

Introducción a Autovalores y Autovectores en Ciencia de Datos

Notas personales

David Sierra Porta (Abril 2025)

1. Introducción

Durante mis estudios en álgebra lineal, me encontré con los conceptos de autovalores y autovectores presentados de manera muy formal y, en ocasiones, árida. Resultaba mi primer curso de Álgebra Lineal en la universidad. Aunque reconozco que mi profesor fue muy bueno y es un gran amigo hoy en día después de tantos años, también reconozco que me sentí un poco atropellado por el curso y la manera tan formal y académica en la que se presentó el contenido. Por su puesto, yo para ese momento muy apasiado de las matemáticas sentí un ejercicio bastante bueno, pero siempre me quedó la pregunta de ¿para qué era importante todo aquello?, ¿que tenía de interesante y cómo podía aplicarlo en problemas concretos interesantes?. Aunque en su momento me resultaron difíciles de conectar con aplicaciones prácticas, hoy, como profesor de ciencia de datos y Machine Learning, me propongo explicar estos conceptos de forma más intuitiva y didáctica. En estas notas, se busca que el estudiante comprenda cómo una transformación lineal puede identificar direcciones “preferentes” en los datos, y cómo esta idea es fundamental en técnicas tan importantes como el análisis de componentes principales (PCA) ([Uddin et al., 2021](#); [Maćkiewicz and Ratajczak, 1993](#); [Abdi and Williams, 2010](#)).

Autovalores y Autovectores en el Procesamiento de Imágenes

En el procesamiento de imágenes, los autovalores y autovectores juegan un papel esencial al describir cómo ciertas transformaciones lineales actúan sobre la información visual ([Firat et al., 2022](#); [Ahmadi et al., 2023](#); [Kurita, 2021](#)). Por ejemplo, en la figura 1 adjunta se muestra un *shear mapping* (cizallamiento), donde la imagen de la Mona Lisa es deformada de manera que algunos vectores se ven “inclinados” mientras que otros permanecen en su misma dirección. En este contexto ([Strang, 2022](#); [Abdi, 2007](#); [Abdi and Williams, 2010](#); [Kurgalin and Borzunov, 2021](#)):

- **Vectores propios (autovectores):** Son aquellos que no cambian de dirección al aplicar la transformación. En el ejemplo, la flecha azul se mantiene alineada, aun cuando el resto de la imagen se deforma.
- **Valores propios (autovalores):** Indican el factor de escala en la longitud de dichos vectores propios. Si un autovalor es 1, el vector conserva su longitud; si es mayor que 1, se “estira”; y si es menor que 1, se “encoge”.

Aplicaciones en Procesamiento de Imágenes

Más allá de la ilustración de cizallamiento, los autovalores y autovectores tienen numerosas aplicaciones prácticas en el tratamiento y análisis de imágenes:

- **Compresión de imágenes mediante SVD:** Al descomponer una matriz de píxeles con la descomposición en valores singulares (SVD), se obtienen valores propios (singulares) y vectores propios (singulares) que permiten aproximar la imagen con menor cantidad de datos, preservando gran parte de la información visual ([Ranjan and Kumar, 2023](#)).
- **Reducción de ruido:** Algunas técnicas de filtrado (p.ej., PCA aplicado a “patches” de una imagen) usan los componentes principales (relacionados con autovectores) para identificar y descartar componentes asociadas a ruido ([Duan et al., 2021](#)).
- **Detección de características:** En visión por computador, la búsqueda de *Eigenfaces* consiste en calcular los autovectores de la matriz de covarianza de un conjunto de rostros, obteniendo direcciones principales que describen variaciones relevantes en la forma o textura de la cara ([Uddin et al., 2021](#)).
- **Registro y alineación de imágenes:** Para alinear imágenes, a menudo se recurre a transformaciones lineales (rotaciones, escalados, cizallamientos). Conocer los vectores propios de dichas transformaciones ayuda a entender qué “direcciones” no se alteran y a controlar mejor el resultado final.

