# Oscilaciones: Ejercicios y problemas resueltos.

*D. Sierra-Porta*

1. **Considere el sistema que se muestra en la figura 1, que consiste en una varilla de longitud $L$ y masa $M$ que puede girar alrededor de su centro. Hay un pequeño orificio en el centro de la barra, que permite que la barra gire, sin fricción, alrededor de su centro. Hay un resorte, con resorte constante $k$, unido a un extremo. La barra se tira hacia un lado y se libera para oscilar. ¿Es el movimiento uno de movimiento armónico simple? ¿Cuál es el período de oscilación? Exprese su respuesta en términos de $M$, $L$ y $k$.**

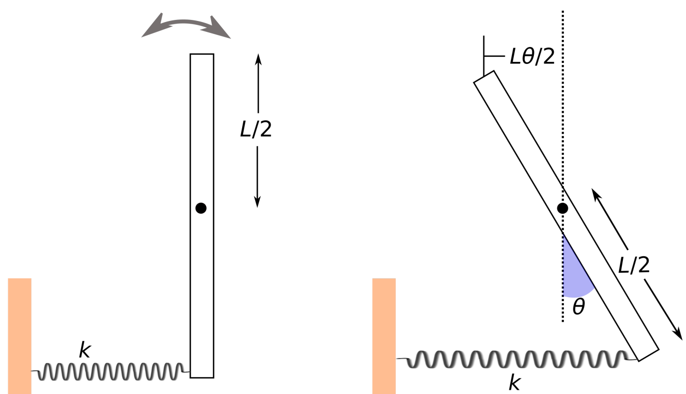


**Fig. 1:** Una varilla que rota en el centro de la misma y unida a un resorte. (Ver problema 1)

Para determinar si el movimiento es armónico simple, necesitamos ver si la fuerza de restauración desde la posición de equilibrio es proporcional al desplazamiento desde el equilibrio. Nuestro sistema es una varilla que puede girar sobre su centro. La ecuación apropiada para la rotación alrededor de un eje fijo es

$$I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\ddot{\theta} = \tau_{net} \tag{1}$$

donde $I$ es la inercia rotacional sobre el eje de rotación, $\alpha = d^2\theta/dt^2$ es la aceleración angular alrededor del eje, y $\tau_{net}$ es el torque neto sobre el eje. La inercia rotacional para una varilla delgada de masa $M$, longitud $L$, que gira alrededor de su centro es $ML^2/12$. El torque sobre un eje es igual a la fuerza aplicada por el momento del brazo. En nuestro caso, si los desplazamientos angulares son pequeños, la fuerza es perpendicular a la barra. Por lo tanto, el torque viene dado por

$$\tau = Fr = \frac{L}{2}F, \tag{2}$$

donde $F$ es la fuerza que ejerce el resorte sobre el extremo de la barra. Por lo cual queda entonces que

$$\ddot{\theta} = \frac{L}{2}\frac{F}{I} = \frac{-12kL^2}{4ML^2}\theta = \frac{-3k}{M}\theta, \tag{3}$$

con lo cual la ecuación que representa el movimiento es

$$\ddot{\theta} + \frac{3k}{M}\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \tag{4}$$

y finalmente el periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{3k}}. \tag{5}$$

2. **Para el problema anterior suponga que ahora la misma varilla es atada a dos resortes de constantes $k_1$ y $k_2$ respectivamente y ahora además la varilla gira alrededor de un punto que se encuentra $x$ distancia del extremo y a $L-x$ del otro extremo. ¿Cuán seria el nuevo periodo de oscilación? (Considere que el centro de masa está en el eje de rotación)**

