Лекция 7. Логика предикатов. Алгебраические системы

1 Алгебраические системы

Хотя при построении конкретного логико-математического языка обычно подразумевается некоторый смысл составляющих его символов, этот смысл никак не используется при синтаксическом описании языка. После того как выбрана сигнатура языка, мы вправе наделять входящие в нее символы новым смыслом, отличным от того, который вкладывался в них на этапе построения языка. Более того, рассмотрение различных интерпретаций одного и того же языка является одним из важнейших приемов, используемых в математической логике.

Чтобы задать *интерпретацию* языка с сигнатурой 'Ω = *(Cn, Fn, Pr),* нужно

1) зафиксировать непустое множество *M,* называемое *основным множеством* или *носителем интепретации;*

2) каждой константе $c \in Cn$ сопоставить некоторый элемент $c' \in M$ — значение константы с в данной интерпретации;

3) каждому (k-местному) функциональному символу $f \in Fn$ сопоставить некоторую (k-местную) функцию f': $M^к$ -> M — значение функционального символа f в данной интерпретации;

4) каждому (k-местному) предикатному символу $P \in Pr$ сопоставить некоторый (k-местный) предикат P : $M^к$ -> {0, 1} — значение предикатного символа P в данной интерпретации. Если P есть 0-местный предикатный символ, то ему сопоставляется значение 0 или 1.

Непустое множество *M,* рассматриваемое вместе с интерпретацией на нем всех символов сигнатуры 'Ω, называется *алгебраической системой сигнатуры 'Ω* и обозначается Т = (М, 'Ω). Множество *M* называют носителем алгебраической системы (М, 'Ω). *Мощностью* алгебраической системы называется мощность ее носителя.

Пусть Ф — замкнутая формула сигнатуры 'Ω. *Логической длиной* формулы Ф назовем количество входящих в нее логических символов, т. е. логических связок и кванторов. Индукцией по логической длине формулы Ф определим ее *истинностное значение* $[\Phi] \in 0,1$ в алгебраической системе Т.

2 Выполнимость и общезначимость

Алгебраическая система T сигнатуры Ω называется ***моделью*** замкнутой формулы F в сигнатуре Ω, если T |= F, и ***контрмоделью*** формулы Φ, если T не |= F. Замкнутая формула F называется ***выполнимой,*** если она имеет модель. Множество замкнутых формул G называется выполнимым, если существует такая алгебраическая система T, что T |= F для любой формулы $F \in G$; в этом случае алгебраическая система T называется моделью множества формул G. Запись T |= G означает, что T — модель множества G.

Формула F(x1,...,xn), содержащая свободно лишь переменные x1,...,xn, называется выполнимой, если существуют алгебраическая система T = *(M,* Ω) и элементы $m1, \ldots, mn \in M$ такие, что T |= F*(m1,. . ., mn)* Нетрудно заметить, что формула $F(x1, \ldots, xn)$ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима замкнутая формула $\exists x1, \ldots, \exists xn\, F(x1, \ldots, xn)$.

Замкнутая формула F в сигнатуре T называется ***общезначимой*** или ***тождественно истинной,*** если для любой алгебраической системы T сигнатуры Ω имеет место T |= F. Запись |= F означает, что формула общезначима.

Формула $F(x1, \ldots, xn)$, содержащая свободно лишь переменные $x1, \ldots, xn$, называется общезначимой или тождественно истинной, если для любой алгебраической системы T = (M, Ω) и любых $m1, \ldots, mn \in M$ имеет место T |= F(т1,. . ., тn). Нетрудно заметить, что формула $F(x1, \ldots, xn)$ общезначима тогда и только тогда, когда общезначима замкнутая формула $\forall x1, \ldots, \forall xn\, F(x1, \ldots, xn)$.

