Reflexión, transmisión y energía en ondas transversales

D. Sierra-Porta

Índice

1. Resumen

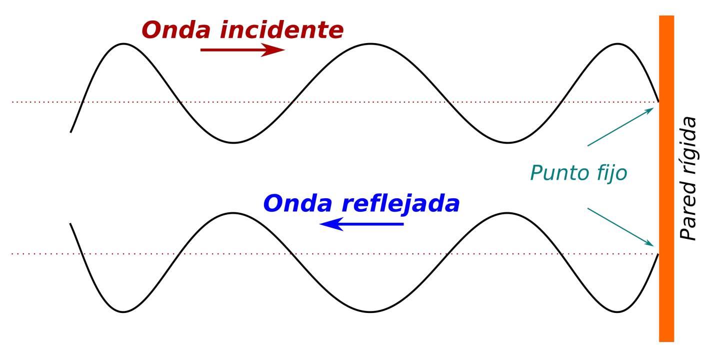
Existe una variedad de ondas que se define en términos de comportamiento en lugar de la dirección de la perturbación. Esta es una onda estacionaria, producida al causar vibraciones en una cuerda u otra pieza de material cuyos extremos están fijos. Las ondas estacionarias son realmente una serie de pulsos que viajan por la cuerda y se reflejan de regreso al punto de la perturbación original.

Suponga que sostiene una cuerda en una mano, con el otro extremo unido a una pared. Si le da una sacudida a la cuerda, esto hace que un pulso, una perturbación aislada y no periódica, se mueva hacia abajo. Un pulso es una onda única, y el comportamiento de esta onda solitaria nos ayuda a comprender lo que sucede dentro del marco más amplio del movimiento ondulatorio. Al igual que con el movimiento ondulatorio en general, el movimiento del pulso involucra energía cinética y potencial. La tensión de la cuerda en sí misma crea energía potencial; entonces, como el movimiento del pulso hace que la cuerda oscile hacia arriba y hacia abajo, esto genera una cierta cantidad de energía cinética.

La velocidad del pulso es una función de la cuerda y sus propiedades, no de la forma en que se entregó originalmente el pulso. Cuanto más tensa es la cuerda, y cuanto menor es su masa por unidad de longitud, más rápido viaja el pulso por ella. Sin embargo, cuanto mayor es la masa por unidad de longitud, mayor es la inercia que resiste el movimiento del pulso. Además, cuanto más suelta la cuerda, menos responderá al movimiento del pulso.

De acuerdo con la tercera ley del movimiento, debe haber una reacción igual y opuesta una vez que el pulso entra en contacto con la pared. Suponiendo que está sosteniendo la cuerda con fuerza, esta reacción se manifestará en forma de una onda invertida, o una que está al revés en relación con el pulso original. En este caso, la tensión en el extremo unido al soporte es igual y opuesta a la tensión ejercida por la mano. Como resultado, el pulso regresa en la misma forma que antes, pero invertido.

Si, por otro lado, sostienes el otro extremo de la cuerda sin apretar; en cambio, una vez que alcanza la pared, su energía cinética se convertirá en energía potencial, lo que hará que el extremo de la cuerda más cercano a la pared se mueva hacia abajo. Esto dará como resultado el envío de un pulso que se invierte en dirección horizontal, pero lo mismo en dirección vertical.



En ambos casos, la energía en la cuerda se refleja hacia atrás a su fuente, es decir, al lugar desde el cual el pulso se produjo originalmente por la acción de su mano. Sin embargo, si sujeta la cuerda de manera que su nivel de tensión sea exactamente entre la rigidez perfecta y la holgura perfecta, entonces el pulso no se reflejará. En otras palabras, no habrá onda reflejada.

Si se unen dos cuerdas de extremo a extremo y se produce un pulso en un extremo, el pulso, por supuesto, se transmitirá a la segunda cuerda. Sin embargo, si la segunda cuerda tiene una masa por unidad de longitud mayor que la primera, el resultado sería dos pulsos: un pulso transmitido que se mueve en la dirección "hacia la derecha" y un pulso invertido reflejado, que se mueve hacia la fuente original de energía. Si, por otro lado, la primera cuerda tiene una masa por unidad de longitud mayor que la segunda, el pulso reflejado sería positivo (hacia arriba), no invertido.