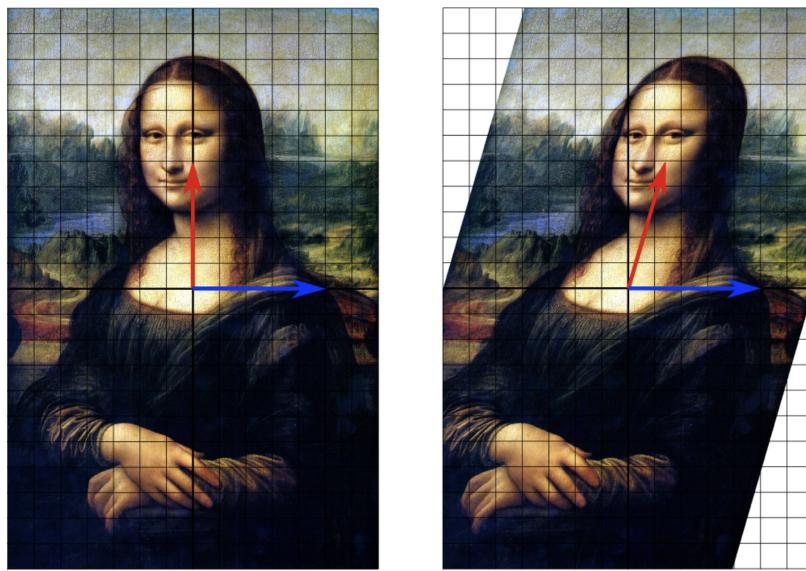


Fig. 1: Shear Mapping, “Eigenvalues and Eigenvectors”. Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors.

Relación con la Transformación de la Imagen

En el ejemplo de *shear mapping*, el vector rojo cambia de dirección, lo que significa que no es autovector. El vector azul, en cambio, *sí* es un autovector, pues permanece alineado a pesar de la deformación global, y su autovalor es 1 (no se “estira” ni se “encoge”). En la práctica, esta idea se extiende a transformaciones más complejas (rotaciones, escalados, proyecciones), donde identificar los vectores propios ayuda a describir cómo se modifica la imagen en cada “dirección fundamental”.

2. Conceptos Fundamentales

En primer lugar, veremos cómo aplicar una matriz a un vector rota y escala un vector. Esto nos mostrará qué son los valores propios y los vectores propios. Despues aprenderemos qué son los componentes principales y que son los vectores propios de la matriz de covarianza.

Para entender los valores propios y los vectores propios, primero tenemos que echar un vistazo a la multiplicación de matrices. Consideremos la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1,4 \\ 1,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuando tomamos el producto punto de una matriz y un vector, el vector resultante es una versión rotada y escalada del original. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1,4 \\ 1,4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2,0 \\ 1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 2,8 \end{bmatrix}$$

Ahora para mirar lo anterior grafiquemos en un plano coordenado y ordenado los vectores iniciales y el vector resultante de la multiplicación de la matriz, véase esto en la figura 2.

En Ciencia de Datos, hablamos sobre todo de puntos de datos, no de vectores. Pero en esencia son lo mismo y pueden utilizarse indistintamente, al menos por ahora! Y los puntos de datos tambien pueden transformarse por multiplicación de matrices del mismo modo que los vectores.

Pero aunque la multiplicación de matrices rota y escala, es una transformación lineal. ¿Por qué la multiplicación de matrices es una transformación lineal? Consideremos un conjunto de puntos de datos (en rojo en la figura 3). Imaginemos una cuadrícula en la que están situados estos puntos. Cuando aplicamos la matriz a nuestros puntos de datos y movemos la cuadrícula junto con los puntos de datos, vemos que las líneas de la cuadrícula permanecen rectas. Si las líneas se curvaran, la transformación sería no lineal.

