

El potencial eléctrico

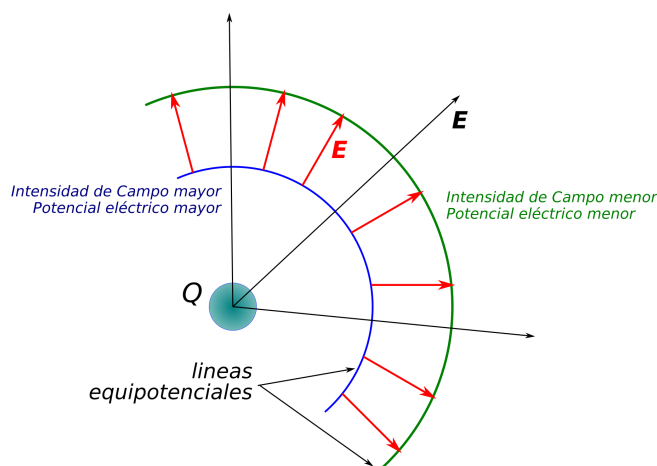
D. Sierra-Porta

Índice

1. Introducción	1
2. Energía potencial gravitacional y potencial gravitacional	2
3. Potencial eléctrico a partir de la energía potencial eléctrica	2
4. Algunas aplicaciones de potencial eléctrico	3
4.1. Los conductores eléctricos son equipotenciales	3
4.2. Conservación de energía. Uso de energía potencial eléctrica.	3
5. Superficies equipotenciales y campos eléctricos	4
5.1. Equipotenciales de campos eléctricos	4
6. Cargas puntuales: energía potencial eléctrica y potencial eléctrico	4
6.1. Potencial debido a una carga puntual	4
7. Energía potencial de cargas de dos puntos	4
8. Calculando campos eléctricos a partir del potencial	5

1. Introducción

En el curso de mecánica, se estudió cómo la fuerza gravitacional sobre una masa m da origen a la definición de la energía potencial gravitacional. La cantidad de energía potencial gravitacional U_g es igual al producto de m y una cantidad V_g llamada potencial gravitacional. Para el caso de una partícula masiva en un campo de gravedad esto implica que $U_g = mgy$, y por lo tanto el potencial $V_g = yg$. Este capítulo muestra que la fuerza eléctrica en una carga q conduce a la energía potencial eléctrica, denotada por U_e .

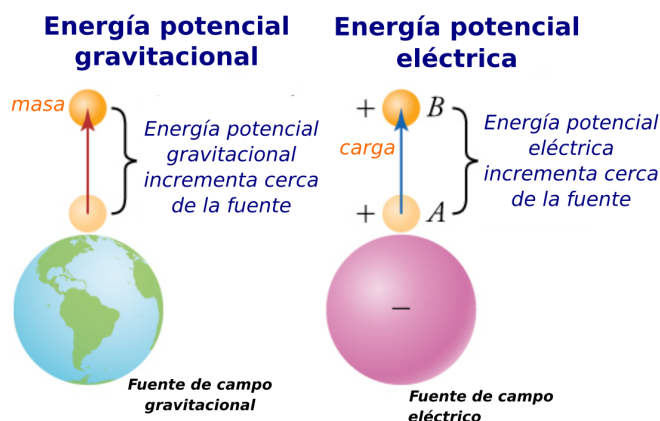


La cantidad de energía potencial eléctrica es igual al producto de q y una cantidad V_e llamada potencial eléctrico, cuya unidad es el voltio (Volt, V). Al igual que para la gravedad, donde solo las diferencias en el potencial gravitacional

son significativas, así para la electricidad, solo las diferencias en el potencial eléctrico son significativas. A veces, la energía potencial eléctrica se llama meramente energía eléctrica.

Hay una relación geométrica simple entre el campo eléctrico E (una función de posición con valor vectorial) y el potencial eléctrico V (una función con valor escalar de r): (1) La constante escalar $V(x, y, z) = \text{constante}$ define una superficie para lo cual el vector E es siempre normal. (2) Los puntos de campo eléctrico E siempre van de mayor potencial a menor potencial. (3) La magnitud de la pendiente de V en la dirección de E da justo el módulo $|E|$.

