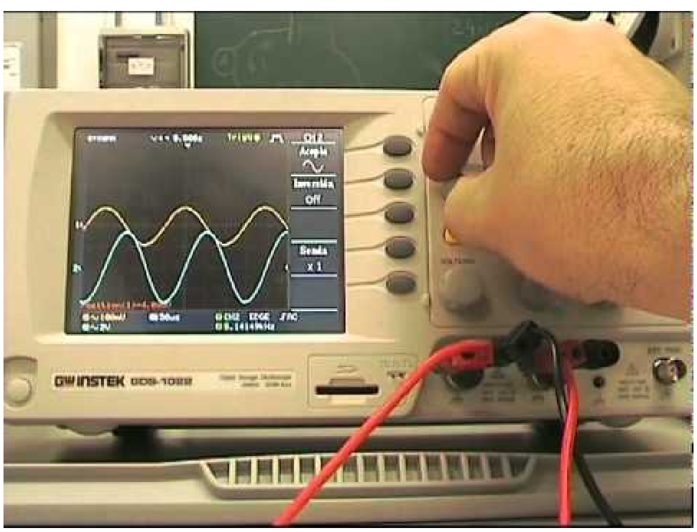
Movimiento Armónico Simple

D. Sierra-Porta

Índice

1. Resumen

Comenzamos esta parte estudiando un tipo especial de movimiento llamado movimiento periódico, el movimiento repetitivo de un objeto en el que continúa regresando a una posición dada después de un intervalo de tiempo fijo. Los movimientos repetitivos de dicho objeto se denominan oscilaciones. Centraremos nuestra atención en un caso especial de movimiento periódico llamado movimiento armónico simple. Todos los movimientos periódicos se pueden modelar como combinaciones de movimientos armónicos simples. El movimiento armónico simple también forma la base para nuestra comprensión de las ondas mecánicas. Las ondas de sonido, las ondas sísmicas, las ondas en cuerdas estiradas y las ondas de agua son producidas por alguna fuente de oscilación. Cuando una onda de sonido viaja a través del aire, los elementos del aire oscilan de un lado a otro; Cuando una ola de agua viaja a través de un estanque, los elementos del agua oscilan hacia arriba y hacia abajo, hacia atrás y hacia adelante.



El movimiento de los elementos del medio tiene una gran semejanza con el movimiento periódico de un péndulo oscilante o un objeto unido a un resorte. Para explicar muchos otros fenómenos en la naturaleza, debemos entender los conceptos de oscilaciones y ondas. Por ejemplo, aunque los rascacielos y los puentes parecen ser rígidos, en realidad oscilan, algo que los arquitectos e ingenieros que diseñan y construyen deben tener en cuenta. Para comprender cómo funcionan la radio y la televisión, debemos comprender el origen y la naturaleza de las ondas electromagnéticas y cómo se propagan a través del espacio. Finalmente, gran parte de lo que los científicos han aprendido sobre la estructura atómica proviene de la información transportada por las ondas. Por lo tanto, primero debemos estudiar las oscilaciones y las ondas si queremos comprender los conceptos y las teorías de la física atómica.

Hay al menos cuatro tipos de ondas en esta imagen, solo las ondas de agua son evidentes. También hay ondas de sonido, ondas de luz y ondas en las cuerdas de la guitarra. (crédito: John Norton)

¿Qué tienen en común una boya oceánica, un niño en un columpio, el cono dentro de un altavoz, una guitarra, átomos en un cristal, el movimiento de las cavidades torácicas y los latidos de los corazones? Todos oscilan, es decir, se mueven hacia adelante y hacia atrás entre dos puntos. Muchos sistemas oscilan y tienen ciertas características en común. Todas las oscilaciones implican fuerza y energía. Empujas a un niño en un columpio para que comience el movimiento. La energía de los átomos que vibran en un cristal se puede aumentar con el calor. Pones energía en una cuerda de guitarra cuando la tocas.

