Combinaciones de resistencia en serie y en paralelo

D. Sierra-Porta

Índice

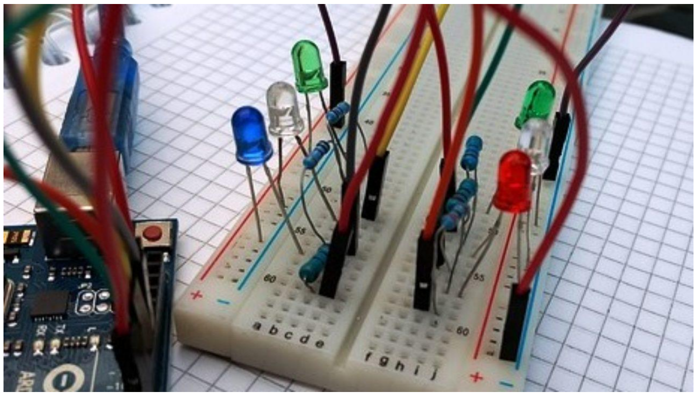
1. Introducción 1
2. Combinaciones de resistencias en serie y paralelo . 1
2.1. Resistencias en serie 1
2.2. Resistencias en paralelo 2
3. Metodología para resolver circuitos 3
4. Fem y la ley de Ohm 4
4.1. Fuente de fem ε y resistencia interna r 4

1. Introducción

En una casa, hay muchos electrodomésticos que tienen que funcionar de manera independiente. Si un electrodoméstico está encendido o apagado, no debería afectar a los otros electrodomésticos. Esto no es posible si todos los dispositivos estuvieran conectados en una disposición en serie, ya que habría un interruptor que los encienda o apague a todos.

Cuando los electrodomésticos están conectados en una disposición paralela, cada uno de ellos se puede encender y apagar de forma independiente. Esta es una característica que es esencial en el cableado de una casa.

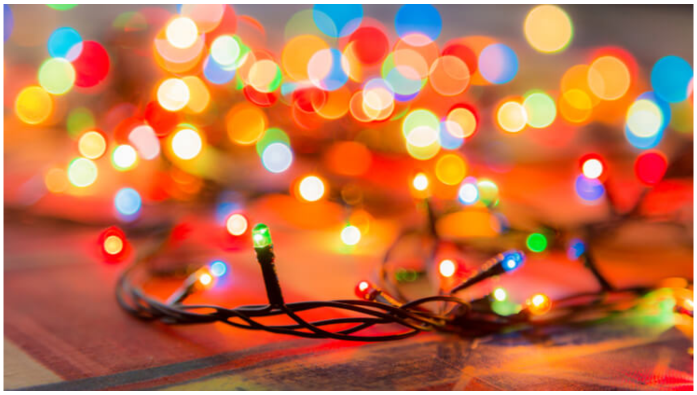
Además, si los dispositivos estuvieran conectados en serie, la diferencia de potencial entre cada dispositivo variaría dependiendo de la resistencia del dispositivo. Esto haría que sea muy difícil proporcionar la potencia adecuada para que fluya a través de los dispositivos. Cuando el cableado de la casa se realiza en paralelo, este problema no surge, ya que la diferencia de potencial en cada dispositivo es la misma e igual a la diferencia de potencial que proporciona la compañía eléctrica.



Los circuitos paralelos se usan en toda su casa, ya que permiten que la corriente siga fluyendo a través de varios caminos, por lo que no está restringido a fluir a través de un camino.

La mayoría de las veces, los enchufes eléctricos en una habitación en particular estarán en un solo circuito, porque el circuito único generalmente puede manejar la carga de varios dispositivos. (Es raro que todo funcione a la vez). Si este fuera un circuito en serie, necesitaría tener algo conectado a cada toma de corriente y ENCENDIDO para encender un solo dispositivo.

Dentro de un sistema de luces de bombillas múltiples, un circuito paralelo asegura que cuando una bombilla se apaga, las otras permanecen encendidas porque cada luz tiene su propio circuito. En un circuito en serie, todas las bombillas se apagarían, y descubrir cuál está quemada es como averiguar qué bombilla se ha encendido con una cadena de luces navideñas.



