Muones en medios materiales

D. Sierra-Porta

28 de marzo de 2021

1. Atenuación de muones en medios materiales. Planteamiento del problema.

En este ejercicio estudiaremos el problema de la pérdida de energía de muones cuando estos atraviesan un medio material, particularmente cuando atraviesan roca estándar. Estas partículas elementales (que toman su nombre de la letra griega μ) es una partícula elemental masiva que pertenece a la segunda generación de leptones. Su espín es 1/2 y posee carga eléctrica negativa, como el electrón, aunque su masa es 200 veces mayor que la de este último, y su vida media es algo más larga que otras partículas inestables[1]. Esta es justamente la razón por la que pierden energía cuando se mueven en elgún medio como lo haría, por ejemplo, una esfera de metal que cae en un estanque de agua verticalmente. La mayor parte de los muones que llegan a la superficie terrestre provienen de interacciones de los rayos cósmicos y los núcleos de los átomos de la atmósfera[2]. Como son partículas de gran masa, tienen un alto poder de penetración y la pérdida de energía a su paso por distintos materiales puede modelarse mediante la siguiente ecuación diferencial ya conocida

$$\frac{dE_\mu}{dX} = -a(E_\mu) - b(E_\mu)E_\mu \tag{1}$$

donde E_μ es la energía del muón, X la distancia de penetración[3], los coeficientes $a(E_\mu)$ y $b(E_\mu)$ han sido tabulados dependiendo de la energía en experimentos controlados y para varios materiales[4]. La pérdida de energía que refleja $a(E_\mu)$ se relaciona con la ionización, mientras que $b(E_\mu)$, refleja las pérdidas por procesos radiativos.

2. Resolviendo la ecuación diferencial

Supondremos para esta tarea un modelo de juguete en dos dimensiones en el que supondremos además que queremos medir la dosis de radiación de muones que atraviesan un lecho de roca en la parte superior de una mina en la que trabajan algunos obreros como se muestra en la figura.

1. Para más detalles sobre los muones pueden consultar https://en.wikipedia.org/wiki/Muon
2. Detalles sobre rayos cósmicos y muones atmosféricos pueden consultarlo en http://pdg.lbl.gov/2015/reviews/rpp2015-rev-cosmic-rays.pdf
3. Para consultar el poder de frenado de los materiales para los muones en distintos medios pueden ver http://pdg.lbl.gov/2016/AtomicNuclearProperties/adndt.pdf
4. Los valores originales publicados en el Particle Data Group se encuentran en http://pdg.lbl.gov/2016/AtomicNuclearProperties/HTML/standard_rock.html. Sin embargo, para facilitar la lectura he, construido una tabla específica para esos coeficientes que la encuentran en https://github.com/sierraporta/Curso-Astroparticulas/blob/main/Asignaciones/standard_roc_ab_stopping_power.csv

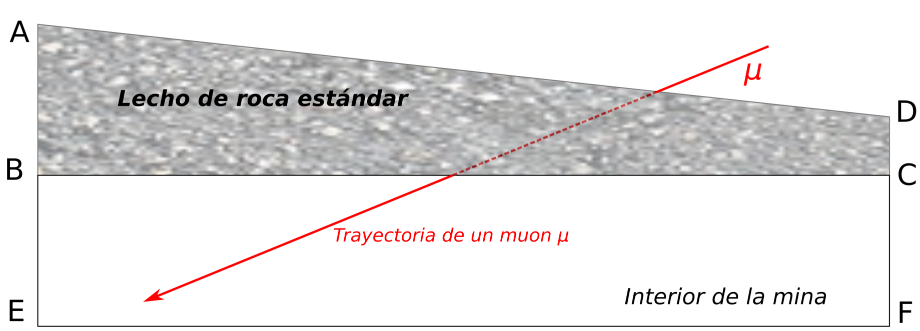

Figura 1: Geometría para el análisis del problema. Las distancias entre puntos son $d_{AB} = 1000$ m, $d_{DC} = 500$ m, $d_{BC} = d_{EF} = 1000$ m, $d_{BE} = d_{CF} = 800$ m.

El lecho de roca está compuesto de roca estándar y las dimensiones para la geomtría del problema son $d_{AB} = 1000$ m, $d_{DC} = 500$ m, $d_{BC} = d_{EF} = 1000$ m. Digamos que los muones llegan (despues de atravesar el lecho de roca) al suelo del interior de la mina, además vamos a considerar que los muones que vienen del interior tienen una energía de 100 GeV.

1. Suponga a y b constantes, integre la ecuación 1, despeje la energía de incidencia (antes de atravesar el material) y escríbala en términos de la energía crítica $\epsilon = a/b$, de la energía de salida y de las dimensiones características del material atravesado.
2. Supongamos ahora que $a = a(E_\mu)$ y $b = b(E_\mu)$ dependen de la energía y por lo tanto $E_\mu = E_\mu(X)$ no puede ser obtenido analíticamente.
   a) Entonces integramos numéricamente, para ello desarrolle e implemente un algoritmo que suponga que en un $\Delta X << 1$, a y b son constantes e integre para obtener la energía al final del intervalo ΔX.

   $$X_{i+1} = \int_{E_{\mu,i}}^{E_{\mu,i+1}} \frac{dE_\mu}{a(E_{\mu,i}) + b(E_{\mu,i})E_\mu} \mapsto E_{\mu,i+1} = (E_{\mu,i} + \epsilon(E_{\mu,i}))e^{-b(E_{\mu,i})X_i} - \epsilon(E_{\mu,i}) \tag{2}$$

   con ese valor de la energía final, se buscan en la tabla[5] los valores para $a(E_{\mu,i})$ y $b(E_{\mu,i})$ y se vuelve a integrar. Repitiendo ese proceso hasta que el muón haya atravesado todo el material. Ahora la energía crítica es $\epsilon(E_{\mu,i}) = a(E_{\mu,i})/b(E_{\mu,i})$. Nos interesa conocer la energía de todos los muones que atraviesen la estructura y que sean captados en el punto de observación.

   b) Quizá se pueda implementar un segundo enfoque si aproximamos la integral poruna cuadratura de Gauss Legendre

   $$X_t = \int_{E_{\mu,in}}^{E_{\mu,out}} \frac{dE_\mu}{a(E_{\mu,i}) + b(E_{\mu,i})E_\mu} \mapsto \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) \tag{3}$$

   con $f(x_k)$ la función evaluada en los ceros de los polinomios de Legendre y los c_k los pesos correspondientes al número de ceros seleccionados.

3. Por hacer

Para esa energía de los muones incidentes (100GeV)

1. Grafique, para ambos métodos, la energía de los muones emergentes de la estructura $E_\mu(\theta)$, con $0 \leq \theta \leq \pi/2$, donde θ es el ángulo cenital, medido desde la vertical hasta el suelo.
2. Compare ambos métodos y determine el número de ceros de los polinomios de Legendre para el segundo método sea comparable con la selección de un paso de integración de $\Delta X \approx 1$ cm en la integral de la ecuación 2 y construya un error medio de $E_{\mu,out}^{approx}(\theta) - E_{\mu,out}^{legendre}(\theta) \approx 10^{-6}$.
3. Compare los tiempos de ejecución (máquina = CPU y usuario = wall clock) con ambos métodos.

5. https://github.com/sierraporta/Curso-Astroparticulas/blob/main/Asignaciones/standard_roc_ab_stopping_power.csv