Algunas oscilaciones crean ondas. Una guitarra crea ondas de sonido. Puedes hacer olas de agua en una piscina golpeando el agua con la mano. Sin duda puedes pensar en otros tipos de olas. Algunos, como las ondas de agua, son visibles. Algunos, como las ondas sonoras, no lo son. Pero cada ola es una perturbación que se mueve desde su fuente y transporta energía. Otros ejemplos de olas incluyen terremotos y luz visible. Incluso las partículas subatómicas, como los electrones, pueden comportarse como ondas.

Al estudiar el movimiento oscilatorio y las ondas, descubriremos que un pequeño número de principios subyacentes los describen a todos y que los fenómenos de ondas son más comunes de lo que jamás haya imaginado. Comenzamos estudiando el tipo de fuerza que subyace a las oscilaciones y ondas más simples. Luego expandiremos nuestra exploración del movimiento oscilatorio y las ondas para incluir conceptos tales como movimiento armónico simple, movimiento circular uniforme y movimiento armónico amortiguado. Finalmente, exploraremos qué sucede cuando dos o más ondas comparten el mismo espacio, en los fenómenos conocidos como superposición e interferencia.

2. Movimiento armónico simple: análisis del modelo

Empecemos una discusión con un ejemplo sencillo que nos llevará a conclusiones más importantes. La idea es poder modelar como es el movimiento de una partícula que vibra o que está sometida a simetría vibracional.

Imaginemos que queremos describir el movimiento de un objeto material que está unido a un resorte que a su vez está unido por un extremos a un punto fijo que no se mueve, tal y como se muestra en la figura 1.

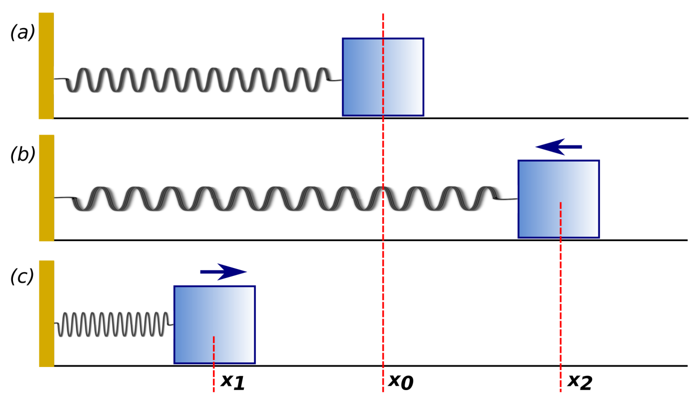


Fig. 1: Sistema masa-resorte.

Para esta figura cuando la masa se encuentra en la posición x_0, la misma se encuentra en equilibrio y no se mueve. Sin embargo, cuando la masa es halada hacia la derecha hasta la posición x_2, entonces el resorte se estira y ahora el resorte adquiere energía potencial debido a que intentará restaurar su forma original. Luego si la masa es soltada desde la posición x_2 entonces es claro que ésta se moverá a lo largo del eje horizontal pasando por la posición x_0 y seguirá su recorrido hasta la posición x_1. Esto último es debido a la inercia que posee la masa debido a su cantidad de movimiento. A medida que la masa de mueve desde x_2 pasando por x_0, la masa experimentará ahora una desaceleración debido a que nuevamente el resorte intentará conservar su forma original, esto implica que la masa se detendrá en x_1, y en este punto la masa tiene nuevamente energía potencial y se moverá ahora hacia la derecha. Si consideramos que las fuerzas de fricción no existen en este ejemplo para las superficies en contacto (o incluso el aire), entonces lógicamente este movimiento perdurará en el tiempo. de tal manera que la masa hará recorridos iguales en intervalos de tiempos iguales. Obviamente esto es si y solo si podemos despreciar todos los efectos de fricción sobre la masa, el resorte y las superficies. La fuerza de restauración a la que está sometida la masa debido a la conexión con el resorte se conoce como la Ley de Hooke y se expresa diciendo que

$$F_h = -kx, \tag{1}$$

así la fuerza es proporcional a la magnitud de elongación del resorte y k es una constante de proporcionalidad que depende de las propiedades materiales del resorte meramente, además el signo menos indica que la fuerza es opuesta al desplazamiento de la masa desde la posición de equilibrio.

