超実数と体の無限直積環とフィルターとイデアル – 数学カフェアドベントカレンダー 12/21

@sierrarries

この記事は，数学カフェアドベントカレンダー１２月２１日の記事です．

最近超実数の構成法を学ぶ機会があり, 実数の可算無限直積を, あるフィルターが定める同値関係で割って構成することを学びました．私の思考は代数の方法に侵されてるので, 直ちにイデアルの言葉で書き直したいと思いました．それが本記事執筆のきっかけです．実際考えてみるとかなり自明なやり方で対応してることが分かります．知らない地方（超実数？）の結果を自分の地方（数論で使うような代数とか？）の言葉に翻訳しただけといえばそうですが,「出自の違うものが実は一緒」が起こるのが数学の面白い点の一つだと思います．ぜひその興奮を共有できたらと思います．

記事の流れを述べておきます．まずフィルターの定義をして, 超実数の構成をします．次にフィルターとイデアルのあいだに表裏一体の関係があることを確かめます．ここがメインです．最後に, ちょとした応用として, 体の無限直積環の素イデアルは極大イデアルだということをみます．最後の結果はもう少し一般化できると思います．

数学をしているときの人の心の動きが伝わるといいなと思い, 試みに命題をみた/思いついたときの筆者の気持ちを () 内に記してみました．代数幾何やってた人のツッコミはこんな感じです．

予備知識としては, 以下で十分なつもりです．参考にしてください．

1. 集合論の言葉
2. 可換環の定義, イデアル, 素イデアル, イデアルによる剰余環の定義.
3. 選択公理および Zorn の補題の使い方

超実数の構成については [1] を参考にしました．

超実数

この節では, 超実数（hyperreal）を構成します．本来なら, 超実数の定義をその特徴付けによって行い, 存在証明の一環として構成を与えるのがモダンな導入でしょう．

今回は超実数の一般的な構成をまとめ, 以下の性質を持つことを確かめるに留めます．[*1]

1. $\mathbb{R}$ を部分体として含む順序体である．
2. どんな正の実数よりも小さい正の数 “ 無限小 ” が存在する．
3. どんな正の実数よりも大きい正の数 “ 無限大 ” が存在する．

では本題に入ります．超実数を ${}^*\mathbb{R}$ と書くことにします．構成にはまず実数の加算無限直積 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ を用意します．次に添字集合 $\mathbb{N}$ の上のフィルターというものを考えます．フィルターは $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上にある同値関係を定めます．そこで, ある特殊なフィルターが定める同時関係で $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を割って ${}^*\mathbb{R}$ とするのです．まずフィルターの定義から始めます．

フィルター (filter)

集合 I に対し, その冪集合を $\mathcal{P}(I)$ とかく．また, 濃度を $\#(I)$ とかく．

> **定義 1** (filter)**.** I を集合とする．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ が次の 1．2. を満たすとき I 上のフィルターという．
>
> 1. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.
> 2. $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.
>
> 更に, $\emptyset \notin \mathcal{F}$ のとき, フィルター F はプロパー (proper) である, またはプロパーフィルター, 真のフィルター (proper filter) であるという．

注）フィルター $\mathcal{F}$ に対し, $\emptyset \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{P}(I)$ である．

注）定義の条件 1. かつ 2. は次と同値 “ $A \cap B = \mathcal{F} \Leftrightarrow A, B \in \mathcal{F}$ ”．

[*1] 実際は, これに加えて移行原理（transfer princile）を満たすという条件を加えて, 超実数の特徴付けとします．移行原理とは, $\mathbb{R}$ で成り立つことは ${}^*\mathbb{R}$ でも成立し, その逆も成り立つという原理です．**(すげえ)** しかし話がややこしくなるので, 今回は触れません．宇宙とか出てきます．

定義 2 (集合系の生成するフィルター). $\emptyset, \{\emptyset\} \neq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(I)$ にたいし, [a]
$\mathcal{F}^{\mathcal{H}} := \{A \in \mathcal{P}(I) |$ ある $n \in \mathbb{N}$ とある $B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{H}$ に対して $B_1 \cap \cdots \cap B_n \subseteq A\}$
は $\mathcal{H}$ を含む最小のフィルターになる. これを $\mathcal{H}$ が生成するフィルターという. $\mathcal{H}$ が一元集合のとき, すなわち, ある $\{\emptyset\} \neq H \subseteq I$ をもちいて $\mathcal{F}^{\{H\}}$ とかけるとき, これをプリンシパルフィルター (principal filter) という.

