Oscilaciones forzadas y resonancia

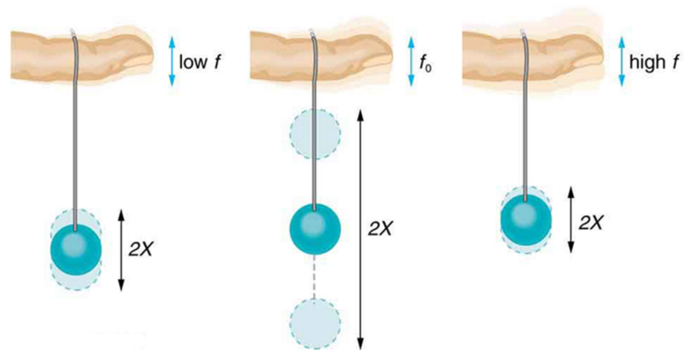
D. Sierra-Porta

Índice

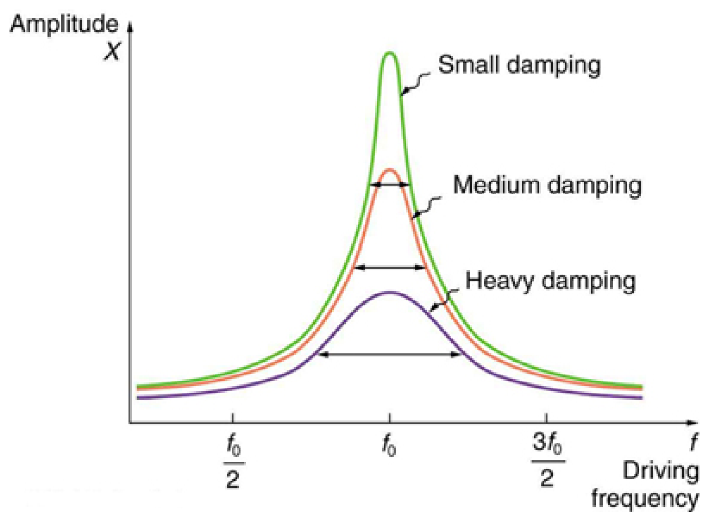
1. Resumen

Alguna veces quizás hemos visto que cuando nos colocamos cerca de una guitarra y hablamos o cantamos algunas veces la persona siente como las cuerdas de la guitarra empiezan a vibrar más o menos al compás de lo que cantamos o de las notas que producimos al cantar. Las cuerdas, que tienen las mismas frecuencias que tu voz, resuenan en respuesta a las fuerzas de las ondas de sonido que les enviaste. Tu voz y las cuerdas de una guitarra son un buen ejemplo del hecho de que los objetos, en este caso, las cuerdas de la guitarra, pueden ser forzados a oscilar pero oscilan mejor cuando alcanzan una frecuencia que llamamos *frecuencia natural*. En esta sección, exploraremos brevemente la aplicación de una fuerza impulsora periódica que actúa sobre un oscilador armónico simple. La fuerza impulsora pone energía en el sistema a una frecuencia determinada, no necesariamente la misma que la frecuencia natural del sistema. La frecuencia natural es la frecuencia con la que un sistema oscilaría si no hubiera fuerza de conducción ni amortiguación.

La mayoría de nosotros hemos jugado con juguetes que involucran un objeto apoyado en una banda elástica, algo así como la bola suspendida de un dedo. Al principio, mantienes el dedo firme y la pelota rebota hacia arriba y hacia abajo con una pequeña cantidad de amortiguación. Si mueve su dedo hacia arriba y hacia abajo lentamente, la pelota seguirá sin rebotar mucho por sí sola. A medida que aumenta la frecuencia con la que mueve el dedo hacia arriba y hacia abajo, la bola responderá oscilando con una amplitud creciente. Cuando manejas la pelota a su frecuencia natural, las oscilaciones de la pelota aumentan en amplitud con cada oscilación mientras la manejas.



El fenómeno de conducir un sistema con una frecuencia igual a su frecuencia natural se llama resonancia. Se dice que un sistema que funciona a su frecuencia natural resuena. A medida que la frecuencia de conducción se vuelve progresivamente más alta que la frecuencia resonante o natural, la amplitud de las oscilaciones se vuelve más pequeña, hasta que las oscilaciones casi desaparecen y su dedo simplemente se mueve hacia arriba y hacia abajo con poco efecto sobre la pelota.



