Лекция 6. Логика предикатов. Основные понятия

Ключевые понятия: ***переменная, именная (высказывательная) форма, субъект, предикат, сигнатура, атом, кванторная приставка, область действия.***

1 Высказывательные формы и кванторы

Не всякое повествовательное предложение может рассматриваться как высказывание. Например, нельзя ставить вопрос об истинности или ложности предложения «Остаток от деления числа n на 7 равен 3». Буква *n,* входящая в это предложение, играет роль переменной, при подстановке вместо которой обозначения какого-либо натурального числа получается высказывание (истинное или ложное). Вообще, ***переменная*** *— это языковое выражение, служащее для обозначения произвольного объекта из некоторого фиксированного множества, называемого областью возможных значений переменной*. Если переменная употребляется таким образом, что допускается подстановка вместо нее *имен* (т. е. обозначений) объектов из области возможных ее значений, то эта переменная называется ***свободной***. Таковы, например, переменные *x, y* и *z* в предложениях $x < y$ и $z = x+1$. Если же по смыслу выражения, содержащего переменную, подстановка вместо нее имен конкретных объектов недопустима, то эта переменная называется ***связанной***. Например, в выражении $\lim\limits_{x \to a} x^2 = y$ переменная *x* является связанной, а переменные *а т у* — свободными. В одном выражении одна и та же переменная может употребляться и как свободная, и как связанная. Например, в выражении $\int\limits_0^x x^2 dx$ оба вхождения переменной *x* в подынтегральное выражение являются связанными, а вхождение ее в качестве верхнего предела интегрирования — свободным. Вообще, следует говорить именно о свободных и связанных *вхождениях* переменной в данное выражение.

Выражение, содержащее свободные вхождения переменных и превращающееся в имя некоторого объекта (или высказывание) всякий раз, когда вместо свободных вхождений каждой переменной подставляется имя какого-либо объекта из области ее возможных значений, называется ***именной формой*** *(соответственно, высказывательной формой).* Переменные, имеющие свободные вхождения в именную или высказывательную форму, называются ее ***параметрами***. Именную или высказывательную форму будем называть n-местной, если она содержит ровно *n* параметров. В частности, можно говорить и о 0-местных именных и высказывательных формах, понимая под ними соответственно имена и высказывания.

Иногда для k-местной именной или высказывательной формы употребляют обозначение F(x1...xk), явно указывая все ее параметры. Тогда, если a1…ak —

имена каких-либо объектов из областей возможных значений переменных x1...xk соответственно, то через *F(a1...ak)* обозначается выражение, полученное из F(x1...xk) подстановкой a1...ak соответственно вместо свободных вхождений переменных x1...xk.

Примеры:

1) через F(x,y) обозначим именную форму $\int_x^y yx^2dx$. Тогда F(3 6) есть выражение $\int_3^6 6x^2dx$, которое, очевидно, является именем числа 378.

2) через A(i,k,l) обозначим высказывательную форму $\sum_{i=k}^{l} \frac{1}{i^2} < \lim_{x \to i} \log_2 x$. Тогда A(3,7,11) есть высказывание $\sum_{i=7}^{11} \frac{1}{i^2} < \lim_{x \to 3} \log_2 x$ (очевидно, истинное)

Очевидно, что над высказывательными формами можно совершать логические операции. Так, абсолютно ясен смысл высказывательных форм $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, если A и B — высказывательные формы. Наряду с такими операциями в математической логике рассматриваются ***кванторы***, позволяющие из данной высказывательной формы получать высказывательную форму с меньшим числом параметров, в частности, из одноместной высказывательной формы — высказывание.

Квантор всеобщности по переменной x позволяет из данной высказывательной формы A(x) с единственным параметром x получить высказывание «Для всех x имеет место A(x)». Результат применения квантора всеобщности по переменной x к высказывательной форме A(x) будем обозначать $\forall xA(x)$. Высказывание $\forall xA(x)$ считается истинным тогда и только тогда, когда при подстановке в A(x) вместо свободных вхожде ний переменной x имени любого объекта a из области ее возможных значений всегда получается истинное высказывание A(a). Высказывание MxA(x) может читаться также «Для любого x имеет место A(x)», «Для всех x верно A(x)», «Каждый x обладает свойством A(x)» и т. п.

Квантор существования по переменной x позволяет из данной высказывательной формы A(x) с единственным параметром x получить высказывание «Существует такой x, что имеет место A(x)». Результат применения квантора существования по переменной x к высказывательной форме A(x) будем обозначать $\exists xA(x)$. Высказывание $\exists xA(x)$ считается истинным тогда и только тогда, когда в области возможных значений переменной x найдется такой объект a, что при подстановке его имени в A(x) вместо свободных вхождений переменной x получается истинное высказывание A(a). Высказывание $\exists xA(x)$ может читаться также «Для некоторых x имеет место A(x)», «Существует x, для которого A(x)», «Хотя бы для одного x верно A(x)» и т. п.

