



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ  
КАФЕДРА СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Бачин Д.А  
**Лабораторная работа 3**

ОТЧЁТ ПО ПРАКТИКУМУ

**Научный руководитель:**  
доцент, к.ф.-м.н.  
Точилин Павел Александрович

Москва, 2022

## Оглавление

|   |                                           |   |
|---|-------------------------------------------|---|
| 1 | Постановка задачи . . . . .               | 3 |
| 2 | Вычисление преобразований Фурье . . . . . | 4 |
| 3 | Эффект наложения спектра . . . . .        | 5 |
| 4 | Рябь . . . . .                            | 7 |

# 1. Постановка задачи

Получить аппроксимацию преобразования Фурье  $F(\lambda)$  при помощи быстрого преобразования Фурье (FFT) для функций:

$$1) f_1(t) = e^{-3|t|} \sin^3(t)$$

$$2) f_2(t) = \frac{\sin(t) - t \cos(t)}{t^2}$$

$$3) f_3(t) = \frac{\cos(t)}{1+|t|^3}$$

$$4) f_4(t) = e^{-5t^8} \sin(t + t^3)$$

Построить графики  $F(\lambda)$ . Вычислить  $F(\lambda)$  в явном виде для  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  сравнить графики из аналитического представления и из аппроксимации через БПФ. Проиллюстрировать эффект наложения спектра и ряби. Проиллюстрировать устранение эффекта наложения спектра и ряби.

## 2. Вычисление преобразований Фурье

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\lambda} dt$$

Вычислим преобразование Фурье для функции  $f_1(t)$ :

$$\sin^3(t) = \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t)) \Rightarrow f_1(t) = \frac{1}{4}(g(t) - h(t))$$

$$g(t) = 3e^{-3|t|}\sin(t)$$

$$h(t) = 3e^{-3|t|}\sin(3t)$$

$$f(t)\sin(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{F(\lambda - \frac{a}{2\pi}) - F(\lambda + \frac{a}{2\pi})}{2i} \Rightarrow G(\lambda) = \frac{3}{2i}(\widehat{G}(\lambda - \frac{1}{2\pi i}) - \widehat{G}(\lambda + \frac{1}{2\pi i})),$$

$$e^{-3|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{G}(\lambda), \widehat{G}(\lambda) = \frac{6}{9+4\pi^2\lambda^2} \Rightarrow G(\lambda) = \frac{9}{i} \left[ \frac{1}{9+(1-2\pi\lambda)^2} - \frac{1}{9+(1+2\pi\lambda)^2} \right]$$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\lambda) = \frac{\widehat{G}(\lambda - \frac{3}{2\pi i}) - \widehat{G}(\lambda + \frac{3}{2\pi i})}{2i} \Rightarrow H(\lambda) = \frac{3}{i} \left( \frac{1}{9+(3-2\pi\lambda)^2} - \frac{1}{9+(3+2\pi\lambda)^2} \right)$$

$$F_1(\lambda) = \frac{9}{4i} \left[ \frac{1}{9+(1-2\pi\lambda)^2} - \frac{1}{9+(1+2\pi\lambda)^2} - \frac{3}{9+(3-2\pi\lambda)^2} + \frac{3}{9+(3+2\pi\lambda)^2} \right]$$

Вычислим преобразование Фурье для функции  $f_2(t)$ :

$$f_2(t) = \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{t^2}\sin(t) - \frac{1}{t}\cos(t) = g(t)\sin(t) - h(t)\cos(t)$$

$$g(t)\sin(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{G(\lambda - \frac{1}{2\pi}) - G(\lambda + \frac{1}{2\pi})}{2i}, h(t)\cos(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{H(\lambda - \frac{1}{2\pi}) + H(\lambda + \frac{1}{2\pi})}{2}$$

$$G(\lambda) = -2\pi^2\lambda\text{sign}(\lambda), H(\lambda) = -i\pi\text{sign}(\lambda) \Rightarrow$$

$$F_2(\lambda) = -\frac{\pi^2}{i} \left[ \left(\lambda - \frac{1}{2\pi}\right)\text{sign}\left(\lambda - \frac{1}{2\pi}\right) - \left(\lambda + \frac{1}{2\pi}\right)\text{sign}\left(\lambda + \frac{1}{2\pi}\right) \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{i\pi}{2} \left[ \text{sign}\left(\lambda - \frac{1}{2\pi}\right) + \text{sign}\left(\lambda + \frac{1}{2\pi}\right) \right]$$

$$\Rightarrow F_2(\lambda) = i\pi^2\lambda [\text{sign}(1 - 2\pi\lambda) + \text{sign}(1 + 2\pi\lambda)]$$

