Correction Baccalauréat de Mathématiques
Sujet 1 Métropole – 2023

Lien vers le corrigé en vidéo : https://youtu.be/Cxay3bEu0vg

Exercice 1 :

Avant de commencer l'exercice, notons les informations qui nous sont données. Nous notons G l'évènement « la machine est sous garantie » et D l'évènement « la machine est défectueuse ».

D'après l'énoncé, nous savons que 20% des machines sont sous garanties, que 0.2% des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie et que 8.2% des machines sont défectueuses. Nous avons donc :

- $p(G) = 0{,}2$
- $p(G \cap D) = 0{,}002$
- $p(D) = 0{,}082$

1)
Rappel de cours :
Soit A et B deux évènements. On suppose l'évènement B de probabilité non nulle. La probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est notée $p_B(A)$. Elle s'exprime comme suit :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} p_G(D) &= \frac{p(G \cap D)}{p(G)} \\ &= \frac{0{,}002}{0{,}2} \\ &= 0{,}01 \end{aligned}$$

La bonne réponse est donc la réponse b).

2)
Rappel de cours :
Nous notons $A_1, A_2, \dots, A_n$ n évènements tels que :

- Tout évènement A_i a une probabilité non nulle ($p(A_i) > 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$).
- Les évènements sont deux à deux incompatibles, ce qui veut dire que pour tout $i \neq j$, avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Cela se réécrit aussi $p(A_i \cap A_j) = 0$
- La réunion de tous ces évènements est l'ensemble des cas possibles de l'univers Ω ($\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$)

Ainsi, pour tout évènement B, nous avons :
$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)$$

D'après la formule des probabilités totales, nous avons :

$$p(D) = p(D \cap G) + p(D \cap \overline{G})$$

Par conséquent, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} p(D \cap \overline{G}) &= p(D) - p(D \cap G) \\ &= 0{,}082 - 0{,}002 \\ &= 0{,}08 \end{aligned}$$

La bonne réponse est donc la réponse b).

3) Nous cherchons la probabilité que la machine soit sous garantie tout en sachant que la machine est défectueuse. Cela revient à calculer $p_D(G)$. Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} p_D(G) &= \frac{p(G \cap D)}{p(D)} \\ &= \frac{0{,}002}{0{,}082} \\ &= \frac{1}{41} \\ &\approx 0{,}024 \end{aligned}$$

La bonne réponse est donc la réponse b).

A présent, la variable aléatoire X suit une loi binômiale de paramètre n et $p = 0{,}082$.

Rappel de cours : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p. Alors, pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

4) Calculer $p(X > 2)$ est équivalent au fait de calculer $1 - p(X \leq 2)$. Or,

$$\begin{aligned} p(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{50}{0} 0{,}082^0 \times 0{,}918^{50-0} + \binom{50}{1} 0{,}082^1 \times 0{,}918^{50-1} + \binom{50}{2} 0{,}082^2 \times 0{,}918^{50-2} \\ &\approx 0{,}0139 + 0{,}0620 + 0{,}1356 \\ &\approx 0{,}2115 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} p(X > 2) &= 1 - p(X \leq 2) \\ &\approx 1 - 0{,}2115 \\ &\approx 0{,}7885 \\ &\approx 0{,}789 \end{aligned}$$

La bonne réponse est donc la réponse b).

5) D'après le cas de l'énoncé, toutes les machines fonctionnent correctement. Cela implique donc qu'aucune machine n'est défectueuse. Ainsi, on s'intéresse au plus petit entier n tel que :

$$P(X = 0) > 0{,}4$$

Or,

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} 0{,}082^0 \times 0{,}918^{n-0} = 0{,}918^n$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} p(X=0) > 0{,}4 \quad &\Leftrightarrow 0{,}918^n > 0{,}4 \\ &\Leftrightarrow \ln(0{,}918^n) > \ln(0{,}4) \quad \text{Car la fonction logarithme est strictement croissante} \\ &\Leftrightarrow n\ln(0{,}918) > \ln(0{,}4) \\ &\Leftrightarrow n < \frac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}918)} \quad \text{Car } \ln(0{,}918) < 0 \\ &\Leftrightarrow n < 10{,}71 \end{aligned}$$

Le plus grand entier strictement inférieur à 10,71 est 10. Donc la plus grande valeur possible pour n est égale à 10. La bonne réponse est donc la réponse c).

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ telle que :

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

1) Calculons les différentes limites.