Tenga en cuenta que, dado que tanto el campo eléctrico como el potencial eléctrico tienen valores en todos los puntos del espacio, ambos son, en un sentido técnico, campos. De hecho, la temperatura, como el potencial eléctrico, es un campo escalar, mientras que el campo eléctrico es un campo vectorial. (A menudo interpretaremos “campo” como “campo eléctrico” aunque “campo potencial” sería una interpretación perfectamente válida).



Hay dos formas de considerar el potencial eléctrico. (1) Desde el punto de vista de la acción a distancia, el potencial eléctrico se obtiene como una suma de las contribuciones de cada carga eléctrica, y el potencial en el infinito se toma convencionalmente como cero. Esto requiere un conocimiento completo de las posiciones y magnitudes de cada carga. Para obtener la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos, se requiere potencial en ambos puntos. (2) Desde el punto de vista del campo, la diferencia de potencial eléctrico entre esos dos puntos se obtiene como una integral.

2. Energía potencial gravitacional y potencial gravitacional

Considere un objeto con una masa m sujeta a una fuerza gravitacional F_g . El objeto podría estar en la luna, en la tierra o en el espacio exterior. La fuerza gravitacional F_g sobre la masa m es técnicamente igual al producto de la masa por el valor local de la aceleración de la gravedad g en el campo gravitacional, $F_g = mg$. De tal manera que esta fue la forma en la que definimos momentáneamente el campo gravitacional $g = F_g/m$. Para esta masa m , la segunda ley de Newton de la gravitación universal establece que $F_g = GmM\hat{r}/r^2$, para una masa M que genera un campo gravitacional. Entonces juntando ambas expresiones tenemos que

$$g = \frac{F_g}{m} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}. \quad (1)$$

La gravedad es como el electromagnetismo, ambos satisfacen una ley del inverso cuadrado para las distancias. La única diferencia entre ambas descripciones es que la primera usa la masa como característica mientras la segunda usa la carga de la partícula.

En el caso de la gravitación, la energía potencial gravitacional está dada en términos de la masa tal que

$$U_g = mV_g. \quad (2)$$

Por otro lado, la fuerza eléctrica sobre una carga q puede escribirse como el producto de q con el campo eléctrico E , $F_e = qE$.

Desarrollemos una relación similar entre la energía eléctrica U_e de una carga q como el producto de q con el potencial eléctrico V_e : $U_e = qV_e$. Ahora, el potencial eléctrico V_e tiene unidades de J/C, que define el voltio (V). Al igual que para la gravedad, solo las diferencias en la energía potencial eléctrica y el potencial eléctrico tienen sentido. Por lo general, tales diferencias se miden con respecto al equilibrio, que se considera que tiene un potencial cero. El concepto de potencial eléctrico tiene la misma ventaja que el concepto de campo eléctrico: es una propiedad de posición y es independiente de la carga de prueba.

3. Potencial eléctrico a partir de la energía potencial eléctrica

Permitamos ahora obtener una expresión para la energía potencial eléctrica. Considere una carga en movimiento q desde el punto A hasta el punto B . Si la carga se mueve lentamente, entonces no acumula o incrementa en mucho su energía cinética entonces el trabajo hecho por el campo será justo el cambio de energía potencial eléctrica U_e , en este caso tendremos que

$$W_{trabajo} = \int_A^B F_e \cdot ds, \quad (3)$$

donde ds representa un pequeño vector diferencial de desplazamiento a lo largo de la línea que une a los puntos A y B desde r hasta $r' = r + dr$ a lo largo de la trayectoria. A partir de la figura se ve claramente que ds coincide justamente con dr , sin embargo, nuestra convención es usar ds en vez de dr en este caso. Note además que ds es el vector tangente a lo largo de la curva de la trayectoria de la partícula.