Отметим еще раз, что в предложениях $\forall xA(x)$ и $\exists xA(x)$ переменная x не является свободной: кванторы «связывают» эту переменную. Очевидно также, что кванторы по переменной x можно применять и к высказывательным формам, содержащим наряду с ней и другие параметры. В результате получится высказывательная форма, имеющая те же параметры, что и исходная, кроме x.

Важное значение для логики имеет анализ логической структуры высказываний и высказывательных форм, т. е. выявление того, каким образом данное повествовательное предложение построено из более простых предложений с помощью пропозициональных операций и кванторов. Логический анализ предложений есть своего рода искусство, практические навыки которого можно приобрести путем упражнений. Пусть, например, M и N — два множества, состоящие из действительных чисел. Тогда, используя переменную x, возможными значениями которой являются действительные числа, высказывание «Каждый элемент множества M принадлежит множеству N» можно записать следующим образом: $\forall x(x \in M \Rightarrow x \in N)$.

2 Понятие предиката

Логический анализ предложений во многом аналогичен грамматическому анализу сложно-сочиненных и сложно-подчиненных предложений. Однако иногда нас будет интересовать и внутренняя структура простых предложений: что и о чем говорится в данном предложении. В таком случае в грамматике используются понятия субъекта и предиката. ***Субъект*** *(или подлежащее) — это то, о чем или о ком говорится в предложении, а* ***предикат*** *(называемый также сказуемым или группой сказуемого) выражает то, что говорится о субъекте.* В математической логике используется более широкая трактовка субъектно-предикатной структуры предложения. Прежде всего, в качестве субъектов данного предложения мы можем выделить одно или несколько имен каких-либо предметов, входящих в это предложение. Заменив затем выделенные имена на переменные, мы получим высказывательную форму, «в чистом виде» выражающую то, что говорится о субъекте или субъектах. Эту высказывательную форму тоже называют предикатом. Рассмотрим, например, высказывание «12 делится на 3», которое, используя общепринятую символику, можно записать так: 3|12 («число 3 делит число 12»). Выбрав в качестве субъекта число 12, мы получаем одноместный предикат 3|x («x делится на 3»). Если же в качестве субъекта взять число 3, то получим другой одноместный предикат y|12 («12 делится на y»). Наконец, считая 12 и 3 субъектами этого предложения, получаем двуместный предикат y|x («x делится на y»).

Со всяким предикатом, понимаемым как высказывательная форма, естественным образом связана *функция, которая каждому набору значений свободных переменных сопоставляет высказывание, получающееся из данной высказывательной формы подстановкой вместо свободных вхождений переменных имен объектов, выбранных в качестве значений этих переменных*. Обобщая это наблюдение, мы приходим к представлению о ***предикате*** как о функции, значениями которой являются высказывания. Наконец, если мы не будем различать высказывания, имеющие одно и то же истинностное значение, то придем к следующему определению: k-местным предикатом на множестве M называется функция $P : M^к \text{ -> } \{0,\ 1\}$, где $M^к$ — декартова степень множества M, т. е. прямое произведение k одинаковых множеств, равных M. Одноместные предикаты называют также «свойствами».

Пусть P есть k-местный предикат на множестве M. Совокупность всех элементов множества M (т.е. кортежей длины k над множеством M), на которых предикат P принимает значение 1, называется областью истинности предиката P. Иными словами, область истинности предиката P — это множество $\{\langle a_1, \ldots, a_k \rangle | a_1, \ldots, a_k \in M \,\&\, P(a_1, \ldots, a_k) = 1\}$.

Примеры:

1) На произвольном множестве M может быть определен двуместный предикат E : M -> {0,1} так, что E(x,y) = 1 тогда и только тогда, когда x и y совпадают. Этот предикат называют предикатом равенства и вместо E(x,y) пишут x = y.

2) На произвольной совокупности множеств M можно определить двуместный предикат P : M -> {0, 1} так, что P(x, y) = 1 тогда и только тогда, когда множество x является элементом множества y. Этот предикат называют предикатом принадлежности и вместо P(x,y) пишут $x \in y$.

3 Элементарные языки

Чтобы сделать математические утверждения точными математическими объектами, в математической логике используют искусственные языки. Самый распространенный вид таких языков — так называемые *логико-математические языки первого порядка* или *элементарные языки.* Каждый элементарный язык задается своей ***сигнатурой*** — набором из трех множеств 'Ω = *(Cn, Fn, Pr),* где *Cn* — множество *(предметных констант, Fn* — множество *функциональных символов, Pr* — множество *предикатных символов.* При этом с каждым функциональным и предикатным символом однозначно связано некоторое натуральное число — количество аргументов (или *валентность)* этого символа. Валентность любого функционального символа положительна, а предикатный символ может иметь и нулевую валентность. Функциональный или предикатный символ, валентность которого равна k*,* называют k-местным. Во всяком элементарном языке имеется счетный набор *(предметных) переменных.* Элементарный язык с сигнатурой 'Ω будем называть языком 'Ω.

