Aufgaben zur Vorlesung Statistik I + II

Humboldt-Universität zu Berlin

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Lehrstuhl für Statistik

8. April 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik

Aufgabe 1-1: *Vereinfachung*
Löse die Aufgaben bzw. vereinfache die mathematische Ausdrücke

a) $6 \cdot 7 + 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4$

b) $(6 \cdot 7 + 5) \cdot (3 - 3) \cdot (2 + 2 \cdot 4)$

c) $(6 \cdot 7 + 5) \cdot 3 - 3 \cdot (2 + 2 \cdot 4)$

d) $(ab + c)(d - de + fb)$

e) $(ab + c)d - d(e + fb)$

f) $(ab + c)(d - d)(e + fb)$

g) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-3}$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$

i) $(3 \cdot 4 \cdot 3)^{0.5}$

j) $(3 \cdot 4 \cdot 3)^{-0.5}$

k) $a^2 b^{-3} a^4 c^{-2} b^{-1} c$

l) $(a + b + c)^0$

Aufgabe 1-2: *Potenzen und Wurzeln*
Vereinfache die mathematische Ausdrücke:

a) Addiere: $\dfrac{3a+b}{a^2-b^2}+\dfrac{2a}{a-b}$

b) Kürze: $\dfrac{6xy^2-12xy^3}{9x^3y-33x^2y^2}$

c) Kürze: $\dfrac{x^2-2xy}{x^2-4y^2}$

d) Vereinfache: $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

Aufgabe 1-3: *Binomische Formeln*
Bestimme mit der Hilfe der binomischen Formeln:

a) $(3xy-2)^2+(3xy+2)^2$

b) 102^2

Aufgabe 1-4: *Wurzel*

A) Fasse zusammen bzw. kürze:

a) $\left(\dfrac{1}{x^{-2}}\right)^{-3}$

b) $\left(\dfrac{x^4y^{-2}z^3}{a^3b}\right)^2$

B) Schreibe unter eine gemeinsame Wurzel:

a) $x\sqrt[3]{y}$

b) $\sqrt[4]{x}\sqrt[6]{y}$

c) $\frac{\sqrt{xy^2}}{x\sqrt{y}}$

C) Schreibe als Wurzel:

a) $x^{0,5}$

b) $x^{\frac{4}{5}}$

c) $x^{0,1}$

d) $x^{-\frac{2}{3}}$

Aufgabe 1-5: *Logarithmus*
Bestimme mit der Hilfe der Rechenregeln für den Logarithmus:

A) Schreibe als Logarithmus:

a) $2^3=8$

b) $a^{0,25}=c$

c) $5^x=5$

B) Berechne x aus:

a) $7\log x-\log x^2=0$

b) $\dfrac{2\log x-\log x^2}{\log 10}=5$

c) $\log x=\log_2 8$

C) Vereinfache (wandle zu einer Summe um):

a) $\log\left(\prod_{i=1}^{n}a_ib_i\right)$

b) $\log\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{b_i}\right)$

Aufgabe 1-6: *Produktzeichen*

a) Berechne $\prod_{i=1}^{5}(i-3)$

b) Berechne $\prod_{i=1}^{5}(-1)^i$

c) Welcher Ausdruck ist die richtige Lösung für $\prod_{i=1}^{2}(a+b)^i$

   a) $(a+b)^2$
   b) $(a+b)^3$
   c) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$

Aufgabe 1-7: *Summenzeichen*

A) Welche Summen sind richtig angegeben?

   a) $\sum_{i=1}^{10} i = 1+10$
   b) $\sum_{i=2}^{14}(2+i) = 4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16$
   c) $\sum_{i=0}^{5}(m+i) = 6m+15$
   d) $\sum_{i=-5}^{5} i^2 = 2(1+4+9+16+25)$

B) Sind die folgende Umformungen richtig?

   a) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=2}^{n+1} a_i + 1$
   b) $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$
   c) $\sum_{i=n}^{n}(2a_i+1) = \sum_{i=n}^{2n} a_i + n$
   d) $\sum_{i=1}^{n} n = n^2$

C) Identifizieren Sie diejenigen Terme, die Teil der Summe sind. Bestimmen Sie darüber hinaus, welche Subterme dabei vom Laufindex abhängig sind und welche nicht.
Stellen Sie die Summen zur Überprüfung ohne Verwendung des Summenzeichens $\sum$ dar und vereinfachen Sie, wenn möglich.

   a) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$
   b) $\sum_{i=1}^{n} a_i^{i-1}$
   c) $\sum_{i=1}^{n} x_i - 1$
   d) $\sum_{i=1}^{n}(a_i+3)$
   e) $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
   f) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a x_i$
   g) $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
   h) $\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} y_j$
   i) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j$
   j) $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$

D) Spalten Sie die folgenden Ausdrücke so auf, dass die per Summenzeichen zusammengefassten Terme keine Summen mehr enthalten.

a) $\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)$

b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2$

c) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$

d) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$

e) $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)(x_i - y_i)$

f) $\sum_{i=1}^{n}(ax_i + bx_i + ay_i - by_i)$

E) Kürzen Sie die folgenden Ausdrücke unter Verwendung des Summenzeichens ab.

a) $a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 + ... + 2^n a_n$

b) $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + ... + x_n + y_n$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{y_1}{x_2} + \frac{y_2}{x_3} + ... + \frac{y_{n-1}}{x_n}$

d) $x_1 + \sqrt{x_2} + \sqrt[3]{x_3} + \sqrt[4]{x_4} + +... + \sqrt[n]{x_n}$

e) $a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2 + ... + a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2$

f) $a_1^2 - 2a_1a_2 + 2a_2^2 - 2a_2a_3 + 2a_3^2 - 2a_3a_4 + ... + a_n^2$

g) $\log x_1 + \log x_2 + ... + \log x_n$

Aufgabe 1-8: *Binomialkoeffizient*
Berechne:

a) $\binom{24}{21}$

b) $\binom{6}{0}$

c) $\binom{10}{2}$

Aufgabe 1-9: *Funktion*

A) Bestimme Definitionsbereich und Wertebereich:

a) $f(x) = e^{-x+1} + 2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

B) Finde die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} x^{-1} \log x$

Aufgabe 1-10: *Ableitung*

A) Bestimmen Sie die Ableitung erster Ordnung:

a) $f(x) = 8x^2 + e^x$

b) $f(x) = e^{x^3+1}$

c) $f(x) = 3x \cdot \log(x)$

d) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1 - x^2}$

e) $f(x) = xe^{x^2}$

f) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

g) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

h) $f(x) = \dfrac{(x+1)^{\frac{2}{5}}}{(x+1)^{-\frac{3}{5}}}$

B) Bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

a) $\frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^{n}(x_i + ax_i^2 - a^2x_iy_i)$

b) $\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha)^2$

c) $\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta)^2$

d) $\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta)^2$

e) $\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} x^i$

f) $\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{n} \ln(x^i)$

Aufgabe 1-11: *Integration*

A) Berechne:

a) $\int_0^5 x^4 dx$

b) $\int_0^1 e^x \cdot (e^{-x} - 1)\, dx$

c) $\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx$

B) Finde die Stammfunktion:

a) $f(x) = e^{\ln x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} + 4x^5 + x^7$

c) $f(x) = e^{3x}$

2 Deskriptive Statistik

Aufgabe 2-1: *Berliner Bühnen*

Die zuständige Abteilung für Finanzen des Senats von Berlin lässt sich für eine statistische Analyse von allen Berliner Bühnen die Höhe der Einnahmen und der Ausgaben im Jahre 2022 melden.

a) Was ist hier die Grundgesamtheit, was sind die einzelnen statistischen Einheiten (Beispiele)?

b) Welche statistischen Merkmale werden betrachtet? Welche Merkmale sind Identifikationskriterien und welche sind Erhebungsmerkmale?

c) Nennen Sie weitere mögliche erfassbare Merkmale in dieser Gesamtheit!

Grundbegriffe-Berliner Buehnen.mp4

Aufgabe 2-2: *Merkmalsausprägungen*

In einer deutschen Großstadt K wird das Sparverhalten der Erwerbstätigen im März 2022 untersucht.

Durch welche sachlichen, örtlichen und zeitlichen Identifikationskriterien wird die untersuchte Gesamtheit identifiziert?

Aufgabe 2-3: *Skalierung*

Gegeben sind die folgenden Merkmale:

1. Geschlecht
2. Temperatur in Celsius
3. Körpergröße
4. Kinderzahl
5. Postleitzahl
6. Schulnote
7. Betriebsgrößenklasse
8. Normabweichung
9. Länge eines Werkstückes
10. abonnierten Zeitungen
11. Nationalität
12. Wahlergebnis einer Partei
13. Militärdienstgrad
14. Fahrpreise

15. Freizeitbeschäftigung
16. Bücherbestand einer Bibliothek
17. Windstärke
18. Geschwindigkeit
19. Rückennummern von Fußballspielern
20. Schwierigkeitsgrad einer Klettertour
21. Kraftstoffverbrauch eines PKW auf 100 km
22. Tarifklassen bei der Kfz-Haftpflicht
23. Güteklasse
24. Preis einer Ware
25. Lebensalter
26. Einkommen
27. Familienstand
28. erlernter Beruf
29. Geburtsjahrgang
30. Seitenzahl eines Buches
31. Todesursache
32. Jahresumsatz
33. Grundstücksgröße
34. Studienfach
35. Breitengrade der Erde
36. Handelsklasse bei Obst
37. Augenfarbe
38. Wohnsitz
39. Telefonnummer
40. Aggressivität
41. Rechtsform einer Unternehmung
42. Intelligenz
43. sozialer Status
44. Finanzierung des Studiums
45. Produktionsdauer
46. Semesterzahl
47. Klausurpunkte

a) Geben Sie die Skalierung der Merkmale an.

b) Welche der Merkmale sind häufbar?

c) Welche der genannten Merkmale sind diskret und welche sind stetig?

Aufgabe 2-4: *Familienstand*
Sie sollen die Studierenden des Fachbereiches Wirtschaftswissenschaften der Humboldt-Universität zu Berlin im Sommersemester 2022 bezüglich des Familienstandes untersuchen.
Definieren Sie die Begriffe Grundgesamtheit, Identifikationskriterien, statistische Einheit, statistisches Merkmal und Merkmalsausprägung konkret für die Aufgabenstellung.

Aufgabe 2-5: *Wählerverhalten*
Ein Meinungsforschungsinstitut führt vor einer Bundestagswahl eine Befragung über das Wählerverhalten durch.
Geben Sie für diese Problemstellung die sachliche, räumliche und zeitliche Abgrenzung der Grundgesamtheit an.

Aufgabe 2-6: *Versicherungsunternehmen*
In einem Versicherungsunternehmen sollen die zur Verfügung stehenden Daten über die Kfz–Haftpflicht–Versicherung zusammengestellt werden. Gefragt ist u.a. nach Alter, Geschlecht, Beruf und Wohnort des Versicherten, Dauer des Versicherungsvertrages, Anzahl der bisher eingetretenen Schadensfälle und der Schadenshöhe insgesamt (in EUR).

a) Bestimmen Sie die statistischen Einheiten und die Grundgesamtheit.

b) Welche statistischen Merkmale sollen erhoben werden? Charakterisieren Sie diese Merkmale.

c) Geben Sie mögliche Ausprägungen dieser Merkmale an.

Grundbegriffe-Versicherungsunternehmen.mp4

2.1 Univariate Statistik

Aufgabe 2-7: *Eine Befragung von Studierenden - Teil I*
Für eine Untersuchung von Studierenden an einer deutschen Hochschule wurden im Juni 2022 25 Studierende nach dem Studiengang, der Anzahl der Geschwister und nach dem Einkommen befragt. Das Ergebnis war:

i	Name	Studiengang	Zahl der Geschwister	Einkommen
1	Martin A.	VWL	0	924
2	Ute A.	Sozialwiss.	1	789
3	Wilhelm A.	BWL	0	1 365
4	Kurt B.	BWL	1	683
5	Sylvia B.	Polit.Wiss.	1	744
6	Elke D.	Polit.Wiss.	2	640
7	Klaus D.	Sozialwiss.	2	631
8	Theo E.	VWL	1	814
9	Jean F.	Polit.Wiss.	1	778
10	Elvira G.	BWL	0	1 062
11	Karl H.	BWL	0	1 230
12	Andreas K.	VWL	1	700
13	Thomas K.	BWL	0	850
14	Chris L.	Sozialwiss.	3	641
15	Uwe L.	Polit.Wiss.	2	640
16	Axel M.	BWL	0	850
17	Maria M.	BWL	1	683
18	Ruth M.	Sozialwiss.	0	616
19	Bärbel N.	BWL	1	683
20	Armin R.	BWL	2	683
21	Christa R.	VWL	1	660
22	Bernd S.	BWL	1	1 440
23	Claudia S.	Sozialwiss.	3	794
24	Erich T.	VWL	0	660
25	Claudia W.	Polit.Wiss.	1	640

a) Was ist bei dieser Befragung die Grundgesamtheit, was sind die einzelnen statistischen Einheiten? Durch welche Identifikationskriterien ist die untersuchte Grundgesamtheit festgelegt?

b) Wie ist das Erhebungsmerkmal "Studiengang" skaliert? Ermitteln Sie aus der obigen Urliste die absolute und relative Häufigkeitsverteilung für dieses Merkmal. Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung graphisch dar.

c) Wie ist das Erhebungsmerkmal "Anzahl der Geschwister" skaliert? Ermitteln Sie die absolute und relative Häufigkeitsverteilung für dieses Merkmal. Erstellen Sie die empirische Verteilungsfunktion. Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung und die empirische Verteilungsfunktion graphisch dar.

d) Wie viele Studierende haben höchstens 2 Geschwister? Wie viel Prozent der Studierenden haben mindestens 2 Geschwister? Wie viel Prozent der Studierenden haben ein oder zwei Geschwister?

e) Wie ist das Erhebungsmerkmal "Einkommen" skaliert? Ermitteln Sie die absolute und relative Häufigkeitsverteilung für dieses Merkmal unter Verwendung folgender Einkommensklassen (von ... bis unter ...): 600–650, 650–700, 700–900, 900–1200, 1200–1450. Erstellen Sie die empirische Verteilungsfunktion. Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung und die empirische Verteilungsfunktion graphisch dar.

f) Berechnen Sie ausgehend von der Einkommensverteilung unter e):
   - Welcher Anteil der Studierenden hat ein Einkommen von mindestens 750 und höchstens 1300 EUR?
   - Welcher Anteil der Studierenden hat ein Einkommen von mehr als 800 EUR?
   - Welches Einkommen hatten die 50% einkommensschwächsten Studierenden höchstens?
   - Welches Einkommen hatten die 20% einkommensstärksten Studierenden mindestens?

▶ Grundbegriffe-Befragung von Studierenden Teil I.mp4

Aufgabe 2-8: *Zugfolge - Teil I*

An einer Schranke der Bahnstrecke von A nach B wurden am 20.1.2022 folgende Abstände der Zugfolge in Minuten gemessen:

59; 43; 36; 63; 23; 4; 29; 41; 43; 31; 29; 69; 57; 36; 112; 43; 14; 11; 18; 77; 81; 47; 12; 43; 44; 16; 80; 6; 52; 5; 5; 6; 21; 43; 44; 46; 51

a) Wie ist das Erhebungsmerkmal skaliert? Ist es häufbar, nicht häufbar, stetig, diskret?

b) Ermitteln Sie die absolute und relative Klassenhäufigkeiten unter Verwendung von Klassen der Breite 30 Minuten. Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung graphisch dar.

c) Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion an und stellen Sie diese graphisch dar.

▶ Grundbegriffe-Zugfolge Teil I.mp4

Aufgabe 2-9: *Bibliotheken - Teil I*

Aus der Erhebung "Deutsche Bibliotheksstatistik 2022", Berlin 2022, wurden für die zentralen Universitätsbibliotheken nachstehende Angaben über die Öffnungszeiten (Std./Wo.), die Ausleihzeiten (Std./Wo), den Etat für Neuerwerb (Mrd. EUR/Jahr) und die Planstellen entnommen:

Universitäts bibliothek	Öff nungs zeiten	Aus leih zeiten	Etat für Neu erwerb	Plan stellen
RWTH Aachen	66	30	3.31	106
Augsburg	75	75	4.03	101
Bamberg	59	48	4.69	72
Bayreuth	64	64	5.77	72
HU Berlin	53	53	5.86	205
FU Berlin	59	41	4.22	146
TU Berlin	69	42	5.86	181
Bielefeld	111	98	4.44	166

Universitäts bibliothek	Öff nungs zeiten	Aus leih zeiten	Etat für Neu erwerb	Plan stellen
Bochum	59	59	2.73	97
Bonn	63	54	3.26	153
TU Braunschweig	50	50	2.28	74
UB Bremen	59	52	5.59	150
Chemnitz	56	44	1.43	89
Clausthal-Zellerfeld	43	29	1.05	32
TH Darmstadt	54	26	2.25	91
Dortmund	53	53	4.35	143
TU Dresden	59	59	3.00	180
Düsseldorf	59	59	5.97	161
Duisburg	68	49	3.43	74
KU Eichstätt	64	43	4.67	78
Erlangen-Nürnberg	64	45	2.51	157
Essen	65	65	4.44	84
Frankfurt (SB)	61	40	1.58	35
Frankfurt (UB)	69	40	2.76	187
Freiburg	64	43	3.83	119
Gießen	59	45	1.71	77
Greifswald	74	36	1.32	100
Göttingen	60	34	6.56	260
Halle	79	45	1.80	154
Hamburg	63	41	4.05	211
Hannover	48	36	1.79	83
Heidelberg	83	39	4.24	119
Jena	62	32	3.00	158
Kaiserslautern	50	50	2.50	61
Karlsruhe	54	54	2.58	77
GHS Kassel	64	49	3.87	111
Kiel	67	37	2.87	100
Konstanz	89	87	5.51	116
Köln	62	33	3.85	146
Leipzig	72	45	2.20	179

Universitäts bibliothek	Öff nungs zeiten	Aus leih zeiten	Etat für Neu erwerb	Plan stellen
TU Magdeburg	51	51	1.52	53
Mainz	58	48	1.67	108
Mannheim	63	33	1.50	90
Marburg	84	28	1.60	120
LMU München	60	45	1.63	107
TU München	52	37	2.95	99
Münster	69	38	3.67	145
Oldenburg	65	60	3.60	99
Osnabrück	57	43	4.74	99
Paderborn	86	86	3.60	75
Passau	74	41	4.96	70
Regensburg	74	36	4.25	191
Rostock	56	53	3.28	129
Saarbrücken	64	28	3.00	101
Siegen	75	71	3.30	73
Stuttgart	62	34	0.85	78
Stuttgart-Hohenheim	79	76	1.74	41
Trier	73	29	3.76	97
Tübingen	70	38	4.14	139
Ulm	64	64	3.07	66
Würzburg	64	64	1.49	122
Wuppertal	71	60	3.74	74

a) Wie sind die Erhebungsmerkmale skaliert? Sind sie häufbar, nicht häufbar, stetig, diskret (quasi-stetig)?

b) Ermitteln Sie unter Verwendung nachstehender Klassen (von ... bis unter...)

- "Öffnungszeiten" 40-50, 50–60, 60–70, 70–80, 80–90, 90–115
- "Ausleihzeiten" 25–30, 30–40, 40–50, 50–60, 60–70, 70–80, 80–100

- "Etat für Neuerwerb" 0–1, 1–2, 2–3, 3–4, 4–5, 5–6, 6–7
- "Planstellen" 30–70, 70–80, 80–100, 100–150, 150–200, 200–270

die absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten sowie die empirische Verteilungsfunktion.

Stellen Sie die Häufigkeitsverteilungen und die empirische Verteilungsfunktion graphisch dar.

c) Berechnen Sie ausgehend von den unter b) erstellten empirischen Verteilungsfunktionen:

- Welcher Anteil der Universitätsbibliotheken hatte eine Öffnungszeit zwischen 48 und 74 Std./Wo.?
- Welcher Anteil der Universitätsbibliotheken hatte eine Ausleihzeit über 65 Std./Wo.?
- Welcher Anteil der Universitätsbibliotheken hatte einen Etat für Neuerwerb von höchstens 2,4 Mrd. EUR/Jahr?
- Welcher Anteil der Universitätsbibliotheken hatte mehr als 100 Planstellen?
- Wieviele Planstellen höchstens hatten die 25% personell am schwächsten besetzten Universitätsbibliotheken?
- Wie lange waren die 15% leserfreundlichsten Universitätsbibliotheken mindestens geöffnet?

Aufgabe 2-10: *Erdbeerplantage - Teil I*
Der Student Alois besitzt eine Erdbeerplantage in Bayern, um sich damit sein Studium zu finanzieren. Da das Ernteergebnis je nach "Qualität des Sommers" verschieden ist, notierte sich Alois, wie viele Stunden die Sonne in der diesjährigen Saison pro Tag auf seine Beeren einwirkte:

Sonnenstunden pro Tag von ... bis unter ...	Anzahl der Tage
0 – 2	20
2 – 3	15
3 – 5	20
5 – 8	35
8 – 12	10

Mit der Auswertung der Daten erhofft er sich Aufschlüsse über den zu erwartenden Ertrag seiner Plantage.

a) Wie lautet das untersuchte statistische Merkmal und wie ist es skaliert? Ist es häufbar, nicht häufbar, stetig oder diskret?

b) Stellen Sie die Häufigkeiten aus der Tabelle graphisch dar.

c) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

d) An wie vielen Tagen der Saison schien die Sonne mindestens 4 Stunden?

e) Wie lange höchstens schien die Sonne an den 40 sonnenärmsten Tagen der Saison?

f) An wie vielen Tagen in dieser Saison schien die Sonne prozentual zwischen 4 und 9 Stunden?

Aufgabe 2-11: *Berliner Luftqualität*
An einer Messstation zur Kontrolle des Stickstoffmonoxydgehalts in der Berliner Luft wurden im März 2022 an 15 Tagen die folgenden Werte ermittelt (mg/m^3):

```
35;  36;  37;  27;  43;
23;  33;  31;  21;  35;
26;  38;  34;  33;  28;
```

a) Wie lautet das untersuchte statistische Merkmal und wie ist es skaliert? Ist es häufbar, nicht häufbar, stetig oder diskret?