2. Combinaciones de resistencias en serie y paralelo

2.1. Resistencias en serie

Considere dos resistencias R_1 y R_2 en serie, como en la Figura 1. Esto es análogo, en el flujo de fluido ordinario, a dos mangueras de agua colocadas en serie. Para un cabezal de presión fijo en el grifo, el flujo de agua disminuirá en relación con la caja con una manguera porque el fluido debe sentir sucesivamente una fuerza de arrastre de cada manguera. Por lo tanto, aumenta la resistencia al flujo. De manera similar, la resistencia equivalente R de R_1 y R_2 en serie debería ser mayor que R_1 o R_2. Veamos si este es el caso.

Para que la carga no se acumule continuamente en cualquier parte del circuito, la misma corriente debe fluir a través

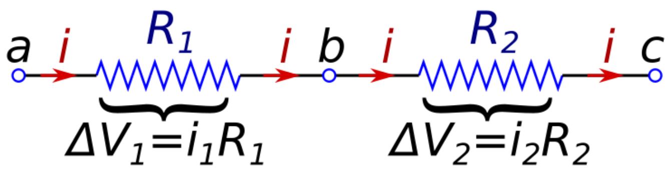


Fig. 1: Dos resistencias en serie. La misma corriente pasa a través de cada uno y a través de la resistencia equivalente. El voltaje a través de la resistencia equivalente es la suma de los voltajes a través de cada resistencia.

de cada uno de ellos. Esta es una manifestación de la ley de conservación de cargas. Así

$$i = i_1 + i_2. \tag{1}$$

Además, debido a que el voltaje es aditivo, la suma de los voltajes en cada resistencia es el voltaje total en la combinación. Así

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2. \tag{2}$$

Aquí, $\Delta V = V_a - V_c$, $\Delta V_1 = V_a - V_b$ y $\Delta V_2 = V_b - V_c$. La resistencia equivalente R viene dada, según la ley de Ohm, por $R = \Delta V/i$. Como se esperaba, R es mayor que R_1 o R_2 porque, para la corriente fija i, la caída neta de voltaje excede la de cualquier resistencia. Podemos determinar R explícitamente.

Aplicando la ley de Ohm al sistema como un todo, y a cada resistencia por separado, se obtiene

$$i = \frac{\Delta V}{R}, \quad i_1 = \frac{\Delta V_1}{R_1}, \quad i_2 = \frac{\Delta V_2}{R_2}. \tag{3}$$

Rearreglando las ecuaciones estas y usando que la corriente total es igual a la suma de las corrientes individuales sobre cada resistor, queda que

$$iR = i_1 R_1 + i_2 R_2 \to R = R_1 + R_2. \tag{4}$$

De hecho, R es mayor que R_1 o R_2. Como $\Delta V_1 = iR_1 = \Delta V(R_1/R)$ y $R_1 < R$, al usar ΔV como entrada y ΔV_1 como salida, este circuito puede usarse como divisor de voltaje.

Tenga en cuenta que, para resistencias en serie: (1) la corriente es la misma a través de cada resistencia y es la misma que la combinación; (2) la resistencia más grande domina, y la resistencia combinada es mayor que la resistencia más grande; (3) el voltaje a través de cada resistencia es proporcional a su resistencia.

Ejemplo: Un cable y computador en serie.

Considere un cable con una resistencia equivalente de $R_1 = 0.1\Omega$ y un computador de resistencia equivalente $R_2 = 20\Omega$. Un voltaje $\Delta V = 120$ V está disponible para conectar ambos. Compare la corriente a través del computador solo y cuando se coloca en serie con el cable.

Solución: Solo para el computador, $i = \Delta V/R_2 = 120/20 = 10$ A. Para el computador en serie con el cable se tendrá entonces que $R_t = 20.1\Omega$ e $i = \Delta V/R_t = 120/20.1 = 5.97$ A, que es casi lo mismo que para el computador solo. Por esta razón, generalmente descuidamos la resistencia eléctrica de los cables de conexión en un circuito. Sin embargo, si la longitud del cable de conexión fuera mayor en un factor de 100, entonces su resistencia aumentaría en un factor de 100 a 10 Ω, lo que no es despreciable.

