Ondas longitudinales

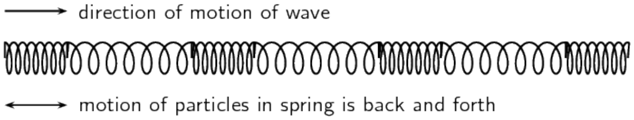
D. Sierra-Porta

Índice

1. Resumen

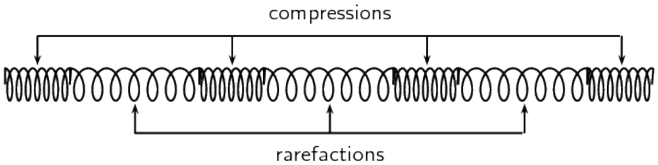
Ya hemos estudiado pulsos y ondas transversales. En este capítulo, observamos otro tipo de onda llamada onda longitudinal. En ondas transversales, el movimiento de las partículas en el medio era perpendicular a la dirección de la onda. En ondas longitudinales, las partículas en el medio se mueven paralelas (en la misma dirección que) al movimiento de la onda. Ejemplos de ondas transversales (discutidas en el capítulo anterior) son las ondas de agua. Un ejemplo de onda longitudinal es una onda de sonido.

¿Qué es una onda longitudinal? Pues diremos que una onda longitudinal es una onda donde las partículas en el medio se mueven paralelas a la dirección de propagación de la onda. Cuando estudiamos las ondas transversales, observamos dos movimientos diferentes: el movimiento de las partículas del medio y el movimiento de la onda misma. Haremos lo mismo para las ondas longitudinales.



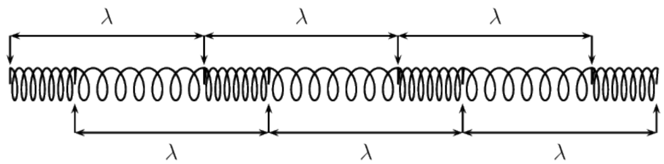
La pregunta es ¿cómo construimos tal onda? Una onda longitudinal se ve mejor en un resorte. Imaginemos la siguiente actividad para obtener más información sobre las ondas longitudinales. Tome un resorte y colóquelo sobre una mesa. Sostenga un extremo del resorte y gírelo hacia atrás en la dirección del resorte. Observa lo que pasa. ¿En qué dirección se mueve la perturbación? Aquí a partir de esta observación habrás notado que la perturbación se mueve paralelamente a la dirección en que se tiró el resorte. Como en el caso de las ondas transversales, se pueden definir las siguientes propiedades para las ondas longitudinales: longitud de onda, amplitud, período, frecuencia y velocidad de la onda.

Sin embargo y viendo la experiencia anterior vemos que en lugar de crestas y canales, las ondas longitudinales tienen compresiones y rarefacciones. Una **compresión** es una región en una onda longitudinal donde las partículas están más cercanas entre sí. Una **rarefacción** es una región en una onda longitudinal donde las partículas están más separadas.



Como se ve en la Figura, hay regiones donde el medio está comprimido y otras regiones donde el medio se extiende en una onda longitudinal.

La **longitud de onda** en una onda longitudinal es la distancia entre dos puntos consecutivos que están en fase. Así entn¿onces, la longitud de onda en una onda longitudinal se refiere a la distancia entre dos compresiones consecutivas o entre dos rarefacciones consecutivas. La **amplitud** es el desplazamiento máximo desde el equilibrio. Para una onda longitudinal que es una onda de presión, este sería el aumento (o disminución) máximo en la presión del equilibrio que se produce cuando una compresión (o rarefacción) pasa al punto.



La amplitud es la distancia desde la posición de equilibrio del medio hasta una compresión o una rarefacción. El **período** de una ola es el tiempo que tarda la ola en moverse una longitud de onda, o sea, el período de una onda longitudinal es el tiempo que tarda la onda en moverse una longitud de onda. En cuanto a las ondas transversales, el símbolo se mide en segundos (s). Por otro lado, la **frecuencia** de una onda es el número de longitudes de onda por segundo. La frecuencia de una onda es el número de longitudes de onda por segundo.

En resumen, las ondas longitudinales son las ondas en las que las partículas del medio se propagan a lo largo de la dirección del movimiento. Simplemente, las partículas viajan a lo largo de la dirección del movimiento o una onda. Se componen de compresión (cuando las partículas / onda se acercan) y la rarefacción (cuando las partículas / onda se alejan). Requieren un medio para viajar.

Una onda de sonido es un ejemplo significativo de una onda longitudinal. Cuando un hablante habla frente al micrófono, las partículas de sonido viajan junto con las partículas de aire y como producto producen sonido. Cuando aplaudimos mientras cantamos una canción de cumpleaños o en cualquier otra ocasión, comprimimos y desplazamos las partículas de aire entre nuestras manos durante una parte de un segundo, lo que produce el sonido de un aplauso con el que estamos familiarizados. Todos estamos familiarizados con el sonido de un tambor, y la mayoría de nosotros hemos tratado de tocar el tambor en diferentes ritmos. Cuando golpeamos el tambor con el mazo, el tambor vibra y produce ondas de sonido. Las ondas de sonido se generan debido a que la superficie de la que está hecha se mueve hacia afuera y hacia adentro, haciendo que las partículas de aire se muevan (vibren) en la misma dirección.

Los tsunamis causan daños en las zonas costeras y es por eso que las personas que residen en las zonas costeras les tienen miedo. La mayoría de la gente piensa que las ondas son transversales a medida que suben y bajan. Sin embargo, las olas del mar, incluido el tsunami, son ejemplos de olas transversales y longitudinales. Cuando las olas alcanzan la costa o áreas más pequeñas, se vuelven más pequeñas y delgadas, y las partículas de agua se mueven paralelas a la ola, convirtiéndola en una ola longitudinal. Se dice que los animales pueden sentir las ondas del terremoto mucho antes que los humanos. Tienen la capacidad de detectar ondas P sísmicas en el interior de la tierra. Incluso los humanos pueden sentir un pequeño golpe y traqueteo de estas olas, pero en su mayoría son imperceptibles para nosotros. Las ondas P son las más rápidas y requieren un nivel medio a fuerte. Estas ondas hacen que el interior de la tierra (placas tectónicas) se muevan hacia adelante y hacia atrás de manera longitudinal, lo que conduce a las ondas de superficie (onda S sísmica), que podemos sentir.