[a] 面倒なので $\emptyset, \{\emptyset\}$ を除外した.

例 3 (フィルターの例).

1. $i \in I$ とする, $\mathcal{F}^{\{\{i\}\}}$ はプリンシパルフィルターである.
2. $\mathcal{F}^{co} = \{A | \#(I \setminus A) \leq \infty\}$ を補有限 (cofinite) フィルターまたはフレシェ (Fréchet) フィルターという.
3. 位相空間において, 各点の近傍系はフィルターになっている.

今回はウルトラフィルターというフィルターが重要な役割を果たす.

定義 4 (Ultrafilter). プロパーフィルター $\mathcal{F}$ が次の同値な条件を満たすとき, ウルトラフィルター (Ultrafilter) という.

1. 任意の $A \in \mathcal{P}(I)$ に対して, $A \in \mathcal{F}$ or $A^C \in \mathcal{F}$.
2. $A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ or $B \in \mathcal{F}$.

(なんか既約っぽさあるな)
注) “ or ” は “ どちらか一方のみ ” で置き換え可能.

ウルトラフィルターの性質を示す補題をいくつかあげる. 最初の補題の証明は容易である.

補題 5. $\mathcal{F}$ をウルトラフィルターとする. 有限個の互いに交わりのない $A_1, \ldots, A_N$ について $A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_N \in \mathcal{F}$ であれば, ただひとつの A_i について $A_i \in \mathcal{F}$ である.

じつは, ウルトラフィルターはプロパーフィルターのうちの極大なものである.

命題 6. フィルターが極大プロパーフィルターであることと, ウルトラフィルターであることは同値.

証明. $\Rightarrow$) $\mathcal{F}$ を極大プロパーフィルターとする. $\emptyset, I \neq A \notin \mathcal{F}$ を任意にとる. $\mathcal{F}[A^c] := \{B | B \in \mathcal{F}$ または, ある $B_0 \in \mathcal{F}$ が存在して $B_0 \cap A^c \subseteq B\}$ とすると, これは $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ が生成するフィルターである. $A \notin \mathcal{F}$ より, 任意の $B \in \mathcal{F}$ に対して $B \not\subseteq A$ すなわち $B \cap A \neq \emptyset$ である. よって $\mathcal{F}[A^c]$ はプロパーであり, $\mathcal{F}$ の極大性より $\mathcal{F}[A^c] = \mathcal{F}$ である. ゆえに $A^c \in \mathcal{F}$. よって $\mathcal{F}$ はウルトラフィルター.
$\Leftarrow$) $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$ となるプロパーフィルター $\mathcal{G}$ が存在するとする. $\emptyset, I \neq A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ を任意にとる. $A \notin \mathcal{F}$ より $A^c \in \mathcal{F}$ である. すると $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{G}$ となり矛盾. よって $\mathcal{F}$ より真に大きいプロパーフィルターは存在しない. ■

さらに, プリンシパルであることと, 補有限な集合を全ては含まないことが同値になる.

補題 7. ウルトラフィルター $\mathcal{F}$ について, プリンシパルであることと $\mathcal{F} \not\supseteq \mathcal{F}^{co}$ となることは同値.