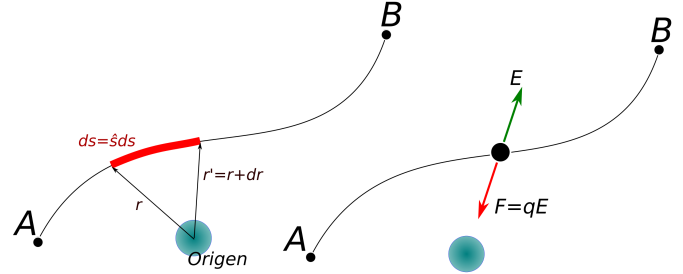


Fig. 1: (a) Una ruta desde el punto A al punto B , necesaria para calcular la diferencia en el potencial eléctrico entre A y B . (b) Para obtener V , una carga de prueba q se mantiene en equilibrio por una fuente externa de fuerza.

Debido a que q se está moviendo muy lentamente, para todos los efectos prácticos, la fuerza neta ejercida sobre la partícula es prácticamente nula. La evaluación de la anterior ecuación para el trabajo y recordando el principio de conservación de la energía, tenemos que

$$\Delta U_e = U_B - U_A = \int_A^B F_e \cdot ds = -q \int_A^B E \cdot ds. \quad (4)$$

Con lo cual usando la definición que relaciona el potencial eléctrico con la energía potencial eléctrica tenemos que

$$\Delta V_e = V_B - V_A = - \int_A^B E \cdot ds. \quad (5)$$

La ecuación anterior es la base para el resto de este capítulo. Con el campo eléctrico E conocido a lo largo de alguna ruta de A a B , esta ecuación permite determinar la cantidad $V_B - V_A = \Delta V$, o el cambio de potencial, en otras palabras, la tasa a la que está cambiando la intensidad del potencial con el que interactúa la partícula moviéndose respecto del campo eléctrico E . Este es el método de campo, que ideó Faraday, al menos pensando lógicamente, debido a que para este momento no había este cálculo a disposición. Tenga en cuenta que E , dado previamente en unidades de N/C, ahora tiene las unidades equivalentes de V/m. Para que la última ecuación sea útil, debemos establecer que la diferencia de potencial $V_B - V_A$ es independiente de la ruta entre A y B , esto nos recuerda el asunto de las fuerzas conservativas.

Según las reglas fundamentales del cálculo integral, el lado izquierdo de (5) puede ser reescrito como

$$\Delta V = V_B - V_A = \int_A^B dV = \int_A^B \frac{dV}{ds} ds. \quad (6)$$

Obtenemos que dV/ds , es el cambio en el potencial por unidad de longitud, y además entonces tenemos que

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{s} ds. \quad (7)$$

Al igualar los integrando en (6) y (7) tenemos que equivalementemente

$$\frac{dV}{ds} = -\mathbf{E} \cdot \hat{s} = -|\mathbf{E}| \cos \phi, \quad (8)$$

donde ϕ es el ángulo entre el campo eléctrico y la trayectoria de la partícula. Por lo tanto, si la ruta de ds está a lo largo de las líneas de campo \mathbf{E} , entonces $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} > 0$, y el potencial disminuye. En otras palabras, las líneas de campo apuntan desde posiciones de alto potencial a posiciones de bajo potencial. La dirección local de \mathbf{E} define lo normal a una superficie local llamada equipotencial. En todas partes en una superficie equipotencial, el potencial tiene el mismo valor. El signo negativo en la ecuación es importante, explica por qué \mathbf{E} apunta desde posiciones de mayor voltaje a posiciones de menor voltaje. Consulte la Figura 1, donde las líneas que representan superficies de potencial constante se dibujan con líneas más gruesas que las líneas de campo eléctrico. Una ventaja del potencial V es que es un escalar para el cual se tiene un campo eléctrico \mathbf{E} .

4. Algunas aplicaciones de potencial eléctrico

4.1. Los conductores eléctricos son equipotenciales

Se puede hacer una aplicación inmediata de la definición de potencial eléctrico a las propiedades de los conductores eléctricos en equilibrio. Considere una moneda de poca denominación (hecha de cobre por lo general, lo que es un buen conductor en este caso) que esté en equilibrio, y digamos que el punto A en su superficie esté a 5 V en relación con el suelo. ¿Qué se puede decir sobre el voltaje en cualquier otro punto B de la moneda, ya sea en la superficie o en el interior? Debido a que la moneda es un material conductor, entonces el campo eléctrico al interior es nulo $E_{\text{interior}} = 0$, entonces, al tomar una ruta que atraviesa el material desde A a B , la ecuación (7) implica que $V_B - V_A = 0$, entonces $V_B = V_A = 5$ V.

