

# Ley de Coulomb

D. Sierra-Porta

## Índice

1. Introducción . . . . .	1
2. La ley del inverso del cuadrado: la ley de Coulomb . . . . .	3
3. Funcionamiento de un electroscopio . . . . .	4
4. Fuerza debido a una distribución lineal continua de carga . . . . .	5
4.1. Enfoque aproximado. . . . .	5
4.2. Enfoque de cálculo. . . . .	6

## 1. Introducción

El capítulo anterior resumió lo que se sabía, tanto cualitativa como cuantitativamente, hasta aproximadamente 1760. Incluía la ley de conservación de la carga. El presente capítulo presenta otra ley cuantitativa: la ley de Coulomb para la fuerza sobre una carga puntual debida a otra, que varía como el inverso del cuadrado de su separación, una llamada ley del inverso cuadrado.

En 1786, Coulomb dominó tanto un recurso teórico, la ley de la fuerza eléctrica y algunas de sus consecuencias matemáticas, como un instrumento extremadamente sensible que permite medir cantidades muy pequeñas de electricidad. Durante algunos años, utilizará conjuntamente la herramienta matemática y el instrumento de precisión para estudiar la distribución de electricidad en conductores en equilibrio eléctrico.

En su trabajo implementa la mezcla del cálculo y la física se muestra como un virtuoso tanto experimental como matemático. El busca construir para la electricidad y el magnetismo un cuerpo sistemático de conocimientos y métodos equivalente al que se estableció para la mecánica durante el siglo XVIII. También tiene como objetivo explicar las propiedades específicas de la electricidad. Aplicó sus cálculos a la cometa eléctrica y al pararrayos cuya operación interesó particularmente a la Academia. Fue principalmente sobre estos datos experimentales que Poisson apoyó, dos décadas después, su teoría analítica de la electrostática.

Para la electricidad por fricción, todos los conductores, incluso los imperfectos, son equivalentes. La primera pregunta planteada por Coulomb se refiere a la influencia de la naturaleza de los cuerpos conductores en el intercambio de electricidad entre estos cuerpos. Al poner en contacto dos bolas o dos discos de diversos materiales, cobre, hierro, madera o papel, y luego medir sus cargas en equilibrio, Coulomb muestra que la electricidad se distribuye por igual

entre dos cuerpos conductores con la única condición de que sean geoméricamente idénticos.

La distribución de electricidad entre dos conductores, por lo tanto, no depende de su composición química. Con conductores imperfectos, como madera o papel (conductores electrostáticos), la comunicación de la electricidad no es instantánea como con los metales, pero la carga final es idéntica.

Esto no era obvio para muchos científicos de la época que consideraban la electricidad como un fluido capaz de penetrar en los cuerpos de manera diferente dependiendo de su afinidad química por la electricidad. Pero, ¿cómo se distribuye la electricidad en un conductor cargado? Basándose tanto en un estudio experimental como en una demostración matemática, Coulomb proporciona la siguiente respuesta:

*“En un cuerpo eléctricamente conductor, el fluido eléctrico se extiende sobre la superficie del cuerpo, pero no penetra en el interior del cuerpo”.*

Es una propiedad fundamental de los conductores en equilibrio eléctrico. Para ver si la electricidad penetra dentro de un conductor cargado, toma un cilindro de madera en el que se hace una cierta cantidad de cavidades cuya profundidad y diámetro son del orden de un centímetro. Y para medir la cantidad de electricidad fuera y dentro del cilindro (o más precisamente en el fondo de las cavidades), se fija un pequeño trozo de papel dorado, de 3 mm de diámetro, a un mango aislante. Si este disco metálico se pone en contacto con la superficie de un conductor cargado, afirma Coulomb, “se convierte en parte de la superficie y toma, en consecuencia, una cantidad de fluido eléctrico igual” a la que transportaba la porción correspondiente de superficie, cantidad “cuya intensidad podemos medir exactamente por medio de nuestro balanza eléctrica”.

Pero como esta carga es extremadamente débil, Coulomb construye una nueva balanza, aún más sensible que la que le fue utilizada para establecer la ley de las fuerzas eléctricas, al reemplazar en particular un cable de plata por un cable de seda. Así, cuando el disco de oro se pone en contacto el cilindro cargado y luego con la bola de la balanza, hace que la aguja de la balanza se desvíe con fuerza. Por otro lado, señala Coulomb, si el disco se pone en contacto con el fondo de una cavidad, “esta aguja no dará señales de electricidad”:

*“Por lo tanto, está claro que en este experimento, no hay fluido eléctrico en el interior del cuerpo, incluso muy cerca de su superficie”.*

De hecho, este experimento del cilindro con la cavidad

realmente no explora el interior del conductor y solo muestra que el fondo de una cavidad no está cargado. Más tarde, Coulomb aborda esta cuestión de la ausencia de carga dentro de un conductor con otra experiencia que luego considera “decisiva”, conocida hoy como los hemisferios de Cavendish.

