La ley de Gauss para campo eléctrico

D. Sierra-Porta

Índice

1. Introducción . . . 1
2. El número de líneas de campo saliendo de una superficie cerrada . . . 2
3. La ley de Gauss . . . 4
4. Aplicaciones de la ley de Gauss . . . 5
4.1. Campo eléctrico de una distribución lineal de carga . . . 5
4.2. Campo eléctrico de una distribución esférica de carga . . . 7

1. Introducción

El estudio de la ciencia es increíblemente interesante y está lleno de datos divertidos. Cuanto más se profundiza en los conceptos de la ciencia y sus campos relacionados, mayor es la cantidad de conocimiento e información que hay que aprender allí. Uno de esos temas de estudio es la Ley de Gauss, que estudia la carga eléctrica junto con una superficie y el tema del flujo eléctrico. La electricidad es difícil de comprender en parte porque en realidad no podemos ver la carga eléctrica que produce efectos eléctricos específicos. Sin embargo, al rastrear el camino de las líneas de campo debido a un conjunto de cargas eléctricas, Faraday habría podido localizar las cargas e incluso determinar sus magnitudes. Conozcamos más sobre la ley y la forma en que opera para que podamos entender la ecuación de la ley.

La ley de Gauss establece que el flujo neto de un campo eléctrico en una superficie cerrada es directamente proporcional a la carga eléctrica incluida. Es una de las cuatro ecuaciones de las leyes de electromagnetismo de Maxwell. Inicialmente fue formulado por Carl Friedrich Gauss en el año 1835 y relaciona los campos eléctricos en los puntos de una superficie cerrada y la carga neta encerrada por esa superficie.

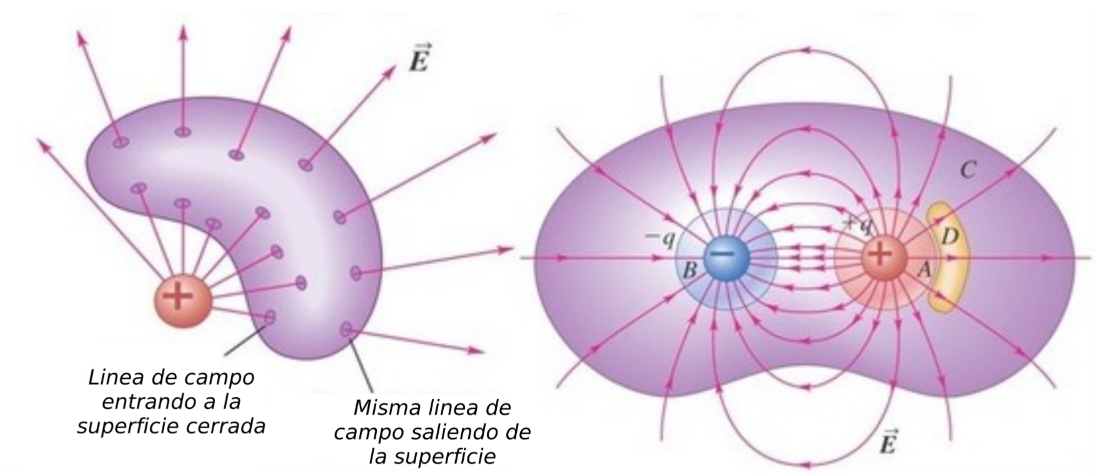

Fig. 1: Lineas de campo eléctrico atravesando secciones de superficies cerradas para distintas distribuciones y simetrías de carga.

El flujo eléctrico se define como el campo eléctrico que pasa a través de un área dada multiplicado por el área de la superficie en un plano perpendicular al campo. Otra declaración de la ley de Gauss establece que el flujo neto de un campo eléctrico dado a través de una superficie dada, dividido por la carga incluida, debería ser igual a una constante.

Por lo general, se supone que una carga eléctrica positiva genera un campo eléctrico positivo. La ley fue publicada en 1867 como parte de una colección de obras del famoso matemático alemán Carl Friedrich Gauss.