Es decir, todo el volumen de la moneda (incluida su superficie) tiene el mismo potencial. Así, la superficie de la moneda es un equipotencial, a 5 V, en este caso. De hecho, en equilibrio, todo el volumen de un conductor eléctrico tiene el mismo potencial que la superficie. Además, si el conductor tiene una cavidad y no hay cargas dentro de la cavidad, entonces el potencial dentro de la cavidad es el mismo que en la superficie.

4.2. Conservación de energía. Uso de energía potencial eléctrica.

Aunque el potencial es un concepto abstracto, la energía es más concreta; por lo tanto, si existe la necesidad de hacer que el potencial eléctrico sea menos abstracto, por lo que $U = qV$ puede usarse para obtener energía potencial eléctrica. Para una partícula de carga q que actúa en su movimiento solo por fuerzas eléctricas, la conservación de energía toma la forma:

$$\begin{aligned} \text{Energía cinética} + \text{Energía potencial eléctrica} &= \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{constante}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde V es el potencial eléctrico y qV es la energía potencial eléctrica.

Para ser específicos, considere dos conductores de forma arbitraria (p. Ej., un tornillo y una tuerca; consulte la Figura 3), conectados por una batería de 12 voltios, entonces $V_B = V_A + 12$ V. Cada uno de estas rocas conductoras es un equipotencial

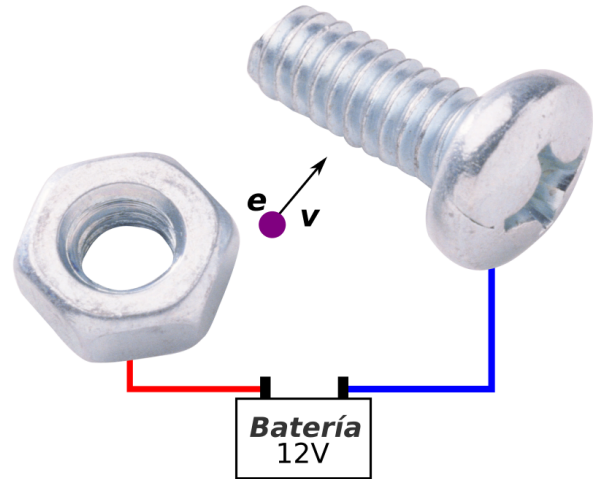


Fig. 2: Un electrón que se mueve entre dos conductores mantenidos a diferentes potenciales eléctricos por una batería de 12 V.

Un electrón inicialmente en reposo cerca de la tuerca conectado al terminal negativo (A) se moverá hacia el tornillo conectado al terminal positivo (B). Para calcular su velocidad al golpear el lado positivo, empleamos la ecuación anterior en la forma

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B. \quad (10)$$

Al tomar $V_A = 0$, $V_A - V_B = -12$ V, $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$ C, $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, produce que $v_B = \sqrt{2e(V_B - V_A)/m} = 2.05 \times 10^6$ m/s. El método de energía no puede predecir cuánto tiempo se tarda en cruzar de A a B . En consecuencia, la medición del cambio en la energía

cinética de una partícula cargada al pasar de A a B permite la deducción del cambio en su energía potencial eléctrica y en su potencial eléctrico.

Ejemplo: Polvo cargado atraído por un plumero cargado.

Un pedazo de polvo con carga $Q = -8 \times 10^{-9}$ C y masa $M = 0.04$ g está en reposo en el punto A . Es atraído por un plumero cargado, y cuando golpea el plumero en el punto B , se mueve a una velocidad de 50 cm/s. Determine la diferencia de voltaje $V_A - V_B$.

Solución: Usando lo anterior, con $V_A = 0$ y $q = Q$, encontramos que $QV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + QV_B$. Así

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \frac{m}{2Q} v_B^2 = \\ &= \frac{0.04 \times 10^{-3} \text{ kg}}{2(-8 \times 10^{-9} \text{ C})} (0.5 \text{ m/seg})^2 = -625 \text{ V.} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que la carga negativa Q debe ser atraída a una posición (B) con un potencial más positivo que donde comienza (A). De hecho, B tiene un potencial más alto que A en 625 V.

