STK1110 Øving 1

Sigbjørn L. Foss

September 16, 2021

Oppgave 1

a)

Den momentgenererende funksjonen til normalfordelingen er

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Vi kan substituere for X for å finne første - og andremoment til log-normalfordelingen,

$$\begin{aligned} E(e^{tY}) &= E(e^{tY}) \\ &= E(e^{t\ln X}) \\ &= E(X^t), \end{aligned}$$

altså er det t-te momentet til log-normalfordelingen gitt ved

$$E(X^t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2},$$

og

$$E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2},$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= e^{2\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 4}, \\ &= e^{2\mu + 2\sigma^2}. \end{aligned}$$

b)

Det første og andre empiriske momententet er gitt ved

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ \text{ og } \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Lar $A = \sum_{i=1}^n X_i$ og $B = \sum_{i=1}^n X_i^2$ for enklere notasjon. Likhet mellom empirisk of teoretisk moment gir likningene

$$\frac{1}{n}A = e^{\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma^2}} \quad , \quad \frac{1}{n}B = e^{2\hat{\mu} + 2\hat{\sigma^2}},$$

eller

$$(1) \ \ln\frac{A}{n} = \hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma^2} \quad , \quad (2) \ \ln\frac{B}{n} = 2\hat{\mu} + 2\hat{\sigma^2}.$$

(2) - 2(1) gir

$$\begin{aligned} \ln\frac{B}{n} - 2\ln\frac{A}{n} &= \widehat{\sigma^2} \\ \widehat{\sigma^2}_{\text{MOM}} &= \ln\frac{B/n}{(A/n)^2} \\ &= \ln\left[n\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}\right]. \end{aligned}$$

Setter inn i (1),

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu}_{\text{MOM}} &= \frac{1}{2}\ln\frac{B}{n} - \ln\left(n\frac{B}{A^2}\right) \\
&= \ln\frac{(B/n)^{1/2}}{nB/A^2} \\
&= \ln\left(\frac{1}{n^{3/2}}\frac{A^2}{B^{1/2}}\right) \\
&= \ln\left[\frac{1}{n^{3/2}}\frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2}}\right].
\end{aligned}
$$

Løser med R og finner

$$
\widehat{\sigma^2}_{\text{MOM}} = 0.89 \ , \ \widehat{\mu}_{\text{MOM}} = 2.74.
$$

c)

Sannsynlighetstetthetsfunksjonen til log-normalfordelingen er

$$
f(X;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma X}e^{-\frac{(\ln X-\mu)^2}{2\sigma^2}},
$$

og likelihood-funksjonen er dermed

$$
f(X_1,...,X_n;\mu,\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i}e^{-\frac{(\ln X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},
$$

siden $X_1,...,X_n$ er uavhengige og identisk fordelt. Log-likelihooden er

$$
\begin{aligned}
\ln\left[f(X_1,...,X_n;\mu,\sigma^2)\right] &= n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) + \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{1}{X_i}e^{-\frac{(\ln X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\
&= n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) + \sum_{i=1}^n \ln\frac{1}{X_i} - \sum_{i=1}^n \frac{(\ln X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}.
\end{aligned}
$$

Deriverer mhp. σ,

$$
\frac{\partial(\ln f)}{\partial\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \mu)^2,
$$

og μ,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\ln f)}{\partial\mu} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \mu). \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n (\ln X_i) - n\mu\right]
\end{aligned}
$$

Setter lik null og løser,

$$\widehat{\mu}_{\text{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \ \ , \ \ \widehat{\sigma^2}_{\text{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\ln X_i - \mu)^2 \, .$$

Vi trenger altså et estimat for μ for å finne $\widehat{\sigma^2}_{\text{MLE}}$, men vi kan finne $\widehat{\mu}_{\text{MLE}}$ først, og bruke det som estimat. Regner ut i R, og finner

$$\widehat{\sigma^2}_{\text{MLE}} = 0.77 \ \ , \ \ \widehat{\mu}_{\text{MLE}} = 2.78.$$

d)

MLE-estimatoren for μ til normalfordelingen er

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}^{\mathcal{N}}_{\text{MLE}} &= \overline{Y} \\
&= \frac{1}{n}\sum_i Y_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_i \ln X_i \\
&= \widehat{\mu}_{\text{MLE}}.
\end{aligned}$$