La figura dada muestra tres imágenes de un solo dedo visto horizontalmente que contiene una cuerda, suspendida verticalmente hacia abajo, que está atada a la bola en su extremo inferior. En la primera figura, la pelota se estira hacia arriba y hacia abajo muy lentamente con menos desplazamiento, el desplazamiento que se muestra en las figuras como sombras desviadas de la pelota y se representa como 2X. En la segunda figura el movimiento de la pelota es más alto, mientras que en la tercera el movimiento es menor. En las tres figuras, la pelota está en equilibrio con respecto a su movimiento. La frecuencia, f, para la primera figura es muy baja mientras que para la tercera es más alta.

La figura anterior en realidad muestra un gráfico de la amplitud de un oscilador armónico amortiguado en función de la frecuencia de la fuerza periódica que lo impulsa. Hay tres curvas en el gráfico, cada una representando una cantidad diferente de amortiguamiento. Las tres curvas alcanzan su punto máximo en el punto donde la frecuencia de la fuerza motriz es igual a la frecuencia natural del oscilador armónico. El pico más alto, o la mayor respuesta, es para la menor cantidad de amortiguación, porque la fuerza de amortiguación elimina menos energía.

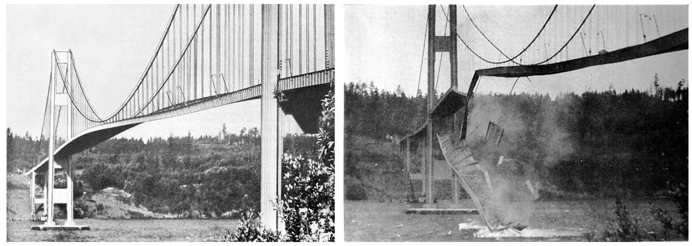
Es interesante que los anchos de las curvas de resonancia que se muestran dependen de la amortiguación: cuanto menor sea la amortiguación, más estrecha será la resonancia. El mensaje es que si desea que un oscilador controlado resuene a una frecuencia muy específica, necesita la menor amortiguación posible. Poco amortiguamiento es el caso de las cuerdas de la guitarra y muchos otros instrumentos musicales. Por el contrario, si desea oscilaciones de pequeña amplitud, como en el sistema de suspensión de un automóvil, entonces desea una amortiguación fuerte. La amortiguación fuerte reduce la amplitud, pero la desventaja es que el sistema responde a más frecuencias.

Estas características de los osciladores armónicos se aplican a una gran variedad de sistemas. Cuando sintoniza una radio, por ejemplo, está ajustando su frecuencia de resonancia para que solo oscile a la frecuencia de transmisión (conducción) de la estación deseada. Cuanto más selectiva es la radio para discriminar entre estaciones, menor es su amortiguación. La resonancia magnética (MRI) es una herramienta de diagnóstico médico ampliamente utilizada en la que los núcleos atómicos (en su mayoría núcleos de hidrógeno) resuenan mediante ondas de radio entrantes (del orden de 100 MHz). Un niño en un columpio es conducido por un padre a la frecuencia natural del columpio para lograr la máxima amplitud. En todos estos casos, la eficiencia de la transferencia de energía de la fuerza impulsora al oscilador es mejor en resonancia.

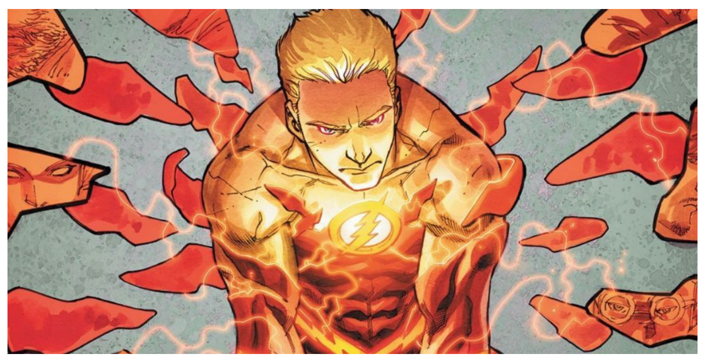
En nuestros cuerpos, la cavidad torácica es un claro ejemplo de un sistema en resonancia. El diafragma y la pared torácica impulsan las oscilaciones de la cavidad torácica que provocan que los pulmones se inflen y desinflen. El sistema está amortiguado críticamente y el diafragma muscular oscila al valor resonante para el sistema, lo que lo hace altamente eficiente.

En 1940, el puente Tacoma Narrows en el estado de Washington (USA) se derrumbó. Fuertes vientos cruzados condujeron el puente a oscilaciones en su frecuencia resonante. La amortiguación disminuyó cuando los cables de soporte se soltaron y comenzaron a deslizarse sobre las torres, permitiendo amplitudes cada vez mayores hasta que la estructura falló (crédito: Flickr).

La figura muestra una foto en blanco y negro del puente Tacoma Narrows, desde la vista lateral izquierda. El centro del puente se muestra aquí en un estado oscilante debido a los fuertes vientos cruzados.



