

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А.Н. Туполева-КАИ»

Институт радиоэлектроники и телекоммуникаций

Кафедра радиоэлектронных и телекоммуникационных систем

при сотрудничестве с

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Fachgebiet "Kommunikationsnetze"

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
Моделирование систем с обобщенным частотным разделением
каналов на основе тензорной алгебры

Направление 110402 Инфокоммуникационные технологии и системы
связи

Магистерская программа Communication and signal processing

Допущено к защите в ГЭК 16.08.2016

Зав.кафедрой _____ д.т.н., проф. Г.И. Щербаков

Обучающийся _____ Б.М.Валеев

Руководитель _____ д.т.н., проф. Ю.К. Евдокимов

Казань 2016

Аннотация

Системы сотовой связи 5G как ожидается будут поддерживать множество сценариев работы таких как Интернет прикосновений, M2M соединения, Интернет вещей и обеспечивать скорости передачи порядка Гигабит в секунду по беспроводным протоколам связи. Физический уровень должен выполнять соответствующие требования к дизайну: высокая спектральная эффективность, поддерживать системы с множеством антенн, минимизировать внеполосные излучения и уменьшить потребление энергии.

Обобщенное частотное разделение каналов является новым основанным на ОЧРК подходом обеспечивающим все требования указанные выше. ОбЧРК использует перекрытие по времени между символами, что увеличивает плотность расположения символов и увеличивает количество переданных данных. Более того ОбЧРК обеспечивает гибкое перекрытие по времени подстраивая переменные коэффициенты. Таким образом можно найти компромисс между количеством ошибок и внеполосным излучением.

Abstract

5G cellular communication systems are expected to support many application scenarios such as tactile Internet, machine-type communications (MTC) and Internet of things (IoT) providing data rates of few Gigabits/ s wireless connectivity. The physical layer should fulfil the following design criteria, higher spectral efficiency - efficiently supports MIMO, Lower out-of-band (OOB) emissions, lower implementation complexity and Lower power consumptions.

Generalized frequency division modulation is new OFDM based approach that fulfills the 5G requirements at the cost of complexity. GFDM uses time overlapping for the symbols in one transmission block to increase density of the transmitted data. Moreover, GFDM offers flexible overlapping of the subcarriers. The frequency overlap slightly increases the Symbol Error rate (SER) of the system, but decrease out-of-band radiation. The system also can adjust the number of used subcarriers in case if frequency sharing is used. The system can work in the same frequency bands as their legal users and doesn't interfere with them. The transmission system is more complex because it introduce the inter symbol interference.

The GFDM modulation scheme can be represented using tensor algebra, more specifically the PARATUCK 2 (Parallel factors Tucker2) tensor model. Model allow us to introduce the time and frequency domain separately for the symbols in one transmission block. The PARATUCK2 model can be exploited in order to find more efficient ways to estimate the unknown symbols or channel estimation.

Оглавление

1. Введение	4
1.1. Обработка сигналов основанная на тензорной алгебре	5
1.1.1. PARATUCK2	8
1.2. Обобщенное частотное разделение каналов	10
1.2.1. Принцип конструирования низкочастотного фильтра	11
1.3. Итеративный алгоритм с мягким порогом	17
2. ОБЧРК в системе с одной передающей и одной приемной антенной	22
2.1. Модель системы	22
2.2. Канал с аддитивным белым гауссовым шумом	25
2.2.1. Приемник на основе псевдообратной матрицы	26
2.2.2. Приемник на основе согласованного фильтра	28
2.3. Поиск коэффициентов передачи поднесущих	29
2.3.1. Приближенный полу-слепой приемник	30
2.3.2. Полу-слепой приемник	35
2.4. Полу-слепой приемник для оценки канала с памятью	37
2.4.1. Приближенное устранение влияния канала	37
2.4.2. Полу-слепой приемник	40
2.5. Результаты моделирования	45
2.6. Заключение	56
3. Обобщенное частотное разделение каналов в системе с количеством антенн больше двух	60
3.1. Модель системы	60
3.2. Ортогонализация влияния канала без частотной избирательности	63

3.3. Поиск коэффициентов передачи поднесущих	66
3.3.1. Метод поиска основанный на ОВОВ модели	67
3.3.2. Алгоритм основанный на МВМВ модели	68
3.3.3. Алгоритм основанный на разложении	71
3.3.3.1. Анализ ранга вычислений	77
3.4. Полу-слепой приемник для системы с МВМВ	81
3.4.1. Модель системы для канала с памятью	83
3.4.1.1. Метод наименьших квадратов для оценки со- стояния канала	88
3.4.1.2. Полу-слепой приемник для оценки канала	88
3.4.1.3. Приближенный полу-слепой приемник на ос- нове ПМНК	89
3.4.1.4. Полу-слепой приемник на основе ПМНК с уменьшением собственной интерференции	90
3.4.1.5. Регуляризация полу-слепых приемников	91
3.4.1.6. Полу-слепой приемник на методе Ньютона	92
3.5. Результаты моделирования	94
3.6. Заключение	102
4. Заключение	105
Список литературы	108
Литература	108

Глава 1.

Введение

В настоящее время радио частоты становятся все более дорогим ресурсом из-за большого количества работающих радиотехнических систем. Разумные пути для выделения радио ресурсов становятся все более и более важными в беспроводных технологиях. Методы совместного использования спектра являются одним из таких путей[1]. Однако подобные технологии должны быть реализованы очень аккуратно, для того что удерживать интерференцию на низком уровне для других легально работающих систем[2][3]. Четвертое поколение мобильной связи было основано на ОЧРК модуляции. Однако ОЧРК не предоставляло необходимого уровня межсистемной интерференции и недостаточно эффективно использовало радио ресурсы. Данный недостаток был связан с ортогональностью между всеми поднесущими частотами [2] [4]. В следующем поколении систем мобильной связи был предложен более эффективный путь для использования частотного ресурса. Новая техника названа Обобщенное частотное разделение каналов. Она основана на неортогональном расположении поднесущих частот. Передатчик располагает поднесущие частоты таким образом чтобы спектры данных работали с некоторым перекрытием между собой. Система обеспечивает такое поведение при помощи фильтров с характеристикой "Корень приподнятого косинуса" вместо использования согласованного фильтра. Выбранный подход позволяет уменьшить излучение вне рабочей полосы частот. Однако интерференция внутри системы значительно уменьшает производительность выбранного метода модуляции. При этом взаимное пе-

рекрытие в системе является настраиваемым параметром и таким образом система может выбирать компромисс между влиянием на чужие системы и производительностью своей системы. Так же новая система передачи данных значительно увеличивает сложность организации приемника. Это связано с тем что приемник обязан найти символы как во временной так и в частотной области. Данная задача имеет достаточно большую вычислительную сложность и увеличит размеры и энергопотребление приемного устройства. Более того для того чтобы обеспечить тот же уровень ошибок на бит приемник должен быть значительно сложнее и использовать совершенные алгоритмы расчета. При этом данную систему можно описать при помощи тензорной алгебры для того чтобы выразить ее в более естественной форме.

1.1. Обработка сигналов основанная на тензорной алгебре

Тензор это много размерный массив данных. Другими словами N мерный тензор является матрицей у которой существуют элементы по N разным измерениям (1.1)[5]. Тензоры первого и второго порядка являются векторами и матрицами соответственно. Тензоры которые имеют количество измерений более двух считаются тензорами высоких порядков[6].

$$\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \cdots I_N} \quad (1.1)$$

Порядок тензора это число измерений по которым тензор имеет различные элементы. В данной работе скалярные значения обозначены как прописные символы например a . Векторы обозначены как прописные символы полужирного шрифта например \mathbf{a} . Матрицы записаны как заглавные полужирные символы например \mathbf{A} . Тензоры высокого порядка обозначены как заглавные символы каллиграфического шрифта например \mathcal{A} . Тензоры позволяют описать данные в более естественной форме в случае если количество их естественных измерений больше двух. Описание данных при помощи тензоров позволяет учитывать многие зависимости между различными

размерностями в данных. Развертка N -ого порядка является соединением тензора с фиксированной точкой одной размерности(1.2)(1.3)(1.4)(1.5)[7]. При этом для каждого столбца все размерности за исключением одного являются фиксированными. Развертка N -ого порядка имеет то же количество строк сколько имеет элементов по пространству v . Запись по столбцам может отличаться по порядку. Отличают запись по Матлаб и запись по Латауеру. Запись по Матлаб идет начиная от первого измерения к концу[8], в то время как по Латауеру от последнего измерения к первому. В данной работе используется запись по Матлаб во всех вычислениях, если явно не указано иное.

$$\mathcal{X}_{:, :, 1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{X}_{:, :, 2} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\mathcal{X}_{[1]} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\mathcal{X}_{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\mathcal{X}_{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

N -мерный тензор имеет ранг один если он может быть представлен как внешнее произведение N векторов[5]. Разложение тензоров на тензоры ранга один было предложено Хичкоком в 1927 г[9]. Он описал тензор высшего порядка как сумму тензоров ранга один. Тензор может быть разложен на некоторое количество тензоров ранга один. Такое разложение называют "Каноническое разложение"или "Параллельная факторизация"(1.6)(1.7). Каноническое разложение раскладывает тензор на сумму тензоров ранга

един. Данная сумма может быть представлена в иной форме.

$$\mathcal{X} = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r \quad (1.6)$$

$$\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3} \mathbf{a}_r \in \mathbb{C}^{I_1 \times 1} \mathbf{b}_r \in \mathbb{C}^{I_2 \times 1} \mathbf{c}_r \in \mathbb{C}^{I_3 \times 1} \quad (1.7)$$

Векторы соответствующие тому же пространству при тензорах ранга один могут быть собраны в одну матрицу для каждой из размерностей(1.8). Такая запись называется матричная факторизация. При помощи записанных матриц развертки каждого из порядков можно записать в значительно более простой форме(1.10)(1.11)(1.12).

$$\mathcal{X} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{C} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_R \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$\mathcal{X}_{[1]} = \mathbf{A}(\mathbf{C} \diamond \mathbf{B})^T \quad (1.10)$$

$$\mathcal{X}_{[2]} = \mathbf{B}(\mathbf{C} \diamond \mathbf{A})^T \quad (1.11)$$

$$\mathcal{X}_{[3]} = \mathbf{C}(\mathbf{A} \diamond \mathbf{B})^T \quad (1.12)$$

Существует много путей разложить тензор, один из самых распространенных алгоритмов является метод ПМНК. Алгоритм описан ниже[10].

- Установка стартовых матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ как случайных комплексных матриц фиксированного размера
- Решение СЛАУ с данными матрицами \mathbf{B}, \mathbf{C} и обновлением матрицы \mathbf{A}

- Решение СЛАУ с данными матрицами \mathbf{A} , \mathbf{C} и обновлением матрицы \mathbf{B}
- Решение СЛАУ с данными матрицами \mathbf{A} , \mathbf{B} и обновлением матрицы \mathbf{C}
- Проверка уменьшения значения функции невязки. В случае если уменьшение больше порога, повторить с алгоритм с пункта 2.

1.1.1. PARATUCK2

Модель *PARATUCK2*[11] является комбинацией между *PARAFAC*[5] и *TUCKER3*[5] моделями разложения тензоров. Модель позволяет разложить один трехмерный тензор на 5 различных матриц. В общем случае модель может быть записана в скалярной форме при помощи следующего выражения(1.13) [12].

$$x_{i_1, i_2, t} = \sum_{f=1}^F \sum_{t_s=1}^{T_s} a_{i_1, f} c_{t, f}^{[a]} s_{f, t_s} c_{f, t_s}^{[b]} b_{i_2, t_s} \quad (1.13)$$

$$\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times T} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times F} \quad \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{I_2 \times T_s}$$

$$\mathbf{C}^{[a]} \in \mathbb{C}^{T \times F} \quad \mathbf{C}^{[b]} \in \mathbb{C}^{T \times T_s}$$

В указанном выше выражении $x_{i_1, i_2, t}$ является (i_1, i_2, t) элементом тензора $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times T}$. Матрица \mathbf{S} является матрицей-основой для *PARATUCK2* модели. Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} обеспечивают связь между соответствующей размерностью тензора \mathcal{X} и матрицы-основы \mathbf{S} [11]. Матрицы $\mathbf{C}^{[a]}$ и $\mathbf{C}^{[b]}$ являются взвешивающими коэффициентами для матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} в каждом из слоев третьей размерности тензора \mathcal{X} . Модель может быть записана в двух формах: послойная тензорная нотация(1.14) и векторизованная форма для тензора \mathcal{X} . В послойной форме записи тензор \mathcal{X} записывается отдельным выражением для каждого слоя третьей размерности. Подобная запись позволяет описать модель при помощи линейной алгебры с минимальными из-

менениями в выражении для различных слоев. Матрицы $\mathbf{C}^{[a]}$ и $\mathbf{C}^{[b]}$ в таком случае записаны как тензор с элементами на главной диагонали между первым и вторым измерением. В таком случае послойная запись для модели *PARATUCK2* может быть выражена как послойное произведение между матрицей \mathbf{A} и \mathbf{B} с коэффициентами для соответствующих строк и столбцов для матрицы $\mathbf{C}^{[a]}$ и $\mathbf{C}^{[b]}$ для соответствующего слоя третьего измерения[11].

$$\mathbf{X}_{::,i} = \mathbf{A} \cdot \text{diag}(\mathbf{C}^{[a]}_{:,i}) \cdot \mathbf{S} \cdot \text{diag}(\mathbf{C}^{[b]}_{:,i}) \cdot \mathbf{B} \quad (1.14)$$

Векторизованная форма тензора \mathcal{X} является второй формой для записи модели. Возможно использовать данную запись в трех формах[5], в виде произведения матрицы с векторизованной матрицей \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{S} . Таким образом можно найти каждую из матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{S} используя векторизованную модель тензора \mathcal{X} и генерирующую матрицу для каждой из форм записи. Однако важно заметить, что векторизованная модель требует знания размерностей тензора \mathcal{X} так как вектор не позволяет узнать соответствующие размерности[9].

$$\text{vec}(\mathcal{X}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}^{[a]\mathbf{T}} \diamond \mathbf{C}^{[b]\mathbf{T}})^T \diamond (\text{vec}(\mathbf{A}_{1,:}) \otimes \mathbf{B}) \\ (\mathbf{C}^{[a]\mathbf{T}} \diamond \mathbf{C}^{[b]\mathbf{T}})^T \diamond (\text{vec}(\mathbf{A}_{2,:}) \otimes \mathbf{B}) \\ \vdots \\ (\mathbf{C}^{[a]\mathbf{T}} \diamond \mathbf{C}^{[b]\mathbf{T}})^T \diamond (\text{vec}(\mathbf{A}_{I_1,:}) \otimes \mathbf{B}) \end{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{S}) \quad (1.15)$$

$$\text{vec}(\mathcal{X}) = (\mathbf{I} \otimes (((\mathbf{B} \diamond \mathbf{C}^{[b]}) \cdot \mathbf{S}^T) \odot \mathbf{C}^{[a]})) \text{vec}(\mathbf{A}) \quad (1.16)$$

$$\text{vec}(\mathcal{X}) = (\mathbf{I} \otimes (((\mathbf{A} \diamond \mathbf{C}^{[a]}) \cdot \mathbf{S}) \odot \mathbf{C}^{[b]})) \text{vec}(\mathbf{B}) \quad (1.17)$$

Векторизованная модель записи может быть упрощена в случае если матрица \mathbf{A} и матрица \mathbf{B} являются векторами, а не матрицами. В данном случае модель выраженная при помощи произведений Хатри-Рао и Адамара упрощаются до значительно меньшего количества операций, и произведение Кронекера исключается. Упрощенная форма записывается для

всех трех матриц в следующей форме.

$$vec(\mathcal{X})^T = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \quad (1.18)$$

$$vec(\mathcal{X})^T = \mathbf{b}^T \cdot (\mathbf{C}^{[b]T} \odot (\mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{C}^{[a]} \diamond \mathbf{a})^T)) \quad (1.19)$$

$$vec(\mathcal{X}) = (((\mathbf{a} \diamond \mathbf{C}^{[a]}) \cdot \mathbf{S}) \odot \mathbf{C}^{[b]})\mathbf{b}) \quad (1.20)$$

$$vec(\mathcal{X}) = (((\mathbf{b}^T \diamond \mathbf{C}^{[b]}) \cdot \mathbf{S}^T) \odot \mathbf{C}^{[a]})\mathbf{a}^T) \quad (1.21)$$

$$\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{1 \times 1 \times T} \mathbf{a} \in \mathbb{C}^{1 \times F} \mathbf{b} \in \mathbb{C}^{T_s \times 1}$$

$$\mathbf{C}^{[a]} \in \mathbb{C}^{T \times F} \mathbf{C}^{[b]} \in \mathbb{C}^{T \times T_s} \mathbf{S} \in \mathbb{C}^{F \times T_s}$$

Модель будет использована для описания выраженной ниже системы модуляции ОбЧРК. Данная модель позволяет описать систему передачи данных в достаточно простой форме.

1.2. Обобщенное частотное разделение каналов

Основной принцип работы ОбЧРК является организация блока передачи в котором используется несколько поднесущих и несколько символов на каждой из поднесущих. При этом символы на поднесущих проходят низкочастотную фильтрацию для уменьшения межканальной интерференции. В системах с обобщенное частотное разделение каналов используется два основных вида фильтров во временной области: фильтр с характеристикой "Приподнятый косинус" либо фильтр с характеристикой корень приподнятого косинуса. В системе ортогонального частотного разделения каналов используется согласованный фильтр, обеспечивающий ортогональность различных поднесущих. В системах передачи данных с ОбЧРК под-

несущие не ортогональны друг другу. По этой причине возникает наложение различных поднесущих друг на друга, что увеличивает меж символную и меж канальную интерференцию. Однако подобный подход позволяет плотнее располагать поднесущие между собой и эффективнее использовать спектр.

1.2.1. Принцип конструирования низкочастотного фильтра

Как было сказано выше в ОбЧРК используется два основных вида фильтров во временной области: фильтр с характеристикой "Приподнятый косинус" либо фильтр с характеристикой корень приподнятого косинуса. Оба фильтра имеют одну переменную значение которой можно изменять для изменения перекрытия в частотной области между каналами α . При этом значению переменной $\alpha = 0$ соответствует минимальное перекрытие между соседними поднесущими, в то время как при значении $\alpha = 1$ перекрытие является максимальным. При увеличении α значительно увеличивается меж-символьная и меж-канальная интерференция. В системе ОбЧРК происходит усложнение структуры приемника по сравнению с ОЧРК. Приемник должен обеспечивать прием даже в условиях меж-канальной интерференции и иметь механизмы для ее устранения. Фильтр с характеристикой "Приподнятый косинус" является усовершенствованием согласованного фильтра, его характеристики широко освещены в литературе. Выражение для импульсной характеристики представлено в (1.22) и взято из источника [13]. В выражении переменная T является длительностью одного символа в шкале временных отсчетов, α как и было описано является переменной. Импульсная характеристика для различных величин α представлена на рис. Соответствующая частотная характеристика для величин α представлена на рис.

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\pi \operatorname{sinc}(\frac{1}{2\alpha})}{4} & t = \pm \frac{T}{2\alpha} \\ \operatorname{sinc}(1/T) \frac{\cos(\pi \alpha t/T)}{1 - (2\alpha t/T)^2} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.22)$$

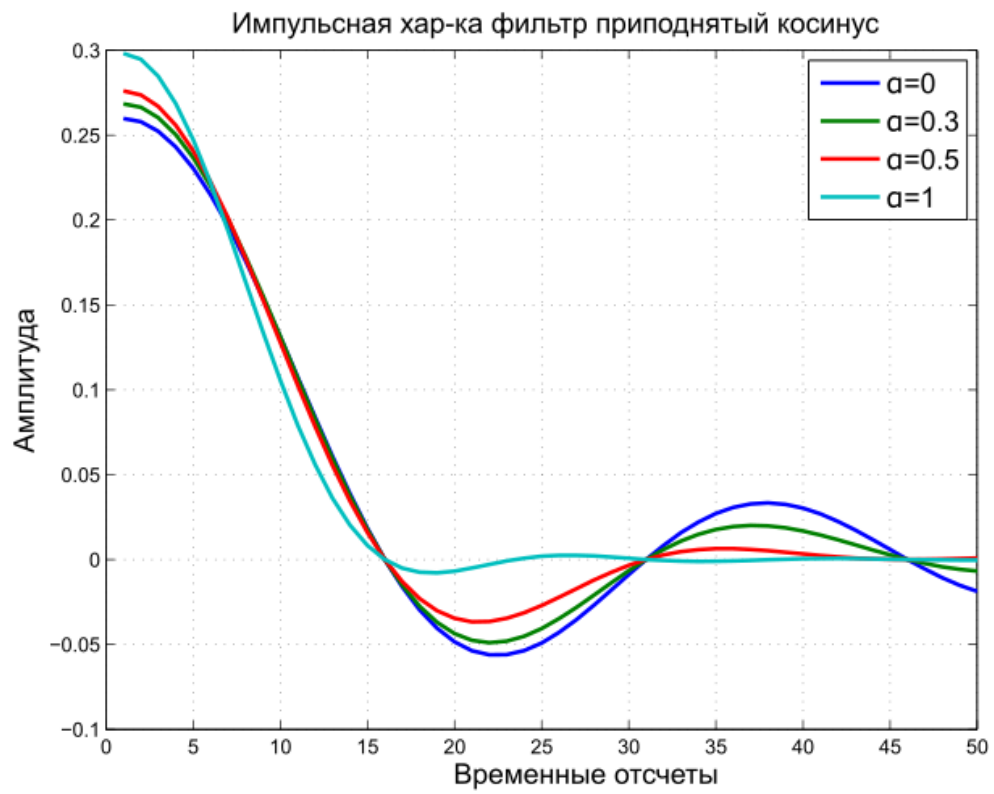


Рис. 1.1. Импульсная характеристика фильтра типа Приподнятый косинус в зависимости от коэффициента α

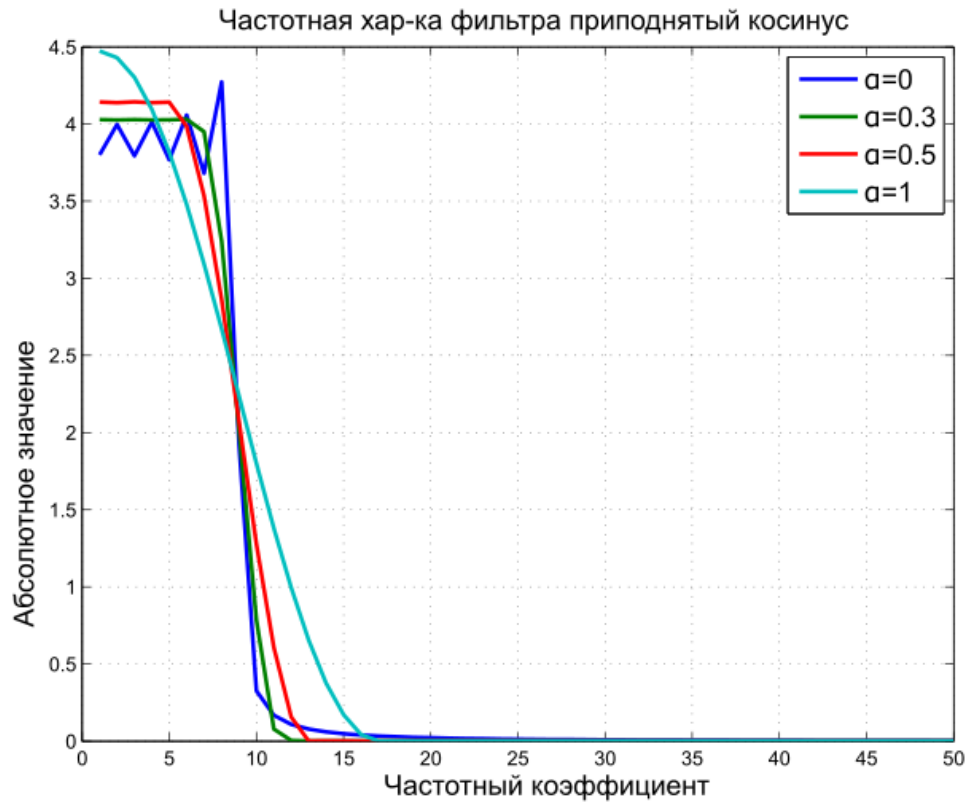


Рис. 1.2. Частотная характеристика фильтра Приподнятый косинус в зависимости от коэффициента α

Фильтр с характеристикой корень из приподнятого косинуса является дополнением к фильтру с характеристикой приподнятый косинус и при применении на приемнике и передатчике одновременно обеспечивает аналогичный уровень межсимвольной интерференции как в согласованном фильтре. Описание и теоретическое обоснование использования фильтра описано в [14] [15] и [16]. Выражение для импульсной характеристики представлено в (1.23) и взято из источника [14]. В выражении переменная T является длительностью одного символа в шкале временных отсчетов, α как и было описано является переменной. Импульсная характеристика для различных величин α представлена на рис. Соответствующая частотная характеристика для величин α представлена на рис (1.3).