En aras de la simplicidad, esta ilustración se ha presentado en términos de una cuerda unida a una pared, pero, de hecho, la transmisión y la reflexión se producen en una variedad de situaciones de movimiento de onda, no solo aquellas que involucran pulsos u ondas estacionarias. Un ejemplo sorprendente ocurre cuando la luz golpea una ventana ordinaria. La mayor parte de la luz, por supuesto, se transmite a través del panel de la ventana, pero una parte se refleja. Por lo tanto, cuando uno mira por la ventana, también ve su reflejo.

Del mismo modo, las ondas sonoras se reflejan según el medio con el que están en contacto. Una pared de un acantilado, por ejemplo, reflejará una gran cantidad de sonido y, por lo tanto, es fácil producir un eco en tal situación. Por otro lado, hay muchos casos en los que se desea "absorber" el sonido transmitiéndolo a alguna otra forma de material. Así, por ejemplo, el vestíbulo de un hotel de lujo incluirá varias plantas, así como tapices y varios otros objetos que permitan esta absorción. Además de agregar belleza, proporcionan un medio en el cual el sonido de las voces y otros ruidos pueden transmitirse y, por lo tanto, absorberse.

2. Impedancia característica de una cuerda (la cuerda como forzada oscilador)

Cualquier medio a través del cual se propaguen las ondas presentará una impedancia a esas ondas. Si el medio no tiene pérdidas y no posee un mecanismo de resistencia o disipación, esta impedancia estará determinada por los dos parámetros de almacenamiento de energía, inercia y elasticidad, y será real. La presencia de un mecanismo de pérdida introducirá un término complejo en la impedancia. Una cuerda presenta tal impedancia a las ondas progresivas y esto se define, debido a la naturaleza de las ondas, como la impedancia transversal

$$Z = \frac{\text{Fuerza transversal}}{\text{Velocidad transversal}} = \frac{F}{v}. \tag{1}$$

La impedancia, Z, es una medida de oposición que presenta un circuito a una corriente cuando se aplica una tensión. La impedancia extiende el concepto de resistencia a los circuitos de corriente alterna (CA), y posee tanto magnitud como fase, a diferencia de la resistencia, que solo tiene magnitud. Cuando un circuito es alimentado con corriente continua (CC), su impedancia es igual a la resistencia, lo

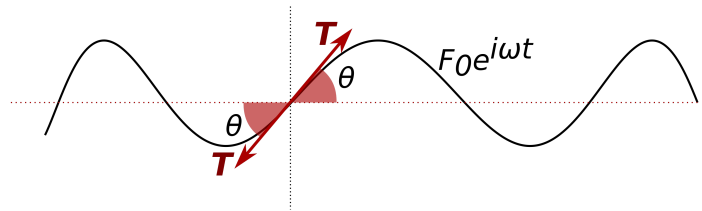


Fig. 1: La cuerda como un oscilador forzado con una fuerza vertical $F_0e^{i\omega t}$ que lo impulsa en un extremo.

que puede ser interpretado como la impedancia con ángulo de fase cero. El concepto de impedancia permite generalizar la ley de Ohm en el estudio de circuitos en corriente alterna (CA). El término fue acuñado por Oliver Heaviside en 1886. En este caso el término es puesto en referencia a la propiedad de que el medio en el que se mueve la onda siempre absorverá, y por lo tanto, se opondrá al movimiento de la onda como tal.