Un famoso truco de magia involucra a un artista cantando una nota cerca un vaso de cristal hasta que se rompe. El artista intérprete o ejecutante debe estar cantando una nota que corresponda a la frecuencia natural de la copa. A medida que la onda de sonido se dirige al vidrio, el vidrio responde resonando a la misma frecuencia que la onda de sonido. Con suficiente energía introducida en el sistema, el vidrio comienza a vibrar y finalmente se rompe. En un episodio de la serie Flash el superhéroe atraviesa una pared poniéndose en vibración tan rápida como la frecuencia de vibración natural de la pared, lo que le permite atravesarla.



2. Oscilaciones forzadas

La amplitud de una oscilación amortiguada decrece con el tiempo. Al cabo de un cierto tiempo teóricamente infinito, el oscilador se detiene en su punto de equilibrio. Para mantener la oscilación es necesario aplicar una fuerza oscilante externa.

El oscilador forzado, o su equivalente el circuito LRC conectado a una fuente de corriente alterna es un ejemplo que nos permite estudiar con detalle las soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden. Nos permite diferenciar entre estado transitorio y estacionario. Comprender el importante fenómeno de la resonancia.

Volvamos al ejemplo de una masa en un resorte. Ahora examinamos el caso de las oscilaciones forzadas, que aún no manejamos. Es decir, consideramos la ecuación

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F(t), \tag{1}$$

para alguna consideración de una fuerza externa $F(t)$.

La ecuación anterior toma una forma más común si dividimos por m y luego hacemos las redefiniciones $\omega_0^2 = k/m$ y $2\beta = \gamma/m$:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}. \quad (2)$$

La configuración es nuevamente: m es la masa, γ es la fricción o amortiguamiento, k es la constante del resorte, y $F(t)$ es una fuerza externa que actúa sobre la masa.

Estamos interesados en el forzamiento periódico, quizás sonidos fuertes u otras fuentes de fuerza periódica. Una vez que aprendamos sobre la serie de Fourier, veremos que cubrimos todas las funciones periódicas simplemente considerando $F = F_0 \cos(\omega_1 t)$ (o seno en lugar de coseno, los cálculos son esencialmente los mismos).

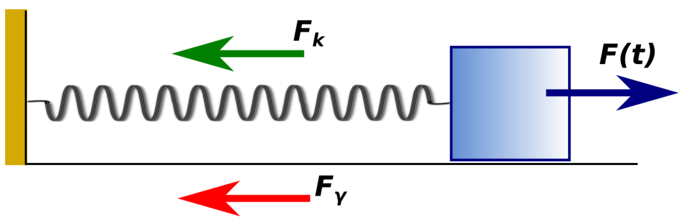


Fig. 1: Un sistema con forzamiento producido por la fuerza $F(t)$ que permite el movimiento permanente a pesar de la fuerza de amortiguamiento F_γ.

2.1. Movimiento forzado no amortiguado y resonancia

Primero consideremos el caso sin amortiguar ($\gamma = 0$) partiendo de la ecuación 2. La ecuación homogénea con $F_0 = 0$ tiene una solución que ya hemos calculado antes en los capítulos anteriores, la cual luce como

$$x_c(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t), \quad (3)$$

donde los coeficientes c_i son encontrados a partir de las condiciones iniciales y además ω coincide con la frecuencia natural $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Ahora bien si consideramos que $F_0 \neq 0$, entonces la ecuación diferencial no homogénea tiene una solución complementaria, la cual es

$$\begin{aligned} x_c(t) &= c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{k - m\omega_1^2}\cos(\omega_1 t) \\ &= c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)}\cos(\omega_1 t), \quad (4) \end{aligned}$$

o escrita de otro modo convenientemente como hemos hecho antes,

$$x_c(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)}\cos(\omega_1 t), \quad (5)$$

donde hemos colocado un solo coseno en vista que el seno es una función coseno desfasada y ahora A y δ son otra vez constantes de integración que se determinan con las condiciones iniciales. Véase que ω_1 no tiene que coincidir con la frecuencia natural ω_0 debido a que es una fuerza externa al sistema y no tiene nada que ver con el sistema en si. Sin embargo, si coinciden ($\omega_1 = \omega_0$) y dependiendo del valor de F_0 entonces la amplitud del movimiento crece enormemente.

Finalmente, la solución para la posición de la partícula cosiste en una superposición de funciones trigonométricas con diferentes frecuencias.