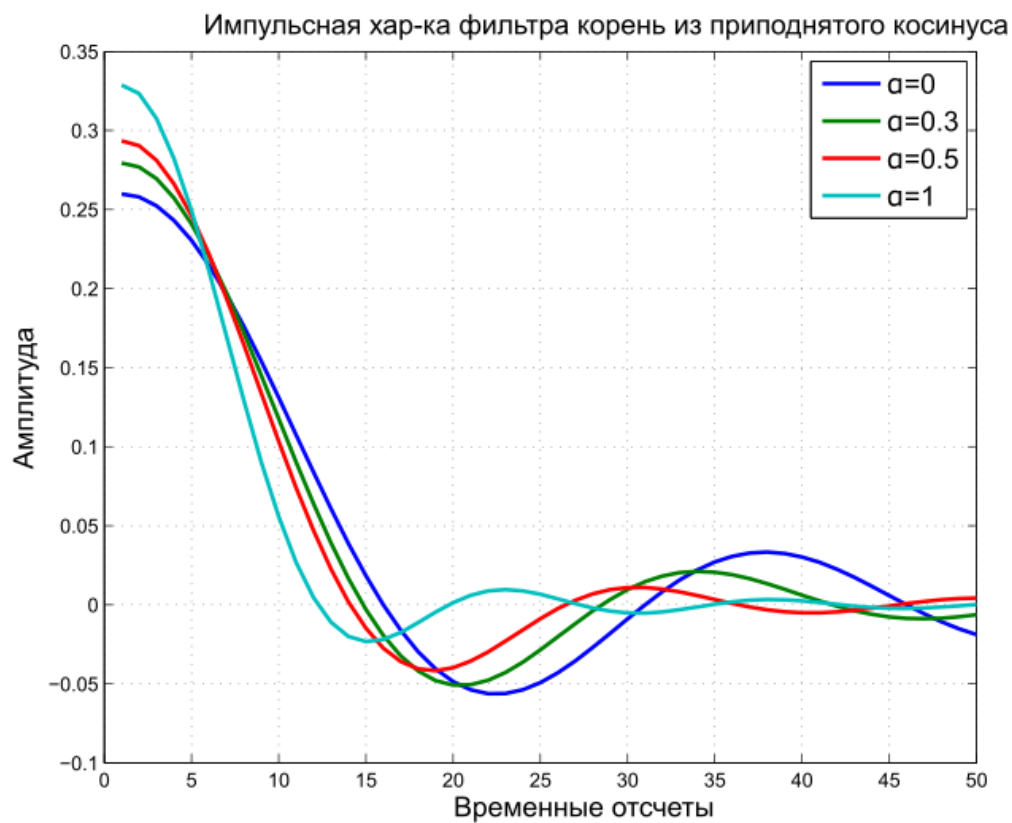


Рис. 1.3. Импульсная характеристика фильтра типа корень из Приподнятого косинуса в зависимости от коэффициента α

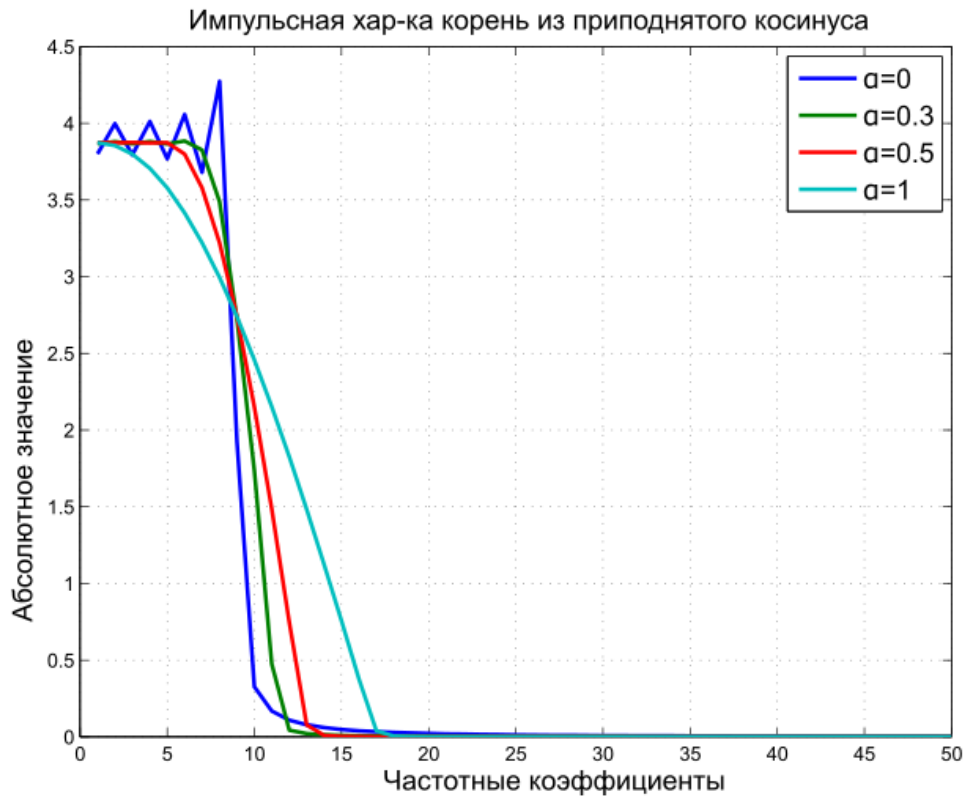


Рис. 1.4. Частотная характеристика фильтра корень из Приподнятого косинуса в зависимости от коэффициента α

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1-\alpha+4\alpha/\pi}{\sqrt{T}} & \text{if } t = 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2T}} \left[\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right) + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right) \right] & \text{if } t = \pm T/4\alpha \\ \frac{1}{\frac{t\pi}{\sqrt{T}}(1-\frac{4\alpha t}{T})^2} \left(\sin\left(\frac{\pi t(1-\alpha)}{T}\right) + \frac{4\alpha t}{T} \cos\left(\frac{\pi t(1+\alpha)}{T}\right) \right) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.23)$$

Сравнение импульсных характеристик для согласованного фильтра, фильтра "Приподнятый косинус" и фильтра корень из приподнятого косинуса представлено на рис. Из рис.(1.5) видно, что в точке где временной отсчет равен длительности импульса для согласованного фильтра амплитуда импульсной характеристики равна нулю, в отличие от других фильтров. Сравнение частотных характеристик для согласованного фильтра, фильтра "Приподнятый косинус" и фильтра корень из приподнятого косинуса представлено на рис. Из рис. видно, что для фильтра с характеристикой

корень из приподнятого косинуса перекрытие по частоте является наибольшим в отличие от согласованного фильтра и фильтра с приподнятым косинусом.

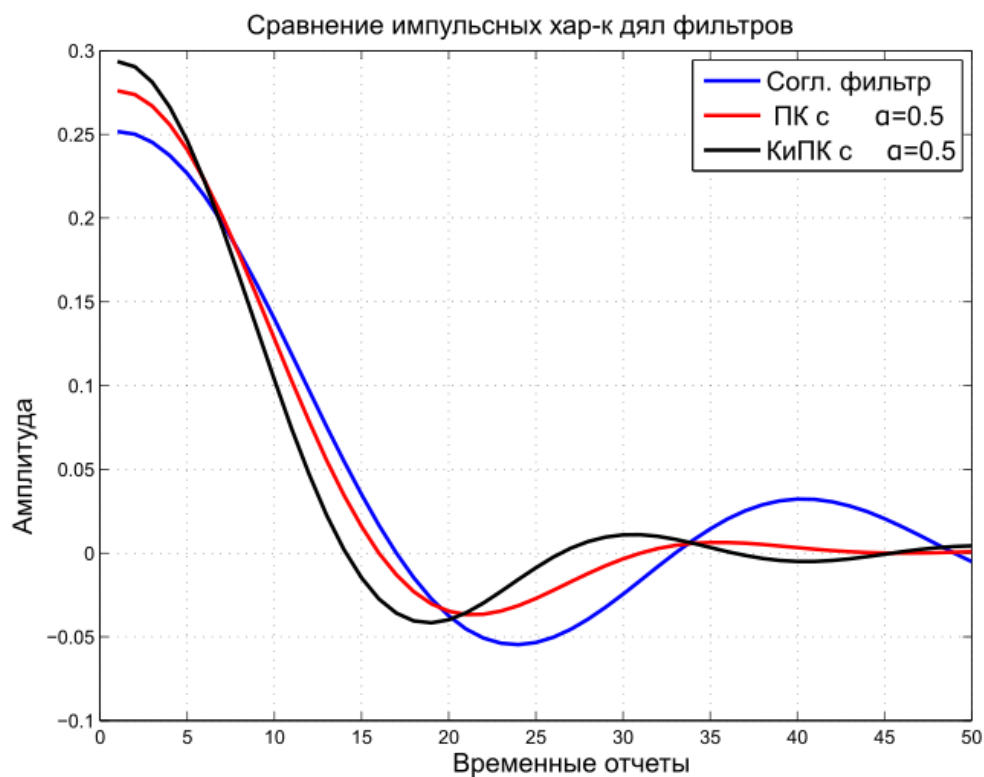


Рис. 1.5. Сравнение импульсных характеристик различных фильтров

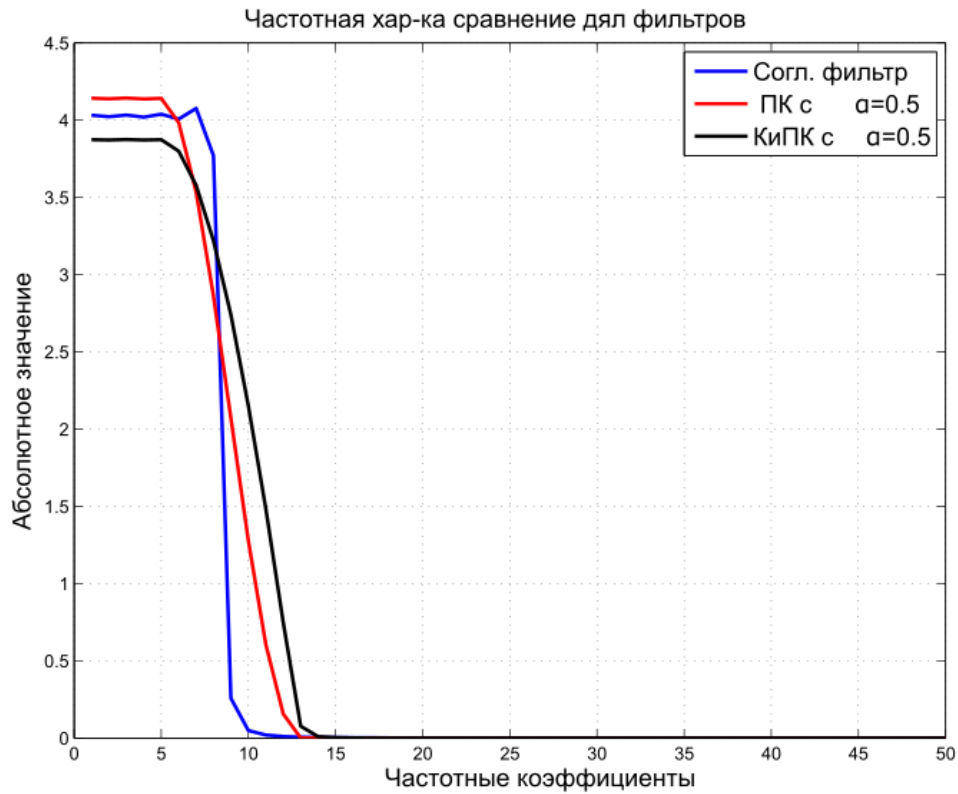


Рис. 1.6. С

1.3. Итеративный алгоритм с мягким порогом

Одна из наиболее часто решаемых задач является задача деконволюции. В матричной форме данная задача записывается как решение системы линейных алгебраических уравнений. Однако основной трудностью в решении СЛАУ является число обусловленности генерирующей матрицы [10]. Увеличение числа обусловленности матрицы уменьшает стабильность решения СЛАУ. При этом число обусловленности является мультипликативным коэффициентом при погрешности вычисления [17]. В классической постановке задача представлена на выражении [16] и может быть расписана следующим образом (1.24) [18].

$$R(x) = \| \mathbf{y} - \mathbf{Ax} \|^2_2 \quad (1.24)$$

$$R(x) = (\mathbf{y} - \mathbf{Ax})^H(\mathbf{y} - \mathbf{Ax}) \quad (1.25)$$

В большинстве случаев для решения данной задачи используется обратная или псевдообратная матрица. В статье [19] представлен итеративный алгоритм обеспечивающий сходимость к решению. При этом алгоритм гарантирует уменьшение функции невязки на каждой итерации. Основой и используемого алгоритма является "максимизация-минимизация". Подход позволяет заменить одну сложную задачу большим количеством простых задач. Каждая оптимизационная задача обеспечивает решение которое будет находится ближе к решению задачи. На каждой итерации к исходной проблеме добавляется не отрицательное дополнительное слагаемое. Слагаемое должно быть таким, чтобы решаемая задача на данной итерации стала проще [12]. Так же есть некоторые требования для дополнительного слагаемого $J_{add}(\mathbf{x})$. Функция $J_{add}(\mathbf{x})$ должна удовлетворять выражению $J_{add}(\mathbf{x}) \geq R(\mathbf{x})$ для всех \mathbf{x} и более того в точке \mathbf{x}_k соответствующей текущему решению должно выполняться условие $J_{add}(\mathbf{x}_k) = R(\mathbf{x}_k)$. Функциям $J_{add}(\mathbf{x})$ может быть различной на каждой итерации и должна обеспечивать простую минимизацию. Описанный ниже метод удовлетворяющий всем условиям назван "итерация Ланвебера" [20]. В оригинальной форме алгоритм написан для задач с действительными числами однако его можно расширить и для комплексных чисел. Определим 1 как функция записанную в (1.27). В таком случае оптимизируемая функция будет записана в следующей форме $R_1(\mathbf{x})$ [21] где α является коэффициентом для которого должно выполняться условие (1.29). Перепишем выражение раскрыв скобки и упростим его.

$$\alpha \geq \max(\text{eig}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})) \quad (1.26)$$

$$R(\mathbf{x}_{k+1}) < R(\mathbf{x}_k) \quad (1.27)$$

$$R_1(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) + J_{add}(\mathbf{x}) \quad (1.28)$$

$$R_1(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|_2^2 + J_{add}(\mathbf{x}) \quad (1.29)$$

$$J_{add}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \quad (1.30)$$

$$R_1(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|_2^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^H (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}^H \mathbf{A}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \quad (1.31)$$

$$R_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{Ax})^H (\mathbf{y} - \mathbf{Ax}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^H (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}^H \mathbf{A}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \quad (1.32)$$

$$\alpha \geq \max(\text{eig}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})) \quad (1.33)$$

$$R_1(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathbf{Ax} - \mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{y} + \mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{Ax} \quad (1.34)$$

$$+ \mathbf{x}_k^H (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}^H \mathbf{A}) \mathbf{x}_k + \mathbf{x}^H (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}^H \mathbf{A}) \mathbf{x}$$

$$- \mathbf{x}_k^H (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}^H \mathbf{A}) \mathbf{x} - \mathbf{x}^H (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}^H \mathbf{A}) \mathbf{x}_k$$

Описанная функция $R_1(\mathbf{x})$ является вогнутой. Вогнутая функция имеет производную равную нулю в одной точке и эта точка является точкой минимума. Таким образом для нахождения точки минимума необходимо приравнять производную оптимизируемой функции к нулю и найти решение полученного уравнения. Поскольку функция является комплексной, она не аналитичная и от нее не существует аналитической производной. Для нахождения производной мы использовали исчисление Виртингера[19] и нашли производную по комплексно-сопряженной к искомой величине. В дальнейшем при упрощении выражения мы получаем в явном виде формулу для перехода от итерации к итерации (1.35) позволяющую в конечном итоге привести производную оптимизируемой функции к нулю. Описанный алгоритм позволяет достичь линейной сходимости переменной \mathbf{x}_k , а так же

уменьшить вычислительные затраты на работу алгоритма[20].

$$\frac{\delta R_1(x)}{\delta x^*} = -\mathbf{A}^H \mathbf{y} + \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} + (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}^H \mathbf{A}) \mathbf{x} - (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}^H \mathbf{A}) \mathbf{x}_k \quad (1.35)$$

$$\frac{\delta R_1(x)}{\delta x^*} = -\mathbf{A}^H \mathbf{y} + \alpha \mathbf{x} - \alpha \mathbf{x}_k + \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x}_k = 0 \quad (1.36)$$

$$\mathbf{A}^H (\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_k) + \alpha \mathbf{x}_k = \alpha \mathbf{x} \quad (1.37)$$

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{A}^H}{\alpha} (\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_k) + \mathbf{x}_k \quad (1.38)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}^H}{\alpha} (\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_k) + \mathbf{x}_k \quad (1.39)$$

К описанному алгоритму существует усовершенствование позволяющее достичь квадратичной сходимости без значительного увеличения вычислительной стоимости. Кроме того модификация описанного алгоритма позволяет решать задачу сжатого считывания путем использования мягкого порога около нулевого значения[21].

- Установить начальную точку \mathbf{x}_0 и установить промежуточные переменные $t_0 = 1, t_1 = 1$
- Установить $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_0$
- Обновить значение t_1 при помощи выражения (1.40)
- Найти решение выражение (1.38) для итерации
- Установить $t_0 = t_1$
- Обновить промежуточную переменную при помощи выражения (1.41)

- Проверить, если величина шага на итерации меньше чем заданный порог. Если шаг больше, повторить операция с шага 3

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_1}}{2} \quad (1.40)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}^H}{\alpha}(\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k) + \mathbf{x}_k + \frac{t_0 - 1}{t_1} \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) \quad (1.41)$$

Глава 2.

ОбЧРК в системе с одной передающей и одной приемной антенной

2.1. Модель системы

В данном разделе будет рассмотрена модель системы ОбЧРК. Была рассмотрена система передачи с воздействием канала. Канал в физическом смысле полагается как компоненты многолучевого распространения между передатчиком и приемником[1]. Так же канал может быть описан как свертка между переданным сигналом и некоторой импульсной характеристикой. В таком случае поступивший на вход приемника сигнал может быть описан следующим образом (2.1), где y является вектором поступивших на вход приемника данных, x это вектор переданных с выхода передатчика данных и H это матрица свертки между входными данными и некоторой импульсной характеристикой. При этом переданный с выхода передатчика сигнал может быть связан с передаваемыми символами при помощи модели *PARATUCK2* и ее двумя формами записи в векторизированной форме (2.2)(2.4)[22].

$$y = Hx \tag{2.1}$$

$$\mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{T \times 1} \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{T \times T}$$

$$\mathbf{x} = \mathcal{X}_{[3]} = \text{vec}(\mathcal{X}) = \mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\mathbf{S}) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{\Omega}_1 \in \mathbb{C}^{T \times T_s \cdot F}$$

$$\mathbf{\Omega}_1 = (\mathbf{C}^{[b]T} \diamond \mathbf{C}^{[a]T})^T \diamond (\mathbf{b}^T \otimes \mathbf{a}) \quad (2.3)$$

$$\mathcal{X}_{:,i} = \mathbf{a} \cdot \text{diag}(\mathbf{C}_{:,i}^{[a]}) \cdot \mathbf{S} \cdot \text{diag}(\mathbf{C}_{:,i}^{[b]}) \cdot \mathbf{b} \quad (2.4)$$

Переданные данные могут быть сгенерированы при помощи модели *PARATUCK2* третьего порядка в векторизованной форме или развертке третьего измерения. В таком случае матрица символов передаваемых при помощи системы передачи ОбЧРК будет записана как матрица основа \mathbf{S} в модели *PARATUCK2*[5](2.5)(2.6). Таким образом можно без изменений внести все символы в систему передачи.

Каждый столбец в $\mathbf{C}^{[a]}$ матрице соответствует определенной поднесущей частоте для модуляции. Таким образом матрица $\mathbf{C}^{[a]}$ конструируется как значения поднесущих частот в каждом из столбцов. Таким образом матрица $\mathbf{C}^{[a]}$ может быть записана следующим образом (2.1).

$$c_{t,f}^{[a]} = e^{-j2\pi \cdot (t \cdot f) / T_s} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{C}^{[a]} = \begin{bmatrix} e^{-j2\pi \cdot 0} & e^{-j2\pi \cdot 0} & \dots & e^{-j2\pi \cdot 0} \\ e^{-j2\pi \cdot 0} & e^{-j2\pi \cdot 1/T_s} & \dots & e^{-j2\pi \cdot F/T_s} \\ e^{-j2\pi \cdot 0} & e^{-j2\pi \cdot 2/T_s} & \dots & e^{-j2\pi \cdot 2F/T_s} \\ \vdots & & & \\ e^{-j2\pi \cdot 0} & e^{-j2\pi \cdot T/T_s} & \dots & e^{-j2\pi \cdot T \cdot F/T_s} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Каждый столбец матрицы $\mathbf{C}^{[b]}$ определяет функцию фильтрации во вре-

менной области для заданного блока данных. Столбцы являются сдвинутыми версиями первого столбца. Сдвиг между соседними столбцами равен $T/T_s(2.8)$. Элементы в столбце определяются по следующему выражению (2.7)[11]. При конструировании матрицы $\mathbf{C}^{[b]}$ задается коэффициент перекрытия α .

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1-\alpha+4\alpha/\pi}{\sqrt{T}} & if \quad t = 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2T}}[(1 + \frac{2}{\pi})\sin(\frac{\pi}{4\alpha}) + (1 - \frac{2}{\pi})\cos(\frac{\pi}{4\alpha})] & if \quad t = \pm T/4\alpha \\ \frac{1}{\frac{t\pi}{\sqrt{T}}(1-\frac{4*\alpha t}{T})^2}(\sin(\frac{\pi t(1-\alpha)}{T}) + \frac{4\alpha t}{T}\cos(\frac{\pi t(1+\alpha)}{T})) & otherwise \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{C}^{[b]} = [\mathbf{u}_0 \quad \mathbf{u}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{T_s}] \quad (2.8)$$

Матрица \mathbf{B} при моделировании ОБЧРК становится столбцом \mathbf{b} и в физическом смысле соответствует изменению по амплитуде между символами на различных временных позициях[2]. Поскольку мы рассматриваем линейную независимую от времени систему то все значения в столбце равны единице. Кроме того таким образом можно выразить различные взвешивающие коэффициенты позволяющие не передавать символы по определенным временным позициям(2.9).

$$\mathbf{b} = \mathbf{1}_{T_s \times 1} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{T_s \times 1} \quad (2.10)$$

Матрица \mathbf{A} при моделировании GFDM становится строкой \mathbf{a} и в физическом смысле соответствует коэффициентам передачи для каждой поднесущей в течении одного блока передачи. В данной работе будет рассмотрена система где значения \mathbf{a} могут быть структурированы двумя образами(2.11). В первом случае строка \mathbf{a} имеет все единичные значения. Во втором случае величины в строке \mathbf{a} могут быть распределены случайным образом между значениями 1 и 0. Так же при помощи строки \mathbf{a} может быть аппроксими-

ровано влияние канала. Однако точность такой аппроксимации мала.

$$\mathbf{a} = \mathbf{1}_{1 \times F} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{1 \times F} \quad (2.12)$$

Определив указанным образом соответствующие матрицы, сигнал на выходе передатчика может быть определен при помощи одного из последующих выражений (2.14) (2.15). При этом модель системы ОБЧРК может быть совпадает с тензорной моделью *PARATUCK2*.

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{x} = ((\mathbf{a} \diamond \mathbf{C}^{[a]})^T \cdot \mathbf{S}) \odot \mathbf{C}^{[b]} \mathbf{b} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{x} = ((\mathbf{b}^T \diamond \mathbf{C}^{[b]})^T \cdot \mathbf{S}^T) \odot \mathbf{C}^{[a]T} \mathbf{a}^T \quad (2.15)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{T \times 1} \mathbf{a} \in \mathbb{C}^{1 \times F} \mathbf{C}^{[a]} \in \mathbb{C}^{T \times F}$$

$$\mathbf{C}^{[b]} \in \mathbb{C}^{T \times T_s} \mathbf{b} \in \mathbb{C}^{T_s \times 1} \mathbf{S} \in \mathbb{C}^{F \times T_s}$$

2.2. Канал с аддитивным белым гауссовым шумом

В данной секции будет рассмотрена модель системы в которой канал отсутствует, либо его влияние устранено. В таком случае матрица H из матрицы свертки преобразуется в единичную матрицу [23], а модель будет описана при помощи следующего выражения (2.16). Для подобного рода систем существует два классических решения.

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\mathbf{S}) + \mathbf{n} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{\Omega}_1 \in \mathbb{C}^{T \times T_s \cdot F}$$

$$\mathbf{\Omega}_1 = (\mathbf{C}^{[b]T} \diamond \mathbf{C}^{[a]T})^T \diamond (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{y}, \mathbf{n} \in \mathbb{C}^{1 \times T} \mathbf{S} \in \mathbb{C}^{F \times T_s}$$

$$\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{1 \times F} \mathbf{C}^{[a]} \in \mathbb{C}^{T \times F} \mathbf{C}^{[b]} \in \mathbb{C}^{T \times T_s} \mathbf{b} \in \mathbb{C}^{T_s \times 1}$$

2.2.1. Приемник на основе псевдообратной матрицы

Первое решение заключается оптимального решения с точки зрения второй нормы[24]. Для начала введем матрицу $\mathbf{\Omega}_1$ которая будет выражать взаимосвязь между векторизированной матрицей символов и сигналом на выходе передатчика(2.18). Данное выражение может быть выведено из (2.20). Приемник может найти наилучшие значения переданных данных при помощи решения задачи оптимизации[12]. В таком случае может быть составлена следующая функция невязки (2.21). Поскольку используется вторая норма, решение данной задачи существует и оно единственно. В случае если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} имеют структуру со всеми единицами мы можем ими пренебречь. Тогда матрица $\mathbf{\Omega}$ будет записана как произведение Хатри-Рао между матрицами $\mathbf{C}^{[a]}$ и $\mathbf{C}^{[b]}$ (2.21).

$$vec(\mathbf{x}) = \mathbf{\Omega}_1 \cdot vec(\hat{\mathbf{S}}) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{\Omega}_1 \in \mathbb{C}^{T \times T_s \cdot F}$$

$$vec(\hat{\mathbf{S}}) \in \mathbb{C}^{F \cdot T_s \times 1}$$

$$\mathbf{\Omega}_1 = (\mathbf{C}^{[b]T} \diamond \mathbf{C}^{[a]T})^T \diamond (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \quad (2.19)$$

$$\mathbf{\Omega}_1 = (\mathbf{C}^{[b]T} \diamond \mathbf{C}^{[a]T})^T \quad (2.20)$$

$$r_1 = \mathbf{y} - \mathbf{\Omega}_1 \cdot \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}) \quad (2.21)$$

Для того чтобы найти оптимальное решение возьмем первую производную от оптимизируемой функции(2.22)[20]. Поскольку она комплексна и не аналитична, используем исчисление Виртингера(2.23), для того чтобы взять производную по комплексно сопряженной от переменной. Приравняем первую производную нулю и решим задачу используя псевдообратную матрицу(2.27)[20].

$$\min_{\text{vec}(\hat{\mathbf{S}})} r_1^H \cdot r_1 = \min_{\text{vec}(\hat{\mathbf{S}})} ||r_1||^2 \quad (2.22)$$

$$r_1^H \cdot r_1 = (\text{vec}(\mathbf{y}) - \mathbf{\Omega}_1 \cdot \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}))^H \cdot (\text{vec}(\mathbf{y}) - \mathbf{\Omega}_1 \cdot \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})) \quad (2.23)$$

$$r_1^H \cdot r_1 = ||\text{vec}(\mathbf{y})||^2 + \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})^H \mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})$$

$$- \text{vec}(\mathbf{y})^H \mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}) - \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})^H \mathbf{\Omega}_1^H \text{vec}(\mathbf{y}) \quad (2.24)$$

$$\frac{\delta r_1^H \cdot r_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*)} = \mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}) - \mathbf{\Omega}_1^H \text{vec}(\mathbf{y}) = 0 \quad (2.25)$$

$$\mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}) = \mathbf{\Omega}_1^H \text{vec}(\mathbf{y}) \quad (2.26)$$

$$\text{vec}(\hat{\mathbf{S}})_{opt} = (\mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{\Omega}_1)^{-1} \mathbf{\Omega}_1^H \text{vec}(\mathbf{y}) \quad (2.27)$$

2.2.2. Приемник на основе согласованного фильтра

Существует другое решение задачи обеспечивающее более стабильное решение. Псевдообратная матрица имеет значительный недостаток в случае если матрица для которой осуществляется инверсия имеет плохое число обусловленности[25](2.28). В таком случае если в принятых данных присутствует белый гауссов шум, его компоненты будут увеличены по мощности, что приведет к уменьшению соотношения SNR . Это можно легко увидеть используя разложение матрицы на собственные значения(2.29)[25]. В таком случае обратная матрица к исходной будет записана следующим образом (2.31). Как видно из выражения (2.31) при умножении вектора шума на матрицу обратную к $\mathbf{\Omega}_1$ происходит умножение собственных значений шума на величины обратные к собственным значениям матрицы $\mathbf{\Omega}_1$ (2.32)[20]. Таким образом значения имеющие маленькую величину в обратной матрице обеспечат увеличение компонент шума]]. Для того чтобы избежать подобного влияния можно произвести умножение на эрмитово сопряженную матрицу с исходной. В таком случае соотношение SNR останется неизменным(2.33).

$$\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (2.28)$$

$$\mathbf{\Omega}_1^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^H \quad (2.29)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{U}\mathbf{I}\delta^2\mathbf{V}^H \quad (2.30)$$

$$E(\mathbf{\Omega}_1^{-1}\mathbf{n}) = \mathbf{V}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{I}\delta^2)\mathbf{V}^H \quad (2.31)$$

$$\mathbf{\Omega}_1^H = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H \quad (2.32)$$

$$E(\mathbf{\Omega}_1^H\mathbf{n}) = \mathbf{V}(\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{I}\delta^2)\mathbf{V}^H \quad (2.33)$$

2.3. Поиск коэффициентов передачи поднесущих

Введенные выше коэффициенты \mathbf{a} используются для выбора рабочих поднесущих в системе. Изменение значений вектора \mathbf{a} может быть использовано для уменьшения интерференции с другими системами работающими в том же диапазоне частот, что и система ОбЧРК[25]. Таким образом значение вектора \mathbf{a} может быть неизвестным для приемника. Информация о коэффициенте передачи поднесущей должна быть дополнительным образом найдена на приемнике. Рассмотренная модель может быть описана при помощи модели *PARATUCK2* третьего порядка(2.34).