2.2. Resistencias en paralelo

Considere dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, como en la Figura 2. Podemos pensar en R_2 como una derivación a R_1. Una situación análoga en el flujo de líquidos proviene de la medicina, donde una arteria coronaria obstruida es puenteada por una arteria artificial. A partir del aumento del flujo neto, esperamos que la resistencia equivalente R de la combinación sea menor que R_1 o R_2. Veamos si este es el caso.

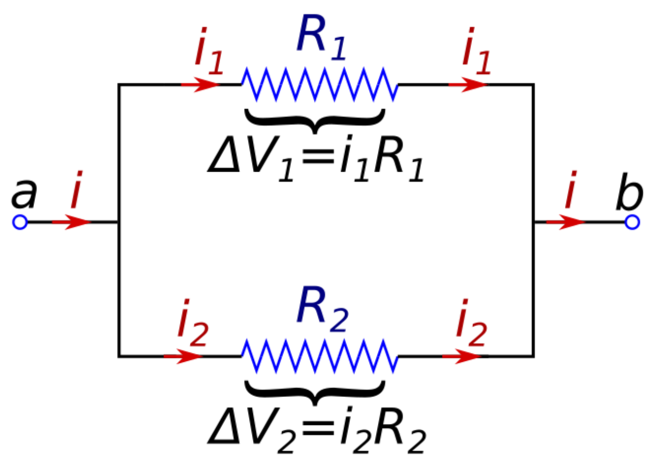


Fig. 2: Dos resistencias en paralelo. La misma diferencia de voltaje es a través de cada resistencia y a través de la resistencia equivalente. La corriente a través de la resistencia equivalente es la suma de las corrientes a través de cada resistencia.

Por la independencia del camino del voltaje, R_1 y R_2 están sujetos a la diferencia de voltaje común

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2, \tag{5}$$

aquí $\Delta V = V_a - V_b$.

Para que la carga no se acumule en ninguna parte del circuito, incluidos los vértices a y b, la corriente que ingresa y sale debe ser la misma que la suma de las corrientes que fluyen a través de cada uno. Esta es una manifestación de la ley de conservación de la carga. Así

$$i = i_1 + i_2. \tag{6}$$

La resistencia equivalente R viene dada, según la ley de Ohm, por $R = \Delta V/i$. Como se esperaba, esto es más pequeño que R_1 o R_2 porque, para una caída de voltaje fija δV, las corrientes a través de cada resistencia se suman. Ahora determinamos explícitamente R. Para cada rendimiento de resistencia y para la resistencia combinada tendremos

$$\frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2}. \quad (7)$$

Dado que todos los voltajes son iguales esto queda finalmente que la inversa de la resistencia efectiva viene dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (8)$$

De hecho, R es más pequeña que R_1 o R_2. Dado que $i_1 = \Delta V/R_1 = i(R/R_1)$, y $R < R_1$, usando i como entrada e i_1 como salida, este circuito puede usarse como corriente divisor. Para algunos propósitos, es útil pensar en términos de lo que se llama conductancia

$$G = \frac{1}{R}. \quad (9)$$

Su unidad, el mho, es lo mismo que un ohm inverso (ω^{-1}). Para resistencias en paralelo, las conductancias se suman, al igual que para los condensadores en paralelo se suman las capacidades.

Tenga en cuenta que, para resistencias en paralelo: (1) la diferencia de voltaje es la misma en cada resistencia y es la misma que en la combinación; (2) la resistencia más pequeña domina, y la resistencia combinada es más pequeña que la resistencia más pequeña; (3) la corriente a través de cada resistencia es inversamente proporcional a su resistencia.

Ejemplo: Un cable y computador en paralelo.

Considere un cable con una resistencia equivalente de $R_1 = 0.1\Omega$ y un computador de resistencia equivalente $R_2 = 20\Omega$. Un voltaje $\Delta V = 120$ V está disponible para conectar ambos. Encuentre el voltaje a través de la combinación y la corriente a través de cada uno.

Solución: La resistencia de la combinación es $0.0995\ \Omega$, que es casi la del cable solo. Además, $\Delta V = rR_t = 0.597$ V, mucho menos que los 120 V necesarios para conducir dicha corriente solo a través del computador. La mayor parte de la corriente fluye a través del cable ($i_1 = \Delta V/R_1 = 5.97$ A), en lugar del computador ($i_2 = \Delta V/R_2 = 0.03$ A). El cable es el camino de menor resistencia.