Cada vez que llueve intensamente y hay truenos, es posible que haya notado la vibración en las ventanas de su hogar. Sucede debido a las ondas de sonido. Los rayos causan un aumento en la presión y temperatura del aire, lo que crea una onda de sonido que se escucha como un fuerte estallido y hace que nuestros paneles de ventanas vibren. ¿Alguna vez has notado el movimiento del cono de una corneta entrando y saliendo de tu boca? Es porque las cornetas trabajan como en el fenómeno de una onda longitudinal. Mueven el aire hacia adentro o hacia afuera, produciendo sonido.

Al derivar la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{1}$$

en el Capítulo anterior, usamos el ejemplo de una onda transversal y continuamos discutiendo las ondas de este tipo en una cuerda vibrante. En este capítulo consideramos ondas longitudinales, ondas en que el movimiento de la partícula o del oscilador está en la misma dirección que la propagación de la onda. Las ondas longitudinales se propagan como ondas en todas las fases de la materia, plasmas, gases, líquidos y sólidos, pero nos concentramos en gases y sólidos.

En el caso de los gases, se imponen limitaciones de interés termodinámico; en sólidos la extensión dependerá en las dimensiones del medio. Ni un gas ni un líquido pueden sostener el corte transversal necesario para ondas transversales generando oscilaciones transversales.

2. Ondas sonoras en gases

Consideremos una masa fija de gas, que a una presión P_0 ocupa un volumen V_0 con una densidad ρ_0. Estos valores definen el estado de equilibrio del gas que se ve perturbado o deformado por las compresiones y rarefacciones de las ondas sonoras. Bajo la influencia de las ondas, la presión P_0 se transforma en $P_0 \to P_0 + P_d$, el volumen V_0 se transforma en $V_0 \to V_0 + V_d$ y la densidad ρ_0 se convierte en $\rho_0 \to \rho_0 + \rho_d$.

El exceso de presión P_m es la amplitud de presión máxima de la onda de sonido y P_d es un componente alterno superpuesto a la presión de gas de equilibrio P_0.

El cambio fraccional en volumen se llama **dilatación**, o sea $V_d/V_0 = \delta$, y el cambio fraccional de densidad se llama **condensación**, o sea $\rho_d/\rho_0 = s$. Los valores de δ y s son del orden de 10^{-3} para ondas de sonido ordinarias, y un valor de $P_m 2 \times 10^{-5}$ N m^{-2} (aproximadamente 10^{-10} de una atmósfera estándar) produciendo una onda de sonido que todavía es audible a 1000 Hz. Por lo tanto, los cambios en el medio de las ondas son de un orden extremadamente pequeño y definen limitaciones en las cuales la ecuación de onda es apropiada.

La masa fija de gas es igual a

$$\rho_0 V_0 = \rho V = (\rho_0 + \rho_d)(V_0 + V_d) = \rho_0 V_0 (1 + \delta)(1 + s), \quad (2)$$

lo que implica que $(1 + \delta)(1 + s) = 1$, y como δ y s son muy pequeños, $s\delta \approx 0$, dando $s = -\delta$ en una aproximación muy cercana. La propiedad elástica del gas, una medida de su compresibilidad, se define en términos de su módulo de masa

$$B = -\frac{dP}{d\ln V} = -\frac{dP}{dV/V} = -V\frac{dP}{dV}, \quad (3)$$

la como el cambio de presión para un cambio fracional en un volumen. El valor de B depende de los cambios en el gas que surgen del movimiento es adiabático o isotérmico. Deben ser termodinámicamente reversibles para evitar los mecanismos de pérdida de energía de difusión, viscosidad y conductividad térmica. La ausencia total de estos procesos aleatorios que generan entropía define un proceso adiabático, un ciclo termodinámico con una eficiencia del 100 % en el sentido de que no se pierde nada de la energía en la onda, potencial o cinética. En una onda de sonido, tales conceptos termodinámicos restringen el exceso de amplitud de presión. Por ejemplo, la temperatura en un punto cualquiera de una habitación es mucho mayor que la temperatura global de la habitación. También se desarrollarán gradientes locales de velocidad de partículas, lo que conducirá a la consideración de fenómenos de difusión y viscosidad.

El uso de un valor constante del módulo de masa adiabática produce que las ondas de sonido tengan oscilaciones pequeñas y entonces limita los efectos de la presión total $P = P_0 + P_d$ tomándose como constante. Amplitudes mayores conducen a efectos no lineales y ondas de choque, que discutiremos luego.

Todos estos cambios están relacionados con la relación PV^γ =constante, donde γ es la relación de los calores específicos a presión y volumen constantes, respectivamente.

La diferenciación da entonces

$$V^\gamma dP + \gamma P V^{\gamma-1} dV = 0, \quad (4)$$

o lo que produce

$$-V\frac{dP}{dV} = \gamma P = B_a, \quad (5)$$

donde el subíndice a denota adiabático). Dado que $P = P_0 + P_d$, entonces $dP = P_d$, dando

$$B_a = -\frac{P_d}{V_d/V_0} \to P_d = -B_a\delta = B_a s. \quad (6)$$

En una onda de sonido, los desplazamientos y las velocidades de las partículas están a lo largo del eje X y podemos elegir las coordenadas $\eta(x,t)$ para definir el desplazamiento longitudinal.