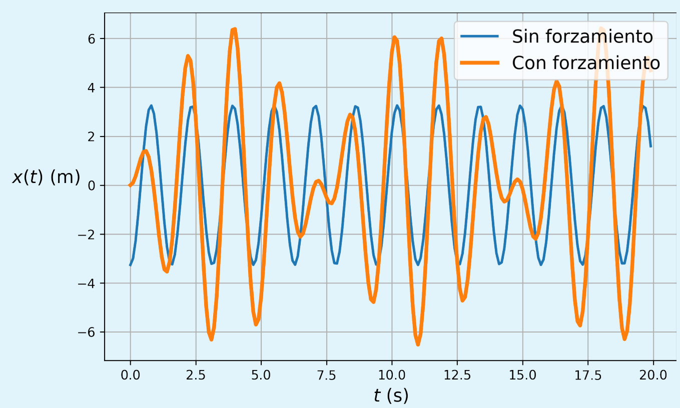
Ejemplo: Un sistema oscilante forzado sin amortiguamiento.

Suponga un sistema oscilante que está siendo permanentemente excitado por una fuerza externa cuya dinámica viene dada por $0.5\ddot{x} + 8x = 10\cos(\pi t)$, bajo las condiciones iniciales $x_0 = x(0) = 0$ y $v_0 = v(0) = 0$, es decir, que la partícula inicialmente esta en su posición de equilibrio y además no se le hace ningún impulso inicial para moverse, se mueve desde el reposo. Describa el movimiento de la partícula gráficamente.

<u>Solución:</u> Considerando la forma de la ecuación (2), entonces podemos ver que $\gamma = 0$, $m = 0.5$, $k = 8$, $F_0 = 10$ y $\omega_1 = \pi$, por lo tanto $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4$. Con lo cual tenemos que la solución es

$$x(t) = A\cos(16t + \delta) + \frac{20}{16^2 - \pi^2}\cos \pi t.$$

Considerando las condiciones iniciales tenemos que $A = \pm 3.262432201$ y $\delta = \pi$, con lo cual podemos ver gráficamente la posición de la partícula en cada instante del tiempo como se muestra en la figura.



2.1.1. Movimiento forzado no amortiguado con frecuencia natural igual a la externa

Ahora supongamos que la frecuencia natura y la externa son iguales ($\omega_0 = \omega_1$). Obviamente, no podemos probar la solución anterior (5) debido a que el término $\omega_0^2 - \omega_1^2$ aparece dividiendo en la solución, lo que produce un infinito. Por tanto el método de los coeficientes indeterminados para resolver la ecuación no funciona. Lo que sucede básicamente es que en este caso, la ecuación (2), se convierte en una ecuación homogénea

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t, \quad (6)$$

donde $x_p \sim \cos\omega_0 t$ (una solución particular) es exactamente el mismo término de forzamiento. Si introducimos $x_p \sim \cos\omega_0 t$ en la ecuación anterior lo que ocurrirá es que $F_0 \cos\omega_0 t = 0$, lo cual no puede ser debido a que hemos supuesto que $F_0 \neq 0$. Por lo que la solución particular que debemos probar es de la forma $x_p = At\cos\omega_0 t + Bt\sin\omega_0 t$. Si hacemos eso, encontraremos que la solución general es

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0^2} t\sin(\omega_0 t) \\ &= A\cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{F_0}{2m\omega_0^2} t\sin(\omega_0 t), \end{aligned} \tag{7}$$

Esta vez necesitamos el término seno, ya que la segunda derivada de $t\cos\omega_0 t$ contiene senos.

Aquí el término importante es el último (la solución particular que encontramos). Este término crece sin límite cuando $t \to \infty$. De hecho, oscila entre $\frac{F_0}{2m\omega_0^2}t$ y $-\frac{F_0}{2m\omega_0^2}t$. Los primeros dos términos solo oscilan entre $\pm\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, que se vuelve cada vez más pequeño en proporción a las oscilaciones del último término cuando t se hace grande. En la figura (2) vemos el gráfico con $c_1 = c_2 = 0$, $F_0 = 2$, $m = 1$ y $\omega_0 = \pi$.

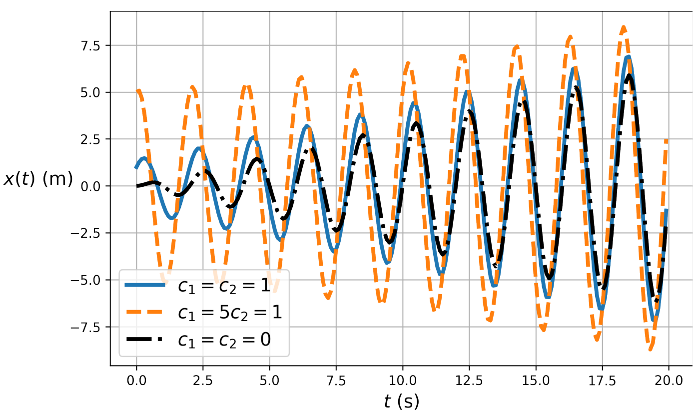


Fig. 2: Un sistema con forzamiento producido con una frecuencia igual a la frecuencia natural con $c_1 = c_2 = 0$, $F_0 = 2$, $m = 1$ y $\omega_0 = \pi$.