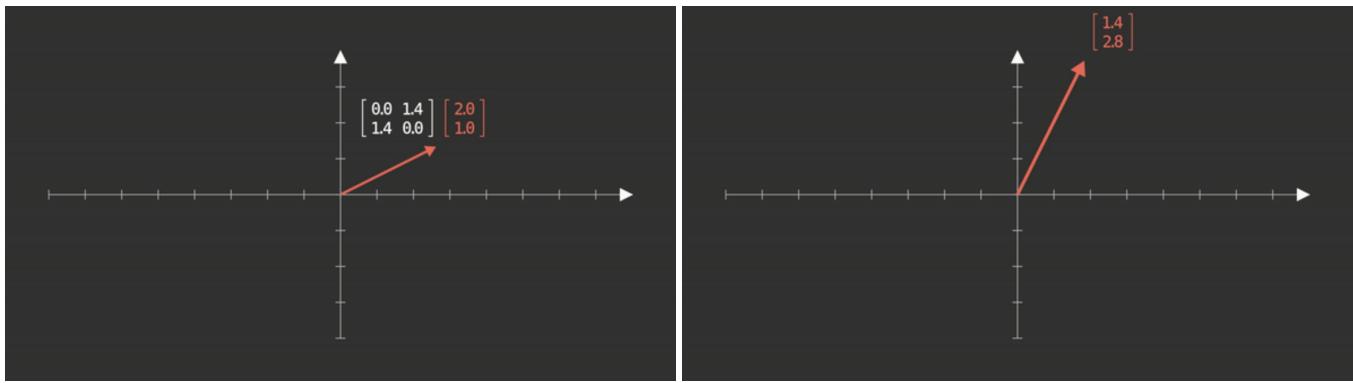


Fig. 2: Una vista de los dos vectores anteriores, el original $[2.0, 1.0]$ y el resultante de la multiplicación matricial $[1.4, 2.8]$.

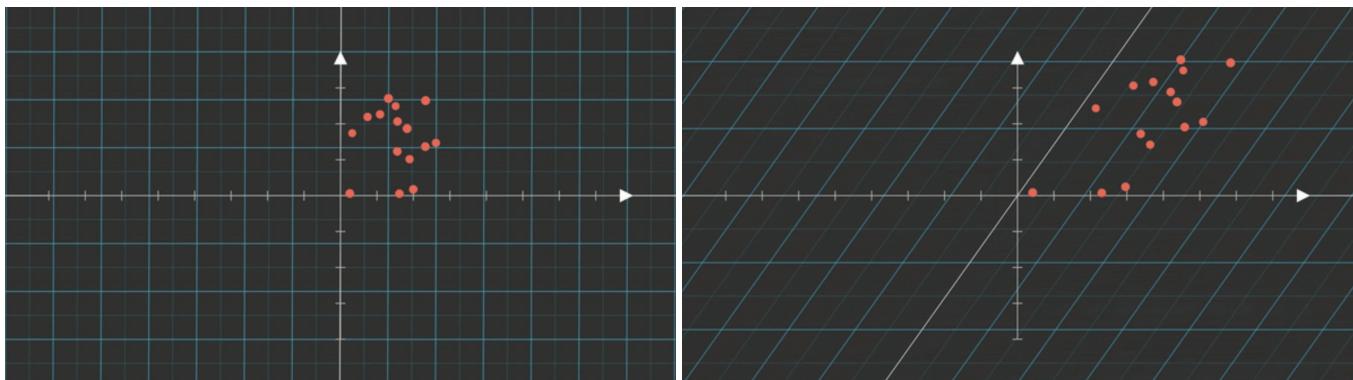


Fig. 3: Vista de una cizalladura en el plano con un conjunto de puntos.

2.1. Vectores propios

Consideramos la misma matriz anterior.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1,4 \\ 1,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Al aplicar esta matriz a distintos vectores, éstos se comportan de forma diferente. Algunos de ellos pueden ser rotados y escalados. Otros sólo se rotan, otros sólo se escalan y otros no cambian en absoluto.

Los vectores propios son los vectores que sólo se escalan, o **no cambian en absoluto** (ver figura 4).

Se puede ver que los vectores propios permanecen en la misma línea y otros vectores (vectores genéricos) se giran en cierto grado. Una matriz de 2×2 siempre tiene dos vectores propios, pero no siempre son ortogonales entre sí.

2.2. Valores propios

A cada vector propio le corresponde un valor propio. Es el factor por el que se escala el vector propio cuando es transformado por la matriz. Consideramos la misma matriz y, por tanto, los mismos dos vectores propios mencionados anteriormente.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1,4 \\ 1,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Uno de los dos vectores propios de esta matriz (lo llamo vector propio 1, pero esto es arbitrario) se escala por un factor de 1,4. El vector propio 2 también se escala por un factor de 1,4, pero su dirección se invierte. Por lo tanto, el valor propio 2 es -1,4.