### 3. Эффект наложения спектра

Наложение спектра возникает из-за конечной длины выборки сигнала. Если частота Найквиста  $\lambda_N$  на выбранной сетке меньше верхней границы спектральной полосы  $\lambda_{max}$ , то по спектру  $F_{\Delta t}(\lambda)$  дискретной функции невозможно восстановить спектр  $F(\lambda)$  функции непрерывного аргумента:

$F(\lambda) \neq F_{\Delta t}(\lambda)H(\lambda)$  при  $\lambda_N \neq \lambda_{max}$ , где  $H(\lambda)$  — оконная функция. В этом случае в сумме периодов спектра перекрываются слагаемые  $F(\lambda - \frac{k}{\Delta x})$  и наложение окна на спектр не позволяет получить без погрешностей спектр функции непрерывного аргумента.

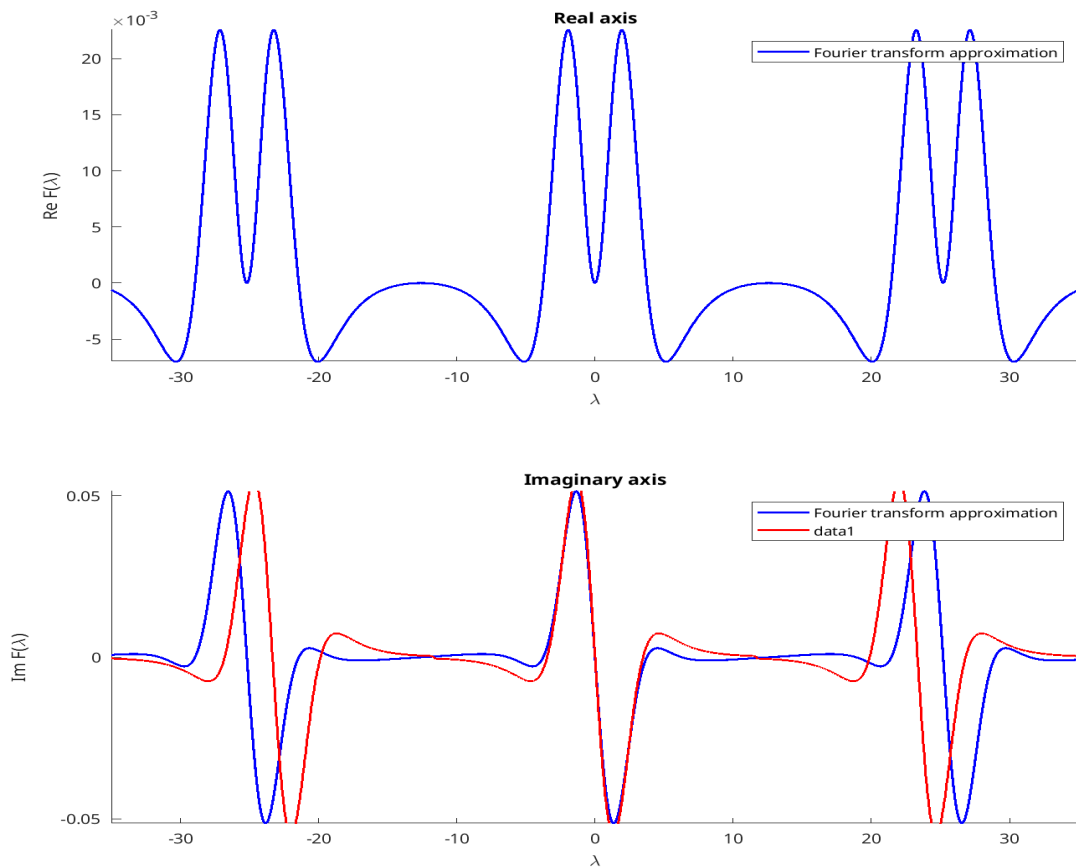
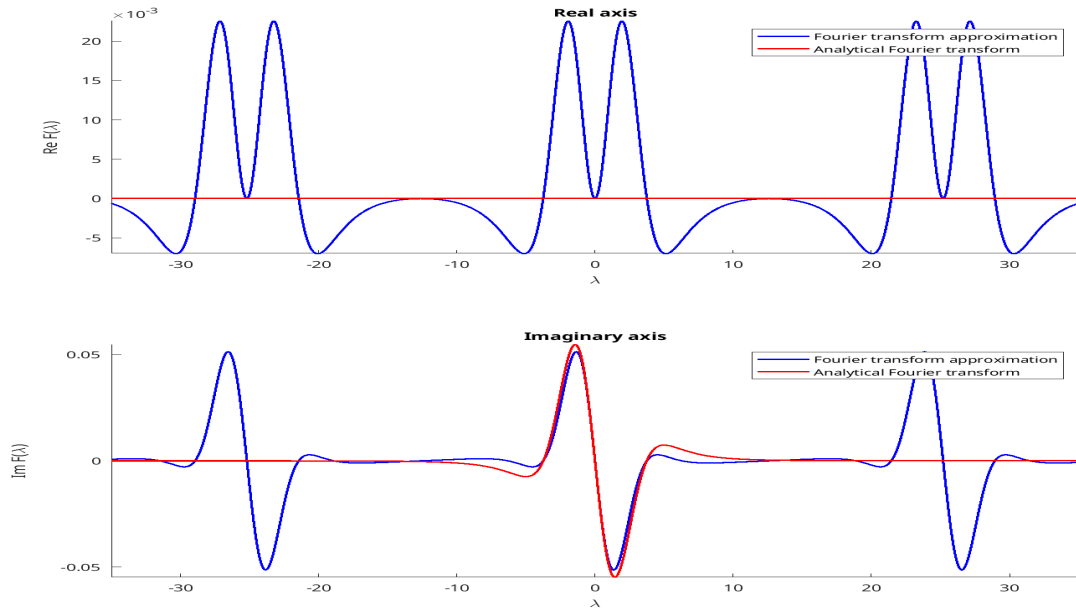
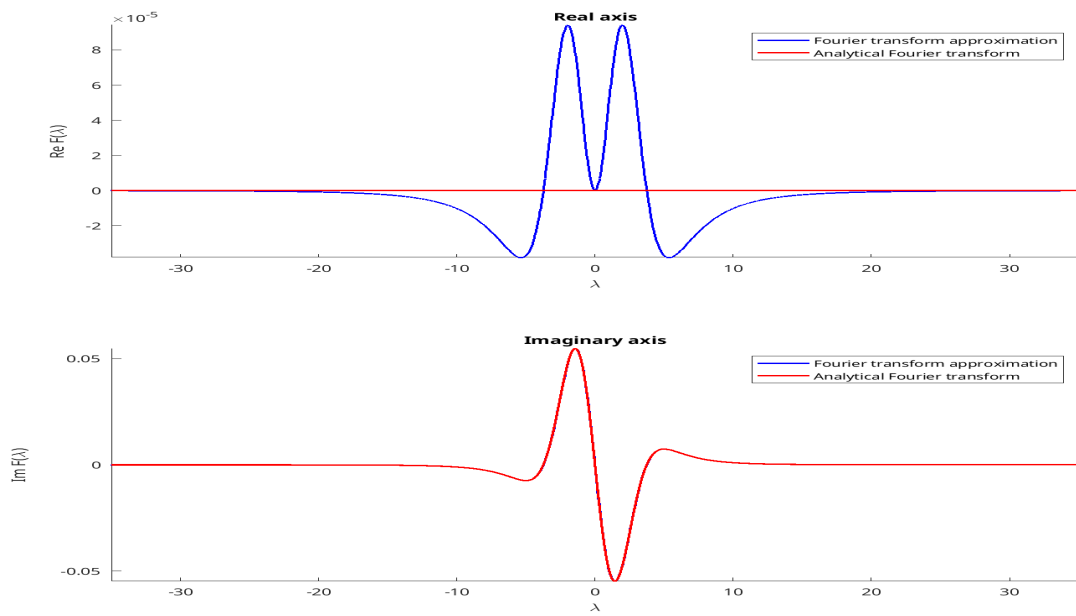


Рис. 1.  $T = 100, \Delta t = 0.25$

Рис. 2.  $T = 100, \Delta t = 0.25$ Рис. 3.  $T = 500, \Delta t = 10^{-3}$

## 4. Рябь

Рябь возникает из-за усечения сигнала во временной области. Устранить этот эффект нельзя, но можно минимизировать, увеличивая временную область  $[a, b]$  или частоту дискретизации сигнала.