5. Superficies equipotenciales y campos eléctricos

La dirección de E define la normal local a una superficie. Para un ds a lo largo de esa superficie (es decir, perpendicular a E), el potencial no cambia. Por lo tanto, dicha superficie es un equipotencial.

5.1. Equipotenciales de campos eléctricos

Para una hoja de carga, los equipotenciales son planos, ya que se traza un plano moviéndose en las dos direcciones perpendiculares a la normal de la hoja. Para una carga lineal, los equipotenciales son cilindros, ya que se traza un cilindro moviéndose en las dos direcciones perpendiculares al vector de radio. Para una carga puntual, los equipotenciales son esferas, ya que una esfera se traza moviéndose en las dos direcciones perpendiculares al vector de radio. Si hay un equipotencial preexistente, y un conductor neutro delgado tiene la misma forma y posición que ese equipotencial, entonces el conductor delgado no perturba el potencial. Esto se debe a que la carga se reorganiza en el conductor delgado para que las líneas de campo ingresen cargas negativas en un lado y dejen cargas positivas iguales y opuestas en el otro lado. Por lo tanto, cualquiera de los equipotenciales podría corresponder a conductores delgados en forma de plano o cilindro, respectivamente.

Aquí hay dos ejemplos simples de líneas de campo y equipotenciales para un número discreto de cargas: el par dipolar $\pm q$ que se muestra en la Figura ??, y las dos cargas iguales q . Para evitar el desorden en estas y algunas figuras a seguir, no todas las líneas de campo han recibido flechas.

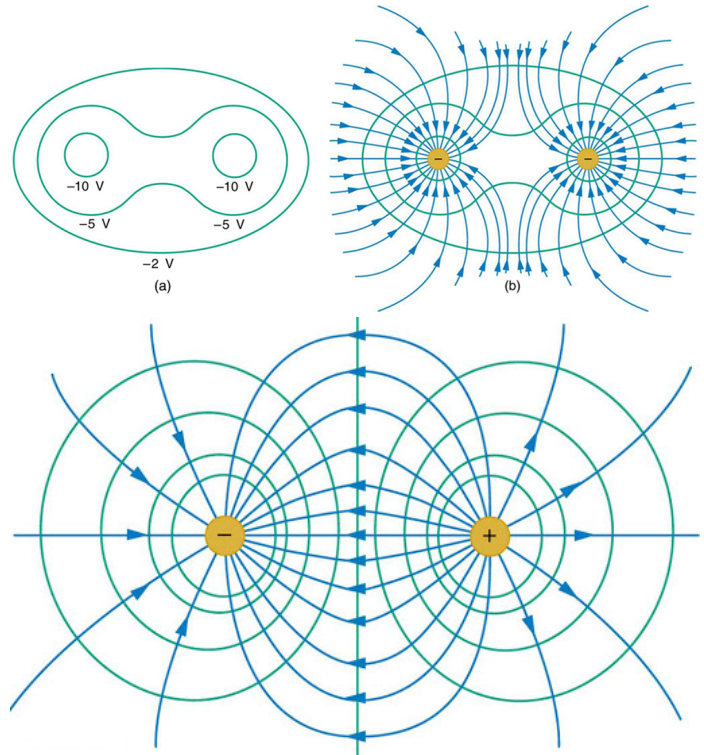


Fig. 3: Potenciales eléctricos y líneas de campo. Cargas iguales y opuestas.

6. Cargas puntuales: energía potencial eléctrica y potencial eléctrico

Estudiaremos el caso de una sola carga y luego utilizaremos el principio de superposición para obtener el resultado general.

6.1. Potencial debido a una carga puntual

Considere una carga puntual Q en el origen. Como debemos saber podemos suponer que $V = 0$ en el infinito y además tomando como el punto A un punto arbitrario a una distancia r , entonces $\Delta V = V_A - V_{\text{infinito}} = V_A$, y por lo tanto

$$V_A(r) = \int_r^{\text{infinito}} \frac{kQ}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{kQ}{r}. \quad (11)$$

Los equipotenciales son esferas concéntricas centradas alrededor de r . Por ejemplo, si $kQ = 10$ V-m (correspondiente a $Q = 1.1 \times 10^{-9}$ C), la esfera concéntrica con $r = 0.01$ m es un equipotencial en $V = 1000$ V.