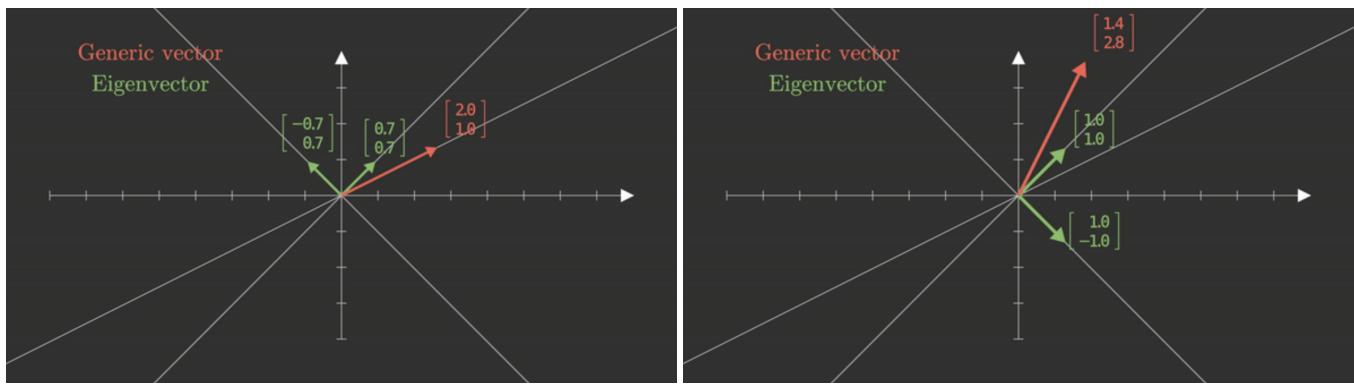


Fig. 4: El vector $[2.0, 1.0]$ cambia completamente (se rota y se escala) al vector $[1.4, 2.8]$, mientras que los vectores $[0.7, 0.7]$ y $[-0.7, 0.7]$ sólo se escalan a los vectores $[1.0, 1.0]$ y $[1.0, -1.0]$, respectivamente.