Después de presentar la experiencia del cilindro con la cavidad como prueba experimental suficiente, muestra que la ausencia de carga dentro de un conductor es una consecuencia matemática de la ley de la fuerza eléctrica.

La justificación de Charles de Coulomb para la ley que lleva su nombre en electrostática no es ni la primera ni la más elegante de la ley. En 1785, Coulomb presentó la siguiente hipótesis, que es universalmente entendida por todos los estudiantes de física de primaria como la ley de Coulomb:

*“La fuerza eléctrica ejercida entre dos cargas estáticas disminuye al cuadrado de su separación.”*

Sin embargo, la ley de Coulomb es un nombre poco apropiado; Henry Cavendish descubrió la ley dos años antes del anuncio de Coulomb. Además, la justificación experimental de Cavendish es más simple y elegante que la justificación que Coulomb inventó, que requería una configuración experimental que consistía en un equilibrio de torsión algo complicado. Cavendish tomó un enfoque diferente. En su configuración experimental, Cavendish no midió la fuerza electrostática; él simplemente confirmó que faltaba. Es decir, confirmó los siguientes fenómenos, que ahora es muy conocido:

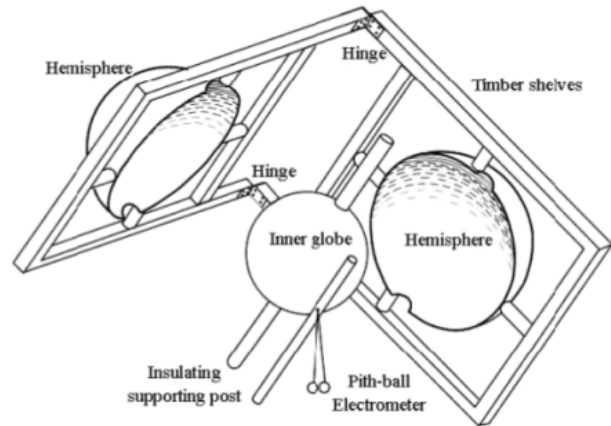
“Un conductor cargado no produce campo eléctrico en su interior”.

Aunque esta observación es correcta, su justificación en la literatura popular a menudo no lo es. En muchos libros de texto de física muy respetados, la justificación suele ser una “prueba” cualitativa incompleta que utiliza argumentos vagos sobre el equilibrio y cómo un campo eléctrico interior es de alguna manera una violación de esa hipótesis. Estos argumentos, sin embargo, son totalmente falsos. Si la ley del cuadrado inverso de Coulomb fuera reemplazada, por ejemplo, por algún tipo de ley del cubo inverso, los conductores cargados producirían campos eléctricos internos. Por lo tanto, cualquier justificación de la observación de Cavendish debe involucrar un análisis crítico de la relación inversa al cuadrado entre las fuerzas electrostáticas y la separación de las cargas estáticas.

Sin embargo, es posible trabajar en la otra dirección. Cavendish demostró en 1773 que la falla experimental de los conductores cargados para producir campos eléctricos internos es una fuerte justificación de que las fuerzas electrostáticas deben obedecer una ley de atracción/repulsión de cuadrado inverso.

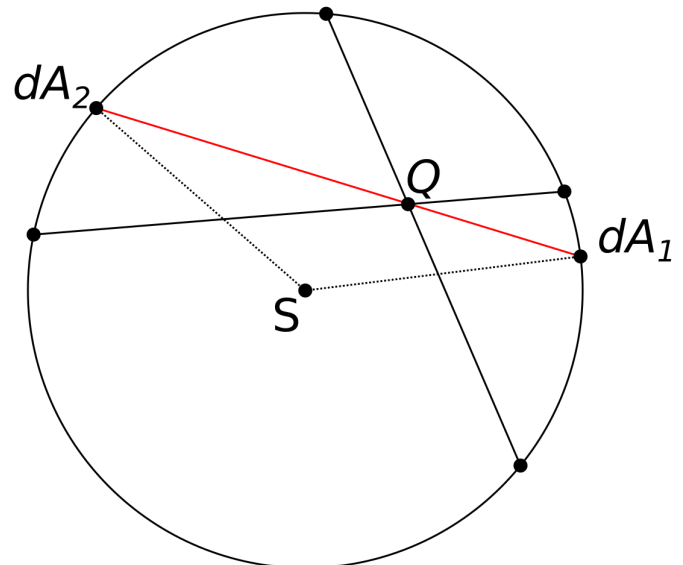
Cavendish construyó el siguiente aparato para determinar el campo eléctrico dentro de un conductor cargado. Se suspende una esfera conductora, utilizando el soporte de marcos aislantes, dentro de otra esfera conductora, que puede dividirse en dos hemisferios mediante bisagras. Ambos conductores están inicialmente sin carga. Se coloca un cable