Dado que hemos estirado el resorte hasta que la masa se encuentre en el punto x_2 y luego la soltamos, entonces la masa experimenta cambios de posición (y velocidad) y por lo tanto se acelera. Lo que se concluye es que la fuerza neta sobre el bloque está dominada por la segunda Ley de Newton y por lo tanto $F_{neta} = ma$, donde m es la masa del bloque y a es la aceleración que adquiere la masa en su movimiento. Pero ya que la fuerza neta está conformada únicamente por la fuerza de restauración del resorte entonces

$$F_{neta} = ma_x = -kx \to a_x = -\frac{k}{m}x. \tag{2}$$

Esto significa que la aceleración del bloque es directamente proporcional a la distancia de la masa desde su punto de equilibrio. La constante de proporcionalidad de esta aceleración depende de la constante del resorte además.

Cuando una partícula exhibe un movimiento como el que se describe anteriormente, se dice que el movimiento es **Movimiento Armónico Simple** (MAS), y muchas situaciones exhiben este tipo de movimiento.

Debido a que la aceleración instantánea de la masa es la derivada de la velocidad respecto del tiempo, y esta a su vez es la derivada de la posición respecto del tiempo, entonces $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$, y por lo tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x, \tag{3}$$

donde hemos definido la cantidad k/m por la constante ω^2 para conservar una forma mas simple. La solución de la ecuación anterior es muy fácil de obtener y da como resultado general que

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta), \tag{4}$$

donde A y δ son constantes de integración que provienen de la ecuación diferencial de segundo orden anterior y ω es también una constante definida anteriormente. En el caso de este última solución A se conoce como la **amplitud** y representa los valores máximos y mínimos de los desplazamientos de la masa, mientras que ω se conoce como la **frecuencia angular** y tiene unidades de Hz o s^{-1} (unidades inversas de tiempo), por lo cual representa la cantidad de ciclos (o cantidad de desplazamientos desde un máximo y un mínimo de desplazamiento desde la posición de equilibrio). La cantidad δ es conocida como la **constante de fase** y al igual que A es determinada únicamente por las condiciones de la velocidad y la posición en el instante de tiempo inicial t_0. Para finalizar la cantidad $\omega t + \delta$ se llama **fase del movimiento**. La figura 2 muestra algunas formas de la solución general para el MAS anterior para diversos valores de las constantes de integración y de movimiento.

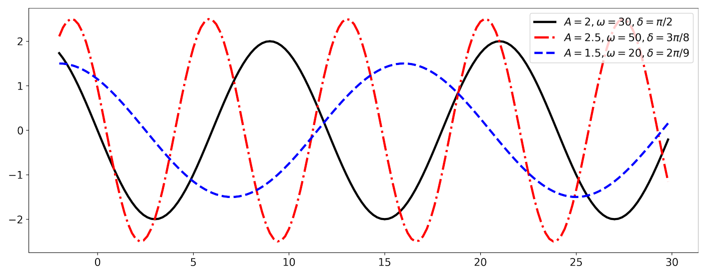


Fig. 2: Algunas soluciones a la ecuación de MAS.

3. El periodo y la frecuencia

El **Periodo** (T) en un MAS se define como la cantidad de tiempo que debe transcurrir para que el movimiento produzca una oscilación completa. Tomando en cuenta la solución anteriormente encontrada para el MAS esto es análogo a decir que una oscilación completa de la que hablamos, se produce cuando la fase entre el inicio del movimiento y un ciclo completo cambia por una cantidad 2π, o sea que

$$\begin{aligned}\Delta\text{Fase} &= \text{Fase}\big|_{t+T} - \text{Fase}\big|_t \\ &= [\omega(t+T)+\delta] - (\omega t + \delta) = 2\pi,\end{aligned} \tag{5}$$

de lo cual se concluye que

$$\omega T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{6}$$

El inverso del periodo se denomina **Frecuencia** (f) y se mide en unidades inversas al periodo, o sea s^{-1} o Hz, y representa la cantidad de ciclos o oscilaciones que se producen por unidad de intervalo de tiempo de un periodo. En este caso