Para mayor precisión, reemplazamos las líneas de campo por flujo eléctrico. Esto es análogo a como cuando se dibujaban líneas de flujo de un fluido anteriormente. La ley de Gauss (que veremos en este capítulo) establece que el flujo eléctrico total que sale de una superficie cerrada es igual a $4\pi k$ veces la magnitud de la carga total eléctrica encerrada dentro de una superficie que consideramos hipotética y que engloba toda la carga. Debido a la ley de Gauss, se pueden dibujar tubos de flujo, cuyas paredes son paralelos al campo eléctrico, y que transportan la misma cantidad de flujo a lo largo de cualquier sección transversal. Este flujo se puede rastrear a lo largo del tubo desde un extremo con una cantidad definida de carga positiva, hasta el otro extremo donde se tiene depositada una cantidad igual de carga negativa.

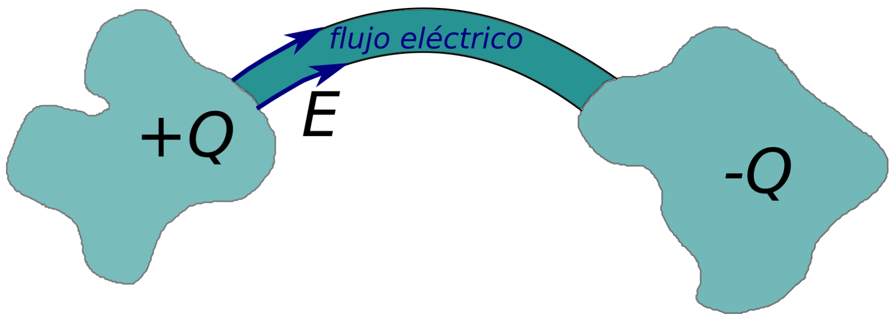

Fig. 2: La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total que sale de una superficie cerrada es igual a $4\pi k$ veces la magnitud de la carga total eléctrica encerrada dentro de una superficie que consideramos hipotética y que engloba toda la carga

Una consecuencia de la ley de Gauss es que, si se conoce el flujo eléctrico que sale de la superficie de un objeto, ya sea por cálculo o por medición, podemos determinar la carga eléctrica dentro de ese objeto.

2. El número de líneas de campo saliendo de una superficie cerrada

Imaginemos una carga eléctrica encerrada en una cierta superficie cerrada. Según Faraday, el número N de líneas de campo (o líneas de fuerza) que salen de una superficie cerrada (como la superficie exterior de una pelota de fútbol) es proporcional a la carga encerrada (Q_{enc}) por esa superficie. Es decir,

$$N \propto Q_{enc}. \tag{1}$$

Sin embargo, la constante de proporcionalidad en la ecuación anterior dependerá de la elección del número de líneas de campo por unidad de carga: Faraday podría elegir ocho líneas por unidad de carga, mientras que Maxwell podría elegir seis líneas por unidad de carga. Nuestro objetivo es escribir una relación como la anterior con un valor de la constante de proporcionalidad en la que todos estén de acuerdo. La nueva relación se llama ley de Gauss.

Entonces vamos por pasos. Para encontrar la cantidad de lineas de campo eléctrico para la superficie cerrada irregular de la Figura 3, primero se divide la superficie completa en un número infinito de áreas infinitesimales dA. Tomamos n que sea el vector unitario de área a lo largo de la normal externa a dA. Medimos el número de líneas de campo dN que salen de cada dA y sumamos todo. Representando esta suma como una integral, y usando un pequeño círculo para denotar una integral sobre una superficie cerrada, tenemos