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\mathbf{S}) + \mathbf{n} \quad (2.34)$$

Тогда вектор \mathbf{a} описывает коэффициент передачи каждой из поднесущей. Выражение (2.35) может быть сформулировано относительно вектора \mathbf{a} выписанного в правую часть. Таким образом можно записать уравнение невязки для искомого вектора \mathbf{a} (2.36).

$$\mathbf{\Omega}_2 = ((\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T \cdot \mathbf{S}^T) \odot \mathbf{C}^{[a]} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{y} - \mathbf{\Omega}_2 \cdot \text{vec}(\mathbf{a}) \quad (2.36)$$

Приемник может найти как неизвестные величины вектора \mathbf{a} так и переданные символы, но не в полном объеме. Поскольку в принятом на вход приемника блоке данных всего $T_s \cdot F$ величин, в то время как количество переменных равно $(T_s + 1) \cdot F$ то задача является неопределенной и необходимо уменьшить количество неизвестных для решения задачи. Одним из возможных решений является определить для приемника первый символ на каждой из поднесущих, тогда количество неизвестных будет равно количеству принятых на входе приемника данных и задача будет иметь как минимум одно решение. При помощи известных символов приемник сможет найти коэффициенты передачи поднесущих, после чего восстановит значения неизвестных для него символов(2.37). Тогда для нахождения неизвест-

ных величин должна быть сформулирована оптимизационная задача для приемника в ходе которой он сможет найти все неизвестные. Неизвестными переменными являются матрица символов \mathbf{S} и вектор коэффициентов поднесущих \mathbf{a} . Известные символы добавлены в оптимизируемую функцию в качестве ограничения. Данный подход увеличивает вычислительную сложность задачи, однако значительно упрощает ее решение. Подобную задачу можно решить путем множителей Лагранжа. Задача была решена добавлением второй нормы от ограничения в функцию минимизации. Таким образом задача была упрощена с аналитической точки зрения однако так же усложнения с точки зрения вычислительной сложности. Кроме того было использовано два подхода по рассмотрению связи между невязками r_1 и r_2 . Мы рассматривали как равенство функций r_1 и r_2 в той же самой точке, как и отсутствие связи между ними. В случае если связь отсутствует, производная по \mathbf{S} и \mathbf{a} равна нулю. В случае если связь присутствует производная по \mathbf{S} и \mathbf{a} не равна нулю. Далее будут рассмотрены оба подхода к решению оптимизационной задачи.

2.3.1. Приближенный полу-слепой приемник

Описанный ниже способ решения подразумевает отсутствие связи между r_1 и r_2 . Постановка задачи записана в выражении (2.38). Происходит минимизация функции с предположением что две оптимизируемые функции не зависят друг от друга.

$$\mathbf{r}_1 = \text{vec}(\mathbf{y}) - \mathbf{\Omega}_1 \cdot \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})$$

Функция невязки r_1 соответствует оптимизируемой функции относительно символов. Матрица $\mathbf{\Omega}_1$ была определена ранее. Функция невязки r_2 соответствует оптимизируемой функции относительно коэффициентов поднесущих. Матрица $\mathbf{\Omega}_2$ была определена ранее и соответствует переданным данным с выраженными из матрицы коэффициентами поднесущих.

$$\mathbf{r}_2 = \text{vec}(\mathbf{y}) - \mathbf{\Omega}_2 \cdot \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})$$

Функция невязки соответствует поставленному для алгоритма ограничению. В качестве матрицы выбора использована матрица \mathbf{S}_{sel} . В матрице \mathbf{S}_{sel} присутствуют элементы только на главной диагонали и только в тех строках для которых переданный символ известен. Так же матрицу можно получить другим способом при помощи выражения.

Вектор \mathbf{q} является вектором где присутствуют известные символы, при этом он имеет ту же размерность что и вектор символов и на неизвестных позициях элементы равны нулю.

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{q} - \mathbf{S}_{sel} \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}); \quad (2.37)$$

$$\mathbf{S}_{sel} = \text{diag}(\mathbf{q})^{-1} \text{diag}(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{q} \in \mathbb{C}^{T_s \cdot F \times 1} \mathbf{S}_{sel} \in \mathbb{C}^{T_s \cdot F \times T_s \cdot F}$$

$$\mathbf{r}_1 \in \mathbb{C}^{T_s \cdot F \times 1} \mathbf{r}_2 \in \mathbb{C}^{F \times 1} \mathbf{r}_3 \in \mathbb{C}^{T_s \cdot F \times 1}$$

$$\min_{\text{vec}(\hat{\mathbf{S}})} r_1^H r_1 \quad (2.38)$$

$$\min_{\text{vec}(\hat{\mathbf{a}})} r_2^H r_2 \quad (2.39)$$

$$\min_{\text{vec}(\hat{\mathbf{S}})} r_3^H r_3 \quad (2.40)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})^*} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_2^H \mathbf{r}_2}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{a}})^*} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_3^H \mathbf{r}_3}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta vec(\hat{\mathbf{S}})^*} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_2^H \mathbf{r}_2}{\delta vec(\hat{\mathbf{S}})^*} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_3^H \mathbf{r}_3}{\delta vec(\hat{\mathbf{S}})^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{\Omega}_2^H \mathbf{r}_2 \\ -\mathbf{S}_{sel}^H \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\frac{\delta r_1^H r_1}{\delta vec(\hat{\mathbf{S}}^*)} = \mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{\Omega}_1 vec(\hat{\mathbf{S}}) - \mathbf{\Omega}_1^H vec(\mathbf{y}) = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\delta r_2^H r_2}{\delta vec(\hat{\mathbf{a}}^*)} = \mathbf{\Omega}_2^H \mathbf{\Omega}_2 vec(\hat{\mathbf{a}}) - \mathbf{\Omega}_2^H vec(\mathbf{y}) = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\delta r_3^H r_3}{\delta vec(\hat{\mathbf{S}}^*)} = \mathbf{S}_{sel}^H \mathbf{S}_{sel} vec(\hat{\mathbf{S}}) - \mathbf{S}_{sel}^H vec(\mathbf{q}) = 0 \quad (2.45)$$

$$\mathbf{S}_{sel}^H \mathbf{S}_{sel} = \mathbf{S}_{sel} \quad (2.46)$$

В выражениях (2.46)(2.45)(2.44) присутствует ноль, мы можем минимизировать сумму обоих выражений. Указанное выражение может быть трансформировано в систему нелинейных уравнений при умножении на -1 . Мы рассмотрели два метода решения системы нелинейных уравнений.

- Перемежающийся метод наименьших квадратов[10]
- Метод Ньютона[26]

Алгоритм ПМНК описан ниже и работает в следующем порядке[10]:

- Установить начальную точку θ_0
- Решить уравнение (2.43) (2.45) по отношению к $vec(\mathbf{S})$ с фиксированным \mathbf{A} и обновить таким образом $vec(\mathbf{S})$
- Решить уравнение (2.44) по отношению к \mathbf{A} с фиксированным $vec(\mathbf{S})$ и обновить таким образом \mathbf{A}

- Проверить, было ли уменьшение функции невязки на величину меньшую чем порог. Если уменьшение было больше порога, повторить процесс.

Метод Ньютона включает в себя следующие шаги[27]:

- Установить начальную точку θ_0
- Решить систему линейных алгебраических уравнений (2.47) в точке θ_0 (2.49).
- Проверить, было ли уменьшение функции невязки на величину меньшую чем порог. Если уменьшение было больше порога, повторить процесс.

Приемник не может решить данную систему в одну итерацию и совершит некоторое количество итераций. Задача может быть плохо поставлена на некоторых итерациях в силу присутствия аддитивного шума в данных. Для устранения такого влияния были рассмотрены два дополнительных подхода для увеличения стабильности алгоритма:

- Правило *Powell – Wolf* для адаптации шага итерации[28][29]
- Алгоритм *Levenberg – Marquardt* по регуляризации сходимости[10][30](2.47)

Основное решаемое уравнение метода Ньютона является решение системы линейных уравнений указанное на (2.55) В указанном выражении F это уравнение минимизируемое до нуля(2.50). Вектор F является первой производной оптимизируемой функции. В качестве матрицы J используется вторая производная оптимизируемой функции либо Якобиан вектора F (2.56).

$$\mathbf{J}\theta = -\mathbf{F} \quad (2.47)$$

$$\delta\theta = -\mathbf{J}^+\mathbf{d} \quad (2.48)$$

$$\begin{bmatrix} vec(\hat{\mathbf{S}}) \\ vec(\hat{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} vec(\hat{\mathbf{S}}) \\ vec(\hat{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}^k + \alpha \theta \quad (2.49)$$

$$\alpha = (0; 1]$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta vec(\hat{\mathbf{S}})^*} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_2^H \mathbf{r}_2}{\delta vec(\hat{\mathbf{a}})^*} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_3^H \mathbf{r}_3}{\delta vec(\hat{\mathbf{S}})^*} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.50)$$

$$\mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{\Omega}_1 vec(\hat{\mathbf{S}}) - \mathbf{\Omega}_1^H vec(\mathbf{y}) + \mathbf{\Omega}_2^H \mathbf{\Omega}_2 vec(\hat{\mathbf{a}}) \quad (2.51)$$

$$-\mathbf{\Omega}_2^H vec(\mathbf{y}) + \mathbf{S}_{sel} vec(\hat{\mathbf{S}}) - \mathbf{S}_{sel}^H vec(\mathbf{q}) = 0 \quad (2.52)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Omega}_2 \\ \mathbf{S}_{sel} & 0 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} vec(\mathbf{y}) \\ vec(\mathbf{y}) \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Omega}_2 \\ \mathbf{S}_{sel} & 0 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Omega}_2 \\ \mathbf{S}_{sel} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} vec(\hat{\mathbf{S}}) \\ vec(\hat{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{sel}^H vec(\mathbf{q}) + \mathbf{\Omega}_1^H vec(\mathbf{y}) \\ \mathbf{\Omega}_2^H vec(\mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$- \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{S}_{sel} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_2^H \mathbf{\Omega}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} vec(\hat{\mathbf{S}}) \\ vec(\hat{\mathbf{a}}) \end{bmatrix} = \mathbf{F} \quad (2.54)$$

Поскольку оптимизируемая функция (2.49) является аналитической мы не используем исчисление Виртингера и ищем частную производную по отно-

шению к вектору θ [31].

$$\mathbf{J} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \theta} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{J} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_1^H \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{S}_{sel} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_2^H \boldsymbol{\Omega}_2 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Приемник на каждой итерации решает систему линейных уравнений и обновляет искомый вектор для следующего шага. Оптимизационный алгоритм уменьшает функцию невязки и уменьшает первую производную до нуля. Поскольку вторая норма является вогнутой функцией, следовательно у оптимизируемой функции существует только одно решение.

2.3.2. Полу-слепой приемник

Оптимизируемая функция может быть записана в общей форме в отличии от того как это было описано ранее (2.57). Записанная обобщенная форма делает каждую итерацию вычислительно дороже. Следует заметить что функции r_1 и r_2 равны между собой в той же самой точке \mathbf{a} и \mathbf{S} . Функции могут быть заменены между собой при условии что переменные обеих функции равны между собой.

$$\mathbf{r}_1 = \text{vec}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}) = \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_2 = \text{vec}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\Omega}_2 \cdot \text{vec}(\hat{\mathbf{a}})$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{q} - \mathbf{S}_{sel} \text{vec}(\hat{\mathbf{S}});$$

$$\text{vec}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}_1) = \text{vec}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\Omega}_2 \cdot \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}_1) \quad (2.57)$$

Для расчета производных по обеим переменным \mathbf{a} и \mathbf{S} мы используем следующее свойство (2.59) изменив правую часть выражения где обе переменные явно выражены (2.63) [12].

$$\min_{\begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}) \\ \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}) \end{bmatrix}} \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3^H \mathbf{r}_3 \quad (2.58)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3^H \mathbf{r}_3$$

$$\frac{\delta \mathbf{G}}{\delta \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*) \\ \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*) \end{bmatrix}} = \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*) \\ \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*) \end{bmatrix}} + \frac{\delta \mathbf{r}_3^H \mathbf{r}_3}{\delta \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*) \\ \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*) \end{bmatrix}} \quad (2.59)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*) \\ \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*) \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*)} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*)} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\frac{\delta \mathbf{G}}{\delta \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*) \\ \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*) \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*)} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_3^H \mathbf{r}_3}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*)} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_3^H \mathbf{r}_3}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*)} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*)} = -\mathbf{\Omega}_1^H (\text{vec}(\mathbf{y}) - \mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})) = -\mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{r}_1 \quad (2.62)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*)} = -\mathbf{\Omega}_2^H (\text{vec}(\mathbf{y}) - \mathbf{\Omega}_2 \text{vec}(\hat{\mathbf{a}})) = -\mathbf{\Omega}_2^H \mathbf{r}_2 \quad (2.63)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*)} = \mathbf{\Omega}_2^H \mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}) - \mathbf{\Omega}_2^H \text{vec}(\mathbf{y}) \quad (2.64)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_3^H \mathbf{r}_3}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*)} = \mathbf{S}_{sel}^H \mathbf{S}_{sel} \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}) - \mathbf{S}_{sel}^H \text{vec}(\mathbf{y}) \quad (2.65)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_3^H \mathbf{r}_3}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*)} = \mathbf{0} \quad (2.66)$$

Для решения оптимизационной задачи, необходимо использовать так же метод Ньютона либо ПМНК. Для этого производная функции невязки должно быть приравнено к нулю (3.132) [32]. Поскольку функция аналитична, можно вычислить Якобиан функции (3.131). Якобиан будет отличаться от вычисленного в предыдущем разделе (3.133). В дальнейшем алгоритм реализован в абсолютной той же форме как и описанный выше метод (3.133).

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*) \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})} & \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^*) \text{vec}(\mathbf{A})} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*) \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})} & \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{a}}^*) \text{vec}(\hat{\mathbf{a}})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{S}})} & \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \text{vec}(\hat{\mathbf{a}})} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{\Omega}_1^H(\mathbf{r}_1) + \mathbf{S}_{sel}(\mathbf{r}_3) \\ -\mathbf{\Omega}_2^H(\mathbf{r}_2) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{S}_{sel} & \mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{\Omega}_2 \\ \mathbf{\Omega}_2^H \mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{\Omega}_2^H \mathbf{\Omega}_2 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

2.4. Полу-слепой приемник для оценки канала с памятью

2.4.1. Приближенное устранение влияния канала

В данной секции будет описан метод приближенного вычисления влияния на принятый сигнал (2.70) (2.71). В модели системы описанной в секции в

отличии от предыдущего раздела $\mathbf{H} \neq \mathbf{I}$ (2.72)[9]. Иначе говоря данные на выходе передатчика проходят через канал с импульсной характеристикой. С точки зрения параметрической модели можно представить влияние канала как некоторое количество многолучевых компонент переданного сигнала поступающих на вход приемника с фиксированными задержками[1]. В данном разделе предполагается что длительность импульсной характеристики канала меньше чем величина T/T_s .

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\mathbf{S}) \quad (2.71)$$

Описанный ниже алгоритм основан на измерении канала при помощи методов циклического префикса(2.74). Однако он позволяет избежать дополнительного внесистемного внедрения в систему циклического префикса для анализа канала(2.75). Рассмотрим матрицу \mathbf{H} с точки зрения параметрической модели(2.74). Матрица \mathbf{H} имеет нижнетреугольную структуру а также структуру Тоеплица[19]. В случае если выполняется допущение описанное выше, только первые T/T_s элементов могут быть ненулевыми(2.75).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ h_T & h_{T-1} & h_1 & \cdots & h_1 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

$$h_i = 0 \text{ if } i > T/T_s \quad (2.73)$$

Таким образом для нахождения канала необходимо узнать первые T/T_s элементов. Передатчик может передавать известные для приемника символы в первый временной интервал для каждой из поднесущих. Иначе говоря рассматривая передаваемую информацию, в матрице \mathbf{S} приемнику из-

вестен первый столбец. Однако поскольку в системе ОБЧРК используется циклическая свертка между всеми символами в блоке существует смещение между символами на протяжении всего блока данных(2.76)[14]. Таким образом даже в момент времени когда передается первый импульс существуют дополнительные составляющие принадлежащие остальным символам(2.75). По этой причине описанный алгоритм является приближенным, так как он подвержен искажениям из других временных интервалов.

$$\mathbf{S}_{rec} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ s_{F,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{S}_{tr} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & \cdots & s_{1,T_s} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} & \cdots & s_{2,T_s} \\ \vdots & & & & \\ s_{F,1} & s_{F,2} & s_{F,3} & \cdots & s_{F,T_s} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{x}_{rec} = \mathbf{\Omega}_1 vec(\mathbf{S}_{rec}) \quad (2.76)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Omega}_1 vec(\mathbf{S}_{tr}) + \mathbf{n} \quad (2.77)$$

$$\mathbf{x}_{rec} = \begin{bmatrix} x_{r,1} & x_{r,2} & x_{r,3} & \cdots & x_{r,T} \end{bmatrix}^T \quad (2.78)$$

$$\mathbf{X}_{cor} = \begin{bmatrix} x_{r,1} & x_{r,T} & x_{r,T-1} & \cdots & x_{r,T-F} \\ x_{r,2} & x_{r,1} & x_{r,T} & \cdots & x_{r,T-F+1} \\ \vdots & x_{r,T-1} & x_{r,T-2} & \cdots & x_{r,T-F-1} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

$$\mathbf{h}_{appx} = \mathbf{X}_{cor}^* \cdot \mathbf{H} \mathbf{x}_{rec} \quad (2.80)$$

Алгоритм измерения канала основан на корреляционном подходе. Вычисляя корреляцию между принятым и известным сигналом приемник находит многолучевые компоненты, выбирает наиболее весомые из них и использует как модель канала. Существует одна дополнительная техника позволяющая уменьшить влияние меж-символьной интерференции для циклического префикса. Возможно изменение коэффициента α внутри одного передающего блока. Таким образом передатчик может подстраивать перекрывающиеся под спектру блоки по частотам, уменьшив для определенной несущей меж-канальную интерференцию. Для устранения меж-канальной интерференции для одной поднесущей необходимо изменить коэффициенты α для самой поднесущей и для двух соседних каналов. Таким образом уменьшив меж-канальную интерференцию для соответствующих символов возможно увеличить точность оценки канала по известным символам.

2.4.2. Полу-слепой приемник

В случае рассмотрения канала с памятью задача может быть переписана похожим образом с точки зрения неизвестного для приемника канала (2.82) и известными символами (2.81).

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}_1 \mathbf{h} + \mathbf{e} \quad (2.81)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \Omega_1 \text{vec}(\mathbf{S}) + \mathbf{e} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{L+1 \times 1}$$

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{y} - \mathbf{D}_1 \mathbf{h} \quad (2.83)$$

При этом вектор \mathbf{h} является коэффициентами распространения для заданных задержек при условии что максимальная задержка канала известна и равна $L + 1$. Матрица \mathbf{D}_1 конструируется при помощи сдвига вектора столбца $\mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\mathbf{S})$ по вертикали и соединения сдвинутых блоков по вертикали друг к другу $L + 1$ раз[33].

$$\min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}_1 \mathbf{h}\|^2 = \min_{\mathbf{h}} \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s \quad (2.84)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta \mathbf{h}^*} = -\mathbf{D}_1^H (\mathbf{y} - \mathbf{D}_1 \mathbf{h}) = 0 \quad (2.85)$$

$$\mathbf{h} = (\mathbf{D}_1^H \mathbf{D}_1)^{-1} \mathbf{D}_1^H \mathbf{y} \quad (2.86)$$

$$\mathbf{h}_{opt} = \mathbf{D}_1^+ \mathbf{y} \quad (2.87)$$

Как показано на выражении (2.84), в случае если все переданные данные известны, может быть применен алгоритм наименьших квадратов для определения значений неизвестных коэффициентов передачи канала [34]. Следует заметить что приемник должен знать максимальную задержку принятых данных. Метод наименьших квадратов описан в предыдущих частях работы и использует исчисление Виртингера(2.85) для вычисления частной производной по неизвестной переменной и приравнивания ее к нулю(2.86). В дальнейшем вычисляется псевдо-обратная матрица для указанной матрицы(2.87). Решение для метода наименьших квадратов в данной ситуации представлено в следующем выражении(2.87). В практическом смысле если размер передаваемого блока слишком большой имеет смысл передавать лишь часть символов известными а в остальных передавать информационную составляющую.

$$\mathbf{x}_{rec} = \mathbf{\Omega}_1 \text{vec}(\mathbf{S}) = \mathbf{\Omega}_1 \mathbf{S}_{sel} \text{vec}(\mathbf{S}_{kn}) + \mathbf{\Omega}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{sel}) \text{vec}(\mathbf{S}_{unk}) \quad (2.88)$$

$$\mathbf{\Omega}_1 \mathbf{S}_{sel} = \mathbf{\Omega}_k \quad (2.89)$$

$$\mathbf{\Omega}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{sel}) = \mathbf{\Omega}_u \quad (2.90)$$

$$vec(\mathbf{S}_{kn}) \in \mathbb{C}^{Z \times 1} vec(\mathbf{S}_{unk}) \in \mathbb{C}^{FT_s - Z \times 1} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{\Omega}_u \in \mathbb{C}^{T \times FT_s - Z} \mathbf{\Omega}_k \in \mathbb{C}^{T \times Z} \quad (2.92)$$

В таком случае приемник должен решить задачу как по обнаружению символов, так и по определению значений канальных коэффициентов. Для этого мы можем разделить символы на две части, известную и неизвестную. После чего убирая известные составляющие мы дополнительно уменьшаем внутреннюю интерференцию на приемнике и записываем задачу в следующей форме(2.96).

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{\Omega}_k vec(\mathbf{S}_{kn}) + \mathbf{H} \mathbf{\Omega}_u vec(\mathbf{S}_{unk}) + \mathbf{e} \quad (2.93)$$

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{\Omega}_k vec(\mathbf{S}_{kn}) - \mathbf{H} \mathbf{\Omega}_u vec(\mathbf{S}_{unk}) \quad (2.94)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}_k \mathbf{h} + \mathbf{D}_u \mathbf{h} + \mathbf{e} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{y} - \mathbf{D}_k \mathbf{h} - \mathbf{D}_u \mathbf{h} \quad (2.96)$$

Описанные выражения позволяют записать принятые данные как сумму двух наборов символов, известных и неизвестных. Приемник позволяет разделить данные наборы на различных уровнях, вплоть до суммы двух принятых сигналов. Однако разделение по временной области подобных наборов невозможно, поскольку данные модулируются во времени. Для разделения наборов по символам необходимо разделить модулирующую матрицу $\mathbf{\Omega}_1$ на две составляющие для известных символов и неизвестных.

Подобный подход позволяет оценить неизвестные символ значительно точнее даже в случае использования ПМНК. Таким образом приемник конструирует две функции невязки и оптимизирует по ним последовательно решая различные задачи. Функция невязки основана на второй норме для того чтобы обеспечить вогнутость минимизируемой функции. Данная задача может быть решена при помощи ПМНК и алгоритма Ньютона.

$$\min_{vec(\mathbf{S}_{unk})\mathbf{h}} \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s \quad (2.97)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta \mathbf{h}^*} = -(\mathbf{D}_u + \mathbf{D}_k)^H (\mathbf{y} - \mathbf{D}_k \mathbf{h} - \mathbf{D}_u \mathbf{h}) = 0 \quad (2.98)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta vec(\mathbf{S}_{unk})^*} = -(\mathbf{H}\mathbf{\Omega}_k)^H (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{\Omega}_k vec(\mathbf{S}_{kn}) - \mathbf{H}\mathbf{\Omega}_u vec(\mathbf{S}_{unk})) = 0 \quad (2.99)$$

$$\mathbf{h}_{opt} = (\mathbf{D}_u + \mathbf{D}_k)^+ \mathbf{y} \quad (2.100)$$

$$vec(\mathbf{S}_{unk})_{opt} = (\mathbf{H}\mathbf{\Omega}_k)^+ (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{\Omega}_k vec(\mathbf{S}_{kn})) \quad (2.101)$$

Оптимизируемая функция записана в следующем виде(2.97). Выражение \mathbf{r}_s может быть переписано в двух равных формах.Оптимальная точка для минимизируемой функции является точкой где частная производная равна нулю(2.98)(2.99). Поскольку оптимизируемая функция является вогнутой такая точка только одна и является глобальным минимумом. Мы записываем частную производную по неизвестным символам и величинам каналов. Для этого было использовано исчисление Виртингера, поскольку искомые функции комплексные. Последующие выражения были приравнены к нулю и полученная система нелинейных алгебраических выражений была решена. Для того чтобы решить указанную выше систему мы использовали как алгоритм ПМНК так и метод Ньютона. Метод ПМНК на каждой итерации вычисляет решение для СЛАУ с учетом каждой из переменных

Оптимизационный процесс описан ниже.