7. Energía potencial de cargas de dos puntos

Excepto por la ausencia de un signo menos, la ecuación para el potencial es muy similar al caso gravitacional correspondiente $V_g = GM/r$ para una fuente puntual M . Tenga en

cuenta que una carga positiva produce un potencial eléctrico positivo, y una carga negativa produce un eléctrico negativo potencial. La dirección hacia un potencial más alto (ya sea hacia la carga positiva o lejos de la carga negativa) es opuesta a la dirección del campo eléctrico (radialmente hacia afuera para la carga positiva y radialmente hacia adentro para la carga negativa), como se espera.

Para dos cargas eléctricas q_1 y q_2 , separadas por $r_{12} = |r_1 - r_2|$, la energía U se generaliza a

$$U = \frac{kq_1q_2}{r_{12}}, \quad r_{12} = |r_1 - r_2|, \quad (12)$$

Esta es la energía que tendríamos que proporcionar para llevar las cargas desde el infinito a esta separación. La energía eléctrica puede aparecer como la suma sobre cada carga de su carga multiplicada por el potencial debido a la otra

$$q_1 \left(\frac{kq_2}{r_{12}} \right) + q_2 \left(\frac{kq_1}{r_{12}} \right) = \frac{2kq_1q_2}{r_{12}}, \quad (13)$$

que es el doble de la respuesta correcta. Por lo tanto, para obtener la energía eléctrica total en general, debemos realizar esta suma y luego dividirla por dos. Esto evita lo que se llama doble conteo. Para el caso general, sume todas las cargas q_i y q_j con separación r_{ij} , asegurándose de no incluir la auto interacción infinita correspondiente a $i = j$. Así,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |r_i - r_j|. \quad (14)$$

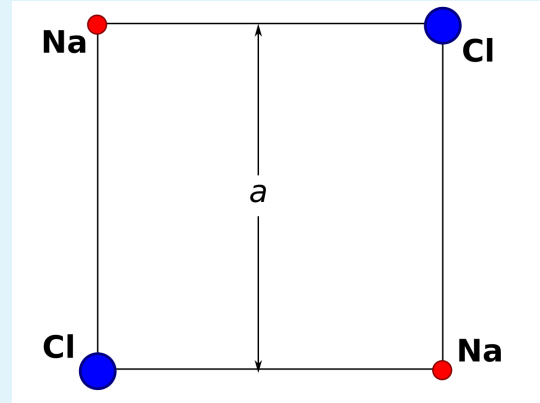
Para dos cargas, donde i y j solo pueden tomar los valores $i = 1, j = 2$ e $i = 2, j = 1$, se reproduce lo anterior.

Ejemplo: Energía de un cuadro de sal.

Excepto en el núcleo atómico, la materia se mantiene básicamente unida por energía eléctrica. Considere la sal de mesa ordinaria, NaCl, donde un átomo de Na tiene 11 electrones y 11 protones, y un átomo de Cl tiene 19 electrones y 19 protones. Calculemos esta energía eléctrica para un cuadrado de NaCl.

Solución: En química, es bien sabido que los átomos son particularmente estables si contienen una cantidad de electrones que es cercano a los valores 2, 10, 18, 36, 54 y 84. Para un cristal de NaCl, Na cede un electrón a Cl para que Na^+ tenga 10 electrones y Cl^- tenga 18 electrones, ambos valores son de los que mencionamos antes. Para Na^+ , los 10 electrones son superados en número por los 11 protones del núcleo, por lo que se comprimen hacia adentro para formar un ión compacto y cerrado; por lo tanto, los Na^+ se dibujan como pequeñas esferas en la Figura. Para Cl, los 18 electrones superan en número a los 17 protones del núcleo, por lo que se expanden hacia afuera para formar un ión de capa cerrada extendida; por lo tanto, los Cl se dibujan como esferas grandes en la figura. (A partir de la dispersión de rayos X de NaCl, se ha deducido que los radios iónicos son $R_{\text{Na}} = 0.095 \text{ nm}$ y $R_{\text{Cl}} = 0.181 \text{ nm}$.) Los valores que hemos mencionado antes se producen cuando uno aplica las reglas de la mecánica cuántica para estudiar el movimiento de los electrones, sujetos solo a las fuerzas eléctricas y a los