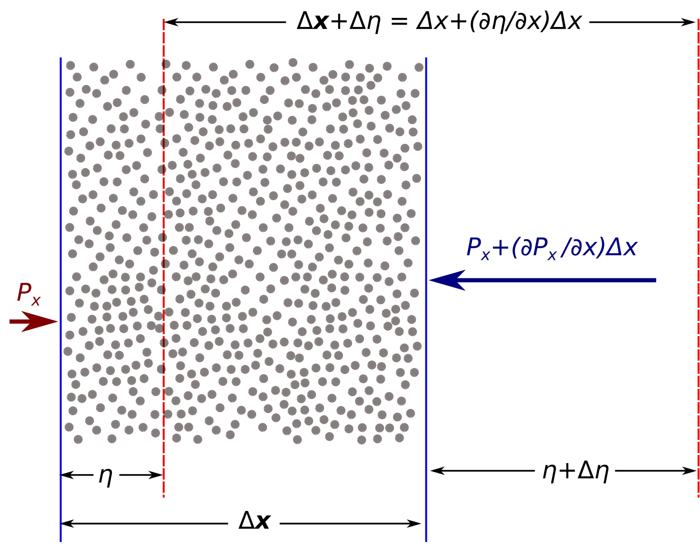


Fig. 1: Elemento delgado de gas de una unidad de sección transversal y espesor Δx desplazado por una cantidad $(\partial\eta/\partial x)\Delta x$ bajo la influencia de una presión diferente $-(\partial P_x/\partial x)\Delta x$.

Para obtener la ecuación de onda consideramos el movimiento de un elemento del gas de longitud Δx y una sección transversal. Bajo la influencia del comportamiento de la onda de sonido se muestra en la Figura 1 el comportamiento de este elemento de longitud. Las partículas en la seccion x se desplazan a una distancia η y la sección en conjunto $x + \Delta x$ se desplazan a una distancia $\eta + \Delta\eta$, de modo que el aumento del grosor del elemento de la sección transversal de la unidad volumen) es

$$\Delta\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x}\Delta x, \tag{7}$$

y

$$\delta = \frac{V_d}{V_0} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = -s, \tag{8}$$

donde $\partial\eta/\partial x$ se llama tensión.

El medio se deforma debido a las presiones a lo largo del eje X (Figura 1). La fuerza neta que actúa sobre el elemento viene dada por

$$\begin{aligned} P_x - P_{x+\Delta x} &= \left[P_x - \left(P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x}\Delta x\right)\right] \\ &= -\frac{\partial P_x}{\partial x}\Delta x = \frac{\partial (P_o + P_d)}{\partial x}\Delta x = \frac{\partial P_d}{\partial x}\Delta x. \end{aligned} \tag{9}$$

La masa del elemento es $\rho_0\Delta x$ y su aceleración está dada aproximadamente por $\partial^2\eta/\partial t^2$.

De la Ley de Newton tenemos

$$-\frac{\partial P_d}{\partial x} = \rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \tag{10}$$

donde

$$P_d = -B_a\delta = -B_a\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{11}$$

de tal manera que

$$-\frac{\partial P_d}{\partial x} = B_a\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \tag{12}$$

y por lo tanto

$$B_a\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \rho_0\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \tag{13}$$

Pero en vista que $B_a/\rho_0 = \gamma P/\rho_0$ es la razón de la elasticidad y la inercia o densidad del gas, este radio tiene dimensiones de (Fuerza/Área)×(Volumen/Masa)=(Velocidad)^2, entonces $\gamma P/\rho_0 = v^2$, donde v es la velocidad del la onda de sonido. Esto implica que

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \tag{14}$$

es la ecuación de onda con la velocidad

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{B_a}{\rho}}. \tag{15}$$

Si consideramos una solución de esta ecuación de onda en términos de la amplitud de desplazamiento máxima en la dirección x-positiva, entonces

$$\eta = \eta_m e^{i(\omega t + kx)} \to \dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = i\omega\eta, \tag{16}$$

y además

$$\delta = \frac{\partial \eta}{\partial x} = -ik\eta = -s, \tag{17}$$

debido a que $s = ik\eta$, entonces se tiene que

$$P_d = B_a s = -iB_a k\eta. \tag{18}$$

En ambas ondas, el desplazamiento de partículas η se mide en la dirección x positiva y el elemento delgado Δx del gas oscila alrededor del valor $\eta = 0$, que define su posición central. Para una dirección x de onda positiva, el valor $\eta = 0$, con $\dot{\eta}$ un máximo en la dirección x positiva, proporciona un exceso de presión positiva máxima (compresión) con una condensación máxima s_m (densidad máxima) y un mínimo volumen. Para una onda negativa en la dirección x, el mismo valor $\eta = 0$, con $\dot{\eta}$ un máximo en la dirección x positiva, da un exceso de presión negativa máxima (rarefacción), un volumen máximo y una densidad mínima. Para producir una compresión en una onda que se mueve en la dirección x negativa, la velocidad de la partícula $\dot{\eta}$ debe tener un máximo en la dirección x negativa a $\eta = 0$. Esta distinción es significativa cuando definimos la impedancia del medio de las ondas.

La velocidad del sonido también depende de la temperatura del medio. Para el sonido que viaja a través del aire, la relación entre la velocidad de las olas y la temperatura del aire es

$$v = 331\sqrt{1 + \frac{T_C}{273}}, \tag{19}$$

donde v está en metros/segundo, 331 m/s es la velocidad del sonido en el aire a 0°C, y T_C es la temperatura del aire en grados Celsius. Usando esta ecuación, uno encuentra que a 20°C, la velocidad del sonido en el aire es de aproximadamente 343 m/s.

Esta información proporciona una manera conveniente de estimar la distancia a una tormenta eléctrica, por ejemplo. Primero podemos contar el número de segundos entre ver el relámpago y escuchar el trueno. Al dividir este intervalo de tiempo entre 3 se obtiene la distancia aproximada al rayo en kilómetros porque 343 m/s es aproximadamente 1/3 km/s.

Al dividir el intervalo de tiempo en segundos entre 5, se obtiene la distancia aproximada al rayo en millas porque la velocidad del sonido es de aproximadamente 1/5 mi/s.

Teniendo una expresión (15) para la velocidad del sonido, ahora podemos expresar la relación entre la amplitud de presión y la amplitud de desplazamiento para una onda de sonido como

$$P_d^{max} = B_a k s_m = \rho v^2 s_m \frac{\omega}{v} = \rho v \omega s_m. \tag{20}$$

Esta expresión es un poco más útil que la ecuación anterior porque la densidad de un gas está más fácilmente disponible que el módulo de masa.

3. Distribución de energía en ondas de sonido

La energía cinética en la onda de sonido se encuentra considerando el movimiento de los elementos de gas individuales de espesor Δx.