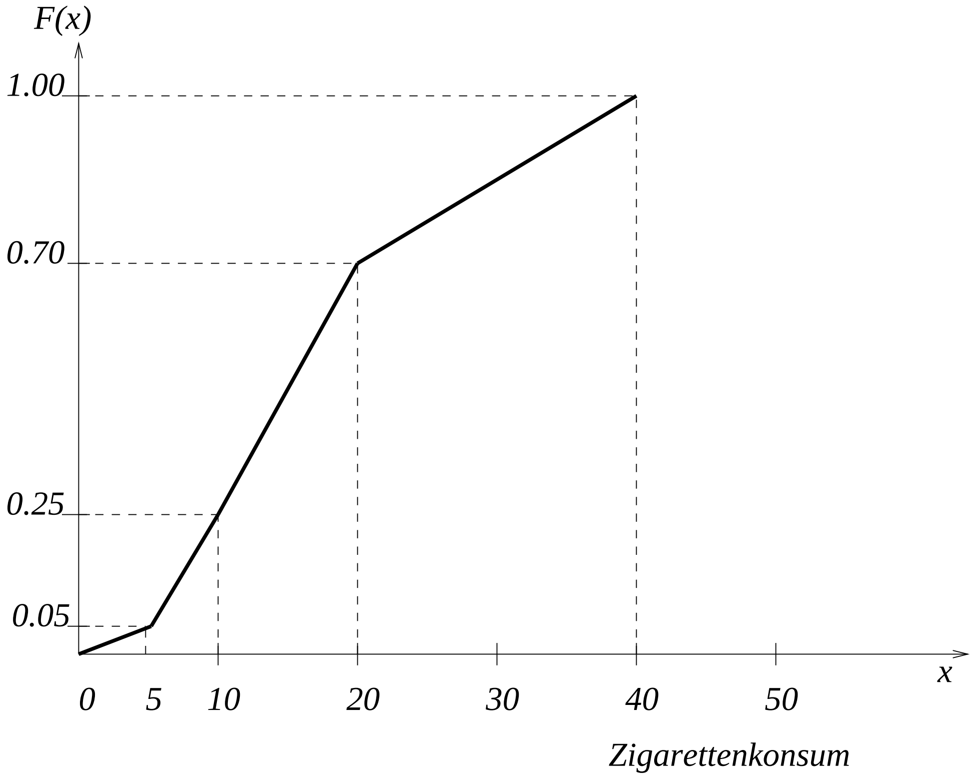
b) Fassen Sie die Messwerte in folgende Klassen zusammen:
19,5–29,5; 29,5–34,5; 34,5–39,5; 39,5–44,5

c) Zeichnen Sie für die klassierten Daten die Häufigkeitsverteilung und die empirische Verteilungsfunktion.

d) An wieviel Tagen betrug der Stickstoffmonoxydgehalt der Luft mindestens 34,5 mg/m^3?

e) Wieviel Stickstoffmonoxydgehalt war an den 80% "saubersten" Tagen höchstens in der Luft?

Aufgabe 2-12: *Zigaretten*
Im Rahmen einer medizinischen Untersuchung in S–Stadt im Januar 2022 wurden 200 Personen zufällig befragt, wieviele Zigaretten sie pro Tag rauchen. Das Ergebnis dieser Untersuchung sei in folgender Graphik beschrieben:



a) Wie heißt die obige Darstellungsform? Welche Annahmen wurden hinsichtlich der Verteilung innerhalb jeder Klasse getroffen?

b) Geben Sie die absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten, die Häufigkeitsdichten und die empirische Verteilungsfunktion an.

c) Geben Sie an, wie hoch der Anteil der Befragten ist, die mindestens 20 Zigaretten pro Tag rauchen.

Aufgabe 2-13: *Eiskugelkonsum*
Der Eisverkäufer Hardy möchte seinen Kunden täglich frisches Eis verkaufen. Damit er immer die richtigen Mengen vorrätig hat und in Zukunft besser planen kann, zählt er an einem Tag bei 200 Kunden den Eiskugelkonsum:
Kein Kunde hat genau 2 oder mehr als 6 Kugeln verlangt. Je 20% der Kunden wollten 1 Kugel oder mindestens 5 Kugeln. Höchstens 3 Kugeln verlangten 45% der Kunden. Die Summe der Anteile der Kunden, die 4 bzw. 6 Kugeln wollten, war zehnmal so hoch wie der Anteil der Kunden, die 5 Kugeln verlangten.

a) Wie lautet das untersuchte statistische Merkmal und wie ist es skaliert? Ist es häufbar, nicht häufbar, stetig oder diskret?

b) Bestimmen sie tabellarisch die absoluten und relativen Häufigkeiten sowie die empirische Verteilungsfunktion.

c) Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung und die empirische Verteilungsfunktion graphisch dar.

d) Wie viel Prozent der Kunden kauften höchstens 5 Kugeln Eis?

e) Wie viele Kugeln Eis mindestens kauften 80% der Kunden?

f) Wie viele Kugeln Eis kauften genau 35% der Kunden?

Aufgabe 2-14: *WM–Berichterstattung*
Um festzustellen, wie viele Stunden pro Spieltag ein Fußball–Fan die WM–Berichterstattung im Fernsehen während der letzten Fußball–WM verfolgte, wurden 20 Fußball–Fans in A–Dorf nach ihrem Fernsehkonsum während der WM befragt. Die Befragung brachte folgendes Ergebnis:

Stunden	0	1	2	3	4
relative Häufigkeit	0.05	0.1	0.4	0.2	0.25

a) Wie lautet das hier untersuchte statistische Merkmal und wie ist es skaliert? Ist es häufbar, nicht häufbar, stetig oder diskret?

b) Bestimmen Sie tabellarisch die absoluten und relativen Häufigkeiten und die empirische Verteilungsfunktion.

c) Wieviele Stunden sehen 10% der Befragten höchstens fern?

d) Geben sie an, wieviele Stunden 85% der Befragten mindestens fernsehen.

e) Geben Sie die Stundenzahl an, die genau 20% der Befragten fernsehen.

Aufgabe 2-15: *Auswirkung der Regelstudienzeit*
Um die Auswirkung der Regelstudienzeit zu demonstrieren, wurden im Januar 2022 die Studienzeiten von 200 Wirtschaftsingenieuren in der Bundesrepublik Deutschland erhoben, die in den vergangenen 4 Semestern ihr Studium abgeschlossen haben. Es ergaben sich folgende Daten (fiktive Daten):

Semesterzahl	10	11	12	13	14	15
relative Häufigkeit	0,1	0,1	0,4	0,2	0,15	0,05

a) Wie heißt das untersuchte statistische Merkmal und wie ist es skaliert? Ist es häufbar, nicht häufbar, stetig oder diskret?

b) Bestimmen Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten.

c) Bestimmen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

d) Wie viele Semester höchstens benötigten die 10% schnellsten Studenten?

e) Wie viele Semester mindestens benötigten die 80% langsamsten Studenten?

f) Geben Sie die Semesterzahl an, die genau 20% der Studenten benötigten.

Von nun an soll nur noch das Merkmal Y: "Semesterzahl" mit den Ausprägungen

- "klein" (weniger als 12 Semester)
- "mittel" (genau 12 Semester)
- "groß" (mehr als 12 Semester)

betrachtet werden.

g) Welche Skalierungsart liegt jetzt vor?

h) Zeichnen Sie die Häufigkeitsverteilung.

i) Ist es sinnvoll, bei einem nominalskalierten Merkmal eine Verteilungsfunktion anzugeben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2-16: *Tennis Turniere*
Tennis–As B.B. blickt auf eine völlig missglückte Saison zurück. Insgesamt nahm er an 40 Turnieren in aller Welt teil. Jedes Turnier ging über 6 Runden:
1. Runde
2. Runde
3. Runde = Achtelfinale
4. Runde = Viertelfinale
5. Runde = Halbfinale
6. Runde = Finale
Gespielt wurde in jeder Runde im k.o.–Verfahren, d.h. der Spieler, der seine Partie verlor, schied aus.
Die Bilanz seiner Turnierergebnisse lässt keine Freude bei B.B. aufkommen: Er stand zweimal im Finale und wurde sechsmal erst im Halbfinale von seinem Gegner geschlagen. Zehnmal verlor er jedoch schon in der ersten Runde und sechzehnmal kam für ihn in der 2. Runde das Aus. In der dritten Runde schied er allerdings bei keinem Turnier aus.

a) Wie heißt das untersuchte statistische Merkmal und wie ist es skaliert? Ist es häufbar, nicht häufbar, stetig oder diskret?

b) Bestimmen Sie tabellarisch die absoluten und relativen Häufigkeiten und die empirische Verteilungsfunktion.

c) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

d) Bei wieviel Prozent der Turniere schied B.B. vor dem Achtelfinale aus?

e) Bei wieviel Prozent der Turniere erreichte B.B. mindestens das Halbfinale?

f) Bei wie vielen Turnieren spielte B.B. noch in der 2. Runde mit?

g) In welcher Runde spätestens schied B.B. bei 80% der Turniere aus?

h) In welcher Runde schied B.B. bei genau 40% der Turniere aus?

i) Interpretieren Sie – bezogen auf den Aufgabentext – kurz den Funktionswert $F(x)$ an der Stelle $x = 7$.

Aufgabe 2-17: *Eine Befragung von Studierenden - Teil II*
Bezogen auf die Aufgabe 2-7

a) Ermitteln Sie einen geeigneten Lageparameter für das Erhebungsmerkmal X: "Studiengang".

b) Ermitteln Sie drei geeignete Lageparameter für das Erhebungsmerkmal Y: "Anzahl der Geschwister".

c) Berechnen Sie basierend auf der Urliste das durchschnittliche Einkommen eines/einer Studierenden.

d) Berechnen Sie basierend auf der Häufigkeitsverteilung der klassierten Daten des Erhebungsmerkmals Z: "Einkommen" zwei aussagekräftige Lageparameter, die Quartile und das 90%–Quantil.

e) Geben Sie für das Merkmal "Einkommen" die 5 - Zahlen - Zusammenfassung (Min, Max, Median, unteres und oberes Quartil) an und zeichnen Sie den Box–Plot.

▶ Univariate Statistik-Befragung von Studierenden Teil II (14 min).mp4

Aufgabe 2-18: *Zugfolge - Teil II*

a) Berechnen Sie aufgrund der Häufigkeitsverteilung der klassierten Daten für das Erhebungsmerkmal X: "Zugfolgeabstand" der Aufgabe 2-8 drei aussagekräftige Lageparameter.

b) Welcher durchschnittlicher Zugfolgeabstand ergibt sich auf der Basis der Urliste? Wie erklären Sie sich den Unterschied zum zahlenmäßigen Ergebnis des gleichen Mittelwertes aus Frage a)?

▶ Univariate Statistik-Zugfolge Teil II.mp4

Aufgabe 2-19: *Gartenzwerg–Großhandel*
Herr Meier besitzt einen Gartenzwerg–Großhandel mit drei Filialen: Berlin, New York und Flensburg. Am Ende des Geschäftsjahres möchte er einen Überblick über die Geschäftslage erhalten und fordert deshalb in allen drei Filialen Informationen über die innerhalb des letzten Jahres eingegangenen Aufträge an.

A: Seine Berliner Filiale übermittelt ihm folgende Informationen:

Auftragshöhe in EUR von...bis unter...	Anzahl der Aufträge
0 – 20 000	15
20 000 – 50 000	30
50 000 – 150 000	45
150 000 – 300 000	10

a) Wie heißt das untersuchte statistische Merkmal und wie ist es skaliert?

b) An welchen statistischen Einheiten wurde dieses Merkmal erhoben?

c) Berechnen Sie die durchschnittliche Auftragshöhe.

B: Die New Yorker Filiale antwortet auf Herrn Meiers Anfrage kurz und bündig: Y: "Auftragshöhe [in \$] pro Auftrag"; 95 Aufträge; $\bar{y} = 60000$. Um besser vergleichen zu können, möchte Herr Meier diese Angaben in EUR kennen. Berechnen Sie die durchschnittliche Auftragshöhe, wenn folgender Dollarkurs gilt: 1 \$ = 1,5 EUR.

C: Aus Flensburg erhält Herr Meier folgende Daten:
2 000 EUR; 12 000 EUR; 17 000 EUR; 12 000 EUR; 200 000 EUR.

a) Welche(n) Mittelwert(e) können Sie in diesem Fall sinnvoll angeben? Begründen Sie für jeden die Vor– und Nachteile in dieser Situation !

b) Ein Fernschreiben korrigiert die Höhe des letzten Auftrages auf 2 000 EUR. Berechnen Sie aus den korrigierten Daten die durchschnittliche Auftragshöhe.

D: Berechnen Sie die durchschnittliche Auftragshöhe für das gesamte Unternehmen.

Univariate Statistik-Gartenzwerg-Grosshandel (11 min).mp4

Aufgabe 2-20: *Bibliotheken - Teil II*
Die folgenden Fragen beziehen sich auf die Häufigkeitsverteilungen der klassierten Daten der Aufgabe 2-9.

a) Berechnen Sie drei aussagekräftige Mittelwerte für das Erhebungsmerkmal X: "Öffnungszeiten".

b) Ermitteln Sie ebenfalls drei sinnvolle Mittelwerte für das Erhebungsmerkmal Y: "Ausleihzeiten".

c) Ist der Modus ein aussagekräftiger Mittelwert für das Erhebungsmerkmal Z: "Etat für Neuerwerb"?

d) Berechnen Sie für das Merkmal Z: "Etat für Neuerwerb" die Quartile. Zeichnen Sie einen Boxplot.

Aufgabe 2-21: *Erdbeerplantage - Teil II*
Der Student Alois aus Aufgabe 2-10 möchte wissen:

a) Wie viele Stunden schien die Sonne durchschnittlich pro Tag in der Saison?

b) Wie lange schien die Sonne höchstens an den 50% sonnenärmsten Tagen der Saison?

Aufgabe 2-22: *Ladekabel*
In den Städten A, B und C wurden jeweils in mehreren Geschäften die Preise für einen bestimmtes Ladekabel ermittelt. Im Ort A ergab sich aufgrund von 11 Einzelwerten ein Durchschnittspreis von 16,44 EUR. In B betrug der Durchschnittspreis basierend auf 6 Einzelwerten 15,28 EUR und in C wurde nach dem Besuch von 13 Geschäften als Durchschnittspreis 14,86 EUR ermittelt.
Wie hoch ist der Durchschnittspreis des Ladekabels unter Berücksichtigung sämtlicher Preisinformationen aus den Städten A, B und C?

Aufgabe 2-23: *Tägliche Arbeitswege - Teil I*
Der Direktor einer Bank möchte sich über die täglich anfallenden Anfahrtswege seiner Mitarbeiter zum Arbeitsplatz informieren. Von der Personalabteilung wird ihm auf seine Anfrage folgende Tabelle übersandt.

Anfahrtsweg (km)	Anzahl der Beschäftigten
0 – 1	7
1 – 5	24
5 – 15	35
15 – 30	18
30 – 50	16

a) Nennen Sie die statistischen Einheiten und das untersuchte statistische Merkmal. Wie ist das Merkmal skaliert?

b) Ermitteln Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten, die Häufigkeitsdichten und die empirische Verteilungsfunktion. Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung und die empirische Verteilungsfunktion graphisch dar.

c) Berechnen Sie den durchschnittlichen Anfahrtsweg.

d) Welcher Anfahrtsweg tritt bei den Beschäftigten dieser Bank am häufigsten auf? Wie wird dieser Parameter genannt?

e) Welcher Anfahrtsweg ergibt sich, wenn 50% der Beschäftigten einen kürzeren bzw. 50% einen weiteren Anfahrtsweg haben?

f) Berechnen Sie die p–Quantile für $p \in \{0,05, 0,25, 0,75, 0,9\}$.

Aufgabe 2-24: *Reinigungsunternehmen - Teil I*
Für die Angestellten der drei Putzkolonnen eines Reinigungsunternehmens ergeben sich aufgrund von Alter, Betriebszugehörigkeit und Einsatzgebiet folgende Einkommen (in EUR) pro Monat:

(1) 2 624, 2 830, 2 386, 2 395, 2 147, 2 546

(2) 2 936, 2 758, 2 774, 2 822

(3) 2 325, 2 536, 2 395, 2 454, 2 640.

Berechnen Sie für jede Putzkolonne und für das gesamte Reinigungsunternehmen das durchschnittliche Einkommen und den Median des Einkommens.

Aufgabe 2-25: *Besuche pro Woche*
50 Studenten wurden danach gefragt, wie oft sie in der vergangenen Woche ihre Freundin besucht haben. Das Ergebnis ist folgendes:

```
0;  3;  2;  6;  4;  0;  0;  1;  4;  3;
1;  1;  1;  7;  1;  6;  0;  2;  7;  1;
0;  7;  0;  5;  1;  2;  1;  6;  4;  1;
5;  9;  4;  0;  3;  6;  4;  3;  2;  5;
4;  3;  2;  1;  4;  1;  3;  5;  3;  6;
```

a) Erstellen Sie die absolute und relative Häufigkeitsverteilung und die empirische Verteilungsfunktion.

b) Wie oft besuchte ein Student durchschnittlich seine Freundin?

Aufgabe 2-26: *Kurzarbeiter*
Im März 2022 wurden in den fünf neuen Bundesländern folgende Anzahlen von Kurzarbeitern nach dem Arbeitsausfall (in %) registriert (fikitve Daten):

Arbeitsausfall (%)	Anzahl der Kurzarbeiter
10 – 25	461 200
25 – 50	687 400
50 – 75	385 200
75 – 100	233 200

a) Berechnen Sie den durchschnittlichen Arbeitsausfall der Kurzarbeiter im März 2022 in den fünf neuen Bundesländern.

b) Welcher Arbeitsausfall ergibt sich, wenn 50% der Kurzarbeiter einen geringeren Arbeitsausfall und 50% der Kurzarbeiter einen höheren Arbeitsausfall hatten?

Aufgabe 2-27: *Perlenkette*
Agathe hat von ihrem Freund eine Perlenkette geschenkt bekommen. Um sich einen Überblick über den Wert der Kette zu verschaffen, misst sie die Durchmesser (in mm) der Perlen:

```
3,1  4,2  3,7  6,8  7,3  5,2  5,4  4,5  3,9  3,3
5,0  3,7  6,9  6,1  4,0  4,1  6,1  6,0  5,7  5,2
5,6  4,4  4,2  3,7  5,3  3,4  6,8  6,3  4,1  3,3
4,2  5,8  5,6  3,2  5,5  4,5  5,1  4,6  5,3  3,4
6,5  6,2  4,0  3,6  4,9  4,8  4,9  4,6  4,7  4,8
4,5  5,4  3,5  5,8  4,9  5,0  3,6  7,5  3,2  3,2
3,4  3,5  3,2  5,1  5,5  4,3  4,5  3,8  5,1  3,8
7,2  5,9
```

a) Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle bei Zugrundelegung von Klassen mit 1 mm Klassenbreite.

b) Berechnen Sie basierend auf den klassierten Daten den durchschnittlichen Durchmesser der Perlen.

c) Welcher Durchmesser trat bei dieser Perlenkette am häufigsten auf?

d) Welchen Durchmesser höchstens haben 50% der kleinsten Perlen?

Aufgabe 2-28: *Zuckergewicht*
Das Füllgewicht von 75 maschinell abgepackten Paketen Zucker wurde kontrolliert. Die Messwerte ergeben folgende Häufigkeitsverteilung:

Füllgewicht (in g)	Anzahl der Pakete
980 – 990	5
990 – 995	12
995 – 1000	23
1000 – 1005	22
1005 – 1010	11
1010 – 1020	2

Berechnen Sie den Modus, den Median und das arithmetische Mittel des Füllgewichts.
Aufgabe 2-29: *Walzabteilung*
In einer Walzabteilung bedienen 4 Arbeiter (A, B, C und D) unterschiedlich moderne Maschinen. Sie benötigen jeweils folgende Durchschnittszeiten zum Walzen eines Stückes Blech:

A: 20 Sek/Stück	B: 30 Sek/Stück
C: 60 Sek/Stück	D: 60 Sek/Stück

I. Betrachten Sie die Variable X: "Bearbeitungszeit in sec/Stück".

a) Angenommen die Arbeiter arbeiten gleichlange, welche Durchschnittszeit pro Stück wird in der Abteilung benötigt?

b) Angenommen den Arbeitern sind folgende Stückkontingente vorgegeben:

A: 1000 Stück	B: 500 Stück
C: 300 Stück	D: 200 Stück

welche Durchschnittszeit pro Stück wird in der Abteilung jetzt benötigt?

II. Betrachten Sie die Variable Y: "hergestellte Stück pro Stunde".

a) Angenommen die Arbeiter arbeiten gleichlange, wie viel Stück werden im Durchschnitt pro Stunde gewalzt?

b) Angenommen den Arbeitern sind die Stückkontingente von I b) vorgegeben, wie viel Stück pro Stunde werden jetzt im Durchschnitt gewalzt?

Aufgabe 2-30: *Schafzucht - Teil I*
Der schottische Großgrundbesitzer McDuff verdient sein Geld mit der Zucht von Schafen. Er nimmt sich für die nächste Schafsschur vor, sowohl billige irische Wanderarbeiter mit einem Leistungslohn von 15 Pfund pro kg Wolle, als auch einheimische Arbeiter für 20 Pfund pro kg Wolle einzusetzen. Für die Iren will er insgesamt 285 Pfund, für die Schotten insgesamt 260 Pfund an Lohnsumme aufbringen.
Wie hoch sind seine durchschnittlichen Lohnkosten pro kg Wolle?
▶ Univariate Statistik-Schafszucht Teil I.mp4
Aufgabe 2-31: *Intercity – Zug*
Ein Intercity – Zug legt 300 km in vier Abschnitten zurück, wobei die Geschwindigkeit wegen unterschiedlicher Streckenbeschaffenheit jeweils verschieden ist:

Streckenabschnitt	Streckenlänge (in km)	Geschwindigkeit (in km/h)
A	100	150
B	60	120
C	50	100
D	90	90

Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit für die Gesamtstrecke.

Aufgabe 2-32: *Bevölkerungsdichte und Ärztedichte*
Für die drei Regionen eines Landes sind jeweils die Bevölkerungsdichte X (Einwohner je km^2) und die Ärztedichte Y (Ärzte je 1 000 Einwohner) gegeben:

Region	Fläche (in km^2)	Bevölkerungsdichte	Ärztezahl	Ärztedichte
1	10 000	60	300	0,50
2	6 000	200	1 200	1,00
3	4 000	300	1 500	1,25

Berechnen Sie die Bevölkerungsdichte X und die Ärztedichte Y für das gesamte Land.

Aufgabe 2-33: *Anstieg der Produktion*
Im Unternehmen U stieg die Produktion des Erzeugnisses E von 2005 bis 2007 im Mittel jährlich um 10%, von 2007 bis 2009 im Mittel jährlich um 20%.

a) Wie hoch war das mittlere Entwicklungstempo der E–Produktion im Unternehmen U von 2005 bis 2009?

b) Auf wieviel Prozent würde die E–Produktion 2011 gegenüber 2007 bei Fortsetzung des mittleren Entwicklungstempos von 2007 bis 2009 steigen?