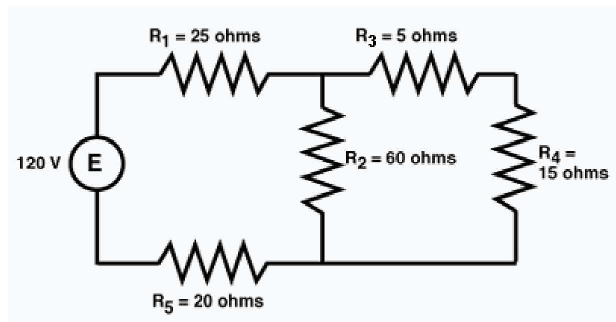
3. Metodología para resolver circuitos

Muchos circuitos de la vida real son una combinación de elementos en serie y en paralelo. No es posible resolver estos circuitos mediante la aplicación directa de estas reglas básicas. Sin embargo, agregar algunos procedimientos simples para reducir el circuito a una serie simple o circuito paralelo nos permitirá resolver la mayoría de los circuitos de interés.

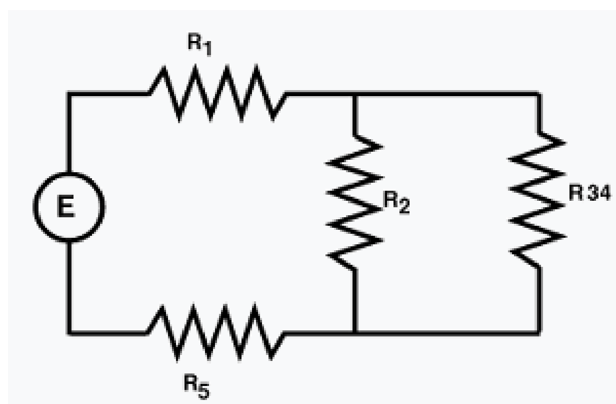
El procedimiento básico es utilizar un proceso paso a paso para reemplazar combinaciones de elementos que están en series simples o paralelas con el valor equivalente de resistencia simple. Para ello, se pueden usar reglas para la adición de resistencia en serie o en paralelo. Cuando se obtiene una serie simple o un circuito paralelo, este circuito se resuelve. Los resultados se pueden usar para resolver los valores en el circuito más complicado, generalmente simplemente invirtiendo el proceso utilizado para simplificar el circuito.

El siguiente ejemplo demostrará este método de solución.

1. Simplifique el circuito paso a paso combinando grupos de resistencias en serie o en paralelo a una resistencia simple equivalente, produciendo así un circuito equivalente que pueda resolverse más fácilmente. Para el ejemplo que se muestra, se requerirán dos combinaciones.



2. Resuelva el circuito simplificado mediante la aplicación de las reglas básicas para un circuito en serie o en paralelo.



Por ejemplo, aplicando las reglas básicas de los circuitos en serie y usando la Ley de Ohm, podemos resolver el flujo de corriente y la caída de voltaje en cada elemento. Aplicando la Ley de Ohm para todo el circuito,

$$R_{34} = R_3 + R_4 = (5 + 15)\Omega = 20\Omega. \quad (10)$$

Recordando la regla para un circuito en serie simple de la sección de resistencia en serie

$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{34}} \rightarrow R_{234} = 15\Omega. \quad (11)$$

Esto quiere decir que ahora que R_1, R_5 y R_{234}, se encuentran en serie, por lo que, $R_t = R_1 + R_5 + R_{234} = (25+15+20)\Omega = 60\Omega$. Luego aplicando la Ley de Ohm a cada elemento