Al forzar el sistema en la frecuencia correcta, producimos oscilaciones muy salvajes. Este tipo de comportamiento se llama resonancia o también resonancia pura. A veces se desea resonancia. Por ejemplo, ¿recuerda cuando de niño podía comenzar a balancearse simplemente moviéndose hacia adelante y hacia atrás en el asiento del columpio en la "frecuencia correcta"? En ese momento estabas tratando de lograr resonancia. La fuerza de cada uno de tus movimientos fue pequeña, pero después de un tiempo produjo grandes oscilaciones.

Por otro lado, la resonancia puede ser destructiva. En un terremoto, algunos edificios colapsan, mientras que otros pueden estar relativamente intactos. Esto se debe a que diferentes edificios tienen diferentes frecuencias de resonancia. Entonces descubrir la frecuencia de resonancia puede ser muy importante. Un ejemplo común (pero incorrecto) de fuerza destructiva de resonancia es la falla del puente Tacoma Narrows. Resulta que había un fenómeno diferente en juego.

2.2. Movimiento forzado amortiguado y resonancia práctica

En la vida real, las cosas no son tan simples como lo fueron anteriormente. Hay, por supuesto, algo de amortiguación. Nuestra ecuación es ahora la consideración completa (2), o bien convenientemente

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0\cos\omega_1 t, \tag{8}$$

donde como antes hemos definido $\gamma = 2m\beta$.

También como en el caso anterior en el anterior capítulo, la ecuación homogénea fue resuelta haciendo uso de una solución de prueba $x_p \sim e^{\lambda t}$ y determinamos tres casos especiales en los cuales se podían alcanzar situaciones distintas, esto es, sobreamortiguamiento ($\beta > \omega_0$), subamortiguamiento ($\beta < \omega_0$) y amortiguamiento crítico ($\beta = \omega_0$). Esto es debido a que para la ecuación homogénea ($F_0 = 0$), la ecuación característica tenía las siguientes raíces $\lambda_\pm = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. En cualquier caso, recordemos que la solución siempre tendía a cero cuando t era grande.

Cuando consideramos la ecuación no homogénea, sin embargo, la solución es

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} \\ &\quad + \frac{F_0}{m}\frac{2\beta\omega_1\sin\omega_1 t + (\omega_0^2 - \omega_1^2)\cos\omega_1 t}{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2\beta^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Como en el caso anterior tenemos tres casos posibles. Analicemos cada uno.

2.2.1. Factor de amortiguamiento mayor a la frecuencia natural ($\beta > \omega_0$)

En este caso la solución es simple puesto que $\beta > \omega_0$ y por lo tanto el término dentro de la raíz cuadrada es definido positivo. La solución básica consiste de la ecuación (9). Véase que si $F_0 = 0$, entonces esta ecuación se reduce al caso sin forzamiento que ya habíamos estudiado en el capítulo anterior.

Resonancia ($\beta > \omega_0$ y $\omega_1 = \omega_0$) En este caso, es fácil ver que la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} \\ &\quad + \frac{F_0\sin\omega_0 t}{2m\beta\omega_0}. \end{aligned} \tag{10}$$

De nuevo, si $F_0 = 0$, entonces esta ecuación se reduce al caso sin forzamiento que ya habíamos estudiado en el capítulo anterior en el caso de sobreamortiguamiento.

2.2.2. Factor de amortiguamiento igual a la frecuencia natural ($\beta = \omega_0$)

En este caso las raíces λ_+ y λ_- son iguales y ocurre un fenómeno análogo a la del capítulo anterior. La solución general es

$$x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{2\omega_0\omega_1 \sin\omega_1 t + (\omega_0^2 - \omega_1^2)\cos\omega_1 t}{(\omega_0^2+\omega_1^2)^2} + (c_1 + c_2 t)e^{-\beta t}. \quad (11)$$

De nuevo, si $F_0 = 0$, entonces esta ecuación se reduce al caso sin forzamiento que ya habíamos estudiado en el capítulo anterior para el oscilador críticamente amortiguado.

Resonancia ($\beta = \omega_0$ y $\omega_1 = \omega_0$) En este caso, es fácil ver que la ecuación anterior se reduce a

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\beta t} + \frac{F_0 \sin\omega_0 t}{2m\beta\omega_0^2}. \quad (12)$$

De nuevo, si $F_0 = 0$, entonces esta ecuación se reduce al caso sin forzamiento que ya habíamos estudiado en el capítulo anterior.