$$N = \oint dN = \oint \frac{dN}{dA} dA. \tag{2}$$

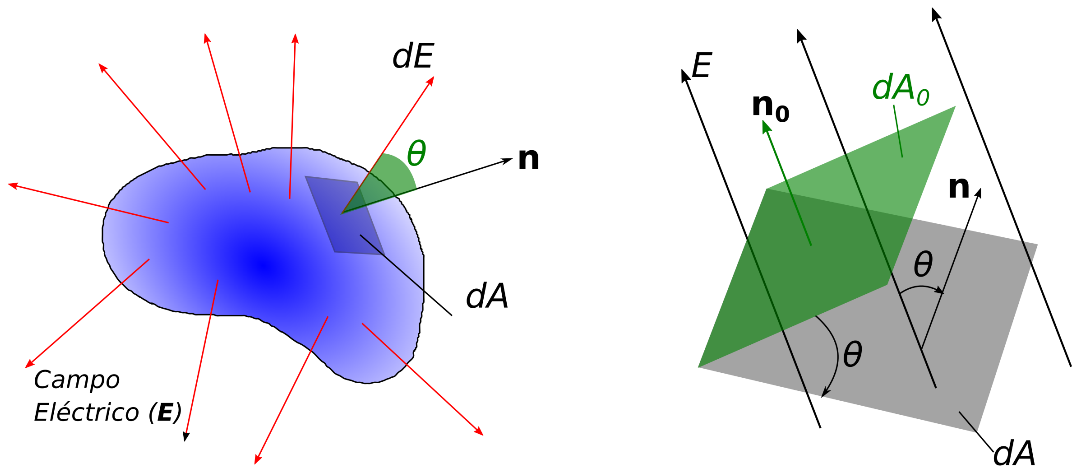

Fig. 3: Definición de flujo eléctrico. (a) Flujo que sale de una superficie cerrada arbitraria, en términos del flujo a través de un elemento de superficie dA con n normal hacia afuera. El flujo por unidad de área es $d\Phi_E/dA = E \cdot n$. (b) La reorientación desde el elemento de superficie dA_0 con n_0 normal a lo largo de E al elemento de superficie dA con normal n_0 arbitrario disminuye $d\Phi_E/dA$.

Ahora debido a la ley de Coulomb, la cantidad dN/dA es proporcional al campo eléctrico E, lo que sugiere que podemos tomar $dN/dA \propto E$. Sin embargo, si consideramos unas superficie dA inclinada con respecto a otra superficie dA_0 con un ángulo θ, como en la figura 3 entonces tendremos que

$$dN = \frac{dN}{dA}dA = \frac{dN}{dA_0/\cos\theta}dA = E\cos\theta. \tag{3}$$

Por lo tanto, es conveniente definir la cantidad dN/dA como el flujo por unidad de área, o el número de líneas por unidad de área, con lo cual tendremos que

$$\Phi_E = \oint d\Phi_E = \oint \frac{d\Phi_E}{dA}dA = \oint E \cdot dA. \tag{4}$$

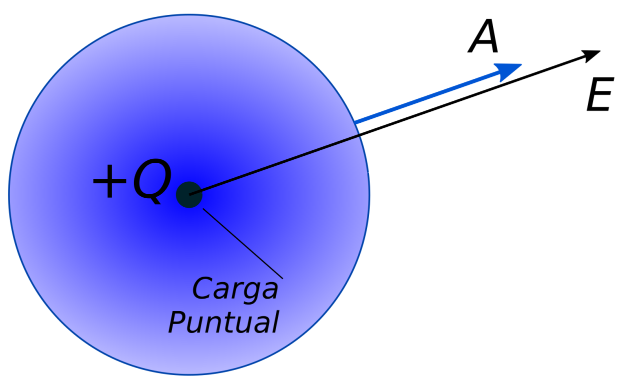

Fig. 4: Flujo eléctrico Φ_E para una superficie gaussiana concéntrica, debido a una carga puntual. Aquí, el flujo por unidad de área es uniforme y se calcula fácilmente, por lo que el flujo total se puede calcular fácilmente. Una superficie gaussiana es una superficie cerrada (y típicamente imaginaria), utilizada para la aplicación de la ley de Gauss, que relaciona el flujo eléctrico con la carga encerrada.