- Установить $\hat{\mathbf{h}}$ и $vec(\hat{\mathbf{S}}_{unk})$ как случайные величины и нули соответственно.
- Решить СЛАУ (2.100) для вектора $\hat{\mathbf{h}}$ и обновить оцениваемый вектор $\hat{\mathbf{h}}$
- Решить СЛАУ (2.101) для вектора $vec(\hat{\mathbf{S}}_{unk})$ и обновить оцениваемый вектор $vec(\hat{\mathbf{S}}_{unk})$
- В случае если функция невязки уменьшилась больше чем на пороговое число повторить процесс с шага 2.

$$\mathbf{J}\theta = -\mathbf{F} \quad (2.102)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \mathbf{J}^+ \mathbf{F} \quad (2.103)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta \mathbf{h}^* \mathbf{h}^*} & \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta vec(\mathbf{S}^*) \mathbf{h}} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta \mathbf{h}^* vec(\mathbf{S})} & \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta vec(\mathbf{S}^*) vec(\mathbf{S})} \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta \mathbf{h}^*} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta vec \mathbf{S}^*} \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{D}_u + \mathbf{D}_k)^H (\mathbf{y} - \mathbf{D}_k \mathbf{h} - \mathbf{D}_u \mathbf{h}) \\ -(\mathbf{H}\mathbf{\Omega}_k)^H (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{\Omega}_k vec(\mathbf{S}_{kn}) - \mathbf{H}\mathbf{\Omega}_u vec(\mathbf{S}_{unk})) \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_k + \mathbf{D}_u)^H (\mathbf{D}_k + \mathbf{D}_u) & (\mathbf{D}_k + \mathbf{D}_u)^H \mathbf{H}\mathbf{\Omega}_k \\ (\mathbf{H}\mathbf{\Omega}_k)^H (\mathbf{D}_k + \mathbf{D}_u) & (\mathbf{H}\mathbf{\Omega}_k)^H \mathbf{H}\mathbf{\Omega}_1 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Алгоритм Ньютона учитывает взаимозависимости между обеими формами функции невязки и позволяет ускорить сходимость метода при помощи решения систем нелинейных уравнений. Метода описан достаточно хорошо в литературе [28]. Мы должны выразить Якобиан (2.104) для частных производных приравняваемых к нулю на каждой итерации алгоритма. Для этого мы используем свойство что обе формы записи невязки равны между собой. Итоговый Якобиан записан как следует в форме (2.107). Сам алгоритм описан ниже.

- Установить переменную θ in следующим способом (2.108).
- Рассчитать Якобиан и частную производную в данной точке θ
- Решить СЛАУ (2.102) в заданной точке θ
- Обновить заданную точку θ при помощи выражения (2.103).
- В случае если функция невязки уменьшилась больше чем на пороговое число повторить процесс с шага 2.

Метод Ньютона может быть стабилизирован при помощи методов регуляризации для обеспечения надежной сходимости даже в случае плохого собственного числа матрицы при помощи правила меж-итерационного шага *Powell–Wolf* [10] и при помощи алгоритма Левенберга-Марквардта [26]. Так же возможно применение двух дополнительных методов регуляризации описанных для полу-слепых приемников [33][35]. Однако они требуют оценки данных по большему количеству блоков чем один.

2.5. Результаты моделирования

В данной секции мы рассматриваем проведенное моделирование для анализа работы алгоритмов описанных выше. Производительность системы ОбЧРК для различных коэффициентов перекрытия была получена при

помощи моделирования. Параметры системы описаны в таблице 3.1. В системе полагается аддитивный белый Гауссов шум без дополнительного кодирования.

Таблица 2.1. ОбЧРК эксперимент 1.1

Параметр	Обозначение	Значение
Схема модуляции	μ	КФМ
Отсчетов на символ	T/T_s	32
Поднесущих	F	32
Размер блока	T_s	15
Тип фильтра		КиПК
Фактор перекрытия	α	0,0.3,0.5, 1
Канал	h	АБГШ
Префикс		Нет
Вид передачи		Некодированный

Производительность системы ОбЧРК для сравнения различных величин α коэффициентов получены при помощи моделирования. В системе был положен аддитивный белый Гауссов шум без какого либо кодирования. В системе была использована квадратурная фазовая манипуляция. Количество поднесущих равно $F = 32$. Количество временных отсчетов на каждый временной символ равно $T/T_s = F$. Количество временных символов равно $T_s = 15$. В качестве фильтра был использован фильтр с характеристикой "Корень из приподнятого косинуса". В качестве коэффициента перекрытия были использованы 4 значения α . В тесте для различных коэффициентов перекрытия мы измерили отношения символов к количеству ошибок для различных α как для приемника на основе согласованного фильтра так и для приемника на основе псевдо-обратной матрицы. Итоговые графики для соотношений символов к количеству ошибок показаны на рис. для приемника на основе псевдо-обратной матрицы и на рис. для приемника на основе согласованного фильтра.

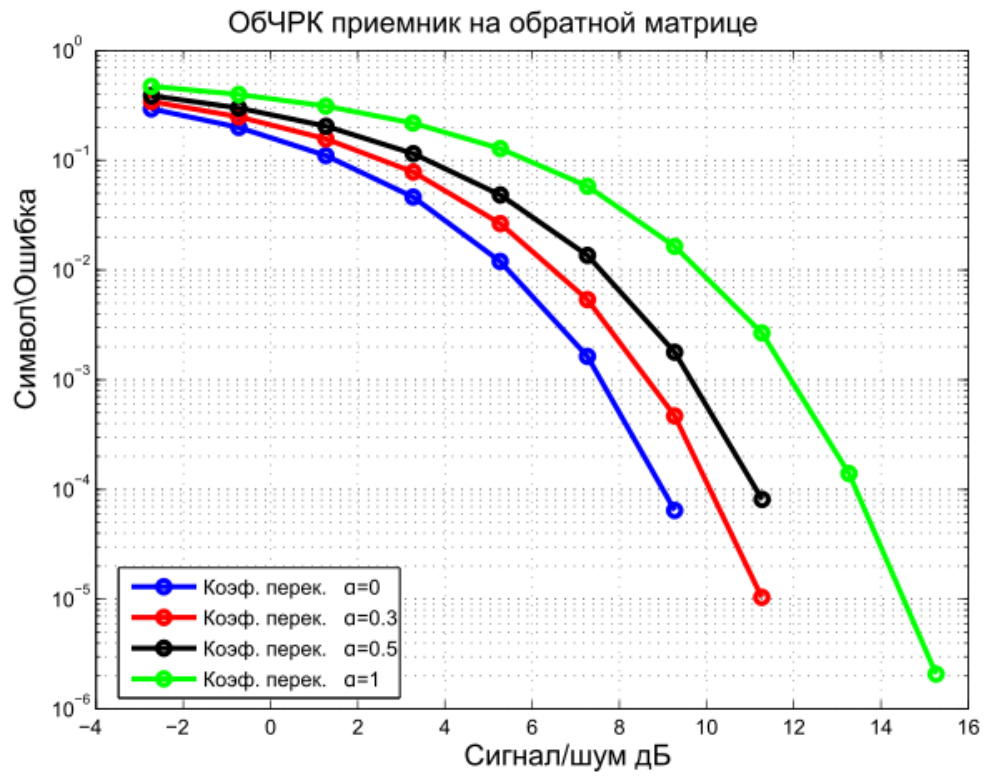


Рис. 2.1. Зависимость производительности приемника от коэф. перекрытия α для приемника на псевдообратной матрице

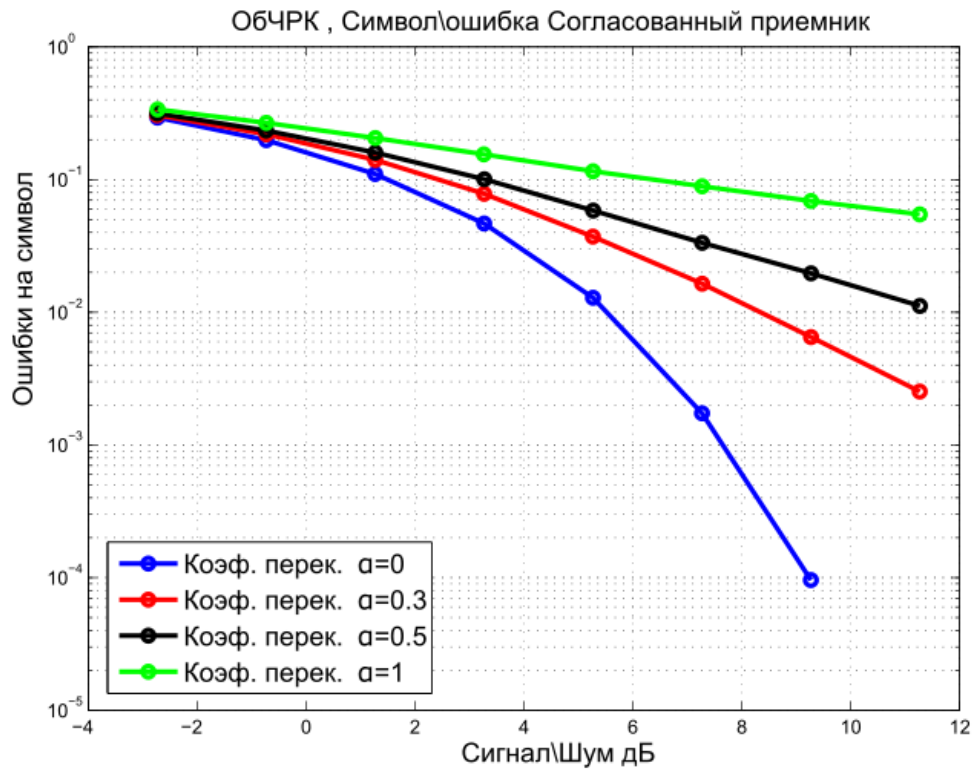


Рис. 2.2. Зависимость производительности приемника от коэф. перекрытия α для согласованного приемника

Производительность системы ОбЧРК для работы полу-слепого приемника получены при помощи моделирования. В системе был положен аддитивный белый Гауссов шум без какого либо кодирования. В системе была использована квадратурная фазовая манипуляция. Количество поднесущих равно $F = 32$. Количество временных отсчетов на каждый временной символ равно $T/T_s = F$. Количество временных символов равно $T_s = 15$. В качестве фильтра был использован фильтр с характеристикой "Корень из приподнятого косинуса" с коэффициентом перекрытия $\alpha = 0.5$. Коэффициенты передачи для различных поднесущих были выбраны как случайные целочисленные величины в диапазоне от 0 до 1. На приемнике величины оцениваются как пороговые устройства и приравниваются разрешенным величинам. Результаты производительности системы ОбЧРК показаны на двух рисунках, на первом рисунке показано соотношение символов к ошибкам в случае если приемник знает истинную величину вектора \mathbf{a} , при помощи приемника на псевдообратной матрице, если приемник если не зна-

ет истинную величину вектора \mathbf{a} . Кроме того показаны результаты работы двух версий полу-слепых приемников. На втором рисунке представлена нормализованная ошибка между истинным значением вектора истинную величину вектора \mathbf{a} и найденным приемником.

Таблица 2.2. ОБЧРК эксперимент 1.2

Параметр	Обозначение	Значение
Вид модуляции	μ	КФМ-2
Отсчетов на символ	T/T_s	32
Поднесущие	F	32
Разме блока передачи	T_s	15
Вид фильтра		КиПК
Коэффициент перекрытия	α	0.5
Коэффициенты поднесущих	\mathbf{a}_i	$randi([01])$
Канал	h	АБГШ
Префикс		Нет
Передача		Некодированно

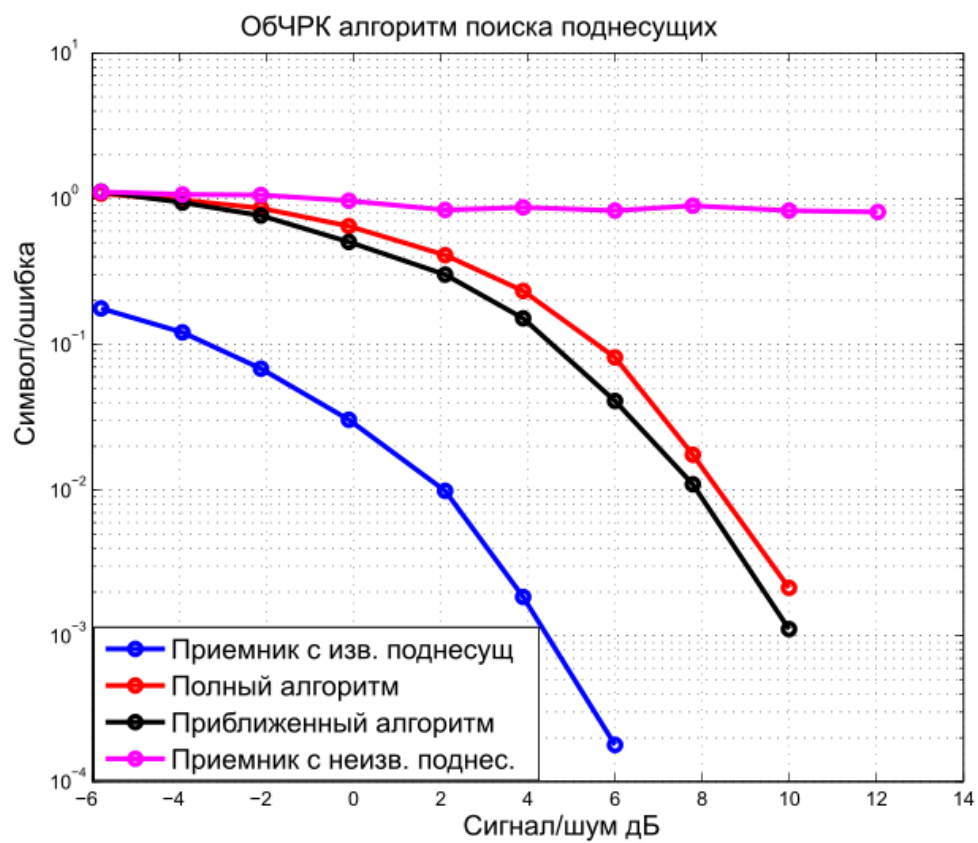


Рис. 2.3. Сравнение производительности для алгоритма поиска поднесущих

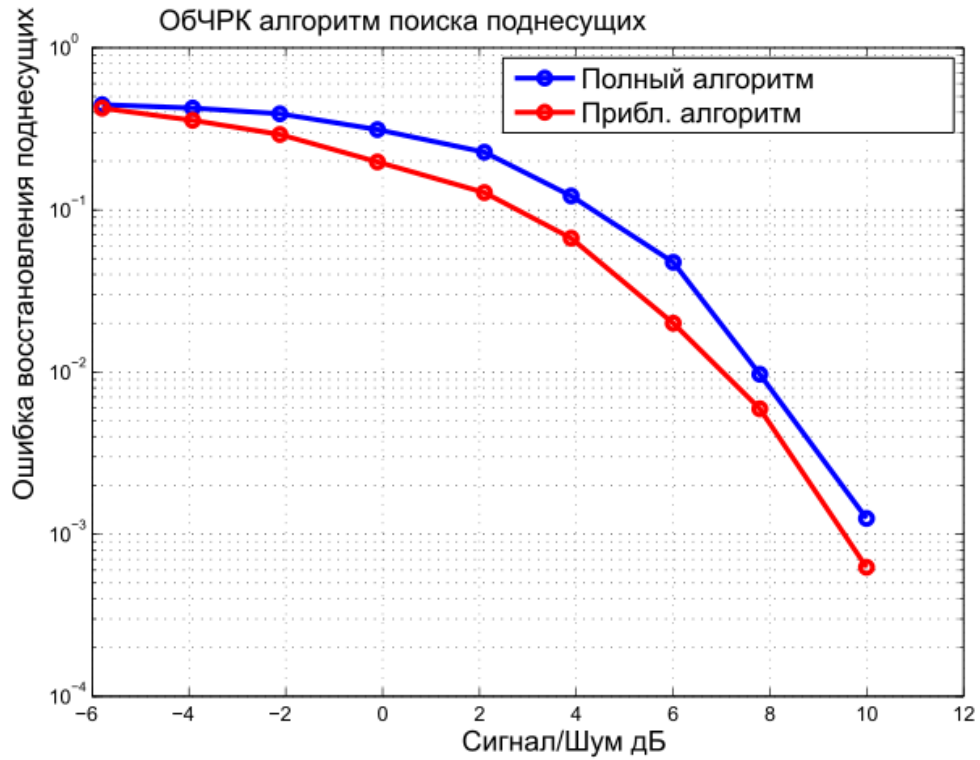


Рис. 2.4. Ошибка восстановления поднесущих

Кроме того мы добавили дополнительные графики для сравнения совместного и раздельного решения работы алгоритмов. Результаты сравнения так же получены при помощи моделирования.

Таблица 2.3. ОбЧРК эксперимент 1.3

Параметр	Обозначение	Значение
Сигнал/Шум	$\log(P_s/P_n)$	10
Отсчетов на символ	T/T_s	32
Поднесущих	F	32
Размер блока	T_s	15
Вид фильтра		КиПК
Коэффициент перекрытия	α	0.5
Коэффициенты поднесущих	$randi([01])$	

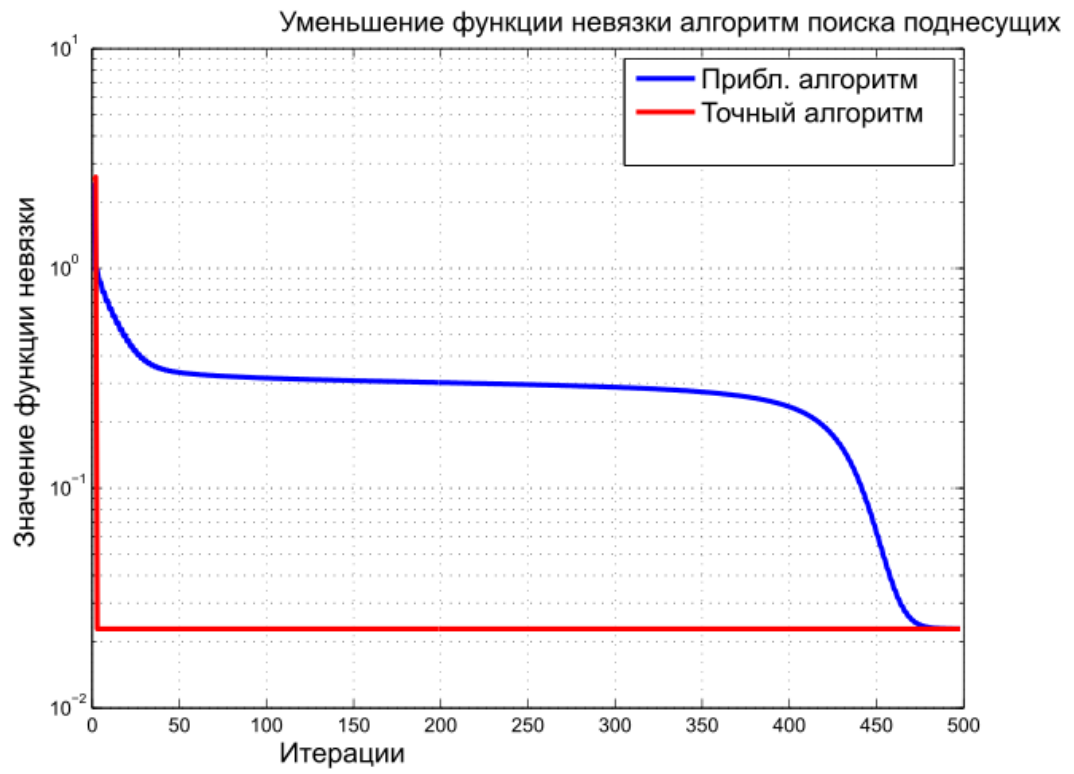


Рис. 2.5. Сходимость алгоритма по функции невязки

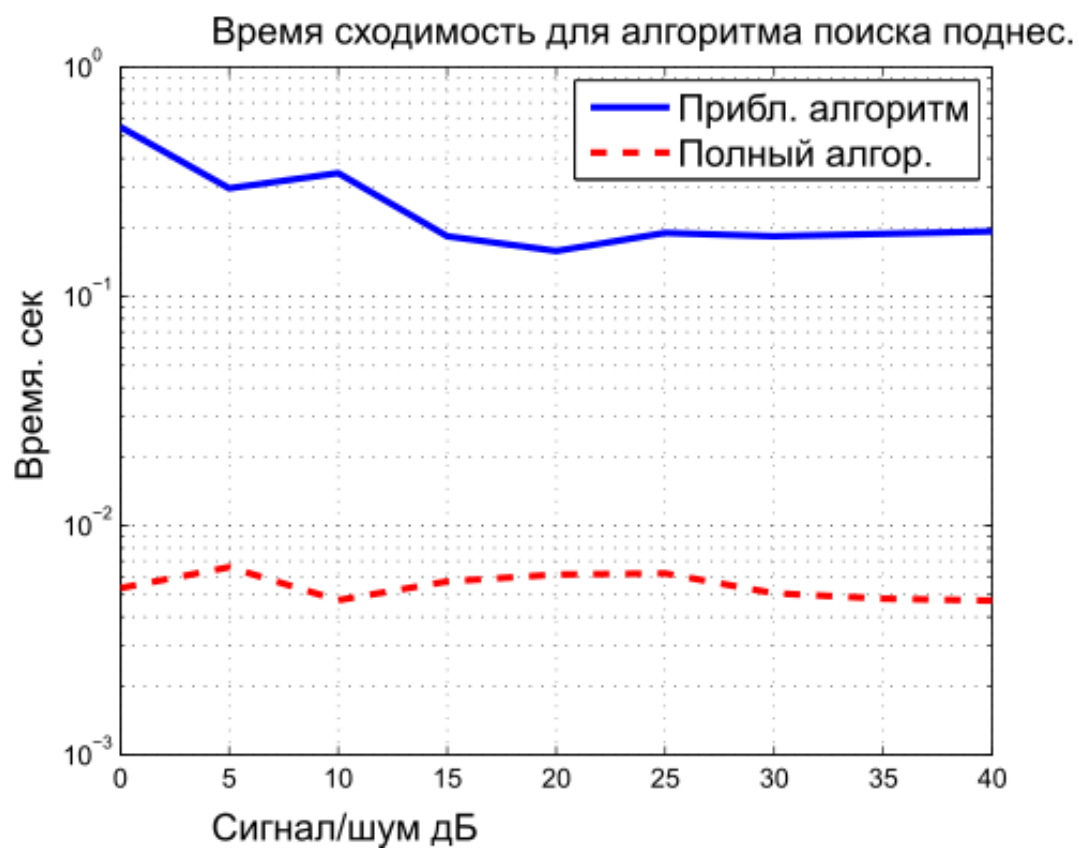


Рис. 2.6. Время сходимости алгоритма в зависимости от соотношения сигнал/шум

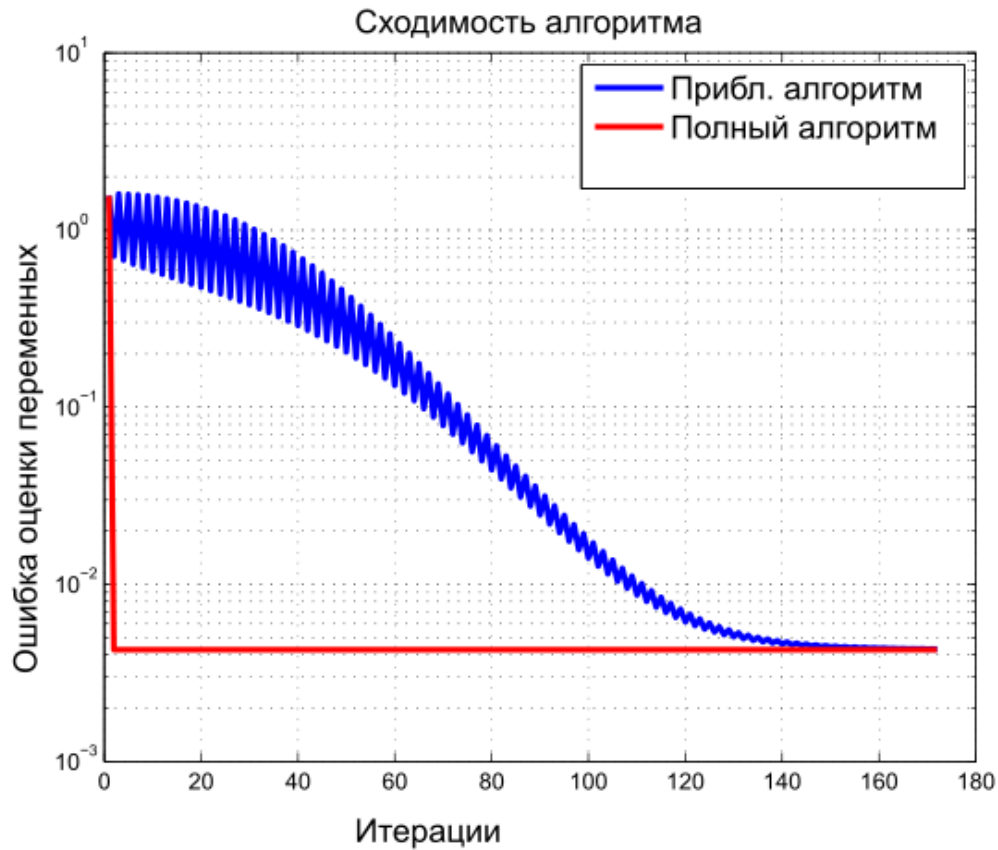


Рис. 2.7. Сходимость алгоритма по переменным

Производительность системы ОбЧРК для работы полу-слепого приемника получены при помощи моделирования. В системе был положен канал с памятью с дополнительным аддитивным белым Гауссовым шумом на входе приемника без какого либо кодирования. В системе была использована квадратурная фазовая манипуляция. Количество поднесущих равно $F = 32$. Количество временных отсчетов на каждый временной символ равно $T/T_s = F$. Количество временных символов равно $T_s = 32$. В качестве фильтра был использован фильтр с характеристикой "Корень из приподнятого косинуса" с коэффициентом перекрытия $\alpha = 1$. Результаты производительности системы ОбЧРК показаны на двух рисунках, на первом рисунке показано соотношение символов к ошибкам для различного количества тренировочных символов и сравнение с приемником на обратной фильтрации. На втором рисунке представлена ошибка восстановления канала для различного количества тренировочных символов.