conductor que conecta las esferas interior y exterior. Luego se carga la esfera exterior y se corta el alambre con un hilo de seda. Después de desmontar la esfera externa, la carga de la esfera interna se midió con un electrómetro.



Si la esfera externa produjera campos eléctricos interiores, entonces la carga migraría naturalmente a la esfera interna. Sin embargo, el electrómetro no pudo mostrar ninguna carga significativa en la esfera interna, lo que confirma la hipótesis de que los conductores eléctricos no pueden producir campos eléctricos interiores.

Considere una esfera conductora  $S$  y una pequeña carga de prueba positiva  $Q$  en su interior. Y considere los puntos  $A_1$  y  $A_2$  en la esfera de manera que  $A_1 - S - A_2$  forme una línea. Y considere elementos de superficie arbitrariamente pequeños  $dA_1$  y  $dA_2$  que son vecindades disjuntas de  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente. Pictóricamente:



El hecho de que la carga  $Q$  permanezca en equilibrio estático independientemente de su posición dentro de la esfera sugiere que la fuerza eléctrica neta sobre  $Q$  aplicada por un parche esférico cargado se opone a una fuerza eléctrica igual y opuesta producida a partir de otro parche cargado. Ambos parches, según la ley de acción-reacción, deben producir el mismo ángulo sólido cuando se proyectan desde  $Q$  ya que

la densidad de carga sobre un conductor es uniforme. Más fuertemente, la fuerza aplicada en una carga interior desde un parche esférico cargado debe ser proporcional al ángulo sólido correspondiente.

Suponga que  $dA_1$  y  $dA_2$  producen fuerzas iguales y opuestas que actúan sobre  $Q$ , por lo que estos parches corresponden a un ángulo sólido  $d\Omega$  cuando se proyectan desde  $Q$ . La definición geométrica de un ángulo sólido da lugar a las ecuaciones

$$d\Omega = \frac{dA_1}{r_{QA_1}^2} \cos \theta = \frac{dA_2}{r_{QA_2}^2} \cos \theta, \quad (1)$$

donde  $\theta = \angle(SA_1Q) = \angle(SA_2Q)$ . Sin embargo, dado que estos parches pueden ser arbitrariamente pequeños, establecemos  $\cos \theta = 1$ , de lo que se deduce que la fuerza neta aplicada por el parche  $dA = dA_1$  en la carga de prueba  $Q$  es proporcional a

$$Qd\Omega = \frac{QdA}{r_{QA}^2}, \quad (2)$$

lo cual es exactamente la ley de Coulomb que vamos a describir inmediatamente.

## 2. La ley del inverso del cuadrado: la ley de Coulomb

Robinson, Cabendish, y Coulomb, todos concluyeron que la fuerza eléctrica entre dos distintos objetos puntuales con cargas  $q$  y  $Q$  varía como el inverso del cuadrado de la distancia de separación entre  $q$  y  $Q$ . Esto implica necesariamente que

$$|F| = k \frac{|qQ|}{r^2}, \quad (3)$$

donde  $r$  es la distancia que separa abas cargas y  $k$  es una constante de proporcionalidad que justamente hace la normalización en la ley de proporcionalidad. No hay otra manera de medir  $k$  que no sea experimentalmente y por su puesto  $k$  tiene unidades de que aseguran que la fuerza tenga las unidades correctas de Newtons.