証明. $\Rightarrow$) $\emptyset \neq H$ とし, $\mathcal{F}^{\{H\}}$ をプリンシパル　ウルトラフィルターとする. $\#(H) \geq 2$ と仮定すると, H の空でない真部分集合が存在する. これを H_1 とおく. $H \setminus H_1 \not\subseteq H$ より $H \setminus H_1 \notin \mathcal{F}^H$. また, $H \not\subseteq H_1$ より $H_1 \notin \mathcal{F}^H$. $\mathcal{F}^H$ はウルトラフィルターなのでこれは矛盾. ゆえに $\#(H) = 1$. $I \setminus H \in \mathcal{F}^{co}$ かつ $I \setminus H \notin \mathcal{F}$ ゆえ, $\mathcal{F} \not\supseteq \mathcal{F}^{co}$.
$\Leftarrow$) $A \in \mathcal{F}^{co} \setminus \mathcal{F}$ をとる. $\#(I \setminus A) < \infty$ ゆえ 5 より, ある $n \in I$ について $\{n\} \in \mathcal{F}$ である. $B \in \mathcal{F}$ を任意にとる. $n \notin B$ と仮定すると, $\emptyset = \{n\} \cap A \in \mathcal{F}$ となり $\mathcal{F}$ がプロパーであることに反する. ゆえに $n \in B$ よって $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\{n\}}$. ■

超実数の構成

${}^*\mathbb{R}$ を構成するためには $\mathbb{N}$ 上のノンプリンシパル　ウルトラフィルターという特殊なフィルターを用いる. はじめに, 実際にノンプリンシパル　ウルトラフィルターが存在することを示す.

定義 8 (有限交叉性（finite intersection property, f.i.p）)**.** 集合の族は, その任意の有限部分集合の共通部分が常に空でないとき, 有限交叉性を持つという.

次の性質は定義から直ちに確かめられる.

命題 9. フィルターが, プロパーであることと有限交叉性を持つことは同値.

(コンパクトっぽさだ)

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(I)$ とする．$\mathcal{H}$ が有限交叉性をもてば，$\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ も有限交叉性をもち，したがってプロパー．じつは，このような $\mathcal{H}$ を含むプロパーフィルターのうち極大なものが存在する．

> **命題 10.** $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(I)$ が有限交叉性を持つとする，このとき $\mathcal{H}$ を含む極大プロパーフィルター (i.e ultrafilter) が存在する．

証明には Zorn の補題を用いる．

> **補題 11** (Zorn の補題)**.** $(\mathscr{A}, \leq)$ を半順序集合であり，その任意の全順序部分集合が $\mathscr{A}$ に上界をもつとする．このとき $\mathscr{A}$ は極大元をもつ．

Zorn の補題は ZF (Zermelo-Fraenkel の公理系) のもとで選択公理と同値です．私は Zorn の補題は当然のように認めて使います．

> *10* の証明. 9 より $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ はプロパーフィルターである．$(\mathscr{F}, \leq)$ を，$\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ を含むプロパーフィルターの族に包含関係で順序を入れたものとする．$\mathscr{P}$ を $\mathscr{F}$ の全順序部分集合とする．$\mathscr{F}_{\mathscr{P}} = \cup_{\mathcal{F} \in \mathscr{P}} \mathcal{F}$ は $\mathcal{H}$ を含むプロパーフィルターになり，しかも $\mathscr{P}$ の上界である．よって 11 により，$\mathscr{F}$ に極大元が存在する． ■

(極大イデアルの存在証明と一緒だ)

> **系 12.** プリンシパル 極大プロパーフィルター (プリンシパル　ウルトラフィルター) が存在する．

> **証明.** $\mathcal{H}$ を一元集合にとればよい． ■

> **系 13.** ノンプリンシパル　極大　プロパーフィルター (ノンプリンシパル　ウルトラフィルター) が存在する．

> **証明.** $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{co}$ として 10 を用いて存在が保証されるフィルターを $\mathcal{F}$ とおく．$\mathcal{F}$ がノンプリンシパルであることは 7 から従う． ■

