Université Paris II Panthéon-Assas | **Mathématiques 1**
L1 Sciences Economiques et Gestion | Cours de M. Vergopoulos

TD 1
Révisions

A traiter du 28 septembre au 2 octobre

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3x}{6x^2+x-2},\ g(x) = \sqrt{-x^2-x+2},\ h(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}},\ i(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{-x^2-x+2}},$$
$$j(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{-x^2-x+2}},\ k(x) = \ln[(x-3)(x+6)],\ l(x) = e^{x^2} + 4xe^{2x}.$$

Exercice 2

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions f, g, h, k, l de l'exercice 1.

Exercice 3

On considère les fonctions u et v et définies par $u(x) = \sqrt{2x-6}$, $v(x) = x^2 - 3x + 2$. Quels sont les ensembles de définition des fonctions u et v ? Déterminer les fonctions uov et vou ainsi que leurs ensembles de définition.

Exercice 4
Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln x + \ln(x-1) - \ln 6 = 0$.

b) $(\ln x)^2 - 5\ln x + 4 = 0$.

c) $e^{7x} - e^{5x} - 2e^{3x} = 0$.

d) $\ln x = -1$

e) $3\ln x = e^3$

f) $15^x = 1000$

g) $x^{15} = 1000$

h) $4x^2 - 2 = 0$

Exercice 5

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 5}{x+2}$, admet une asymptote verticale et une asymptote oblique.

Université Paris II Panthéon-Assas — **Mathématiques 1**
L1 Sciences Economiques et Gestion — Cours de M. Vergopoulos

TD 2 — A traiter du 12 octobre au 16 octobre
Logique, quantificateurs et suites

Exercice 1

Soit A, B et C trois propositions. Montrer que
a) NON(A OU B) = NON A *ET* NON B
b) A OU (B ET C) = (A OU B) ET (A OU C)

Exercice 2

Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes et leur négation. Préciser lesquelles sont vraies.

a) Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
b) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

Exercice 3

a) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{N}$ t.q. $y \leq x$
2. $\exists y \in Z$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R},\ y \leq x^2$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in Z$ t.q. $y \leq x$
4. $\exists y \in Z$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R},\ y \leq x$
5. $\forall p \in \mathbb{N},\ p^2$ pair $\Rightarrow$ p pair

b) Ecrire les négations des propositions ci-dessus.

Exercice 4

Pour les ensembles suivants donner, lorsque cela est possible majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum.

$[2,4]$, $[3,11]$, $\{x \in \mathbb{R}$ t.q. $x < 10\}$, $\{x \in \mathbb{N}$ t.q. $x < 10\}$, $\{2x-1$ t.q. $x \in]-\infty, 0]\ \}$,
$\{x^2 - 1$ t.q. $x \in]-\infty, 0]\ \}$, $\{sinx$ t.q. $x \in \mathbb{R}\}$,
$\{x \in \mathbb{R}$ t.q. $x^2 + 3x - 4 = 0\}$, $\{x \in \mathbb{R}$ t.q. $x^2 + 3x - 4 \geq 0\}$.

Exercice 5

On considère la fonction $f(x) = x^3 - 3x$.
Pour les ensembles ci-dessous donner lorsque cela est possible majorant, minorant,borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum.

$A = \{f(x)$ t.q. $x \in [0,2]\ \}$
$B = \{f(x)$ t.q. $x \in [0, +\infty[\ \}$
$C = \{x$ t.q. $f(x) \in [-2, 0]\ \}$

Exercice 6

a) Un capital de 5 000 euros est placé au taux d'intérêt composé de 2% par an. On note C_n le capital disponible au bout de n années. Montrer que la suite $(C_n)_n$ est une suite géométrique et donner son premier terme et sa raison. Exprimer C_n en fonction de n.

b) Une entreprise décide de réduire sa quantité de rejets de 3% par an, pour lutter contre la pollution. Cette quantité était de 60 000 tonnes en 2018. On note u_n la quantité de rejets en 2018+n. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique et donner son premier terme et sa raison.

L'entreprise veut réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 42 000 tonnes. Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans ?

Exercice 7

Soit $(u_n)_n$ la suite de nombres réels définie par

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1},\ u_0 = 1$$

et $(v_n)_n$ la suite de nombres réels définie par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

a) Calculer u_1, u_2, u_3 et v_0, v_1, v_2, v_3.
b) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$.
c) Exprimer $(v_n)_n$ en fonction de n.
d) Déterminer la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(v_n)_n$.
e) Exprimer $(u_n)_n$ en fonction de n.
f) Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Université Paris II Panthéon-Assas
L1 Sciences Economiques et Gestion

Mathématiques 1
Cours de M. Vergopoulos

TD 3
Suites

A traiter du 26 octobre au 30 octobre

Exercice 1

Donner des exemples des situations suivantes :
a) Une suite décroissante positive ne tendant pas vers 0.
b) Une suite bornée non convergente.
c) Une suite non monotone qui tend vers 0.
d) Deux suites divergentes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $(u_n v_n)_n$ soit convergente.