Aufgabe 2-34: *Drei Betriebe*
Für die 3 Betriebe eines Unternehmens liegen folgende Angaben vor (TEUR = 1000 EUR):

Betrieb	Materialverbrauch in EUR je TEUR Produktion 2010	Produktion in TEUR 2010	Materialverbrauch in TEUR 2011
1	750	80 400	55 800
2	800	26 600	18 350
3	700	60 000	45 850

Der Materialverbrauch des Unternehmens betrug im Jahre 2007: 135 548 TEUR.

a) Ermitteln Sie den durchschnittlichen Materialverbrauch je TEUR Produktion des Unternehmens für das Jahr 2010.

b) Geben Sie das untersuchte statistische Merkmal an. Wie ist es skaliert?

c) Wie hoch wird voraussichtlich der Materialverbrauch des Unternehmens im Jahre 2013 sein, wenn das mittlere jährliche Entwicklungstempo des Zeitraumes 2007 – 2011 weiterhin beibehalten wird?

Aufgabe 2-35: *Kartoffeln*
An zwei Verladestellen für Kartoffeln der Deutschen Bahn wurden folgende Angaben ermittelt:

Verladestelle	Kosten gesamt (EUR)	Kosten je Stunde (EUR/h)	Kosten je verladene Tonne (EUR/t)
1	16 000	40	1,00
2	27 000	45	0,75

a) Berechnen Sie die durchschnittlichen Kosten je verladene Tonne der beiden Verladestellen.

b) Wieviel Tonnen wurden durchschnittlich je Stunde bei beiden Verladestellen verladen?

Aufgabe 2-36: *Nelkenstrauß*
Ein Kunde kauft an einem Tag einen Strauß Nelken für 12 EUR, das Stück zu 0,80 EUR, und am nächsten Tag einen Strauß Nelken für 26 EUR, das Stück zu 1,04 EUR. Welcher durchschnittliche Preis ist für eine Nelke an diesen beiden Tagen bezahlt worden?

Aufgabe 2-37: *Neubauwohnungen*
Über die Bauzeiten der im Jahre 2022 in der Stadt C errichteten Neubauwohnungen liegen folgende Angaben vor:

Bauzeit (in Monaten)	Anteil der neugebauten Wohnungseinheiten (in Prozent)
2–4	3,7
4–6	13,1
6–8	27,5
8–10	21,1
10–12	16,0
12–14	6,4
14–16	5,3
16–18	6,9

Berechnen Sie drei aussagekräftige Mittelwerte zur Beantwortung der Frage: Wie viele Monate Bauzeit wurden im Mittel für die im Jahre 2022 in der Stadt C errichteten Wohnungseinheiten benötigt?
Aufgabe 2-38: *Wanderer*
Ein Wanderer legte 2 Kilometer zurück. Den ersten Kilometer ging er mit einer Geschwindigkeit von 6 km je Stunde, den zweiten mit einer Geschwindigkeit von 4 km je Stunde.
Wie groß war seine Durchschnittsgeschwindigkeit?
Aufgabe 2-39: *Gleisbaubetrieb*
Der Direktor eines Gleisbaubetriebes erhält folgende Information:
In der letzten Schicht von 8 Stunden haben die drei Bauzüge des Betriebes beim Verlegen von Gleisen im Mittel 180,6 Minuten pro Gleis benötigt, wobei Bauzug A 250 Minuten/Gleis, Bauzug B 166,7 Minuten/Gleis und Bauzug C 125 Minuten/Gleis brauchte.
Überprüfen Sie den angegebenen Mittelwert und korrigieren Sie ihn gegebenenfalls mit einer exakten Begründung.

Aufgabe 2-40: *Brutto- und Nettoeinkommen*
Das Bruttoeinkommen aus unselbständiger Arbeit je Beschäftigten und Monat in der Bundesrepublik Deutschland stieg von 3 012 DM im Jahre 1980 auf 4 112 DM im Jahre 1989. Die Nettolohn– und –gehaltssumme je Beschäftigten und Monat veränderte sich von 1 765 DM im Jahre 1980 auf 2 261 DM im Jahre 1989.
Quelle: Zahlen zur wirtschaftlichen Entwicklung der Bundesrepublik Deutschland 1991, Institut der Deutschen Wirtschaft Köln, S. 30.
Vergleichen Sie das Bruttoeinkommen und das Nettoeinkommen je Beschäftigten bezüglich ihres mittleren Entwicklungstempo im Zeitraum 1980–1989.
Aufgabe 2-41: *Lernzeit*
Ein Universitätspräsident gibt eine statistische Untersuchung in Auftrag, mit der festgestellt werden soll, wie viel Zeit die Studierenden für ihr Studium aufwenden. Die Befragung von 100 Studierenden dieser Universität brachte folgendes Ergebnis:
Keiner der Befragten lernt 12 und mehr Stunden am Tag. Bei 22 Studierenden wurde festgestellt, dass sie sich mindestens 6 Stunden am Tag mit ihrem Studium beschäftigen. Weniger als 3 Stunden am Tag investierten 30% der Befragten in ihr Studium. Die Masse der Studierenden (65%) beschäftigt sich zwischen 3 und 8 Stunden täglich mit Studienangelegenheiten.

a) Wie heißt das untersuchte Merkmal und wie ist es skaliert?

b) Bestimmen Sie tabellarisch die absoluten und relativen Häufigkeiten und die empirische Verteilungsfunktion. Teilen Sie zu diesem Zweck die Daten in vier Klassen ein.

c) Wie viele Stunden höchstens beschäftigt sich genau die Hälfte der Befragten täglich mit dem Studium?

d) Wie viele der Befragten arbeiten mindestens 5 Stunden täglich für ihr Studium?

e) Wie groß ist der durchschnittliche Zeitaufwand für das Studium bei den 100 befragten Studierenden?

f) Welcher Zeitaufwand für das Studium trat bei den befragten Studierenden am häufigsten auf?

Aufgabe 2-42: *Körpergröße*
Die folgende Tabelle gibt die Körpergröße von 5 Kindern in Zoll und cm an (es wird der Einfachheit halber 1 Zoll = 2,5 cm gesetzt):

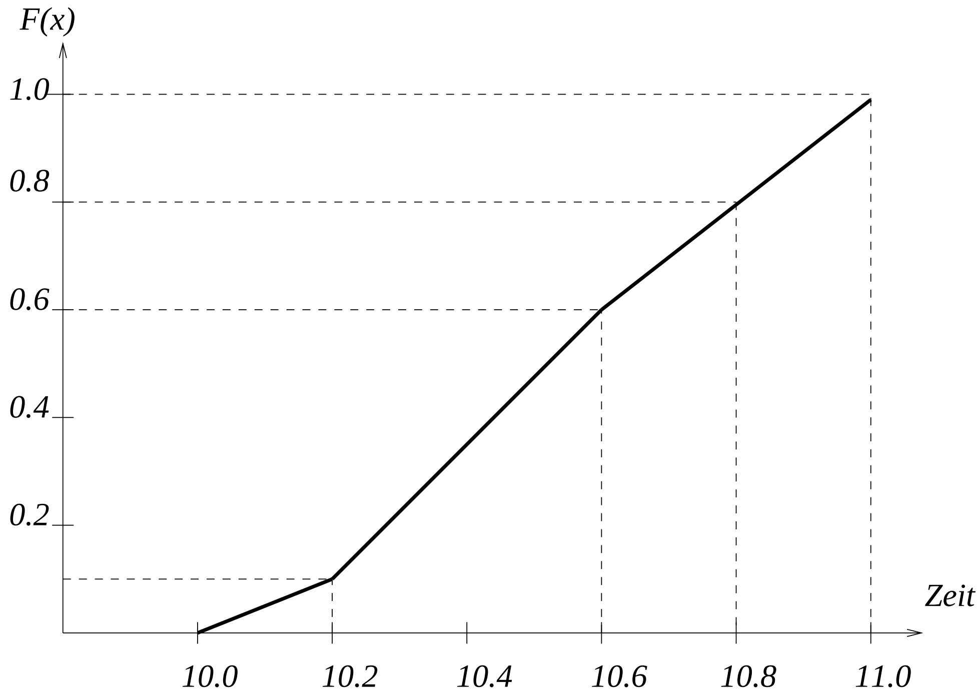
x	cm	120	130	125	130	135
y	Zoll	48	52	50	52	54

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel, die Standardabweichung und den Variationskoeffizienten für beide Messreihen.

b) Welche Beziehung besteht zwischen den jeweiligen Ergebnissen beider Messreihen? Geben Sie diese Beziehung formal an.

Aufgabe 2-43: *Maschinen*
In einer Fabrik stehen zwei Maschinen, die Motorenhauben stanzen: die erste Maschine für den Fiat mit einer durchschnittlichen Länge von 80 cm, die zweite für den Mercedes mit einer durchschnittlichen Länge von 300 cm. Die erste Maschine produziert mit einer Standardabweichung von 4 cm, die zweite mit einer Standardabweichung von 6 cm.
Welche Maschine arbeitet zuverlässiger?

Aufgabe 2-44: *Leichtathletikabteilung*
Die Leichtathletikabteilung des Sportvereins Z ist spezialisiert auf das Training von 100 m – LauferInnen. Nach einem Jahr intensivsten Trainings wurden die Zeiten der 20 LäuferInnen des Vereins gestoppt. Dabei ergab sich folgende Verteilungsfunktion:



a) Zeichnen Sie die zur Verteilungsfunktion gehörige Häufigkeitsverteilung.

b) Welche Zeit höchstens benötigen die 80% schnellsten Läufer?

c) Berechnen Sie die mittlere quadratische Abweichung bezogen auf das arithmetische Mittel und auf den Median.

d) Welche Größenbeziehung besteht zwischen den beiden Ergebnissen von c)? Gilt diese Größenbeziehung stets? Wenn ja, zeigen Sie dies.

Aufgabe 2-45: *Schafzucht Teil - II*
Fortsetzung der Aufgabe 1-33. Unser schottischer Großgrundbesitzer McDuff (aus Aufgabe 33) verkauft die Wolle an einen Freund auf den Niederländischen Antillen. Im Laufe der letzten fünf Monate erwirtschaftete er folgende Gewinne (in Tsd. Gulden): 5 ; 4 ; 20 ; 6 ; 4.
McDuff tauscht sein Geld stets bei einem Bankier in Edinburgh in Pfund ein. Er weiß, dass der Wechselkurs stabil ist und er jeden Monat eine feste, vom Umtauschbetrag unabhängige Gebühr zu entrichten hat. In den letzten fünf Monaten hat er insgesamt 15,5 (Tsd.) Pfund ausgezahlt bekommen. Die Varianz betrug 9,44 (Tsd. Pfund)^2.
Wie hoch sind Gebühr und Wechselkurs?
Aufgabe 2-46: *Reinigungsunternehmen - Teil II*
Berechnen Sie für jede Putzkolonne aus Aufgabe 2-24 die Standardabweichung und den Variationskoeffizienten.
Ermitteln Sie anschließend unter Verwendung dieser Varianzen die Varianz des zusammengesetzten Datensatzes, d.h. die Varianz für das gesamte Reinigungsunternehmen.
Aufgabe 2-47: *Tägliche Arbeitswege - Teil II*
Berechnen Sie, ausgehend von Aufgabe 2-23

a) den Quartilsabstand

b) die mittlere absolute Abweichung vom Median

des Anfahrtsweges/Beschäftigter der betrachteten Bank.
Aufgabe 2-48: *CDs*
In der Umsatzstatistik eines Einzelhändlers für das zurückliegende Geschäftsjahr sind für die drei Sorten CDs folgende Preise und Umsätze ausgewiesen:

Sorte	1	2	3
Preis	3,90	4,50	4,90
Umsatz	1224,60	967,50	519,40

a) Berechnen Sie den Durchschnittspreis für CDs im vergangenen Geschäftsjahr.

b) Berechnen Sie die Standardabweichung des Preises für CDs.

Aufgabe 2-49: *Führerschein–Entziehungen*
Promille gefährden den Führerschein!
Bei den im Jahre 1990 durchgeführten Kontrollen wurde für die angegebenen Altersklassen nachstehende Anzahlen von Führerschein–Entziehungen registriert.
nach: Berliner Zeitung vom 29.2./1.3.1992

Alter (Jahre)	Führerschein–Entziehungen
20 – 30	40 500
30 – 40	29 200
40 – 50	22 100
50 – 60	12 600

a) Berechnen Sie das Durchschnittsalter der betroffenen Fahrer(innen).

b) Berechnen Sie die Standardabweichung des Alters und den Variationskoeffizienten (runden Sie dafür das Durchschnittsalter auf ganze Jahre auf bzw. ab).

c) In welchem Altersbereich liegen die mittleren 50% der betroffenen Fahrer(innen)?

d) Welches Alter höchstens hatten die 50% jüngsten Fahrer(innen) mit Führerschein–Entzug? Welche Maßzahl haben Sie berechnet?

e) Berechnen Sie zu der Maßzahl unter d) ein geeignetes Streuungsmaß.

Aufgabe 2-50: *Bibliotheken - Teil III*
In Aufgabe 2-9 wurden für die zentralen Universitätsbibliotheken der Bundesrepublik Deutschland unter anderem die beiden Merkmale X: "Öffnungszeiten" und Y: "Ausleihzeiten" untersucht. Beantworten Sie ausgehend von den Häufigkeitsverteilungen der klassierten Daten der Merkmale folgende Frage: Welches der beiden Merkmale weist die größere Streuung auf Basis der Standardabweichung auf? (Runden Sie für Ihre Berechnungen den zugrundegelegten Mittelwert auf eine Stelle nach dem Komma.)

Aufgabe 2-51: *Produktionsleistung einer Maschine*
An einer neu angeschafften Maschine, die pro Tag maximal 300 Produkteinheiten herstellen kann, werden an insgesamt 20 Tagen folgende Stückzahlen produziert:

Anzahl der Tage	6	3	5	4	2
produzierte Stück/Tag	296	297	298	295	299

a) Der Abteilungsleiter behauptet gegenüber dem Firmenchef, dass die Maschine im Durchschnitt pro Tag über 98% ihrer Produktionsleistung erbringt. Überprüfen Sie diese Aussage!

b) Berechnen Sie den Median und die mittlere absolute Abweichung vom Median der produzierten Stückzahlen/Tag.

Aufgabe 2-52: *Lineares Streuungsmaß*
Von den der Größe nach aufsteigend geordneten fünf Werten eines Merkmals X sind nur die ersten vier lesbar:

$$3 \quad 7 \quad 17 \quad 19 \quad ??$$

Wie lautet der 5. Wert, wenn bekannt ist, dass die durchschnittliche absolute Abweichung (lineares Streuungsmaß) der fünf Werte – bezogen auf den Median – gleich 8 ist?

Aufgabe 2-53: *Tarifverhandlungen*
Ein Großunternehmen veröffentlicht folgende Angaben über die Verteilung der Jahresbruttolöhne seiner Lohnempfänger im Jahre 2011: Von den insgesamt 20000 Lohnempfängern bezogen 16000 einen Jahresbruttolohn von mindestens 9600 EUR. Der durchschnittliche Jahresbruttolohn betrug 21200 EUR.
Bei den nächsten Tarifverhandlungen wird folgendes vereinbart: Alle Lohnempfänger erhalten 5% mehr Bruttolohn. Weiter erhalten alle Lohnempfänger mit einem bisherigen Bruttolohn unter 9600 EUR zusätzlich einen Festbetrag von jährlich 200 EUR mehr.
Unterstellen Sie, dass außer den vereinbarten Tarifänderungen keine weiteren Änderungen (Zahl und Struktur der Lohnempfänger, Klasseneinteilung) eintreten.
Wie groß ist dann der durchschnittliche Jahresbruttolohn nach dem Tarifabschluß?

Aufgabe 2-54: *Kontrollzeiten*
An einem Fließband sind sechs Arbeiterinnnen acht Stunden am Tag mit der Kontrolle eines elektronischen Bauteils beschäftigt. Um ein Bauteil zu kontrollieren, benötigen sie folgende Zeiten:

Arbeiterin	Stückzeit
Frau Arbeitsam	0,2 min
Frau Beeilung	0,4 min
Frau Chaos	0,8 min
Frau Durchschnitt	0,5 min
Frau Emsig	0,5 min
Frau Faultier	0,8 min

Berechnen Sie die durchschnittliche Kontrollzeit pro Stück an diesem Fließband.

Aufgabe 2-55: *Körperschaftssteueraufkommen*

Über das Körperschaftssteueraufkommen einer Stadt, angegeben nach den Rechtsformen der körperschaftssteuerpflichtigen Gesellschaften, sind nachstehende Maßzahlen bekannt:

Rechtsform	steuerpflichtige Fälle	mittleres Steueraufkommen (TEUR)	Standardabweichung (TEUR)
AG, KGaA	100	9500	1000
GmbH	9500	100	80
eG	300	200	100
sonstige	100	400	250

Berechnen Sie die Standardabweichung des Körperschaftssteueraufkommens für die gesamte Stadt.

Aufgabe 2-56: *Benzinverbrauch*

Bei einer Testreihe, die den Benzinverbrauch eines Autotyps in Deutschland erfasste, erhielt man folgende Daten:

- arithmetisches Mittel: 8,2 [Liter/100km]
- Standardabweichung: 0,41 [Liter/100km]

Für den Export in die USA müssen die Verbrauchsdaten in Gallonen/100 Meilen angegeben werden (1 Gallone = 3,785 Liter, 1 Meile = 1,609km) Welchen Wert hat der Variationskoeffizient v, wenn der Benzinverbrauch in Gallonen/100 Meilen ausgewiesen wird?

Aufgabe 2-57: *Einkommen der Beamten*

In der Auswertung einer statistischen Erhebung vom April 2012 erhielt die Hälfte der befragten Beamten in einer Region ein monatliches Nettoeinkommen unter 2590 EUR. 1/4 der Beamten erhielten mehr als 3590 EUR. Während die gesamte Einkommensspannweite mit 8000 EUR angegeben wird, wird für die mittleren 50% der Beamten eine Einkommensspannweite von 1770 EUR ausgewiesen. Das geringste Einkommen lag bei 500 EUR. Die Standardabweichung der Nettoeinkommen wird mit 1620 EUR angegeben. Das sind 54% des durchschnittlichen Nettoeinkommens.
Bestimmen Sie das 25%–Quartil des Nettoeinkommens der befragten Beamten.

Aufgabe 2-58: *Telefonanbieter*

Familie Sparsam nutzt fleißig die Niedrigpreise verschiedener Telefonanbieter. Im Monat Februar 2015 ergibt ihre Telefonrechnung folgende Daten für Ferngespräche:

Anbieter	Minutenpreis (in EUR)	Rechnungsbetrag (in EUR)
A_1	0,10	20,00
A_2	0,15	11,25
A_3	0,19	47,50

Berechnen Sie den von Familie Sparsam im Februar bezahlten Durchschnittspreis für eine Minute Ferngespräch.

Aufgabe 2-59: *Kaltmieten*

In einem Wohnviertel mit Häusern verschiedener Wohnungseigentümer sollen die Kaltmieten analysiert werden. Aus einer ersten Auswertung ergibt sich folgende Tabelle:

Kaltmiete (pro m^2) von … bis unter …	Anzahl
0–6	5
6–8	10
8–10	30
10–13	30
13–16	20
16–20	5

Bestimmen Sie den Median aus diesen Daten.

Aufgabe 2-60: *Telefon–Interviews*
Eine Marketing-Firma führt häufig Telefon-Interviews in Berlin durch. Hierbei werden folgende Entgelte an die Telekom bezahlt: im Tagestarif (9-18 Uhr) 12 Cent/90 Sekunden und im Freizeittarif (5-9 Uhr und 18-21 Uhr) 12 Cent/150 Sekunden.
Es soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass bei der Telekom jede angefangene 90– bzw. 150–Sekundeneinheit voll bezahlt werden muss.
Die Interviews dauern entweder genau 10 oder genau 20 Minuten. An einem zufällig ausgewählten Tag werden die Telefongespräche wie folgt geführt:

Zeitbereich	10-Min.-Interviews	20-Min.-Interviews
7-8 Uhr	3	1
11-14 Uhr	10	20
19-20 Uhr	15	10

Wie hoch sind die mittleren Telefonkosten für ein Interview an diesem Tag?
Aufgabe 2-61: *Glücksspielautomaten*
In der Lieblingskneipe der Studentin Fritzi stehen zwei Glücksspielautomaten. Beide Automaten erwarten den gleichen Einsatz pro Spiel. Um ihre Gewinnchancen zu optimieren, spielt Fritzi mit jedem der Automaten für eine Weile. Folgende Gewinne erzielt sie in den einzelnen Spielen:

Automat A: 0,0 1,5 2,0 1,5 2,0 2,5 5,5 1,0
Automat B: 6 mal 0,5; 5 mal 1,0; 1 mal 7,5; 2 mal 5,5

Welchen Median hat der Automat mit dem größten durchschnittlichen Gewinn?

Aufgabe 2-62: *Einkommensgleichheit*
Ein Ökonom möchte die relative Einkommensgleichheit auf den drei melanesischen Inseln Atoll A, B und C vergleichen. Auf jeder Insel leben 8 Personen. Zahlungsmittel auf den Inseln sind Kauri Schnecken. Als geeignetes Maß erscheint dem Ökonomen der Variationskoeffizient. Berechnen Sie diesen für Atoll A mit folgender Einkommenstabelle.

Person	Atoll A Einkommen in Kauri Schnecken
1	225
2	185
3	250
4	150
5	237
6	100
7	87
8	305

Aufgabe 2-63: *Festgeldkonten*
Eine internationale Bank, die in 5 Ländern agiert, bietet Festgeldkonten an. Die Einlagen werden länderabhängig mit einem variablen Zinssatz $z(L) = 0,7z + 0,3x_{0,5}(L)$ verzinst, wobei $z(L)$ der länderspezifische, variable Zinssatz, z ein länderunabhängiger Zinsatz und $x_{0,5}(L)$ der Median der Zinssätze für Einlagen im jeweiligen Land sind. Der länderunabhängige Zinssatz z beträgt $5,2\%$. Die länderspezifischen Verteilungen der Einlagezinssätze sind in nachfolgender Tabelle gegeben:

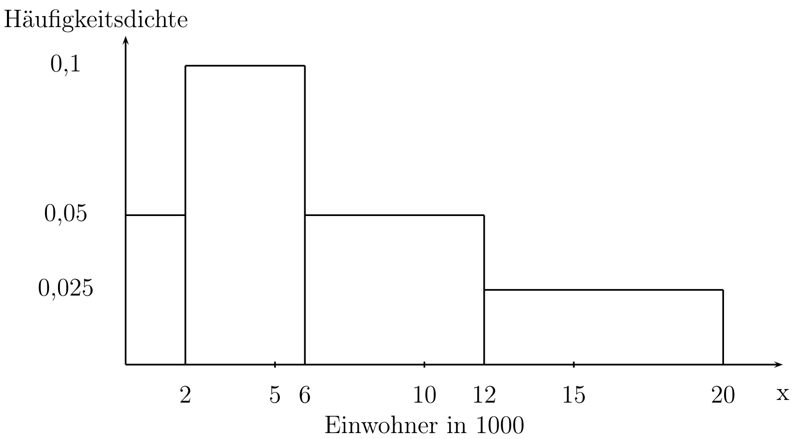
	Verteilung der Einlagenzinssätze				
Zinssätze	Land 1	Land 2	Land 3	Land 4	Land 5
4,0 – 4,5%	0,200	0,050	0,020	0,150	0,275
4,5 – 5,0%	0,240	0,110	0,055	0,350	0,375
5,0 – 5,5%	0,300	0,340	0,300	0,350	0,350
5,5 – 6,0%	0,260	0,500	0,625	0,150	0,000

Berechnen Sie den durchschnittlichen variablen Zinssatz für Festgeldkonten dieser internationalen Bank.

