

数学建模

建模过程——写论文

- 1. 理论基础
- 2. 推导过程
- 3. 最终结论
- 4. 通过文字描述，数学公式，图像表格表现

通过查文献以他人成果为基础

赛题类型

- 1.预测类
- 2.评价类
- 3.机理分析类
- 4.优化类

查文献

找数据

数据预处理

1.缺失值

删除

均值或众数插补

Newton插值法（固定公式构造近似函数）

样条插值法（用分段光滑曲线插值）

2.异常值

用正态分布 3σ 原则

画箱型图 普遍适用

3.重复值

数模论文

- 1. 摘要
- 2. 问题重述
- 3. 模型假设和符号说明

4. 模型的建立与求解(最主要内容)

模型=一组公式+公式中每个变量的解释

5. 模型的优缺点与改进方法（不必须）

6. 参考文献和附录

论文排版

公式编辑

word **Mathpix**

表格排版公式

word插入表格

左公式+右域代码(插入-文档部件-域)

word设计-去边框

三线表制作与编号

图片的绘制

最简单：ppt excel **AxGlyph**

编程类：Python **MATLAB**

专业类：CAD（工程制图）

1.流程图 思路图

2.函数关系图

3.物理示意图

分页符

word插入-分页(选项-显示-空格)

层次分析法模型

主要用于解决评价类问题

1.评价的目标

2.为达到这个目标有哪几种可选方案

3.评价的准则或指标(根据什么评价好坏)

方法思想

两两比较指标

一、分析系统中各因素之间的关系，建立系统的递阶层次结构

层次结构图

1.用ppt中SmartArt生成（开始-提高列表等级）

2.专业软件：**亿图图示**

二、构造判断矩阵

目标层 Objective

准则层 Criterion

方案层 Plan

选择旅游目的地 (O)

景色 (C1) 花费 (C2) 居住 (C3) 饮食 (C4) 交通 (C5)

苏杭 (P1) 北戴河 (P2) 桂林 (P3)

	P1	P2	P3
P1	1	2	4
P2	1/2	1	2
P3	1/4	1/2	1

判断矩阵 C2-P

	P1	P2	P3
P1	1	1/3	1/8
P2	3	1	1/3
P3	8	3	1

判断矩阵 C3-P

	P1	P2	P3
P1	1	1	3
P2	1	1	3
P3	1/3	1/3	1

判断矩阵 C4-P

	P1	P2	P3
P1	1	3	4
P2	1/3	1	1
P3	1/4	1	1

判断矩阵 C5-P

	P1	P2	P3
P1	1	1	1/4
P2	1	1	1/4
P3	4	4	1

准则层—方案层的判断矩阵的数值要结合实际来填写，如果题目中有其他数据，可以考虑利用这些数据进行计算。

例如：有一个指标是交通安全程度，现在要比较开放小区、半开放小区和封闭小区，而且你收集到了这些小区车流量的数据，那么就可以根据这个数据进行换算作为你的判断矩阵。

三、由判断矩阵计算被比较元素对于该准则的相对权重，并进行一致性检验

三种方法都使用——显得稳健

CR大于0.1怎么办——往一致矩阵上调整

四、计算各层元素对系统目标的合成权重，并进行排序

判断矩阵

此方法中构造的矩阵均为**正互反矩阵**

	景色	花费	居住	饮食	交通
景色	1	1/2	4	3	3
花费	2	1	7	5	5
居住	1/4	1/7	1	1/2	1/3
饮食	1/3	1/5	2	1	1
交通	1/3	1/5	3	1	1

标度	含义
1	同样重要性
3	稍微重要
5	明显重要
7	强烈重要
9	极端重要
2, 4, 6, 8	上述两相邻判断的中值
倒数	A和B相比如果标度为3, 那么B和A相比就是1/3

总结：上面这个表是一个 5×5 的方阵，我们记为A，对应的元素为 a_{ij} 。
这个方阵有如下特点：

- (1) a_{ij} 表示的意义是，与指标 j 相比， i 的重要程度。
- (2) 当 $i = j$ 时，两个指标相同，因此同等重要记为1，这就解释了主对角线元素为1。
- (3) $a_{ij} > 0$ 且满足 $a_{ij} \times a_{ji} = 1$ （我们称满足这一条件的矩阵为**正互反矩阵**）

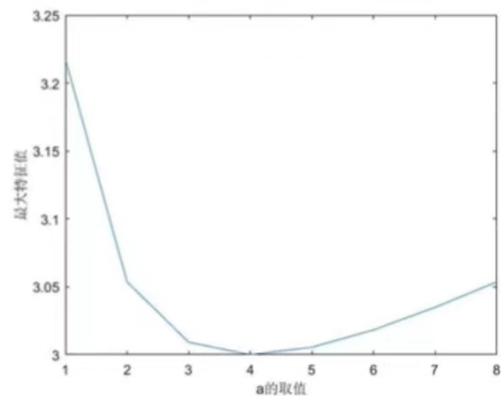
一致矩阵

若正互反矩阵（判断矩阵）满足 $a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$ ，则我们称其为**一致矩阵**。