Supóngase que se tiene una onda viajera cuya ecuación inicialmente está dada por $y = A\sin(\omega t \pm kx)$. El siguiente análisis enfatizará el doble papel de la cuerda como medio y como oscilador forzado. En la Figura 1 consideramos ondas progresivas en la cuerda que se generan en un extremo por una fuerza oscilante, $F_0e^{i\omega t}$, que está restringida a la dirección transversal a la cuerda y opera solo en el plano del papel. La tensión en la cuerda tiene un valor constante, T, y al final de la cuerda el balance de fuerzas muestra que la fuerza aplicada es igual y opuesta a $T\sin\theta$ para todo tiempo t, de modo que

$$F_0e^{i\omega t} = -T\sin\theta \approx -T\tan\theta = -T\frac{\partial y}{\partial x}, \tag{2}$$

para un θ pequeño.

El desplazamiento de las ondas progresivas puede representarse exponencialmente por

$$y = Ae^{i(\omega t - kx)}, \tag{3}$$

donde la amplitud A puede ser compleja debido a su relación de fase con F. Al final de la cuerda, donde $x = 0$,

$$F_0e^{i\omega t} = -T\frac{\partial y}{\partial x}_{x=0} = ikTAe^{i\omega t}, \tag{4}$$

con lo cual, inmediatamente se puede ver que $F_0 = ikTA$ o bien dado que $v = \omega/k$,

$$A = \frac{F_0}{ikT} = \frac{F_0 v}{i\omega T}, \tag{5}$$

y por lo tanto la onda está dada por

$$y = \frac{F_0 v}{i\omega T}e^{i(\omega t - kx)}. \tag{6}$$

En este caso la velocidad transversal está dada por

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{F_0 v}{T}e^{i(\omega t - kx)}, \tag{7}$$

donde la amplitud de velocidad $v = F_0 v/T$, da una impedancia transversal en términos de

$$v = \frac{F_0 v}{T} = \frac{F}{Z} \rightarrow Z = \frac{T}{v} = \rho v, \tag{8}$$

y hemos usado el hecho de que la tensión $T = \rho v^2$, esto da la impedancia característica de la cuerda.

Dado que la velocidad v está determinada por la inercia y la elasticidad, la impedancia también está gobernada por estas propiedades.

3. Reflexión y transmisión de ondas de una cuerda en una frontera

Hemos visto que una cuerda presenta una impedancia característica ρv a las ondas que la recorren, y nos preguntamos cómo responderán las ondas a un cambio repentino de impedancia; es decir, del valor ρv.

Suponemos que una cuerda consta de dos secciones unidas suavemente en un punto $x = 0$ con una tensión constante T a lo largo de toda la cuerda. Las dos secciones tienen diferentes densidades lineales ρ_1 y ρ_2 y, por lo tanto, diferentes velocidades de onda $T/\rho_1 = v_1^2$ y $T/\rho_2 = v_2^2$. Las impedancias específicas son $\rho_1 v_1$ y $\rho_2 v_2$, respectivamente.

Una onda incidente que viaja a lo largo de la cuerda se encuentra con la discontinuidad en la impedancia en la posición $x = 0$ como en la 2. En esta posición, $x = 0$, se reflejará una parte de la onda incidente y parte de ella se transmitirá a la región de impedancia $\rho_2 v_2$. Denotaremos la impedancia $\rho_1 v_1$ por Z_1 y la impedancia $\rho_2 v_2$ por Z_2. Escribimos el desplazamiento de la onda incidente como $y_i = A_1 e^{i(\omega t - kx)}$, una onda real (no compleja) de amplitud A_1 que viaja en la dirección x positiva con velocidad v_1. El desplazamiento de la onda reflejada es $y_i = B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}$, de amplitud B_1 y que viaja en la dirección x negativa con velocidad v_1 también.

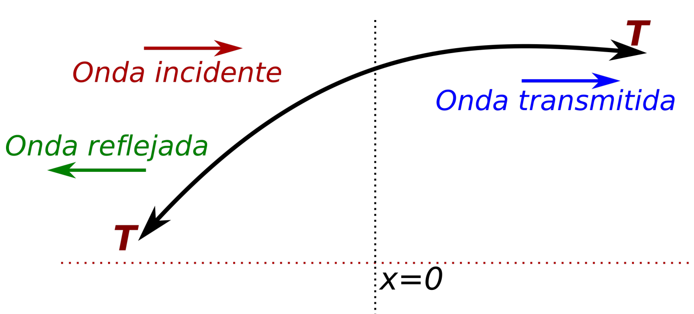


Fig. 2: Ondas en una cuerda de impedancia $\rho_1 v_1$ reflejadas y transmitidas en el límite $x = 0$ donde la cuerda cambia a impedancia a $\rho_2 v_2$.