Cuando la carga es medida en unidades del SI de Coulombs, la distancia es medida en metros y la fuerza es medida en Newtons, la constante  $k$  puede ser determinada. Se necesita un experimento que bien pudiera ser la balanza de cavendish y hacer un largo proceso de ajustes de curvas. Sin embargo cuando el experimento se hace rigurosamente y con detalle, el valor de  $k$  es justamente

$$k = 8.9875513 \times 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \approx 9 \times 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}. \quad (4)$$

Además, para aplicaciones futuras, esta constante está relacionada con otra constante fundamental que sirve mucho en las aplicaciones prácticas y que llamamos constante de permitividad y se designa como  $\epsilon_0$ . La relación entre ambas es que justamente

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = 8.85418781 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}. \quad (5)$$

Cuando la fuerza es expresa como un vector entonces la dirección de la fuerza tiene la dirección del vector que apunta en la dirección desde una de las cargas a la otra, esto es

$$\vec{F} = k \frac{|qQ|}{r^2} \hat{r}, \quad (6)$$

donde  $\hat{r}$  es el vector unitario que apunta en la dirección de la línea que une las cargas. Sin embargo, debido a que esto es obvio en adelante vamos a olvidarnos de esta notación y cada vez que escribamos  $F$  recordemos que en realidad tratamos de escribir  $\vec{F}$ . En este caso, el sentido y la dirección si no es el obvio de la línea que une las cargas entonces lo pondremos explícitamente.

Como se mencionó repetidamente, la fuerza eléctrica, mantiene unidos los átomos, las moléculas y los sólidos, y de hecho mantiene unidos nuestros propios cuerpos. Por esa razón, es importante tener una idea de la fuerza que proporciona, tanto dentro de los átomos como dentro de los núcleos. No abordaremos estas preguntas con gran detalle porque la mecánica clásica (es decir, las leyes de Newton) no se puede aplicar literalmente a distancias tan pequeñas. En ese caso, la mecánica cuántica, proporciona una descripción precisa.

De manera general se sabe que los átomos tienen una dimensión característica de aproximadamente  $10^{-10}$  m, una unidad que se ha denominado angstrom, o Å. Algunos átomos son más grandes y otros más pequeños, pero este es un buen promedio. Por lo tanto, considere la fuerza sobre un electrón en un átomo de hidrógeno, usando una separación de  $r = 10^{-10}$  m. (En realidad, para el átomo de hidrógeno, la distancia apropiada es aproximadamente la mitad).

La ley de Coulomb, con el electrón y el protón con la misma magnitud  $q_{proton} = q_{electron} = q_e = 1.67 \times 10^{-19}$  C para la carga, produce la fuerza eléctrica entre el electrón y el protón de  $F = kq_e^2/r^2 = 2.3 \times 10^{-8}$  N. Esto parece ser pequeño, pero no en comparación con la fuerza sobre un átomo debido a la gravedad de la Tierra. Tome la masa del protón como  $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$  kg para la masa atómica (esencialmente, la masa del protón ya que el electrón es mucho menos masivo). Entonces, con  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> la gravedad de la tierra, se tiene que  $F = mg = 1.64 \times 10^{-26}$  N. Por lo tanto, comparación de la fuerza eléctrica dentro del átomo con la fuerza gravitacional de la tierra sobre el átomo muestra que este último es insignificamente pequeño. Esto tiene un profundo significado estructural para átomos individuales e incluso para moléculas grandes: su estructura es indiferente al entorno gravitacional local. Solo en la escala de objetos más grandes, como árboles y personas, la gravedad afecta la estructura.

### Ejemplo: Comparando la fuerza gravitacional y la eléctrica sobre el átomo de hidrógeno.

La fuerza de atracción gravitacional entre el electrón y el protón es extraordinariamente pequeña. Con  $G = 6.67 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup> y la masa del electrón  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg, obtenemos que

$$F_{e-p}^{grav} = G \frac{m_e m_p}{r^2} = 1.01 \times 10^{-47} \text{ N},$$

lo cual es una fuerza de aproximadamente  $10^{39}$  veces menor que la fuerza eléctrica entre ellos.

Existe un fenómeno curioso que está relacionado con la fuerza eléctrica. La resistencia de los materiales, lo cual es un área de estudio muy importante en la ingeniería y el estudio de materiales, también llamada mecánica de los materiales, se ocupa del comportamiento de los objetos sólidos sujetos a tensiones y torsiones.