2.2.3. Factor de amortiguamiento menor a la frecuencia natural ($\beta < \omega_0$)

En este caso las raíces λ_+ y λ_- son números complejos y ocurre un fenómeno análogo a la del capítulo anterior. La solución general es

$$x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{2\omega_0\omega_1 \sin\omega_1 t + (\omega_0^2 - \omega_1^2)\cos\omega_1 t}{(\omega_0^2+\omega_1^2)^2} + A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta), \quad (13)$$

recordando de nuevo que $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ en la solución anterior.

De nuevo, si $F_0 = 0$, entonces esta ecuación se reduce al caso sin forzamiento que ya habíamos estudiado en el capítulo anterior para el oscilador subamortiguado.

Resonancia ($\beta < \omega_0$ y $\omega_1 = \omega_0$) En este caso, es fácil ver que la ecuación anterior se reduce a

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta) + \frac{F_0 \sin\omega_0 t}{2m\beta\omega_0^2}. \quad (14)$$

De nuevo, si $F_0 = 0$, entonces esta ecuación se reduce al caso sin forzamiento que ya habíamos estudiado en el capítulo anterior.

3. A modo de resumen

Para resumir un poco vemos que la solución siempre puede escribirse como

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t), \quad (15)$$

donde $x_c(t)$ es la parte de la ecuación que proviene de la ecuación diferencial homogénea, mientras que $x_p(t)$ es lo que llamamos la solución particular y que expresa la dinámica de la parte no homogénea de la ecuación diferencial. En la ecuación anterior

$$x_c(t) = \begin{cases} \sum c_\pm e^{\left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} & \beta > \omega_0 \\ (c_1 + c_2 t)e^{-\beta t} & \beta = \omega_0 \\ A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta) & \beta < \omega_0 \end{cases} \quad (16)$$

mientras que

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m}\frac{2\beta\omega_1 \sin\omega_1 t + (\omega_0^2 - \omega_1^2)\cos\omega_1 t}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2\beta^2}, \quad (17)$$

Algunas veces a la solución $x_c(t)$, también se le llama *solución transitoria* ($x_c(t) = x_{tr}(t)$), la cual tiende a cero cuando $t \to \infty$, ya que todos los términos implican un exponencial con un exponente negativo. Entonces para t grande, el efecto de $x_{tr}(t)$ es insignificante y vemos esencialmente solo $x_p)t =$. De ahí el nombre transitorio. Debemos darnos cuenta que $x_p(t)$ no contiene constantes arbitrarias, y las condiciones iniciales solo afectan a $x_{tr}(t)$. Esto significa que el efecto de las condiciones iniciales es insignificante después de un período de tiempo. Debido a este comportamiento, podríamos centrarnos en la solución periódica constante e ignorar la solución transitoria. Consulte las Figuras 3, 4, 5 para ver un gráfico dado varias condiciones iniciales diferentes.

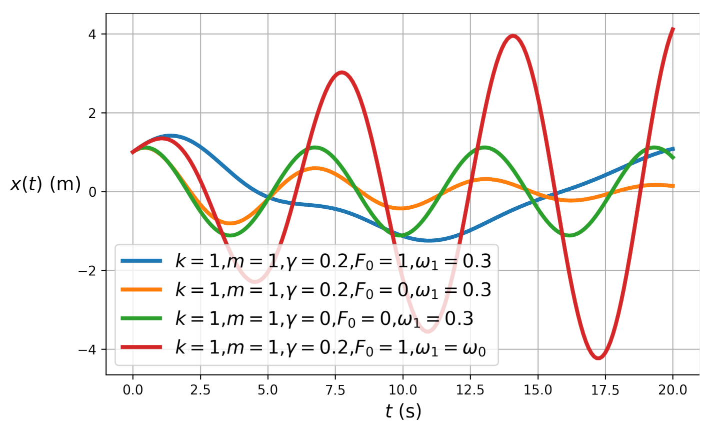


Fig. 3: Soluciones con diferentes condiciones iniciales y varios para parámetros. En todos los casos las condiciones iniciales son $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0.5$.

La velocidad a la que $x_{tr}(t)$ va a cero depende de β (y por lo tanto de γ). Cuando β es más grande (y también γ), en esa medida $x_{tr}(t)$ se vuelve más insignificante. Entonces, cuanto más pequeña es la amortiguación, más lenta es la "región transitoria". Esto concuerda con la observación de que cuando $\gamma = 0$, las condiciones iniciales afectan el comportamiento a cualquier tiempo (es decir, una "región transitoria" que tiende a extenderse infinitamente).