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{7}$$

De lo anterior además recordando la expresión para ω, se tiene que la frecuencia angular y la frecuencia están relacionadas por

$$\omega = 2\pi f. \tag{8}$$

En términos del caso de la masa en el ejemplo inicial, las ecuaciones para el periodo y la frecuencia pueden ser escritas como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{9}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{10}$$

en este caso el periodo y la frecuencia solo dependen de de la masa de la partícula y de la constante de fuerza del resorte, y no de ninguno de los otros parámetros del movimiento como la amplitud o la constante de fase. Os obvio pensar que entonces, el periodo y la frecuencia de un MAS dependen básicamente de las condiciones del movimiento, esto es, del tipo de sistema que se pretende estudiar. En otros MAS de otras situaciones las ecuaciones para el periodo y la frecuencia pueden cambiar y además depender de condiciones particulares de este problema.

La velocidad y la aceleración de este movimiento están dadas por

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\delta) = -\omega A\sqrt{1-\cos^2(\omega t+\delta)}, \tag{11}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\delta). \tag{12}$$

De la expresión anterior para la velocidad es fácil darse cuenta que podemos escribir una relación entre la velocidad y la posición, tal que

$$v^2 = \omega\left(A^2 - x^2\right). \tag{13}$$

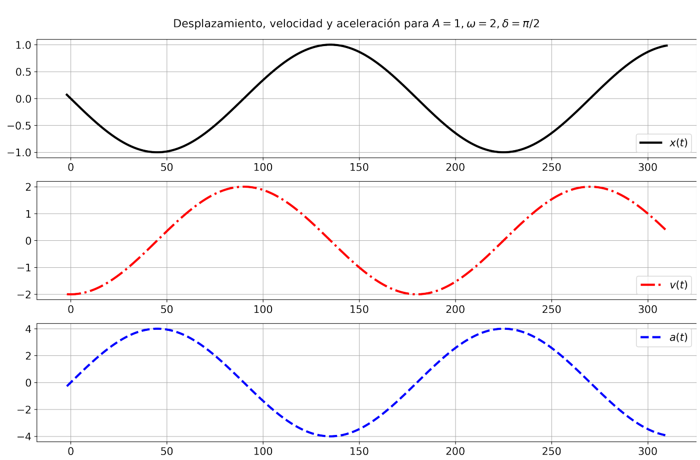


Fig. 3: Formas relativas del desplazamiento, velocidad y aceleración en un MAS.

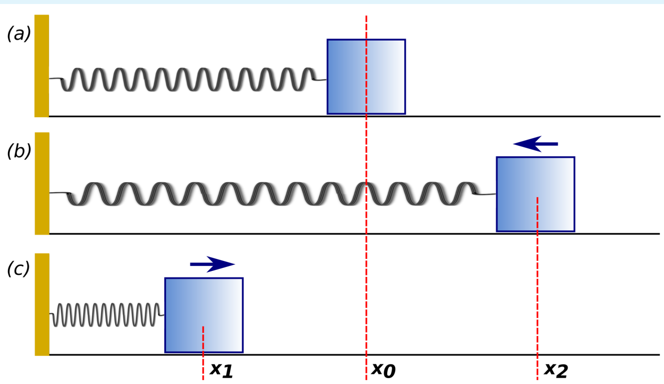
En la figura 3 puede verse relativamente el comportamiento del desplazamiento, velocidad y aceleración para un MAS.

Observe que en cualquier momento especificado la velocidad está desfasada 90° con la posición y la aceleración está desfasada 180° con la posición.

Dado que el bloque se está moviendo desde las posiciones x_2 y x_1 pasando por la posición de equilibrio x_0, y además del hecho que en los puntos x_2 y x_1 el bloque se detiene para moverse en sentido contrario, entonces es lógico que la velocidad tanto como la aceleración no son constantes. De hecho la velocidad y aceleración máximas se alcanzan en

$$v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}A, \quad a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m}A. \tag{14}$$

Ejemplo: Un bloque unido a un resorte.