- $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to 0} -8\ln(x) = +\infty$. Par somme de limites, nous en déduisons que :

$$\lim_{x\to 0} x^2 - 8\ln(x) = +\infty$$

2) Calculons les différentes limites :

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, par le théorème des croissances comparées.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Par produit de limites, nous en déduisons :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \times 0 = 0$$

Donc,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 - 8\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1 - 8 \times 0 = 1 - 0 = 1$$

De plus,

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$$

Par produit de limites, nous en déduisons alors :

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\left(1 - 8\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty \times 1 = +\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

3) La fonction f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ (ici c'est donné par l'énoncé, en revanche nous aurions dû le démontrer si ce n'était pas le cas). Nous posons la fonction u telle que $u(x) = x^2$ et v la fonction $v(x) = 8\ln(x)$. La fonction f est donc exprimée comme somme des fonctions u et v. Sa fonction dérivée est alors :

$$f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

Calculons les fonctions dérivées de u et v.

$$u(x) = x^2 \qquad u'(x) = 2x$$

$$v(x) = 8\ln(x) \qquad v'(x) = 8 \times \frac{1}{x}$$

Donc,

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$$

4) Pour étudier les variations de f, nous devons étudier le signe de sa dérivée.

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x} = \frac{2(x + 2)(x - 2)}{x}$$

La fonction dérivée est positive si et seulement si le numérateur et le dénominateur sont positifs. Puisque $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors le dénominateur est toujours positif. De plus, $x + 2 > 0$.

Cependant, $x - 2 > 0$ si et seulement si $x > 2$. Donc, pour tout $x \in]0; 2[$, $2(x + 2)(x - 2) < 0$. Donc, $f'(x) < 0$. Sinon, $f'(x) \geq 0$.

Nous avons le tableau de signes et de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$4-8ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5)
Rappel de cours :

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : Si f est une fonction continue et strictement monotone (donc strictement croissante ou strictement décroissante) sur le segment $[a; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur ce même intervalle. Attention, la réciproque est fausse. Une fonction continue sur un intervalle I n'est pas nécessairement dérivable sur cet intervalle.

La valeur approchée de $4 - 8\ln(2)$ est environ $-1{,}55$. Par conséquent pour tout $x \in]0; 2]$, la fonction f est strictement décroissante et prend ses valeurs de $+\infty$ à $-1{,}55$.

Comme la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ elle est continue sur $]0;+\infty[$, donc sur $]0;2]$. De plus, elle est strictement décroissante et change de signe sur ce même intervalle. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel sur $]0;2]$ tel que $f(x)=0$. Nous noterons α ce réel. Nous avons le tableau de variation suivant :

x	0	α	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$4-8ln(2)$	$+\infty$

6) La question numéro 6 a exactement le même raisonnement que la question 5). Soit $x \in [2;+\infty[$.

Comme la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ elle est continue sur $]0;+\infty[$, donc sur $[2;+\infty[$. De plus, elle est strictement croissante et change de signe sur ce même intervalle. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel sur $[2;+\infty[$ tel que $f(x)=0$. Nous noterons β ce réel. Nous avons le tableau de variation suivant :

x	0	2	β	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$4-8ln(2)$	0	$+\infty$

Nous pouvons donc en déduire le signe de f sur $]0;+\infty[$. La fonction est positive sur $]0;\alpha] \cup [\beta;+\infty[$ et négative sur $[\alpha;\beta]$. Cela se résume via le tableau suivant :

x	0		α		2		β		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		0		$4-8ln(2)$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	

7) Pour tout nombre réel k, nous avons :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k$$

Cela se réécrit aussi :

$$g_k(x) = f(x) + k$$

Puisque nous ajoutons seulement une constante à la fonction f, alors la fonction g_k a les mêmes variations que f. Elle admet donc pour minimum sur $]0; +\infty[$ le réel $4 - 8\ln(2) + k$. Par conséquent, nous avons :

$$4 - 8\ln(2) + k \geq 0 \iff k \geq 8\ln(2) - 4$$

En conclusion, $8\ln(2) - 4$ est la plus petite valeur de k telle que la fonction g_k soit positive sur $]0; +\infty[$.

<u>Exercice 3 :</u>

Partie A

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_1 = 3 \qquad u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3$$

1) Calculons u_2 et u_3.

$$\begin{aligned} u_2 &= u_{1+1} \\ &= 0{,}9u_1 + 1{,}3 \\ &= 0{,}9 \times 3 + 1{,}3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} u_3 &= u_{2+1} \\ &= 0{,}9u_2 + 1{,}3 \\ &= 0{,}9 \times 4 + 1{,}3 \\ &= 4{,}9 \end{aligned}$$

Dans le contexte de l'exercice, nous pouvons en conclure que lors du deuxième mois, 400 questions étaient présentes sur la FAQ et lors du troisième mois, il y en avait 490.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P(n)$ la propriété : "$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$".

<u>Initialisation :</u> soit $n = 1$.

$$\begin{aligned} u_1 &= 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^1 \\ &= 13 - \frac{100}{9} \times \frac{9}{10} \\ &= 13 - 10 \\ &= 3 \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n = 1$.