Таблица 2.4. ОБЧРК эксперимент 1.4

Параметр	Обозначение	Значение
Отсчетов на символ	T/T_s	32
Поднесущих	F	32
Размер блока	T_s	15
Вид фильтра		КиПК
Коэффициент перекрытия	α	1
Тип канала	$Ped - A$	

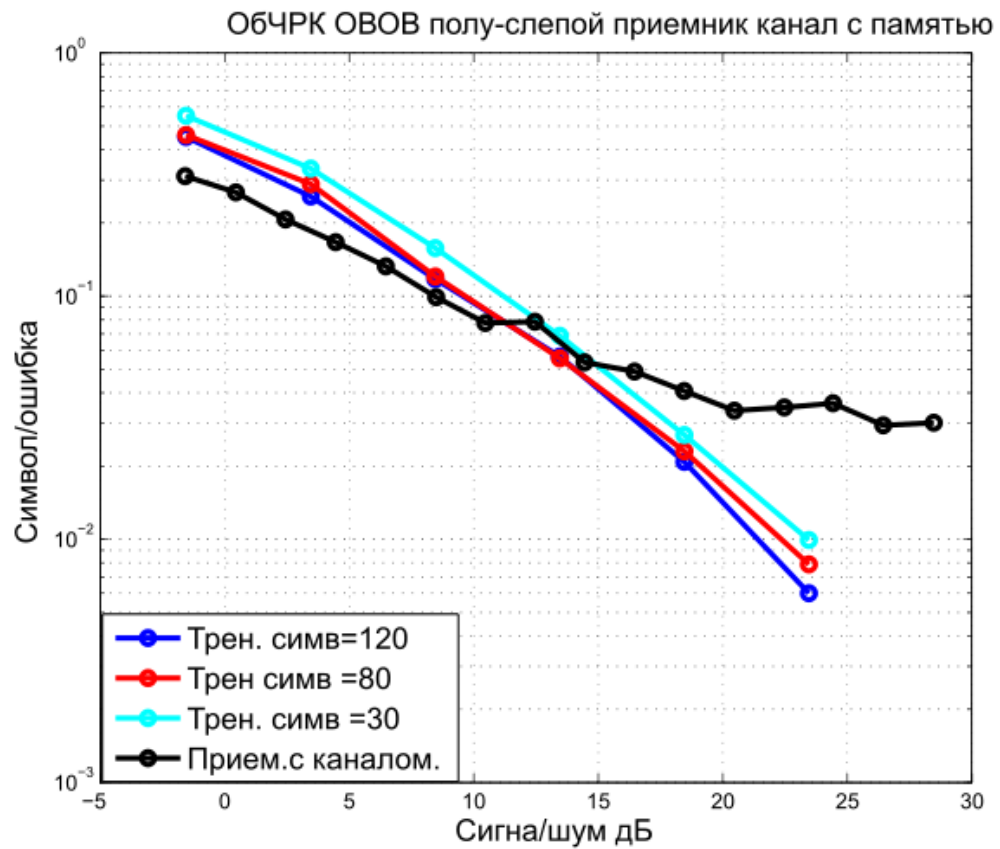


Рис. 2.8. Производительность работы полу-слепого приемника от сигнала/шум и количества тренировочных символов

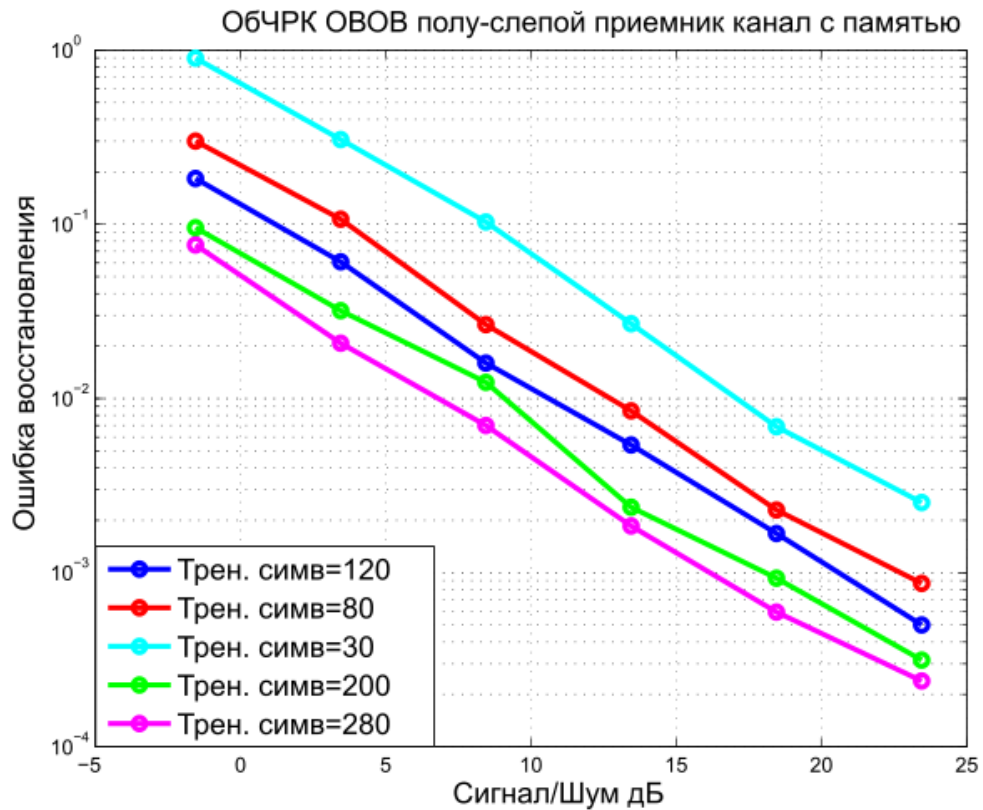


Рис. 2.9. Ошибка восстановления канала полу-слепого приемника от сигнал/шум и количества тренировочных символов

2.6. Заключение

В качестве заключения по первому эксперименту мы можем сказать, что приемник на основе псевдообратной матрицы показывает значительно лучшие результаты в детектировании символов по сравнению с согласованным приемником. Разница между приемниками незначительная в случае если коэффициент перекрытия имеет малое значение. Однако увеличение коэффициента перекрытия значительно уменьшает производительность системы на основе согласованного фильтра. Это связано с тем, что увеличивается перекрытие по частоте α между поднесущими. Таким образом из рис.2.1 видно что увеличение коэффициента перекрытия до максимума уменьшает производительность системы на 5 дБ. При этом производительность системы на основе согласованного фильтра значительно ухудшается, что видно на рис.2.2 и делает применение согласованного фильтра беспо-

лезным. Таким образом результаты показывают, что предпочтительнее использовать приемник на основе псевдо-обратной матрицы. Таким образом можно обеспечить лучшие результаты по вне-полосным излучениям системы при этом устранять влияние взаимной интерференции в системе. Более того можно использовать дополнительные алгоритмы для устранения взаимной интерференции в системе позволяющие получить дополнительное увеличение производительности. В качестве заключения для эксперимента с анализом алгоритма оценки работающих подчастот можно сделать следующие выводы :

- Алгоритм позволяет определить была ли включена поднесущая и передавались ли по ней данные.
- Использование алгоритма приводит к ухудшению производительности системы на 5-6дБ.
- Алгоритм может быть доработан использованием дополнительных техник по принятию решения о том, была ли включена поднесущая.

Как сказано в п.1 алгоритм работает и позволяет автоматически, без вероятностных моделей определить были ли переданы данные по поднесущей, при условии что для приемника известен хотя бы один символ на каждой из поднесущих. Однако применение системы при сравнении со случаем, когда приемник идеально знает используемые поднесущие приводит к ухудшению производительности на 5 дБ что показано на рис.2.3. Данное снижение в производительности связано с тем, что увеличивается количество источников ошибок, и в случае если приемник ошибочно определил поднесущую как включенную, это приводит к большому количеству ошибок. При этом цена ошибки принятия решения оказывается высокой, в то время как в функцию невязки оба выражения входят с одинаковым коэффициентом. В качестве решающего устройства было использовано пороговое устройство оценивавшее абсолютную величину коэффициента поднесущей, в случае если величина была больше 0.5 поднесущая считалась включенной. Поскольку данное решение не является оптимальным, возможно применение иных техник для увеличения эффективности алгоритма. Кроме того как

показывают результаты на рис.2.3и рис.2.4 , приближенный алгоритм имеет производительность лучше, чем у алгоритма с полной точностью. Это может быть связано с тем, что приближенное решение имеет тенденцию к ошибкам типа "пропуск сигнала и поскольку было оценено меньшее количество поднесущих чем на самом деле было использовано, то и количество соответствующих ошибок окажется меньше. Таким образом с точки зрения данной метрики производительность является большей, однако она является несущественной. Так же дополнительные рисунки показывают преимущества алгоритма с полной точностью. Как видно из рис.2.5. Скорость сходимости алгоритмов отличается значительно. Алгоритм полной точности сходится всего за две итерации, что позволяет уменьшить количество вычислений во много раз, в то время как алгоритм приближенной точности требует в среднем 100-200 итераций для сходимости. Таким образом следующая зависимость времени сходимости алгоритма на рис. 2.6 оказывается значительно лучше у алгоритма полной точности из-за количества итераций приближенного алгоритма. При этом даже, тот факт, что каждая итерация алгоритма приближенной точности требует меньше вычислительных ресурсов, в итоге алгоритм затрачивает значительно больше ресурсов. Как можно видеть из рис. 2.7 сходимость алгоритма приближенной точности происходит нелинейно и достаточно нестабильно, вызывая колебания ошибки восстановления на каждой итерации. Это вызывает долгий итерационный процесс, что и является следствием столь долгой сходимости алгоритма.

Эксперимент по проверке работы полу слепого приемника оценивающего состояние канала и принятые символы показывает следующие результаты:

- Правильным образом выбирая известные символы в блоке данных можно достичь даже лучшей производительности, чем если идеально знать канал и делать поиск по всем возможным символам.
- Алгоритм показывает хорошую производительность по каналу пешеходного типа А.
- Производительность алгоритма зависит от количества неизвестных символов.

Как видно из рис. производительность системы полу-слепым приемником на основе оптимизации показывает результат лучше, чем даже если был бы использован приемник на основе обратной фильтрации с идеально известным каналом, что говорит о большей стабильности алгоритма. Однако подобное поведение будет изменяться в случае если будут включены только некоторые поднесущие. Производительность системы меняется в зависимости от того сколько символов в блоке данных известно для приемника. После некоторой величины производительность системы падает ниже уровня приемника с идеально известным каналом. Таким образом можно адаптивно регулировать производительность системы. Как видно из рис. кривые ошибки восстановления канала лежат параллельно друг другу позволяя так же адаптивно выбирать точность определения канала гибко, таким образом обновляя состояние канала если он не меняется и уменьшать количество символов на первой итерации для более точного определения канала. Кроме того благодаря использованному подходу с вычитанием известных символов из функции невязки взаимная интерференция между разными каналами так же уменьшается и дополнительно увеличивает производительность системы. Кроме того в случае постановки задачи оптимизации количества излучаемой энергии к количеству полученной информации будет получена вогнутая кривая производительности по качеству работы системы в зависимости от количества известным системе символов. Основным выводом можно считать что данный подход является чрезвычайно эффективным с точки зрения качества работы системы, однако не является реализуемым на практике с точки зрения оборудования, так как потребует значительных вычислительных ресурсов, однако возможна параллельная обработка принятых данных, что вероятно может ускорить работу системы. Более того для простых задач с небольшими объемами данных современные встроенные системы могут реализовать данные операции.

Глава 3.

Обобщенное частотное разделение каналов в системе с количеством антенн больше двух

3.1. Модель системы

В данном разделе мы рассматриваем ОбЧРК МВМВ систему в канале без памяти с Рэлеевским замиранием[25][36]. Система может быть описана при помощи выражения (3.1) включая в себя канальную и шумовую составляющую в модель. Данная модель не рассматривает многолучевое распространение в среде передачи.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{M_r \times M_t} \mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M_t \times T} \mathbf{N}, \mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M_r \times T}$$

Система ОбЧРК в случае МВМВ так же может быть рассмотрена как модель *PARATUCK2* третьего порядка. Разница между ОВОВ и МВМВ модели значительна[36], поэтому для использования аналогичной тензор-

ной модели необходимо изменить одну из генерирующих матриц модели, а так же метод формирования двух других. Однако в результате можно описать МВМВ модель при помощи той же тензорной алгебры. Размерность принятых данных равна произведению количества принимающих антенн на размер блока данных. Матрица символов должна быть составлена из тензора третьего порядка размерности $\mathcal{S} \in \mathbb{C}^{F \times T_s \times M_t}$ в случае МВМВ модели. Дополнительная размерность связана с тем, что каждая передающая антенна передает свой собственный набор символов не равный с другими антеннами. Однако модель *PARATUCK2* не предусматривает использование тензоров в модели. Для того чтобы преодолеть данное ограничение тензор \mathcal{S} был переписан как соединенные во второй размерности друг с другом слои по третьей размерности. Выражение можно переписать следующим образом (3.2). Иначе говоря так же можно сказать что матрица \mathbf{S} равна развертке тензора \mathcal{S} по второй размерности с транспонированием.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{:, :, 1} \\ \mathcal{S}_{:, :, 2} \\ \vdots \\ \mathcal{S}_{:, :, M_t} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{S} \in \mathbb{C}^{F \times T_s \times M_t} \quad \mathbf{S} \in \mathbb{C}^{F \cdot M_t \times T_s}$$

Матрица $\mathbf{C}^{[b]}$ при переходе из ОВОВ модели в МВМВ остается неизменной и не зависит от количества используемых антенн (3.3). В столбцах матрицы остаются фильтрующие последовательности для различных временных слотов которые не зависят от количества антенн. Таким образом правая часть выражения \mathbf{S} не изменяется и имеет аналогичное количество столбцов T_s как в модели ОВОВ.

$$\mathbf{C}^{[b]} \in \mathbb{C}^{T \times T_s} \quad (3.3)$$

Вектор связи \mathbf{b} так же остается не подвергается изменениям при переходе в модель МВМВ (3.4). Необходимо заметить, что это верно в случае

если мы продолжаем рассматривать линейную независимую от времени в пределах передачи одного блока данных модель распространения сигнала. В таком случае вектор \mathbf{b} будет представлять собой вектор заполненный единичными значениями.

$$\mathbf{b} = \mathbf{1}_{T_s \times 1} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{T_s \times 1}$$

Матрица $\mathbf{C}^{[a]}$ и \mathbf{S} в случае модели МИМО должны быть изменены. Определим эту матрицу как $\mathbf{C}^{[a]'}$. Согласно размерностям матрицы \mathbf{S} , размерность матрицы $\mathbf{C}^{[a]'}$ должна быть $\mathbf{C}^{[a]'} \in \mathbb{C}^{T \times F \cdot M_t}$. В сравнении с моделью ОВОВ, в случае МВМВ матрица \mathbf{C} должна быть умножена так же с матрицами на основе $\mathbf{C}^{[a]}$. Таким образом матрица $\mathbf{C}^{[a]'}$ должна быть построена на повторении M_t раз матрицы $\mathbf{C}^{[a]}$. Поскольку произведение Адамара представляет собой перенос на другую частоту для каждой из поднесущих модифицированная матрица $\mathbf{C}^{[a]'}$ станет модуляцией всех поднесущих поочередно на каждой из передающих антенн m_t . Поскольку все поднесущие на каждой из передающих антенн равны, то их можно собрать простым связыванием одной генерирующей матрицы.

$$\mathbf{C}^{[a]'} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{[a]} & \mathbf{C}^{[a]} & \dots & \mathbf{C}^{[a]} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{T \times M_t \cdot F} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{C}^{[a]'} = (\mathbf{1}_{1 \times M_t} \otimes \mathbf{C}^{[a]}) \in \mathbb{C}^{T \times M_t \cdot F} \quad (3.6)$$

Вектор \mathbf{a} становится матрицей \mathbf{A} и соединяет каждую приемную антенну m_t с каждой поднесущей каждой передающей антенны с коэффициентами передачи для каждой поднесущей. Определим данные коэффициенты в виде тензора \mathcal{A} (3.8) включающего коэффициенты для каждой приемной, передающей антенны и поднесущей m_r, f, m_t . В модели *PARATUCK2* тензор \mathcal{A} должен быть представлен в виде матрицы, который будет суммировать все коэффициенты поднесущих для всех передающих антенн. Размер-

ность матрицы \mathbf{A} равна $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M_r \times F \cdot M_t}$. Таким образом развертка первого порядка тензора \mathcal{A} удовлетворяет данному условию по размерностям (3.9).

$$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{M_r \times F \times M_t} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{A} = \mathcal{A}_{[1]} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M_r \times F \cdot M_t} \quad (3.9)$$

Общая модель для МВМВ модели с представленными выше матрицами определена в выражении. Данная модель показывает принятые данные для принятого сигнала без учета влияния шума. Все операции описанные в случае ОВОВ так же могут быть описаны в случае с МВМВ с некоторыми расширениями. Следует заметить что ранг матрицы \mathbf{A} равен $rank(\mathbf{A}) = \min(M_r, F \cdot M_t)$ и в реальном случае значение в правой части оператора значительно меньше значения в левой его части. Ранг матрицы \mathbf{A} показывает как много потоков передачи данных может открыть система между данным набором антенн.

$$\mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C}^{[a]'} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T)) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M_r \times T} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M_r \times F \cdot M_t} \quad \mathbf{C}^{[a]'} \in \mathbb{C}^{T \times F \cdot M_t}$$

$$\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{F \cdot M_t \times T_s} \quad \mathbf{C}^{[b]} \in \mathbb{C}^{T \times T_s} \quad \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{1 \times T_s}$$

3.2. Ортогонализация влияния канала без частотной избирательности

Приемник и передатчик совместно могут ортогонализировать влияние канала путем схожим со стандартной ортогонализацией в МВМВ системах.

Очевидно подход имеет дополнительные изменения если мы полагаем модель канала равную матрице \mathbf{A} . Это связано с тем что ранг матрицы \mathbf{A} значительно меньше количества возможных для ортогонализации потоков. В стандартном подходе для ортогонализации два шага: предобработка и постобработка. Канальная матрица \mathbf{A} может быть разложена при помощи сингулярного разложения матрицы на три матрицы компоненты $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{V}^H \quad (3.11)$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M_r \times F \cdot M_t} \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{M_r \times M_r} \Sigma \in \mathbb{C}^{M_r \times F \cdot M_t} \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{F \cdot M_t \times F \cdot M_t}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_e \cdot \Sigma_e \cdot \mathbf{V}_e^H \quad (3.12)$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M_r \times F \cdot M_t} \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{M_r \times r} \Sigma \in \mathbb{C}^{r \times r} \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{F \cdot M_t \times r}$$

Передатчик для ортогонализации умножает слева передаваемые данные на матрицу \mathbf{V} которая является матрицей обратной к \mathbf{V} . Приемник так же умножает принятые данные на матрицу обратную к матрице \mathbf{U} . Матрица Σ имеет диагональную структуру и не смешивает данные, однако взвешивает на коэффициенты. Следует заметить что невозможна диагонализация этим путем количества каналов больше чем ранг матрицы \mathbf{A} . Однако как было записано ранее истинное количество потоков данных значительно больше чем ранг \mathbf{A} . Стандартный метод не использует ортогональность поднесущих частот и разрушает ортогональную структуру матрицы $\mathbf{C}^{[a]}$. Однако структура матрицы $\mathbf{C}^{[a]}$ может быть использована для того чтобы ортогонализировать потоки данных соответствующие различным поднесущим у одной и той же передающей антенны. Таким образом строкам в матрице \mathbf{S} могут соответствовать ортогональные из-за различных поднесущих потоки. Передатчик обеспечивает предобработку и изменяет матрицу $\mathbf{C}^{[a]}$ таким образом чтобы ортогонализировать максимальное количество строк в матрице \mathbf{A} . Диагонализация в одно частотной MBMB системе являет-

ся произведением с матрицей \mathbf{V} из сингулярного разложения матрицы \mathbf{A} . Однако в данном случае матрица предобработки будет построена на основе матрицы \mathbf{V} однако будет от нее отличаться. Матрица ортогонализации строится таким образом чтобы тот же базис столбцов соответствовал различным поднесущим одной и той же передающей антенны. Матрица \mathbf{A} состоит из блоков коэффициентов для соответствующей передающей антенны по разным поднесущим частотам. Согласно ортогональности для различных поднесущих мы можем использовать для тот же самый базис матрицы \mathbf{V} . Таким образом приемник получает r параллельных потоков от M_t передающих антенн. Первый блок M_t результирующей \mathbf{V}_1 матрицы состоит из повторения одного и того же столбца матрицы \mathbf{V} .

$$r = \text{rank}(\mathbf{A}) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{(1)} & \mathbf{V}^{(2)} & \dots & \mathbf{V}^{(f)} & \dots & \mathbf{0}^{(r+1)} & \dots & \mathbf{0}^{(M_t)} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{V}_1 \in \mathbb{C}^{F \cdot M_t \times F \cdot M_t}$$

$$\mathbf{V}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1,:}^1 & \mathbf{V}_{k,:}^2 & \dots & \mathbf{V}_{k,:}^F \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{F \cdot M_t \times F} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V}_1 = \mathbf{\Sigma}_{1:M_t} \otimes \mathbf{1}_{1 \times F} \quad (3.16)$$

Процесс пост обработки остается аналогичным с классической МВМВ системой. Таким образом пред-обработка и пост-обработка позволяет трансформировать влияние матрицы канала на взвешивание каждого потока данных на какую либо величину при помощи матриц специальной структуры. При этом первые M_t сингулярные значения матрицы $\mathbf{\Sigma}$ умножаются произведение Кронекера с вектором строкой состоящим из единиц. Количество возможных потоков будет зависеть от ранга матрицы \mathbf{A} однако будет сохранять ортогональную структуру матрицы $\mathbf{C}^{[a]}$ и увеличивать

количество потоков на количество поднесущих. Общее количество потоков будет равно rF . Следует заметить произведение с матрицей обратной с Σ позволит нормализовать потоки данных к одному множителю. Матрица Υ записана со структурой основанной на произведение Кронекера. Описанная операция позволяет ортогонализировать влияние канала внутри модели *PARATUCK2*. Для ортогонализации передатчик должен лишь домножить с левой стороны передаваемый вектор на сконструированную описанным образом матрицу. Для приемника ортогонализация не будет отличаться от процесса описанного для классической МВМВ ортогонализации.

$$\Upsilon = \Sigma_e^{-1} \cdot \mathbf{U}^H \cdot \mathbf{U} \Sigma \cdot \mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{1 \times r} \otimes \mathbf{I}_F & \mathbf{1}_{1 \times (M_t - r)} \otimes \mathbf{0}_F \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_1 (\mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T)) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{A}^{[o]} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_1 \quad (3.19)$$

$$\mathbf{V}_1 \in \mathbb{C}^{M_t \cdot F \times M_t \cdot F} \quad \Delta \in \mathbb{C}^{M_r \times M_t \cdot F} \quad \mathbf{A}^{[o]} \in \mathbb{C}^{M_r \times M_t \cdot F}$$

3.3. Поиск коэффициентов передачи поднесущих

Использование алгоритмов спектрального сканирования так же применимо и в случае с МВМВ моделью. Одно из важных свойств модели МВМВ является разнесенность или свобода зачастую достигаемая при помощи пространственного положения антенн[36]. Важно заметить что для различных пар приемник-передатчик может быть занята какая либо поднесущая другой системой. Приемник должен знать матрицу \mathbf{A} для того чтобы знать каким образом были переданы данные. В случае неизвестности для приемника коэффициентов передачи поднесущих задача становится значительно сложнее в силу смешивания данных как во временной так и частотной об-

ласти. Количество неизвестных для переменных для приемника в таком случае равно $M_r M_t F$. Количество выражений которые считывает приемник равно для каждого блока данных $T M_r$. Как видно количество неизвестных может быть значительно больше количества известных величин. Однако приемник может найти данные коэффициенты при помощи специальным образом структурированной матрицы символов.

3.3.1. Метод поиска основанный на ОВОВ модели

Одним из способов для поиска матрицы \mathbf{A} является полу-слепой приемник основанный на модели ОВОВ. Приемник может использовать алгоритм описанный в предыдущей части. Передатчик должен сконструировать символы для передачи специальным образом в матрице \mathbf{S} и приемник должен знать как минимум ФМТ символов для поиска всех коэффициентов. Передатчик должен передавать данные как минимум M_t временных слотов с известными символами для того чтобы найти матрицу \mathbf{A} . Алгоритм для поиска матрицы \mathbf{A} следующий.

- Передатчик располагает внутри блока данных специально структурированные символы. Передатчик кладет известные приемнику символы в одну строку для искомой передающей антенны в каждую из поднесущих. Другими словами символы передаются только от определенной передающей антенны каждый временной слот. Передатчик повторяет процесс для каждой передающей антенны в последующие временные интервалы. Таким образом процесс занимает M_t временных интервалов. При этом передатчик должен знать что и когда передавалось.
- Приемник считывает на входе блок данных с длительностью M_t временных интервалов. Приемник использует полу-слепой алгоритм для ОВОВ и полагает, что принятый сигнал передан от системы с моделью ОВОВ. Таким образом алгоритм позволяет найти значения коэффициентов поднесущих для первой передающей антенны.
- Приемник повторяет данный процесс M_t раз находя для каждого вре-

менного интервала свой блок коэффициентов для того чтобы найти все $M_t M_r F$ коэффициентов матрицы \mathbf{A} .