Gases	
Hidrógeno (0°C)	1286
Helio (0°C)	972
Aire (0°C)	331
Aire (20°C)	343
Oxigeno (0°C)	317
Líquidos a 25°C	
Glicerol (Alcohol)	1904
Agua del mar	1533
Agua	1493
Mercurio	1450
Keroseno	1324
Alcohol Metílico	1143
Tetracloruro de carbono	926
Sólidos	
Vidrio Glass	5640
Hierro	5950
Aluminio	6420
Latón	4700
Cobre	5010
Oro	3240
Plomo	1960
Caucho	1600

Tab. 1: Velocidad del sonido en varios medios expresadas en m/s. Los valores de las velocidades para los sólidos son para la propagación de ondas longitudinales en medios. Las velocidades para las ondas longitudinales en barras delgadas son más pequeñas, y las velocidades de las ondas transversales en masa son aún más pequeñas.

Cada elemento tendrá energía cinética por unidad de sección transversal

$$E_{cinetica} = \frac{1}{2}\rho_0 \Delta x \dot{\eta}^2, \quad (21)$$

donde $\dot{\eta}$ dependerá de la posición x del elemento. El valor promedio de la densidad de energía cinética se encuentra tomando el valor $\dot{\eta}^2$ promediado sobre las regiones de n longitudes de onda.

Esto es,

$$\dot{\eta} = \dot{\eta}_m \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x), \quad (22)$$

de tal manera que

$$<\dot{\eta}^2> = \frac{\dot{\eta}_m^2 \in_0^{n\lambda} \sin^2\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\Delta x}{n\lambda} = \frac{\dot{\eta}_m^2}{2}, \quad (23)$$

de esta manera la densidad de energía cinética promedio en el medio es

$$<\Delta E_{cinetica}> = \frac{1}{4}\rho_0 \dot{\eta}_m^2 = \frac{1}{4}\rho_0 \omega^2 \dot{\eta}_m^2, \quad (24)$$

donde $< f >$ representa el valor medio de f y recuerde que un oscilador armónico único de amplitud máxima tiene una energía cinética promedio en un ciclo de $m\omega^2 A^2/4$.

La densidad de energía potencial se encuentra al considerar el trabajo PdV hecho por la masa fija de volumen V_0 durante los cambios adiabáticos en la onda de sonido. Este trabajo se expresa para el ciclo completo como

$$\Delta E_{pot} = -\int PdV = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_d V_d d(\omega t) = \frac{P_m V_m}{2}. \quad (25)$$

Lo anterior es justificado toda vez que debemos recordar que $dP = P_d$ y $P_d = P_m \sin(\omega t - kx)$ y $V_d = V_m \sin(\omega t - kx)$.

El signo negativo muestra que la energía potencial es positiva tanto en una compresión (p positiva, dV negativa) como en una rarefacción (p negativa, dV positiva) como se ve en la figura .

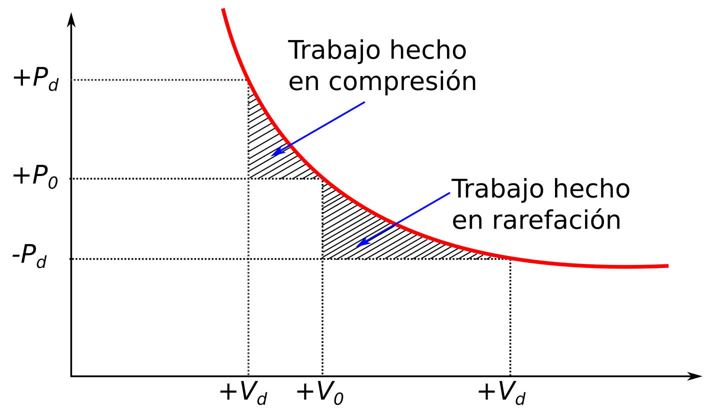


Fig. 2: Los triángulos sombreados muestran que la energía potencial $P_d V_d/2 = P_m V_m/4$ obtenida por la compresión es igual a la obtenida en rarefacción cuando P_d y V_d cambian de signo.

Suponiendo que el desplazamiento de la onda puede ser escrito como anteriormente $\eta = \eta_m e^{i(\omega t \pm km)}$, entonces tanto la condensación como la compresión (δ y s) pueden ser escritas como

$$\delta = \frac{\partial \eta}{\partial x} = pm\frac{1}{v}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -s, \quad (26)$$

donde $v = \omega/k$ y además

$$\frac{s}{s_m} = \frac{\delta}{\delta_m} = \sin(\omega t \pm kx), \quad (27)$$

implica que

$$\Delta E_{pot} = \frac{1}{2}\frac{B_a}{v^2}\dot{\eta}^2 \Delta x = \frac{1}{2}\rho_0 \dot{\eta}^2 \Delta x, \quad (28)$$

y su promedio sobre $n\lambda$ da la densidad de energía potencial

$$<\Delta E_{pot}> = \frac{1}{4}\rho_0 \dot{\eta}_m^2. \quad (29)$$

Vemos que los valores promedio de la densidad de energía cinética y potencial son iguales, pero más importante, ya que el valor de cada uno de los elementos Δx es $\rho_0 \dot{\eta}^2 \Delta x/2$, observamos que el elemento posee un potencial máximo (o mínimo) y energía cinética al mismo tiempo. Una rarefacción o compresión produce un máximo en la energía del elemento ya que el valor $\dot{\eta}$ gobierna el contenido de energía.

4. Intensidad de las ondas sonoras

Esta es una medida del flujo de energía, la razón de cambio de la energía que cruza una cierta área, esto es, el producto de la densidad de energía (cinética más potencial) y la velocidad de la onda v. Las ondas de sonido normales varían en intensidad entre 10^{-12} y 1 W m^{-2}, niveles extremadamente bajos que dan testimonio de la sensibilidad del oído. Para tener una pequeña idea, los gripos de una multitud en un campo de futbol celebrando un gol pudieran calentar una taza de café (si dicha energía se enfocara).

La intensidad puede ser escrita como

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho_0 \dot{\eta}_m^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho_0 v \dot{\eta}_m^2 = \frac{1}{2}\rho_0 v \omega^2 \eta_m^2. \qquad (30)$$

Una unidad de referencia comunmente usada para la medida estándar de la intensidad del sonido está dada por $I_0 = 10^{-2}$ W m^{-2}, la cual es cercana al nivel del tono producido en una conversación promedio entre dos personas estándo una al lado de la otra. En este mismo rango, un grito por ejemplo multiplica por 100 la intensidad I_0, mientras que sonidos en el rango de $100I_0$ a $1000I_0$ (10 V m^{-2}) significaría un umbral de dolor, se produce dolor.