Exercice 2

Déterminer la nature et étudier la convergence de chacune des suites $(u_n)_n$ définies par :

a) $u_n = 7 - \frac{6}{5}n$

b) $u_n = (\frac{6}{5})^n$

c) $u_n = (\frac{1}{5})^n$

d) $u_n = (\frac{-1}{5})^n$

e) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + (\frac{1}{2})^n$

Exercice 3

Calculer, si elle existe, la limite, lorsque n tend vers l'infini, de chacune des suites $(u_n)_n$ définies par :
a) $u_n = n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1)$
b) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$.
c) $u_n = \dfrac{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$

Exercice 4

Soit $(u_n)_n$ la suite de nombres réels définie par

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}, \quad u_0 \in]0, 1]$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1$
c) Montrer que la suite est monotone.
d) En déduire qu'elle est convergente.
e) Déterminer sa limite.

Exercice 5

Soit $(u_n)_n$ la suite de nombres réels définie par

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} - u_n, \quad u_0 \in]0,1[$$

a) Etudier les variations de la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{x} - x$, $x \in]0,1[$.
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in]0; 0,25]$.
c) Montrer que la suite est croissante.
d) En déduire qu'elle est convergente.
e) Déterminer sa limite.

Exercice 6

On considère la suite $(u_n)_n$ t.q. $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$, $n \in \mathbb{N}$; $u_0 = 1$.
a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$
b) Montrer que si la limite existe alors elle vaut 3.
c) On remarque $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{2x+3}$. Montrer que f croissante sur $\mathbb{R}_+$.
d) En déduire que $(u_n)_n$ est croissante.
e) Trouver un majorant de $(u_n)_n$.
f) En déduire que $(u_n)_n$ est convergente.

Université Paris II Panthéon-Assas
L1 Sciences Economiques et Gestion

Mathématiques 1
Cours de M. Vergopoulos

TD 4–5
Limites, continuité, dérivabilité et optimisation

A traiter du 9 novembre au 13 novembre
puis du 23 novembre au 27 novembre

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{-x^2-x+2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+x^3-4}{x^3-x+2}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{3(x-2)},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2}-3x, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{-x^3+3x^2+x-3}, \quad \lim_{x\to 3} \frac{x-1}{-x^3+3x^2+x-3}$$

Exercice 2

a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^x - x - 2$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions, dont l'une est 0.
L'autre solution se note α. Démontrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x.$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que :

$$f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$$

où α est défini dans la partie a)
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.)
4. Etablir le tableau de variation de f

Exercice 3

On considère la fonction f d'une variable rélle définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3+2x^2-x-1}{|x+1|}$$

a) Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?
b) Montrer que la limite de f quand x tend vers -1 n'existe pas.

Exercice 4

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-x}{x-4}$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
b) Déterminer les points fixes de f (c'est-à-dire les valeurs de x telles que $f(x) = x$).
c) On appelle a et b ces points fixes ($a < b$). La fonction f est-elle continue sur $[a, b]$?
d) Donner alors les valeurs de m et M telles que $f([a, b]) = [m, M]$.

Exercice 5

a) Etudier la limite suivante :

$$\lim_{x \longrightarrow 5/2} \frac{|2x - 5|}{x - 5/2}$$

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |2x - 5|$
b) f est-elle continue en tout point a de $\mathbb{R}$?
c) Etudier la dérivabilité de f en $a \neq 5/2$.
d) Etudier la dérivabilité de f en $a = 5/2$.

Exercice 6

On considère la fonction f d'une variable rélle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1 + e^x}{x} & si \ \ x \neq 0 \\ 1 & si \ \ x = 0 \end{cases}$$

a) Calculer la limite de f lorsque x tend vers 0. f est-elle continue en 0 ?
b) Montrer que f est dérivable pour $x \neq 0$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$
c) Etudier la dérivabilité de f en 0
d) La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 7

Soit f une fonction non nulle en x et dérivable en x. On définit l'élasticité de f en x par $E(f/x) = f'(x)\dfrac{x}{f(x)}$.

a) On suppose $f(x) > 0$ pour tout x. Exprimer $E(f/x)$ en fonction de $\ln f(x)$.
b) Donner l'élasticité du produit fg en fonction des élasticités de f et de g.
c) Même question pour $\dfrac{f}{g}$.
d) Donner les élasticités des fonctions suivantes :
$f(x) = x^\alpha$, $(x \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R})$, $g(x) = 3x + 2$.