3.3.2. Алгоритм основанный на МВМВ модели

Матрица \mathbf{A} может быть найдена при помощи следующего выражения разделяющего в модели *PARATUCK2* генерирующую матрицу и векторизованную матрицу \mathbf{A} (3.24). Модель может быть записана как произведение векторизированной матрицы \mathbf{A} и матрицы промежуточной Δ являющейся генератором. Данное произведение может быть выражено с векторизацией для обеих матриц (3.23). Мы использовали данное свойство для того чтобы найти коэффициенты поднесущих матрицы \mathbf{A} из принятых данных (3.24). Запишем функцию невязки минимум которой необходимо найти в квадратной норме. При этом выразим невязку относительно векторизированной матрицы \mathbf{A} (3.25). Поскольку функция не является аналитичной из-за комплексных значений в матрице \mathbf{A} используем исчисление Виртингера [31] для того чтобы найти частную производную по искомому вектору [34]. Приравняем производную к нулю и найдем решение полученной системы линейных уравнений. Поскольку оптимизируемая функция является вогнутой, решение у данной системы уравнений будет всего одно и оно будет является точкой минимума.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{I}\mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C}^{[a]'} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \quad (3.21)$$

$$\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{N} \in \mathbb{C}^{M_r \times T}$$

$$vec(\widehat{\mathbf{X}}) = vec(\widehat{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{C}^{[a]'} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T))) \quad (3.22)$$

$$vec(\mathbf{O}\mathbf{P}) = (\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{I}) \cdot vec(\mathbf{O}) \quad (3.23)$$

$$\Delta = (\mathbf{C}^{[a]'} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T)) \quad (3.24)$$

$$vec(\widehat{\mathbf{X}}) = (\Delta^T \otimes \mathbf{I}) \cdot vec(\widehat{\mathbf{A}}) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{r}_5 = vec(\mathbf{Y}) - vec(\widehat{\mathbf{X}}) \quad (3.26)$$

$$\Delta \in \mathbb{C}^{M_t \cdot F \times T} \quad \mathbf{r}_5 \in \mathbb{C}^{M_r \cdot T \times 1}$$

$$\min_{vec(\mathbf{A})} \mathbf{r}_5^H \mathbf{r}_5 \quad (3.27)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_5^H \mathbf{r}_5}{\delta vec(\widehat{\mathbf{A}}^*)} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_5^H \mathbf{r}_5}{\delta vec(\widehat{\mathbf{A}}^*)} = \frac{\delta (vec(\mathbf{Y}) - vec(\widehat{\mathbf{X}}))^H (vec(\mathbf{Y}) - vec(\widehat{\mathbf{X}}))}{\delta vec(\widehat{\mathbf{A}}^*)} \quad (3.29)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_5^H \mathbf{r}_5}{\delta vec(\widehat{\mathbf{A}}^*)} = (\Delta^T \otimes \mathbf{I})^H (\Delta^T \otimes \mathbf{I}) vec(\widehat{\mathbf{A}}) - (\mathbf{I} \otimes \Delta)^H vec(\mathbf{Y}) = 0 \quad (3.30)$$

$$(\Delta^T \otimes \mathbf{I})^H (\Delta^T \otimes \mathbf{I}) vec(\widehat{\mathbf{A}}) = (\Delta^T \otimes \mathbf{I})^H vec(\mathbf{Y}) \quad (3.31)$$

$$vec(\widehat{\mathbf{A}})_{opt} = ((\Delta^T \otimes \mathbf{I})^H (\Delta^T \otimes \mathbf{I}))^{-1} (\Delta^T \otimes \mathbf{I})^H vec(\mathbf{Y}) \quad (3.32)$$

$$vec(\widehat{\mathbf{A}})_{opt} = ((\Delta^* \otimes \mathbf{I})(\Delta^T \otimes \mathbf{I}))^{-1} (\Delta^* \otimes \mathbf{I}) vec(\mathbf{Y}) \quad (3.33)$$

$$vec(\widehat{\mathbf{A}})_{opt} = ((\Delta^* \Delta^T) \otimes \mathbf{I})^{-1} (\Delta^* \otimes \mathbf{I}) vec(\mathbf{Y}) \quad (3.34)$$

$$vec(\widehat{\mathbf{A}})_{opt} = ((\Delta^* \Delta^T)^{-1} \otimes \mathbf{I}^{-1})(\Delta^* \otimes \mathbf{I})vec(\mathbf{Y}) \quad (3.35)$$

$$vec(\widehat{\mathbf{A}})_{opt} = ((\Delta^* \Delta^T)^{-1} \Delta^* \otimes \mathbf{I})vec(\mathbf{Y}) \quad (3.36)$$

Для того чтобы проанализировать ранг искомой обратной матрицы мы проанализировали структуру матрицы. Таким образом можно оценить количество коэффициентов для поиска при помощи одного блока данных. Поскольку ранг произведения Кронекера(3.37) равен произведению рангов исходных матриц рассмотрим входящие в него выражения(3.36). Единичная матрица имеет максимальный ранг и не является переменной. Таким образом ранг полностью зависит от матрицы Δ (3.39). Рассмотрим матрицу Δ (3.24) , как видно корневая матрица имеет $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{FM_t \times T_s}$ размеры. Таким образом ранг матрицы $rank(\mathbf{S}) = \min(FM_t, T_s)$ меньше или равен наименьшей из размерностей. Ранг описанного произведения же $\mathbf{S}(\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T$ будет меньше наименьшей из размерностей $rank(\mathbf{S}(\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T) \leq T_s$. Существует неравенство определяющее ранг произведения Адамара(3.41) и дано в литературе[37][38][39]. Поскольку левая часть основана на повторении матрицы $\mathbf{C}^{[a]}$ ее ранг следующий $rank(\mathbf{C}^{[a]}) = \min(FM_t, T_s)$. Тогда ранг произведения будет ограничен следующим верхним порогом. Таким образом мы определили максимальное количество компонент оцениваемых при помощи одного блока данных(3.43).

$$rank((\Delta^* \Delta^T)^{-1} \Delta^* \otimes \mathbf{I}) = (rank(\mathbf{I}))rank((\Delta^* \Delta^T)^{-1} \Delta^*) \quad (3.37)$$

$$rank(\mathbf{I}) = M_r \quad (3.38)$$

$$rank((\Delta^* \Delta^T)^{-1} \Delta^*) = rank(\Delta) \quad (3.39)$$

$$rank(\Delta) \leq rank(\mathbf{C}^{[a]'} rank((\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T))) \quad (3.40)$$

$$\text{rank}(\mathbf{C}^{[a]'^T}) = \min(T_s, F) \quad (3.41)$$

$$\text{rank}((\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T)) = \text{rank}(\mathbf{S}) \leq T_s \quad (3.42)$$

$$\text{rank}((\Delta^H \Delta)^{-1} \Delta^H) \leq T_s \cdot \min(T_s, F) \quad (3.43)$$

$$\text{rank}(((\Delta^* \Delta^T)^{-1} \Delta^* \otimes \mathbf{I})) \leq T_s \cdot M_t \cdot \min(T_s, F) \quad (3.44)$$

Передатчик использует данные специальным образом структурированные в матрице символов как объяснено в секции связанной с полу-слепыми приемниками. Тогда мы можем найти все коэффициенты при помощи метода наименьших квадратов. В данном случае будут рассмотрены все зависимости в МВМВ модели и не будет использовано предположений и приближений. Данный подход даст большую точность в определении коэффициентов.

3.3.3. Алгоритм основанный на разложении

Приемник может найти коэффициенты передачи для поднесущих выполнив поиск по меньшему количеству переменных. Это связано с тем что матрица \mathbf{A} в модели *PARATUCK2* представлена в виде развертки тензора \mathcal{A} . При этом сам тензор может быть разложен на основополагающие матрицы. При этом размерность неизвестных коэффициентов тензора может быть значительно уменьшена.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C}^{[a]'^T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \quad (3.46)$$

$$\mathbf{A} = \mathcal{A}_{[1]} = \mathbf{A}_A \cdot (\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T \quad (3.47)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_A \cdot (\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T \cdot \mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \quad (3.48)$$

$$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{M_r \times F \times M_t}$$

Где $\mathbf{A}_A \in \mathbb{C}^{M_r \times r}$ $\mathbf{A}_B \in \mathbb{C}^{F \times r}$ $\mathbf{A}_C \in \mathbb{C}^{M_t \times r}$ а таким образом приемник может уменьшить количество неизвестных для решения данной задачи (3.49). Отношение между r к возможному уменьшению искомым коэффициентов растёт полиномиально. Ранг разложения уменьшает количество переменных в случае если ранг разложения будет больше чем заданная величина зависящая от размерностей тензора. Так же существуют дополнительные ограничения для поиска элементов тензора \mathcal{A} (3.51).

$$N_1 = M_r \cdot M_t \cdot F \quad (3.49)$$

$$N_2 = r \cdot (M_r + M_t + F) \quad (3.50)$$

$$r = \frac{M_r \cdot M_t \cdot F}{M_r + M_t + F} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{X} = \mathcal{A}_{[1]} \cdot \mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \quad (3.52)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_A \cdot (\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T \cdot \mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \quad (3.53)$$

$$vec(\mathbf{A}_A \cdot (\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T \cdot \mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \quad (3.54)$$

Запишем выражение в виде векторизированной функции невязки как классическую систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{X} = \mathcal{A}_{[1]} \cdot \mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \quad (3.55)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_A \cdot (\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T \cdot \mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \quad (3.56)$$

$$vec(\mathbf{A}_A \cdot (\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T \cdot \mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T))) \quad (3.57)$$

Возможно разделить операцию векторизации для матрицы \mathbf{A}_A и оставшейся части выражения используя свойства оператора векторизации взятые из источника и записанные в выражении (3.55). Таким образом приемник может оценить одну из искоемых матриц \mathbf{A}_A с точки зрения наименьших квадратов (3.62).

$$vec(\mathbf{OP}) = (\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{I}) \cdot vec(\mathbf{O}) \quad (3.58)$$

$$vec(\mathbf{X}) = vec(\mathbf{A}_A \cdot (\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T \cdot \mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T))) \quad (3.59)$$

$$\mathbf{D}_{in} = (\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T \cdot \mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \quad (3.60)$$

$$vec(\mathbf{X}) = vec(\mathbf{A}_A \cdot \mathbf{D}_{in}) \quad (3.61)$$

$$vec(\mathbf{X}) = (\mathbf{D}_{in}^T \otimes \mathbf{I}_{M_r}) \cdot vec(\mathbf{A}_A) \quad (3.62)$$

Приемник может разделить произведение Хатри-Рао на составляющие из выражения используя другое свойство операции векторизации (3.64). Таким образом приемник разделяет оставшиеся две матрицы и производит их поиск с точки зрения наименьших квадратов (3.63). Существует три возможных разделения произведения однако одно из них не выражает необходимым образом искоемые матрицы. Поэтому было использовано оставшиеся две формы для того чтобы раскрыть искоемые матрицы в необходимом виде.

$$vec(\mathbf{OPL}) = (\mathbf{L}^T \otimes \mathbf{O}) \cdot vec(\mathbf{P}) \quad (3.63)$$

$$vec(\mathbf{X}) = vec(\mathbf{A}_A \cdot (\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T \cdot \mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T))) \quad (3.64)$$

$$vec(\mathbf{X}) = ((\mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T))^T \otimes \mathbf{A}_A) vec((\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T) \quad (3.65)$$

$$\mathbf{D}_{sec} = ((\mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \otimes \mathbf{A}_A) \quad (3.66)$$

$$vec(\mathbf{X}) = \mathbf{D}_{sec} \cdot vec((\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T) \quad (3.67)$$

$$\mathbf{D}_{in} \in \mathbb{C}^{T \times M_r \times r} \mathbf{D}_{sec} \in \mathbb{C}^{T \cdot M_t \times M_t \cdot F \cdot r}$$

Матрицы в произведении Хатри Рао разделяемы выражением даже после транспонирования результата(3.68) (3.69). Вывод для транспонирования произведения приведен ниже.

$$vec((\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T) = diag(\mathbf{K}_1 \cdot vec(\mathbf{A}_C^T)) \cdot \mathbf{K}_2 \cdot vec(\mathbf{A}_B^T) \quad (3.68)$$

$$\mathbf{L}_B = diag(\mathbf{K}_1 \cdot vec(\mathbf{A}_C^T)) \cdot \mathbf{K}_2 \in \mathbb{C}^{M_t \cdot F \cdot r \times F \cdot r} \quad (3.69)$$

$$vec((\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T) = diag(\mathbf{K}_2 \cdot vec(\mathbf{A}_B^T)) \mathbf{K}_1 \cdot vec(\mathbf{A}_C^T) \quad (3.70)$$

$$\mathbf{L}_C = diag(\mathbf{K}_2 \cdot vec(\mathbf{A}_B^T)) \mathbf{K}_1 \in \mathbb{C}^{M_t \cdot F \cdot r \times M_t \cdot r} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_r & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{I}_r^F & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & \cdots & \mathbf{0} \\ & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{M_t} \otimes (\mathbf{1}_{F \times 1} \otimes \mathbf{I}_r) \quad (3.72)$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{F \cdot r} \\ \mathbf{I}_{F \cdot r} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{F \cdot r} \end{bmatrix} = \mathbf{1}_{M_t \times 1} \otimes \mathbf{I}_{F \cdot r} \quad (3.73)$$

В дальнейшем составляется оптимизируемая функция для поиска на основе невязки между принятым и искомым сигналом по отношению ко всем трем матрицам(3.74). Мы переписали функцию невязки отдельно для каждого из выражений(3.76). Поскольку минимизируемая функция не аналитична мы использовали исчисления Виртингера[35](3.82) для вычисления частным производных по переменным(3.83).

$$\min_{\begin{bmatrix} \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}) \\ \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}) \\ \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}) \end{bmatrix}} (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \text{vec}(\widehat{\mathbf{X}}))^H (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \text{vec}(\widehat{\mathbf{X}})) \quad (3.74)$$

$$\mathbf{r}_4 = (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \text{vec}(\widehat{\mathbf{X}})) \quad (3.75)$$

$$\text{vec}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Gamma}_1 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}) = \mathbf{\Gamma}_2 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}^T) = \mathbf{\Gamma}_3 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^T) \quad (3.76)$$

$$\mathbf{\Gamma}_1 = (\mathbf{D}_{in}^T \otimes \mathbf{I}_{M_r}) \quad (3.77)$$

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \mathbf{D}_{sec} \cdot \mathbf{L}_B \quad (3.78)$$

$$\mathbf{\Gamma}_3 = \mathbf{D}_{sec} \cdot \mathbf{L}_C \quad (3.79)$$

$$\mathbf{\Gamma}_1 \in \mathbb{C}^{T \cdot M_r \times r \cdot M_r} \mathbf{\Gamma}_2 \in \mathbb{C}^{T \cdot M_r \times r \cdot F} \mathbf{\Gamma}_3 \in \mathbb{C}^{T \cdot M_r \times r \cdot M_t}$$

$$\mathbf{r}_4 = \text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_1 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}) = \text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_2 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}^T) \quad (3.80)$$

$$\mathbf{r}_4 = \text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_3 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^T) \quad (3.81)$$

$$\min_{\begin{bmatrix} \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}) \\ \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}) \\ \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}) \end{bmatrix}} \mathbf{r}_4^H \mathbf{r}_4 \quad (3.82)$$

$$\delta \mathbf{r}_4^H \mathbf{r}_4 = \left[\begin{array}{c} \frac{\delta \mathbf{r}_4^H \mathbf{r}_4}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}^*)} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_4^H \mathbf{r}_4}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}^*)} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_4^H \mathbf{r}_4}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^*)} \end{array} \right]^T = 0 \quad (3.83)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_4^H \mathbf{r}_4}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}^*)} = \frac{\delta (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_1 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}))^H (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_1 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}))}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}^*)} \quad (3.84)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_4^H \mathbf{r}_4}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}^*)} = \frac{\delta (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_2 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}^T))^H (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_2 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}^T))}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}^*)} \quad (3.85)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_4^H \mathbf{r}_4}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^*)} = \frac{\delta (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_3 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^T))^H (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_3 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^T))}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^*)} \quad (3.86)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_4^H \mathbf{r}_4}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}^*)} = -\mathbf{\Gamma}_1^H (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_1 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}})) \quad (3.87)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_4^H \mathbf{r}_4}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}^*)} = -\mathbf{\Gamma}_2^H (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_2 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}^T)) \quad (3.88)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_4^H \mathbf{r}_4}{\delta \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^*)} = -\mathbf{\Gamma}_3^H (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_3 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^T)) \quad (3.89)$$

В дальнейшем для минимизации был использован алгоритм ПМНК с следующими шагами:

- Установка стартовых матриц $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}$ как случайных комплексных матриц фиксированного размера
- Решение СЛАУ $\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_1 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}})$ с данными матрицами $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}$ и обновлением матрицы $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}$
- Решение СЛАУ $\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_2 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}^T)$ с данными матрицами $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}$ и обновлением матрицы $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}$
- Решение СЛАУ $\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Gamma}_3 \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^T)$ с данными матрицами $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}$ и обновлением матрицы $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}$
- Проверка уменьшения значения функции невязки $\frac{\|\text{vec}(\mathbf{Y}) - \text{vec}(\widehat{\mathbf{X}})\|^2}{\|\text{vec}(\mathbf{Y})\|^2}$. В случае если уменьшение больше порога, повторить с алгоритм с пункта 2.

Алгоритм ПМНК является очень нестабильным для плохо определенных матриц что делает желаемым использование других методов для поиска точки минимума.

3.3.3.1. Анализ ранга вычислений

Рассмотрим возможный ранг для генерирующих матриц $\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2, \mathbf{\Gamma}_3$ для того чтобы понять насколько уменьшится размер исследуемой задачи и количество переменных для оценки. Две генерирующие матрицы состоят из двух

частей согласованных с символами и второй частью связанной с разделением произведения Хатри-Пао[13].

$$vec(\widehat{\mathbf{X}}) = \mathbf{\Gamma}_1 vec(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}}) = \mathbf{\Gamma}_2 vec(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}^T) = \mathbf{\Gamma}_3 vec(\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}^T) \quad (3.90)$$

$$\mathbf{\Gamma}_1 = (\mathbf{D}_{in}^T \otimes \mathbf{I}_{M_r}) \quad (3.91)$$

$$\mathbf{\Gamma}_3 = \mathbf{D}_{sec} \cdot \mathbf{L}_C \quad (3.92)$$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{\Gamma}_1$. Матрица составлена из произведения Кронекера двух других матриц(3.93). Произведение Кронекера имеет ранг соответствующий выражению[8]. При этом единичная матрица имеет полный ранг. Таким образом ранг матрицы полностью зависит от первой части выражения(3.97).

$$\mathbf{\Gamma}_1 = (\mathbf{D}_{in}^T \otimes \mathbf{I}_{M_r}) \quad (3.93)$$

$$rank(O \otimes P) = rank(O)rank(P) \quad (3.94)$$

$$rank(O \odot P) \leq rank(O)rank(P) \quad (3.95)$$

$$rank(OP) \leq \min(rank(O), rank(P)) \quad (3.96)$$

$$rank(\mathbf{\Gamma}_1) = rank(\mathbf{D}_{in}^T)rank(\mathbf{I}_{M_r}) \quad (3.97)$$

$$\mathbf{D}_{in}^T = (\mathbf{A}_C \diamond \mathbf{A}_B)^T \cdot \mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T))^T \quad (3.98)$$

$$\text{rank}(\mathbf{C}^{[a]'}) = \min(F, T) \quad (3.99)$$

$$\text{rank}((\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T) = \min(T_s, T) \quad (3.100)$$

$$\text{rank} \mathbf{S} \leq \min(F \cdot M_t, T_s) \quad (3.101)$$

$$\text{rank}((\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T)) \leq \min(F \cdot M_t, T_s, T) \quad (3.102)$$

$$\text{rank}(\mathbf{C}^{[a]'} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T)) \leq (\min(F \cdot M_t, T_s, T) \cdot \min(F, T)) \quad (3.103)$$

$$\text{rank}(\mathbf{D}_{in}) \leq (\min(F \cdot M_t, T_s, T) \cdot \min(F, T)) \cdot M_r \quad (3.104)$$

Верхний порог ранга равен $\min(M_t F, T)$ (3.103) из-за размеров итоговой матрицы. Поскольку T является наибольшей величиной в данном случае, мы можем ей пренебречь и считать что наибольший ранг матрицы известен (3.104). Реальный ранг не зависит от произведения с рангом матрицы $\mathbf{C}^{[a]}$ из-за заполнения матрицы символами. Рассмотрим произведение Хатри-Рао [7]. Результат показан в выражении. Если ранг матрицы полон и равен T_s , тогда система ограничена рангом r который позволяет уменьшить ранг матрицы \mathbf{S} от T_s до r для того чтобы найти \mathbf{A}_A . Следующим шагом является анализ матрицы $\mathbf{\Gamma}_2$ и $\mathbf{\Gamma}_3$

$$\text{rank}(\mathbf{C}^{[a]'} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \leq (\min(F \cdot M_t, T_s) \cdot F) \quad (3.105)$$

$$\text{rank}(\mathbf{C}^{[a]'} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T)) \leq (\min(F \cdot M_t, T_s)) \quad (3.106)$$

$$\text{rank}((\widehat{\mathbf{A}}_C \diamond \widehat{\mathbf{A}}_B)^T) \leq r \quad (3.107)$$

$$\text{rank} \mathbf{D}_{in} \leq \min(r, F \cdot M_t, T_s) \quad (3.108)$$

Next step is $\mathbf{\Gamma}_2$ rank analysis.

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \mathbf{D}_{sec} \cdot \mathbf{L}_B \quad (3.109)$$

$$\text{rank}(\mathbf{\Gamma}_2) \leq \min(\text{rank}(\mathbf{D}_{sec}), \text{rank}(\mathbf{L}_B)) \quad (3.110)$$

$$\mathbf{D}_{sec} = ((\mathbf{C}^{[a]'} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T)) \otimes \mathbf{A}_A) \quad (3.111)$$

$$\text{rank}(\mathbf{D}_{sec}) = \text{rank}((\mathbf{C}^{[a]'} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \cdot \text{rank}(\widehat{\mathbf{A}}_A)) \quad (3.112)$$

$$\text{rank}(\widehat{\mathbf{A}}_A) = \min(M_r, r) \quad (3.113)$$

$$\text{rank}((\mathbf{C}^{[a]'} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{b}^T)^T)) \leq (\min(F \cdot M_t, T_s)) \quad (3.114)$$

$$\text{rank}(\mathbf{D}_{sec} \leq (\min(F \cdot M_t, T_s)) \cdot \min(M_r, r) \quad (3.115)$$

$$\mathbf{L}_B = \text{diag}(\mathbf{K}_1 \cdot \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_C^T)) \cdot \mathbf{K}_2 \quad (3.116)$$

$$\text{rank}(\mathbf{K}_2) = F \cdot r \quad (3.117)$$

$$\text{rank}(\text{diag}(\mathbf{K}_1 \cdot \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_C^T))) \leq (M_t \cdot r) \quad (3.118)$$

$$\text{rank}(\mathbf{L}_B) \leq \min((M_t \cdot r), (F \cdot r)) \quad (3.119)$$

$$\mathbf{L}_C = \text{diag}(\mathbf{K}_2 \cdot \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_B^T)) \mathbf{K}_1 \quad (3.120)$$

$$\text{rank}(\mathbf{K}_1) = r \cdot M_t \quad (3.121)$$

$$\text{rank}(\text{diag}(\mathbf{K}_2 \cdot \text{vec}(\widehat{\mathbf{A}}_B^T))) \leq F \cdot r \quad (3.122)$$

$$\text{rank}(\mathbf{L}_C) \leq \min((M_t \cdot r), (F \cdot r)) \quad (3.123)$$

$$\text{rank}(\mathbf{\Gamma}_2) \leq \min((M_t \cdot r), (F \cdot r), F \cdot M_t, T_s) \cdot \min(M_r, r) \quad (3.124)$$

$$\text{rank}(\mathbf{\Gamma}_3) \leq \min((M_t \cdot r), (F \cdot r), F \cdot M_t, T_s) \cdot \min(M_r, r) \quad (3.125)$$

3.4. Полу-слепой приемник для системы с МВМВ

В предыдущем разделе были рассмотрены решения задачи только для поиска коэффициентов передачи в матрице \mathbf{A} . Однако это вносит ограничения в размер передаваемого блока данных и более того не позволяет найти значения переданных символов в случае если они были неизвестны. Таким образом подобные подходы ограничивают размеры передаваемых блоков данных. Для того чтобы увеличить эффективность системы мы можем реализовать полу-слепой приемник определяющий как значения неизвестных символов с матрице \mathbf{S} так и неизвестные коэффициенты канала \mathbf{A} . Поскольку мы используем абсолютно ту же модель *PARATUCK2*, алгоритм описанный для ОВОВ модели может быть расширен для модели с МВМВ. В таком случае модулирующие матрицы будут изменены для соответствия модели МВМВ. Так же выражения будут переписаны для векторизации транспонированной матрицы символов \mathbf{S} и матрицы коэффициентов передачи \mathbf{A} . Кроме того матрица принятых данных так же будет записана в векторизованной форме после транспонирования \mathbf{Y}^T . Так же все остальные выражения не изменяются и остаются прежними. Начальный блок с

известными для приемника символами увеличивается от одного до M_t для каждой передающей антенны. Таким образом все оставшиеся символы в блоке данных заполняются символами.

$$\mathbf{r}_1 = \text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Omega}_1 \cdot \text{vec}(\mathbf{S}^T) = \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_2 = \text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Omega}_2 \cdot \text{vec}(\mathbf{A}^T)$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{q} - \mathbf{A}_{sel} \text{vec}(\mathbf{S});$$

$$\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Omega}_1 \cdot \text{vec}(\mathbf{S}^T) = \text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{\Omega}_2 \cdot \text{vec}(\mathbf{A}^T) \quad (3.126)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T)) \quad (3.127)$$

$$\mathbf{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}^{[a]T} \diamond \mathbf{C}^{[b]T}) \diamond (\mathbf{A}_{1,:} \otimes \mathbf{B}) \\ (\mathbf{C}^{[a]T} \diamond \mathbf{C}^{[b]T}) \diamond (\mathbf{A}_{2,:} \otimes \mathbf{B}) \\ \vdots \\ (\mathbf{C}^{[a]T} \diamond \mathbf{C}^{[b]T}) \diamond (\mathbf{A}_{M_r,:} \otimes \mathbf{B}) \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

$$\mathbf{\Delta} = (\mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T)) \quad (3.129)$$

$$\mathbf{\Omega}_2 = (\mathbf{I}_{M_r} \otimes \mathbf{\Delta})^T \quad (3.130)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\mathbf{S}^*) \text{vec}(\mathbf{S})} & \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\mathbf{S}^*) \text{vec}(\mathbf{A})} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\mathbf{A}^*) \text{vec}(\mathbf{S})} & \frac{\delta \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1}{\delta \text{vec}(\mathbf{A}^*) \text{vec}(\mathbf{A})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \text{vec}(\mathbf{S})} & \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \text{vec}(\mathbf{A})} \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{\Omega}_1^H(\mathbf{r}_1) + \mathbf{A}_{sel}(\mathbf{r}_3) \\ -\mathbf{\Omega}_2^H(\mathbf{r}_2) \end{bmatrix} = \mathbf{0} = \mathbf{F} \quad (3.132)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{A}_{sel} & \mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{\Omega}_2 \\ \mathbf{\Omega}_2^H \mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{\Omega}_2^H \mathbf{\Omega}_2 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

3.4.1. Модель системы для канала с памятью

В данном разделе мы рассматриваем модель ОбЧРК с МВМВ в канале с памятью и Рэлеевским замиранием(3.134)[36]. Указанная модель может быть описана в двумя выражениями в матричной и в векторизированной форме. Мы полагаем в системе присутствует защитный интервал между различными блоками данных с длиной не меньшей чем самого большого канала в системе. Таким образом мы можем пренебречь интерференцией между различными блоками данных. Основное выражение системы МВМВ в канале с памятью записывает в следующем виде (3.134) согласно источнику[33].

$$\mathbf{Y}_{:,k} = \sum_{l=0}^L \mathcal{H}_{:,l} \mathbf{X}_{:,k-l} + \mathbf{N}_{:,k} \quad (3.134)$$

$$\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M_r \times T} \mathbf{N} \in \mathbb{C}^{M_r \times T} \mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M_t \times T} \mathcal{H} \in \mathbb{C}^{M_r \times M_t \times L+1}$$

Где $\mathbf{X}_{:,k}$ выражение соответствует k -тому столбцу переданного блока данных. Размерность каждого столбца равна размерности количества антенн. Тензор \mathbf{H} является тензором третьего порядка, где третьей размерностью являются коэффициенты передачи для различных задержек. При этом запись $\mathbf{H}_{:,i}$ полагает i -тый слой по третьей размерности из тензора \mathcal{H} . Матрица \mathbf{N} является матрицей принятого шума где запись $\mathbf{N}_{:,k}$ полагает k -тый столбец от данной матрицы. Мы полагаем что шум является белым Гауссовым шумом без корреляции и с дисперсией δ^2 . Данная модель рассматривает только МВМВ систему не включает в себя модуляцию данных. Таким образом для описания системы ОбЧРК мы должны включить модулиру-

ющую матрицу в описанную модель. Мы можем добавить модулирующую матрицу двумя способами, как переданную матрицу (3.135) или в ее векторизированной форме (3.138). Модель переданного сигнала описывается так же как в модели ОБЧРК в канале без памяти однако со специфичной матрицей \mathbf{A} .