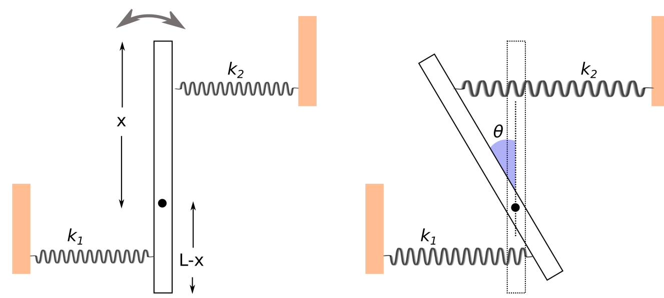


**Fig. 2:** Una varilla que rota en el centro de la misma y unida a dos resortes resorte. (Ver problema 2)

En este caso la solución es parecida a la del caso anterior, pero considerando que:

- Primero, la varilla gira ahora a una distancia $x$ del extremo, por lo cual el cálculo del momento de inercia es ahora

$$I = I_{CM} + I_x = \frac{ML^2}{12} + M(x - L/2)^2, \tag{6}$$

donde $I_{CM}$ es el momento de inercia respecto del centro de masa, que suponemos acá en la mitad de varilla suponiendo además que la varilla es homogénea en su masa.

- Segundo, el torque neto debido al par de fuerzas de restauración es ahora debido a la suma de ambas fuerzas, por lo cual

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= -k_1(L-x)\Delta x_1 - k_2 x \Delta x_2 \\ &= -\left(k_1(L-x)^2 + k_2 x^2\right)\theta.\end{aligned} \tag{7}$$

Juntando todo lo anterior se tiene que el nuevo periodo será

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{12}\frac{L^2 + 3(-2x+L)^2}{k_1(L-x)^2 + k_2 x^2}}. \tag{8}$$

Véase que si $k_2 = 0$ y $x = L/2$, el resultado coincide con el del problema 1.

3. **Encuentras un resorte en el laboratorio. Cuando cuelgas 100 gramos al extremo del resorte, se extiende 10 cm. Alargas la masa de 100 gramos a 6 cm de su posición de equilibrio y la sueltas en $t = 0$. Encuentra una ecuación para la posición de la masa en función del tiempo $t$.**

Primero encontremos el período de las oscilaciones, luego podemos obtener una ecuación para el movimiento. El período $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. La masa $m$ es 0.1 Kg. Para encontrar $k$, usamos el hecho de que 100 gramos hacen que el resorte se estire 10 cm adicionales. Como $F_g = k\Delta x$, tenemos que $k = mg/\Delta x = 9.8$ N. El período del movimiento es, por lo tanto, $T \approx 0.635$ seg. En $t = 0$, la masa está a su distancia máxima desde el origen. Por lo tanto, $x(t) = 0.6\cos(2\pi t/T)$. Utilizando esto da que

$$x(t) \approx 0.6\cos(9.9t) \tag{9}$$

La función coseno es la apropiada, ya que en $t = 0$ la masa está a su máxima distancia del equilibrio.

4. **Juan tiene dos péndulos, uno tiene una longitud de 1 metro y el otro es más largo. El los pone a ambos balanceándose al mismo tiempo. Después de que el péndulo de 1 metro haya completado 12 oscilaciones, el más largo solo ha completado 11. ¿Cuánto dura el péndulo del más largo?**

Uno puede resolver este problema tomando la razón de la ecuación para los períodos de los dos péndulos. Dado que el período de un péndulo (para pequeñas amplitudes) es aproximadamente $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, tenemos un par de ecuaciones iguales para $T_1$ y $T_2$ para longitudes $l_1$ y $l_2$, respectivamente.

Dividiendo estas dos ecuaciones tenemos

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \tag{10}$$

Resolviendo para $l_2$ tenemos

$$l_2 = l_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 1 \times \left(\frac{12}{11}\right)^2 \approx 1.19 \text{ m.} \tag{11}$$

Entonces el péndulo más largo tiene 1.19 metros de largo.