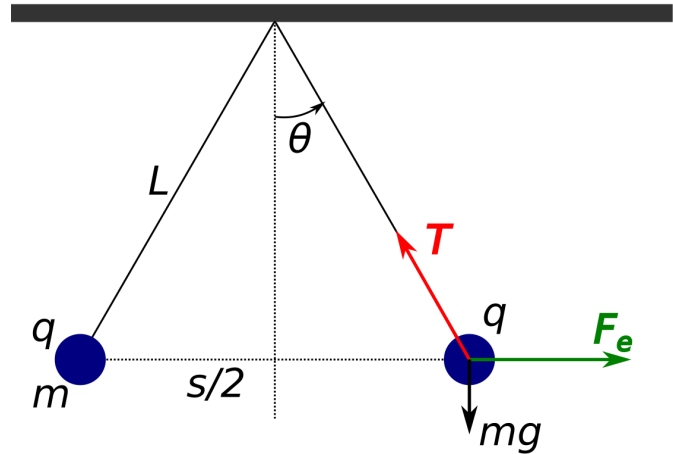
El estudio de la resistencia de los materiales a menudo se refiere a varios métodos de cálculo de tensiones y deformaciones en elementos estructurales, como vigas, columnas y ejes. Los métodos empleados para predecir la respuesta de una estructura bajo carga y su susceptibilidad a varios modos de falla tienen en cuenta las propiedades de los materiales, como su límite elástico, la resistencia final, el módulo de Young y la relación de Poisson; Además, se consideran las propiedades macroscópicas del elemento mecánico (propiedades geométricas), como su longitud, ancho, grosor, restricciones de límite y cambios bruscos en la geometría, como los agujeros. La cuestión básica aquí es que para un cierto material, pueden existir tres tipos de tensiones: cargas transversales, cargas axiales y cargas torsionales. Dichas carga pueden ser entendidas en términos de una magnitud que es  $\sigma = F/A$ , donde  $F$  es la fuerza [N] que actúa sobre un área  $A$  [m<sup>2</sup>]. Estas tensiones típicas son del orden de cientos a miles de megaPascuales, es decir,  $\sigma \approx [10^2, 10^3]$  MPa, o bien del orden de  $\sigma \approx [10^7, 10^8]$  N/m<sup>2</sup>, dependiendo del material ([https://en.wikipedia.org/wiki/Ultimate\\_tensile\\_strength](https://en.wikipedia.org/wiki/Ultimate_tensile_strength)).

La idea es que en un material cualquiera, considerando una pequeña muestra, los átomos típicamente están separados aproximadamente  $3 \times 10^{-9}$  m, con una sección transversal de una separación atómica que va como al cuadrado de la distancia de separación (ángulo sólido), es decir,  $(3 \times 10^{-9} \text{ m})^2 \approx 9 \times 10^{-18} \text{ m}^2 \approx 10^{-17} \text{ m}^2$ , y dado que la fuerza eléctrica para un átomo es del orden de  $10^{-8}$  (según el ejercicio anterior), esto da una fuerza por unidad de área del orden de  $10^9$  N/m<sup>2</sup>. Este acuerdo indica (pero no prueba) que las interacciones eléctricas son responsables de las propiedades elásticas de los materiales. Suponiendo que la rotura ocurre cuando el cambio fraccional en la separación atómica es del orden de 0.1, da un esfuerzo de tensión del orden de  $10^8$  N/m<sup>2</sup>, más alto que para los materiales reales: el esfuerzo de tracción del hierro es del orden de  $10^9$  N/m<sup>2</sup>, y para una cadena es del orden de  $10^7$  N/m<sup>2</sup>. Esto indica que algo más determina cuándo se rompe un material. En la década de 1930, se descubrió que los detalles del posicionamiento atómico y el deslizamiento a nivel atómico a través de las llamadas dislocaciones, son responsables del esfuerzo de tensión relativamente bajo de la mayoría de los materiales.

### 3. Funcionamiento de un electroscopio

Los electroscopios de carga (como los electroscopios de hoja de oro o el electroscopio de papel de aluminio) y los

electrómetros de carga son dispositivos para medir la carga de un objeto, siendo el electrómetro más cuantitativo. Usan la fuerza repulsiva entre cargas similares. La figura 1 muestra un experimento para determinar cuánta electricidad se puede producir frotando. De un punto común cuelgan dos hilos de longitud  $L$  y dos esferas conductoras pequeñas idénticas de masa  $m$ , a las que se les ha dado la misma carga  $q$  mediante el proceso de distribución de carga. Encontremos la relación entre el ángulo  $\theta$  y la carga  $q$ ; claramente, cuanto mayor es la carga, mayor es el ángulo de separación.