Cada vez que la intensidad del sonido aumenta en un factor de 10, se dice que ha aumentado en 1 B, por lo que el rango dinámico del oído es de aproximadamente 12 B. Un aumento de intensidad en un factor de $10^{0.1} = 1.26$ aumenta la intensidad en 1 dB, un cambio de volumen que solo es detectado por una persona con buena audicióndonde dB es un decibel.

Vemos que el producto $\rho_0 v$ aparece en la mayoría de las expresiones para la intensidad; su importancia se hace evidente cuando definimos la impedancia del medio a las ondas como el

$$Z_{especific} = \frac{\text{Exceso de presión}}{\text{Velocidad de la partícula}} = \frac{P_d}{\dot{\eta}}, \qquad (31)$$

donde $Z_{especific}$ es la **impedancia Acústica específica** y esta mide la relación entre una fuerza por unidad de área y una velocidad.

Ahora, para una onda en la dirección X positiva

$$P_d = B_a s = iB_a k\eta, \quad \text{con} \ \ \dot{\eta} = i\omega\eta, \qquad (32)$$

de tal manera que

$$\frac{P_d}{\dot{\eta}} = \frac{B_a k}{\omega} = \frac{B_a}{v} = \rho_0 v. \qquad (33)$$

Así, la impedancia acústica presentada por el medio a estas ondas, como en el caso de las ondas transversales en la cuerda, viene dada por el producto de la densidad y la velocidad de la onda y está gobernada por la elasticidad e inercia del medio. Para una onda en la dirección X negativa, la impedancia acústica específica es $-\rho v$ con un cambio de signo debido a la relación de fase cambiada.

Las unidades de $\rho_0 v$ normalmente se expresan como kg m^{-2} s^{-1} en libros sobre acústica práctica. En estas unidades, el aire tiene un valor específico de impedancia acústica de 400, el agua un valor de 1.45×10^6 y el acero un valor de 3.9×10^7. Estos valores serán más significativos cuando los usemos más adelante en ejemplos sobre la reflexión y transmisión de ondas de sonido.

Aunque la impedancia acústica específica $\rho_0 v$ es una cantidad real para ondas de sonido planas, tiene un componente reactivo adicional ik/r para ondas esféricas, donde r es la distancia recorrida por el frente de onda. Este componente tiende a cero con el aumento de r a medida que la onda esférica se vuelve efectivamente plana.

Considere el caso especial de una fuente puntual que emite ondas de sonido por igual en todas las direcciones. Si el aire alrededor de la fuente es perfectamente uniforme, la potencia del sonido irradiado en todas las direcciones es la misma, y la velocidad del sonido en todas las direcciones es la misma. El resultado en esta situación se llama onda esférica. La figura 3 muestra estas ondas esféricas como una serie de arcos circulares concéntricos con la fuente. Cada arco representa una superficie sobre la cual la fase de la onda es constante. Llamamos a esa superficie de fase constante un frente de onda. La distancia radial entre frentes de onda adyacentes que tienen la misma fase es la longitud de onda λ de la onda. Las líneas radiales que apuntan hacia afuera desde la fuente, que representan la dirección de propagación de las ondas, se llaman rayos.

La potencia promedio emitida por la fuente debe distribuirse uniformemente sobre cada frente de onda esférica del área $4\pi r^2$. Por lo tanto, la intensidad de onda a una distancia r de la fuente es

$$I = \frac{\text{Potencia promedio}}{\text{Area}} = \frac{\text{Potencia promedio}}{4\pi r^2}. \qquad (34)$$

La intensidad disminuye a medida que el cuadrado de la distancia desde la fuente. Esta ley del cuadrado inverso recuerda el comportamiento de la gravedad de los capítulos anteriores.

Ejemplo: Una corneta.

Un diafragma de altavoz de 30 cm de diámetro vibra a 1 kHz con una amplitud de 0.020 mm. Suponiendo que las moléculas de aire cercanas tienen la misma amplitud de vibración, encuentre (a) la amplitud de presión inmediatamente frente al diafragma, (b) la intensidad del sonido frente al diafragma, y (c) la potencia acústica que se irradia . (d) Si el sonido se irradia uniformemente hacia el hemisferio delantero, encuentre la intensidad a 5 m del altavoz.

Solución: (a) y (b) La amplitud de presión se calcula directamente a partir de $P_0 = \rho\omega v s_0$, y la intensidad a partir de $I = \rho\omega^2 s_0^2 v$. (c) La potencia radiada es la intensidad multiplicada por el área del diafragma. (d) El área de un hemisferio de radio r es $2\pi r^2$.

(a) Podemos usar la ecuación que relaciona la amplitud de presión con la amplitud de desplazamiento, frecuencia, veloci-

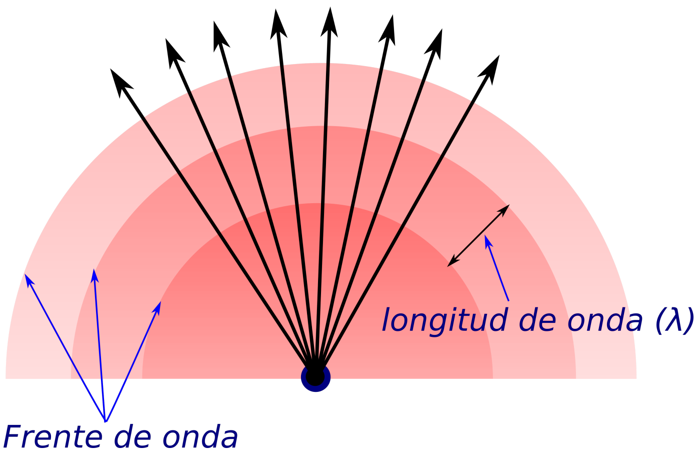


Fig. 3: Ondas esféricas emitidas por una fuente puntual. Los arcos circulares representan los frentes de onda esféricos que son concéntricos con la fuente.