El desplazamiento de la onda transmitida viene dado por $y_t = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)}$, de amplitud A_2 y viajando en la dirección x positiva con velocidad v_2. Deseamos encontrar los coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión; es decir, los valores relativos de B_1 y A_2 con respecto a A_1. Los encontramos a través de dos condiciones de contorno que deben cumplirse en la discontinuidad de impedancia en $x = 0$.

Las condiciones de contorno que se aplican en $x = 0$ son:

1. Una condición geométrica de que el desplazamiento es el mismo inmediatamente a la izquierda y derecha de $x = 0$ para todo el tiempo, de modo que no haya discontinuidad del desplazamiento.

2. Una condición dinámica de que existe una continuidad de la fuerza transversal $T\frac{\partial y}{\partial x}$ en $x = 0$ y, por lo tanto, una pendiente continua. Esto debe mantenerse, de lo contrario, una diferencia finita en la fuerza actúa sobre una masa infinitamente pequeña de la cuerda dando una aceleración infinita; Esto no está permitido.

La condición (1) en $x = 0$ da que $y_i + y_r = y_t$, o bien

$$A_1 e^{i(\omega t - kx)}|_{x=0} + B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}|_{x=0} = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)}|_{x=0}, \tag{9}$$

o lo que es lo mismo $A_1 + B_1 = A_2$.

Mientras que la condición (2) dará

$$T\frac{\partial}{\partial x}(y_i + y_r) = T\frac{\partial y_t}{\partial x}, \tag{10}$$

en $x = 0$ esto implica

$$-kA_1 + k_1 B_1 = -k_2 A_2 \rightarrow -\frac{\omega}{v_1}A_1 + \frac{\omega}{v_1}B_1 = -\frac{\omega}{v_2}A_2, \tag{11}$$

después de cancelar exponenciales en $x = 0$. Pero $T/\rho_1 = v_1^2 = \sqrt{Z_1/\rho_1}$ y $T/\rho_2 = v_2^2 = \sqrt{Z_2/\rho_2}$, de modo que $Z_1(A_1 - B_1) = Z_2 A_2$.

Las ecuaciones anteriores dan el

1. Coeficiente de amplitud de reflexión;

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \tag{12}$$

2. y el Coeficiente de transmisión de amplitud;

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}, \tag{13}$$

Vemos de inmediato que estos coeficientes son independientes de ω y describen las ondas de todas las frecuencias; son reales y, por lo tanto, son iguales para cambios de fase de π rad. Además, estas proporciones dependen completamente de las proporciones de las impedancias. $Z_2 = \infty$ es equivalente a que $x = 0$ sea un extremo fijo de la cuerda y en este caso no existe onda transmitida. Esto proporciona $B_1 = -A_1$, y $A_2 = 0$ de modo que la onda incidente se refleja completamente (como esperamos) con un cambio de fase de π (inversión de fase), condiciones que consideraremos necesarias para que existan ondas estacionarias. Si $Z_2 = 0$, de modo que $x = 0$ es un extremo libre de la cuerda, entonces $B_1 = A_1$ y $A_2 = 2A_1$. Esto explica el movimiento al final de un látigo o cuerda libre cuando una onda lo alcanza.