$\mathcal{F}$ を $\mathbb{N}$ 上のフィルターとする．$\{a_n\}_{\mathbb{N}}, \{b_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ に対し $\{a_n\}_{\mathbb{N}} \underset{\mathcal{F}}{\equiv} \{b_n\}_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \{n | a_n - b_n = 0\} \in \mathcal{F}$ と定めると，$\underset{\mathcal{F}}{\equiv}$ が $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上の同値関係となることは容易に確かめられる．$\{a_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の同値類を $[\{a_n\}_{\mathbb{N}}]_{\mathcal{F}}$ とかく．これを用いて超実数を定義する．

定義 14 (hyperreal)**.** $\mathcal{F}$ をノンプリンシパル　ウルトラフィルターとする．$^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\underset{\mathcal{F}}{\equiv}$ に $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ から誘導された加法と乗法を入れ，“ $\{a_n\}_{\mathbb{N}} \leq \{b_n\}_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \{n|a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F}$ ”で順序を入れる．$^*\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ を含む順序体になり，これを超実数とよぶ．[a]

[a] どのノンプリンシパル　ウルトラフィルター割って作っても超実数が同型になるか？という問題がある．連続体仮説の下では同型になることが知られている．

$r \in \mathbb{R}$ を $[\{r\}_{\mathbb{N}}]_{\mathcal{F}} \in {^*\mathbb{R}}$ に送ることで，$\mathbb{R}$ から $^*\mathbb{R}$ への単射をつくれる．また $\{a_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ にたいし，$\{a_n^{inv}\}_{\mathbb{N}}$ を $a_n \neq 0$ のとき $a_n^{inv} = 1/a_n$, $a_n = 0$ のとき $a_n^{inv} = 0$ で定める．すると $0 \neq [\{a_n\}_{\mathbb{N}}]_{\mathcal{F}} \in {^*\mathbb{R}}$ にたいし，$([\{a_n\}_{\mathbb{N}}]_{\mathcal{F}})^{-1} = [\{a_n^{inv}\}_{\mathbb{N}}]_{\mathcal{F}}$ となり，$^*\mathbb{R}$ が体であることが分かる．順序が全順序であることは，$\mathcal{F}$ がウルトラフィルターであることから従う．無限小と無限大の存在を確認しよう．

命題 15. 超実数 $^*\mathbb{R}$ は以下を満たす．

1. 任意の正の実数 r よりも小さい正の元 $\epsilon \in {^*\mathbb{R}}$ が存在する (無限小の存在）．
2. 任意の正の実数 r よりも大きい正の元 $\omega \in {^*\mathbb{R}}$ が存在する (無限大の存在）．

証明. $\epsilon = [\{1/n\}_{\mathbb{N}}]_{\mathcal{F}}$, $\omega = [\{n\}_{\mathbb{N}}]_{\mathcal{F}}$ が所望の性質を満たすことをみる．任意の正の実数 r に対し $1/n > r$ となる自然数 n は有限個．よって $\{n|1/n \leq r\} \in \mathcal{F}^{co} \subseteq \mathcal{F}$ なので，ϵ は任意の実数よりも小さい．ω についても同様に示せる． ■

フィルターとイデアル

前節では，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ をノンプリンシパル　ウルトラフィルターが定義する同値関係で割って超実数を構成しました．割って体を構成するとなれば，イデアルで割りたいと思うのが人情です．そこで本説ではフィルターとイデアルの対応関係を明らかにし，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ をある極大イデアルで割って超実数を構成できることをみます．

フィルターはイデアルのもうひとつの姿

各フィルター $\mathcal{F}$ に対してイデアル $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ を対応させるやりかたを考える．イデアルの定める同値関係が，フィルターの定める同値関係と一致するようにイデアルを定めればよいので，写像 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\underset{\mathcal{F}}{\equiv}$ の核を $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ とすれば良さそうだ．式で書くと $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}} := \{\{a_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}|\{n|a_n = 0\} \in \mathcal{F}\}$ となる．実際にこの対応がうまく行くことを確認していく．