<u>Hérédité :</u> On suppose la propriété $P(n)$ vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0{,}9u_n + 1{,}3 \\ &= 0{,}9\left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n\right) + 1{,}3 && \text{D'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 0{,}9 \times 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} + 1{,}3 \\ &= 11{,}7 + 1{,}3 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} \\ &= 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

<u>Conclusion :</u> La propriété est vraie au premier rang et est héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall n \geq 1, u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$$

3) Nous savons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante si et seulement si pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \geq u_n$. Cela revient à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1}\right) - \left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n\right) \\ &= 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} - 13 + \frac{100}{9} \times 0{,}9^n \\ &= \frac{100}{9}(0{,}9^n - 0{,}9^{n+1}) \\ &= \frac{100}{9} \times 0{,}9^n(1 - 0{,}9) \\ &= \frac{100}{9} \times 0{,}9^n \times 0{,}1 \end{aligned}$$

Tous les termes sont positifs, par conséquent, par produit, nous avons :

$$\frac{100}{9} \times 0{,}9^n \times 0{,}1 > 0$$

Par conséquent, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

4) Le programme python calcule la plus petite valeur de n telle que la valeur u_n soit strictement supérieure au seuil p. Par conséquent, seuil(8,5) calcule la plus petite valeur de n telle que $u_n > 8{,}5$.

$$\begin{aligned} u_n > 8{,}5 &\Leftrightarrow 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n > 8{,}5 \\ &\Leftrightarrow 4{,}5 > \frac{100}{9} \times 0{,}9^n \\ &\Leftrightarrow \frac{81}{200} > 0{,}9^n \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{81}{200}\right) > \ln(0{,}9^n) \quad \text{Car la fonction logarithme est strictement croissante} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{81}{200}\right) > n\ln(0{,}9) \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}405)}{\ln(0{,}9)} < n \quad \text{Car } \ln(0{,}9) < 0 \end{aligned}$$

Or, $\frac{\ln(0{,}405)}{\ln(0{,}9)} \approx 8{,}6$. Par conséquent, le plus petit entier supérieur à 8,6 est 9. Ainsi, la valeur renvoyée par seuil(8,5) est 9. Il faudra donc 9 mois pour qu'il y ait 850 questions au sein de la FAQ.

Partie B

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suit :

$$v_n = 9 - 6e^{-0{,}19(n-1)}$$

1) Calculons les valeurs v_1 et v_2.

$$\begin{aligned} v_1 \quad &= 9 - 6e^{-0,19(1-1)} \\ &= 9 - 6e^{0} \\ &= 9 - 6 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 \quad &= 9 - 6e^{-0,19(2-1)} \\ &= 9 - 6e^{-0,19} \\ &\approx 4,04 \end{aligned}$$

2) Nous devons résoudre l'inéquation $v_n > 8,5$.

$$\begin{aligned} v_n > 8,5 \quad &\Leftrightarrow 9 - 6e^{-0,19(n-1)} > 8,5 \\ &\Leftrightarrow 0,5 > 6e^{-0,19(n-1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{0,5}{6} > e^{-0,19(n-1)} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{12}\right) > -0,19(n-1) \\ &\Leftrightarrow -\frac{\ln\left(\frac{1}{12}\right)}{0,19} < n - 1 \\ &\Leftrightarrow n > 1 - \frac{\ln\left(\frac{1}{12}\right)}{0,19} \\ &\Leftrightarrow n > 14,08 \end{aligned}$$

Le plus petit entier strictement supérieur à 14,08 est 15. Donc, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$ est $n = 15$.

Partie C

1) D'après le premier modèle, il y aura plus de 850 questions sur la FAQ lorsque $u_n > 8,5$. D'après les réponses précédentes, cela arrivera au bout du neuvième mois.

D'après le second modèle, il y aura plus de 850 questions sur la FAQ lorsque $v_n > 8,5$. D'après les réponses précédentes, cela arrivera au bout du quinzième mois.

Par conséquent, la première modélisation conduit à procéder le plus tôt à cette modification.

2) Nous devons calculer les limites des deux suites.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ car $|0,9| < 1$. Par conséquent, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n = 13 - 0 = 13$$

Sur le long terme, il y aura 1300 questions sur la FAQ.

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-0,19(n-1)} = 0$$

Donc,

$$\lim_{n \to +\infty} 9 - 6e^{-0,19(n-1)} = 9 - 0 = 9$$

Sur le long terme, il y aura 900 questions sur la FAQ. Ainsi, c’est pour la première modélisation qu’il y aura le plus grand nombre de questions sur la FAQ.