Из переменных, констант, функциональных и предикатных символов с помощью скобок, запятых и *логических символов* строятся выражения, называемые термами и формулами. Определение *терма* носит индуктивный характер и содержит три пункта:

- каждая переменная есть терм;
- каждая константа есть терм;
- если f есть k-местный функциональный символ, а *t1...tk* — термы, то выражение *f(t1...tk)* есть терм.

Если f - двуместный функциональный символ, то иногда, следуя традиции, вместо $f(t1,t2)$ пишут t1 f t2. Например, при использовании функционального символа + обычно пишут *x + y,* а не *+(x, y).* Если f — одноместный функциональный символ, то иногда вместо *f(t)* пишут *ft.*

Индуктивный характер определения терма дает возможность использовать в доказательствах *принцип индукции по построению терма.* А именно, пусть требуется доказать, что все термы обладают некоторым свойством *P.* Для этого достаточно установить, что

- каждая переменная обладает свойством *P;*
- каждая константа обладает свойством *P;*
- если f есть k-местный функциональный символ, а термы $t1 \dots tk$ обладают свойством *P,* то терм f(t1...tk*)* обладает свойством *P.*

Атомные формулы (или ***атомы)*** — это выражения вида *P(t1...tk),* где *P* есть k-местный предикатный символ (k>1), а t1...tk — термы. Всякий 0-местный предикатный символ считается атомом. Если *P* — двуместный предикатный символ, то иногда, следуя традиции, вместо $P(t1,t2)$ пишут (*t1Pt2)* или просто *t1Pt2.* Например, при использовании предикатного символа равенства = обычно пишут *x = y,* а не = *(x, y)*

Формулы определяются индуктивно с помощью следующих четырех пунктов.

- Каждый атом есть формула.
- Если F — формула, то $\neg F$ — формула.
- Если F1 и F2 — формулы, то $(F1 \wedge F2)$, $(F1 \vee F2)$, $(F1 \Rightarrow F2)$ — формулы. Если F — формула, x — переменная, то $\forall xF(x)$ и $\exists xF(x)$ — формулы.

В формулах вида $\forall xF(x)$ и $\exists xF(x)$ выражение $\forall x$ или $\exists x$ называется ***кванторной приставкой,*** а формула F(x) ***областью действия*** соответствующей кванторной приставки. В дальнейшем выражение $F1 \equiv F2$, где F1 и F2 — формулы, будем понимать как сокращенное обозначение формулы $(F1 \Rightarrow F2) \wedge (F2 \Rightarrow F1)$.

Вхождение переменной *x* в формулу F называется *связанным,* если оно входит в кванторную приставку $\forall x$ или $\exists x$ или в область действия такой кванторной приставки. Вхождение переменной, не являющееся связанным, называется *свободным.* Формула, не содержащая свободных вхождений переменных, называется *замкнутой формулой* или *высказыванием.*

Индуктивный характер определения формулы дает возможность использовать в доказательствах *принцип индукции по построению формулы,* а также индукцией по построению формулы задавать функции, определенные на множестве всех формул.

Примеры:

Сигнатура языка формальной арифметики состоит из константы 0, обозначающей число 0, одноместного функционального символа s, обозначающего функцию s(x) = x + 1, двуместных функциональных символов + и *, обозначающих соответственно операции сложения и умножения, и двуместного предикатного символа =, обозначающего отношение равенства. Примерами термов этого языка могут быть выражения s0, ss0, sss0..., обозначающие числа 1,2,3.

Формулы языка арифметики могут выглядеть так:

$\exists z(z+x=y)$ (запись предложения «x меньше либо равно y»)

$\exists z(sz+x=y)$ (запись предложения «x меньше y»)

Сигнатура языка упорядоченных множеств состоит из двух двуместных предикатных символов: = (равенство) и <= (отношение порядка). Этот язык предназначен для записи утверждений об упорядоченных множествах: фиксированных непустых множествах, на котором задано бинарное отношение порядка. На этом языке аксиомы частично упорядоченного множества могут быть записаны в виде следующих формул:

$\forall x(x\leqslant x)$ (рефлексивность)

$\forall x\forall y(x\leqslant y\wedge y\leqslant x\Rightarrow x=y)$ (антисимметричность)

$\forall x\forall y\forall z(x\leqslant y\wedge y\leqslant z\Rightarrow x\leqslant z)$ (транзитивность)