5. **Un resorte cuelga libremente del techo. Adjuntas un objeto al final del resorte y sueltas el objeto. Cae una distancia de 49 cm y vuelve a donde comenzó. Continúa oscilando en un movimiento armónico simple que sube y baja una distancia total de 49 cm de arriba a abajo. ¿Cuál es el período del movimiento armónico simple?**

Puede pensar que no hay suficiente información para resolver el problema, pero intentemos ver si necesitamos saber más sobre el sistema. Supongamos que la masa del objeto sea $m$ y la constante de resorte sea $k$. El período de movimiento armónico simple para un resorte ideal viene dado por $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Para resolver el período $T$, necesitamos conocer la relación de $m/k$. ¿Qué nos dicen los 49 cm? Esta es la distancia total desde la parte superior hasta la parte inferior del movimiento armónico simple. Si suponemos que $d = 49$ cm, esto significa que la posición de equilibrio se encuentra $d/2$ desde la parte superior. Esta es la distancia que la masa $m$ estiraría al resorte debido a su peso $mg$. En términos de la constante del resorte tenemos $mg = kd/2$, entonces $m/k = d/(2g)$. Sustituyendo en la ecuación el período que tenemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2g}} = \frac{\pi}{\sqrt{10}} \approx 0.99 \text{ s.} \tag{12}$$

Parece que teníamos suficiente información después de todo.

6. **Un resorte sin masa unido a una pared descansa sobre una mesa sin fricción. Tiene un bloque de masa de 2 kg unido a un extremo. Inicialmente el bloque está en reposo. Otro bloque, también de masa de 2 kg, se desliza sobre la mesa con una velocidad de 8 m/s. En el tiempo $t = 0$, el bloque en movimiento choca con el bloque en el resorte. Los dos se unen y oscilan de un lado a otro. Si la constante de resorte es 16 N/m, encuentre una expresión $x(t)$ que describa el movimiento de los dos bloques que están pegados.**

Como no hay fuerzas externas durante la colisión, se conserva el impulso lineal. Sea $v_f$ la velocidad final después de la colisión, entonces ímpetu total final = ímpetu total inicial

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)v_f &= m_1 v_0, \\ (2+2)v_f &= 2(8), \\ v_f &= 4 \text{ m/s}\end{aligned} \tag{13}$$

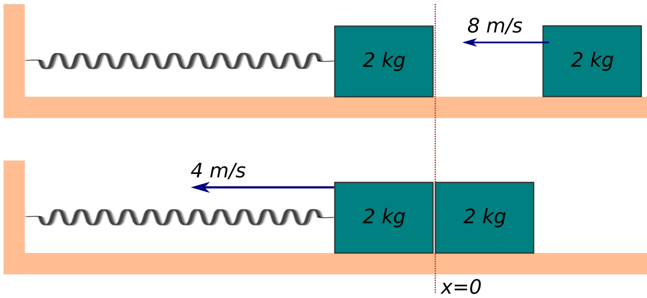


**Fig. 3:** Sistema masa-resorte colicionando con otra masa que se mueve. (Ver problema 6)

Esta velocidad de 4 m/s es la velocidad inicial para el movimiento oscilatorio. Como el resorte obedece la ley de Hooke, el movimiento es armónico simple (es decir, sinusoidal) con $\omega = \sqrt{k/m} = 2\ \mathrm{s}^{-1}$. La expresión general para el movimiento armónico simple es:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \tag{14}$$

Para nuestro ejemplo, $x_0 = 0$ ya que los bloques están en $x = 0$ en $t = 0$. Por lo tanto, solo el término seno está presente:

$$x(t) = 2 \sin 2t, \tag{15}$$

donde $t$ está en segundos.