Un bloque de 200 g conectado a un resorte ligero para el cual la fuerza constante es 5.00 N/m puede oscilar libremente sobre una superficie horizontal sin fricción. El bloque se desplaza 5.00 cm del equilibrio y se libera del reposo como en la Figura 1. (A) Encuentre el período de su movimiento. (B) Determine la velocidad máxima del bloque. (C) ¿Cuál es la aceleración máxima del bloque? (D) Exprese la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo en unidades SI. (E) ¿Qué pasaría si el bloque se liberara desde la misma posición inicial, x_i=5.00 cm, pero con una velocidad inicial de v_i=-0.100 m/s? ¿Qué partes de la solución cambian y cuáles son las nuevas respuestas para aquellos que sí cambian?

Solución: En este caso para la pregunta (A) sólo hay que recordar la ecuación (9). Para la pregunta (B) y (C) recordamos que podemos aplicar la ecuación (14). Para responder la pregunta (D) vasta con introducir valores numéricos en las ecuaciones (11) y (12). Para responder a la pregunta (E), vemos que dado que el bloque ahora se lanzan con una velocidad inicial distinta de cero, entonces, la amplitud del movimiento cambiará. En este caso podemos usar las ecuaciones de la posición y la velocidad para tener

$$x(t=0) = x_0 = 5 = A\cos(\delta), \tag{15}$$
$$v(t=0) = v_0 = -0.1 = -A\omega\sin(\delta), \tag{16}$$

de lo cual se concluye que podemos despejar tanto la fase del movimiento como la amplitud a partir del sistema de ecuaciones anterior, con lo cual tendremos que $\tan(\delta) = -\frac{v_i}{\omega x_i} = 0.4$, o sea que $\delta = 0.121\pi$, mientras que $A = \frac{x_i}{\cos(\delta)} = 0.0539\text{m} \sim 5.4\text{cm}$. Ahora podemos usar las ecuaciones anteriores y las mismas expresiones con los nuevos valores de A y δ.

Ejemplo: Amortiguadores de un auto.

Se construye un automóvil con una masa de 1300 kg de modo que su marco esté soportado por cuatro resortes. Cada resorte tiene una fuerza constante de 20000 N/m. Dos personas que viajan en el automóvil tienen una masa combinada de 160 kg. Encuentre la frecuencia de vibración del automóvil después de que se conduce sobre un bache en el camino. Supongamos que el auto se detiene al costado del camino y que las dos personas salen del auto. Uno de ellos empuja hacia abajo el automóvil y lo suelta para que oscile verticalmente. ¿La frecuencia de la oscilación es la misma que el valor que acabamos de calcular?

Solución: En este caso dado que el auto está soportado por cuatro resorte, que en este caso tienen la misma constante de elasticidad, vasta con recordar que estos cuatro resortes son equivalentes a un resorte equivalente tal que

$$k_{equiv} = \sum_{i=1}^{4} k_i,$$

y por lo tanto ahora tenemos que podemos usar directamente la ecuación (10), usando $k \to k_{equiv}$. Luego cuando las personas se bajan del auto ahora la masa efectiva es menor que en el caso anterior, por tanto la masa que hay que considerar es la del peso del auto solamente.

4. Energía de un oscilador armónico

Debido a que en el ejemplo que hemos estado siguiendo, las fuerzas de rozamiento y fricción se han supuesto nulas, entonces es claro que la energía total del sistema debe conservarse, o lo que es lo mismo en este caso, que debe ser constante. Los dos tipos de energías acá considerados corresponden a la **energía mecánica total** debido al bloque de masa, la cual contribuye solo con energía cinética (producto del movimiento del bloque), y la energía potencial en este caso del resorte. Respectivamente tendremos que:

$$K_{masa} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta), \tag{17}$$
$$U_{resorte} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta), \tag{18}$$

debido a que $k = m\omega^2$, entonces la energía mecánica total es

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{m\omega^2}{2}A^2, \tag{19}$$

y esto implica necesariamente que

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}. \tag{20}$$

La ecuación anterior está de acuerdo con las observaciones iniciales en las cuales cuando la masa se encuentra en la posición de equilibro, es decir, en $x = x_0 = 0$, entonces la velocidad es la máxima permitida, véase (14) y coincide con el valor $v_{max} = \omega A$. Mientras que cuando $x = x_2 =$

$x_1 = A$, entonces la velocidad es nula y por lo tanto la masa de encuentra en los extremos del desplazamiento, allí la velocidad es nula debido a que en este punto la masa cambian completamente de sentido en su movimiento. En la figura 3 puede ilustrarse gráficamente este hecho para un caso particular.