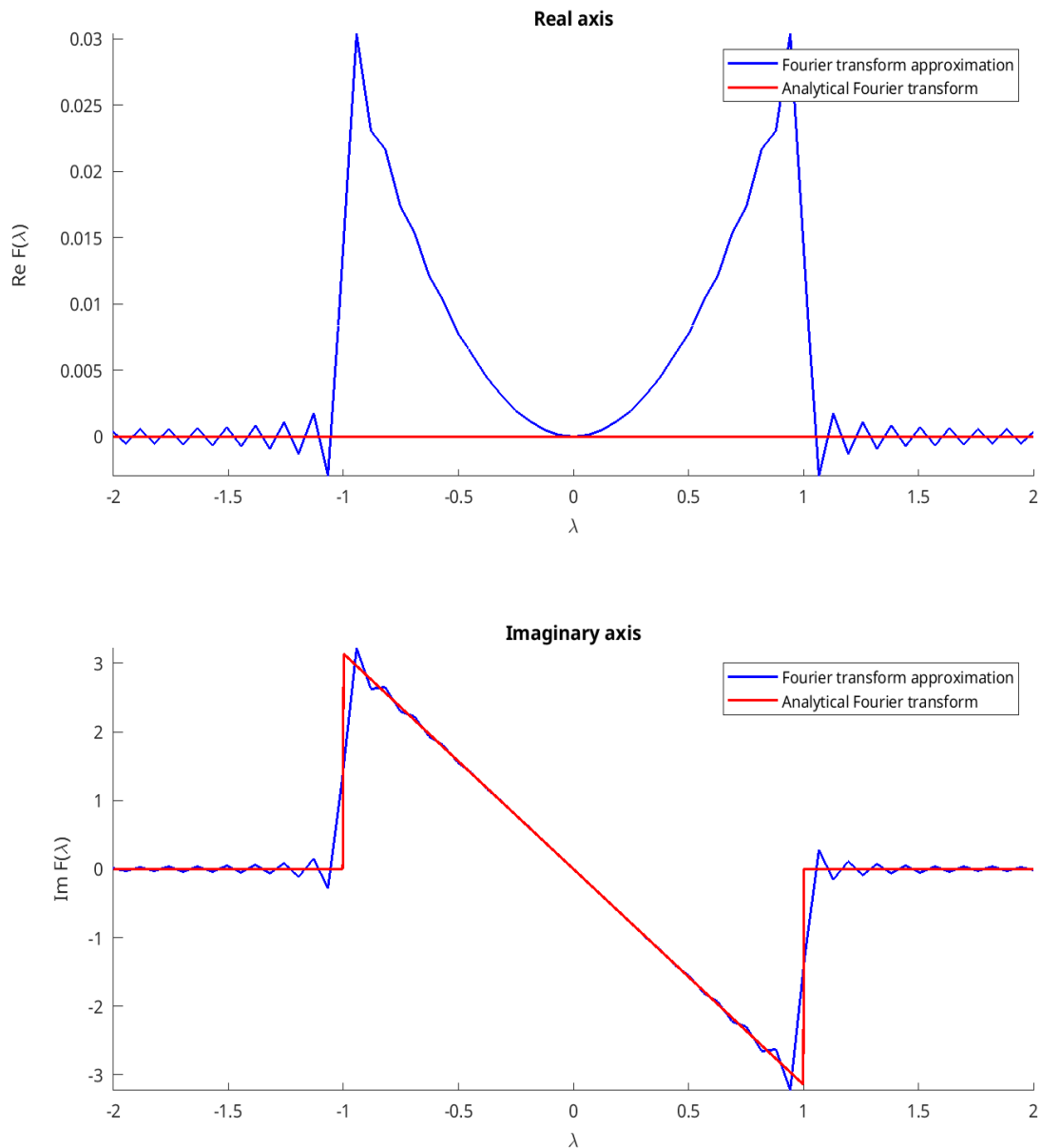


Рис. 4.  $T = 100, \Delta t = 0.05, t \in [-50; 50]$