På samme måte kan vi finne MLE-estimatoren til σ^2,

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma^2}^{\mathcal{N}}_{\text{MLE}} &= \frac{1}{n}\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_i (\ln X_i - \mu)^2 \\
&= \widehat{\sigma^2}_{\text{MLE}}
\end{aligned}$$

e)

Vi har allerede funne de første partiellderiverte til logaritmen til tetthets-funksjonen mhp. μ. Vi må finne den partiellderiverte mhp. σ^2, siden vi nå ikke bare trenger nullpunktet. Finner de andrederiverte,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\ln f)}{\partial(\sigma^2)} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left[\sum_i (\ln X_i) - n\mu\right], \\
\frac{\partial^2(\ln f)}{(\partial\sigma^2)^2} &= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\left[\sum_i (\ln X_i) - n\mu\right], \\
\frac{\partial^2(\ln f)}{\partial\mu^2} &= -\frac{n}{\sigma^2}, \\
\frac{\partial^2(\ln f)}{\partial\mu\partial(\sigma^2)} = \frac{\partial^2(\ln f)}{\partial(\sigma^2)\partial\mu} &= -\frac{1}{\sigma^4}\left[\sum_i (\ln X_i) - n\mu\right].
\end{aligned}$$

Siden $Y_i = \ln X_i$ er uif er

$$\mathrm{E}\left(\sum_i (\ln X_i)\right) = n\mu,$$

og

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2(\ln f)}{\partial\mu\partial(\sigma^2)}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2(\ln f)}{\partial(\sigma^2)\partial\mu}\right) = 0.$$

Når vi tar forventingen til den andrederiverte mhp. σ^2 forsvinner summeleddet av samme grunn som ovenfor, og vi finner

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2(\ln f)}{(\partial\sigma^2)^2}\right) = \frac{n}{2\sigma^4} \quad , \quad \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2(\ln f)}{\partial\mu^2}\right) = -\frac{n}{\sigma^2}.$$

For én observasjon blir dermed informasjonsmatrisen

$$\mathbf{I}(\mu, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

Bruker den oppgitte matrisen siden svaret mitt inneholder en fortegnsfeil.

Standardfeilen til parameter θ_i er gitt ved

$$\mathrm{SE}(\theta_i) = \sqrt{\mathbf{I}_{ii}^{-1}}.$$

Siden $\mathbf{I}_{ii}$ er diagonal, finner vi standardfeilene ved,

$$\mathrm{SE}(\mu) = \sigma,$$

og

$$\mathrm{SE}(\sigma^2) = \sqrt{2}\sigma^2.$$

Finner ML-estimatene i R,

$$\mathrm{SE}(\widehat{\sigma^2}_{\mathrm{MLE}}) = \sqrt{2}\widehat{\sigma^2}_{\mathrm{MLE}} = 1.08,$$

$$\mathrm{SE}(\widehat{\mu}_{\mathrm{MLE}}) = \sqrt{\widehat{\sigma^2}_{\mathrm{MLE}}} = 0.87.$$

f)

Bootstrap-estimatene av standarfeilen til de to parametrene er betydelig mindre enn de tilsvarende estimatene fra (e),

$$\mathrm{SE}_{\mathrm{Bootstrap}}(\widehat{\sigma^2}_{\mathrm{MLE}}) = 2.3 \cdot 10^{-4},$$

$$\mathrm{SE}_{\mathrm{Bootstrap}}(\widehat{\mu}_{\mathrm{MLE}}) = 1.3 \cdot 10^{-4}.$$

g)

Siden $\theta(\mu, \sigma^2)$ er entydig for $\sigma \geq 0$ har vi

$$\widehat{\phi}_{\text{MLE}} = \mathrm{e}^{\widehat{\mu}_{\text{MLE}} + \widehat{\sigma^2}_{\text{MLE}}}.$$

Regner ut i R og finner $\widehat{\phi}_{\text{MLE}} = 23.69$, og $\overline{X} = 24.14$.