dad de onda y densidad del aire:

$$P_0 = \rho\omega v s_0 = 55.1 \text{ N/m}^2.$$

Y para la intensidad tendremos entonces que con estas mismas cantidades conocidas:

$$I = \rho\omega^2 s_0^2 v = 3.46 \text{ W/m}^2.$$

La potencia es la intensidad multiplicada por el área del diafragma:

$$P = IA = 0.2453.46 \text{ W}.$$

De tal manera que a una distancia de 5 m de la fuente, suponiendo una radiación uniforme en el hemisferio:

$$I = \frac{P_{av}}{A} = 1.56 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2.$$

4.1. Nivel de sonido en decibelios

El oído humano puede detectar un amplio rango de intensidades. Debido a que este rango es tan amplio, es conveniente usar una escala logarítmica, donde el nivel de sonido β está definido por la ecuación

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right). \tag{35}$$

La constante I_0 es la intensidad de referencia, considerada como el umbral de audición ($I = 10^{-12}$ W/m^2), e I es la intensidad en vatios por metro cuadrado a la que corresponde el nivel de sonido β, donde β se mide en decibelios (dB). En esta escala, el umbral de dolor ($I = 1$ W/m^2) corresponde a un nivel de sonido de $\beta = 120$ dB, y el umbral de audición corresponde a $\beta = 0$ dB.

La exposición prolongada a altos niveles de sonido puede dañar seriamente el oído humano. Se recomiendan tapones para los oídos siempre que los niveles de sonido superen los 90 dB. La evidencia reciente sugiere que la contaminación acústica puede ser un factor que contribuye a la presión arterial alta, la ansiedad y el nerviosismo. La Tabla siguiente proporciona algunos niveles de sonido típicos.

Fuente del sonido	β (dB)
Avión jet cercano	150
Martillo neumático / Ametralladora	130
Sirena / concierto de rock	120
Transporte subterraneo	100
Tráfico pesado	80
aspiradora	70
Conversación normal	60
Zumbido de mosquito	40
Susurro	30
Hojas susurrantes	10
Umbral de audición	0

Tab. 2: Niveles de sonido.

4.2. Volumen y frecuencia

La discusión del nivel de sonido en decibelios se relaciona con una medición física de la fuerza de un sonido. Por supuesto, no tenemos instrumentos en nuestros cuerpos que puedan mostrar valores numéricos de nuestras reacciones a los estímulos. Tenemos que calibrar nuestras reacciones de alguna manera comparando diferentes sonidos con un sonido de referencia, pero eso no es fácil de lograr. Por ejemplo, anteriormente mencionamos que la intensidad del umbral es 10^{-12} W/m^2, correspondiente a un nivel de intensidad de 0 dB. En realidad, este valor es el umbral solo para un sonido de frecuencia de 1000 Hz, que es una frecuencia de referencia estándar en acústica. Si realizamos un experimento para medir la intensidad del umbral en otras frecuencias, encontramos una variación distinta de este umbral en función de la frecuencia.

Por ejemplo, a 100 Hz, un sonido apenas audible debe tener un nivel de intensidad de aproximadamente 30 dB. Desafortunadamente, no existe una relación simple entre las mediciones físicas y las mediciones psicológicas. El sonido de 100 Hz y 30 dB es psicológicamente igual en volumen al sonido de 1000 Hz y 0 dB (ambos son apenas audibles), pero no son físicamente iguales en nivel de sonido (30 dB $\neq$ 0 dB).

5. Ondas longitudinales en un sólido

La velocidad de las ondas longitudinales en un sólido depende de las dimensiones del espécimen en el que viajan las ondas. Si el sólido es una barra delgada de sección transversal finita, el análisis de las ondas longitudinales en un gas es igualmente válido, excepto que el módulo de masa B_a se reemplaza por el módulo de Young Y, la razón entre el esfuerzo longitudinal en la barra y su deformación longitudinal.

La ecuación de onda es entonces

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \quad \text{con} \quad v^2 = \frac{Y}{\rho}. \tag{36}$$

Una onda longitudinal en un medio comprime el medio y lo distorsiona lateralmente. Debido a que un sólido puede desarrollar una fuerza de corte en cualquier dirección, dicha distorsión lateral se acompaña de un corte transversal. El efecto de esto sobre el movimiento ondulatorio en sólidos de sección transversal finita es bastante complicado y puede ser ignorado por ahora. Sin embargo, en los sólidos, los modos longitudinal y transversal pueden considerarse por separado.

Hemos visto que la compresión longitudinal produce una deformación $\partial\eta/\partial x$, la distorsión lateral que la acompaña produce una deformación $\partial\beta/\partial x$ y (de signo opuesto a $\partial\eta/\partial x$ y perpendicular a la dirección X).

Aquí está el desplazamiento en la dirección Y y es una función de x e y. La razón de estas cortes

$$-\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^{-1} = \sigma, \tag{37}$$

se conoce como la **relación de Poisson** y se expresa en términos de constantes elásticas de Lamé para un sólido como

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \quad \text{donde,} \quad \lambda = \frac{\sigma Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}. \tag{38}$$

Estas constantes son siempre positivas, tal que $2\sigma < 1$ y usualmente $\sigma \sim 1/3$. En términos de estas constante el módulo de Young dará

$$Y = \lambda + 2\mu - 2\lambda\sigma. \tag{39}$$

La constante μ es el coeficiente transversal de rigidez, es decir, la relación entre la tensión transversal y corte transversal. Desempeña el papel de la elasticidad en la propagación de ondas transversales puras en un sólido de la misma manera que el módulo de Young juega para ondas longitudinales en una muestra delgada. La figura 4 ilustra la cizalladura en una onda plana transversal, donde la deformación transversal se define por $\partial\beta/\partial x$. La tensión transversal en x es, por lo tanto, $T_x = \mu(\partial\beta/\partial x)$.

La ecuación de movimiento transversal del elemento delgado dx viene dada por

$$T_{x+dx} - T_x = \rho\ddot{y}dx, \tag{40}$$

donde ρ es la densidad, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = \rho\ddot{y}, \tag{41}$$

y dado que $\ddot{y} = \partial^2\beta/\partial t^2$, entonces finalmente

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}, \tag{42}$$

es la ecuación de la onda con velocidad dada por $v^2 = \mu/\rho$.