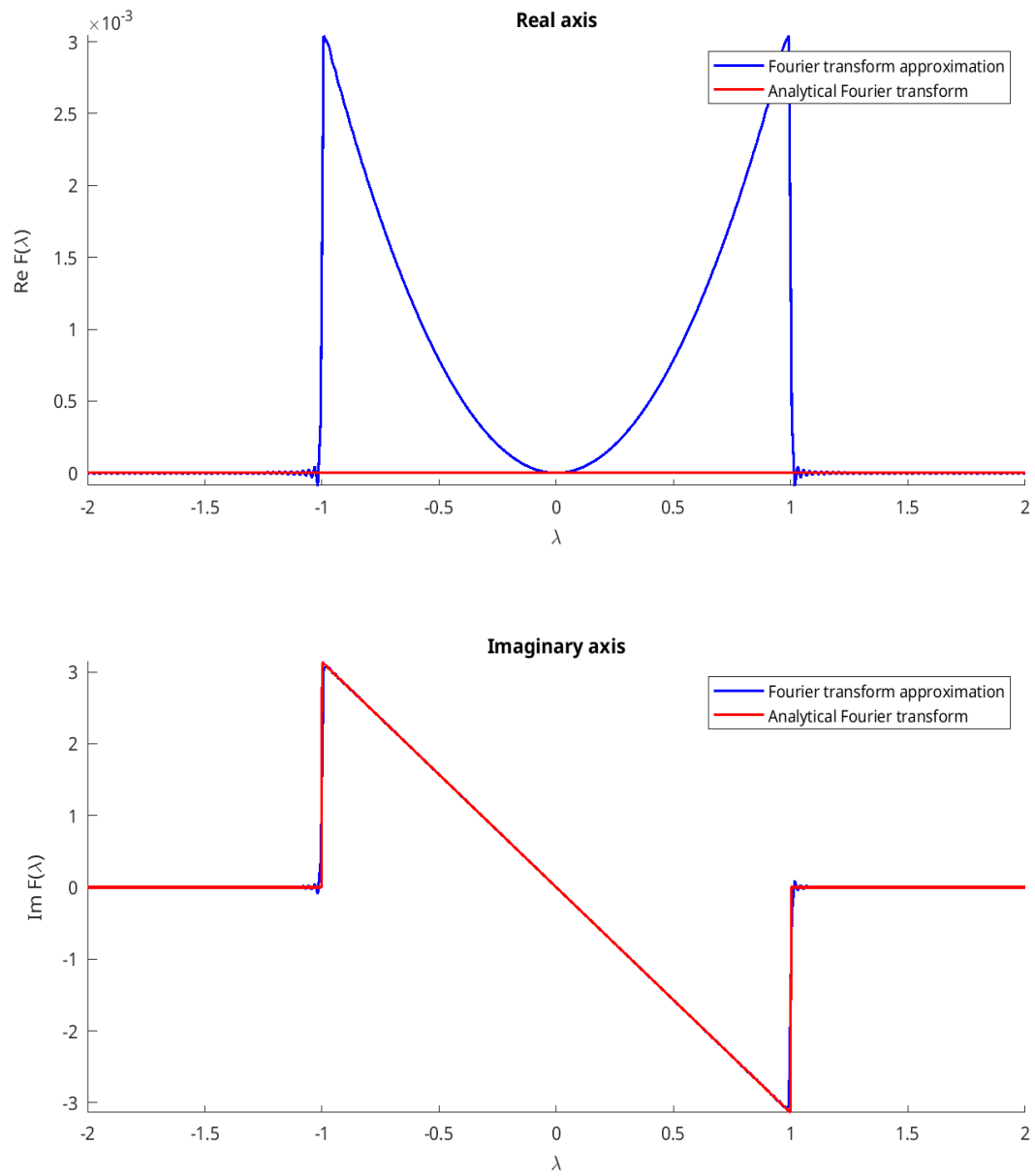


Рис. 5.  $T = 500, \Delta t = 10^{-3}, t \in [-250; 250]$