Exercice 8 1) Examiner si on peut appliquer le théorème de Rolle aux fonctions f définies par :
a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3}$, $x \in [-2, 2]$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3}$, $x \in [-1, 1]$
c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, $x \in [0, 1]$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x + 1)$.
Montrer que pour tous réels x et y : $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

Exercice 9

1) Calculer le développement limité d'ordre deux au voisinage de 0 de $f(u) = \sqrt{1+u}$.
En déduire le développement limité d'ordre deux au voisinage de 0 de : $g(x) = \sqrt{1+2x-x^2}$.

2) Calculer la limite quand x tend vers 0 de la fonction suivante

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-4x} - 1 + 2x + 3x^2}{x^2}$$

a) En appliquant la règle de l'Hôpital.
b) En utilisant le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de 0.

Exercice 10

Etudier les extrema des fonctions suivantes définies par :
a) $f(x) = -4x^3 + 6x + 8$
b) $f(x) = -x\ln x + 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}_+^*$
c) $f(x) = (x-c)1000e^{-ax}, a > 0, c > 0$
d) $f(x) = x^3 - 12x + 4$
e) $f(x) = 4x^2 + 6x - 9$
f) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$
g) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 4.$
h) $f(x) = x^3 - x + 1$

Exercice 11

On considère la fonction f telle que

$$f(x) = -\sqrt{x^2+1} - x^2 + 6$$

a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
b) Montrer que f est strictement concave sur D.

Exercice 12

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f telle que

$$f(x) = c\ln(x+1) + x.$$

a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
b) Pour quelles valeurs de c, f est-elle convexe ?
c) Etudier le problème ci-dessous suivant les différentes valeurs de c :

$$\text{Minimiser } f(x), \quad x \in D$$

Exercice 13

Une entreprise a observé que pour un produit donné le coût total $C(q)$ (en milliers d'euros) de la production variait en fonction de la quantité produite q (en milliers de pièces) de la manière suivante :

$$C(q) = 4q^3 - 6q^2 + 15q$$

a) Quelle doit être la production q si l'entreprise cherche à minimiser le coût moyen ?
Ecrire la fonction de coût marginal.
Vérifier que pour la valeur de q qui minimise le coût moyen, le coût marginal est égal au coût moyen minimum.
b) Démontrer que la propriété qui vient d'être vérifiée est générale : Soit $C(q)$ le coût total, q la quantité produite, $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ le coût moyen Caractériser la valeur q^* qui minimise le coût moyen et vérifier que dans ce cas, on a $C_M(q^*) = C'(q^*)$.

Exercice 14
On considère la fonction f d'une variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{2-x}{x-1} - \ln(x-1)$.

a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans D.

On considère à présent la fonction g d'une variable réelle définie par :
$g(x) = (2-x)\ln(x-1) + 5$.

c) Quel est l'ensemble de définition D de g ?
d) Montrer que g est dérivable sur D et calculer g'.
e) Montrer que g est strictement concave sur D.
f) Etudier les extrema de g sur D.
g) Etudier les extrema de g sur $[6, 10]$.

Université Paris II Panthéon-Assas
L1 Sciences Economiques et Gestion

Mathématiques 1
Cours de M. Vergopoulos

TD 6
Intégration

A traiter du 7 décembre au 11décembre

Exercice 1
Calculer les intégrales définies suivantes :

$$I_1 = \int_1^e x \ln x dx, \quad I_2 = \int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx, \quad I_3 = \int_0^1 x 2^x dx, \quad I_4 = \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

Exercice 2
Calculer les intégrales définies suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,.\, x dx, \quad I_2 = \int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx, \quad I_3 = \int_1^2 \frac{dx}{x(1+\ln x)},$$

$$I_4 = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad I_5 = \int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)^n dx, (n \in \mathbb{N}) \quad I_6 = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

Exercice 3
Calculer les primitives suivantes;

$$\int \frac{1-x^5+x^6}{1-x} dx, \quad \int (\ln x)^2 dx, \quad \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

Exercice 4
a) Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, -1, -1/2\}, \quad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$$

b) En déduire $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(x+1)(2x+1)} dx$.

c) En effectuant un changement de variable, déduire de la question b) la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+3e^y+2e^{2y}} dy$.

Exercice 5

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$a)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}, \quad b)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \quad c)\ \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$