Recordemos que al principio dijimos que el flujo era proporcional a la cantidad de carga. La pregunta sigue siendo cuándo vale la constante de proporcionalidad. Para responder a esto considere una carga puntual como la de la figura 4. Además consideremos una superficie ficticia esférica de radio r que rodea dicha carga. Lo que queremos es encontrar el flujo de lineas de campo eléctrico sobre esta superficie. El campo eléctrico E generado por la carga puntual en

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
i	dA_i	n_{ix}	n_{iy}	n_{iz}	E_{ix}	E_{iy}	E_{iz}	$E \cdot n$	$E \cdot dA$
1	10^{-6}	0.36	0.8	0.48	2	-3	4	0.24	0.24×10^{-6}

Tab. 1: Cálculo de flujo en una hoja de cálculo.

cualquier punto de la superficie es exactamente el mismo debido a que $E = kQ/r^2$, es decir, es constante para todos los puntos. En este caso tenemos que

$$\Phi_E = \oint E \cdot dA = E \oint dA = EA = \frac{kQ}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi kQ. \tag{5}$$

Lo que aprendemos de este pequeño resultado es realmente algo muy importante, la constate de proporcionalidad es justamente $4\pi k$.

3. La ley de Gauss

Usando la constante de proporcionalidad igual a $4\pi k = (\epsilon_0)^{-1}$, tenemos que

$$\Phi_E = \oint E \cdot dA = 4\pi k Q_{interior} = \frac{Q_{interior}}{\epsilon_0}, \tag{6}$$

o equivalentemente

$$Q_{interior} = \epsilon_0 \Phi_E. \tag{7}$$

Cualquiera de estos resultados se conoce como la ley de Gauss. Son verdaderas para cualquier forma de la superficie gaussiana. La ley de Coulomb parece más simple usando k, y la ley de Gauss parece más simple usando ϵ_0. La ecuación anterior expresa la idea de que solo $Q_{interior}$ es responsable del flujo eléctrico. No nos dice cómo se organiza la carga, o cuántas cargas hay; solo el carga neto. Si se mueve la carga interior, el flujo no cambia. Si se mueve la carga exterior, el flujo no cambia. Solo si la carga entra o sale de la superficie gaussiana, el flujo cambia.

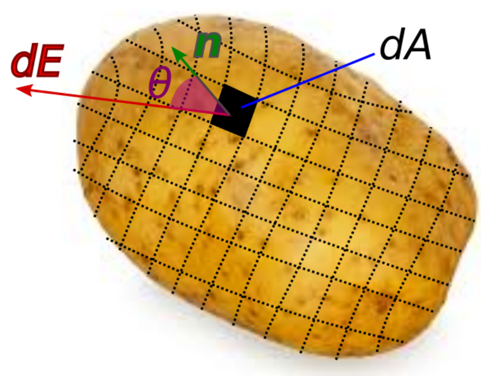

Fig. 5: Flujo eléctrico Φ_E para una superficie de una papa dejando la superficie exterior (superficie gaussiana). La superficie se ha dividido en muchos rectángulos casi regulares.

Para un ejemplo específico de cálculo de flujo eléctrico para una superficie más compleja que una esfera concéntrica con una carga puntual, considere una papa por ejemplo. Ver Figura 5. Imagine que algunos elfos han establecido una grilla fina en la superficie de la papa (con quizás 1000 elementos de superficie). En una hoja de cálculo, ingresan información sobre la superficie gaussiana, que se considera la superficie externa de la papa.