Oppgave 2

a)

Her vi valget mellom å finne variansen og forventningsverdien direkte, eller ved å regne ut momentene. Jeg valge å bruke momentene, noe som i ettertid viste seg å være et feilsteg. Finner den momentgenererende funksjonen,

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(X) dX.$$

Siden $f(X)$ er null utenfor intervallet $[0, \theta]$, har vi

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^\theta \frac{e^{tX}}{\theta} dx \\ &= \frac{1}{\theta t}\left(e^{\theta t} - 1\right). \end{aligned}$$

Deriverer $M_X(t)$ for å finne $E(X)$,

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= \frac{1}{\theta t^2}\left(1 - e^{\theta t}\right) + \frac{e^{\theta t}}{t} \\ &= \frac{1 - e^{\theta t} + \theta t e^{\theta t}}{\theta t^2}. \end{aligned}$$

Vi må ta grensen for å evaluere $M_X'(t)$ i $t = 0$,

$$\begin{aligned} E(X) = \lim_{t \to 0} M_X'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{\theta t} + \theta t e^{\theta t}}{\theta t^2} \\ = \lim_{t \to 0} \frac{-\theta e^{\theta t} + \theta e^{\theta t} \theta^2 t e^{\theta t}}{2\theta t} \\ = \lim_{t \to 0} \frac{\theta^2 t e^{\theta t}}{2\theta t} = \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Finner andremomentet,

$$M_X''(t) = \frac{-2 + 2e^{\theta t} - 2\theta e^{\theta t} - 2\theta t e^{\theta t} + \theta^2 t^2 e^{\theta t}}{\theta t^3}.$$

Tar vi grensen $t \to 0$ finner vi, etter noe regning, at

$$E(X^2) = \lim_{t\to 0} \frac{\theta^3 t^2 e^{\theta t}}{3\theta t^2} = \frac{\theta^2}{3}.$$

Variansen er dermed

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{12}$$

b)

Setter førstemomentet lik det første empiriske momentet,

$$\frac{\theta}{2} = \overline{X},$$
$$\hat{\theta} = 2\overline{X}.$$

Estimatoren er forventningsrett, siden

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta} - \theta) &= E(\hat{\theta} - \theta) \\ &= 2E(\overline{X}) - \theta \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}\theta - \theta = 0. \end{aligned}$$

c)

Vi kan regne ut variansen direkte,

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta}) &= V(2\overline{X}) \\ &= 4V\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) \\ &= \frac{4}{n^2}\sum_i V(X_i), \end{aligned}$$

siden X_i er uif. Vi fant variansen til X_i tidligere,

$$V(\hat{\theta}) = \frac{4}{n^2} n \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

Standardfeilen er dermed

$$\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{V(\hat{\theta})} = \frac{\theta}{\sqrt{3n}}.$$

d)

Siden $\{X_i\}$ er uif, er likelihooden gitt ved

$$f(X_1, ..., X_n; \theta) = \prod_i f(X_i; \theta).$$

Hvis én av faktorene er null, blir likelihooden null, altså har vi

$$f(X_1, ..., X_n; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \leq X_1, ..., X_n \leq \theta \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi ønsker en så liten verdi av θ som mulig. Den minste verdien θ kan ha uten at likelihooden er null, må være den høyeste verdien til X, altså er ML-estimatet av θ gitt ved

$$\hat{\theta}_{\text{mle}} = \sup_i (X_i).$$

e)

Skjevheten til $\tilde{\theta}$ er

$$\begin{aligned} E(\tilde{\theta} - \theta) & \\ &= E(\tilde{\theta}) - \theta \\ &= \frac{n+1}{n} E(\hat{\theta}_{\text{mle}}) - \theta \\ &= \frac{n+1}{n} \frac{n}{n+1} \theta - \theta = 0, \end{aligned}$$

altså er $\tilde{\theta}$ forventningsrett. Finner andremomentet til $\tilde{\theta}$,

$$\begin{aligned} E(\tilde{\theta}^2) &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 E(\hat{\theta}^2_{\text{mle}}) \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{n}{n+2} \theta^2 \\ &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \theta^2. \end{aligned}$$