Говорят, что терм *t* ***свободен*** для переменной *x* в формуле F, если никакое свободное вхождение *x* в F не находится в области действия квантора по переменной, входящей в *t.* Например, терм *f(x)* свободен для переменной *y* в формуле $\forall z P(y, z)$, а терм *f(z)* не свободен для переменной *y* в той же формуле

Теорема *Если терм t свободен для x в формуле Φ(x), то формулы* $\forall x F(x) \supset F(t)$ и $F(t) \supset \exists x\, F(x)$ *общезначимы.*

3 Равносильные формулы

Формулы F1 и F2 сигнатуры Ω называются ***равносильными,*** если формула $F1 \equiv F2$ общезначима. Тот факт, что формулы F1 и F2 равносильны, обозначается так: F1 ~ F2. Нетрудно заметить, что замкнутые формулы (высказывания) F1 и F2 равносильны, если и только если в любой алгебраической системе истинностные значения высказываний F1 и F2 совпадают, а формулы со свободными переменными F1(x1,...,xn) и F2(x1,...,xn) равносильны тогда и только тогда, когда в любой алгебраической системе T = (M, Ω) для любых элементов $a1, \ldots, an \in M$ истинностные значения высказываний $F1(a1, \ldots, an)$ и F1(a1,...,an) совпадают. Очевидно также, что отношение ~ рефлексивно (F ~ F), симметрично (если F1 ~ F2, то F2 ~ F1) и транзитивно (если F11 ~ F2 и F2 ~ F3, то F1 ~ F3) . Таким образом, ~ - это отношение эквивалентности на множестве всех формул сигнатуры Ω.

Теорема. Каковы бы ни были формула A(x), формула B, не содержащая свободно переменную x, и переменная y, не входящая в формулу A(x), имеют место следующие равносильности:

$\neg\forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$;

$\neg\exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$;

$(\forall x A(x) \wedge B) \sim \forall x (A(x) \wedge B)$;

$(B \wedge \forall x A(x)) \sim \forall x (B \wedge A(x))$;

$(\exists x A(x) \wedge B) \sim \exists x (A(x) \wedge B)$;

$(B \wedge \exists x A(x)) \sim \exists x (B \wedge A(x))$;

$(\forall x A(x) \vee B) \sim \forall x (A(x) \vee B)$;

$(B \vee \forall x A(x)) \sim \forall x (B \vee A(x))$;

$(\exists x A(x) \vee B) \sim \exists x (A(x) \vee B)$

$(B \vee \exists x A(x)) \sim \exists x (B \vee A(x))$

$(\forall x F(x) \Rightarrow B) \sim \forall x (F(x) \Rightarrow B)$

$(B \Rightarrow \forall x A(x)) \sim \forall x (B \Rightarrow A(x))$

$(\exists x A(x) \Rightarrow B) \sim \exists x (A(x) \Rightarrow B)$

$(B \Rightarrow \exists x A(x)) \sim \exists x (B \Rightarrow A(x))$

$\forall x F(x) \sim \forall y F(y)$

$\exists x F(x) \sim \exists y F(y)$

Доказательство. Все эти равносильности доказываются несложными рассуждениями, опирающимися на определение истинности формулы в данной алгебраической системе. Для примера рассмотрим доказательство равносильности $(\forall x A(x) \vee B) \sim \forall x (A(x) \vee B)$.

1. Пусть T = (M, 'Ω) — произвольная алгебраическая система. Всем свободным переменным формул $(\forall x A(x) \vee B) u \forall x (A(x) \vee B)$ придадим конкретные значения из множества *M*. Для полученных высказываний сохраним обозначения $(\forall x A(x) \vee B) u \forall x (A(x) \vee B)$ и докажем, что T |= $(\forall x A(x) \vee B)$ <=> T |= $\forall x (A(x) \vee B)$.

2. Пусть T |= $(\forall x A(x) \vee B)$. Это означает, что в T истинно хотя бы одно из высказываний $\forall x A(x)$ и B.