Aufgabe 2-64: *Einwohnerzahlen*
Für das Jahr 1980 wurden nachstehende Einwohnerzahlen (in Millionen) im Fischer–Weltalmanach 2000 veröffentlicht.

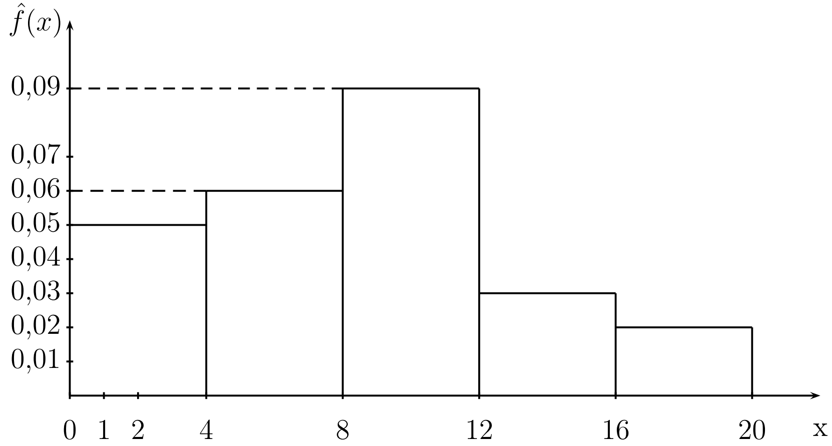
Land	Einwohner (Millionen)	Land	Einwohner (Millionen)
Bangladesh	87	Indonesien	148
Brasilien	122	Japan	117
China	981	Pakistan	83
Deutschland	78	Russland	139
Indien	687	USA	227

Berechnen Sie einen aussagekräftigen Mittelwert.
Aufgabe 2-65: *Histogramm*
Für das Merkmal „Einwohnerzahl“ von 110 Gemeinden eines Landkreises liegt folgendes Histogramm vor:



Welche Anzahl von Gemeinden hat mindestens 5000 und höchstens 16000 Einwohner?

Aufgabe 2-66: *Internetstunden*
Das folgende Histogramm gibt die Häufigkeitsverteilung von Internetstunden pro Woche für eine Grundgesamtheit von 100 Informatikstudenten an.



Bestimmen Sie den Median aus diesen Daten.
Aufgabe 2-67: *Fließband*
An einem Fließband sind 6 Arbeiter acht Stunden am Tag mit der Kontrolle eines elektronischen Bauteils beschäftigt. Um ein Bauteil zu kontrollieren, benötigen sie folgende Zeiten:

Arbeiter	Stückzeit (in Minuten)
A	2
B	4
C	8
D	10
E	8
F	5

Berechnen Sie einen geeigneten Mittelwert für die Kontrollzeit pro Stück an diesem Fließband.

Aufgabe 2-68: *Schulbezirke*
Aus einem Datensatz mit nicht klassierten Daten über 506 Schulbezirke in einer Großstadt wurden folgende Variablen zur Analyse ausgewählt:

- X: der Schulbezirk liegt verkehrsgünstig (1) oder nicht (0)
- Y: durchschnittliche Anzahl von Räumen pro Haus im Schulbezirk

Für diese Variablen wurden folgende Maßzahlen berechnet:

Maßzahl	X	Y
arithmetischer Mittelwert	0,07	6,28
Maximum	1,00	8,78
Median	0,00	6,21
Minimum	0,00	3,56
Modus	0,00	5,71
Spannweite	1,00	5,22
Standardabweichung	0,00	0,70
Varianz	0,07	0,49
25%-Quartil	0,00	5,88
75%-Quartil	0,00	6,63

Begründen Sie kurz, welche Maßzahlen für welche Variable sinnvoll sind.
Aufgabe 2-69: *Tarifverhandlungen*
Ein Großunternehmen veröffentlicht folgende Angaben über die Verteilung der Jahresbruttolöhne seiner Lohnempfänger im Jahre 2011: Von den insgesamt 20000 Lohnempfängern bezogen 16000 einen Jahresbruttolohn von mindestens 9600 EUR. Der durchschnittliche Jahresbruttolohn betrug 21200 EUR.
Bei den nächsten Tarifverhandlungen wird folgendes vereinbart: Alle Lohnempfänger erhalten 5% mehr Bruttolohn. Weiter erhalten alle Lohnempfänger mit einem bisherigen Bruttolohn unter 9600 EUR zusätzlich einen Festbetrag von jährlich 200 EUR mehr.
Unterstellen Sie, dass außer den vereinbarten Tarifänderungen keine weiteren Änderungen (Zahl und Struktur der Lohnempfänger, Klasseneinteilung) eintreten.
Wie groß ist dann der durchschnittliche Jahresbruttolohn nach dem Tarifabschluß?

Aufgabe 2-70: *Kaufkurs der Aktien*
Zu Börsenbeginn am gestrigen Tag betrug der Kurs von 4 Aktien, die in Zeile 2 der Tabelle angegebenen Werte. Jemand kaufte zu diesen Kursen die Aktien zu den Kaufbeträgen, die in der Zeile 3 der Tabelle enthalten sind.

Aktie	A	B	C	D
Kurs (in Euro)	500	600	400	700
Kaufbetrag (in Euro)	45000	84000	3600	14000

Berechnen Sie den mittleren Kaufkurs der Aktien.
Aufgabe 2-71: *Drei Stichproben*
Von drei verschiedenen Stichproben mit nur positiven Beobachtungswerten sind folgende Informationen gegeben:

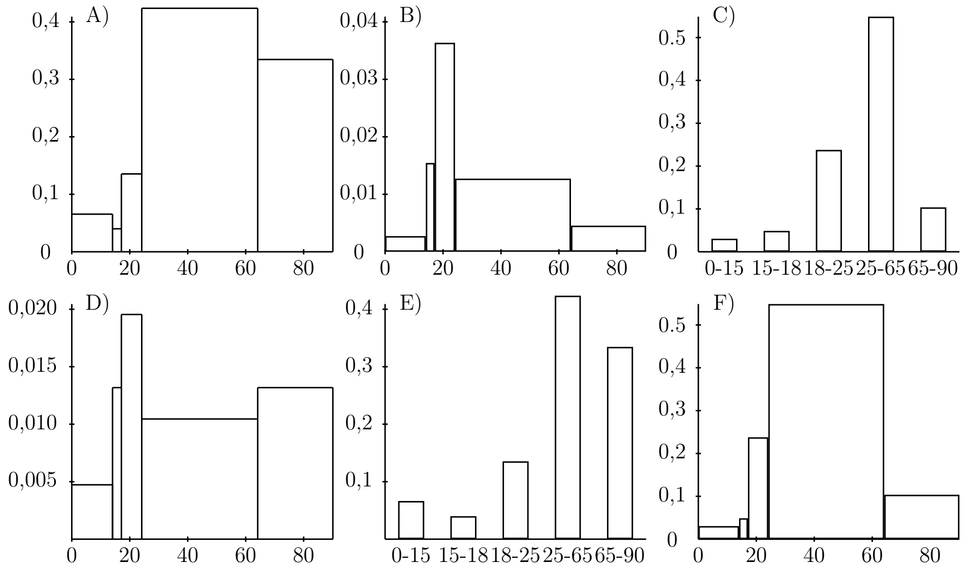
Stichprobe	1	2	3
Stichprobenumfang	10	40	50
arithmetisches Mittel	51	53	54
Varianz	21	22	23

Die drei Stichproben werden zu einer einzigen Stichprobe vereinigt. Berechnen Sie die Varianz für die gesamte Stichprobe.

Aufgabe 2-72: *Grafische Darstellung*
Gegeben sind folgende Daten des statistischen Bundesamtes von 1998 über das Alter der im Straßenverkehr Getöteten innerhalb von Ortschaften.

Alter	unter 15	15 - 18	18 - 25	25 - 65	65 - 90
Anzahl	126	76	258	808	638

Welche der folgenden grafischen Darstellungen beschreibt die Häufigkeitsverteilung der Daten korrekt?



Aufgabe 2-73: *Das erste Tor*
Der folgenden Liste ist zu entnehmen, wieviele Minuten man bei jedem von 25 Fußballspielen warten musste, bis das erste Tor fiel:

```
40;  65;  11;  43;  34;  41;   3;   1;  43;  9;
21;   4;  12;  41;   9;  46;  14;  29;  41;  7;
31;  43;  25;  23;   16
```

Auf der Grundlage einer Gruppierung mit vier Klassen (1. Klasse: 0 - 15, 2. Klasse: 15 - 30, 3. Klasse: 30 - 45, 4. Klasse: 45 - 90min) beantworten Sie die Frage zu: Wie groß ist der Anteil der Spiele, bei denen man mehr als 20, aber höchstens 60 Minuten auf das erste Tor warten musste?

2.2 Bivariate Statistik

Aufgabe 2-74: *Stellung im Beruf*
100 nicht selbständig Erwerbstätige eines Berliner Stadtbezirkes wurden per 10.01.2011 nach dem Geschlecht und der Stellung im Beruf befragt. Die Erhebung ergab folgendes Ergebnis:

Geschlecht	Stellung im Beruf		
	Beamte(r)	Angestellte(r)	Arbeiter(in)
weiblich	15	20	5
männlich	10	30	20

a) Bestimmen Sie die marginalen Verteilungen der 100 Erwerbstätigen nach dem Geschlecht bzw. nach der Stellung im Beruf.

b) Bestimmen Sie die relative Häufigkeitsverteilung der Stellung im Beruf für die weiblichen Erwerbstätigen.

c) Bestimmen Sie die relative Häufigkeitsverteilung des Geschlechts für die Angestellten.

d) Prüfen Sie, ob die beiden Merkmale unabhängig sind.

Bivariate Statistik-Stellung im Beruf.mp4

Aufgabe 2-75: *Einkommen und Alter*
50 Personen wurden nach dem Einkommen (EUR) und dem Alter (Jahre) befragt. Im Ergebnis ergab sich nachstehende Korrelationstabelle:

Einkommen	Alter				
	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
0–1000	1	2	1	1	1
1000–1500	2	4	4	3	1
1500–2000	3	6	6	3	2
2000–3000	1	3	2	2	2

a) Erstellen Sie die Korrelationstabelle mit den relativen Häufigkeiten.

b) Bestimmen Sie die Randverteilungen.

c) Bestimmen Sie für jede Altersgruppe die bedingte Verteilung des Einkommens.

d) Bestimmen Sie für jede Einkommensgruppe die bedingte Verteilung des Alters.

e) Berechnen Sie das durchschnittliche Einkommen der 50 Personen.

f) Berechnen Sie das durchschnittliche Alter der 50 Personen.

g) Bestimmen Sie das am häufigsten aufgetretene Einkommen.

h) Welches Einkommen höchstens hatten die 50% ärmsten Personen?

i) Berechnen Sie die durchschnittlichen bedingten Einkommen je Altersgruppe.

j) Berechnen Sie die Standardabweichung des Einkommens.

k) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen Einkommen und Alter.

Aufgabe 2-76: *Teesorten*
Es wurden 7 verschiedene Teesorten auf Geschmack und Bekömmlichkeit untersucht. Eine Jury gab dazu folgende Rangeinteilung:

Sorte–Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Geschmack	4	3	6	2	7	1	5
Bekömmlichkeit	3	7	4	1	6	2	5

Besteht bei diesen 7 Teesorten ein Zusammenhang zwischen Geschmack und Bekömmlichkeit?

Aufgabe 2-77: *Sportveranstaltungen*

Eine Befragung von 300 Zuschauern bei 2 Arten von Sportveranstaltungen (Tennis und Fußball) ergab folgendes Ergebnis: 52 Personen besuchen häufig Tennis und selten Fußball, 62 Personen selten Tennis und häufig Fußball, 118 Personen beides häufig und 68 Personen beides selten.

100 der erfassten Personen sind über 30 Jahre alt. Von diesen Personen besuchen 24 häufig Tennis und selten Fußball, 14 selten Tennis und häufig Fußball, 6 beides häufig und 56 beides selten.

Von den höchstens 30 Jahre alten Personen besuchen 28 häufig Tennis und selten Fußball, 48 selten Tennis und häufig Fußball, 112 beides häufig und 12 beides selten.

Der Zusammenhang zwischen der Häufigkeit des Besuchs von Tennis– und Fußballveranstaltungen ist:

a) für die unaufgegliederte Gesamtheit der Befragten,

b) für die über 30 Jahre alten Personen und

c) für die höchstens 30 Jahre alten Personen

zu prüfen.

d) Bewerten Sie die Ergebnisse von a) – c).

Bivariate Statistik-Sportveranstaltungen (15 min).mp4

Aufgabe 2-78: *Verspätungen*

Uwe, Jens, Dirk, Paul und Sven kommen nacheinander zu spät in die Statistik–Vorlesung. In der Pause fragt sie der Professor nach ihrer Fahrzeit zur Uni. Uwe gibt 45 Minuten an. Dirk schätzt eine halbe Stunde und Sven 20 Minuten. Paul wohnt gleich um die Ecke und Jens meint, er brauche länger als alle anderen.

Besteht ein Zusammenhang zwischen Fahrzeit und Verspätung?

Aufgabe 2-79: *Sanatorium*

In einem Sanatorium wird ein kleiner Wettlauf der Patienten über 50m durchgeführt. Die folgende Tabelle gibt in der Reihenfolge ihres Eintreffens am Ziel das Gewicht (in kg) der Patienten an:

Patient	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Gewicht	70	60	80	77	82	81	78	100	83	110	79

a) Wie stark ist der Zusammenhang zwischen Körpergewicht und Laufleistung?

b) Bestimmen Sie den Median des Körpergewichts.

c) Bestimmen Sie das quadratische Streuungsmaß in Bezug auf den Median.

d) Ist die Varianz des Gewichts größer oder kleiner als die unter c) bestimmte Größe? Warum?

e) Die zwei Frauen unter den Patienten liefen die Strecke mit Geschwindigkeiten von 2 bzw. 4 Meter pro Sekunde. Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit der Frauen?

Bivariate Statistik-Sanatorium.mp4

Aufgabe 2-80: *Außentemperatur und Dauer eines Weges*

Student E erfasste die Außentemperatur X (in Grad Celsius) und die Dauer seines Weges zur Universität Y (in Minuten):

x_i	-20	-10	0	10	20
y_i	60	40	35	20	20

Wie stark ist die Korrelation zwischen diesen beiden Merkmalen?

Bivariate Statistik-Aussentemperatur und Dauer eines Weges (27 min).mp4

Aufgabe 2-81: *Buttersorten*
Zwei Verbraucherverbände A und B wurden aufgefordert, sieben verschiedene Buttersorten entsprechend der Qualitätseinschätzung in eine Reihenfolge zu bringen. Die Ergebnisse sind wie folgt:

Buttersorte	Platzziffer	
	Verband A	Verband B
1	2	1
2	1	3
3	3	2
4	4	4
5	5	5
6	6	7
7	7	6

Wie stark ist die übereinstimmung der Qualitätseinschätzungen der beiden Verbraucherverbände?

Aufgabe 2-82: *Relationen der Merkmalsausprägungen*
Für zwei Merkmale X und Y hat man bei 5 statistischen Einheiten die Paare der Merkmalsausprägungen erfasst. Für die Merkmalsausprägungen gelten folgende Relationen:
$x_3 > x_5 > x_2 > x_4 > x_1$ und $y_5 > y_3 > y_1 > y_4 > y_2$.
Berechnen Sie ein geeignetes Zusammenhangsmaß zwischen X und Y.

Aufgabe 2-83: *Tekolom und IBBM - Teil I*
Herr Sparsam besaß im letzten Jahr Aktien der Firma Tekolom und IBBM. Für die beiden Aktien ist die folgende gemeinsame Häufigkeitsverteilung beobachtet worden:

Anzahl der Tage	Kurs der Tekolom-Aktie	Kurs der IBBM-Aktie
73	35 EUR	120 EUR
146	40 EUR	130 EUR
146	45 EUR	125 EUR

Stellen Sie fest, ob die Kurse der beiden Aktien korreliert sind. Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten nach Bravais–Pearson.

Aufgabe 2-84: *Mensaessen*
Student Schusslig hat für das Studentenwerk die Essensqualität und das Preis-/Leistungsverhältnis der Mensaessen analysiert. Die ermittelten Daten hat er in der folgenden Tabelle von Rangzahlen zusammengefasst. Leider sind ihm dabei zwei Werte abhanden gekommen:

Merkmal/Essen	Essensqualität	Preis/Leistung
Eintopf	1	–
Essen 1	5	–
Essen 2	6	3
Vegetarisch	2	5
Pizza	3	6
Salat	4	2

Schusslig erinnert sich noch, dass der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient nicht negativ war. Welchen Wert hat dieser Korrelationskoeffizient?

Aufgabe 2-85: *Miete und Wohnfläche*
In einem Wohnviertel mit Häusern verschiedener Wohnungseigentümer wird die Quadratmetermiete in Abhängigkeit von der Wohnfläche analysiert. Es ergibt sich aus der Auswertung von 10 Mietwohnungen folgendes Bild:

Wohnfläche (m^2) x_i	Miete (EUR/m^2) y_i			
40	12	12	15	
60	12			
80	10	10		
90	9	10	10	10

Der Makler möchte wissen, wie die Abhängigkeit von Miete und Wohnfläche ist. Bestimmen Sie für ihn die Kovarianz der Merkmale.

Aufgabe 2-86: *Cafeteria*
Das Studentenwerk in X–Stadt plant eine Erweiterung seiner gastronomischen Einrichtungen und beauftragt Student Schusslig zu ermitteln, welche Präferenzen die Studierenden haben:

- Erweiterung der Mensa, oder
- Einrichtung einer Cafeteria.

Als Student Schusslig am Tag vor seiner Präsentation vor dem Studentenwerk seine Unterlagen sortiert, fällt ihm auf, dass ihm ein Teil der Daten abhanden gekommen ist. Er erinnert sich, dass unter den 200 Befragten nur 37,5% Studentinnen waren. Von den Studentinnen hatten sich 45 für die Einrichtung einer Cafeteria ausgesprochen. Bei der Auswertung der Daten hatte sich ergeben, dass die Präferenzen unabhängig vom Geschlecht (männlich/weiblich) waren.
Wieviele der Befragten haben sich insgesamt für die Erweiterung der Mensa ausgesprochen?
Aufgabe 2-87: *Old Faithful*
Die Beobachtung des größten Geysir der Welt, dem Old Faithful im Yellowstone National Park in den USA, brachte einen Touristen auf die Idee, zu untersuchen, ob zwischen der Dauer einer Eruption (in Minuten) – Variable X – und der Zeit zwischen zwei Eruptionen (in Minuten) – Variable Y – ein Zusammenhang besteht.
Er ordnet 8 Eruptionen deren Dauer und die Zeit, die zwischen dem Beginn einer Eruption und dem Beginn der darauf folgenden Eruption verstrichen ist, zu. Aufgrund dieser Beobachtungsdaten stehen Ihnen folgende Ergebnisse zur Verfügung:

$$\sum_i x_i = 26,90 \quad \sum_i x_i^2 = 100,53 \quad \sum_i x_i y_i = 2114,6$$
$$\sum_i y_i = 587 \quad \sum_i y_i^2 = 45131$$

Geben Sie mittels eines geeigneten Maßes die Stärke des Zusammenhanges zwischen der Dauer einer Eruption und der Zeit zwischen zwei Eruptionen an.

Aufgabe 2-88: *Gefahrene Strecke*
Bei 20 Vertretern eines Versicherungsunternehmens verteilt sich die in einer Woche mit dem Firmenwagen gefahrene Strecke wie folgt:

Gefahrene Strecke in km	Anzahl der Vertreter
0 – 50	3
50 – 100	5
100 – 300	6
300 – 500	4
500 – 1000	2

Geben Sie die Länge des Bereiches an, in dem die 50% der Vertreter mit den mittleren gefahrenen Streckenlängen liegen.
Aufgabe 2-89: *Streuungsmaß*
Gegeben sind $n = 50$ Beobachtungswerte $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ eines Merkmals X. Zur Konstruktion eines Streuungsmaßes sollen die absoluten (d.h. ohne Berücksichtigung des Vorzeichens) Abweichungen eines jeden Beobachtungswertes von jedem anderen Beobachtungswert ermittelt werden.

a) Wie groß ist die Anzahl der zu ermittelnden absoluten Abweichungen? Begründen Sie diese Anzahl mittels der Kombinatorik.

b) Welche Skalierung ist für das Merkmal X erforderlich, um ein solches Streuungsmaß zu konstruieren?

Aufgabe 2-90: *Arbeitslose*
Ein Bundesland ist in zwei Arbeitsamtsbezirke eingeteilt. In diesen werden für einen bestimmten Monat folgende Anteile der Arbeitslosen an den Erwerbspersonen (Arbeitslosenquote) und Arbeitslosenzahlen ermittelt:

Bezirk–Nr.	1	2
Arbeitslosenquote	5%	20%
Arbeitslosenzahl	3000	4000

Bestimmen sie die Arbeitslosenquote für dieses Bundesland.

Aufgabe 2-91: *Minimale Summe*
Für ein metrisches Merkmal hat man folgende Urliste

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	5	7	9	10	10	12	13	14

Für welche reelle Zahl c ist $\sum_{i=1}^{8}(x_i - c)^2$ minimal? (ohne Beweis!)
Aufgabe 2-92: *Alter und Preis eines PKWs*
Für das Alter (X) und den Händlerverkaufspreis (Y) gebrauchter PKW eines bestimmten Typs liegen folgende Informationen vor: Die Kovarianz zwischen Alter und Verkaufspreis beträgt $-5,4$; die Varianz des Verkaufspreises ist 4. Durch eine lineare Abhängigkeit vom Alter werden 81% der Variation in den Verkaufspreisen erklärt. Wie groß ist die Standardabweichung des Alters?
Aufgabe 2-93: *Tekolom und IBBM - Teil II*
Herr Sparsam besitzt Aktien der Firma Tekolom und IBBM. Aus jahrelanger Erfahrung weiß man, dass der jährliche Wertzuwachs einer Tekolom–Aktie den Erwartungswert 8 EUR und die Varianz 16 EUR^2 hat und dass der jährliche Wertzuwachs einer IBBM–Aktie den Erwartungswert 5 EUR und die Varianz 1 EUR^2 hat. Darüber hinaus ist bekannt, dass der jährliche Wertzuwachs der Tekolom–Aktien mit dem jährlichen Wertzuwachs der IBBM–Aktie korreliert ist, der Korrelationskoeffizient beträgt 0,2.
Herr Sparsam hält 100 Tekolom–Aktien und 200 IBBM–Aktien. Welche Varianz hat der jährliche Wertzuwachs des gesamten Portfolios von Herrn Sparsam?