La columna A da los enteros i de 1 a 1000. Para el elemento i, los elfos miden el área dA_i y determinan los tres componentes de la normal exterior n_i. La columna B contiene los dA_i, y las columnas C, D, E contienen los tres componentes de los n_i's. (Hasta ahora, los elfos han considerado solo las propiedades de la superficie. Estas no cambian incluso cuando cambia el campo eléctrico.) Ahora, para cada elemento de la superficie, los elfos miden los tres componentes del campo eléctrico E_i, que se ingresan en las columnas F, G, H. Las mediciones ahora están completas y ahora podemos calcular el flujo eléctrico. La ecuación anterior proporciona el flujo por unidad de área para cada elemento de superficie, y se ingresa en la columna I. (En términos de la hoja de cálculo, el producto de puntos es la suma de los productos de las columnas C y F, D y G y E e I.) El flujo correspondiente es el producto del flujo por unidad de área (columna I) y el área (columna B), y se coloca en la columna J. Sumar las 1000 entradas en la columna J da un valor numérico para el flujo, el flujo total que sale de la superficie. (Si una cuadrícula de 1000 puntos no es lo suficientemente fina para una medida precisa, entonces se debe usar una malla más fina.

En principio, todas las integraciones numéricas siempre deben usar al menos dos mallas, una más fina que la otra, para estar razonablemente seguros de que no hay un error debido a una malla demasiado cruda). Digamos que la respuesta, convergió a dos decimales $\Phi_E = 8.4 \times 10^2$ N m^2/C. Al aplicar la ley de Gauss a nuestra superficie gaussiana en forma de papa, con $\Phi_E = 8.4 \times 10^2$ N m^2/C, se obtiene que contiene $Q_{interior} = 7.4 \times 10^{-9}$ C, un valor característico de la electricidad estática.

La ley de Gauss nos ha permitido determinar la carga eléctrica total o neta dentro de la superficie gaussiana en forma de papa, sin medir realmente esa carga. Medimos algo más, el flujo eléctrico, que según la ley de Gauss produjo la carga total incluida. Eso es algo así como un milagro. En principio, podríamos construir una superficie extensible para rodear cualquier región y determinar el flujo eléctrico a través de este. En la práctica, las mediciones directas son difíciles.

4. Aplicaciones de la ley de Gauss

Quizás una de las aplicaciones más importantes de la ley de Gauss es que podemos calcular de manera muy rápida campos eléctricos para distribuciones continuas de carga. En particular, la idea es muy sencilla. Supóngase que usted tiene un cuerpo cargado de tal manera que este pudiera tener carga uniformemente distribuida o no. Si es posible dibujar (o imaginar) una superficie Gaussiana que encierre toda la carga y para la cual el campo eléctrico sea uniforme (en este caso constante) en toda la superficie Gaussiana, entonces es muy sencillo aplicar la ley de gauss para hallar el campo eléctrico. La única desventaja de usar este procedimiento es que usted necesita dibujar (o encontrar) dicha superficie para la cual el campo eléctrico sea uniforme. En otras palabras, esto sólo es posible para distribuciones de carga que exhiban simetría.

Vamos a ver algunos casos de cómo esto es posible.

4.1. Campo eléctrico de una distribución lineal de carga

Este es un caso de distribución de carga que resolvimos en uno de los capítulos anteriores.

Consideremos una distribución de carga uniformemente distribuida en una linea como se muestra en la figura 6 y queremos calcular el campo eléctrico en un punto a lo largo de la mitad de la linea a una distancia x. Dado que la distribución es continua podemos suponer un elemento de carga pequeño, un diferencial de carga (dq), y debido a la distribución este tendrá una medida dy. Nuestro resultado en ese momento fue que el campo eléctrico estaba dado por:

$$E = E_x \hat{x} = \frac{2k\lambda}{x}\hat{x} = \frac{kQ}{xL}\hat{x}. \tag{8}$$

Ahora usemos ley de Gauss para resolver este problema. Es muy sencillo ver que una superficie Gaussiana ideal para la resolver este problema y que cumple con la condición de simetría es suponer que el hilo de carga se encuentra en el centro de un cilindro del mismo tamaño del hijo y con un radio r como se ve en la figura 7.