átomos. Dentro de los átomos, aunque las leyes que describen el movimiento de electrones difieren de las leyes de la mecánica ordinaria, la electricidad aún proporciona las interacciones que impulsan el movimiento de electrones.



Encontraremos el potencial eléctrico en el sitio de un ion Na^+ , y lo emplearemos para calcular la energía eléctrica promedio por ion. Dado que hay dos iones Cl^- con carga $-e$ a una distancia de a de separación con el ion Na^+ , y otro ion Na^+ con carga e a una distancia $\sqrt{2}a$ de distancia, sumando todos los potenciales eléctricos en el sitio del Na^+ , tenemos

$$V_{\text{Na}^+} = 2 \frac{k(-e)}{a} + \frac{ke}{\sqrt{2}a}. \quad (15)$$

Por lo tanto la energía es

$$U_{\text{Na}^+} = qV_{\text{Na}^+} = -\frac{ke^2}{a} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (16)$$

Cada ion Na^+ tiene la misma energía potencial eléctrica, que es la misma que para cada ion Cl. Para evitar el doble conteo, la energía por ion se obtiene dividiendo U_{Na^+} por dos. Así,

$$U_{\text{ion}} = -\frac{ke^2}{2a} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (17)$$

La energía total U es cuatro veces U_{ion} . Tomando $a = 10^{-10} \text{ m}$ y $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ produce $U_{\text{ion}} = -1.49 \times 10^{-18} \text{ J}$. En unidades del electrón-voltio, o eV, esto es -9.3 eV . Una energía potencial negativa significa que los iones prefieren esta configuración a estar separados uno del otro en el infinito. Un valor típico para la energía de unión de un cristal iónico es unos pocos eV.

8. Calculando campos eléctricos a partir del potencial

Quizás una de las aplicaciones más importantes de todo esto es que hay una metodología para encontrar el valor del campo eléctrico con la ayuda de la determinación del potencial en un punto. La ecuación 7 muestra como calcular el potencial a partir del conocimiento del campo eléctrico (si se conoce) entre dos puntos A y B .

Por otro lado si el potencial es conocido, podemos también

calcular la componente del campo eléctrico a lo largo de la línea de la trayectoria. Para ver esto veamos que a partir de 7 podemos escribir

$$V = \int dV = \int \frac{dV}{ds} ds = - \int E \hat{s} \cdot ds, \quad (18)$$

y por lo tanto

$$E \hat{s} = - \frac{dV}{ds}. \quad (19)$$

Esto significa que la componente de E a lo largo de la trayectoria es justamente el valor de dV/ds , en esa trayectoria arbitraria. Por lo tanto y a manera de generalización tendremos que

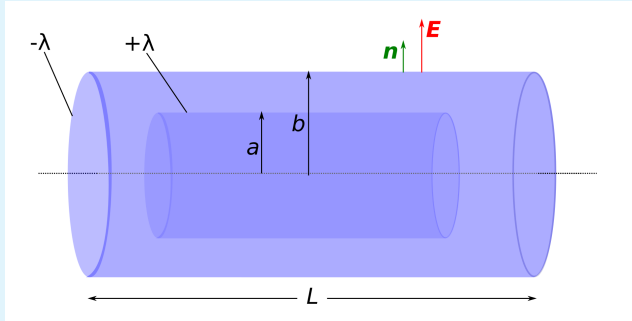
$$\begin{aligned} E_x &= E \cdot \hat{x} = - \frac{\partial V}{\partial x} = - \partial_x V, \\ E_y &= E \cdot \hat{y} = - \frac{\partial V}{\partial y} = - \partial_y V, \\ E_z &= E \cdot \hat{z} = - \frac{\partial V}{\partial z} = - \partial_z V, \end{aligned} \quad (20)$$

o lo que es lo mismo si el campo eléctrico tiene todas las componentes

$$E = - \nabla V = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) V. \quad (21)$$

Ejemplo: Cascarones cilíndricos concéntricos con igual carga pero opuestas.