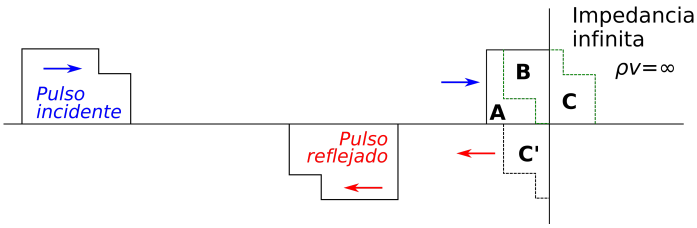


Fig. 3: Un pulso de forma arbitraria se refleja a una impedancia infinita con un cambio de fase de π rad, de modo que el pulso reflejado es la forma invertida e invertida de la forma de onda inicial. El pulso en la reflexión se divide en la figura en tres secciones A, B y C. En el momento de la observación, la sección C ya se ha reflejado y sufrió inversión para convertirse en C'. La forma real del pulso observado en este instante es A siendo $A+B+C'$ donde $B=C'$. El desplazamiento en el punto de reflexión debe ser cero.

4. Reflexión y transmisión de energía

Nuestro interés en las ondas, sin embargo, se refiere principalmente a su función de transferir energía a través de un medio, y ahora consideraremos lo que le sucede a la energía en una onda cuando se encuentra con un límite entre dos medios de diferentes valores de impedancia.

Si consideramos cada unidad de longitud, masa ρ, de la cuerda como un oscilador armónico simple de amplitud máxima A, sabemos que su energía total será $E=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$, donde ω es la frecuencia de onda.

La onda viaja a una velocidad v, de modo que a medida que cada unidad de longitud de cuerda toma su oscilación con el paso de la onda, la velocidad a la que se transporta la energía a lo largo de la cuerda es

$$(\text{velocidad} \times \text{energía}) = \frac{1}{2}v\rho\omega^2A^2. \tag{14}$$

Por lo tanto, la tasa de energía que llega al límite $x=0$ es la energía que llega con la onda incidente; es decir

$$\frac{1}{2}v_1\rho_1\omega^2A_1^2 = \frac{1}{2}Z_1\omega^2A^2 \tag{15}$$

La velocidad a la cual la energía sale del límite, a través de las ondas reflejadas y transmitidas, es

$$\frac{1}{2}v_1\rho_1\omega^2B_1^2 + \frac{1}{2}v_2\rho_2\omega^2A_2^2 = \frac{1}{2}Z_1\omega^2B_1^2 + \frac{1}{2}Z_2\omega^2A_2^2, \tag{16}$$

con lo cual considerando las relaciones anteriores para B_1/A_1 y A_2/A_1,

$$\frac{1}{2}\omega^2A_1^2\frac{Z_1(Z_1-Z_2)^2+4Z_1^2Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} = \frac{1}{2}Z_1\omega^2A_1^2. \tag{17}$$

Por lo tanto, la energía se conserva y toda la energía que llega al límite en la onda incidente deja el límite en las ondas reflejadas y transmitidas. Luego

$$\frac{\text{Energía reflejada}}{\text{Energía incidente}} = \frac{Z_1B_1^2}{Z_1A_1^2} = \left(\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\right)^2, \tag{18}$$

y también

$$\frac{\text{Energía transmitida}}{\text{Energía incidente}} = \frac{Z_2A_2^2}{Z_1A_1^2} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}. \tag{19}$$

Vemos que si $Z_1=Z_2$ no se refleja energía y se dice que las impedancias coinciden.

5. Energía de una cuerda vibrante

Las ondas transportan energía a través de un medio a medida que se propagan. De hecho, una cuerda vibratoria posee energía cinética y potencial. Esta sección examina la velocidad a la que se transporta la energía a lo largo de una cadena. Asumiremos una onda sinusoidal unidimensional en el cálculo de la energía transferida.