定義 16. 2つの写像 $Ideal$, $Filter$ を以下で定義する．
$\mathbb{N}$ 上のプロパーフィルター $\mathcal{F}$ に対して $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}} := \{\{a_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R} | \{n | a_n = 0\} \in \mathcal{F}\}$ を対応させる写像を $Ideal$ とする．

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbb{N}\text{ 上のプロパーフィルター }\} & \xrightarrow{Ideal()} & \{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\text{ の真のイデアル }\} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \mathfrak{a}_{\mathcal{F}} \end{array}$$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の真のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}} := \mathcal{F}^{\mathcal{H}_{\mathfrak{a}}}$ を対応させる写像を $Filter$ とする．ここで $\mathcal{H}_{\mathfrak{a}} := \{\{n \in \mathbb{N} | a_n = 0\}_{\{a_n\}_{\mathbb{N}}} | \{a_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathfrak{a}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ である．

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbb{N}\text{ 上のプロパーフィルター }\} & \xleftarrow{Fiter()} & \{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\text{ の真のイデアル }\} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{F}_{\mathfrak{a}} & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{a} \end{array}$$

フィルター $\mathcal{F}$ に対し $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ がイデアルであること, $\mathcal{F}$ がプロパーのとき $Ideal(\mathcal{F})= \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ が真のイデアルであることは定義に従えば確かめられる．よって写像 $Ideal()$ は well-defined である．つぎの補題より, $\mathcal{F}^{\mathcal{H}_{\mathfrak{a}}} = \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$ すなわち $\mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$ ははじめからフィルターと分かる．よってはじめから $Filter(\mathfrak{a}) := \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$ と定義してよい．また, $\mathfrak{a}$ が真のイデアルのとき, $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ がプロパーとなることも分かる．よって写像 $Filter$ は Well-defined である．

補題 17. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して, $\mathcal{H}_{\mathfrak{a}} := \{\{n \in \mathbb{N} | a_n = 0\}_{\{a_n\}_{\mathbb{N}}} | \{a_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathfrak{a}\} \subseteq \mathcal{P}(I)$ とすると, 次が成立．すなわち $\mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$ はフィルターである．

1. $A, B \in \mathcal{H}_{\mathfrak{a}} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$
2. $A \in \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}, A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$

さらに, $\mathfrak{a}$ が真のイデアルであれば次も成立．

3. $\emptyset \notin \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$

証明. 1.) $A, B \in \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$ のとき, $\{a_n\}_{\mathbb{N}}, \{b_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathfrak{a}$ が存在し, $A = \{n | a_n = 0\}, B = \{n | b_n = 0\}$ である．$\{x_n\}_{\mathbb{N}} = \{a_n\}_{\mathbb{N}} - \{a_n\}_{\mathbb{N}} \times \{b_n^{inv}\}_{\mathbb{N}} \times \{b_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ とすると, $\{x_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathfrak{a}$ かつ $\{n | x_n = 0\} = A \cap B$ である．よって $A \cap B \in \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$．2.3. はとくに難しくない．

■

フィルターとイデアルの対応について, 補題を3つ示す．

補題 18. 次が成立.
$(Filter \circ Ideal)(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$,
$(Ideal \circ Filter)(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$.

証明. 定義に従えば確かめられる. ■

補題 19. 次が成立.

1. $\mathfrak{a}$ が素イデアルのとき, $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ は極大プロパーフィルター (すなわちウルトラフィルター) である.
2. $\mathcal{F}$ が極大プロパーフィルターのとき, $\mathfrak{a}$ は素イデアルである.

(やはり既約っぽさは規約っぽさだったか)

証明. $\{a_n\}_{\mathbb{N}}, \{b_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ に対し, $\{n|a_n = 0\} \cup \{n|b_n = 0\} = \{n|a_n b_n = 0\}$ となることを利用すれば容易. ■

補題 20. 次が成立.

1. $\mathfrak{a}$ がプリンシパル イデアルのとき, $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ はプリンシパル　フィルターである.
2. $\mathcal{F}$ がプリンシパル　フィルターのとき, $\mathfrak{a}$ はプリンシパルイデアルである.