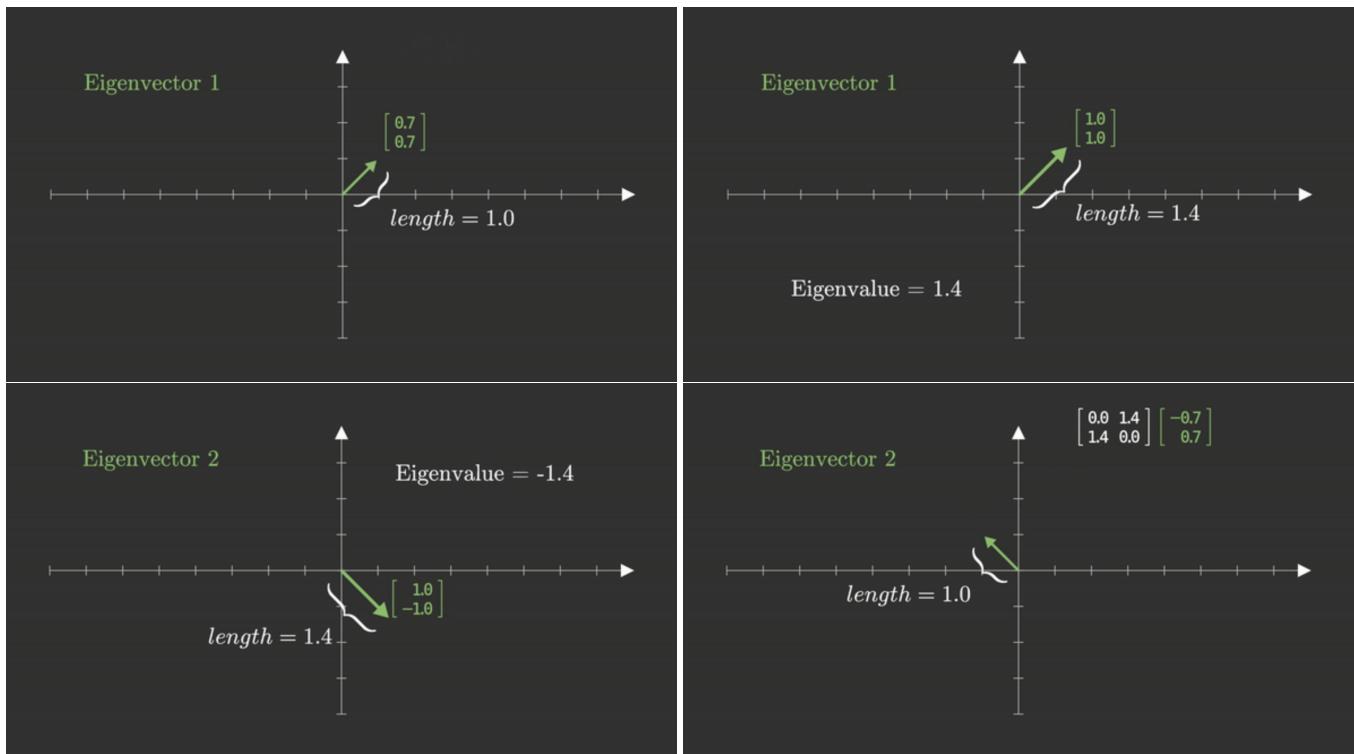


Fig. 5: Los factores de escalado para los vectores $[0.7, 0.7]$ y $[-0.7, 0.7]$ son respectivamente 1.4 y -1.4.

3. Aplicaciones de los valores de los vectores propios y los valores propios en la Ciencia de Datos

Componentes principales: Utilizando los valores propios y los vectores propios, podemos encontrar los ejes principales de nuestros datos. El primer eje principal (también llamado «primer componente principal») es el eje en el que más varían los datos. El segundo eje principal (también llamado «segundo componente principal») es el eje con la segunda mayor variación, y así sucesivamente.

Para esta tarea ahora consideremos un conjunto de datos bidimensional muy popular en ciencia de datos que ha sido usado para probar modelos de machine learning incluso.

El código y su implementación se encuentran en el notebook anexo.

4. Conclusión

A continuación resumiré los conceptos más importantes.

Multiplicación de matrices: Cuando multiplicamos una matriz por un vector, éste se transforma linealmente. Esta transformación lineal es una mezcla de rotación y escalado del vector. Los vectores que sólo se escalan y no se giran se denominan vectores propios. El factor por el que se escalan es el valor propio correspondiente.

Componentes principales: Los componentes principales son los ejes en los que nuestros datos muestran la mayor variación. El primer componente principal explica la mayor parte de la variación observada y el segundo componente principal la segunda mayor parte y así sucesivamente. Los componentes principales son los vectores propios de la matriz de covarianza. El primer componente principal corresponde al vector propio con el mayor valor propio.

PCA: El análisis de componentes principales es una técnica para reducir el número de características de nuestro conjunto de datos. Consta de los siguientes pasos de procesamiento

- Estandarizar los datos restando la media y dividiendo por la desviación estándar.
- Calcular la matriz de covarianza.
- Calcular los valores propios y los vectores propios.
- Fusionar los vectores propios en una matriz y aplicarla a los datos. Esto rota y escala los datos. Los componentes principales están ahora alineados con los ejes de nuestras características.
- Conservamos tantas características nuevas como hayamos especificado y descartamos el resto. Nos quedamos con las características que pueden explicar la mayor variación de los datos.

5. Fuentes

He usado tres fuentes de información principales en este escrito:

- <https://datascienceplus.com/understanding-the-covariance-matrix/>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Iris_flower_data_set
- https://scikit-learn.org/stable/auto_examples/decomposition/plot_pca_iris.html

6. Apéndice Matemático

Cálculo de autovalores y autovectores

Si te interesa la parte más matemática y quieres profundizar, he resumido parte de lo utilizado en esta explicación. En *Python*, por ejemplo, es sencillo calcular autovectores y autovalores de una matriz M ([Oishi et al., 2021](#); [Kurgalin and Borzunov, 2021](#)):

```
>> import numpy as np
>> eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(M)
```

Sin embargo, si deseamos calcularlos a mano, la cosa se complica un poco más. Como hemos visto, cuando multiplicamos la matriz M por un autovector (denotado por \mathbf{v}), sucede que se escala por su autovalor λ :

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Reordenando esta ecuación, obtenemos:

$$(M - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

donde I es la matriz identidad, que contiene unos en la diagonal y ceros en otras posiciones, y tiene la misma forma que M .

Para que exista un vector no nulo \mathbf{v} que satisfaga lo anterior, es preciso que:

$$\det(M - \lambda I) = 0.$$

Determinante y significado geométrico. El determinante de una matriz es el factor por el cual la matriz escala el área (en el caso de matrices 2×2) o el volumen (en el caso de matrices 3×3). Si este determinante es cero, entonces la matriz $(M - \lambda I)$ “aplasta” los puntos hacia el origen (que es el punto cero). De ahí que la única forma de que un vector no nulo \mathbf{v} se convierta en $\mathbf{0}$ tras la transformación sea que el determinante sea nulo.