Если T |= $(\forall x A(x) \vee B)$, то T |= F(a) для любого $a \in M$. Но тогда, очевидно, T|= $F(a) \vee B$ для любого $a \in M$,

а это означает, что T |= $\forall x (A(x) \vee B)$.

3. Если же T |= B, то, очевидно, T|= $F(a) \vee B$ для любого $a \in M$, откуда снова получаем T |= $\forall x (A(x) \vee B)$. Таким образом, мы доказали, что если T |= $(\forall x A(x) \vee B)$, то T |= $\forall x (A(x) \vee B)$ *

4/ Пусть теперь T |= $\forall x (A(x) \vee B)$. Это означает, что T |= $F(a) \vee B$ *для любого* $a \in M$.

Если при этом T |= B, то, очевидно, T |= $(\forall x A(x) \vee B)$. Если же T не |= B, то, как следует из * T|= $F(a)$ для любого $a \in M$. Но тогда T |= $\forall x A(x)$, и снова T |= $(\forall x A(x) \vee B)$ □

Следующее довольно очевидное утверждение называют *теоремой об эквивалентной замене.*

Теорема об эквивалентной замене. Если формула F' получена заменой в формуле F некоторой ее подформулы A на формулу A' причем A ~ A', то F ~ F'

Эта теорема доказывается несложной индукцией по построению формулы F с использованием определения истинности формулы в алгебраической системе. Теорема дает важный способ *равносильных преобразований* формул: если часть формулы F заменяется на равносильную, то в результате получается формула, равносильная формуле F.

4 Предваренные формулы

Формула называется ***предваренной,*** если она бескванторная (т. е. не содержит кванторов) или имеет вид *Q1x1...QnxnF,* где Ф — бескванторная формула, а *Qi* (i = 1, . . ., *n)* есть квантор всеобщности или существования.

Пример: $\forall x(P(x) \vee Q(y))$ — предваренная формула, а формула \ $\forall x P(x) \vee Q(y)$ не является предваренной.

Теорема 5.4. Для любой формулы F существует предваренная формула F' такая, что F ~ F'.

Построение предваренной формулы, равносильной данной формуле F, называют приведением формулы к *предваренному виду* или *предваренной форме.*

5 Аксиоматические теории

Аксиоматический метод построения научной теории состоит в том, что некоторые исходные положения, называемые *аксиомами* или *постулатами,* принимаются «без доказательства», а все другие утверждения этой теории выводятся из них путем рассуждения.

Аксиоматический метод в математике впервые был использован Евклидом в III веке до н. э. в его книге «Начала» при изложении основ элементарной геометрии, теории чисел, алгебры и других разделов античной математики. «Начала» Евклида составлены по определенной схеме, сложившейся еще до Евклида в древнегреческой науке: сначала приводятся определения и постулаты, а затем формулировки теорем и их доказательства. Некоторые *определения* в «Началах» — это просто *описания* исходных понятий. Например, «Точка есть то, что не имеет частей». Ясно, что такое «определение» вряд ли может быть использовано в математических доказательствах. Однако в «Началах» имеются и определения, являющиеся таковыми в современном смысле: они *называют* понятия. Например, «Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи неограниченно продолжены в обе стороны, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются». Вслед за определениями в «Началах» идут *постулаты,* среди них — знаменитый V постулат Евклида: «Если прямая, пересекающая две прямые, образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то эти прямые пересекаются с той стороны, где эта сумма меньше двух прямых». На основе определений и постулатов путем доказательства выводятся новые геометрические утверждения — *теоремы.*

Поскольку предполагалось, что геометрия есть описание реального физического пространства, вполне естественно, что Евклид считал постулаты «самоочевидными истинами». Однако V постулат кажется слишком сложным, чтобы его можно было причислить к «самоочевидным истинам». Поэтому на протяжении веков было потрачено много усилий на попытки доказать V постулат на основе остальных постулатов. Хотя все эти попытки оказались неудачными, они все же привели к некоторым положительным результатам. В частности, было доказано, что V постулат Евклида эквивалентен следующему утверждению: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной прямой».