証明. これも定義に従えば確かめられる. ■

以上をまとめて次の命題を得る.

命題 21. 写像 $Filter$ と $Ideal$ は,

1. プロパーフィルターと真のイデアルの間の一対一対応,
2. 極大プロパーフィルターと素イデアルの間の一対一対応,
3. （ノン）プリンシパル極大プロパーフィルターと（ノン）プリンシパル素イデアルの間の一対一対応

を与える.

さらに次の補題はフィルターが定める同値関係, イデアルが定める同値関係の同一性を主張する.

補題 22. フィルターが定める同値関係, イデアルが定める同値関係は同一である.

1. $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を任意のイデアルとする. 任意の $\{a_n\}_{\mathbb{N}}, \{b_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ に対して, " $\{a_n\}_{\mathbb{N}} \underset{\mathfrak{a}}{\sim} \{b_n\}_{\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \{a_n\}_{\mathbb{N}} \underset{\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}}{\equiv} \{b_n\}_{\mathbb{N}}$ " である.
2. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を任意のフィルターとする. 任意の $\{a_n\}_{\mathbb{N}}, \{b_n\}_{\mathbb{N}}$ に対して, " $\{a_n\}_{\mathbb{N}} \underset{\mathcal{F}}{\equiv} \{b_n\}_{\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \{a_n\}_{\mathbb{N}} \underset{\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}}{\sim} \{b_n\}_{\mathbb{N}}$ " である.

証明. 定義に従えば確かめられる. ■

命題 21 3. と補題 22 によって, 超実数の構成として, イデアルで割る方法が可能と分かる. つまり, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ をノンプリンシパルな素イデアルでわったものが超実数になる.

定理 23. ノンプリンシパル素イデアル $\mathfrak{a}$ について, $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\underset{\mathfrak{a}}{\sim}$.

体の加算無限直積の Krull 次元はゼロ (Main Theorem)

ここで超実数の場合よりも少し条件を弱めて, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を極大プロパーフィルターで割ったものを考えよう. それが体になることは, 超実数の場合と同様に確かめられる. 命題 21 2. の対応を用いると, それだけで次の非自明な定理が証明されてしまう. **(つよい)**

定理 24. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ のクルル次元は 0 である. すなわち, $\mathbb{R}$ の任意の素イデアルは極大イデアルである.

証明. $\mathbb{R}$ の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ をとる. 命題 21 の対応により, $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} = Filter(\mathfrak{p})$ は $\mathbb{N}$ 上の極大プロパーフィルターである. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\underset{\mathcal{F}}{\equiv}$ が体であることは, 超実数 $^*\mathbb{R}$ の場合と同様に確かめられる. 補題 22 より $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\underset{\mathcal{F}}{\equiv}$ なので, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{p}$ も体である. したがって, 素イデアル $\mathfrak{p}$ は極大イデアルである. ■

また, 写像 $Fliter$ および $Ideal$ によって極大プロパーフィルターに対応するのは極大イデアルだと分かる. すなわち次の系を得る.

系 25. 写像 $Fliter$ と $Ideal$ は, 極大プロパーフィルターと極大イデアルの間の一対一対応を与える.

ここまでの議論を慎重に見返すと, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を $\mathbb{N}$ 上の極大プロパーフィルターで割って体となることを示すのには, 以下の 2 つの事実しか用いていないことを確かめられる. **(気づいてしまった, , , ウヒョォォォォぉぉっ)**

1. 極大プロパーフィルターの性質
2. $\mathbb{R}$ 上の代数的な演算（代数構造）

ゆえに, 同様の議論で次の命題を示すことができる.

定理 26. K を体とする, $K^{\mathbb{N}}$ のクルル次元はゼロ.

最後までお読みいただき有難うございます。

[1] Robert Goldblatt. *Lectures on the hyperreals: an introduction to nonstandard analysis*, volume 188. Springer Science & Business Media, 2012.