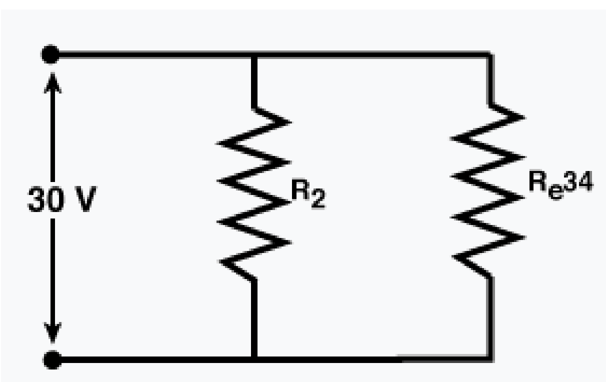
$$i_t = \frac{\Delta V_t}{R_t} = \frac{120 \text{ V}}{60\Omega} = 2 \text{ A} \quad (12)$$

$$R_t = R_1 + R_{e34} + R_5 = (25+15+20)\Omega = 60\Omega, \quad (13)$$

$$i_t = i_1 = i_{e34} = i_5 = 2 \text{ A}. \quad (14)$$

3. Usando la información del circuito equivalente, trabaje hacia atrás en un proceso paso a paso hacia el circuito original. Para el problema de ejemplo, esto requerirá dos pasos.

   a) Conociendo la caída de voltaje total es de 120 V y que los voltajes de R_1, R_5 y R_{234} suman justamente este voltaje total, y además que $\Delta V_1 = i_1 R_1 = 50$ V, $\Delta V_5 = i_5 R_5 = 40$ V y $\Delta V_{234} = i_{234} R_{234} = 30$ V, entonces vemos que el voltaje en las dos resistencias paralelas R_2 y R_{34} es 30 V. Por lo tanto, podemos resolver el flujo de corriente a través de cada una de las resistencias.



   b) Conociendo el flujo de corriente a través de R_{34}, la cual es igual a 1.5 A, ahora sabemos que el flujo de corriente a través de cada una de las dos resistencias (R_3 y R_4) en la serie debe ser de 1.5 A también. Por lo tanto, podemos resolver la caída de voltaje en cada una de las dos resistencias.

$$i_2 = \frac{\Delta V_2}{R_2} = \frac{30 \text{ V}}{60\Omega} = 0.5 \text{ A}, \quad (15)$$

$$i_{34} = \frac{\Delta V_{34}}{R_{34}} = \frac{30 \text{ V}}{20\Omega} = 1.5 \text{ A}, \quad (16)$$

$$i_{234} = i_2 + i_{e34} = (2 - 0.5) \text{ A} = 1.5 \text{ A} \quad (17)$$

4. Ahora hemos resuelto con éxito el flujo de corriente y la caída de voltaje en cada elemento del circuito combinado serie-paralelo.

$$\Delta V_3 = i_3 R_3 = (1.5 \text{ A})(5\Omega) = 7.5 \text{ V}, \quad (18)$$

$$\Delta V_4 = i_4 R_4 = (1.5 \text{ A})(15\Omega) = 22.5 \text{ V}. \quad (19)$$

$$\Delta V_{34} = \Delta V_3 + \Delta V_4 = 30 \text{ V} = (7.5 + 22.5) \text{ V}. \quad (20)$$

4. Fem y la ley de Ohm

Considere una batería común. Las reacciones químicas que producen corriente conducen la carga eléctrica a través del electrolito de una celda voltaica, poniendo un exceso de carga en un electrodo y un déficit de carga en el otro electrodo. Esta acumulación de carga en los electrodos tiende a oponerse al flujo de corriente con un voltaje de retorno ΔV. (ΔV también se denomina voltaje terminal). El valor de ΔV depende de la carga unida a los electrodos de la celda. En un circuito abierto, la corriente que fluye es nula $i = 0$; El valor de ΔV para el cual $i = 0$ se define como la fem ε de la celda. Es decir, $\varepsilon = \Delta V_i = 0$. Las reacciones químicas proporcionan ε, y la física (carga eléctrica impulsada por reacciones químicas a los electrodos de la célula) proporciona ΔV en oposición a ε.

Cuando $\Delta V \neq \varepsilon$, una celda también puede conducir una corriente eléctrica, y la celda debe ser descrita por más que su fem ε.

4.1. Fuente de fem ε y resistencia interna r

La figura 3 muestra un circuito específico donde la fuente de fem es una celda voltaica. Un electrodo de la celda voltaica se estira más que el otro, para indicar que, dentro de la celda, la fem ε tiende a conducir la corriente $i > 0$ desde el electrodo más pequeño al más grande; aquí a la derecha. Para que $\Delta V\Big|_{i=0} = \varepsilon$ corresponda al flujo de corriente cero, $\delta V > 0$ significa que el voltaje más alto debe estar a la derecha, para oponerse al flujo de corriente. Esta convención de signos para el voltaje es opuesta a la de una resistencia, donde el voltaje impulsa la corriente.