En este caso es muy fácil aplicar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico. Véase que en la superficie Gaussiana 2 todos los puntos de la superficie están a la misma distancia r, por

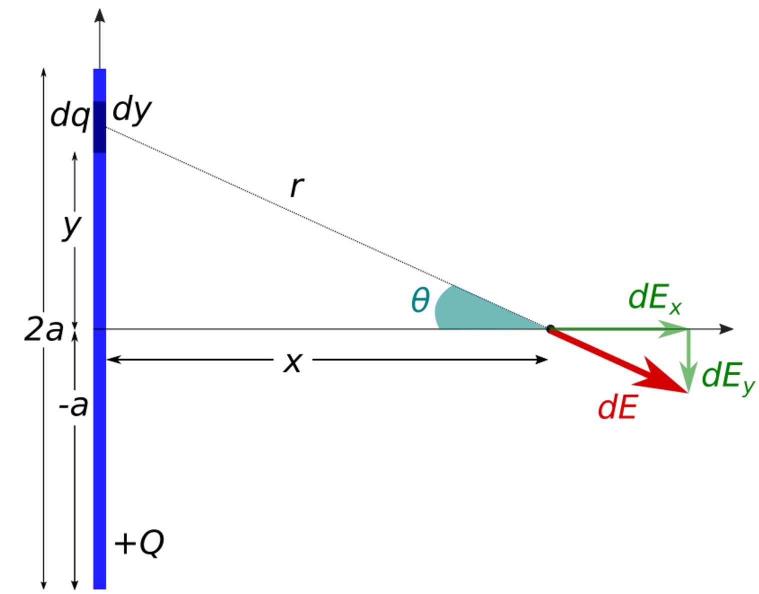

Fig. 6: Campo eléctrico para una distribución de carga linealmente distribuida.

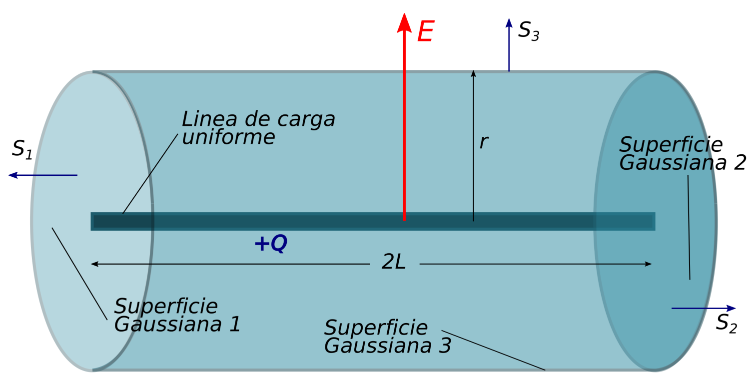

Fig. 7: Superficies Gaussianas para evaluar el campo eléctrico para una distribución de carga linealmente distribuida.

lo que cada punto en ella tiene el mismo campo eléctrico. Entonces

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint E \cdot dA = \oint E \cdot dA_1 + \oint E \cdot dA_2 + \oint E \cdot dA_3 \\ &= \oint E \cos\theta_1 dA_1 + \oint E \cos\theta_2 dA_2 + \oint E \cos\theta_3 \\ &= \oint E dA_1 = E \oint dA_3 = E(2\pi r)(2L) = \frac{Q}{\epsilon_0}, \end{aligned} \tag{9}$$

para lo anterior hemos visto que el ángulo entre el campo eléctrico y el área es 270°, 90° y 0°, para S_1, S_2 y S_3 respectivamente. Por lo cual

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r L} = \frac{kQ}{rL}. \tag{10}$$

Este resultado puede ser comparado con el obtenido anteriormente en la ecuación (8), evidentemente dando lo mismo.