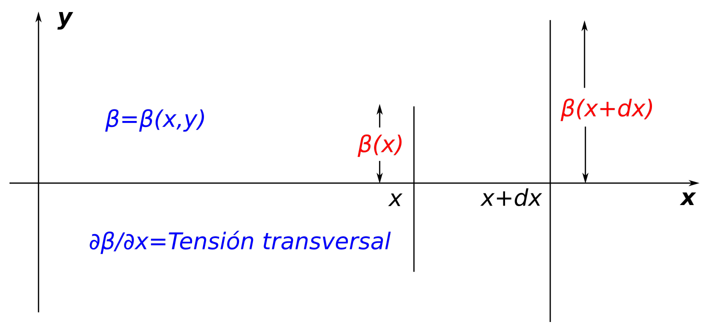


Fig. 4: Corte en un sólido produciendo una onda transversal. La tensión de corte transversal es $\partial\beta/\partial x$ x y el esfuerzo de corte transversal es $\mu(\partial\beta/\partial x)$, donde μ es el módulo de rigidez de corte.

El efecto de la rigidez transversal es endurecer el sólido y aumentar la constante elástica que rige la propagación de las ondas longitudinales. En un sólido, la velocidad de estas ondas ya no está dada por $v^2 = Y/\rho$, sino que se convierte en

$$v^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}. \tag{43}$$

Dado que el módulo de Young es $Y = \lambda + 2\mu - 2\lambda\sigma$, la elasticidad aumenta en la cantidad $2\lambda\sigma \sim \lambda$, de modo que las ondas longitudinales en un sólido tienen una velocidad mayor que las mismas ondas a lo largo de una muestra delgada.

En un sólido isotrópico, donde la velocidad de propagación es la misma en todas las direcciones, el concepto de módulo de masa, utilizado en la discusión sobre las ondas en los gases, se mantiene igualmente. Expresado en términos de constantes elásticas de Lamé, se escribe el módulo de masa para un sólido

$$B = \lambda + \frac{2\mu}{3} = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}, \tag{44}$$

la velocidad de onda longitudinal para un sólido se convierte en

$$v_L = \sqrt{\frac{B+4\mu/3}{\rho}}, \tag{45}$$

mientras que la velocidad transversal permanece como

$$v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{46}$$

6. Aplicación a los terremotos

Los valores de estas velocidades son bien conocidos por las ondas sísmicas generadas por los terremotos. Cerca de la superficie de la tierra, las ondas longitudinales tienen una velocidad de 8 km/s y las ondas transversales viajan a 4,45 km/s. La velocidad de las ondas longitudinales aumenta con la profundidad hasta que, a una profundidad de aproximadamente 1800 millas, no se transmiten ondas debido a una discontinuidad y un desajuste severo de las impedancias asociadas con el núcleo del fluido.

En la superficie de la tierra, la velocidad de la onda transversal se ve afectada por el hecho de que los componentes de tensión dirigidos a través de la superficie son cero allí y estas ondas, conocidas como ondas de Rayleigh, viajan con una velocidad dada por

$$v = f(\sigma)\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \tag{47}$$

donde $f(\sigma) = 0.9194$ cuando $\sigma = 0.25$ y $f(\sigma) = 0.9553$ cuando $\sigma = 0.5$.

La energía de las ondas de Rayleigh se limita a dos dimensiones; su amplitud es a menudo mucho mayor que la de las ondas longitudinales tridimensionales y, por lo tanto, son potencialmente más perjudiciales.

En un terremoto, la llegada de las ondas longitudinales rápidas es seguida por ondas de Rayleigh y luego por un patrón complicado de ondas reflejadas, incluidas las afectadas por la estratificación de la estructura de la tierra, conocidas como *Love Waves*.

7. Efecto Doppler

Si una fuente de onda y un receptor se mueven entre sí, la frecuencia recibida no es la misma que la frecuencia de la fuente. Si se están acercando, la frecuencia recibida es mayor que la frecuencia fuente; y si se están alejando más, la frecuencia recibida es menor que la frecuencia fuente. Esto se llama efecto Doppler. Un ejemplo familiar es la caída en el tono del sonido de la bocina de un automóvil que se acerca cuando el automóvil pasa y luego retrocede.

En la siguiente discusión, todos los movimientos son relativos al medio. Considere la fuente que se mueve con la velocidad u_s que se muestra en la figura 5, y un receptor estacionario. La fuente tiene una frecuencia f_s (y un período $T_s = 1/f_s$). La frecuencia recibida f_r, o sea, el número de crestas de onda que pasan por el receptor por unidad de tiempo, es

$$f_r = \frac{v}{\lambda}, \tag{48}$$

donde v es la velocidad de la onda y λ es la longitud de onda (la distancia entre las crestas sucesivas). Para encontrar f_r primero tenemos que encontrar λ. Considere el evento 1 -una cresta de onda sale de la fuente- y el evento dos -la próxima cresta de onda sale de la fuente- como se muestra en la figura 6. El tiempo entre estos dos eventos es T_s y entre estos eventos, la cresta que sale de la fuente primero recorre una distancia vT_s, mientras que la fuente misma recorre una distancia u_sT_s. En consecuencia, en el momento del segundo evento, la distancia entre la fuente y la cresta que sale primero es igual a la longitud de onda λ.