Búsqueda de autovalores y autovectores. Buscamos entonces todos los autovalores λ que anulan ese determinante (Sreevalsan-Nair, 2023). Una vez hallados los autovalores, resolvemos

$$(M - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

para encontrar los autovectores correspondientes.

Matriz de Covarianza

La matriz varianza-covarianza (D'Agostini, 1994) puede estimarse a partir de los datos usando la siguiente fórmula:

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^T,$$

donde:

- \mathbf{X}_i es el vector de características (o mediciones) de la i -ésima observación.
- $\bar{\mathbf{X}}$ es la media de todos esos vectores.
- n es el número total de observaciones.

El análisis de autovectores y autovalores de esta matriz de covarianza es la base de métodos como el Análisis de Componentes Principales (PCA), donde cada autovector indica una “dirección principal” de variabilidad en los datos, y cada autovalor nos dice cuánta varianza se explica en esa dirección.

Referencias

- H. Abdi. The eigen-decomposition: Eigenvalues and eigenvectors. *Encyclopedia of measurement and statistics*, pages 304–308, 2007. URL <https://malabdali.com/wp-content/uploads/2023/10/Abdi-EVD2007-pretty.pdf>.
- H. Abdi and L. J. Williams. Principal component analysis. *Wiley interdisciplinary reviews: computational statistics*, 2(4):433–459, 2010. doi: <https://doi.org/10.1002/wics.101>.
- M. Ahmadi, A. Sharifi, M. Jafarian Fard, and N. Soleimani. Detection of brain lesion location in mri images using convolutional neural network and robust pca. *International journal of neuroscience*, 133(1):55–66, 2023. doi: <https://doi.org/10.1080/00207454.2021.1883602>.
- G. D'Agostini. On the use of the covariance matrix to fit correlated data. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 346(1-2):306–311, 1994. doi: [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(94\)90719-6](https://doi.org/10.1016/0168-9002(94)90719-6).
- Y. Duan, C. Yang, H. Chen, W. Yan, and H. Li. Low-complexity point cloud denoising for lidar by pca-based dimension reduction. *Optics Communications*, 482:126567, 2021. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2020.126567>.
- H. Firat, M. E. Asker, and D. Hanbay. Classification of hyperspectral remote sensing images using different dimension reduction methods with 3d/2d cnn. *Remote Sensing Applications: Society and Environment*, 25:100694, 2022. doi: <https://doi.org/10.1016/j.rsase.2022.100694>.
- S. Kurgalin and S. Borzunov. *Algebra and geometry with Python*. Springer, 2021. ISBN 978-3-030-61540-6. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-61541-3>.

- T. Kurita. Principal component analysis (pca). In *Computer vision: a reference guide*, pages 1013–1016. Springer, 2021. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-63416-2_649.
- A. Maćkiewicz and W. Ratajczak. Principal components analysis (pca). *Computers & Geosciences*, 19(3):303–342, 1993. doi: [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(93\)90090-R](https://doi.org/10.1016/0098-3004(93)90090-R).
- J. S. Oishi, K. J. Burns, S. E. Clark, E. H. Anders, B. P. Brown, G. M. Vasil, and D. Lecoanet. eigentools: A python package for studying differential eigenvalue problems with an emphasis on robustness. *Journal of Open Source Software*, 6(62):3079, 2021. doi: <https://doi.org/10.21105/joss.03079>.
- R. Ranjan and P. Kumar. An improved image compression algorithm using 2d dwt and pca with canonical huffman encoding. *Entropy*, 25(10):1382, 2023. doi: <https://doi.org/10.3390/e25101382>.
- J. Sreevalsan-Nair. Eigenvalues and eigenvectors. In *Encyclopedia of Mathematical Geosciences*, pages 336–339. Springer, 2023. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-85040-1_98.
- G. Strang. *Introduction to linear algebra*. SIAM, 2022. URL <https://pubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781733146678.fm>.
- M. P. Uddin, M. A. Mamun, and M. A. Hossain. Pca-based feature reduction for hyperspectral remote sensing image classification. *IETE Technical Review*, 38(4):377–396, 2021. doi: <https://doi.org/10.1080/02564602.2020.1740615>.