Exercice 4 :

1) Nous avons :

$$\overrightarrow{AE} = 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$$

Par conséquent,

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même,

$$\overrightarrow{AC} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$$

Par conséquent,

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Enfin,

$$\overrightarrow{AG} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$$

Donc,

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2)

Rappel de cours :

Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point et $\vec{u} = (a, b, c)$ un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{EC}$.

$$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus, la droite passe par le point E, de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = x_E + t \times 1 \\ y = y_E + t \times 1 \\ z = z_E + t \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + t \times 1 \\ y = 0 + t \times 1 \\ z = 1 + t \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

3)

Rappel de cours :

Une droite est orthogonale (perpendiculaire) à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (qui se coupent) de ce plan.

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Les vecteurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GD}$ sont non colinéaires. Calculons leurs coordonnées.

$$\overrightarrow{GB} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{GD} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Vérifions à présent si la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD). Pour ce faire, nous devons vérifier si la droite (EC) est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{GB}$ et si la droite (EC) est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{GD}$. Cela est le cas si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{GB} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = 1\times 0 + 1\times(-1) + (-1)\times(-1) = 0 - 1 + 1 = 0$$
$$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{GD} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = 1\times(-1) + 1\times 0 + (-1)\times(-1) = -1 + 0 + 1 = 0$$

Par conséquent, $\overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{GD}$. En conclusion, la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

4) a) Puisque la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD), alors tout vecteur directeur de la droite (EC) est un vecteur normal au plan (GBD). Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{EC}$, de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (GBD). Ainsi, le plan (GBD) est de la forme $x + y - z + \lambda = 0$. Or, le point B de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ appartient au plan (GBD). Donc, nous avons :

$$x_B + y_B - z_B + \lambda = 0$$
$$1 + 0 - 0 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan (GBD) est $x + y + z - 1 = 0$.

b) Le point I est le point d'intersection entre la droite (EC) et le plan (GBD). Par conséquent, ce point satisfait la représentation paramétrique de la droite (EC) et l'équation cartésienne du plan (GBD). Nous avons donc :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Nous résolvons ce système en remplaçant les valeurs de x, y et z.

$$
\begin{aligned}
t + t - (1 - t) - 1 = 0 \quad & \Leftrightarrow t + t - 1 + t - 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow 3t - 2 = 0 \\
& \Leftrightarrow 3t = 2 \\
& \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Ainsi, nous avons :

$$
\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}
$$

Par conséquent, le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

c)

Rappel de cours :

On se place dans un repère orthonormé. Soient deux points A et B de ce repère orthonormé, de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B). Alors, la distance AB s'exprime comme suit :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Nous devons calculer la distance EI.

$$
\begin{aligned}
EI \quad & = \|\overrightarrow{EI}\| \\
& = \sqrt{(x_I - x_E)^2 + (y_I - y_E)^2 + (z_I - z_E)^2} \\
& = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} \\
& = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} \\
& = \sqrt{\frac{12}{9}} \\
& = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

5) a) Pour répondre à cette question, nous pouvons procéder par deux méthodes différentes.

En effet, nous remarquons que les segments $[BG]$, $[GD]$ et $[BD]$ sont les diagonales respectives des carrés $BCFG$, $CDHG$ et $ABCD$. Or, nous sommes dans un cube, donc toutes les faces ont les mêmes dimensions. On en conclut que les diagonales de ces carrés sont identiques, et donc que les segments $[BG]$, $[GD]$ et $[BD]$ sont de même longueur. Par conséquent, le triangle BDG est équilatéral.

Sinon, nous pouvons y aller plus formellement par le calcul. Nous allons calculer les distances de ces segments.

$$\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Calculons les distances :

$$BG = \|\overrightarrow{BG}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$DG = \|\overrightarrow{DG}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$BG = \|\overrightarrow{BG}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Toutes les distances sont égales, ainsi le triangle BDG est équilatéral.

b)

Rappel de cours : On se place dans un repère orthonormé. Soient deux points A et B de ce repère orthonormé, de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B). Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

$$I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Calculons les coordonnées du point J.

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$
$$y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$z_J = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

Ainsi, le point J a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

Pour rappel, l'aire d'un triangle est :

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{B}ase \times \mathcal{H}auteur}{2}$$

Ici, la base est la distance BD et la hauteur est la distance GJ. Nous devons donc calculer GJ.

$$
\begin{aligned}
GJ &= \|\overrightarrow{EI}\| \\
&= \sqrt{\left(x_J - x_G\right)^2 + \left(y_J - y_G\right)^2 + \left(y_J - y_G\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (0 - 1)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} \\
&= \sqrt{\frac{6}{4}}
\end{aligned}
$$

Nous avons vu précédemment que $BD = \sqrt{2}$. Donc, nous avons :

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{6}{4}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, l'aire du triangle BDG est de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ u.a.

6) La formule du volume nous est redonnée par l'énoncé. Ainsi, le volume du tétraèdre $EGBD$ est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \times 3}{2 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3}$$

Ainsi, le volume du tétraèdre $EGBD$ est bien de $\frac{1}{3}$.