Describamos lo que entendemos por resonancia cuando la amortiguación está presente. Como no hubo conflictos al

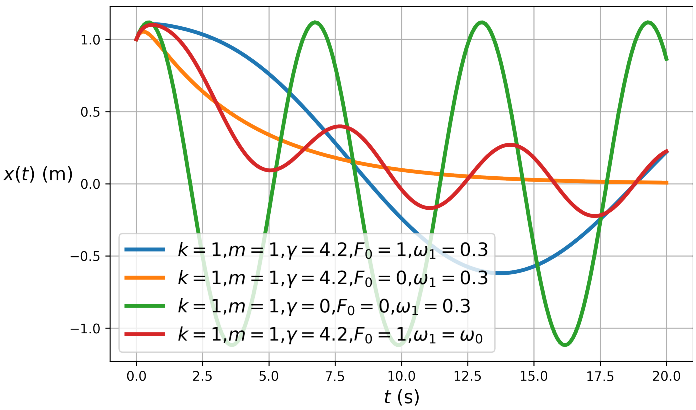


Fig. 4: Soluciones con diferentes condiciones iniciales y varios para parámetros. En todos los casos las condiciones iniciales son $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0.5$.

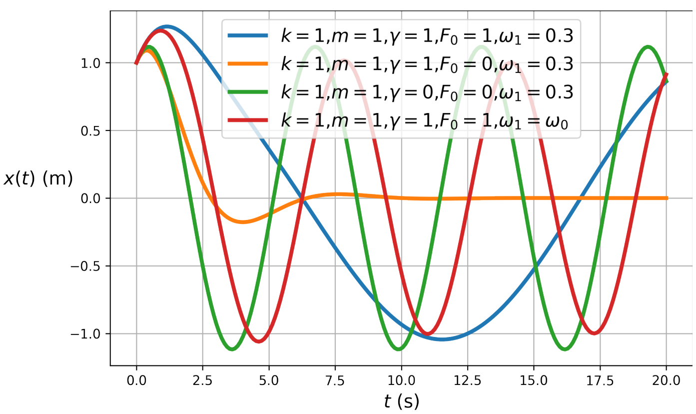


Fig. 5: Soluciones con diferentes condiciones iniciales y varios para parámetros. En todos los casos las condiciones iniciales son $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0.5$.

resolver con un coeficiente indeterminado, no existe un término que vaya al infinito. Observamos el valor máximo de la amplitud de la solución periódica constante.

Véase que la expresión (17) puede escribirse más convenientemente como

$$x_p(t) = C(\omega_1)\cos(\omega_1 t - \zeta), \tag{18}$$

donde

$$C(\omega_1) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2\beta^2}}, \quad \tan\zeta = \frac{2\omega_1\beta}{\omega_0^2 - \omega_1^2}, \tag{19}$$

entonces así $C(\omega_1)$ es la amplitud de $x_p(t)$.

Si tramamos a $C(\omega_1)$ como una función de ω_1 (con todos los demás parámetros fijos) podemos encontrar su máximo. Entonces podemos encontrar a ω_1 que logra este máximo de la frecuencia de resonancia práctica. Llamamos a la amplitud máxima $C(\omega_1)$ la amplitud de resonancia práctica. Así, cuando está presente la amortiguación, hablamos de resonancia práctica en lugar de resonancia pura. Un gráfico de muestra para tres valores diferentes de $C(\omega_1)$ se muestra en la figura 6. Como puede ver, la amplitud de resonancia práctica crece a medida que la amortiguación se hace más pequeña, y la resonancia práctica puede desaparecer por completo cuando la amortiguación es grande.

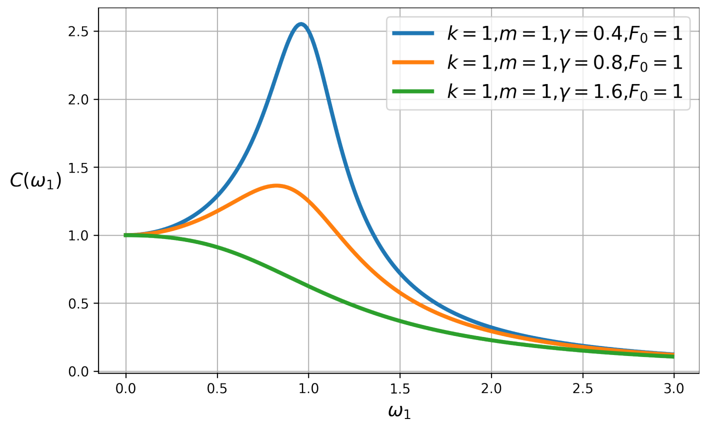


Fig. 6: Valores de la resonancia practica para distintos forzamientos y amortiguamientos.