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C}^{[a]T} \odot (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{[b]} \diamond \mathbf{B})^T)) \quad (3.135)$$

$$\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M_t \times T} \quad (3.136)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{1}_{1 \times F}) \in \mathbb{C}^{M_t \times M_t F} \quad (3.137)$$

$$vec(\mathbf{X}^T) = \mathbf{r}_1 \cdot vec(\mathbf{S}^T) \quad (3.138)$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}^{[a]T} \diamond \mathbf{C}^{[b]T}) \diamond (\mathbf{A}_{1,:} \otimes \mathbf{B}) \\ (\mathbf{C}^{[a]T} \diamond \mathbf{C}^{[b]T}) \diamond (\mathbf{A}_{2,:} \otimes \mathbf{B}) \\ \vdots \\ (\mathbf{C}^{[a]T} \diamond \mathbf{C}^{[b]T}) \diamond (\mathbf{A}_{M_t,:} \otimes \mathbf{B}) \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

$$vec(\mathbf{X}^T) \in \mathbb{C}^{M_t T \times 1} \mathbf{r}_1 \in \mathbb{C}^{M_t T \times F M_t T_s} vec(\mathbf{S}^T) \in \mathbb{C}^{F M_t T_s \times 1} \quad (3.140)$$

При этом символьная матрица \mathbf{S} абсолютная идентична случаю МВМВ с каналом без памяти и имеет аналогичные размерности $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{F \times T_s \times M_t}$. Так же следует заметить, что в данном случае мы рассматриваем модель где выполняется условие $T_s F = T$.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{:, :, 1} \\ \mathcal{S}_{:, :, 2} \\ \vdots \\ \mathcal{S}_{:, :, M_t} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

$$\mathcal{S} \in \mathbb{C}^{F \times T_s \times M_t} \mathbf{S} \in \mathbb{C}^{F \cdot M_t \times T_s}$$

Матрицы $\mathbf{C}^{[b]}$, $\mathbf{C}^{[a]}'$ и вектор \mathbf{b} остаются аналогичными в новой модели системы.

$$\mathbf{C}^{[b]} \in \mathbb{C}^{T \times T_s}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{1}_{T_s \times 1} \in \mathbb{C}^{T_s \times 1} \quad (3.142)$$

$$\mathbf{C}^{[a]}' = (\mathbf{1}_{1 \times M_t} \otimes \mathbf{C}^{[a]}) \in \mathbb{C}^{T \times M_t \cdot F} \quad (3.143)$$

Матрица \mathbf{A} имеет специфичную структуру для того чтобы описывать сигнал на выходе передатчика. В изначальном варианте матрица \mathbf{A} указывала связь между приемными и передающими антеннами для каждой поднесущей. Сейчас же \mathbf{A} указывает на переданный сигнал, следовательно в матрице вместо модели связи между антеннами используется единичная матрица. Тогда матрица \mathbf{A} будет записана следующим образом (3.144).

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{1}_{1 \times F} \in \mathbb{C}^{M_t \times F \times M_t} \quad (3.144)$$

Существуют две формы записи канала с памятью, классическая и векторная. Классическая форма (3.145) записывается через сумму произведений матриц и не может быть использована для оценки состояния канала. Векторная форма (3.146) позволяет записать принятые данные как произведение матрицы на вектор символов как и на вектор канальных элементов. В первом случае матрица будет произведением блочной матрицы свертки со структурой Тоеплитца на матрицу модуляции. Во втором случае матрица будет выражена как матрица свертки относительно переданных данных. Структура матрицы \mathbf{H} представлена на выражении (3.147), где элемент $\mathbf{H}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ является матрицей свертки между x -той антенной приемника и

y -той антенной передатчика(3.148).

$$\mathbf{Y}_{:,k} = \sum_{l=0}^L \mathcal{H}_{:,:,l} \mathbf{X}_{:,k-l} + \mathbf{N}_{:,k} \quad (3.145)$$

$$\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M_r \times T} \mathbf{N} \in \mathbb{C}^{M_r \times T} \mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M_t \times T} \mathcal{H} \in \mathbb{C}^{M_r \times M_t \times L+1}$$

$$\text{vec}(\mathbf{Y}^T) = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\Upsilon}_1 \cdot \text{vec}(\mathbf{S}^T) = \mathbf{H} \text{vec}(\mathbf{X}^T) \quad (3.146)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1} & \mathbf{H}_{1,2} & \cdots & \mathbf{H}_{1,M_t} \\ \mathbf{H}_{2,1} & \mathbf{H}_{2,2} & \cdots & \mathbf{H}_{2,M_t} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{H}_{M_r,1} & \mathbf{H}_{M_r,2} & \cdots & \mathbf{H}_{M_r,M_t} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

$$\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{M_r T \times M_t T}$$

$$\mathbf{H}_{x,y} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{x,y,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{H}_{x,y,2} & \mathcal{H}_{x,y,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{H}_{x,y,3} & \mathcal{H}_{x,y,2} & \mathcal{H}_{x,y,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \mathcal{H}_{x,y,T} & \mathcal{H}_{x,y,T-1} & \mathcal{H}_{x,y,T-2} & \cdots & \mathcal{H}_{x,y,1} \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

$$\mathbf{H}_{1,1} \in \mathbb{C}^{T \times T}$$

Мы можем записать векторную форму с выражением вектора канальной матрицы. Для этого мы записываем значения из тензора в следующем по-

рядке(3.149).

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathcal{H}_{(:, :, 1)}) \\ \text{vec}(\mathcal{H}_{(:, :, 2)}) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathcal{H}_{(:, :, L+1)}) \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

$$\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{(L+1)M_r M_t \times 1}$$

Данное выражение позволяет записать векторную форму принятых данных с выделением неизвестного для приемника канала \mathbf{h} в виде векторного произведения. Для этого мы должны определить матрицу векторного произведения \mathbf{D}_{mod} . Матрица \mathbf{D}_{mod} записывается в особой форме, составляя матрицу свертки для матрицы переданных, а не вектора как в обычном случае. После чего тензорное произведение с единичной матрицей позволяет увеличить пространство до необходимого количества приемных антенн. Для того чтобы показать процесс в выражении оно было записано поэлементно (3.152).

$$\text{vec}(\mathbf{Y}) = \mathbf{D}_{mod} \mathbf{h} \quad (3.150)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,T} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,T} \\ \vdots & & & \\ x_{M_t,1} & x_{M_t,2} & \cdots & x_{M_t,T} \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

$$\mathbf{D}_{mod} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{M_t,1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ x_{1,2} & \cdots & x_{M_t,2} & x_{1,1} & \cdots & x_{M_t,1} & \cdots & 0 \\ x_{1,3} & \cdots & x_{M_t,3} & x_{1,2} & \cdots & x_{M_t,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{1,T} & \cdots & x_{M_t,T} & x_{1,T-1} & \cdots & x_{M_t,T-1} & \cdots & x_{M_t,1} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{M_r} \quad (3.152)$$

$$\mathbf{D}_{mod} \in \mathbb{C}^{TM_r \times (L+1)M_t M_r} \quad (3.153)$$

3.4.1.1. Метод наименьших квадратов для оценки состояния канала

Уравнение с выраженным вектором канала позволяет записать оптимизационную задачу для оценки канала при условии что известны все отправленные данные с передатчика. Для этого запишем задачу минимизации второй нормы невязки между принятыми и оцениваемыми данными. Для того чтобы найти оптимальную точку с точки зрения второй нормы невязки (3.154) требуется найти частную производную по переменной и найти точку где она будет равна нулю (3.155). Поскольку функция является комплексной, она не аналитическая и от нее нельзя найти производную. Производная может быть найдена при использовании исчисления Виртингера при поиске производной по комплексно сопряженной от переменной \mathbf{h}^* . Так как вторая норма невязки является вогнутой функцией, она имеет только одну точку где производная равна нулю и эта точка является искомой [40]. Для того чтобы найти эту точку производная должна быть приравнена нулю и найдена точка удовлетворяющая данному условию (3.156). Таким образом решением методом наименьших квадратов будет записано как (3.156).

$$\min_{\mathbf{h}} (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{D}_{mod}\mathbf{h})^H (\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{D}_{mod}\mathbf{h}) = \min_{\mathbf{h}} \mathbf{r}_m^H \mathbf{r}_m \quad (3.154)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_m^H \mathbf{r}_m}{\delta \mathbf{h}^*} = -\mathbf{D}_{mod}(\text{vec}(\mathbf{Y}) - \mathbf{D}_{mod}\mathbf{h}) = 0 \quad (3.155)$$

$$\mathbf{h}_{opt} = \mathbf{D}_{mod}^+ \text{vec}(\mathbf{Y}) \quad (3.156)$$

3.4.1.2. Полу-слепой приемник для оценки канала

Приемник может оценить канал даже в случае если ему неизвестно некоторое количество символов в переданном блоке данных. Для этого должны строго выполняться условия определенности задачи и количество неизвест-

ных должно быть меньше количества уравнений. Полу-слепой приемник может быть реализован двумя путями- как ПМНК алгоритм обновляющий постепенно символы и канал либо в алгоритме ньютона для одновременного его обновления. Для метода ПМНК требуется записать две функции невязки (3.157)(3.158) и на каждой итерации решать задачу для обеих функций.

$$\mathbf{r}_{ms} = \text{vec}(\mathbf{Y}^T) - \mathbf{H}\Upsilon_1 \text{vec}(\mathbf{S}^T) \quad (3.157)$$

$$\mathbf{r}_{mh} = \text{vec}(\mathbf{Y}^T) - \mathbf{D}_{mod}\mathbf{h} \quad (3.158)$$

Мы рассмотрели три алгоритма для реализации полу-слепого приемника::

- Приближенный полу-слепой приемник на основе ПМНК
- Полу-слепой приемник на основе ПМНК с уменьшением собственной интерференции
- Полу-слепой на алгоритме Ньютона

Все три алгоритма описаны ниже.

3.4.1.3. Приближенный полу-слепой приемник на основе ПМНК

Приближенный полу-слепой приемник конструируется как ПМНК алгоритм в его классической форме. Дополнительная информация от известных символов так же обновляется на каждой итерации, однако игнорируется на этапе обновления переменных. Алгоритм описан пошагово ниже:

- Задать переменную \mathbf{S}^T как \mathbf{S}^T_{known} . Неизвестные символы приравниваются к нулю.
- Решить СЛАУ (3.154) методом МНК (3.159) и обновить вектор \mathbf{h} .
- Решить СЛАУ (3.154) in the LS sense (3.160) методом МНК $\text{vec}(\mathbf{S}^T)$ и обновить только неизвестные символы.
- Проверить уменьшение невязки и в случае если она больше порога перейти на шаг 2

Выражение для обновления неизвестных показано в (3.159) и в (3.160) выражениях ,где \mathbf{S}_{sel} является матрицей выбора где присутствуют элементы только на диагонали в столбцах неизвестных элементов

$$\mathbf{h}_{opt} = \mathbf{D}_{mod}^+ vec(\mathbf{Y}) \quad (3.159)$$

$$vec(\mathbf{S}^T)_{opt} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{sel}) \cdot vec(\mathbf{S}_{kn}^T) \mathbf{S}_{sel} \cdot \mathbf{\Upsilon}_1^+ \mathbf{H}^+ vec(\mathbf{Y}) \quad (3.160)$$

$$\mathbf{S}_{sel} = \mathbf{I} - diag(vec(\mathbf{S}_{known}^T))^+ diag(vec(\mathbf{S}_{known}^T)) \in \mathbb{C}^{M_t F T_s \times M_t F T_s} \quad (3.161)$$

3.4.1.4. Полу-слепой приемник на основе ПМНК с уменьшением собственной интерференции

Полу-слепой приемник может быть улучшен при помощи свойства линейности передаваемых данных. В случае если система линейна, известные и неизвестные символы могут быть разделены между собой(3.162). Более того модулированные данные так же могут быть разделены на два набора один из которых известен приемнику и второй неизвестный для него. Кроме того матрицы свертки конструируются аналогичным способом. Матрицы выбора позволяют разделить один вектор с известными и неизвестными символами на сумму двух разной или той же размерности

$$vec(\mathbf{X}^T) = \mathbf{\Upsilon}_1 (vec(\mathbf{S}_{kn}^T) + vec(\mathbf{S}_{unk}^T)) \quad (3.162)$$

$$vec(\mathbf{X}^T) = \mathbf{\Upsilon}_1 vec(\mathbf{S}_{kn}^T) + \mathbf{\Upsilon}_1 vec(\mathbf{S}_{unk}^T) \quad (3.163)$$

$$vec(\mathbf{Y}^T) = \mathbf{H} \mathbf{\Upsilon}_1 vec(\mathbf{S}_{kn}^T) + \mathbf{H} \mathbf{\Upsilon}_1 vec(\mathbf{S}_{unk}^T) + vec(\mathbf{E}^T) \quad (3.164)$$

Приемник не может разделить данные во временной области так как используется модуляция хранящая информацию во всех временных слотах для каждого символа. Однако вычитая из принятого сигнала известную часть мы можем уменьшить собственную интерференцию между символа-

ми и увеличить производительность приемника. Таким образом при постановке задачи мы меняем функцию поиска на обновленную (3.165).

$$\mathbf{r}_{mi} = \text{vec}(\mathbf{Y}^T) - \mathbf{H}\mathbf{\Upsilon}_1 \text{vec}(\mathbf{S}_{unk}^T) - \mathbf{H}\mathbf{\Upsilon}_1 \text{vec}(\mathbf{S}_{kn}^T) \quad (3.165)$$

$$\text{vec}(\mathbf{S}_{unk}^T)_{opt} = \mathbf{\Upsilon}_1^+ \mathbf{H}^+ (\text{vec}(\mathbf{Y}^T) - \mathbf{H}\mathbf{\Upsilon}_1 \text{vec}(\mathbf{S}_{kn}^T)) \quad (3.166)$$

$$\mathbf{h}_{opt} = \mathbf{D}_{mod}^+ \text{vec}(\mathbf{Y}) \quad (3.167)$$

Обновленные алгоритм для поиска символов и канальной информации записывается следующим образом.

- Задать переменную \mathbf{S}^T как \mathbf{S}_{kn}^T . Неизвестные символы приравниваются к нулю.
- Решить СЛАУ (3.165) методом МНК (3.166) и обновить вектор \mathbf{h} .
- Решить СЛАУ (3.165) in the LS sense (3.167) методом МНК и обновить $\text{vec}(\mathbf{S}_{unk}^T)$.
- Проверить уменьшение невязки и в случае если она больше порога перейти на шаг 2

3.4.1.5. Регуляризация полу-слепых приемников

Поскольку задачи по решению обратной задачи свертки являются некорректными, требуется использование дополнительных подходов для увеличения стабильности задачи при работе с шумовой составляющей. Существуют два способа регуляризации при помощи дополнительного члена \mathbf{V} в минимизируемой функции. Они достаточно хорошо описаны в литературе [33] и не были использованы в данной работе.

- Метод подпространств
- Сглаживание наименьших квадратов.

3.4.1.6. Полу-слепой приемник на методе Ньютона

Полуслепой приемник может использовать оптимизацию основанную на методе Ньютона. Для этого минимизируемая функция должна быть записана в виде системы нелинейных алгебраических выражения и решена в той же форме как и для модели ОВОВ.

$$\min_{vec(\mathbf{S}_{unk})\mathbf{h}} \mathbf{r}_{mi}^H \mathbf{r}_{mi} \quad (3.168)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_{mi}^H \mathbf{r}_{mi}}{\delta \mathbf{h}^*} = -(\mathbf{D}_u + \mathbf{D}_k)^H (\mathbf{y} - \mathbf{D}_k \mathbf{h} - \mathbf{D}_u \mathbf{h}) = 0 \quad (3.169)$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta vec(\mathbf{S}_{unk})^*} = -(\mathbf{H}\mathbf{\Omega}_k)^H (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{\Omega}_k vec(\mathbf{S}_{kn}) - \mathbf{H}\mathbf{\Omega}_u vec(\mathbf{S}_{unk})) = 0 \quad (3.170)$$

Минимизируемая функция записывается в следующем виде(3.168). Выражение \mathbf{r}_s может быть выписано в двух формах, при этом как и было описано выше оптимальная точка будет являться такой точкой (3.169), где частная производная по неизвестным будет равна нулю. Такая точка всего одна в силу того, что минимизируемая функция вогнута. Выпишем частную производную по переменным, используем для этого исчисление Виртингера, так как функция комплексная(3.170). Записанное выражение является системой нелинейных уравнений которые требуется решить. Для этого мы используем метод Ньютона как и было сказано выше.

$$\mathbf{J}\theta = -\mathbf{F} \quad (3.171)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \mathbf{J}^+ \mathbf{F} \quad (3.172)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta \mathbf{h}^* \mathbf{h}^*} & \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta vec(\mathbf{S}^*) \mathbf{h}} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta \mathbf{h}^* vec(\mathbf{S})} & \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta vec(\mathbf{S}^*) vec(\mathbf{S})} \end{bmatrix} \quad (3.173)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta \mathbf{h}^*} \\ \frac{\delta \mathbf{r}_s^H \mathbf{r}_s}{\delta \text{vec} \mathbf{S}^*} \end{bmatrix} \quad (3.174)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{D}_u + \mathbf{D}_k)^H (\mathbf{y} - \mathbf{D}_k \mathbf{h} - \mathbf{D}_u \mathbf{h}) \\ -(\mathbf{H} \mathbf{\Omega}_k)^H (\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{\Omega}_k \text{vec}(\mathbf{S}_{kn}) - \mathbf{H} \mathbf{\Omega}_u \text{vec}(\mathbf{S}_{unk})) \end{bmatrix} \quad (3.175)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_k + \mathbf{D}_u)^H (\mathbf{D}_k + \mathbf{D}_u) & (\mathbf{D}_k + \mathbf{D}_u)^H \mathbf{H} \mathbf{\Omega}_k \\ (\mathbf{H} \mathbf{\Omega}_k)^H (\mathbf{D}_k + \mathbf{D}_u) & (\mathbf{H} \mathbf{\Omega}_k)^H \mathbf{H} \mathbf{\Omega}_k \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

Метод Ньютона решает СЛАУ на каждой итерации для каждой предполагаемой точки решения [30]. В качестве модулирующей матрицы для СЛАУ выступает Якобиан для частных производных минимизируемой функции (3.173). Для того чтобы выписать Якобиан мы используем свойство, что минимизируемая функция имеет две одинаковые записи. Таким образом Якобиан записывается следующим образом (3.176). К сожалению в данной задаче метод Ньютона является нестабильным и чувствительным к шуму. Для того чтобы уменьшить влияние шума мы использовали простую регуляризацию при помощи суммирования с единичной матрицей до тех пор пока собственное число матрицы не будет меньше порога. Типичное собственное значение Якобина значительно выше 100. Высокое собственное число матрицы приводит к увеличению ошибки. Описание алгоритма Ньютона с использованной регуляризацией описано ниже. Регуляризация позволяет сделать сходимость алгоритма устойчивой и обеспечить сходиться даже если матрица очень плохо обусловлена.

- Установит переменную θ следующим образом (3.177).
- Рассчитать Якобиан и частную производную в заданной точке θ
- Установить переменную $\lambda = 1$.

- Рассчитать выражение $\mathbf{J} = \mathbf{J} + \mathbf{I}\lambda$.
- Установить $\lambda = \lambda * 2$.
- Проверить собственное число Якобиана, если оно больше 15, перейти на шаг 4.
- Решить СЛАУ (3.171) для переменной θ
- Обновить переменную θ при помощи выражения (3.172) .
- Если невязка уменьшилась на значение больше порогового, перейти на шаг 2.

3.5. Результаты моделирования

В данной секции представлены результаты моделирования ОБЧРК системы с МВМВ моделью и показаны результаты работы алгоритмов представленных выше.

Таблица 3.1. ОБЧРК эксперимент 2.1

Параметр	Обозначение	Значение
Схема модуляци	μ	КФМ-2
Отсчетов на символ	T/T_s	16
Поднесущих	F	16
Размер блока данных	T_s	5
Вид фильтра		КиПК
Коэффициент перекрытия	α	0.5
Коэффициенты поднесущих	\mathbf{a}_i	$randi([01])$
Канал	h	АБГШ
Префикс		Нет
Передача		Некодированная

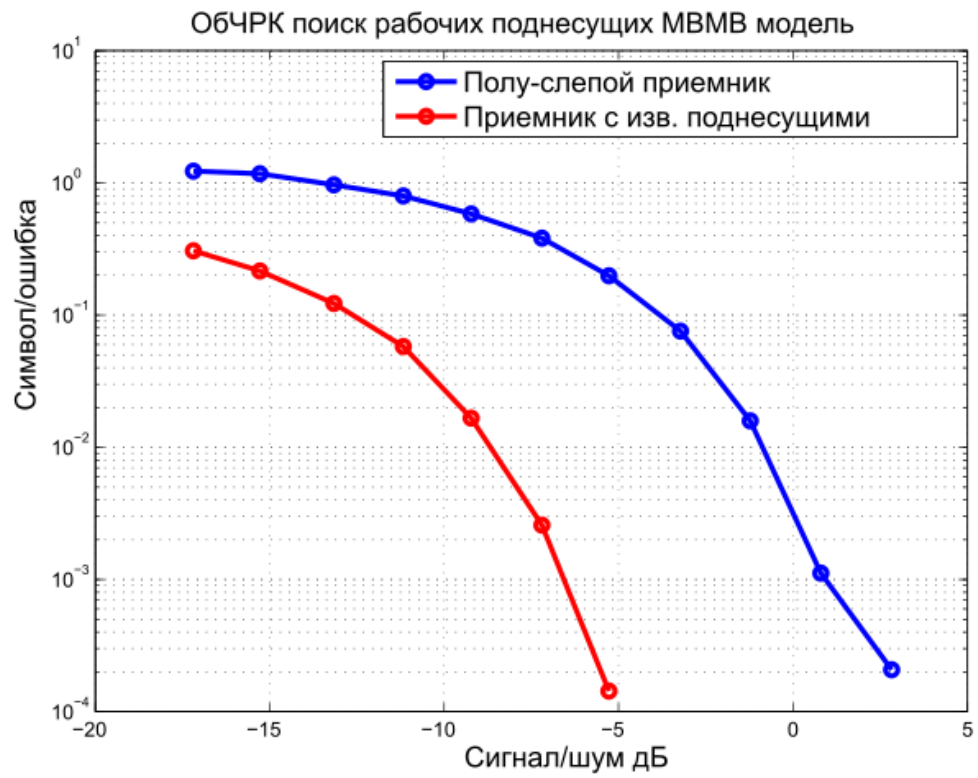


Рис. 3.1. Производительность работы алгоритма поиска поднесущих для случая MBMB

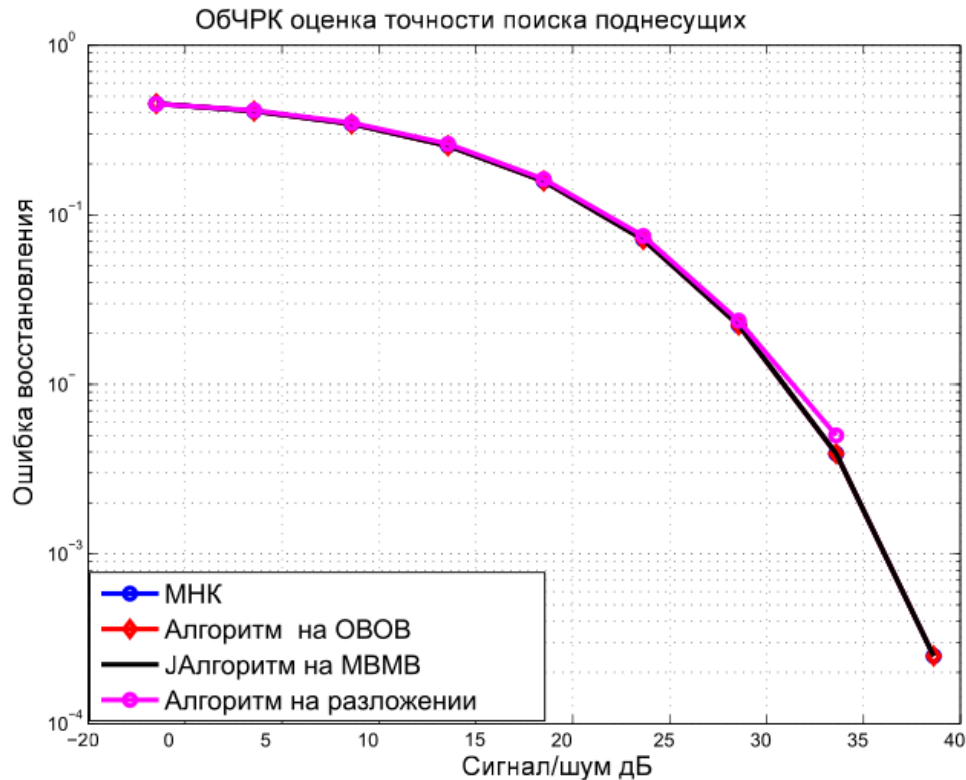


Рис. 3.2. Ошибка восстановления поднесущих для алгоритма поиска поднесущих для случая МВМВ

Производительность системы ОбЧРК для работы алгоритма ортогонализации получены при помощи моделирования. В системе был положен аддитивный белый Гауссов шум без какого либо кодирования. В системе была использована квадратурная фазовая манипуляция. Количество поднесущих равно $F = 16$. Количество временных отсчетов на каждый временной символ равно $T/T_s = F$. Количество временных символов равно $T_s = 5$. В качестве фильтра был использован фильтр с характеристикой "Корень из приподнятого косинуса" с коэффициентом перекрытия $\alpha = 0.5$. Коэффициенты канальной матрицы \mathbf{A} были выбраны как случайные комплексные величины с нулевым моментом первого порядка и среднеквадратичным отклонением модуля числа равным 1. В системе был использован приемник на основе псевдообратной матрицы. На первом рисунке представлены результаты работы алгоритма по ортогонализации влияния канала. Мы сравнивали подход с МВМВ канальной ортогонализацией. Результаты показаны на рис. для приемника на основе псевдообратной матрицы.