Aufgabe 2-94: *GM*
Ein Anleger aus Deutschland möchte Aktien des amerikanischen Automobil–Herstellers GM kaufen. Der Kurs der Aktie beträgt zur Zeit 100 \$ und der Wechselkurs ist 2 EUR/\$. Damit kostet ihn eine GM–Aktie 200 EUR. Der Anleger will die Aktie jedoch nur kaufen, wenn deren durchschnittlicher Wert in den letzten Monaten über 225 EUR lag. Ihm steht folgende Häufigkeitstabelle zur Verfügung:

Wechselkurs	Kurs der GM–Aktie in \$				
in EUR/\$	115,00	116,25	118,00	119,15	119,75
1,90	0,02	0,06	0,010	0,04	0,070
1,95	0,04	0,12	0,020	0,08	0,140
2,00	0,01	0,03	0,005	0,02	0,035
2,02	0,01	0,03	0,005	0,02	0,035
2,04	0,02	0,06	0,010	0,04	0,070

Zusätzlich weiß er, dass der Kurs der Aktie und der Wechselkurs unabhängig sind. Berechnen Sie auf der Basis der gegebenen Tabelle den durchschnittlichen Wert der Aktie in EUR.
Aufgabe 2-95: *Koeffizienten Vergleich*
Folgende Koeffizienten wurden von einem Wirtschaftswissenschaftler mit Hilfe eines Statistikprogrammes für alle Variablen eines Datensatzes berechnet:

A) arith. Mittelwert

B) Bravais–Pearson K.–koeffizient

C) geometr. Mittelwert

D) Interquartilsabstand

E) Kendalls Rangk.–koeffizient

F) Korr. Kontingenzkoeffizient

G) Kovarianz

H) Median

J) Modus

K) Quadratische Kontingenz χ^2

L) Spannweite

M) Spearmannsche Rangk.–koeffizient

O) Standardabweichung

P) Varianz

R) keiner der Koeffizienten

Helfen Sie dem Wirtschaftswissenschaftler den/die Koeffizienten herauszusuchen,

1. die ein robustes Lagemaß darstellen.
2. die als Zusammenhangsmaß für zwei nominal skalierte Variablen benutzt werden können.
3. die ein robustes Streuungsmaß für eine metrische Variable darstellen.
4. die bei metrischen Variablen unverändert bleiben unter linearen Transformationen der Form $y = x + b$.

3 Kombinatorik

Aufgabe 3-1: *Bunte Häuser*
Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Häuser in einer Straße mit den 5 verschiedenen Farben anzustreichen, wobei jede Farbe nur für ein Haus reicht?
Aufgabe 3-2: *TEA*

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben des englischen Wortes TEA anzuordnen, wobei jeder einzelne nur einmal vorkommen darf?

b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben des deutschen Wortes TEE anzuordnen, wobei jeder einzelne nur einmal vorkommen darf?

Aufgabe 3-3: *Bücher*
Im “Jahr des Buches” haben Sie vorsorglich 9 Bücher unterschiedlicher Titel als Geschenke gekauft. 6 Geburtstage stehen bevor. Wieviele Verteilungsmöglichkeiten gibt es, wenn jedes Geburtstagskind nur ein Buch erhalten soll?
Aufgabe 3-4: *Geburtstagsparty*
Sie haben Geburtstag. Zu ihrer Geburtstagsparty können Sie jedoch nur 6 von ihren 12 Freund(inn)en einladen, die für Sie alle gleichwertig sind.

a) Wieviele Möglichkeiten haben Sie, aus ihren Freund(inn)en Geburtstagsgäste auszuwählen?

b) Wieviele mögliche Sitzanordnungen gibt es für die 6 Gäste an der Geburtstagstafel?

c) Sie haben 3 Freunde und 3 Freundinnen eingeladen. Wieviele mögliche Sitzanordnungen gibt es, wenn die 3 Freunde und die 3 Freundinnen jeweils als gleich angesehen werden?

Kombinatorik-Geburtstagsparty.mp4

Aufgabe 3-5: *Zwei Würfel*
Es werden 3 Würfel gleichzeitig geworfen. Wieviele verschiedene Augenpaare können auftreten?
Aufgabe 3-6: *Lotto Toto*
Wie viele verschiedene Tipreihen gibt es bei der 13er Wette beim Lotto Toto? (Toto: Bei der 13er–Wette wird der Spielausgang von 13 Fußballspielen vorhergesagt, wobei 1 = Heimsieg, 0 = Unentschieden und 2 = Sieg der Gastmannschaft bedeutet.)
Aufgabe 3-7: *6 aus 49*
Sie spielen 6 aus 49 möglichen Zahlen (ohne Zusatzzahl). Wie viele mögliche Tips können Sie abgeben?
(6 aus 49 bedeutet, dass Sie aus 49 mögliches Zahlen 6 Zahlen auswählen.)
Aufgabe 3-8: *Skatspieler*
Kann ein passionierter Skatspieler sämtliche möglichen Spiele (d.h. jede mögliche eigene Kartenkombination) im Laufe seines Lebens spielen? Dabei sei angenommen, dass jedes Jahr 365 Tage hat und der Skatspieler 200 Spiele täglich spielt.
(Skat: 32 Karten; 3 Spieler mit je 10 Karten; 2 Karten im Skat, d.h. verdeckt auf dem Tisch)
Aufgabe 3-9: *Einmaleins*
Wieviele verschiedene Aufgaben enthält das kleine Einmaleins?
Aufgabe 3-10: *Hallenschwimmbad*
Paul möchte ins Hallenschwimmbad gehen, wo der Eintritt 3 € beträgt. Paul hat ein 1 €-Stück, zwei 50 Cent-Stücke und zehn 10 Cent-Stücke. Auf wie viele verschiedene Arten kann Paul die 3 € für den Eintritt in den Automaten stecken?

Aufgabe 3-11: *Schließfach*
Herr Meyer hat seinen Schlüssel für das Schließfach am Bahnhof verloren. Die Schließfachnummer hat er leider vergessen. Er erinnert sich allerdings daran, dass es sich um eine vierstellige Zahl handelt, bei der zwei Ziffern gleich sind und dass als Ziffern die 3, 5 und 7 vorkommen. Wie viele Schließfächer müssen gesperrt werden?
Aufgabe 3-12: *Pferdelotto*
Beim Pferdelotto gilt es, die 4 schnellsten Pferde eines bestimmten Rennens mit ihrer Reihenfolge des Eintreffens im Ziel vorherzusagen. Insgesamt gehen 23 Pferde an der Start. Wieviele verschiedene Tiplisten gibt es?
Aufgabe 3-13: *Blindenschrift*
Die Blindenschrift besteht aus zwei Zeichen (Erhöhung und Vertiefung), die zu 6 Punkten angeordnet werden. Reicht dies aus, um das Alphabet, Satzzeichen und Zahlen darzustellen?
Aufgabe 3-14: *Wanderwege*
Wanderwege sollen mit Zeichen bestehend aus 2 farbigen Strichen gekennzeichnet werden. Wieviele Farben sind erforderlich, wenn

a) für 36 Wanderwege die Reihenfolge der Farben zu beachten und eine Wiederholung der Farben zulässig ist?

b) für 21 Wanderwege die Reihenfolge der Farben keine Rolle spielt und Wiederholung der Farben nicht auftreten darf?

c) für 15 Wanderwege die Reihenfolge der Farben nicht berücksichtigt werden braucht und Wiederholung der Farben erlaubt ist?

Aufgabe 3-15: *Genua Wahl*
In Genua wurden zu Anfang des 17. Jahrhunderts aus 100 Senatoren jährlich durch das Los fünf Senatoren für höchste Ehrenstellen bestimmt.

> "Ein Ratsherr Benedotto Gentile führte Wetten darauf ein, dass dieser oder jener Name werde gezogen werden, und einige Genuesische Bankiers versprachen jedem, der eine solche Wette zu wagen geneigt sei, den 20 000–fachen Betrag seines Einsatzes, wenn er alle 5 Namen rate, entsprechend weniger, wenn nur 4 oder 3 Namen erraten werden sollten."
> (Cantor, Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens, 2. Auflage, Leipzig 1903, S. 65 f.)

War das Angebot fair?
Aufgabe 3-16: *Unfallstation*
In der Unfallstation eines Krankenhauses arbeiten drei Ärzte: N, O und P. Da die Aufteilung der Wochenenddienste (Samstag und Sonntag) große Schwierigkeiten bereitet, entscheiden sich die drei Ärzte für ein Zufallsexperiment, um diese Aufteilung vorzunehmen. Es werden drei Zettel mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen in eine Urne getan. Für die Aufteilung werden dann nach dem Zufallsprinzip aus der Urne zwei Zettel gezogen.
Geben Sie die möglichen Ausgänge dieses Zufallsexperimentes an und berechnen Sie ihre Anzahl, wenn:

a) mit der Aufteilung festgelegt werden soll, an welchem Tag ein Arzt Dienst hat (1. Ziehung steht für Samstag) und es möglich sein soll, dass ein Arzt an beiden Tagen Dienst hat

b) Doppel–Dienst möglich ist, aber nicht bestimmt werden soll, an welchem Tag ein Arzt Dienst hat

c) kein Doppel–Dienst möglich ist, aber bestimmt werden soll, an welchem Tag ein Arzt Dienst hat

d) kein Doppel–Dienst möglich ist und nicht bestimmt werden soll, an welchem Tag ein Arzt Dienst hat.

Kombinatorik-Unfallstation.mp4

Aufgabe 3-17: *Orientierungsrundgang*
Zu Beginn eines Semesters möchte eine Studierendengruppe an 5 Tagen jeweils einen Orientierungsrundgang durch die Universität für Erstsemester anbieten, der jeweils von einem Mitglied durchgeführt werden soll. Es haben sich fünf Mitglieder zur Verfügung gestellt.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, jedem Mitglied einen Wochentag (Montag bis Freitag) zuzuordnen?

b) Da Klaus erkrankt, wird Karl zweimal einen Rundgang leiten. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die namentliche Belegung der Rundgänge gibt es?

c) Karl besteht plötzlich darauf, dass er nicht an zwei aufeinanderfolgenden Tagen einen Rundgang leiten will. Wie viele Möglichkeiten für die namentliche Belegung der Rundgänge gibt es jetzt?

Kombinatorik-Orientierungsrundgang.mp4
Aufgabe 3-18: *Bridge*
Das Bridge–Spiel enthält insgesamt 52 verschiedene Karten. Jeder Spieler erhält 13 Karten. Wie viele verschiedene Spiele (zu 13 Karten) kann ein Spieler erhalten?
Aufgabe 3-19: *Wagenreihungen*
Der Rangiermeister der Deutschen Bahn AG hat die Aufgabe, einen Zug aus 6 Wagen zusammenzustellen, wobei 2 Wagen der Klasse 1 und 4 Wagen der Klasse 2 sind. Wie viele verschiedene Wagenreihungen kann der Rangiermeister erstellen?
Aufgabe 3-20: *Schiffsignale*
Ein Schiff führt zur Signalgabe jeweils zwei blaue, grüne, schwarze, rote, gelbe und weiße Wimpel mit. Zwei aufgezogene Wimpel bilden jeweils ein Signal, wobei die Reihenfolge der Wimpel keine Rolle spielen darf, wenn die Signale aus jeder Richtung verständlich sein sollen. Wie groß ist die Anzahl möglicher Signale, die das Schiff geben kann?

Aufgabe 3-21: *Camel Cup*
Ein Scheich hat in seinem Stall 50 Kamele und zur Vorbereitung auf den "Camel Cup" in Australien lässt er jeden Tag nacheinander drei Testausritte machen.
Um nicht immer die Qual der Wahl zu haben, zieht er blind jeden Tag aus einer Urne mit 50 von 1 bis 50 durchnumerierten Kugeln drei Kugeln nacheinander; gezogene Kugeln legt er direkt in die Urne zurück. Jede der Nummern repräsentiert ein Kamel, so dass die Chance besteht, mit einem, zwei oder drei verschiedenen Kamelen die Testausritte zu machen.

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es für den Scheich, die Testausritte am einem Tag durch das Ziehen von 3 Kugeln auszuwählen?

b) Wieviele Möglichkeiten gibt es die Testausritte mit einem, zwei bzw. drei verschiedenen Kamelen zu machen?

Aufgabe 3-22: *Zahlenschlösser*
Wieviele dreistellige Zahlenschlösser mit nur ungeraden, aber verschiedenen Ziffern können hergestellt werden?
Aufgabe 3-23: *Arbeitsgänge*
Eine Produktionsfolge enthalte 9 Arbeitsgänge: drei Arbeitsgänge A, zwei Arbeitsgänge B und vier Arbeitsgänge C. Jeder Arbeitsgang kann zu jeder Zeit ausgeführt werden.
Wieviele Möglichkeiten der Einteilung gibt es?
Aufgabe 3-24: *Pferderennen*
Bei einem Pferderennen laufen 10 Pferde. Eine Einlaufwette besteht darin, dass die ersten drei Pferde des Einlaufes in richtiger Reihenfolge angegeben werden.
Wie groß ist die Anzahl der möglichen Einlaufwetten?

Aufgabe 3-25: *Angebotsmöglichkeiten*
Ein Markt wird von zwei Unternehmen beherrscht. Sie haben die folgenden Aktionsparameter:

1. Unternehmen:
Preis, Menge, Qualität, Werbung, Lieferbedingungen, Zahlungsbedingungen

2. Unternehmen:
Standort, Preis, Menge, Qualität, Werbung, Lieferbedingungen, Zahlungsbedingungen

Wenn die beiden Unternehmen vereinbaren, immer nur zwei Parameter innerhalb einer bestimmten Zeitperiode zu ändern, niemals aber Menge und Preis gleichzeitig, wieviele unterschiedliche Angebotsmöglichkeiten kann es dann auf dem Markt geben?
Aufgabe 3-26: *Schachturnier*
An einem Schachturnier nehmen 12 Spieler teil. Wieviele mögliche Paarungen gibt es für das Finale zwischen den beiden besten Spielern des Turniers?
Aufgabe 3-27: *Geschenke für die Abteilungsleiter*
Die Chefsekretärin hat für die 5 Abteilungsleiter je ein Geschenk gekauft. Unter den 5 Geschenken sind genau zwei gleiche Geschenke. Wieviele Möglichkeiten hat sie, die 5 Geschenke auf die 5 Abteilungsleiter zu verteilen?
Aufgabe 3-28: *Computerraum-Code*
Student Schusslig hat den Computerraum-Code für diese Woche vergessen. Er erinnert sich einzig und allein daran, dass der Code genau zwei aufeinander folgende Ziffern 5 enthielt (nicht aber drei oder vier aufeinander folgende Ziffern 5). Der Code besteht stets aus 4 Ziffern (0 bis 9). Wie viele Zahlenkombinationen muss Student Schusslig maximal ausprobieren, um die Tür zum Computerraum zu öffnen?

Aufgabe 3-29: *Code-Schlösser*
Eine Sicherheitsfirma produziert unter anderem Code-Schlösser. Die Codes bestehen aus einem der beiden Buchstaben A oder B und 4 Ziffern (1 bis 9). Wieviele mögliche fünfstellige Codes der Form: Buchstabe, Ziffer$_1$ Ziffer$_2$ Ziffer$_3$ Ziffer$_4$ gibt es, wenn keine Ziffer mehr als dreimal in einem Code vorkommen soll?
Aufgabe 3-30: *Anzahl der Abweichungen*
Gegeben sind $n = 50$ Beobachtungswerte $x_1, \ldots, x_{50}$ eines Merkmals X. Zur Konstruktion eines Streuungsmaßes sollen die absoluten Abweichungen eines jeden Beobachtungswertes von jedem anderen Beobachtungswert ermittelt werden.
Wie groß ist die Anzahl der zu ermittelnden absoluten Abweichungen?
Aufgabe 3-31: *Parkplätze*
Sie sind neuer Mitarbeiter in einer kleinen Firma. Bei der Einstellung teilt Ihnen Ihr neuer Chef mit, dass die Firma für ihre Angestellten Parkplätze zur Verfügung stellt. Leider stehen für die 9 Angestellten nur 5 Parkplätze zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Parkplätze zu belegen, wenn alle Parkplätze gleich gut sind?
Aufgabe 3-32: *Hemden*
Ein Student ist zu einem Vorstellungsgespräch eingeladen, steht aber noch vor dem Problem, die passende Kleidung zu finden. Er hat vier Hemden (grau, weiß, blau, rot) und sechs Krawatten zur Verfügung, von denen eine grün und eine blau ist.
Wie viele Möglichkeiten hat der Student, Hemden und Krawatten zusammenzustellen, wenn er das rote Hemd weder mit der grünen noch mit der blauen Krawatte tragen möchte?

4 Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 4-1: *Wurf eines Würfels*
Es wird das Zufallsexperiment “Zweimaliges Werfen eines Würfels” ausgeführt. Speziell werden dafür die Ereignisse $A = \{6 \text{ beim ersten Wurf}\}$ und $B = \{6 \text{ beim zweiten Wurf}\}$ betrachtet.

a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment den Ereignisraum an.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Elementarereignisse mittels der Kombinatorik.

c) Definieren Sie die Ereignisse A und B mittels der Elementarereignisse.

d) Bestimmen Sie die Vereinigung und den Durchschnitt der beiden Ereignisse A und B.

e) Stellen Sie den Ereignisraum, die Ereignisse A und B, deren Vereinigung und deren Durchschnitt im Venn–Diagramm dar.

f) Geben Sie ein unmögliches Ereignis für dieses Zufallsexperiment an.

g) Geben Sie die Komplementärereignisse zu A bzw. B an.

h) Gilt $A \subset B$?

i) Sind die Ereignisse A und B disjunkt?

Aufgabe 4-2: *Ereignisoperationen*
Geben Sie für die nachfolgenden Ereignisoperationen die Ergebnisse an:

$$A \cup A \quad A \cap A \quad A \cup \emptyset \quad A \cap \emptyset \quad \emptyset \cap S \quad A \cup S \quad A \cap S \quad A \cup \overline{A} \quad A \cap \overline{A}$$

Aufgabe 4-3: *Augenzahl eines Würfels*
Für das Zufallsexperiment "Einmaliges Werfen eines Würfels" werden die Ereignisse $A =\{\text{Augenzahl} > 6\}$ und $B =\{\text{Augenzahl} < 1\}$ betrachtet. Sind die beiden Ereignisse A und B äquivalent?

Aufgabe 4-4: *Bauernwirtschaft*
Ein Bauernhof hat maximal zwei Traktoren und zwei Pflüge. Das Ereignis A bestehe darin, dass ein zufällig ausgewählter Bauernhof wenigstens einen Traktor und nicht weniger als einen Pflug hat. Das Ereignis B bestehe darin, dass in einem Hof genau ein Traktor und nicht mehr als ein Pflug vorhanden ist.

a) Geben Sie alle Elementarereignisse in der Form {Anzahl der Traktoren, Anzahl der Pflüge} an.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Elementarereignisse mittels der Kombinatorik.

c) Bestimmen Sie den Durchschnitt der Ereignisse A und B formal und verbal.

Wahrscheinlichkeitsrechnung-Bauernwirtschaft.mp4

Aufgabe 4-5: *Zwei Würfel*
Zwei Würfel werden geworfen. Definieren Sie das Ereignis $A =\{\text{Augenzahl beträgt } 7\}$ mittels Elementarereignissen.

Aufgabe 4-6: *Kartenspiel*
Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten werden zufällig Karten gezogen. Welche der folgenden Ereignisse schließen sich gegenseitig aus?
$A =\{\text{Kreuz}\}$, $B =\{8\}$, $C =\{\text{Karo 7, Karo 8, Karo 9}\}$, $D = \{\text{Herz 7}\}$

Aufgabe 4-7: *Nicht–disjunkte Teilmengen*
A, B und C seien nicht–disjunkte Teilmengen eines Ereignisraumes S. Nur mit Hilfe der Symbole für Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und Komplementärereignis, sowie der Buchstaben A, B und C sind Ausdrücke dafür zu notieren, dass von den Ereignissen A, B, C

a) wenigstens eines eintritt,

b) nur A eintritt (d.h. B und C treten nicht ein),

c) A und B eintreten, aber nicht C,

d) alle drei eintreten,

e) keines eintritt,

f) genau eines eintritt,

g) höchstens zwei eintreten.

Aufgabe 4-8: *Felgen*
Zu Beginn des Winterhalbjahres werden an einem PKW die Felgen mit den Winterreifen montiert. Das Ereignis $\{1, 2, 3, 4\}$ gibt die jetzige Position der Felge an, die im letzten Jahr die i–te Position innehatte ($i = 1, 2, 3, 4$).

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Felgen anzuordnen?

b) Geben Sie das Ereignis an, dass keine Felge wieder an die gleiche Stelle wie im Vorjahr kommt.

Aufgabe 4-9: *Produktionshalle*
In einer Produktionshalle eines Betriebes sind 3 Maschinen M_1, M_2 und M_3 im Einsatz. Mit A_i werden die Ereignisse bezeichnet, dass die Maschine M_i ($i = 1, 2, 3$) während einer bestimmten Zeitspanne nicht ausfällt und damit den Reparaturdienst nicht beansprucht. Von Interesse sind folgende Ereignisse (bezogen auf diese Zeitspanne):
$A =$\{wenigstens eine Maschine fällt nicht aus\}
$B =$\{keine Maschine fällt aus\}
$C =$\{nur die dritte Maschine fällt aus\}
$D =$\{alle Maschinen fallen aus\}
$E =$\{nur eine Maschine fällt aus\}

a) Stellen Sie die Ereignisse A bis E durch die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 dar.

b) Geben Sie Beziehungen zwischen diesen Ereignissen an.

Aufgabe 4-10: *1950–2000*
Das zufällige Ereignis A bestehe darin, dass in einer Gruppe von $n = 10$ im Jahre 1950 geborenen Personen zwei das Jahr 2000 erleben, das Ereignis B_1 darin, dass zwei oder mehr Personen der gleichen Gruppe das Jahr 2000 erleben. Außerdem wird ein Ereignis B_2 betrachtet, welches darin besteht, dass nur eine einzige Person das Jahr 2000 erlebt.
Welche der Ereignisse schließen sich gegenseitig aus?
Aufgabe 4-11: *Zufallsexperiment*
Das Zufallsexperiment besteht im einmaligen Werfen eines "idealen" Würfels. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür,

a) eine 3 zu werfen?

b) eine 1 oder 5 zu werfen?

c) eine gerade Augenzahl zu werfen?

d) Welche Definition der Wahrscheinlichkeit haben Sie angewandt?