Considere una onda sinusoidal que viaja en una cuerda. La fuente de la energía es un agente externo en un extremo de la cadena. Podemos considerar que la cuerda es un sistema no aislado. A medida que el agente externo realiza el trabajo en el extremo de la cuerda, moviéndolo hacia arriba y hacia abajo, la energía ingresa al sistema de la cuerda y se propaga a lo largo de su longitud. Centremos nuestra atención en un elemento infinitesimal de la cuerda de longitud dx y masa dm. Por lo tanto, podemos modelar cada elemento de la cuerda como una partícula en movimiento armónico simple, con la oscilación en la dirección y. Todos los elementos tienen la misma frecuencia angular ω y la misma amplitud A. La energía cinética K asociada con una partícula en movimiento es $K=mv^2/2$. Si aplicamos esta ecuación al elemento infinitesimal, la energía cinética dK asociada con el movimiento hacia arriba y hacia abajo de este elemento es

La energía cinética de un elemento de longitud dx y densidad lineal ρ está dada por $\rho(dx)\dot{y}^2/2$; la energía cinética total es la integral de esto a lo largo de la cuerda. Así

$$K = E_{cinetica} = \frac{1}{2}\int_0^\lambda \rho\dot{y}^2dx. \tag{20}$$

Sustituyendo la velocidad transversal general de un elemento del medio usando $y=A\sin(\omega t-kx)$, tenemos que

$$\begin{aligned} K_\lambda &= E_{cinetica} = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\int_0^\lambda \cos^2(\omega t-kx)dx \\ &= \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4k}\sin 2(\omega t-kx)\right)\Big|_0^\lambda \\ &= \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{4}\lambda\rho\omega^2A^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Además de la energía cinética, existe una energía potencial asociada con cada elemento de la cuerda debido a su desplazamiento desde la posición de equilibrio y las fuerzas de restauración de los elementos vecinos. La energía potencial es el trabajo realizado por la tensión T al extender un elemento dx a una nueva longitud ds cuando la cuerda está vibrando. Un análisis similar al anterior para la energía potencial total $U_\lambda = E_{potencial}$ en una longitud de onda da exactamente el mismo resultado:

$$\begin{aligned} E_{potencial} &= \int (ds - dx) \\ &= \int T\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1\right] dx \\ &= \frac{T}{2}\int \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\lambda\rho\omega^2 A^2. \qquad (22) \end{aligned}$$

La energía total en una longitud de onda de la onda es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E_{Total} = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\lambda\rho\omega^2 A^2. \qquad (23)$$

A medida que la onda se mueve a lo largo de la cuerda, esta cantidad de energía pasa por un punto dado en la cuerda durante un intervalo de tiempo de un período de la oscilación. Por lo tanto, la potencia P, o tasa de transferencia de energía asociada con la onda mecánica, es

$$P = \frac{E_{Total}}{\Delta t} = \frac{E_{Total}}{T} = \frac{1}{2T}\lambda\rho\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\lambda\rho\omega^2 A^2 v. \qquad (24)$$

La ecuación anterior muestra que la velocidad de transferencia de energía por una onda sinusoidal en una cuerda es proporcional a (a) el cuadrado de la frecuencia, (b) el cuadrado de la amplitud y (c) la velocidad de la onda. De hecho, la velocidad de transferencia de energía en cualquier onda sinusoidal es proporcional al cuadrado de la frecuencia angular y al cuadrado de la amplitud.

Ejemplo: Una onda viajera.

Una onda armónica de longitud de onda de 25 cm y amplitud de 1.2 cm se mueve a lo largo de un segmento de 15 m de longitud de una cuerda de 60 m de longitud que tiene una masa de 320 gr una tensión de 12 N. (a) ¿Cuál es la velocidad y frecuencia angular de la onda? (b) ¿Cuál es la energía total promedio de la onda?

Solución: La velocidad de las ondas es $v = \sqrt{T/\rho}$, donde se da T y $\rho = m/L$. Encontramos ω de $\omega = 2\pi f$, donde $f = v/\lambda$. En este caso

$$v = \frac{T}{\rho} = \frac{TL}{m} = 47.4 \text{ m/s}.$$

Siendo la frecuencia angular $\omega = 2\pi f = 2\pi v/\lambda = 1190$ rad/s.