7. **Un objeto de masa $m$ oscila de un lado a otro en un movimiento armónico simple. La distancia máxima desde el equilibrio es $A$, y el período de oscilación es $T$. En $t = 0$, el objeto está en el origen, $x = 0$, y se mueve en la dirección $-x$. Encuentre lo siguiente en términos de $m$, $T$ y $A$: a) La ecuación de movimiento del objeto. b) La velocidad máxima del objeto. c) La aceleración máxima del objeto. d) La energía total del objeto.**

a) La ecuación de movimiento del objeto. La forma general de la ecuación de movimiento es $x(t) = x_0 \cos \omega t + v_0 \omega^{-1} \sin \omega t$. En nuestro caso, $x_0 = 0$. Dado que la amplitud máxima es $A$, tenemos $v_0 \omega^{-1} = A$. Como el objeto se mueve inicialmente en la dirección negativa, $v_0 < 0$, entonces $v_0/\omega = -A$. Ya que $\omega = 2\pi/T$, la ecuación de movimiento es por lo tanto:

$$x(t) = -A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \tag{16}$$

b) La velocidad máxima del objeto. Para encontrar la velocidad del objeto en cualquier momento $t$, simplemente podemos diferenciar $x(t)$. Así,

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\frac{2A\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \tag{17}$$

Como la función coseno varía entre $-1$ y $+1$, la velocidad máxima es $2\pi A/T$.

c) La aceleración máxima del objeto. Para encontrar la aceleración del objeto en cualquier momento $t$, solo podemos diferenciar $v(t)$:

$$a(t) = \dot{v}(t) = A \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \tag{18}$$

Como la función sin varía entre $-1$ y $+1$, la aceleración máxima es $A\,(2\pi/T)^2$.

d) La energía total del objeto. La energía total de un objeto que se mueve en movimiento armónico simple es igual a su energía cinética a medida que pasa a través de la posición de equilibrio. Esto es cierto ya que en $x = 0$ el objeto no tiene energía potencial (es decir, está en un mínimo) y toda su energía está en forma de energía cinética. Por lo tanto, tenemos

$$E_{total} = \frac{m}{2} v_{max}^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{2A\pi}{T}\right)^2 = \frac{2A^2\pi^2 m}{T^2}. \tag{19}$$

Nota: todas nuestras respuestas a este problema se aplican a cualquier tipo de movimiento armónico simple. Las respuestas no solo se aplican a una masa en un resorte.

8. **Considere el tubo en forma de U que contiene un fluido que se muestra en la figura. El área de la sección transversal del tubo es $A$, y la longitud total del tubo es $l$. El líquido se empuja hacia arriba por un lado y se libera. El fluido se mueve hacia adelante y hacia atrás en movimiento periódico (suponiendo que no haya fuerzas de fricción). ¿Es el movimiento armónico simple? Si es así, ¿cuál es el período del movimiento?**

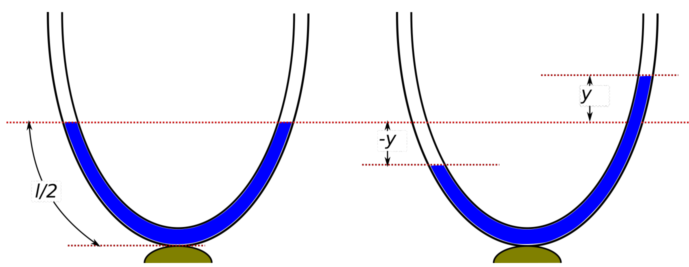


**Fig. 4:** Un tubo en forma de U que contiene un fluido. (Ver problema 8)

Para determinar qué tipo de movimiento ocurrirá, desplazamos el fluido a una distancia $y$ del equilibrio y determinamos cuál es la fuerza neta. Suponga que la superficie en el lado derecho del tubo se eleva una distancia $y$. Luego hay una diferencia de altura total de $2y$ sobre la superficie del lado izquierdo del tubo. La fuerza neta sobre el fluido será el peso del fluido contenido en una altura de $2y$, que llamamos $\Delta m$. Como el área de la sección transversal del tubo es $A$, el desequilibrio de peso o la fuerza neta es igual a $F_{net} = (\Delta m) g = (2y) A \rho g$, donde $\rho$ es la densidad del fluido. Como la fuerza actúa en la dirección opuesta a $y$ tenemos:

$$F_{net} = -2A\rho gy. \tag{20}$$

La fuerza neta es igual a la masa total del fluido multiplicada por su aceleración:

$$m\ddot{y} = -2A\rho gy, \tag{21}$$

donde $m$ es la masa total del fluido. Como la longitud total del fluido es $l$, $m = Al\rho$. Por lo tanto usando esta expresión para $m$ en la ecuación anterior produce:

$$\ddot{y} = -\frac{2g}{l}y. \tag{22}$$

Por lo tanto, vemos que la fuerza de restauración (es decir, la aceleración) es proporcional al desplazamiento desde el equilibrio ($y$). La solución a la ecuación diferencial anterior es una perfecta sinusoidal $y(t) = A\sin\omega t$ donde $\omega = \sqrt{2g/l}$. La fuerza es una fuerza de restauración lineal y producirá un movimiento armónico simple. El período $T$ es igual a $2\pi/\omega$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}. \tag{23}$$

9. **Un circuito eléctrico consiste en una resistencia conectada en serie de $R = 100$ ohmios y una bobina con inductancia $L = 50$ H. En el momento $t = 0$ se conecta una fuente de voltaje de $V_0 = 200$ V está conectado. Encontrar: el cambio de $i_0(t)$ en el circuito, y el cambio de voltaje a través de la resistencia $V_R(t)$ y el inductor $V_L(t)$.**

El circuito en serie RL se describe por la ecuación diferencial

$$L\frac{di}{dt} + iR = V_0. \tag{24}$$

De acuerdo con la teoría general, la solución de esta ecuación es la suma de la solución general de la ecuación homogénea $i_0$ y una solución particular de la ecuación no homogénea $i_1$, tal que $i = i_0 + i_1$. La solución general de la ecuación homogénea

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0. \tag{25}$$

se expresa como

$$i_0 = Ae^{-\frac{R}{L}t}, \tag{26}$$

dónde $A$ es la constante de la integración.

La solución de la ecuación no homogénea $i_1$ corresponde al estado estable en el que la corriente en el circuito está determinada solo por la resistencia óhmica $i_1 = V_0/R$. Entonces la corriente total varía según la ley

$$i = i_0 + 1_1 = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R}. \tag{27}$$

La constante de integración $A$ es determinada respecto de la condición inicial $i(t = 0) = 0$, con lo que

$$0 = A + \frac{V_0}{R} \to A = -\frac{V_0}{R}. \tag{28}$$

Entonces, después de que se cierra el circuito, la corriente variará de acuerdo con la ley

$$i = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 2\left(1 - e^{-2t}\right). \tag{29}$$

Los voltajes $V_R$ a través de la resistencia y $V_L$ a través del inductor está determinado por las siguientes fórmulas:

$$V_R = iR = V_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 200\left(1 - e^{-2t}\right), \tag{30}$$

$$V_L = L\frac{di}{dt} = \frac{LV_0}{R}\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t} = 200e^{-2t}. \tag{31}$$

10. **Un circuito eléctrico consiste en una resistencia conectada en serie $R = 1$ ohmios, una bobina con inductancia $L = 0.25$ H y un condensador $C = 1$ $\mu$F. ¿Cuántas oscilaciones hará antes de que la amplitud de la corriente se reduzca por un factor de $e$?**

En este circuito, las oscilaciones amortiguadas ocurrirán con una frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \tag{32}$$

La amplitud de las oscilaciones disminuirá según la ley

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{R}{2L}t}. \tag{33}$$

Suponga que $N$ oscilaciones completas ocurrieron por tiempo $t$:

$$t = NT = \frac{2\pi N}{\omega} = \frac{2\pi N}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \tag{34}$$

Si la amplitud disminuye en $e$ veces, entonces uno puede escribir la siguiente ecuación:

$$A(t) = eA_0 \to -\frac{R}{2L}t = -\frac{R}{2L}\frac{2\pi N}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = -1. \tag{35}$$

Por lo tanto, encontramos el número de oscilaciones $N$ es

$$N = \frac{L}{\pi R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \approx \frac{1000}{2\pi} \approx 159.$$