("ideal" bedeutet, dass jede Seite des Würfels mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten kann)
▶ Wahrscheinlichkeitsrechnung-Zufallsexperiment.mp4

Aufgabe 4-12: *Bus*
Ein Student wohnt in der Nähe einer Bushaltestelle einer Linie, die in der einen Richtung zur Universität, in der anderen Richtung in die Nähe seiner Freundin fährt. Die Busse in beide Richtungen fahren jeweils im Abstand von 20 Minuten, der Bus zur Freundin $\underline{^{00}}$, $\underline{^{20}}$ und $\underline{^{40}}$.
Da er sich häufig nicht entschließen kann, ob er zur Universität oder zu seiner Freundin fahren soll, überlässt er seine Wahl dem Zufall dadurch, dass er zufällig zur Haltestelle geht und den jeweils ersten Bus nimmt, mag dieser zur Universität oder zu seiner Freundin fahren. Da der Bus in beide Richtungen gleich häufig fährt, glaubt er, dass die Universität eine faire Chance hat. Nach einiger Zeit wundert er sich, dass er trotzdem sehr oft zu seiner Freundin und sehr selten zur Universität (nur an 20 von 200 Tagen) gefahren ist und hält dies für einen Wink des Schicksals !
Welche Ursache hat diese Erscheinung?
Aufgabe 4-13: *Schachbrett*
Auf einem Schachbrett werden 8 Türme platziert. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass keiner dieser Türme den anderen schlagen kann.
(Ein Schachbrett hat $8 \cdot 8 = 64$ Felder. Ein Turm kann einen anderen Turm schlagen, wenn dieser in gerader Richtung zu ihm steht.)
Aufgabe 4-14: *Zufällige Ziehung einer Karte*
Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten (4 Farben zu je 8 Karten) wird zufällig eine Karte gezogen. Wie großist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) eine Pik–Karte gezogen wird?

b) ein Ass gezogen wird?

c) ein Ass oder eine Pik–Karte gezogen wird?

Aufgabe 4-15: *Antriebswellen*
In der Gütekontrolle eines Unternehmens, das Antriebswellen herstellt, wird der Durchmesser dieser Wellen überprüft, indem zufällig Wellen aus der Produktion herausgegriffen werden. Solange der Durchmesser der Wellen sich in einem Toleranzbereich um den Sollwert befindet, sind die Güteanforderungen erfüllt. Verlässt der Durchmesser den Toleranzbereich nach oben, können durch Nacharbeit die Güteanforderungen noch erreicht werden. Ausschuss tritt auf, wenn der gemessene Durchmesser die untere Toleranzgrenze unterschreitet.
Von 10 000 geprüften Wellen hatten 4 500 einen Durchmesser zwischen unterer Toleranzgrenze und dem Sollwert und 5 200 einen Durchmesser größer als der Sollwert.

a) Definieren Sie geeignete Ereignisse und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, Ausschuss zu erhalten.

b) Welche Definition der Wahrscheinlichkeit liegt ihren Berechnungen zugrunde?

Aufgabe 4-16: *15 Cent*
Ein Junge hat ein 1 Cent–, ein 5 Cent–, ein 10 Cent– und ein 50 Cent–Stück in seiner Tasche. Er nimmt nacheinander zwei Münzen heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er insgesamt weniger als 15 Cent aus der Tasche nimmt, wenn er

a) die erste Münze wieder in die Tasche steckt?

b) die erste Münze nicht wieder in die Tasche steckt?

Aufgabe 4-17: *Blumen*
In einer Vase befinden sich vier Rosen, sechs Narzissen und zwei Lilien. Zwei Blumen werden zufällig aus der Vase genommen, eine nach der anderen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man zwei Blumen der gleichen Art erhält?
Aufgabe 4-18: *Garderobe*
5 Männer geben an der Garderobe ihre Hüte ab. Durch einen besonderen Umstand werden die Hüte ihren Besitzern nicht ordnungsgemäß, sondern zufällig zurückgegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder seinen Hut wieder bekommt?
Aufgabe 4-19: *Fachbereichsrat*
Aus einem Fachbereichsrat, bestehend aus 4 Professoren und 4 wissenschaftlichen Mitarbeitern, soll ein Ausschuss mit 3 Mitgliedern gewählt werden. Ein Professor schlägt vor, die 3 Ausschussmitglieder so auszuwählen, dass jedes der 8 Fachbereichsratmitglieder die gleiche Chance hat, in den Ausschuss gewählt zu werden.
Bevor die wissenschaftlichen Mitarbeiter im Fachbereichsrat diesem Verfahren zustimmen, berechnen sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass in den Ausschuss nur Professoren gewählt werden. Helfen Sie ihnen dabei.
Aufgabe 4-20: *Hörer/innen einer Statistik–Vorlesung*
Die 300 Hörerinnen und Hörer einer Statistik–Vorlesung setzen sich wie folgt zusammen:

Fachrichtung	Geschlecht	
	männlich	weiblich
VWL	42	93
BWL	78	87

Eine Person wird zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) ein männlicher Hörer ausgewählt wurde?

b) eine Hörerin ausgewählt wurde?

c) ein Hörer ausgewählt wurde, der männlich oder Volkswirt(in) ist?

d) ein Hörer ausgewählt wurde, der weiblich und Betriebswirt ist?

e) Es wurde eine Hörerin ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie BWLerin ist?

f) Es wurde ein VWLer ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein männlicher Hörer ist?

Aufgabe 4-21: *Kfz–Händler*
Ein Kfz–Händler weiß aus langjähriger Erfahrung, dass bei den in Zahlung genommenen Personenkraftwagen 60% Mängel am Motor, 80% Mängel an der Karosserie und 40% Mängel an Motor und Karosserie auftreten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein in Zahlung genommener PKW weder Mängel am Motor noch an der Karosserie aufweist?

Aufgabe 4-22: *Öffentliche Verkehrsmittel*
In einer Großstadt gibt es drei öffentliche Verkehrsmittel: S–Bahn (S), U–Bahn (U) und Bus (B). Die folgenden Anteile der Bevölkerung der Großstadt sind als Benutzer/innen dieser Verkehrsmittel bekannt:

$$P(S) = 0.30, \quad P(U) = 0.4, \quad P(B) = 0.15,$$
$$P(U \cap S \cap B) = 0.01,$$
$$P(U \cap S) = 0.08, \quad P(U \cap B) = 0.02, \quad P(S \cap B) = 0.05.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person

a) nicht die U–Bahn

b) die S–Bahn oder den Bus

c) kein Verkehrsmittel

d) höchstens zwei der drei Verkehrsmittel

benutzt?

Aufgabe 4-23: *Aufzug*
Den aufwärtsfahrenden Aufzug eines 7–geschossigen Hauses betreten in der 1. Etage 3 Personen. Jede dieser Personen verlässt, unabhängig von der anderen, beginnend in der 2. Etage, den Aufzug mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf jeder Etage. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

$$A = \{\text{alle Personen steigen in der 4. Etage aus}\}$$
$$B = \{\text{alle Personen steigen gleichzeitig aus}\}$$
$$C = \{\text{alle Personen steigen auf verschiedenen Etagen aus}\}.$$

Aufgabe 4-24: *Tageszeitungen*
In einer Kleinstadt gibt es nur die beiden Tageszeitungen Z_1 und Z_2. 60% der Bewohner lesen Z_1 und 80% der Bewohner lesen Z_2. Keine der beiden Zeitungen lesen 10% der Bewohner. Eine Person wird zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person

a) beide Zeitungen liest?

b) Z_1 liest, aber nicht Z_2?

c) Z_2 liest, wenn sie nicht Z_1 – Leser ist?

d) höchstens eine Zeitung liest?

e) Z_1 nicht liest?

Aufgabe 4-25: *Geburtstag*
Sie feiern mit ihren Freunden ihre Geburtstagsparty. Gehen Sie davon aus, dass ein Jahr immer 365 Tage hat und die Geburtstage ihrer Gäste unabhängig sind.

a) Wenn Sie drei Gäste zu ihrer Geburtstagsparty eingeladen haben, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer am gleichen Tag wie Sie Geburtstag hat?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei von ihren Gästen am gleichen Tag im Jahr Geburtstag haben?

c) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, wenn Sie 23 Gäste haben?

d) Wie erklären Sie sich das Ergebnis aus c)?

Aufgabe 4-26: *Altbauwohnung*
In einer Altbauwohnung mit Außenwänden und veralteter elektrischer Anlage kommt es vor, dass der Strom ausfällt bzw. die Wasserzufuhr einfriert. Sowohl im Winter als auch im Sommer treten die beiden Missstände unabhängig voneinander auf. So friert natürlich das Wasser nur ein, wenn es Winter ist, und zwar mit 80%iger Wahrscheinlichkeit. Der Strom fällt aber, selbst wenn es nicht Winter ist, mit 40%iger Wahrscheinlichkeit aus. Das entspricht der gleichen Wahrscheinlichkeit, mit der der Strom, wenn es Winter ist, nicht ausfällt. Gehen Sie davon aus, dass die Winterzeit 30% der gesamten Jahreszeit ausmacht.

a) Formalisieren Sie mit Hilfe von Ereignisdefinitionen die im Text genannten Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss man in dieser Wohnung

b) mit dem Einfrieren der Wasserzufuhr rechnen?

c) mit einem Stromausfall rechnen?

d) mit dem Einfrieren der Wasserzufuhr und einem Stromausfall rechnen?

e) zusätzlich mit dem Einfrieren der Wasserzufuhr rechnen, wenn bereits der Strom ausgefallen ist?

f) zusätzlich mit einem Stromausfall rechnen, wenn bereits die Wasserzufuhr eingefroren ist?

g) mit mindestens einem von beiden Misständen rechnen?

h) höchstens mit einem von beiden Misständen rechnen?

Aufgabe 4-27: *Last*
Eine Last hängt an zwei Seilen. Jedes Seil allein vermag die Last zu tragen. Jedes Seil hält unabhängig vom anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99. Mit welcher Sicherheit hängt die Last?

Aufgabe 4-28: *Alter*
Nach einer älteren Statistik werden von 100.000 Zehnjährigen 82.277 vierzig Jahre alt und 37.977 siebzig Jahre alt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Vierzigjähriger 70 Jahre alt?

Aufgabe 4-29: *Kugeln*
In einer Urne befinden sich 3 weiße, 5 schwarze und 2 rote Kugeln. Es werden zufällige Ziehungen ohne Zurücklegen vorgenommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei 3 Ziehungen zunächst eine rote, dann eine weiße und schließlich nochmals eine rote Kugel zu ziehen?

Aufgabe 4-30: *Papierstreifen*
In einer Urne befinden sich 4 Papierstreifen gleicher Größe. Jeder Papierstreifen ist mit einer der vier folgenden Aufschriften versehen: 110, 101, 011, 000, wobei nicht zwei Steifen die gleiche Aufschrift tragen. Es wird ein Papierstreifen zufällig aus der Urne gezogen und folgende Ereignisse betrachtet:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{Ziehen eines Streifens mit Aufschrift, die an 1. Stelle eine 1 hat}\}\\
A_2 &= \{\text{Ziehen eines Streifens mit Aufschrift, die an 2. Stelle eine 1 hat}\}\\
A_3 &= \{\text{Ziehen eines Streifens mit Aufschrift, die an 3. Stelle eine 1 hat}\}
\end{aligned}$$

a) Sind die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 in ihrer Gesamtheit unabhängig?

b) Sind die Ereignisse paarweise unabhängig?

Aufgabe 4-31: *Webstühle*
Ein Arbeiter bediene 3 voneinander unabhängige Webstühle. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Webstuhl im Laufe einer Stunde die Aufmerksamkeit des Arbeiters nicht erfordert, sei für den ersten Webstuhl 0,9, für den zweiten 0,8 und für den dritten 0,85.
Wie groš ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) im Laufe einer Stunde keiner der Webstühle die Aufmerksamkeit des Arbeiters in Anspruch nimmt?

b) wenigstens einer der drei Webstühle im Laufe einer Stunde die Aufmerksamkeit des Arbeiters nicht in Anspruch nimmt?

Wahrscheinlichkeitsrechnung-Webstuehle.mp4

Aufgabe 4-32: *Angler*
Ein Angler fischt sonntags an drei verschiedenen Seen. Die Wahrscheinlichkeit, dass er etwas fängt, beträgt beim ersten See $2/3$, beim zweiten See 0,75 und beim dritten See 0,8. In der Nähe eines jeden Sees ist ein Ausflugslokal mit Telefon, bei See 2 auch mit einer attraktiven Wirtin, weshalb die Ehefrau des Anglers nicht gern sieht, dass er am See 2 angelt. Der Angler versichert, dass er jeweils den See zufällig aufsucht. An einem Sonntag ruft er seine Frau an, dass er etwas gefangen habe.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er am See 2 geangelt hat?

Aufgabe 4-33: *Fernschreiben*
Bei Fernschreiben von Nachrichtenagenturen werden Zahlenangaben stets zweimal hintereinander übermittelt. Die Erfahrung zeigt, dass die Übertragung einer Zahl mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% unverfälscht beim Empfänger ankommt. Wenn die erste Übertragung mit einem Fehler behaftet ist, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler bei der zweiten Übertragung auf 10%.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein Zahl bei wiederholter übertragung verfälscht beim Empfänger an?

Aufgabe 4-34: *Fußballmannschaft*
Von einer Fußballmannschaft sei bekannt, dass sie die Einzelspiele mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 gewinnt. Die Kondition der Spieler ist so gut, dass der Kraftaufwand in einem Spiel nicht die anderen Spiele beeinflusst. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Serie von 3 Spielen die gewonnenen Spiele überwiegen?

Aufgabe 4-35: *Waldbrand*
Untersuchungen haben ergeben, dass der Förster eines bestimmten Reviers einen Waldbrand mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 zu spät entdeckt und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,03 sein Feuermelder nicht funktioniert, wenn er betätigt wird.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Falle eines Brandes die Feuerwehr nicht rechtzeitig alarmiert wird?

Aufgabe 4-36: *Regal*
Ein vierbändiges Werk steht auf einem Regal in zufälliger Ordnung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Bände in richtiger Reihenfolge von rechts nach links oder von links nach rechts stehen?

Aufgabe 4-37: *Tagesproduktion*
In einem Betrieb werden täglich 1 000 Stück eines Produktes hergestellt. Eine Maschine M_1 produziert 100 Stück mit 5% Ausschuss, M_2 400 Stück mit 4% Ausschuss und M_3 500 Stück mit 2% Ausschuss. Aus der Tagesproduktion wird ein Stück zufällig herausgegriffen und geprüft: Es ist ein Ausschussstück. Welche Maschine hat mit größter Wahrscheinlichkeit das Produkt gefertigt?

Aufgabe 4-38: *Schummelei*
Prof. Antischumm bekämpft die Schummelei während der Klausuren. Daher hat er eine Schummel–Diagnose–Maschine erfunden, über die folgenden Angaben vorliegen: 90% der Studenten, die schummeln, werden als solche erkannt, und 90% der Studenten, die nicht schummeln, werden als ehrlich erkannt. Aus Erfahrung weiß man weiterhin, dass 10% aller Studenten schummeln.

a) Definieren Sie Ereignisse und ordnen Sie im Text enthaltene Wahrscheinlichkeiten zu.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Maschine einen Schummelverdacht liefert?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Student wirklich schummelt, falls die Maschine einen entsprechenden Verdacht geliefert haben sollte?

Wahrscheinlichkeitsrechnung-Schummelei.mp4

Aufgabe 4-39: *Reitturnier*

Für ein Reitturnier wurde eine Hindernisbahn aufgebaut, die aus 60% Steilsprüngen, 30% Oxern und 10% Gräben besteht. Die Fehlerquoten sind bei diesen Hindernissen erfahrungsgemäß unterschiedlich und betragen für jedes Pferd bei Steilsprüngen 3%, bei Oxern 4% und bei Gräben 5%.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pferd bei einem beliebigen Hindernis nicht fehlerfrei ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pferd beim dritten Hindernis den ersten Fehler macht, wenn die Hindernisbahn nur aus Oxern besteht?

Wahrscheinlichkeitsrechnung-Reitturnier.mp4

Aufgabe 4-40: *Entwicklungsabteilung*

Die Entwicklungsabteilung eines Produzenten von Haushaltsgeräten ist in 90% der Fälle für die Markteinführung der von ihr entwickelten Geräte. Ein positives Votum der Entwicklungsabteilung führt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 bei der Marketingabteilung ebenfalls zu einem positiven Votum. Sind beide Abteilungen für die Markteinführung des neuen Gerätes, so entscheidet die Geschäftsleitung dennoch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 dagegen. Ist die Marketingabteilung gegen die Markteinführung, die Entwicklungsabteilung aber dafür, so stimmt die Geschäftsleitung nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 zu.

a) Definieren Sie Ereignisse und ordnen Sie diese den im Text enthaltenen Wahrscheinlichkeiten zu.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Markteinführung eines neuen Produkts sowohl von der Geschäftsleitung als auch von der Entwicklungs– und der Marketingabteilung getragen wird.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entscheiden sich Geschäftleitung und Entwicklungsabteilung für die Markteinführung eines neuen Produkts?

Aufgabe 4-41: *Eigener PKW*

Von den Angestellten einer Firma fahren 70% der Frauen und 80% der Männer mit dem eigenen PKW zum Büro. Die Anzahl weiblicher und männlicher Angestellter in dieser Firma stehen dabei im Verhältnis 3:2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bürokraft der Firma, die mit dem PKW zur Arbeit kommt, weiblich ist?

Aufgabe 4-42: *Ereignisraum*

Gegeben seien die Ereignisse A und B als Elemente des Ereignisraumes S mit $P(A) = P(B) = 1/2$ und $P(A \cup B) = 3/4$. Welche der folgenden Feststellungen ist richtig?

a) A und B zerlegen S

b) A und B sind komplementär

c) A und B sind disjunkt

d) A und B sind unabhängig

Aufgabe 4-43: *Zerlegung*

Für ein Zufallsexperiment mit dem Ereignisraum S = 1,2,3,4,5 betrachtet man folgende Ereignisse: $A_1 = \{1\}, A_2 = \{4\}, A_3 = \{1,2\}, A_4 = \{3,5\}, A_5 = \{1,2,4\}, A_6 = \{2,4,5\}$.
Bilden folgende Ereignisse gemeinsam eine Zerlegungen von S?

a) A_3, A_4, A_5

b) A_4, A_6

c) A_1, A_2, A_4

d) A_2, A_5, A_6

e) A_5, A_6

f) A_2, A_3, A_4

Aufgabe 4-44: *Musikkassette*
Eine Musikkassette werde zu 70% im Auto und sonst in der Wohnung abgespielt. Im Auto habe diese mit 75%-iger und in der Wohnung mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit eine Lebensdauer von mehr als 500 Betriebsstunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden für die Kassette mehr als 500 Betriebsstunden erreicht?

Aufgabe 4-45: *Erregertest*
Mit einem neuen Erregertest haben Mediziner die Erkennungsrate für den Bazillus „Beta“ auf 95% gesteigert, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem infizierten Probanden der Test ein positives Ergebnis liefert. Falls der Bazillus „Beta“ nicht vorliegt, liefert der Test nur in 3% der Fälle einen positiven Befund. 2% der Bevölkerung sind mit dem Bazillus „Beta“ infiziert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv getesteter Proband tatsächlich infiziert ist?

Aufgabe 4-46: *Banknoten*
Ein Bankangestellter erkennt zu 90% gefälschte Banknoten und irrt sich zu 5% bei korrekten Banknoten. Der Anteil der gefälschten Banknoten liegt bei 0,2%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Banknote echt ist, die der Bankangestellte für falsch hält?

Aufgabe 4-47: *Tennis*
Ein Assistent geht an 8 von 20 Arbeitstagen am frühen Nachmittag Tennis spielen, denn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sein Chef versucht, ihn am frühen Nachmittag aufzusuchen bzw. anzurufen, beträgt nur 0,1. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Handlungen des Assistenten und des Chefs unabhängig voneinander sind.
An wie vielen von 20 Arbeitstagen darf der Assistent nachmittags Tennis spielen gehen, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, vom Chef nicht angetroffen zu werden, höchstens 1% betragen soll?

Aufgabe 4-48: *Systemausfallrisiko*
Ein Unternehmen bedient sich zur Bearbeitung seiner betriebswirtschaftlichen Vorgänge eines modernen Datenverarbeitungs– und Kommunikationssystems, das durch zwei voneinander unabhängig arbeitende Computer bedient wird. Das System fällt aus, wenn beide Computer ausfallen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit des Computers A im Verlaufe eines Arbeitstages beträgt 0,05 und die des Computers B 0,04.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt das System im Verlaufe eines Arbeitstages nicht aus?

Aufgabe 4-49: *Kundenbesuche*
Herr M. macht als Geschäftsmann oft Kundenbesuche mit dem Auto in Polen. Auf seinem Weg fährt er nur über die Grenzübergänge Guben und Forst und muss Wartezeiten an der Grenze in seinem Zeitplan berücksichtigen. Welchen Grenzübergang Herr M. wählt, hängt davon ab, wo er seinen jeweiligen Kunden besucht. Die Erfahrung zeigt, dass er mit 40%–iger Wahrscheinlichkeit den Grenzübergang Forst und mit 60%–iger Wahrscheinlichkeit den Grenzübergang Guben nehmen muss. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er über Guben fährt und sehr lange warten muss, beträgt 30%. Bevor Herr M. erfährt, welchen Kunden er in der nächsten Woche besuchen muss, sollen Sie für ihn folgende Frage beantworten:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er an der Grenze sehr lange warten muß, wenn er über Guben fährt?

Aufgabe 4-50: *RealProfit*
Die folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne des „RealProfit“ Unternehmens im nächsten Jahr.

Gewinn (in EUR) X	-10000	0	5000	10000	15000	20000
$P(X = x)$		0,2	0,2	0,25	0,1	

Ergänzen Sie die fehlenden Werte so, dass das Unternehmen RealProfit mit der Wahrscheinlichkeit 0,75 profitabel arbeitet (positiven Gewinn erwirtschaftet). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen negativen Gewinn?

Aufgabe 4-51: *Jeeps*
Frau Pünktlich lebt in einem Landhaus auf einem hohen Berg. Im Winter startet der Motor ihres Jeeps mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%. Da sie auf einen exakten Arbeitsbeginn Wert legt, kauft sie einen zweiten gebrauchten Jeep einer anderen Marke. Leider stellt sich heraus, dass dieser zweite Jeep im Winter nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% anspringt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau Pünktlich nicht pünktlich zur Arbeit erscheint?

Aufgabe 4-52: *Summe von Augenzahlen*
Es werde mit zwei regulären Würfeln je einmal gewürfelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der eine Würfel die Augenzahl 2 und der andere die Augenzahl 3 zeigt, unter der Bedingung, dass die Summe beider Augenzahlen gleich 5 ist.