La energía se encuentra usando

$$E = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \Delta x = \frac{m}{2L}\omega^2 A^2 \Delta x = 8.19. \text{ J}.$$

6. Grupos de onda y velocidad de grupo

Nuestra discusión hasta ahora se ha limitado a ondas monocromáticas de una sola frecuencia y longitud de onda. Es mucho más común que las ondas ocurran como una mezcla de un número o grupo de frecuencias componentes; La luz blanca, por ejemplo, se compone de un espectro continuo de longitud de onda visible que se extiende desde aproximadamente 3000 A en el azul hasta 7000 A en el rojo.

Examinar el comportamiento de dicho grupo conduce al tercer tipo de velocidad, es decir, la velocidad del grupo.

6.1. Superposición de dos ondas de frecuencias casi iguales

Comenzamos considerando un grupo que consiste en dos componentes de igual amplitud a pero frecuencias ω_1 y ω_2 que difieren en una pequeña cantidad. Sus desplazamientos separados están dados por $y_1 = A\cos(\omega_1 t - k_1 x)$ y $y_2 = A\cos(\omega_2 t - k_2 x)$, respectivamente.

La superposición de amplitud y fase da

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}x\right] \times \cos\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\right], \qquad (25)$$

un sistema de ondas con una frecuencia $(\omega_1+\omega_2)/2$, que está muy cerca de la frecuencia de cualquiera de los componentes pero con una amplitud máxima de $2A$, modulada en el espacio y el tiempo por una envolvente de frecuencia que varía muy lentamente $(\omega_1-\omega_2)/2$ y número de onda $(k_1-k_2)/2$.

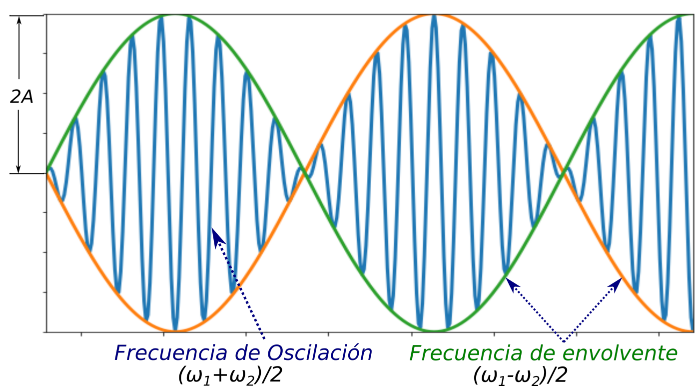


Fig. 4: La superposición de dos ondas de frecuencia ligeramente diferente ω_1 y ω_2 forma un grupo. La oscilación más rápida ocurre a la frecuencia promedio de los dos componentes $(\omega_1+\omega_2)/2$ y la envolvente de grupo que varía lentamente tiene una frecuencia $(\omega_1-\omega_2)/2$, la mitad de la diferencia de frecuencia entre los componentes.

Este sistema se muestra en la Figura 4 y muestra, por supuesto, un comportamiento similar al de los osciladores acoplados equivalentes. La velocidad de la nueva onda es $(\omega_1-\omega_2)/(k_1-k_2)$ de tal manera que, si las velocidades de fase $\omega_1/k_1 = \omega_2/k_2 = v$, da

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = v \qquad (26)$$

para que las frecuencias componentes y su superposición, o grupo, viajen con la misma velocidad, el perfil de su combinación en la 4 permanece constante.

Los latidos de las fluctuaciones de intensidad máxima tienen una frecuencia igual a la diferencia $f_1 - f_2$ de los componentes. En el ejemplo aquí donde los componentes tienen amplitudes iguales a A, la superposición producirá una amplitud que varía entre $2A$ y 0; Esto se llama modulación completa o 100 %.

Más generalmente, una onda de amplitud modulada puede estar representada por

$$y = A\cos(\omega t - kx), \tag{27}$$

donde la amplitud modulada es

$$A = a + b\cos(\omega' t), \tag{28}$$

Esto da

$$y = a\cos(\omega t - kx) + \frac{b}{2}\cos((\omega + \omega')t - kx) + \frac{b}{2}\cos((\omega - \omega')t - kx), \tag{29}$$

de modo que aquí la modulación de amplitud ha introducido dos nuevas frecuencias $\omega \pm \omega'$, conocido como combinación de tonos o bandas laterales. La modulación de amplitud de una frecuencia portadora es una forma común de transmisión de radio, pero su generación de bandas laterales ha llevado a la acumulación de frecuencias de radio e interferencia entre estaciones.