**Fig. 1:** Un electrómetro simple. Las dos esferas son de igual masa  $m$  y igual carga  $q$ . Al medir la separación con el ángulo  $\theta$  (que están relacionados), se puede determinar la fuerza eléctrica y la carga

Este es en realidad un problema de estática en la que se compensan varias fuerzas, el peso, la tensión de la cuerda y la fuerza electrostática entre las esferas. En este caso podemos ver, que al hacer un diagrama de cuerpo libre para las fuerzas involucradas tenemos que:

$$\sum_i F_{xi} = F_e - T \sin \theta = 0, \quad \sum_i F_{yi} = mg - T \cos \theta = 0. \quad (7)$$

Además, si la distancia de separación entre las esferas es de  $s$ , entonces tendremos que  $\sin \theta = s/(2L)$ , con lo cual uniendo ambas ecuaciones de estática

$$F_e = \frac{kq^2}{s^2} = T \sin \theta = mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = mg \tan \theta, \quad (8)$$

de lo que se deduce que

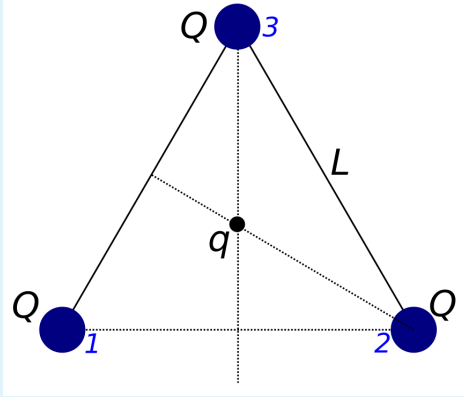
$$q = s \sqrt{\frac{mg \tan \theta}{k}} = \sqrt{\frac{4L^2 mg \tan \theta \sin^2 \theta}{k}}. \quad (9)$$

Para ángulos muy pequeños (cosa que ocurre frecuentemente), tanto  $\sin \theta$  como  $\tan \theta$  tienden a tener un valor igual a  $\theta$  (en radianes), por lo que entonces  $q$  varía como  $q = \theta \sqrt{4L^2 mg \theta / k}$ .



Por ejemplo, para una longitud de  $L = 10$  cm y una masa de  $m = 0.004$  kg, y una separación de 2.5 cm, se tiene que la carga sería como  $1.85 \times 10^{-8}$  C, lo cual es la carga típica que puede ser obtenida en un peine luego de haber frotado el cabello peinándolo.

#### Ejemplo: Fuerza debido a tres cargas iguales.



Digamos que hay tres cargas de fuente iguales  $q_1 = q_2 = q_3 = Q$  colocadas en las esquinas de un triángulo equilátero. Si se coloca una carga de observación  $q$  en el centro del triángulo. ¿Cuál es la fuerza neta sobre esta carga?

Para resolver este problema muy sencillo basta con darse cuenta que dado que el triángulo es equilátero, entonces la carga  $q$  se encuentra en la unión de las bisectrices del mismo. Por lo que la distancia desde cada uno de los vértices a esta carga es igual a la mitad de la bisectriz. En este caso si designamos el ángulo  $\theta$  como aquel formado entre alguna bisectriz y uno de los lados, el cual vale exactamente  $30^\circ$ , entonces la bisectriz vale  $d = L \cos \theta$ , con lo cual, la distancia desde las cargas  $Q$  hasta la otra carga  $q$  es exactamente  $L \cos \theta / 2$ . Por lo tanto, siendo todas las cargas iguales la fuerza electrostática entre cada carga  $Q$  y  $q$  es en módulo  $F_e = kqQ/(d/2) = 2kqQ/L \cos \theta$ . Ahora bien, tomando en cuenta sus direcciones las tres fuerzas de las cargas  $Q$  sobre la carga  $q$  son:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{2kqQ}{L \cos \theta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \\ F_2 &= \frac{2kqQ}{L \cos \theta} (-\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \\ F_3 &= -\frac{2kqQ}{L \cos \theta} \hat{j} \end{aligned}$$

con lo cual

$$F_R = \frac{2kqQ}{L \cos \theta} (2 \sin \theta - 1) \hat{j} = \frac{2kqQ}{L} (2 \tan \theta - \sec \theta) \hat{j}.$$

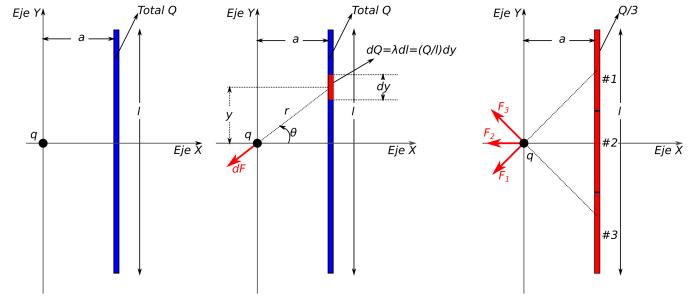
#### Ejemplo: Fuerza debido a cargas iguales en los vértices de un octágono.