К началу XIX века начало возникать подозрение о недоказуемости V постулата Евклида. Это подозрение перешло почти в полную уверенность, когда в 1826 году великий русский математик Н. И. Лобачевский построил геометрическую теорию, основанную на системе постулатов, в которой V постулат Евклида заменен утверждением, несовместимым с ним: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит более чем одна прямая, параллельная данной прямой». Хотя «истинность» такой аксиомы кажется сомнительной, при выводе следствий из нее какиелибо противоречия не встречаются.

Следующим событием на пути построения неевклидовой геометрии явилось построение различных моделей геометрии Лобачевского средствами геометрии Евклида. Например, в модели, предложенной выдающимся немецким математиком Клейном в 1871 году, плоскость интерпретируется как внутренность какого-нибудь круга, а прямая — как хорда этого круга без своих концов. В такой интерпретации оказываются истинными все аксиомы геометрии Лобачевского. Наличие подобных моделей показывает, что геометрия Лобачевского столь же непротиворечива, как и геометрия Евклида.

Построение моделей геометрии Лобачевского имело принципиальное значение для развития аксиоматического метода, поскольку оно привело к осознанию возможности рассматривать аксиоматическую теорию чисто формально, не предполагая заранее какое-либо определенное значение основных понятий. Более того, мы вольны выбирать значения этих понятий каким угодно образом, лишь бы при этом оказывались истинными аксиомы.

Полная свобода от какой-либо интерпретации позволяет расширить и само понятие аксиоматической теории. Представление об аксиомах как «самоочевидных истинах» теряет смысл: утверждение, очевидное в одной интерпретации, может не быть таковым, оставаясь истинным, в другой интерпретации. Нас будут интересовать только такие аксиоматические теории, аксиомы которых записываются в виде формул подходящего элементарного языка.

6 Элементарные теории

Элементарной теорией, или теорией первого порядка называется произвольное множество высказываний некоторого элементарного языка. Высказывания, составляющие теорию, будем называть *аксиомами* этой теории. Теория называется *совместной,* если она имеет модель. В противном случае теория называется *несовместной.* Рассмотрим некоторые примеры элементарных теорий.

1. Наивная теория множеств. Язык теории множеств рассматривался в разделе выше. Его сигнатура состоит из одного двуместного предикатного символа in. На этом языке можно записать многие предложения, относящиеся к теории множеств. Например, $\forall u(u \in z) \equiv (z \in x) \vee (z \in y)$ означает $z = x \cup y$.

В канторовской теории множеств основополагающим является так называемый *принцип свертывания:* если имеется некоторое свойство, которым могут обладать или не обладать произвольные множества, то существует множество, содержащее только те множества, которые обладают этим свойством. Если ограничиться рассмотрением только таких свойств множеств, которые выражаются формулами языка теории множеств, указанный принцип можно выразить посредством схемы аксиом $\exists x \forall y(y \in x \equiv F)$, называемой *аксиомой свертывания,* где F — произвольная формула рассматриваемого языка, не содержащая свободно переменную *x.* Теория, состоящая из универсальных замыканий всех примеров аксиомы свертывания называется *наивной теорией множеств.*

7 Логическое следствие

Говорят, что высказывание F языка Ὠ *.логически (семантически) следует* из множества высказываний *T* языка Ὠ, и пишут T |= F, если F истинно во всякой модели множества T. В этом случае высказывание F называется *.логическим следствием* множества высказываний *T.*

Теоремами теории первого порядка *T* в языке Ὠ называются высказывания языка Ὠ, которые логически следуют из *T.* Таким образом, теорема данной теории *T* это высказывание, истинное во всех моделях теории *T.*

Теорема. Высказывание F языка Ὠ является .логическим следствием множества высказываний T языка Ὠ тогда и только тогда, когда множество высказываний $T \cup \neg \Phi$ невыполнимо.