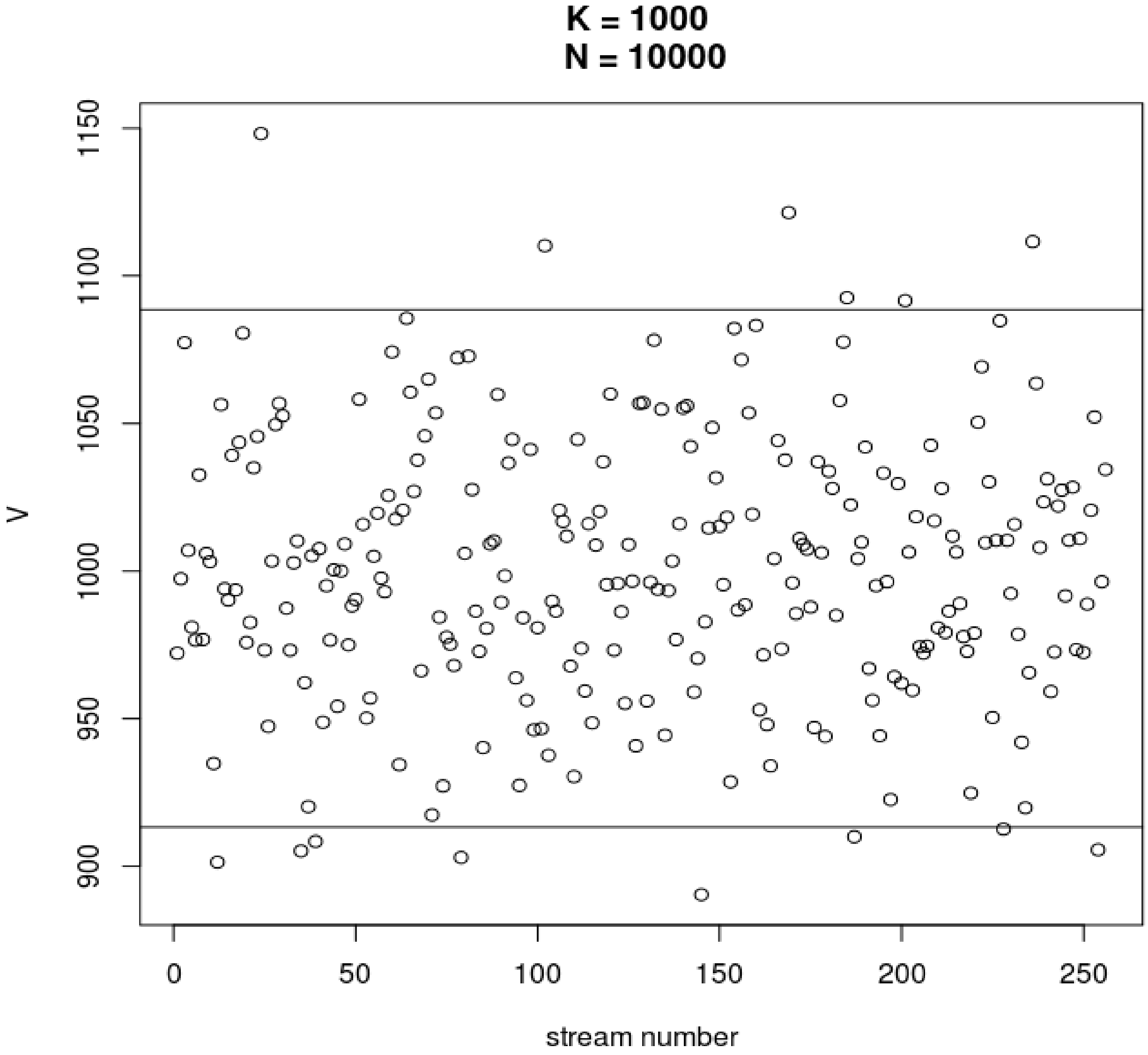
```
double* chiSquare(){
/*Return all 256 Chi-Square statistics, one for STREAM*/
	double* V = (double*)malloc(STREAMS*sizeof(double));

	if(V==NULL) {
		perror("Error in malloc\n");
		exit(1);
	}

	int i;

	for(i = 0 ; i < STREAMS ; i++)
		V[i] = 0;

	for(i = 0 ; i < STREAMS ; i++)
		V[i] = chiSquareByStream(i);

	return V;
}

double computeV1(void){
/*Return idfChisquare(K âˆ’ 1, ALFA / 2)*/

	return idfChisquare((long)(K - 1), (double)(ALFA / 2));
}

double computeV2(void){
/*Return idfChisquare(K âˆ’ 1, 1 - ALFA / 2)*/

	return idfChisquare((long)(K - 1), (double)(1 - (ALFA / 2)));
}

void destroy(double* v){
/*Free heap*/

	free(v);
}

int  writeData(void){
/*Write results of chiSquare() on data.txt"*/

	FILE* fd;
	int i;

	fd = fopen("data.txt", "a");

	if(fd==NULL) {
		perror("Error opening file");
		exit(1);
	}

	double* V = chiSquare();

	for(i = 0 ; i < STREAMS ; i++)
		fprintf(fd, "%0.2f,", V[i]);
```

```
	fprintf(fd, "%0.2f,", computeV1());
	fprintf(fd, "%0.2f", computeV2());

	destroy(V);
	fclose(fd);

	return 0;
}

int main(void)
{
	int i = writeData();

	if(i != 0)
		return EXIT_FAILURE;
	else
		return EXIT_SUCCESS;
}
```

Il numero di *bin* è impostato a 1000 e dunque per rendere la statistica utilizzabile *n* è impostato a 10.000 ($n/k \geq 10$). L'algoritmo costruisce un array di 256 statistiche (una per *stream*), salvate successivamente nel file *data.txt* nel formato *stat_0, stat_1, … , stat_255* appendendo infine i due quantili v_1^* e v_2^*.

Visualizzazione dello *scatter plot* e conclusioni

I dati scritti sul file *data.txt* sono utilizzati dall'applicazione statistica *R* per visualizzare su uno *scatter plot* tutte le 256 statistiche ottenute e verificare il superamento o meno del test da parte del generatore di *Lehmer* $(a, m) = (48271, 2^{31} - 1)$. Nella pagina successiva è inserita l'immagine dello *scatter plot* ottenuto. Sulle ascisse vi è il numero dello *stream* considerato e sulle ordinate il valore della statistica ottenuta dal test di uniformità sul generatore associato. Le linee orizzontali che corrispondono rispettivamente ai punti sulle ordinate di valore circa 913.3 e 1088.5 rappresentano i quantili della *Chi-Quadro* v_1^* e v_2^*. È evidente che vi sono 8 punti minori del quantile v_1^* (troppa uniformità) e 6 punti maggiori del quantile v_2^* (assenza di uniformità). Dunque il test di uniformità in tutto fallisce 14 volte: tuttavia era stato precedentemente asserito che in caso di uniformità da parte del generatore ci si aspettasse che circa $s*\alpha$ (in questo caso 13) statistiche fallissero. Per questo motivo possiamo concludere che il generatore in questione supera positivamente il test di uniformità.


K = 1000
N = 10000
V
1150
1100
1050
1000
950
900
0
50
100
150
200
250
stream number