Para encontrar el máximo necesitamos encontrar la derivada $C'(\omega_1) = dC(\omega_1)/d\omega_1$, y un poco de cálculo da como resultado que

$$C'(\omega_1) = \frac{-2\omega_1 F_0(2\beta^2 + \omega_1^2 - \omega_0^2)}{m\left[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2\beta^2\right]^{3/2}}, \tag{20}$$

la cual es cero para dos valores de ω_1

$$C'(\omega_1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \end{cases} \tag{21}$$

Se puede demostrar que si $\omega_0^2 - 2\beta^2$ es positivo, entonces $\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ es la frecuencia de resonancia práctica (ese es el punto donde $C(\omega_1)$ es máxima, tenga en cuenta que en este caso $C'(\omega_1) > 0$, para ω_1 pequeños. Si $\omega_1 = 0$ es el máximo, entonces no hay resonancia práctica ya que suponemos $\omega_1 > 0$ en nuestro sistema. En este caso, la amplitud aumenta a medida que la frecuencia de forzamiento se reduce.

Si se produce una resonancia práctica, la frecuencia es menor que ω_0. Cuando la amortiguación γ (y por lo tanto β) se vuelve más pequeño, la frecuencia de resonancia práctica va a ω_0. Entonces, cuando la amortiguación es muy pequeña, ω_0 es una buena estimación de la frecuencia de resonancia. Este comportamiento concuerda con la observación de que cuando $\gamma = 0$, entonces ω_0 es la frecuencia de resonancia.

El comportamiento es más complicado si la función de forzamiento no es una onda cosenoidal exacta, sino, por ejemplo, una onda cuadrada.

Ejemplo: Un sistema oscilante sin amortiguamiento.

Supongamos que no hay amortiguación en un sistema de masa y resorte con $k = 20$ N/m, $m = 5$ kg y $F_0 = 5$. Suponga que ω_1 se elige para ser precisamente la frecuencia de resonancia. Encuentre ω_1, la amplitud de las oscilaciones en el tiempo $t = 100$ s, suponiendo que el la masa se mueve a 3 m/s y su posición es 20 cm en el momento inicial $t = 0$ s.

Solución: El sistema entra en resonancia justo cuando $\omega_1 = \omega_0$, esto quiere decir que

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2 \text{ rad/s}.$$

Para encontrar la amplitud de las oscilaciones en el tiempo especificado podemos usar la ecuación (7),

$$x(t) = A\cos(2t + \delta) + \frac{t}{8} t \sin(2t),$$

y usando las condiciones iniciales tenemos que $\phi = -1.438244$; $A = 1.513274$. En este caso tenemos entonces que para $t = 100$,

$$\begin{aligned} x(t = 100) &= 1.5132\cos(2t - 1.43824) + \frac{t}{8} t \sin(2t)\Big|_{t=100} \\ &= -12.12872344. \end{aligned}$$

Ejemplo: Una torre de agua frente a un terremoto.

Supongamos que una torre de agua en un terremoto actúa como un sistema de masa-resorte. Suponga que el recipiente de arriba está lleno y que el agua no se mueve. El contenedor actúa entonces como una masa y el soporte actúa como el resorte, donde las vibraciones inducidas son horizontales. Supongamos que el recipiente con agua tiene una masa de 10000 kg. Se necesita una fuerza de 1000 newtons para desplazar el contenedor 1 metro. Por simplicidad, asuma que no hay fricción. Cuando un terremoto golpea la torre de agua está en reposo (no se mueve). Supongamos que un terremoto induce una fuerza externa $F = mA\omega^2\cos(\omega t)$. a) ¿Cuál es la frecuencia natural de la torre de agua? b) Si ω no es la frecuencia natural, encuentre una fórmula para la amplitud máxima de las oscilaciones resultantes del contenedor de agua (la desviación máxima de la posición de reposo). El movimiento será una onda de alta frecuencia modulada por una onda de baja frecuencia, así que simplemente encuentre la constante frente a los senos. c) Suponga $A = 1$ y viene un terremoto con frecuencia de 0.5 ciclos por segundo. ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones? Suponga que si la torre de agua se mueve a más de 1,5 metros de la posición de reposo, la torre se derrumba. ¿Se derrumbará la torre?

Solución: Tarea.

Ejemplo: Un sistema amortiguado.

Suponga un sistema de masa-resorte con una masa de 4 kg en un resorte con $k = 4$ N/m y una constante de amortiguación $\gamma = 1$ Kg/s. Suponga que $F_0 = 2$ N. Usando la función de forzado $F_0 \cos\omega t$. encuentra el ω que causa resonancia práctica y encuentra la amplitud.

Solución: Tarea. Los resultados son $\omega = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{31}{2}} \approx 0.984$ y $C(\omega) = \frac{16}{3\sqrt{7}} \approx 2.016$.