6.2. Grupos de onda y velocidad de grupo

Supongamos ahora que las dos componentes de frecuencia de la última sección tienen velocidades de fase diferentes para que $\omega_1/k_1 \neq \omega_2/k_2$. La velocidad de la amplitud máxima del grupo, es decir, la velocidad del grupo

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}, \tag{30}$$

es ahora es diferente de cada una de estas velocidades, la superposición de las dos ondas ya no permanecerá constante y el perfil del grupo cambiará con el tiempo.

Un medio en el que la velocidad de fase depende de la frecuencia (ω/k no es constante) se conoce como medio dispersivo y una relación de dispersión expresa la variación de ω en función de k. Si un grupo contiene un número de componentes de frecuencias que son casi iguales, se escribe la expresión original para la velocidad del grupo

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \tag{31}$$

La velocidad del grupo es la de la amplitud máxima del grupo, de modo que es la velocidad con la que se transmite la energía en el grupo. Ya que $\omega = kv$, donde v es la velocidad de fase, la velocidad del grupo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv) = v + k\frac{dv}{dk} = v + \lambda\frac{dv}{d\lambda}, \tag{32}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$. Por lo general, $dv/d\lambda$ es positivo, de modo que $v_g < v$. Esto se llama dispersión normal, pero puede surgir una dispersión anómala cuando $dv/d\lambda$ es negativo, de modo que $v_g > v$.

Cuando analicemos las ondas electromagnéticas, veremos que un conductor eléctrico es anormalmente dispersivo a estas ondas, mientras que un dieléctrico normalmente es dispersivo, excepto en las frecuencias de resonancia natural de sus átomos. En el capítulo sobre oscilaciones forzadas vimos que la onda actuaba como una fuerza impulsora sobre los osciladores atómicos y que la fuerte absorción de la energía de la onda estaba representada por la fracción de disipación de la impedancia del oscilador, mientras que la curva de dispersión anómala seguía el valor de la parte reactiva de la impedancia.

Las tres curvas de la figura 5 representan

- Un medio no dispersivo donde ω/k es constante, de modo que $v_g = v$, por ejemplo, el comportamiento del espacio libre hacia las ondas de luz.
- Una relación de dispersión normal $v_g < v$.
- Una relación de dispersión anómala $v_g > v$.

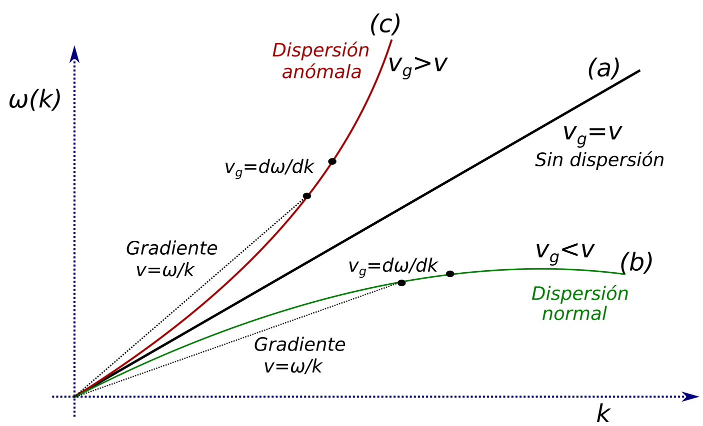


Fig. 5: Curvas que ilustran las relaciones de dispersión: (a) una línea recta que representa un medio no dispersivo, $v_g = v$; (b) una relación de dispersión normal donde el gradiente $v = \omega/k > v_g = d\omega/dk$; (c) una relación de dispersión anómala donde $v < v_g$.