Considere un octágono regular en el cual se colocan 8 cargas iguales, pero cuatro de ellas con carga  $+Q$  y otras cuatro con cargas  $-Q$ . En el centro se coloca otra carga de magnitud  $q$ . ¿Cuánto es la fuerza eléctrica debido a las 8 cargas sobre la carga del centro?

Se deja de ejercicio.

## 4. Fuerza debido a una distribución lineal continua de carga

Supongamos ahora que queremos encontrar el campo eléctrico para una distribución continua de carga. Particularmente empecemos con una distribución lineal de carga como punto de partida, sin embargo, la metodología usada acá sirve para cualquier tipo de distribución de carga.



**Fig. 2:** La fuerza sobre una carga puntual debido a una carga lineal. (Izquierda) Declaración del problema. (Derecha) Fuerza debida a un elemento  $dq$ .

Obtengamos la fuerza  $F_e$  sobre una carga  $q$  en el origen, debido a una carga neta  $Q$  que se distribuye uniformemente sobre el segmento de línea desde  $(a, -l/2, 0)$  a  $(a, l/2, 0)$ . Vea la Figura 2 para el detalle.

Tenga en cuenta que  $F_y = F_z = 0$ , por consideraciones de simetría. En principio, encontrar  $F_x$  requiere cálculo, donde separamos la carga de la línea continua en un número infinito de cargas puntuales infinitesimales  $dQ$ , y sumamos sus fuerzas  $dF_x$  (vectorialmente) en  $q$ . Sin embargo, primero consideraremos lo que sucede cuando aproximamos la carga de la línea por un número finito de cargas puntuales, y sumamos sus fuerzas vectoriales, usando una hoja de cálculo.

### 4.1. Enfoque aproximado.

Las hojas de cálculo pueden calcular números a partir de fórmulas algebraicas. Por lo tanto, tendremos que usar valores específicos para  $q$ ,  $Q$ ,  $a$  y  $l$ . Tomemos por ejemplo que  $q = 10^{-9}$  C,  $Q = 5 \times 10^{-9}$  C,  $a = 1$  m, y  $l = 7$  m. Ahora considere varias aproximaciones a la carga de línea  $Q$ .

1. La aproximación de  $Q$  por una sola carga se puede hacer colocando toda  $Q$  en el punto medio de la línea. En este caso, no hay componente  $y$ , por lo que toda la fuerza está en la dirección  $x$ . Esto le da una fuerza de  $45 \times 10^{-9}$  N.
2. La aproximación de  $Q$  por dos subcargas puede hacerse dividiendo la línea en dos segmentos iguales de longitud  $7/2$ , y colocando  $Q/2$  en los puntos medios del segmento, dados por  $(1, 7/4)$  y  $(1, -7/4)$ . Esto le da una fuerza de  $5.5 \times 10^{-9}$  N.

$n$	1	2	3	4	5	6
$F_n$	45	5.50	16.83	10.60	13.22	12.01
$n$	7	8	9	10	11	12
$F_n$	12.53	12.30	12.40	12.3540	12.3714	12.3631

**Tab. 1:** Cálculo de la fuerza en una hoja de cálculo.

3. La aproximación de  $Q$  por tres subcargas se puede hacer dividiendo la línea en tres segmentos iguales de longitud  $7/3$  y colocando  $Q/3$  en los puntos medios del segmento, dados por  $(1, 7/2 - (1/2) \cdot 7/3) = (1, 7/3)$ ,  $(1, 7/2 - (3/2) \cdot 7/3) = (1, 0)$  y  $(1, 7/2 - (5/2) \cdot 7/3) = (1, -7/3)$ . Esto da una fuerza de  $16.83 \times 10^{-9}$  N. [Vale la pena hacer estos cálculos usted mismo, ya sea con lápiz y papel o con una hoja de cálculo, para verificar que realmente entiende cómo usarlo.]
4. En términos más generales, tenemos  $Q/n$  en  $n$  subcargas, en las posiciones  $(1, 7/2 - (1/2) \cdot 7/n)$ ,  $(1, 7/2 - (3/2) \cdot 7/n)$  y así sucesivamente. Al usar la capacidad de cálculo de la hoja de cálculo, podemos calcular  $F_n$  para varios  $n$ . Por la simetría del problema, solo se deben calcular los componentes  $x$  de las fuerzas individuales. Además, la fuerza neta  $F$  apunta hacia la izquierda, por lo que  $F_x$  tiene un signo negativo. La tabla siguiente muestra la magnitud de la suma de los componentes  $x$  para  $n$  segmentos. Se da como  $F_n$ , y está en unidades de  $10^{-9}$  N para  $n$  hasta 12. Las sumas son convergentes.