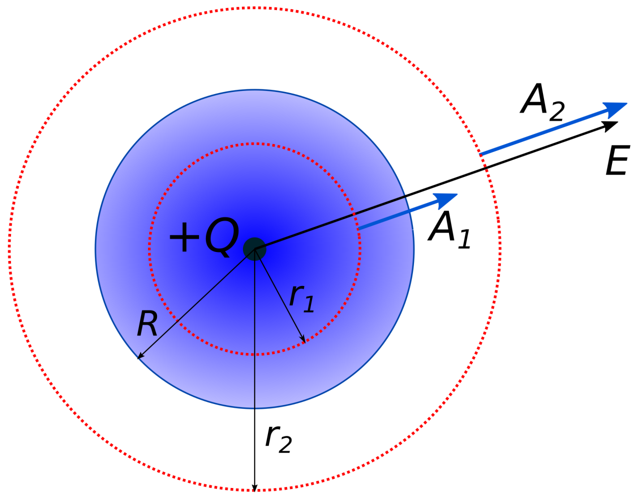

Fig. 8: Superficies Gaussianas para evaluar el campo eléctrico para una distribución de carga linealmente distribuida.

4.2. Campo eléctrico de una distribución esférica de carga

Ahora veamos el caso de una distribución esférica de carga no conductora. En este caso como lo muestra la figura 8. Consideremos primero que la esfera es no conductora. En este caso tenemos que aplicando la ley de Gauss, vemos que para ambas superficies Gaussianas tanto el campo eléctrico como el área tienen la misma dirección por lo que el coseno del ángulo entre ellos es de 1. Además, para el caso de la esfera Gaussiana con radio r_2 la carga está totalmente contenida en la superficie, mientras que para la superficie Gaussiana de radio r_1 la carga es sólo parcial, por lo que, para esta superficie, la densidad de carga volumétrica es la misma pero la carga en r_1 se ve disminuida a Q', por lo cual,

$$\rho = \frac{Q}{V_R} = \frac{Q'}{V_{r_1}}, \tag{11}$$

y entonces

$$\frac{Q}{4\pi R^3/3} = \frac{Q'}{4\pi r_1^3/3} \rightarrow Q' = Q\left(\frac{r_1}{R}\right)^3, \tag{12}$$

siendo $R > r_1$, por lo tanto al evaluar el flujo tenemos que

$$\Phi_E\Big|_{r_1} = \oint_0^{r_1} E dA_1 = E(4\pi r_1^2) = \frac{Q'}{\epsilon_0}, \tag{13}$$

con lo cual finalmente

$$E = \frac{Q'}{\epsilon_0(4\pi r_1^2)} = \frac{Qr_1}{\epsilon_0(4\pi R^3)} = \frac{kQr_1}{R^3}. \tag{14}$$

Sin embrago para la superficie Gaussiana con radio r_2 dado que toda la carga está incluida en ella, entonces

$$\Phi_E\Big|_{r_2} = \oint_0^{r_2} E dA_2 = E(4\pi r_2^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}, \tag{15}$$

con lo cual finalmente

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0(4\pi r_2^2)} = \frac{kQ}{r_2^2}. \tag{16}$$

Finalmente entonces se tiene que el resultado es

$$E = \begin{cases} kQr/R^3 & \text{if } r < R \\ kQ/r^2 & \text{if } r > R \end{cases} \tag{17}$$

Véase que para r_R el campo eléctrico crece linealmente siendo proporcional a r hasta llegar a R donde tiene su valor máximo kE/R^2, y luego el campo eléctrico decrece usualmente como kQ/r^2 para $r > R$.

Ejemplo: Campo eléctrico debido a otra distribución esférica de carga conductora.

El problema se resuelve justamente como en el caso anterior pero al tratarse ahora de una esfera conductora entonces en el interior de la esfera no hay carga, ya que toda la carga se aloja en la superficie. En este caso el campo eléctrico al interior de la esfera es nulo, mientras que al exterior de la esfera el campo es como usualmente

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0(4\pi r^2)} = \frac{kQ}{r^2} \quad \text{para } r > R, \tag{18}$$

Nota final

Todo lo que está escrito en estas notas representan unas guías que este servidor ha escrito para estimular la discusión y motivar el inicio del estudio de algunos tópicos vistos en clases, por lo que invitamos a todos a profundizar en estos temas y no quedarse sólo con la visión presentada en estas notas.