Detrás de la fuente $\lambda = \lambda_b = (v + u_s)T_s$ y frente a la fuente $\lambda = \lambda_f = (v - u_s)T_s$, de tal manera que $u_s < v$. (Si $u_s < v$, ningún frente de onda llega a la región delante de la fuente). Podemos expresar estas dos longitudes de onda como

(a)


Fig. 5: Ondas en un tanque ondulado producido por una fuente puntual que se mueve hacia la derecha. Los frentes de onda están más juntos frente a la fuente y más separados detrás de la fuente.

$$\lambda = (v \pm u_s)T_s = \frac{v \pm u_s}{f_s}, \tag{49}$$

donde hemos sustituido $1/f_s$ por T_s. En frente de la fuente, la longitud de onda es más corta, por lo que se aplica el signo menos. Detrás de la fuente se aplica el signo más. La sustitución de λ en la ecuación anterior da (receptor estacionario)

$$f_r = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v \pm u_s} f. \tag{50}$$

Cuando el receptor se mueve con relación al medio, la frecuencia recibida es diferente simplemente porque el receptor pasa más o menos crestas de onda en un tiempo dado. Para un receptor que se mueve con velocidad u_r, T_r denote el tiempo entre llegadas de crestas sucesivas. Luego, durante el tiempo entre las llegadas de dos crestas sucesivas, cada cresta habrá recorrido una distancia vT_r, y durante el mismo tiempo el receptor habrá recorrido una distancia u_rT_r. Si el receptor se mueve en la dirección opuesta a la de la onda, entonces, durante el tiempo T_r, la distancia que se mueve cada cresta más la distancia que se mueve el receptor es igual a la longitud de onda. Es decir, $vT_r + u_rT_r = \lambda$, o $T_r = \lambda/(v + u_r)$. [Si el receptor se mueve en la misma dirección que la onda, entonces $vT_r - \lambda = u_rT_r$, entonces $T_r = \lambda/(v - u_r)$]. Ya que $f_r = 1/T_r$, tenemos

$$f_r = \frac{1}{T_r} = \frac{v \pm u_r}{\lambda}, \tag{51}$$

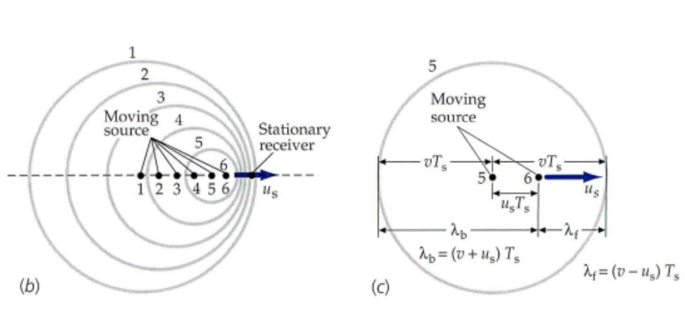


Fig. 6: (b) Frentes de onda sucesivos emitidos por una fuente puntual que se mueve con velocidad u_s a la derecha. Los números de los frentes de onda corresponden a las posiciones de la fuente cuando se emitió la onda. (c) La fuente vibra un ciclo en el tiempo T_s. Durante el tiempo T_s, la fuente se mueve una distancia u_sT_s y el quinto frente de onda recorre una distancia vT_s. Frente a la fuente, la longitud de onda $\lambda_f = (v - u_s)T_s$, mientras que la que está detrás de la fuente $\lambda_f = (v + u_s)T_s$.

donde, si el receptor se mueve en la misma dirección que la onda, la frecuencia recibida es menor, por lo que elegimos el signo negativo. Si el receptor se mueve en la dirección opuesta a la de la onda, la frecuencia es mayor, por lo que elegimos el signo positivo. Sustituyendo λ obtenemos

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_s} f_s. \tag{52}$$

Las opciones correctas para los signos más o menos se determinan más fácilmente al recordar que la frecuencia tiende a aumentar tanto cuando la fuente se mueve hacia el receptor como cuando el receptor se mueve hacia la fuente. Por ejemplo, si el receptor se mueve hacia la fuente, el signo más se selecciona en el numerador, que tiende a aumentar la frecuencia recibida, y si la fuente se aleja del receptor, el signo más se selecciona en el denominador, que tiende a disminuir la frecuencia recibida. La ecuación anterior parece más simétrica y, por lo tanto, es más fácil de recordar, si se expresa en la forma

$$\frac{f_r}{v \pm u_r} = \frac{f_s}{v \pm u_s}. \tag{53}$$

Se puede demostrar que si u_s y u_r son mucho más pequeños que la velocidad de onda v, entonces el cambio en la frecuencia $\Delta f = f_r - f_s$ viene dado aproximadamente por

$$\frac{\Delta f}{f_s} \sim \pm \frac{u_s \pm u_r}{v}, \tag{54}$$

donde $u = u_s \pm u_r$ es la velocidad de la fuente en relación con el receptor.

Todas estas ecuaciones son válidas solo en el marco de referencia del medio. En un marco de referencia en el que el medio se está moviendo (por ejemplo, el marco de referencia del suelo si el aire es el medio y sopla el viento), la velocidad de onda v se reemplaza por $v' = v \pm u_w$ donde u_w es la velocidad del viento en relación con el suelo.

Ejemplo: Bocina de un automóvil.

La frecuencia de la bocina de un automóvil es de 400 Hz. Si suena la bocina cuando el automóvil se mueve con una velocidad $u_s = 34$ m/s (aproximadamente 122 km/h) a través del aire estático hacia un receptor estacionario, encuentre (a) la longitud de onda del sonido que pasa por el receptor y (b) la frecuencia recibida. Tome la velocidad del sonido en el aire como 340 m/s. (c) Encuentre la longitud de onda del sonido que pasa por el receptor y encuentre la frecuencia recibida si el automóvil está parado cuando suena la bocina y un receptor se mueve con una velocidad $u_r = 34$ m/s hacia el automóvil.

Solución: (a) Las ondas frente a la fuente están comprimidas, por lo que utilizamos el signo menos en la ecuación para el efecto Doppler. (b) Calculamos la frecuencia recibida de dicha ecuación. (c) Para un receptor en movimiento usamos las mismas ecuaciones que en las partes (a) y (b).

Calculamos entonces la longitud de onda en el frente del auto. Como esta longitud es más corta entonces tenemos que

$$\lambda = \frac{v - u_s}{f_s} = \frac{340 - 34}{400}\frac{\text{m/s}}{\text{Hz}} = 0.765 \text{ m}.$$

De esta manera entonces tendremos que la frecuencia que mide el receptor es

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_s} f_s = \frac{340}{340 - 34} 400 \text{ Hz} = 444 \text{ Hz}.$$

Si el receptor entonces ahora estuviera detenido tenemos que

$$\lambda = \frac{v - u_s}{f_s} = \frac{340}{400}\frac{\text{m/s}}{\text{Hz}} = 0.850 \text{ m}.$$

Y por tanto la frecuencia que recibe es

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_s} f_s = \left(1 + \frac{u_r}{v}\right) = 440 \text{ Hz}.$$