## 4.2. Enfoque de cálculo.

Primero configure el problema, lo que significa elegir una carga típica. La figura muestra un  $dQ_i$  en el intervalo  $dy$  centrado en  $y$ . La línea se divide en infinitos  $dQ$ 's que abarcan el rango de  $y = -l/2$  a  $y = l/2$ . En correspondencia con este  $y$ , hay un ángulo que llamamos  $\theta$ , y una dirección  $\hat{r}$  a la carga de observación  $q$ . Los  $dQ$ 's actúan con una fuerza  $dF$  sobre  $q$ . Nuestro objetivo es sumar los  $dF$  para todos los  $dQ$ 's que constituyen la carga de la línea, para obtener la fuerza total  $F$  que actúa sobre  $q$ .

Luego, tenemos que

$$dF_x = -dF \cos \theta, \quad (10)$$

y además  $dQ = (Q/l)dy$ , por lo que ponemos entonces escribir,

$$\begin{aligned} dF_x &= -dF \cos \theta = -\frac{kq(dQ) \cos \theta}{(a^2 + x^2)} \\ &= -\frac{kq(dQ) \cos \theta dy}{l(a^2 + x^2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Tenemos que tomar una decisión ahora: eliminar  $y$  en términos de  $\theta$ , o viceversa. Elegimos eliminar  $y$ , por ejemplo. En este caso viendo la figura tenemos que  $y = a \tan \theta$ , y por

lo tanto  $dy = a \sec^2 \theta d\theta$  y además  $a^2 + y^2 = a^2(1 + \tan^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta$ , y entonces

$$dF_x = \frac{kqQ \cos \theta (a \sec^2 \theta d\theta)}{la^3 \sec^2 \theta} = -\frac{kqQ \cos \theta d\theta}{al}. \quad (12)$$

Ahora estamos listos para emplear el cálculo integral (hasta ahora solo hemos usado cálculo diferencial para expresar  $dF_x$ ). Antes de hacerlo, tengamos en cuenta que, por dos razones, este problema es más complejo que la integración para sumar la carga total  $Q$  en un objeto. Primero, la fuerza es un vector, mientras que la carga es un escalar, por lo que tenemos que determinar los componentes del vector en este caso. Segundo, el valor de la fuerza sobre  $q$  depende de su posición, mientras que la cantidad de carga sobre un objeto no depende de la posición de quien esté sumando esa carga. Ahora hacemos la integral para obtener  $F_x$ . Tenemos entonces que

$$F_x = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{kqQ \cos \theta d\theta}{al} = -\frac{kqQ}{a\sqrt{a^2 + (l/2)^2}}, \quad (13)$$

y aquí hemos hecho uso de que  $\theta_1 = -\theta_2 = \arctan(l/(2a))$ .

Para  $a = 1$  m,  $l = 7$  m,  $q = 10^{-9}$  C, y  $Q = 5 \times 10^{-9}$  C, nuestro resultado anterior produce  $F_x = -12.362450 \times 10^{-9}$  N. Está muy cerca del valor obtenido numéricamente de la anterior. Para un conjunto diferente de valores iniciales:  $a = 3$  m,  $l = 4$  m,  $q = 4 \times 10^{-9}$  C, y  $Q = -2 \times 10^{-9}$  C, el mismo resultado anterior produce  $F_x = -6.656 \times 10^{-9}$  N. La ventaja de la expresión analítica general sobre la suma de la fuerza bruta debería ser evidente. Por otro lado, una computadora puede reevaluar una suma de hoja de cálculo muy rápidamente cuando cambian las entradas.

### Ejemplo: Fuerza debido a una línea de carga en el eje axial.



Una barra de longitud  $a$  cuyos extremos están en  $(0,0)$  y  $(a,0)$  tiene una densidad de carga  $\lambda = (Q_0/a^2)x$  dispuesta como en la figura. (a) Encuentre la carga total  $Q$  en la barra. (b) Encuentre la fuerza sobre una carga  $q$  en  $(-b,0)$ . (c) Verifique que la fuerza tenga el límite correcto cuando  $b \rightarrow \infty$ .

**Se deja de ejercicio.**

### Ejemplo: Fuerza debido a una línea circular de carga.

Una carga  $Q$  se distribuye uniformemente sobre la mitad superior de un círculo de radio  $a$ , centrada en el origen. Encuentre la fuerza sobre una carga  $q$  en el origen.

**Se deja de ejercicio.**

Busca mas información y recursos  
sierraporta.github.io