Considere dos capas cilíndricas infinitas, concéntricas, de radios, $a < b$, con carga por unidad de longitud $+\lambda$ en el cilindro interno y carga por unidad de longitud $-\lambda$ en el cilindro externo. Encuentre la diferencia potencial entre los cilindros.



Solución: Para encontrar el campo eléctrico entre los cilindros, aplique la ley de Gauss con una superficie gaussiana que sea un cilindro concéntrico de longitud L y radio r . Ver Figura. Para $a < r < b$,

$$E_r A_{f l u j o} = E_r (2\pi r L) = (4\pi k) Q_{in} = (4\pi k) \lambda L,$$

entonces

$$E_r = \frac{(4\pi k) \lambda L}{2\pi r L} = \frac{2k\lambda}{r}.$$

Dado que la capa interna cargada positivamente debe estar en el potencial más alto, al aplicar (7), tome B para corresponder a $r = a$ y A para corresponder a $r = b$. Luego, con

$ds = \hat{r} dr$, entonces

$$\begin{aligned} V(a) - V(b) &= - \int_b^a E \cdot ds = - \int_b^a (E \hat{r}) \cdot \hat{r} dr \\ &= \int_b^a \frac{2k\lambda}{r} dr = 2k\lambda \ln r \Big|_a^b = 2k\lambda \ln \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (22)$$

Como E está radialmente hacia afuera, las superficies equipotenciales $V = \text{const}$, que son normales a E , son cilindros concéntricos. Más generalmente, $V(a) - V(r) = 2k\lambda \ln(r/a)$.

Dado que $Q_{enc} = \lambda L - \lambda L = 0$ para una superficie gaussiana concéntrica que está fuera de la cubierta exterior, el campo eléctrico es cero fuera de la cubierta exterior. Por lo tanto, la capa externa tiene el mismo potencial que el infinito, o $V(b) = V(\infty)$. Si hubiera una sola carcasa cilíndrica, la diferencia de voltaje entre ella e infinito sería infinita, debido a la cantidad infinita de carga eléctrica neta.

Ejemplo: Cascarones cilíndricos concéntricos con igual carga pero opuestas.

El capítulo anterior mostró que, para cualquier distribución de carga con simetría esférica, la ley de Gauss aplicada a una superficie esférica concéntrica de Gauss produce $E_r = kQ_{enc}/r^2$. Considere una bola de radio A , con densidad volumétrica uniforme de carga Q . Sea $V_\infty = 0$. Encuentre $V(r)$ para (a) $r > a$, y (b) $r < a$. (c) Demuestre que $V(0) = 1.5V(a)$.

Solución: (a) Fuera de la pelota ($r > a$), el campo eléctrico es el mismo que para una carga puntual. Al configurar $V_\infty = 0$, se aplica el resultado para obtener, $V(r) = kQ/r$. (b) Para $r < a$, sin embargo, el campo eléctrico es menor que para una carga puntual porque Q_{enc} es proporcional al volumen de una esfera de radio r : $Q_{enc}/Q = (r/a)^3$. Así $Q_{enc} = Q(r/a)^3$, por lo tanto $E_r = kQ_{enc}/r^2 = kQr/a^3$. Luego, con $ds = \hat{r} dr$,

$$\begin{aligned} V(r) - V(a) &= - \int_a^r (E_r \hat{r}) \cdot \hat{r} dr = - \int_a^r \frac{kQr}{a^3} dr \\ &= - \frac{kQ}{a^3} \frac{r^2}{2} \Big|_a^r = - \frac{kQ}{a^3} \frac{r^2 - a^2}{2}, \quad (r < a) \end{aligned}$$

Dado que $V(a) = kQ/a$

$$V(r) = V(a) - \frac{kQ}{a^3} \frac{r^2 - a^2}{2} = \frac{3kQ}{2a} - \frac{kQr^2}{2a^3}, \quad (r < a).$$

Busca mas información y recursos
sierraporta.github.io