引理: n 阶正互反矩阵 A 为一致矩阵时当且仅当最大特征值 $\lambda_{\max} = n$ 。

且当正互反矩阵 A 非一致时，一定满足 $\lambda_{\max} > n$ 。

景色	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	2	a
北戴河	1/2	1	2
桂林	$1/a$	1/2	1



判断矩阵越不一致时，最大特征值与 n 相差就越大。

$$a_{ij} = \frac{i \text{ 的重要程度}}{j \text{ 的重要程度}}, \quad a_{jk} = \frac{j \text{ 的重要程度}}{k \text{ 的重要程度}}$$

$$a_{ik} = \frac{i \text{ 的重要程度}}{k \text{ 的重要程度}} = a_{ij} \times a_{jk}$$

一致性检验的步骤

在使用判断矩阵求权重前必须对其进行一致性检验

第一步：计算**一致性指标CI**

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

第二步：查找对应的**平均随机一致性指标RI**

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

注：在实际运用中， n 很少超过10，如果指标的个数大于10，则可考虑建立二级指标体系

第三步：计算**一致性比例CR**

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

如果 $CR < 0.1$ ，则可认为判断矩阵的一致性可以接受；否则需要对判断矩阵进行修正。

一致性指标 $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$, 一致性比例 $CR = \frac{CI}{RI} \begin{cases} < 0.1, \text{判断矩阵一致} \\ \geq 0.1, \text{判断矩阵不一致} \end{cases}$

(1) 平均随机一致性指标RI怎么计算来的?

RI 的值是这样得到的, 用随机方法构造 500 个样本矩阵: 随机地从 1~9 及其倒数中抽取数字构造正互反矩阵, 求得最大特征根的平均值 λ'_{\max} , 并定义

$$RI = \frac{\lambda'_{\max} - n}{n - 1}.$$

(2) 为什么要这样构造CI, 为什么要以0.1为划分依据?

大家有兴趣的话可以去查看作者的原论文, 作者是通过多次蒙特卡罗模拟得到的最佳的方案。

一致矩阵计算权重

权重一定要进行归一化处理

判断矩阵计算权重

方法一: 算术平均法

1. 将判断矩阵按照列归一化 (每一个元素除以其所在列的和)
2. 将归一化的各列相加
3. 将相加得到的向量中每个元素除以n得到权重向量

假设判断矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$

那么算术平均法求得的权重向量 $\omega_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{kj}} \quad (\omega \text{ 读作 } \textit{omega})$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

方法二: 几何平均法

第一步: 将A的元素按照行相乘得到一个新的列向量

第二步: 将新的向量的每个分量开n次方

第三步: 对该列向量进行归一化即可得到权重向量

假设判断矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$

那么几何平均法求得的权重向量 $\omega_i = \frac{(\prod_{j=1}^n a_{ij})^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^n (\prod_{j=1}^n a_{kj})^{\frac{1}{n}}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

方法三：特征值法

一致矩阵有一个特征值为 n ，其余特征值均为0。

另外，我们很容易得到，特征值为 n 时，对应的特征向量刚好为 $k[\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{12}}, \dots, \frac{1}{a_{1n}}]^T (k \neq 0)$

这一特征向量刚好就是一致矩阵的第一列。

景色	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	2	4
北戴河	1/2	1	2
桂林	1/4	1/2	1

注意，权重一定要进行归一化处理：

$$\text{苏杭} = 1 / (1 + 0.5 + 0.25)$$

$$\text{北戴河} = 0.5 / (1 + 0.5 + 0.25)$$

$$\text{桂林} = 0.25 / (1 + 0.5 + 0.25)$$

假设判断矩阵的一致性可以接受

1. 求出矩阵A的**最大特征值**以及其对应的**特征值向量**

2. 对求出的特征向量进行**归一化处理**得到权重

用MATLAB求

汇总结果得到权重矩阵

用权重矩阵计算得分

用excel算（选中单元格代号按f4锁定）

将计算结果填入权重表

层次分析法的局限性

1. 评价的决策层不能太多，否则判断矩阵和一致矩阵差异可能会很大

2. 如果决策层中的指标的数据是一致的，则不适合使用该模型

MATLAB基本界面和操作

.....to be continue

线性规划模型基本原理与编程实现

目标函数及约束条件均为线性函数

线性规划问题通常是在一组线性约束条件限制下，求一线性目标函数最大或最小的问题

选择适当的决策变量

.....to be continue