Apliquemos algún razonamiento teórico a la energía de la fuente de fem. Considere pequeñas desviaciones de ΔV para ε, para las cuales hay una pequeña corriente no nula i. En la Figura 3, durante un tiempo dt, la carga $dQ = idt$ ingresa a la fuente de fem a la izquierda y (siempre que la carga no se acumula dentro de la fuente de fem) una carga igual sale a la derecha. Esto es lo que hace la fuente de fem: (1) eleva el voltaje a través de la celda en ΔV para que la energía potencial eléctrica de la carga dQ aumente en $(\Delta V)dQ$; (2) debido a que tiene su propia resistencia eléctrica r, llamada resistencia interna, también proporciona la energía de calentamiento Joule $i^2 r dt = irdQ$. Estos dos tipos de energía deben venir a expensas de la fuente de fem y deben ser proporcionales a dQ.

Llamando a la constante de proporcionalidad D, la fuente de fem proporciona energía DdQ. Por lo tanto

$$DdQ - (\Delta V)dQ + IrdQ, \quad (21)$$

entonces

$$D = kV + Ir. \quad (22)$$

Dado que D debe ser consistente con $\Delta V = \varepsilon$ para $i \to 0$, deducimos que $D = \varepsilon$. Por lo tanto, esperamos que

$$\varepsilon = \Delta V + ir. \quad (23)$$

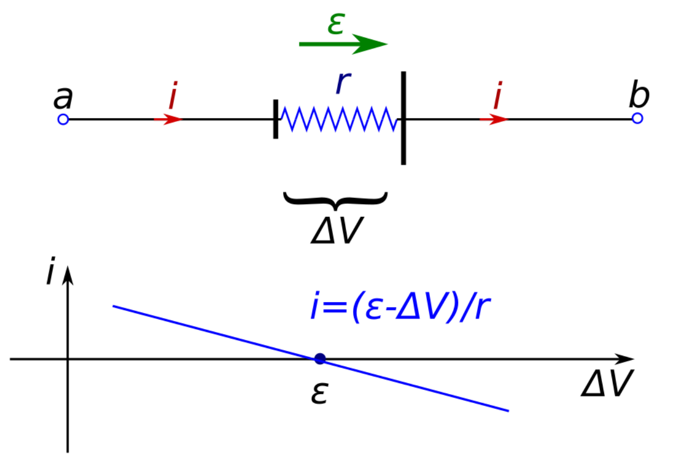


Fig. 3: Determinación de la fem de una batería u otra fuente de fem. (a) Se considera que el electrodo grande es positivo y el electrodo pequeño es negativo. El electrolito, que contacta a ambos electrodos, está representado por la resistencia interna r. Se miden tanto la corriente como la diferencia de voltaje. (b) Corriente versus diferencia de voltaje para una fuente de fem. La corriente va a cero cuando ΔV es igual a la fem ε, y la resistencia interna r se determina a partir de la pendiente.

La forma experimental típica de la curva i versus ΔV se da en la Figura 3. De acuerdo con esto, para ΔV cerca de ε, la Figura 3 satisface

$$i = \frac{\varepsilon - \Delta V}{r}. \tag{24}$$

Asumiremos que lo anterior se aplica a todos los δV, no solo a ΔV cerca de ε. (Para fuentes complejas de fem, r puede variar con i y ΔV.)

También asumiremos en lo anterior que se mantienen para fuentes de fem distintas a las células voltaicas, tales como baterías de células voltaicas, dispositivos termoeléctricos o células fotovoltaicas. Para una fem dada ε y ΔV, r determina qué tan grande proporcionará una corriente la fem. Una batería de automóvil de 12 V puede proporcionar cientos de amperios, pero una batería electrónica de 12 V puede proporcionar solo unos pocos amperios; la batería del automóvil tiene el r más pequeño. La corriente máxima que una célula puede proporcionar ocurre espontáneamente para $\Delta V = 0$, y para ε/R.