Aufgabe 4-53: *Fahrrad oder Straßenbahn*
Die Studentin Fritzi kann mit dem Fahrrad oder der Straßenbahn zur Uni fahren. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% entscheidet sie sich für die Straßenbahn. Wenn Fritzi mit der Straßenbahn fährt, braucht sie in 60% aller Fälle mehr als 30 Minuten bis zur Uni. Mit dem Fahrrad kommt sie in 70% der Fälle nach weniger als 30 Minuten in der Uni an.
Heute hat Frizi 45 Minuten bis zur Uni gebraucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie heute die Straßenbahn benutzt?

Aufgabe 4-54: *Münzwurf*
Die Studenten Hinz und Kunz können entweder mit dem Fahrrad oder mit der Straßenbahn zur Uni fahren. Hinz entscheidet stets mit einem einfachen Münzwurf – Zahl bedeutet Fahrrad und Kopf bedeutet Straßenbahn. Kunz wohnt etwas weiter entfernt und möchte daher weniger oft mit dem Fahrrad fahren. Daher benutzt er zur Entscheidung zwei Münzen und fährt nur dann Fahrrad, wenn er mit beiden Münzen Zahl geworfen hat.
Es ist davon auszugehen, dass Hinz und Kunz sich unabhängig voneinander entscheiden, welches Verkehrsmittel sie wählen und dass die Münzwürfe jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% Kopf oder Zahl ergeben.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (in %) dafür, dass Hinz und Kunz an einem Tag beide mit der Straßenbahn zur Uni fahren?

Aufgabe 4-55: *Gangsterbande*
Eine Gangsterbande will in London eine Bank ausrauben. Da die Gangster sich über den Wochentag (Montag,. . . ,Samstag) nicht einigen können, beschließen sie eine Zufallsauswahl mit Hilfe eines regulären Würfels zu treffen. Nun hat London aber eine tüchtige Kriminalpolizei (Scotland Yard) und einen noch tüchtigeren Detektiv (Sherlock Holmes). Scotland Yard klärt 25% aller Banküberfälle schon am selben Tag auf und fasst die Täter. Sherlock Holmes klärt unabhängig von Scotland Yard sogar 35% aller Banküberfälle schon am selben Tag auf und übergibt die Täter dann der Polizei. Was die Bankräuber allerdings nicht wissen: Sherlock Holmes hat für den ganzen Donnerstag eine feste Verabredung in Baskerville Hall und kann daher am Donnerstag natürlich keinen Londoner Bankraub aufklären.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzen die Bankräuber noch am Tag des Bankraubes im Gefängnis?

Aufgabe 4-56: *Wochenendgrundstück*
Familie Sonne hat auf Rügen ein Wochenendgrundstück. Auf die Insel Rügen kommt man entweder über den Rügendamm oder mit der Fähre. Die Familie bestimmt den Anfahrtsweg mit dem Wurf einer (fairen) Münze: Kopf bedeutet Rügendamm und Zahl bedeutet Fähre. Wenn es nicht regnet, fährt Familie Sonne am Wochenende immer nach Rügen. Die Wahrscheinlichkeit, dann am Rügendamm im Stau zu stehen sei 25%, die Wahrscheinlichkeit, vor der Fähre im Stau zu stehen sei 10%. Wenn es regnet, bleiben die Sonnes natürlich zu Hause.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht Familie Sonne nächstes Wochenende nicht im Stau, wenn die Niederschlagswahrscheinlichkeit zu dieser Jahreszeit 0,20 beträgt?

Aufgabe 4-57: *Elemente eines Ereignisraumes*
Gegeben seien die Ereignisse A und B als Elemente des Ereignisraumes S mit $P(A) = P(B) = 1/2$ und $P(A \cup B) = 3/4$. Welche der folgenden Feststellungen ist richtig?

a) A und B zerlegen S.	b) A und B sind komplementär.
c) A und B sind disjunkt.	d) A und B sind unabhängig.
e) keine von a) bis d)	f) es sind a) bis d) zusammen richtig.

Aufgabe 4-58: *Fernsehshow*
Bei einer Fernsehshow ist eine exklusive Reise zu gewinnen. Zur Vergabe der Reise wird folgende Regelung vorgegeben:
Es gibt zwei Urnen, sowie 12 schwarze und 12 weiße Kugeln.

Verfahren 1: In die eine Urne kommen 6 weiße und 2 schwarze Kugeln. Die restlichen Kugeln kommen in die andere Urne.
Verfahren 2: In jede Urne kommen je 6 weiße und 6 schwarze Kugeln.

Der Kandidat wählt eine Urne, aus der dann eine Kugel gezogen wird: Ist sie weiß, so hat er die Reise gewonnen. Der Kandidat kann dabei frei das Verfahren wählen, welches ihm die größte Gewinnchance sichert. Für welches Verfahren soll der Kandidat sich entscheiden? Begründen Sie.

Aufgabe 4-59: *Verkehrsunfälle*
Der Bundesverband der Krankenversicherer hat ermittelt, dass bei Verkehrsunfällen von angegurteten PKW-Fahrern nur in 8% der Fälle schwere Kopfverletzungen aufgetreten sind. Hatte der Fahrer keinen Sicherheitsgurt angelegt, betrug die Wahrscheinlichkeit 38%, dass keine schweren Kopfverletzungen auftraten. Durch Polizeikontrollen weiß man, dass trotz Anschnallpflicht 15% aller Fahrer keinen Sicherheitsgurt anlegen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrer, der nach einem Unfall mit schweren Kopfverletzungen ins Krankenhaus eingeliefert wurde, keinen Sicherheitsgurt angelegt hatte?
Wahrscheinlichkeitsrechnung-Verkehrsunfaelle.mp4

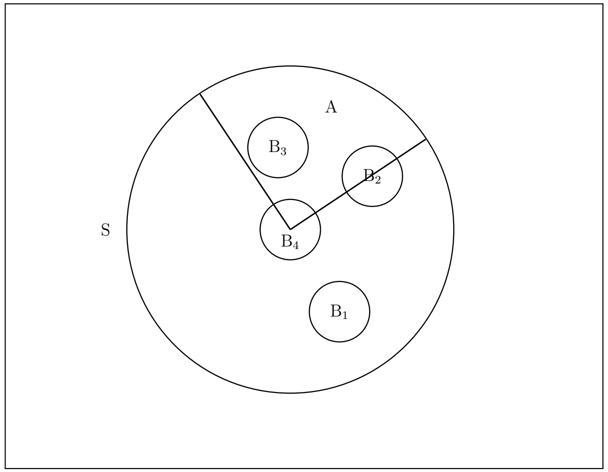
Aufgabe 4-60: *Lebenserwartung der US–Bürger*
Dem aktuellen Bericht des National Center for Health Statistics der Vereinigten Staaten über die Lebenserwartung der US–Bürger kann man entnehmen, dass ein zufällig ausgewählter Bürger mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 mindestens 25 Jahre alt wird und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,80 mindestens das 60. Lebensjahr vollendet.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 25 Jahre alter Amerikaner das 65. Lebensjahr nicht vollendet?

Aufgabe 4-61: *Ausschussteile*
Bei der Produktion von Bauteilen kommt es zu Fehlern, durch die Ausschussteile entstehen. Es gibt drei Gründe, die zu Ausschussteilen führen. Aus Erfahrung sind die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten dieser Gründe bekannt:

A_1 = Bedienungsfehler	$P(A_1) = 0,1$
A_2 = Technische Mängel der Maschine	$P(A_2) = 0,0422$
A_3 = Materialfehler	$P(A_3) = 0,05$

Des weiteren sind folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten bekannt:
$P(B|A_1) = 0,8$ und $P(B|A_3) = 0,6$
mit B = ein produziertes Teil ist Ausschuss.
Zur Qualitätskontrolle wird ein Verfahren verwendet, das jedoch nicht perfekt ist. Wenn dieses Verfahren ein Ausschussteil feststellt, dann ist die Wahrscheinlichkeit gleich 0,95, dass es sich tatsächlich um Ausschuss handelt. Wenn das Verfahren kein Ausschussteil feststellt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich doch um Ausschuss handelt gleich 0,1. Von 100000 überprüften Teilen hat das Verfahren 5000 als Ausschuss deklariert. Somit erhält man:
C = das Verfahren deklariert ein Teil als Ausschuss, $P(C) = 0,05$
$P(B|C) = 0,95 \quad P(B|\overline{C}) = 0,1$
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Produktion eines Ausschussteiles, wenn an der Maschine technische Mängel bestehen: $P(B|A_2)$?

Aufgabe 4-62: *Unabhängige Ereignisse*
Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse in der folgenden Abbildung sind proportional zu den jeweiligen Flächeninhalten.



Welche(s) der nachstehend genannten Ereignispaare besteht aus unabhängigen Ereignissen?

a) B_1, B_2 b) B_1, B_3 c) B_1, B_4 d) B_2, B_3 e) B_2, B_4
f) B_3, B_4 g) A, B_1 h) A, B_2 i) A, B_3 j) A, B_4

Aufgabe 4-63: *Eignungstest*
Zur Beurteilung von Bewerbern als studentische Hilfskraft führt ein Professor einen Eignungstest durch, dessen Ergebnis zur Entscheidung über die Einstellung der Bewerber herangezogen wird. Aufgrund langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass

- 25% der Bewerber den Eignungstest bestehen,
- 95% der Bewerber, die den Eignungstest bestehen, tatsächlich für die Tätigkeit geeignet sind.

Hinsichtlich der Bewerber, die den Test nicht bestehen, geht der Professor davon aus, dass unter ihnen trotzdem 10% geeignet wären.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein für die Tätigkeit geeigneter Bewerber den Einstellungstest?

Aufgabe 4-64: *Spiel 4 aus 20*
Auf einem Jahrmarkt wird das Spiel 4 aus 20 gespielt. Dazu geben die Teilnehmer eine Kombination von 4 aus 20 Buchstaben ab (keine Wiederholung erlaubt). In einer Urne befindet sich für jeden Buchstsben eine Kugel. Es werden per Zufall 4 Kugeln aus der Urne gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit **genau** zwei Richtige zu haben.

Aufgabe 4-65: *Biergärten*
Eine Brauerei bewirtschaftet drei Biergärten A, B, C. Der Geschäftsführung kommen wiederholt Klagen über die unfreundliche Bedienung zu Ohren. Im Biergarten A fühlen sich 10%, in B 40% und in C 70% unfreundlich bedient. Die Gäste verteilen sich im Verhältnis 60:30:10 auf die drei Biergärten.
Der Geschäftsführer der Brauerei unterhält sich mit einem unzufriedenen Gast. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Gast im Biergarten B war?

5 Zufallsvariablen

5.1 Univariate Zufallsvariablen

Aufgabe 5-1: *Kinder*
In der folgenden Tabelle ist die Anzahl der Kinder von sechs Personen angegeben:

Person	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
Anzahl der Kinder	6	2	0	1	2	1

Aus diesen Personen werden drei Personen zufällig ausgewählt (Modell ohne Zurücklegen).
Sei X: "Gesamtzahl der Kinder dieser drei ausgewählten Personen".

a) Geben Sie tabellarisch die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X an.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.

c) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion von X graphisch dar.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei den drei zufällig ausgewählten Personen eine Gesamtzahl der Kinder
   - kleiner oder gleich 4,
   - größer als 8,
   - größer 3 und kleiner 9 auf?

Aufgabe 5-2: *Lostrommel*
In einer Lostrommel befinden sich 1000 Lose, die von 1 bis 1000 durchnummeriert sind. Jedes Los mit den beiden Endziffern 33, 44, 55, 66 oder 77 gewinnt 5 EUR. Auf jedes Los mit den Endziffern 0, 1, 2 oder 8 entfallen 2 EUR Gewinn. Alle anderen Lose sind Nieten.
Die Zufallsvariable X beschreibe den Gewinn, der auf ein zufällig ausgewähltes Los entfällt.

a) Geben Sie tabellarisch die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X an.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.

Aufgabe 5-3: *Ampeln*
Auf einer Hauptsträse regeln Ampeln an 4 Kreuzungen unabhängig voneinander den Verkehr. Jede von ihnen gestattet oder verbietet einem Auto die Weiterfahrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5. Ein Auto fährt diese Hauptstrâsse entlang. Aus verkehrstechnischen Gründen ist die Anzahl der Verkehrsampeln interessant, an denen das Auto bis zum ersten Halt vorbeifährt.

a) Man bestimme deshalb die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Auto an keiner, an einer, an zwei, an drei bzw. an allen vier Ampeln vorbeifährt.

b) Definieren Sie die zugehörige Zufallsvariable. Um welche Art von Zufallsvariable handelt es sich? Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsvariablen an.

Aufgabe 5-4: *Würfelspiel*
Für ein Würfelspiel mit idealen Würfeln gilt folgende Regel: Ein Spieler darf auf eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 setzen. Dann werden drei Würfel geworfen. Erscheint seine Zahl einmal, zweimal oder dreimal, so erhält er das 1–, 2– bzw. 3–fache seines Einsatzes. Erscheint seine Zahl nicht, verliert er seinen Einsatz.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Spielgewinns und berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$, wenn der Einsatz 1 EUR ist.

Aufgabe 5-5: *Diskrete Zufallsvariable*
Eine diskrete Zufallsvariable X hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+4)/50 & \text{für} \quad x = 0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
a) $P[\{X = 2\}]$ b) $P[\{X < 2\}]$ c) $P[\{X \leq 2\}]$ d) $P[\{X > 3\}]$ e) $P[\{X < 5\}]$

Zufallsvariablen-Diskrete Zufallsvariable.mp4

Aufgabe 5-6: *Intervall–Bestimmung*
Eine stetige Zufallsvariable X habe im Intervall $[a, b]$ die Verteilungsfunktion

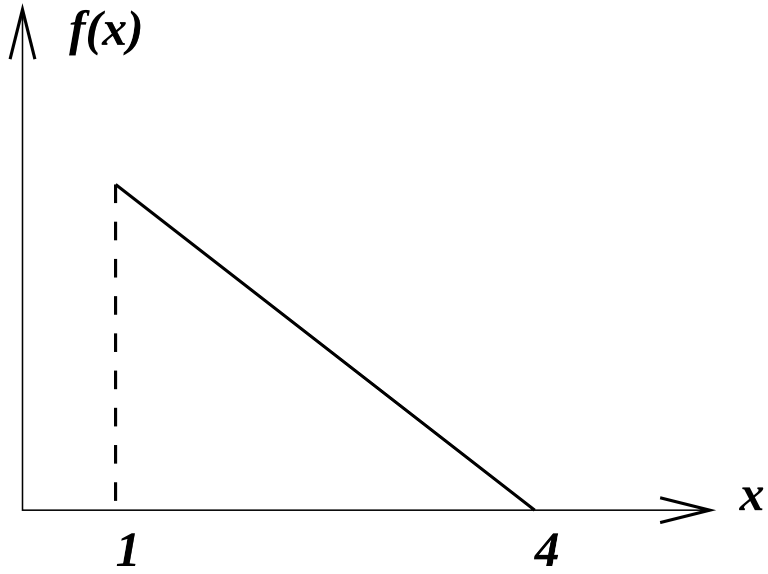
$$F(x) = \frac{x}{6} - \frac{1}{3}, \quad x \in [a, b]$$

a) Bestimmen Sie a und b.

b) Ermitteln Sie die Dichtefunktion $f(x)$

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(6 \leq X \leq 8)$ und $P(X = 5)$.

Aufgabe 5-7: *Fachliteratur*
Die jährlichen Ausgaben der Studierenden für Fachliteratur seien näherungsweise linkssteil dreieckverteilt (siehe Abbildung).



a) Berechnen Sie die Dichtefunktion $f(x)$ und die Verteilungsfunktion $F(x)$.

b) Ermitteln Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

c) Geben Sie folgende Wahrscheinlichkeiten an: $P[\{X \leq 2\}]$, $P[\{2 \leq X \leq 3\}]$, $P[\{X \geq 3\}]$.

Aufgabe 5-8: *Rechteckverteilung*
Die stetige Zufallsvariable X ist im Intervall $[-2, 6]$ rechteckverteilt.

a) Geben Sie die Dichtefunktion $f(x)$ und die Verteilungsfunktion $F(x)$ an und skizzieren Sie beide.

b) Ermitteln Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
   - X negativ ist,
   - X betragsmäßig kleiner als 1 ist,
   - $P(X \leq 2|X \text{ positiv})$?

Aufgabe 5-9: *Dichtefunktion*
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4 - 4x + x^2) & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $f(x)$ die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X sein kann.

b) Wie lautet die Verteilungsfunktion von X?

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz $Var(X)$.

▶ Zufallsvariablen-Dichtefunktion.mp4

Aufgabe 5-10: *Konstanten*
Gegeben sei die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{für} \quad 0 \leq x < 3 \\ -bx + 1 & \text{für} \quad 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a, b > 0$. Diese Funktion ist an der Stelle $x = 3$ stetig.

a) Bestimmen Sie die positiven Konstanten a und b derart, dass $f(x)$ die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X darstellt.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$.

Aufgabe 5-11: *Herstellung eines Gutes*
Ein Unternehmen stellt nur ein Gut her und bietet es zum Preis von 6 EUR je Stück an. Die monatliche Absatzmenge sei eine Zufallsvariable X mit $E(X) = 1000$ Stück und $Var(X) = 500$ Stück^2. Die Kosten je Stück sind durch folgende Gleichung bestimmt: $Y = 250 + 3X$. Der Umsatz ergibt sich aufgrund folgender Gleichung: $Z = 6X$.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die theoretische Varianz des monatlichen Umsatzes.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die theoretische Varianz der monatlichen Kosten.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die theoretische Varianz des monatlichen Gewinns.

Aufgabe 5-12: *Platten*
Eine Stanzmaschine produziert kleine rechteckige Platten, deren Nennmaß in der Länge 10mm und in der Breite 5mm beträgt. Da die Maschine nicht ganz exakt arbeitet, weicht die Länge einer Platte mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% um -2mm vom Nennmaß ab. Bei der Breite kommt es mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% zu einer Abweichung von +1mm vom Nennmaß. Andere Abweichungen als diese treten nicht auf. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Platte genau im Nennmaß gefertigt wird, beträgt 60%.
Geben Sie in tabellarischer Form die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Plattenfläche (in mm^2) an und berechnen Sie, welche Plattenfläche man unter den gegebenen Voraussetzungen erwarten kann.

Aufgabe 5-13: *Umweltschützer*
Eine Gruppe von Umweltschützern fährt auf das Meer hinaus und sammelt treibende Giftfässer ein. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für
X: "Anzahl der am 1. Tag in einer Region gefundenen Fässer" lautet:

x	3	4	5
$P(X = x)$	1/4	2/4	1/4

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Umweltschützer am 1. Tag mindestens vier Fässer in einer neuen Region finden?

b) Wie viele Fässer finden sie durchschnittlich am 1. Tag in einer neuen Region? Berechnen Sie auch die Varianz von X.

Fahren die Umweltschützer einen zweiten Tag in dieselbe Region, verändert sich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Fässern. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für Y: "Anzahl der am 2. Tag in derselben Region gefundenen Fässer in Abhängigkeit vom Erfolg am 1. Tag" lauten:

$$\begin{array}{ll} P(Y = 0|X = 3) = 2/4 & P(Y = 0|X = 4) = 1/2 \\ P(Y = 1|X = 3) = 1/4 & P(Y = 1|X = 4) = 1/2 \\ P(Y = 2|X = 3) = 1/4 & P(Y = 2|X = 4) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P(Y = 0|X = 5) = 3/4 \\ P(Y = 1|X = 5) = 1/4 \\ P(Y = 2|X = 5) = 0 \end{array}$$

c) Stellen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y tabellarisch dar.

d) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

e) Sind X und Y statistisch unabhängig? Begründung!

Die Umweltschützer bekommen eine Art "Fundprämie" für die gefundenen Fässer. Ein unbekannter Spender zahlt ihnen 5 EUR für jedes gefundene Fass; zusätzlich erhalten sie für jede Fahrt 10 EUR.

f) Welchen Erlös in EUR können die Umweltschützer erwarten, wenn sie in einer neuen Region einmal am 1. Tag und einmal am 2. Tag auf das Meer fahren?

Aufgabe 5-14: *Maschinenbauunternehmen*
Eine Abteilung eines Maschinenbauunternehmens stellt Großanlagen eines bestimmten Typs her. Die Wahrscheinlichkeiten, dass im Geschäftsjahr eine bestimmte Anzahl von Anlagen abgesetzt werden kann, haben folgende Werte:

Anlagenzahl	0	1	2	3	4	5
Wahrscheinlichkeit	0.05	0.15	0.25	0.30	0.15	0.10

Die Fixkosten der Abteilung belaufen sich auf 1 Mio. EUR; je gebauter Anlage entstehen variable Kosten in Höhe von 500.000 EUR. Der Erlös pro abgesetzte Anlage beträgt 1 Mio. EUR.
Berechnen Sie den erwarteten Gewinn (bzw. Verlust) der Abteilung.

Aufgabe 5-15: *Auslastung der Schiffe*
Sie sind Chef/in in einer kleinen Reederei, die drei Schiffe besitzt. Die Auslastung der Schiffe ist zufällig, auf Grund langjähriger Erfahrung kennen Sie jedoch für jedes Ihrer Schiffe den Erwartungswert dieser Zufallsgröße. Außerdem sind Ihnen die Kosten bekannt, die entstehen, wenn ein Schiff im Hafen liegt, also nicht ausgelastet ist:

Schiff	Erwartete Auslastung (Tage pro Jahr)	Kosten (in EUR) pro Tag im Hafen
1	300	1000
2	320	1200
3	270	700

Gehen Sie davon aus, dass ein Jahr 365 Tage hat. Berechnen Sie die erwarteten Kosten, die Ihnen durch die fehlende Auslastung Ihrer Schiffe in diesem Jahr enstehen werden.

Aufgabe 5-16: *MegaShop*
In einem Gewinnspiel der Firma MegaShop werden folgende Preise unter allen Einsendern ausgelost:

1	Preis	zu	1000 Euro
4	Preise	zu	500 Euro
100	Preise	zu	20 Euro

Wieviele Einsender dürfen sich höchstens beteiligen, damit der Erwartungswert eines Gewinnes für jeden Einsender mindestens 5 Euro beträgt?

Aufgabe 5-17: *Dichtefunktion einer Zufallsvariablen*
Es sei f eine durch folgende Formel beschriebene gegebene Dichtefunktion der Zufallsvariablen X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x \leq -1, \\ a & \text{für} \quad -1 \leq x < 3, \\ 0 & \text{für} \quad 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

a ist ein Parameter, der geeignet zu wählen ist. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass X positiv ist.

Aufgabe 5-18: *Konstante a*
Es sei f eine durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(1-x) & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegebene Funktion. Man bestimme die Konstante a so, dass f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen ist.