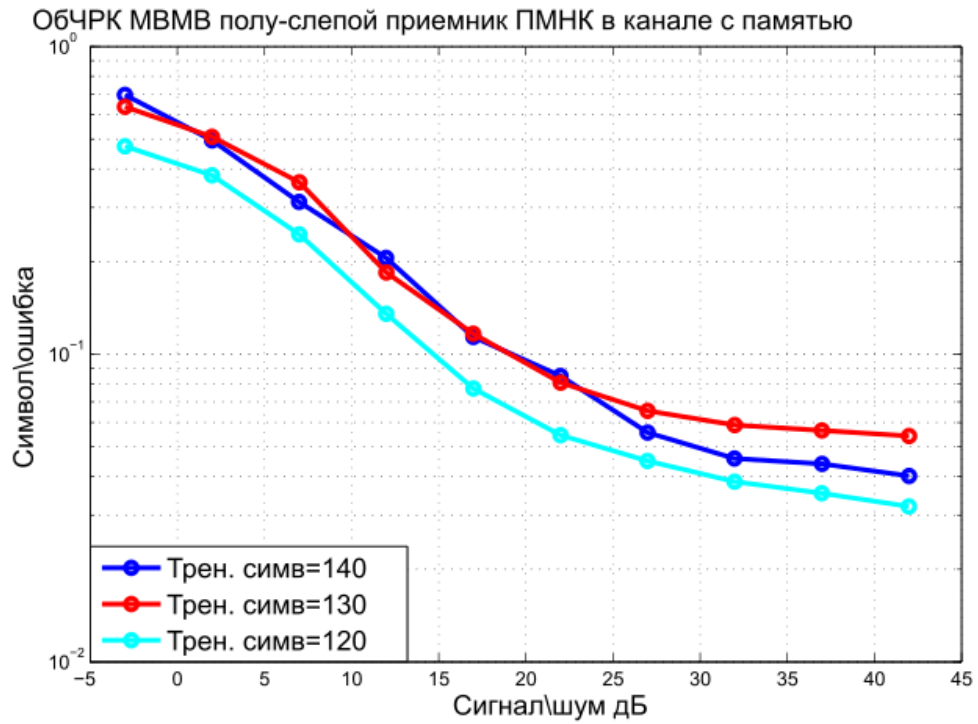


Рис. 3.3. Производительность работы полу-слепого приемника для канала с памятью и системы MBMB

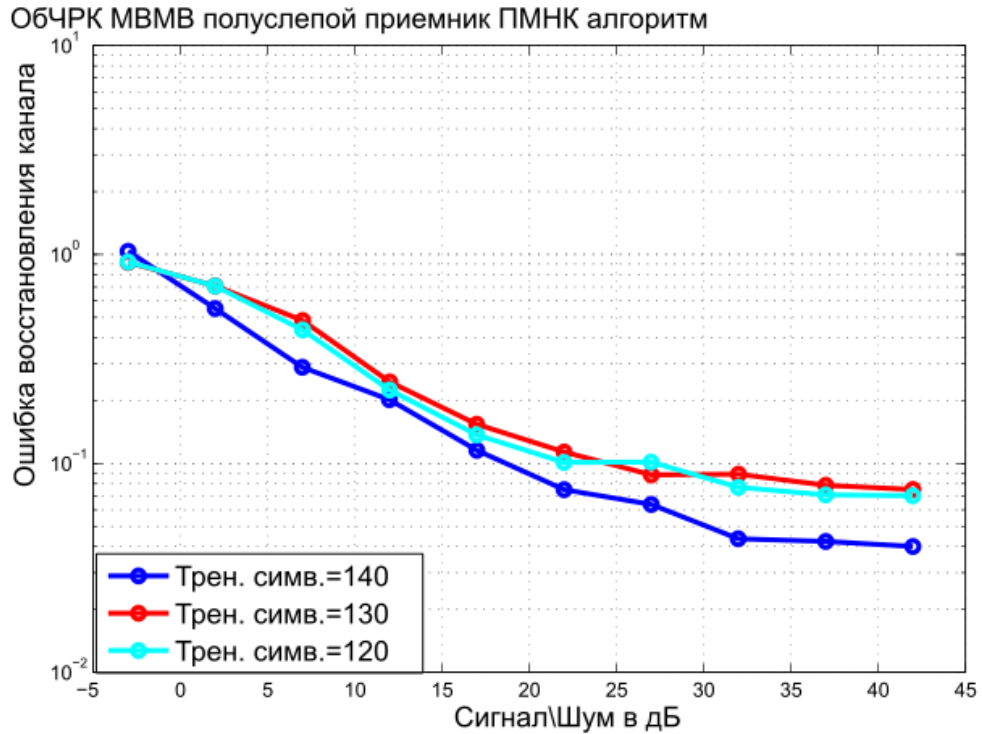


Рис. 3.4. Ошибка восстановления канала полу-слепого приемника для канала с памятью и системы MBMB

Производительность системы ОбЧРК для сравнения поиска величин \mathbf{A} коэффициентов получены при помощи моделирования. В системе был положен аддитивный белый Гауссов шум без какого либо кодирования. В системе была использована квадратурная фазовая манипуляция. Количество поднесущих равно $F = 16$. Количество временных отсчетов на каждый временной символ равно $T/T_s = F$. Количество временных символов равно $T_s = 5$. В качестве фильтра был использован фильтр с характеристикой "Корень из приподнятого косинуса" с коэффициентом перекрытия $\alpha = 0.5$. Коэффициенты канальной матрицы \mathbf{A} были выбраны как случайные целочисленные величины с возможными значениями равными 0 и 1. Результаты работы ОбЧРК представлены на двух рисунках, на первом показаны соотношения символов к количеству ошибок. Для сравнения так же показаны варианты когда система знает истинные коэффициенты матрицы \mathbf{A} и находит решение на основе псевдообратной матрицы. На втором показана ошибка определения значения матрицы \mathbf{A} нормализованное к истинной величине.

Таблица 3.2. ОБЧРК эксперимент 2.2

Параметр	Обозначение	Значение
Передающие антенны кол-во	M_t	2
Приемные антенны кол-во	M_r	2
Схема модуляции	μ	2(КФМ)
Отсчетов на символ	T/T_s	16
Поднесущие	F	16
Размер блока	T_s	5
Вид фильтра		КиПК
Коэффициент перекрытия	α	0.5
Коэффициенты поднесущих	\mathbf{a}_i	$randi([01])$
Канал	h	АБГШ
Префикс		Нет
Передача		Некодированная
Ранг разложения	$rank$	25

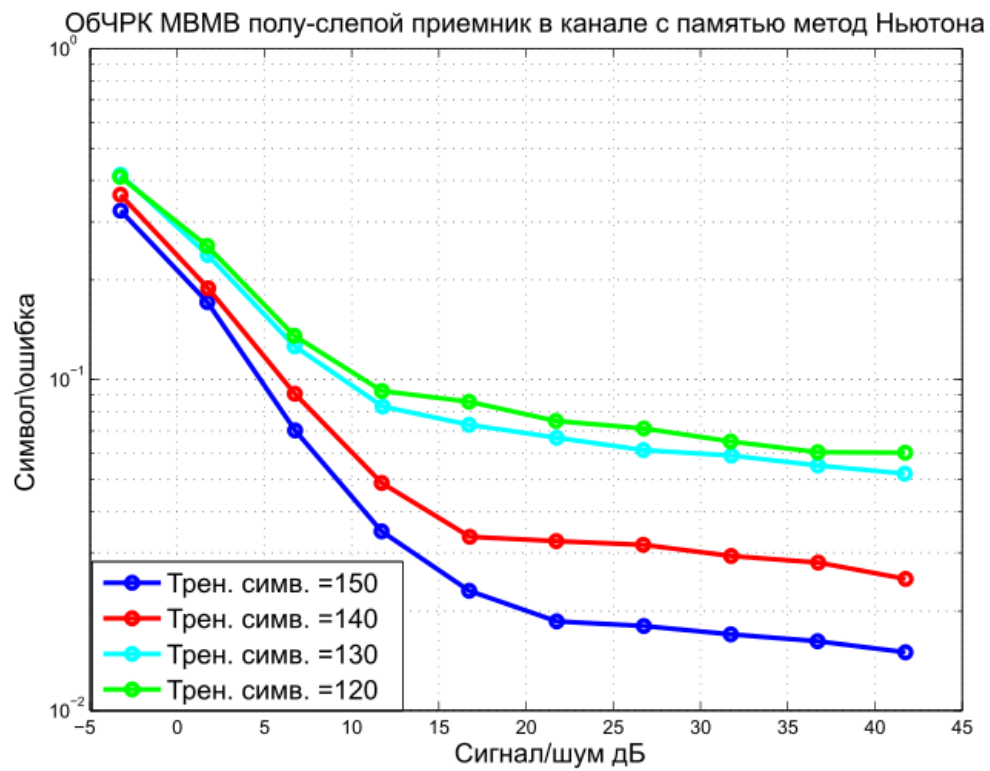


Рис. 3.5. Производительность работы полу-слепого приемника для канала с памятью и системы MBMB. Метод Ньютона

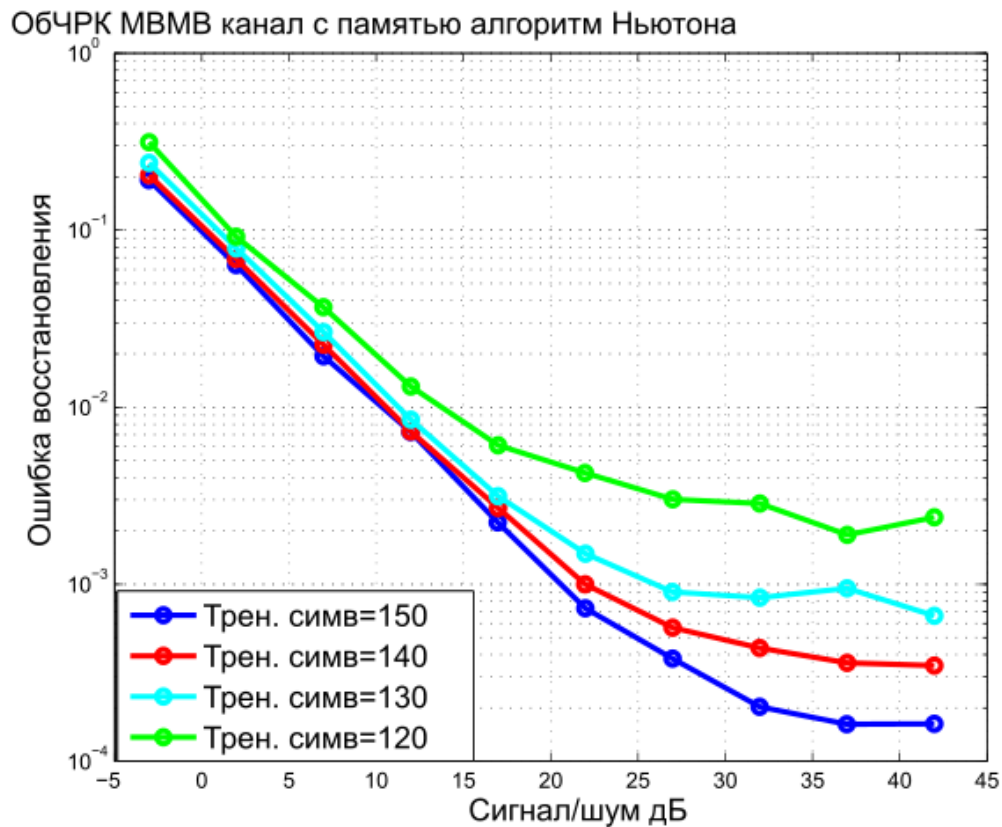


Рис. 3.6. Ошибка восстановления канала полу-слепого приемника для канала с памятью и системы MBMB. Метод Ньютона

Полу-слепой приемник для оценки канала и неизвестных символов основанный на методе Ньютона в системе MBMB был оценен по производительности при помощи симуляции. Для симуляции была использована квадратурная фазовая модуляция. Канал был создан в два этапа: в качестве канала с памятью был использован канал $Ped - A$ из стандартов IEEE, в качестве модели различных антенн было использовано Рэлеевское замирание в канале. Для этого генерировалась матрица случайных комплексных величин \mathcal{H} с дисперсией равной единице. После этого использовалось произведение по третьему пространству для получения канального тензора \mathcal{H} . Количество приемных и передающих антенн задано изначально $M_r = M_t = 2$. Количество поднесущих было $F = 16$, временных отсчетов на символ $T/T_s = F$. Размер блока был задан $T_s = 5$. В качестве фильтра был использован корень из Приподнятого косинуса с коэффициентом перекрытия $\alpha = 1$. Длина канала вычислялась исходя из модели и имела

фиксированную длительность $L + 1 = 4$. Параметры эксперимента так же представлены в табл.3.2. Результаты производительности ОбЧРК показаны на двух графиках. На рис. (3.5) представлена производительность системы по распознаванию символов. Эксперимент показывает зависимость количества тренировочных символов в блоке и соотношения сигнал/шум. На рис. (3.6) показана ошибка восстановления канала от аналогичных переменных. Выражение для ошибка восстановления указано в (3.178).

$$R_e = \frac{|| \mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}} ||^2}{|| \mathbf{h} ||^2} \quad (3.178)$$

3.6. Заключение

В первом эксперименте был исследован алгоритм поиска рабочих поднесущих в системе ОбЧРК с случае МВМВ. Как мы видим из результатов эксперимента, производительность по сравнению с эталоном для которого известны поднесущие упала на 5-6 дБ с точки зрения соотношения символы/ошибки. Данные результат виден из рис. 3.2. Падение в производительности связано с тем что в алгоритме был использован очень простой метод принятия решения по определению включенных поднесущих. Поскольку данная задача является задачей классификации, а мы используем регрессионный метод для поиска значений в алгоритме было использовано простейшее решающее устройство на основе порога. В случае если порог был меньше чем абсолютное значение оцениваемого коэффициента, поднесущая считалась включенной. Таким образом используя более точные методы принятия решения можно добиться лучшего результата.

В качестве алгоритмов оценки поднесущих мы описали 3 различных алгоритма каждый из которых действует различным методом, однако как показали результаты все они показывают одинаковую точность при принятии решений, что видно из рис.3.3. Даже приближенный метод оценки позволяет оценить поднесущие с абсолютно той же точностью. Это может быть связано с тем, что решающее устройство на всех алгоритмах было одинаково, либо ошибка приближенного метода является несущественной. Однако следует отметить, что метод основанный на разложении чувстви-

телен к выбору начальной точки, что делает сходимость алгоритма нестабильной. Из-за этого в результаты в графиках представлены в медианной оценке. Однако как можно видеть по медианной оценке, это не влияет на статистическую сходимость алгоритма.

Как видно из второго эксперимента полу-слепой приемник на основе алгоритмов ПМНК позволяет получать как символы так и оценивать состояние канала. Точность оценки к сожалению не высокая, что связано с достаточно сложными условиями приема, когда проявляется нестабильность соединения между антеннами, и проявления памяти канала для каждого из соединений. Как видно из рис. 3.3, количество ошибок в системе ограничено снизу и производительность не оказывается лучше постоянного коэффициента. Более того аналогичный результат виден и в случае оценки состояния канала на рис. 3.4. Это связано с плохой обусловленностью системы. Кроме того состояние канала и коэффициенты связи между антеннами могут вместе получать эффект значительного ухудшения собственного числа матрицы канала. Таким образом как заключение к алгоритму можно сказать о необходимости использования регуляризующих коэффициентов. Поскольку задача является некорректно поставленной по Тихонову, можно использовать различные алгоритмы стабилизации решения у точки минимума. Однако можно сказать, что сама система имеет значительный потенциал и может показывать значительно лучшие результаты. Так же следует рассмотреть реальные модели канала МВМВ с памятью и типичные модели работы данного канала. Данные модели будут рассмотрены в дальнейшей работы.

Следующий эксперимент показывает производительность полу-слепого приемника на методе Ньютона. Канала в данной модели полагается каналом с памятью модели $Ped - A$ взятый из стандарта IEEE умноженный по третьему пространству с матрицей случайных элементов с дисперсией равной единице. На рис. показана производительность алгоритма по распознаванию символов. Как видно из графика производительность алгоритма так же ограничена сверху и очень сильно зависит от количества тренировочных символов. Это связано с тем, что в относительном измерении количество канальных переменных велико. При этом от собственное

число матрицы канала чрезвычайно велико и приводит к значительным погрешностям при работе алгоритма. Для устранения подобного влияния необходимо использование дополнительных методов как и было описано в предыдущем эксперименте. Однако в данном случае эти методы должны быть внедрены чрезвычайно аккуратно, так как метод второго порядка и очень чувствителен к возможным методам регуляризации. Как видно из рис. точность определения канала значительно выше, чем символов и зависит в меньшей степени от количества символов. Количество тренировочных символов сказывается лишь на верхнем лимите. Данный эффект проявляется только при высоком соотношении сигнал/шум. В дальнейшей работе будут рассмотрены дополнительные алгоритмы по регуляризации и увеличению точности работы полу-слепого приемника а так же модели канала существующие в MBMB системах. В качестве основных тезисов по работе полу-слепого приемника можно выделить следующее:

- Производительность приемника по распознаванию символов мала
 - Производительность приемника по оценке канала применима для работы в алгоритмах
 - Требуется использование регуляризирующих алгоритмов
-

Глава 4.

Заключение

В данной работе была рассмотрена система обобщенной частотной разделения каналов. В первой части мы рассматривали введение в данную систему, метод разделения каналов и тензорную обработку данных. В первой секции была описана необходимость внедрения технологии ОБЧРК для уплотнения поднесущих в системе и уменьшения вне-полосных излучений. Более того подобный подход позволяет регулировать по коэффициенту перекрытия подобную систему и добиться наилучшего результата. Во второй секции была введена тензорная алгебра и ее операции необходимы для использования в дальнейших вычислениях. Была рассмотрена модель тензора *PARATCUK2* которая была использована для моделирования системы ОБЧРК. При этом тензорная модель *PARATCUK2* позволила упростить запись модулирующей матрицы для данных записав ее через произведение Хатри-Рао между двумя матрицами, где первая матрица была матрицей заполненной коэффициентами Фурье и вторая матрица была матрицей с импульсными характеристиками для символов на разных временных слотах. Эта модель чрезвычайно схожа с моделью вейвлетов своим разделением на временное и частотное пространство. Таким образом система работает очень близко к пределу определенности между пространствами времени и частоты. В этом же разделе были рассмотрены особенности влияния коэффициента перекрытия системы ОБЧРК и эффекты перекрытия по частоте с увеличением α . Результаты данного влияния на производительность показаны в разделе симуляций. Так же была рассмотрена разница между

фильтрами с приподнятым косинусом и корнем из приподнятого косинуса. Во втором разделе работы была рассмотрена система ОбЧРК в модели с одной передающей и одной принимающей антенной. Мы моделировали переданный сигнал при помощи тензорной модели *PARATUCK2* в векторизированной форме. Мы рассмотрели два алгоритма применимых в системе ОбЧРК: алгоритм поиска поднесущих частот и алгоритм полу-слепого приемника с оценкой состояния канала. В первом алгоритме мы подразумевали систему с умным передатчиком отключающим работу поднесущих в случае если в ее диапазоне частот присутствует другая излучающая система. При этом приемное устройство должно определить на каких конкретно поднесущих были переданы данные. Для решения данной задачи полагалось знание передатчиком первого символа в блоке данных каждой поднесущей. Таким образом задача имеет одно решение так как количество известных равно количеству неизвестных. Однако поскольку функция нелинейна и зависит от своих же переменных, необходимо решить данную задачу методами оптимизации, что и было сделано в ходе работы. В дальнейшем был рассмотрен случай оценки канала без циклического префикса используя только набор известных в блоке данных символов. Для этого была поставлена оптимизационная задача выписанная в систему нелинейных уравнений и решенная методом Ньютона. При этом данный подход показал лучшую производительность, чем в случае если использовать методы основанные на обратной фильтрации. К сожалению недостатком данного метода является его вычислительная сложность возрастающая с увеличением размеров блока. Однако для таких методов применимы итеративные методы решения задач позволяющие вычислять вычислительно емкие алгоритмы. К классу подобных алгоритмов принадлежат к примеру алгоритмы "ISTA" и "FISTA". В последней части мы расширили описанные в предыдущей секции алгоритмы на случай со множеством передающих и множеством принимающих антенн. Большое количество антенн делает задачу значительно более сложной в силу увеличения количества переменных. Так же усложняется моделирование системы так как с физической точки зрения значительно увеличивается сложность ее описания. Мы переписали выражение описывающее принятые данные векторном виде и та-

ким образом смогли записать канальную модель как произведение блочной треугольной матрицы с вектором символов. Это позволила в дальнейшем упростить выражение и записать подобное равенство для канальных коэффициентов. Тогда при помощи известных для приемника символов была решена задача оценки канала и поиска неизвестных символов для одного блока данных. Алгоритмы работы были сделаны на основе ПМНК и метода Ньютона. Однако оба алгоритма показали недостаточно высокую производительность, что было связано с высоким собственным числом матриц канала. Так же в будущей работе будет предложено решение данных проблем при помощи методов регуляризации. Кроме того производительность алгоритмов при оценке каналов оказалась достаточно высока, что говорит о достаточно хороших перспективах работы алгоритма. Так же был расширен до случая МВМВ алгоритм поиска поднесущих, причем он был расширен до случаев когда любая антенная передает свой уникальных набор поднесущих. При этом была решена задача поиска коэффициентов 4 разными способами: при помощи МНК, алгоритмы основанные на модели ОВОВ и МВМВ а так же алгоритм основанный на разложении тензора на матрицы. При этом использовалось предположение о работе системы в канале с Рэлеевским замиранием канала. Как показали результаты работы системы, алгоритм достаточно сильно ухудшает производительность системы, что связано с большим количеством ошибок в выбранной модели канала. В заключение можно сказать, что оптимизационные алгоритмы позволяют увеличить производительность алгоритмов по сравнению с традиционными аналитическими решениями. В будущей работы будет рассмотрена модель МВМВ передачи данных а так же будет выполнена регуляризация оптимизационных методов связанных с плохой обусловленностью задачи.

Литература

- [1] Cox Donald. Fundamental limitations on increasing data rate in wireless systems. // IEEE Communacation magazine. 2008.
- [2] Matthe M., Michailow N., I.Gaspar. GFDM for 5G cellular networks // IEEE transactions on commenications vol 62. 2014.
- [3] Sklar Bernard. Digital Communcations Fundamental and applications // Prentice Hall 2 edition. 2001.
- [4] Matthe M., Michailow N., Fettweis G. Influse of Pulse shaping on bit-error rate Performance and out of band radiation of GFDM // ICC 14 WS 5G. 2014.
- [5] Kolda Tamara G., Bader Brett W. Tensor Decompositions and Applications // SIAM Review. 2009. T. 51, № 3. C. 455–500.
- [6] B.Valeev Yu. Evdokimov. Model of correlation part in global navigation receiver // KNRTU-KAI, PT&TT. 2014.
- [7] de Lathauwer Lieven, de Moor Bart, Vanderwalle Joos. A multilinear singular value decomposition // SIAM J. MATRIX ANAL. APPL. Vol. 21, No. 4, pp. 1253–1278. 2000.
- [8] Andersson C. A., Bro R. The N-way Toolbox for MATLAB // Chemometrics & Intelligent Laboratory Systems. 52 (1):1-4, 2000. 2000. <http://www.models.life.ku.dk/source/nwaytoolbox/>.
- [9] Garin Lionel J. The "Shaping Correlator Novel Multipath Mitigation Technique Applicable to GALILEO BOC(1,1) Modulation Waveforms in

High Volume Markets // The European Navigation Conference GNSS 2005. 2005.

- [10] Fletcher R. Practical methods of optimization // Wiley. 2000.
 - [11] Bro R., Sidiropoulos N., Giannakis G. PARAFAC: Tutorial and applications // Chemometrics Group, Food Technology, Royal Veterinary & Agricultural University. 1997.
 - [12] de Almeida André L. F., Favier Gérard, Ximenes Leandro R. Space-Time-Frequency (STF) MIMO Communication Systems With Blind Receiver Based on a Generalized PARATUCK2 Model // IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 61, NO. 8,. APR, 2013.
 - [13] R Bro, L. Kiers H. A. A new efficient method for determining the number of components in parafac models // J. Chemometrics, 17: 274–286 doi: 10.1002/ cem.801. 2003.
 - [14] Vilaipornsawai Usa, Jia Ming. Scattered-pilot channel estimation for GFDM // 2014 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC). 2014.
 - [15] andDorin Panaitopolb Rohit Dattaa, , Fettweis Gerhard. Cyclostationary Detection of 5G GFDM Waveform in Cognitive Radio Transmission // IEEE TRANSACTIONS ON COMMUNICATIONS. 2013.
 - [16] Paulraj Arogyaswami, ana Dhananjay Gore Rohit Nabar. Introduction to Space-Time Wireless Communications // Cambridge Univercity Press. 2006.
 - [17] Yang Hongli, He Guoping. Some properties of matrix product and its applications in nonnegative tensor decomposition // Journal of Information and Computing Science. 2008.
 - [18] OFDM: Principles and Challenges / Nicola Marchetti, Muhammad Imadur Rahman, Sanjay Kumar [и др.]. V. Tarokh (ed.), New Directions in Wireless Communications Research,, 2009.
-

-
- [19] Daubechies I., Defriese M., Mol. C. De. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint // Commun. Pure Appl. Math, LVII:1413 1457. 2004.
 - [20] GFDM Interference Cancellation for Flexible Cognitive Radio PHY Design / R. Datta, N. Michailow, M. Lentmaier [и др.] // Vehicular Technology Conference (VTC Fall), 2012 IEEE. 2012.
 - [21] Beck A., Teboulle. M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems // SIAM J. Imag. Sci., 2(1):183-202. 2009.
 - [22] Widely Linear Estimation for Space-Time-Coded GFDM in Low-Latency Applications / Maximilian Matthé, Luciano Leonel Mendes, Nicola Michailow [и др.] // IEEE Transactions on Communications. 2015.
 - [23] Performance GFDM over frequency selective channels / Bruno M. Alves, L.L. Mendes, D.A.Guimaraes [и др.] // Revista Telecommunicationes vol 15. Dec 2013.
 - [24] Bro R., Sidiropoulos N., Giannakis G. A fast least squares algorithm for separating trilinear mixtures // ICA99- Int. Workshop on Independent Component Analysis and Blind Separation. 1999.
 - [25] Fettweis Gerhard, Krondorf Marco, Bittner Steffen. GFDM - Generalized Frequency Division Multiplexing // Vehicular Technology Conference, 2009. VTC Spring 2009. IEEE 69th. 2009.
 - [26] Kelley: C. T. Solving nonlinear equations with Newton methods // SIAM, Philadelphia. 2003.
 - [27] Deufelhard P. Newton methods for nonlinear problems: affine invariance and adaptive algorithms // Springer. 2004.
 - [28] Dembo R.S, Einsenstat S.C., Steihaug T. Inexact Newton methods // SIAM J. Sci. Comput., 19(1), pp. 400408,. 1982.
-

-
- [29] Dennis J.E., Schanabel JR; R.B. Numerical methods of unconstrained optimization and nonlinear equations // Prentice-Hall, Englewood-Cli s. 1983.
 - [30] Tihonov A.N., Asenin V. Ya. Ways to solve Ill-posed tasks // Nauka. 1979.
 - [31] Steinwandt Jens. Tutorial on Convex Optimization for Engineers // Communications Research Laboratory. 2014.
 - [32] Horn R. A., Johnson: C. R. Topics in matrix analysis // Cambridge Univ. Press. 2007.
 - [33] LEUS GEERT, VEEN ALLE-JAN VAN DER. Channel Estimation // Delft University of Technology, Dept. EEMCS, Mekelweg 4, 2628 CD Delft, The Netherlands. 2006.
 - [34] Petersen Kaare Brandt, Pedersen Michael Syskind. The Matrix Cookbook. Petersen & Pedersen,, 2012.
 - [35] Robust MIMO-OFDM System for Frequency-Selective Mobile Wireless Channels / Arafat Al-Dweik, Fatma Kalbat, Sami Muhaidat [и др.] // IEEE TRANSACTIONS ON VEHICULAR TECHNOLOGY, VOL. 64, NO. 5,. MAY 2015.
 - [36] Jankiraman Mohinder. Space-Time-Codes and MIMO systems. Artech House universal personal communications series), 2004.
 - [37] ZHOUR ZEYAD AL, KILICMAN ADEM. MATRIX EQUALITIES AND INEQUALITIES INVOLVING KHATRI-RAO AND TRACY-SINGH SUMS // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. 2006.
 - [38] Michele Heather, Bush Clyburn. KHATRI-RAO PRODUCTS AND CONDITIONS FOR THE UNIQUENESS OF PARAFAC SOLUTIONS FOR $I \times J \times K$ ARRAYS // University of Kentucky. 2006.
 - [39] LIU SHUANGZHE, TRENKLER GÄOTZ. HADAMARD, KHATRI-RAO, KRONECKER AND OTHER MATRIX PRODUCTS //
-

INTERNATIONAL JOURNAL OF INFORMATION AND SYSTEMS SCIENCES. 2006.

- [40] Comon Pierre, Jutten Christian. Handbook of Blind Source Separation / под ред. P. Comon, C. Jutten. Academic Press is an imprint of Elsevier, 2013.
-