Estudiamos osciladores armónicos simples porque son buenos modelos de una amplia variedad de fenómenos físicos.

Ejemplo: Sistema carro-resorte.

Un carro de 0.500 kg conectado a un resorte ligero para el cual la fuerza constante es 20.0 N/m oscila en una pista de aire horizontal sin fricción. (A) Calcule la velocidad máxima del carro si la amplitud del movimiento es de 3.00 cm. (B) ¿Cuál es la velocidad del carro cuando la posición es de 2.00 cm? (C) Calcule las energías cinética y potencial del sistema cuando la posición del carro es de 2.00 cm.

Solución: En este caso para la parte (A) recuerde la ecuación (14), para la pregunta (B) tome valores numéricos sobre la ecuación (20) y finalmente para la pregunta (C) se usa el resultado anterior con ayuda de las ecuaciones de energía.

5. Un sistema masa-resorte oscilando en el eje Y

Considere ahora el mismo oscilador de la figura 1 pero en este caso dispuesto de tal manera que el sistema oscila en el eje de la Y, como se muestra en la figura 4, tal que una masa m está unida a un resorte que a su vez se fija a un punto de tal manera que la masa cuelga verticalmente. En este caso una nueva fuerza aparece ligada al sistema, es decir, el peso propiamente de la masa.

Cuando un objeto cuelga de un resorte vertical, hay una fuerza hacia abajo mg además de la fuerza del de restauración del resorte. Si elegimos hacia abajo como dirección positiva, entonces la fuerza del resorte sobre el objeto es $-ky$, donde y es la tensión del resorte. La fuerza neta sobre el objeto es entonces

$$\sum F_y = -ky + mg. \tag{21}$$

Podemos simplificar esta ecuación cambiando a una nueva variable $y' = y - y_0$, donde $y_0 = mg/k$ es la cantidad que se estira el resorte cuando el objeto está en equilibrio. Sustituyendo $y = y' + y_0$ da

$$\sum F_y = -ky', \tag{22}$$

y por tanto considerado ahora que el bloque se mueve en el eje Y con una cierta aceleración que le hace cambiar su movimiento, entonces la ecuación de movimiento para el bloque posee ecuación que en (3) y por tanto la misma solución que en (4), es decir,

$$y' = A\cos(\omega t + \delta) \rightarrow y = \frac{mg}{k} + A\cos(\omega t + \delta). \tag{23}$$

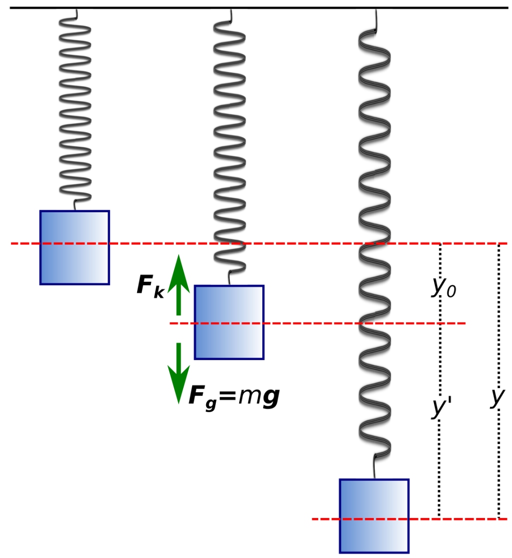


Fig. 4: Sistema masa-resorte oscilando en un plano vertical.