Variansen er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} V(\tilde{\theta}) &= E(\tilde{\theta^2}) - E^2(\tilde{\theta}) \\ &= \theta^2 \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} - 1 \right] \\ &= \theta^2 \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{n(n+2)} \\ &= \frac{\theta^2}{n(n+1)}, \end{aligned}$$

og standardfeilen er

$$\text{SE}(\tilde{\theta}) = \frac{\theta}{\sqrt{n(n+2)}}$$

f)

Begge estimatorene er forventningsrette, men $\tilde{\theta} \propto n(n+2)^{-1/2}$ og $\hat{\theta}_{\text{mom}} \propto n^{-1/2}$. Standardfeilen til $\tilde{\theta}$ er dermed lavere for $n > 1$ og $\tilde{\theta}$ burde foretrekkes.

e)

Trekker 20 simulerte observasjoner fra en uniform fordeling med $\theta = 1$, regner ut $\tilde{\theta}$ og $\hat{\theta}_{\text{mom}}$ og gjentar 2000 ganger. Resultatet vises i figur 1. Det modifiserte ML- estimatet gir langt flere nøyaktige estimater, og estimerer aldri $\theta > 1$.

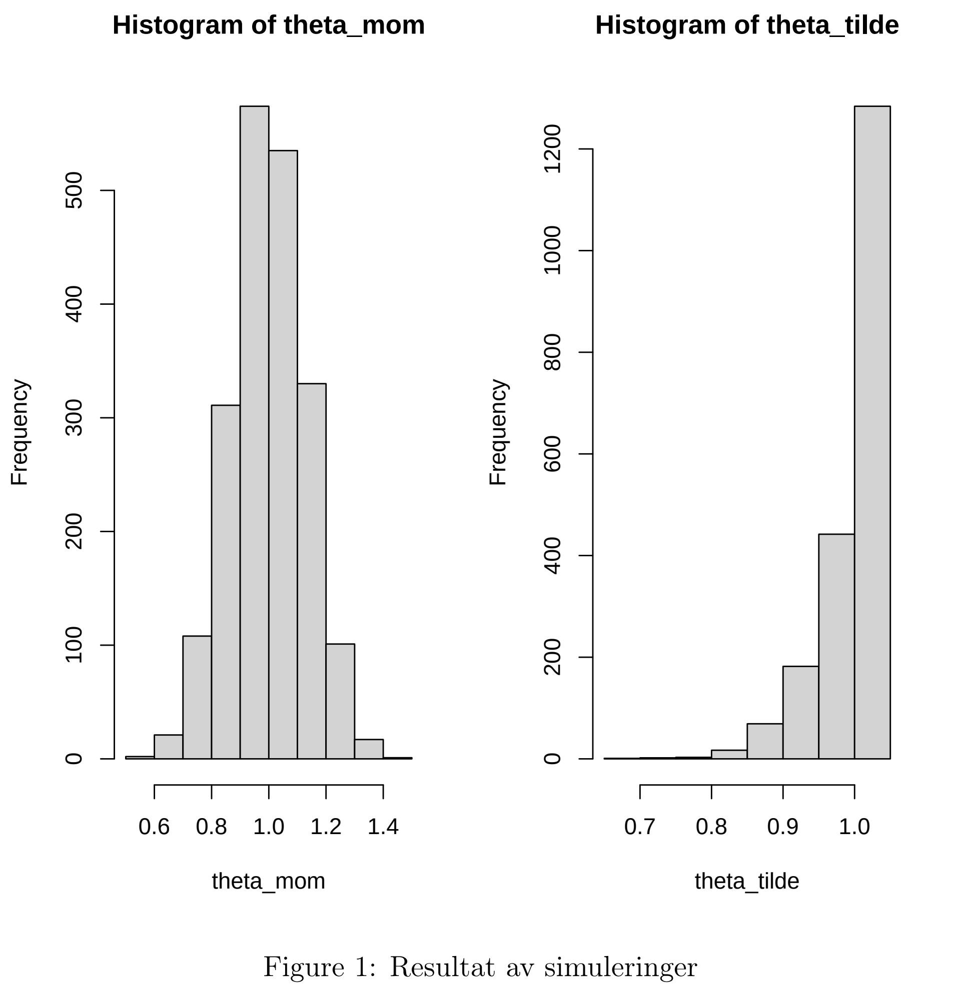

Figure 1: Resultat av simuleringer