Así, el efecto de la fuerza gravitacional mg es simplemente cambiar la posición de equilibrio de y_0 a y'. Cuando el objeto se desplaza de esta posición de equilibrio por la cantidad y', la fuerza neta es $-ky'$. El objeto oscila alrededor de esta posición de equilibrio con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$, la misma frecuencia angular que la de un objeto en un resorte horizontal. Una fuerza es conservativa si el trabajo realizado por ella es independiente del camino. Tanto la fuerza del resorte como la fuerza de la gravedad son conservativas, y la suma de estas fuerzas también es conservativa. La función de energía potencial U asociada con la suma de estas fuerzas es en esencia opuesta al trabajo realizado más una constante de integración arbitraria. Es decir,

$$U = -\int -ky'dy' = \frac{1}{2}ky'^2 + U_0, \tag{24}$$

donde U_0 es la constante de integración que se corresponde con el valor de de U es la posición de equilibrio ($y' = 0$).

Ejemplo: Despedida de soltera.

Considere el problema en el cual Maria (estudiante de laboratorio de ondas) está haciendo una fiesta de despedida de soltera para su amiga y está haciendo unas decoraciones que consisten en serpentinas, unos resortes de papel, que cuelgan del techo en uno de los extremos y en el otro cuelga una hoja de papel con mensajes llamativos. María quiere que cuando ella estire las hojas hacia abajo con una elongación de 8 cm, los mensajes oscilen a 1 ciclo/seg. En el primer experimento se da cuenta que esto no sucede, así que decide colgar mas hojas en cada resorte. ¿Cuántas hojas debe colgar María para lograr el resultado deseado?

Solución: En esta situación es muy sencillo ver que la frecuencia deseada es la de 1 ciclo/seg, por lo cual

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}},$$

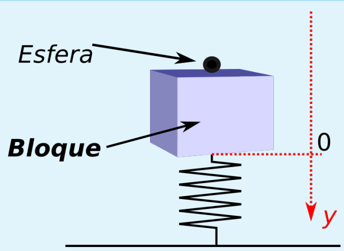
donde M es la masa de N hojas colgantes, con lo cual $M = Nm$, donde m es la masa de una hoja. En este caso vemos que cuando las hojas son estiradas los 8 cm, entonces en este momento inicial $ky_0 = mg$, o sea que, $k/m = y/y_0$, con lo cual

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{N}\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{N}\frac{g}{y_0}},$$

$$N = \frac{g}{(2\pi f)^2 y_0} = \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{(2\pi \text{ Hz})^2(0.08 \text{ m})} = 3.11 \text{ hojas}.$$

Lo que quiere decir es que María debe colgar aproximadamente 3 hojas de la misma masa de la hoja original.

Ejemplo: Una esfera que no rebota.



Un bloque unido a un resorte oscila verticalmente con una frecuencia de 4 Hz y una amplitud de 7 cm. Se coloca una pequeña esfera en la parte superior del bloque oscilante justo cuando alcanza su punto más bajo. Suponga que la masa de la esfera es tan pequeña que su efecto sobre el movimiento del bloque es insignificante. ¿A qué distancia de la posición de equilibrio del bloque el cordón pierde contacto con el bloque?

Solución: Las fuerzas sobre la esfera son su peso mg hacia abajo y la fuerza normal hacia arriba ejercida por el bloque. La magnitud de esta fuerza normal cambia a medida que cambia la aceleración. A medida que el bloque se mueve hacia arriba desde el equilibrio, su aceleración y la del bloque son descendentes y aumentan en magnitud. Cuando la aceleración alcanza g hacia abajo, la fuerza normal será cero. Si la aceleración hacia abajo del bloque se vuelve aún más grande, la esfera abandonará el bloque.

En este caso, dibujamos un bosquejo del sistema (Figura 14-12). Incluimos un eje de coordenadas y con su origen en la posición de equilibrio y con g hacia abajo como dirección positiva. Estamos buscando el valor de y cuando la aceleración es g hacia abajo. Por tanto podemos usar la ecuación del MAS para escribir

$$a_y = -\omega^2 y, \quad g = -\omega^2 y = -(2\pi f)^2 y,$$

con lo cual

$$y = -\frac{g}{(2\pi f)^2} = \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{4\pi^2(4 \text{ Hz})^2} = -0.0155 \text{ m} = -1.55 \text{ cm}.$$