Aufgabe 5-19: *Fernsehsendung*
Bei der Fernsehsendung ”Wer blamiert sich mehr?”muss ein Kandidat in jeder Runde eine Frage beantworten, indem er eine von fünf vorgegebenen Antwortmöglichkeiten auswählt, von denen nur eine Antwort richtig ist. Die Fragen der einzelnen Runden beziehen sich nicht aufeinander. Sobald er eine Frage falsch beantwortet, ist das Spiel beendet und er erhält den Gewinn, der der letzten von ihm richtig beantworteten Frage zugeordnet ist. Die den einzelnen Spielrunden zugeordneten Gewinne sind wie folgt:

Runde 1: 100 EUR Runde 2: 200 EUR Runde 3: 300 EUR Runde 4: 400 EUR

Beantwortet der Kandidat bereits die erste Frage falsch, dann erhält er keinen Gewinn. Beantwortet er die erste Frage richtig, die zweite Frage aber falsch, dann erhält er 100 EUR. Beantwortet er die erste und die zweite Frage richtig, die dritte Frage aber falsch, dann erhält er 200 EUR. Beantwortet er die erste, zweite und dritte Frage richtig, die vierte Frage aber falsch, dann erhält er 300 EUR. Beantwortet er alle Fragen richtig, dann erhält er 400 EUR.
Wie groß ist sein erwarteter Gewinn, wenn er die Antwort einer Spielrunde zufällig aus den fünf Antwortmöglichkeiten auswählt?

Aufgabe 5-20: *Zurückgelegte Strecke*
Ein Vertreter besucht täglich seine Kunden. Dabei legt er im Durchschnitt $\mu = 140$ km zurück mit einer Varianz von $\sigma = 144$ (km^2).
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens, dass die täglich zurückgelegte Strecke um höchstens 24 (km) vom Erwartungswert abweicht?

Aufgabe 5-21: *Glücksrad*
Ein ideales Glücksrad kann zufällig jeden Wert im Intervall $[0; 60]$ annehmen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Glücksrad den Wert 14,08 annimmt?

Aufgabe 5-22: *Zufallsvariable X*
Die Zufallsvariable X hat folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x-3) & \text{für } 3 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
$\{X > 5\}$.

Aufgabe 5-23: *Feuerwehr*
Ein Feuer kann an folgenden Punkten entlang einer Strecke mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ausbrechen:

Punkt x	Wahrscheinlichkeit $P(x)$
-3	0,2
-1	0,1
0	0,1
1	0,4
2	0,2

Die Feuerwehr kann sich irgendwo entlang der Strecke aufstellen, d.h. an einem der fünf Punkte, aber auch an jeder anderen beliebigen Stelle.
An welcher Stelle entlang der Strecke sollte sich die Feuerwehr aufstellen, wenn sie die erwartete quadrierte Fahrstrecke zum Ort des nächsten Feuers minimieren will?

Aufgabe 5-24: *Mautpflichtige Brücke*
Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der Personen pro Fahrzeug, die über eine mautpflichtige Brücke fahren, an:

Anzahl der Personen	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0,05	0,43	0,27	0,12	0,09	0,04

Die folgenden alternativen Möglichkeiten zur Preisgestaltung werden in Betracht gezogen:

a) EUR 0,50 pro Fahrzeuginsasse

b) EUR 0,50 sowohl für das Fahrzeug als auch den Fahrer und EUR 0,35 für jeden weiteren Insassen.

Berechnen Sie die erwarteten Einnahmen pro Fahrzeug für jede der beiden Alternativen.

Aufgabe 5-25: *ICE*
Der ICE 594 „Gebrüder Grimm“ fährt von Frankfurt nach Berlin. Der Fahrplan sieht folgendermaßen aus:

Von	Abfahrt	Nach	Ankunft	Länge
Frankfurt	15:14	Hanau	15:28	23 km
Hanau	15:29	Fulda	16:08	81 km
Fulda	16:10	Kassel	16:41	90 km
Kassel	16:43	Göttingen	17:00	44 km
Göttingen	17:02	Hildesheim	17:31	78 km
Hildesheim	17:33	Braunschweig	17:58	43 km
Braunschweig	18:00	Wolfsburg	18:17	32 km
Wolfsburg	18:19	Berlin Zoo	19:34	169 km

Wie schnell fährt der ICE 594 (in km/h) im Durchschnitt, wenn nur die reine Fahrzeit zugrunde gelegt wird?

Aufgabe 5-26: *Dichtefunktion und Erwartungswert*
Gegeben ist die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0,25x + 0,25 & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Geben Sie für den Erwartungswert von X die relevante Formel an und berechnen Sie den numerischen Wert des Erwartungswertes.

Aufgabe 5-27: *Bahnstrecke Berlin – Nauen*
An einer Schranke der Bahnstrecke Berlin – Nauen wurden an einem Tag die Abstände der Zugfolge in Minuten gemessen. Die beobachtete Häufigkeitsverteilung für die klassierten Daten enthält die folgende Tabelle:

Klasse	absolute Klassenhäufigkeit $h(x_i)$
0 - 30	14
30 - 60	18
60 - 90	6
90 - 120	2

Bestimmen Sie das zweite Quartil dieser Häufigkeitsverteilung.

Aufgabe 5-28: *Qualitätskontrolle*
Bei einer Qualitätskontrolle findet eine dreifache Kontrolle statt. Von den fehlerhaften Stücken werden bei der 1. Kontrolle 80% entdeckt. Von den nicht entdeckten fehlerhaften Stücken stellt die 2. Kontrolle 60% als fehlerhaft fest, bei der 3. Kontrolle werden schließlich 30% der fehlerhaften Stücke entdeckt. Die Entdeckung eines fehlerhaften Stücks kostet bei der 1. Kontrolle 5 Euro, bei der 2. Kontrolle 10 Euro und bei der 3. Kontrolle 20 Euro. Bei den übersehenen fehlerhaften Stücken findet eine Kundenreklamation statt, wobei der Kunde für jedes fehlerhafte Stück 50 Euro erhält. Die Zufallsvariable X beschreibe den Betrag, den ein fehlerhaftes Stück bis zu seiner Entdeckung verursacht.
Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

5.2 Bivariate Zufallsvariablen

Aufgabe 5-29: *Zweidimensionale Zufallsvariable*
Die zweidimensionale Zufallsvariable (X_1, X_2) besitze die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

X_1	X_2		
	1	2	3
1	0.1	0.3	0.2
2	0.1	0.1	0.2

Bestimmen Sie den Erwartungswert von $X_3 = X_1 + X_2$.

Aufgabe 5-30: *Zweidimensionale Zufallsvariable und Erwartungswert*
Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X_1; X_2)$ besitze die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

X_1	X_2		
	1	2	3
1	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.1
4	0.1	0	0.1

Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen
$Y = X_1 \cdot X_2$.

Aufgabe 5-31: *Gemeinsame Verteilung*
Die gemeinsame Verteilung der diskreten Zufallsvariablen X und Y sei durch folgende unvollständige Wahrscheinlichkeitstabelle gegeben:

X	Y			$\sum$
	0	1	2	
0	0.02	0.04	$\square$	0.4
1	$\square$	$\square$	0.30	$\square$
$\sum$	0.04	$\square$	$\square$	$\square$

Entscheiden Sie was gilt:
a) $P(X = Y) = 0,02$ b) $P(X + Y = 2) = 0,3$
d) $P(X \cdot Y = 1) = 0,4$ e) $E(X + Y) = 2$
c) $P(Y - X = 1) = 0,32$ f) $E(X - Y) = -0,5$
g) $Var(X) = 0,24$ h) $Var(Y) = 0,8$

Aufgabe 5-32: *Bauteile*
Ein Hersteller fertigt eine spezielle Sorte von Bauteilen nur für die beiden Kunden I und II. Die monatliche Nachfrage des Kunden I bzw. II wird durch das Merkmal X bzw. Y beschrieben. Die gemeinsame relative Häufigkeitsverteilung von X und Y lautet:

X	Y				$\sum$
	0	1	2	3	
0	0.015	0.03	0.045	0.060	0.15
1	0.040	0.08	0.115	0.165	0.4
2	0.045	0.09	0.140	0.175	0.45
$\sum$	0.100	0.20	0.300	0.400	1.000

a) Ist die monatliche Nachfrage der beiden Kunden unabhängig voneinander?

b) Wie groß ist die relative Häufigkeit, die Gesamtnachfrage der Kunden I und II zu befriedigen, wenn der Hersteller im nächsten Monat nur 1 Bauteil liefern kann?

Aufgabe 5-33: *Spielkasino*
In einem Spielkasino wird ein neues Glücksspiel angeboten, bei dem faire Münzen geworfen werden. Im ersten Durchgang des Spiels werden eine grüne und eine rote Münze geworfen. Falls mindestens eine der Münzen Zahl zeigt, ist der Gewinn 1,- EUR. Im anderen Fall ist der Gewinn für die erste Runde 0,- EUR. Im zweiten Durchgang wird die rote Münze ein zweites Mal geworfen. Falls die rote Münze Zahl zeigt und im ersten Durchgang gewonnen wurde, ist der Gewinn für die zweite Runde ebenfalls 1,- EUR. Anderenfalls ist der Gewinn für die zweite Runde 0,- EUR.
Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung für die Zufallsvariablen
X = „Gewinn in der ersten Runde“ und
Y = „Gewinn in der zweiten Runde“.

6 Wichtige Verteilungsmodelle

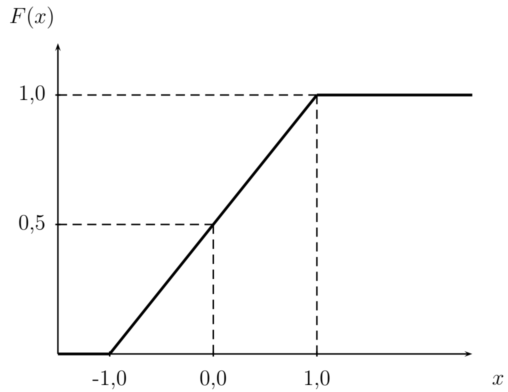
Aufgabe 6-1: *Wartungen*
Ein Arbeiter betreut zwei Maschinen, die unabhängig voneinander arbeiten. Im Mittel benötigt Maschine A während einer 8-Stunden-Schicht eine und Maschine B zwei Wartungen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (in %), dass während einer Schicht keine einzige Wartung erforderlich ist?

Aufgabe 6-2: *Gemeindegröße*
Im Jahrbuch des statistischen Bundesamtes 1999 ist angegeben, dass zum 31.12.1997 in Baden-Würtemberg 3,3626% der Gemeinden weniger als 1.000 Einwohner und 0,8894% der Gemeinden mehr als 100.000 Einwohner haben. Unter der Annahme, dass die Gemeindegröße normalverteilt ist, berechnen Sie die Standardabweichung der Verteilung. Wählen Sie als Einheit für die Gemeindegröße Tausend Einwohner.

Aufgabe 6-3: *XXmega*
Der Radiosender XXmega versucht auf dem umkämpften Berliner Radiomarkt mitzumischen. Besonderer Beliebtheit erfreut sich die Nachmittagssendung „XXmega happy hour", in der für jeden Anrufer ein Glücksrad gedreht wird. Um möglichst viele Hörer anzulocken, hat das Glücksrad eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 60%. Heute haben 30 Hörer angerufen, für jeden Anrufer wurde einmal das Glücksrad gedreht. Allerdings haben weniger als ein Drittel der Anrufenden etwas gewonnen. Der verantwortliche Redakteur ist verwundert.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 30 Anrufern tatsächlich weniger als ein Drittel etwas gewinnt?

Aufgabe 6-4: *Jahresrendite*
Ein Anleger verfügt zu Jahresbeginn über 150.000,- Euro, die er bei einer Bank anlegt, die ihm eine zufällige Jahresrendite R garantiert. Diese Jahresrendite ist gleichverteilt zwischen 6% und 8%. Berechnen Sie die Standardabweichung des Jahresendvermögens.

Aufgabe 6-5: *Varianz*
Es sei F eine durch folgende Abbildung beschriebene Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.



Bestimmen Sie die Varianz von X.

Aufgabe 6-6: *Formfehler*
In einem Unternehmen haben 10% der in großer Zahl vorhandenen Belege einen Formfehler. Ein Wirtschaftsprüfer wählt zufällig 10 Belege aus.

a) Wie ist die Anzahl der fehlerhaften Belege verteilt?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mehr als einen fehlerhaften Beleg findet.

Aufgabe 6-7: *Vier Kinder*
Es werden Familien mit vier Kindern betrachtet. Es wird angenommen, dass Jungen- und Mädchengeburten unabhängig voneinander und gleichwahrscheinlich sind. Mit X wird die (zufällige) Anzahl der Jungen in einer Familie mit 4 Kindern bezeichnet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) zwei Jungen und zwei Mädchen,

b) drei Jungen und ein Mädchen

c) vier Jungen

geboren werden, indem man die entsprechenden Ereignisse mittels der Zufallsvariablen X formuliert und deren Verteilung verwendet.

▶ Verteilungsmodelle-Vier Kinder.mp4

Aufgabe 6-8: *Kornflakes*
Die Firma Kallocks bringt eine neue Sorte Kornflakes auf den Markt. Als Kaufanreiz wird den Packungen ein halbes Jahr lang ein Sammelcoupon beigelegt. Für jeweils 4 solcher Coupons kann man sich dann nach dem halben Jahr ein Poster zuschicken lassen.
Nun ist leider die Maschine, die für die Verteilung der Coupons auf die einzelnen Packungen verantwortlich ist, mit einem Fehler behaftet, der bewirkt, dass 25% der Packungen ohne Coupon zur Auslieferung kommen. Fritzchen ist scharf auf diese Poster und kauft daher jede Woche von seinem Taschengeld eine Packung Kornflakes von dieser Firma.

a) Geben Sie den Verteilungstyp und die Verteilungsparameter der Zufallsvariablen X an.
   X: “Anzahl der Packungen mit Coupon innerhalb des halben Jahres (= 26 Wochen), die sich Fritz kauft”

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritzchen Coupons für
   - genau 3 Poster,
   - höchstens 4 Poster,
   - genau 6 Poster,
   - höchstens 1 Poster

   in einem halben Jahr zusammenbekommt?

c) Mit wie vielen Packungen mit Coupons kann Fritzchen in dem halben Jahr rechnen?

Aufgabe 6-9: *Prüfungsfragen*
Einem Prüfling A wird ein Gesamtkatalog mit 10 Zetteln vorgelegt, auf denen je eine Prüfungsfrage steht. Der Prüfling weiß, dass der zuständige Prüfer von diesen 10 Fragen 6 Fragen so schwer gemacht hat, dass kein Prüfling sie beantworten könnte. Von den 10 Fragen darf der Prüfling nun selbst 3 Fragen für seine Prüfung zufällig auswählen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Prüfling

a) genau drei beantwortbare Fragen zieht?

b) mindestens eine beantwortbare Frage zieht?

▶ Verteilungsmodelle-Pruefungsfragen.mp4

Aufgabe 6-10: *Eier*
Von einer Eiersorte sei bekannt, dass von einer Packung mit 6 Eiern 2 Eier faul sind. Aus dieser Packung werden zufällig 3 Eier ausgewählt und auf ihre Güte überprüft, d.h. in die Pfanne geschlagen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Ei faul ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Ei faul ist?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Eier faul sind?

d) Wie viele faule Eier kann man bei der Prüfung von 3 Eiern erwarten?

Auf einer kleinen Hühnerfarm werden in einem langen Zeitraum mehr als 500 Eier produziert. Man weiß, das mit 80%iger Wahrscheinlichkeit ein solches Ei gut, d.h. nicht faul ist. Es wird eine Lieferung von 20 dieser Eier bestellt bei Zufallsauswahl der Eier.

e) Wie groß ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2 faule Eier in der Lieferung sind?

f) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße "Anzahl der guten Eier in der Lieferung".

g) Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass genau 16 faule Eier in der Lieferung sind.

▶ Verteilungsmodelle-Eier.mp4

Aufgabe 6-11: *Telefongespräche*
Zwischen 14 und 16 Uhr ist die durchschnittliche Anzahl der Telefongespräche, die die Vermittlung einer Firma pro Minute empfängt, gleich 2,5.

a) Wie ist die Zufallsvariable X: "Anzahl der in dieser Zeit empfangenen Telefonate pro Minute" verteilt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während einer bestimmten Minute in dieser Zeit
   - kein,
   - weniger als drei,
   - vier oder mehr,

   Telefonate empfangen werden?

▶ Verteilungsmodelle-Telefongespraeche.mp4

Aufgabe 6-12: *Betriebe der chemischen Industrie*
Ein Beamter im Umweltamt ist zuständig für die Betriebe der chemischen Industrie. Jedes Unternehmen erstellt täglich einen Bericht für das Umweltamt, wobei alle Betriebe voneinander unabhängig arbeiten. Der Beamte teilt die Tagesberichte in positive (keine Zwischenfälle) und negative (ein oder mehrere Zwischenfälle) Tagesberichte ein.
Es werden 25 zufällig ausgewählte Betriebe einer bestimmten Region betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein negativer Tagesbericht erstellt wird, ist aufgrund von strengen Gesetzen für Schutz- und Sicherheitsmaßnahmen für jeden Betrieb 1%.
Im Umweltamt wird überlegt, ob die Tagesberichte für einen Monat (=30 Tage) zusammengefaßt werden sollen.

a) Wie ist die Zufallsgröße Y: "Anzahl der pro Monat erstellten negativen Tagesberichte" exakt verteilt? (Verteilungstyp und Verteilungsparameter)

b) Wieviele negative Tagesberichte können im Umweltamt für April (30 Tage) erwartet werden?

c) Durch welche diskrete Verteilung kann die Verteilung von Y approximiert werden? Überprüfen Sie die Approximationsvoraussetzungen und geben Sie Verteilungstyp und Verteilungsparameter an!

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden für April weniger als 8 negative Tagesberichte erstellt?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden für April mehr als 744 positive Tagesberichte erstellt?

Aufgabe 6-13: *Serum*
Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass ein Individuum von einem bestimmten Serum Impfschäden erleidet, gleich 0,0001 ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stadt von 20.000 Einwohnern, die alle geimpft wurden,
a) keiner, b) genau 1, c) genau 6, d) mehr als 4
Personen Impfschäden davontragen?

Aufgabe 6-14: *Elektronisches Bauteil*
Bei einem elektronischen Bauteil kann man 48 Ausfälle pro Tag (=24 Stunden) erwarten. Die Ausfälle erfolgen kurzfristig, rein zufällig und unabhängig voneinander.

a) Wie ist die Zeit (in Stunden) zwischen zwei Ausfällen verteilt? Geben Sie Verteilungstyp und Verteilungsparameter an.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bis zum nächsten Ausfall mehr als zwei Stunden vergehen?

c) Verbalisieren Sie an diesem Beispiel folgende Formel:

$$\int_1^2 2e^{-2x}\,dx$$

d) Nehmen Sie an, dass ein elektronisches System aus zwei dieser Bauteile besteht, welche unabhängig voneinander funktionieren. Das System fällt aus, sobald ein Bauteil nicht mehr funktioniert.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System mehr als zwei Stunden funktioniert?

Aufgabe 6-15: *Telefonzentrale*
Die Telefonzentrale einer Feuerwache empfängt in einer Stunde durchschnittlich 0,5 Alarmmeldungen.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während der 6–stündigen Dienstzeit einer Feuerwehrmannschaft
   a) kein Alarm,
   b) mindestens dreimal Alarm,
   c) höchstens siebenmal Alarm

   gegeben wird?

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Feuerwehrmannschaft
   a) innerhalb der ersten Dienststunde den ersten Alarm bekommt?
   b) länger als 2 Stunden auf den ersten Alarm warten muss?
   c) ausgerechnet in der letzten Dienststunde zum ersten Alarm "ausrücken" muss, nachdem in der gesamten 5-stündigen Dienstzeit zuvor kein Alarm gekommen ist?

3) Der Oberbrandmeister erklärt seiner Feuerwehrmannschaft, dass mit 95%iger Wahrscheinlichkeit der erste Alarm noch in die Dienstzeit dieser Mannschaft fallen wird. Hat er recht?
   Muss die Mannschaft also tatsächlich weniger als 6 Stunden warten, um mit 95%iger Wahrscheinlichkeit den ersten Alarm zu bekommen?

Verteilungsmodelle-Telefonzentrale (13 min).mp4

Aufgabe 6-16: *Stahlstifte*
Eine Maschine produziert Stahlstifte. Leider ist der Durchmesser der Stifte produktionsbedingten Schwankungen unterworfen. Die Zufallsvariable
X_1 = "Durchmesser eines Stiftes" sei normalverteilt mit
$\mu_1 = 6$ mm und $\sigma_1 = 0,4$ mm.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser eines Stiftes um mehr als 2% vom Sollwert 6mm abweicht?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser eines Stiftes genau 6mm beträgt?

c) Welcher Wert wird mit einer Wahrscheinlichkeit von (höchstens) 85% nicht überschritten?

Eine zweite Maschine, die unabhängig von der ersten arbeitet, bohrt Löcher in ein Werkstück, in die die Stahlstifte eingesetzt werden sollen. Auch der Durchmesser der Bohrlöcher ist Schwankungen unterworfen. Die Zufallsvariable X_2: "Durchmesser eines Bohrloches" sei normalverteilt mit $\mu_2 = 6,05$ mm und $\sigma_2 = 0,3$ mm.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser eines Bohrloches kleiner als 6mm ist?

e) Wie ist die Zufallsvariable $Y = X_2 - X_1$ verteilt? (Verteilungstyp und Verteilungsparameter)

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stift nicht in das Bohrloch passt?

Aufgabe 6-17: *Taschenrechner*
Ein Taschenrechner wird mit zwei verschiedenen Batterien betrieben. Er arbeitet, solange beide Batterien funktionieren. Die Lebensdauer X der Batterie A sei normalverteilt mit μ=30 Stunden und σ=3 Stunden. Die Lebensdauer Y der Batterie B sei normalverteilt mit μ=35 Stunden und σ=4 Stunden. X und Y seien unabhängige Zufallsvariablen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Batterie A eine Lebensdauer zwischen 15 und 27 Stunden hat?

b) Welche Lebensdauer wird bei der Batterie B mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,853141 nicht überschritten?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet der Taschenrechner noch nach 24 Stunden?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer der Batterie A geringer ist als die Lebensdauer der Batterie B?

Aufgabe 6-18: *Bäcker Backfrisch*
Bäcker Backfrisch vertreibt in seinem Laden hochfeine Marzipanschweine. Es sei X das "Gewicht eines Marzipanschweins", eine normalverteilte Zufallsvariable mit $E(X) = 150$ g und $Var(X) = 16$ g^2. Max, der davon ausgeht, dass das Gewicht der einzelnen Marzipanschweine unabhängig voneinander ist, geht in den Laden und kauft 4 Marzipanschweine.

a) Wie ist die Zufallsvariable Y: "Gewicht der 4 Marzipanschweine" verteilt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gewicht der 4 Marzipanschweine
   - genau 600 g beträgt?
   - nicht mehr als 1% vom Erwartungswert abweicht?

Verteilungsmodelle-Baecker Backfrisch.mp4

Aufgabe 6-19: *Mittagszeit*

A. Verkäuferin Mona weiß aus Erfahrung, dass während der Mittagszeit (13.00 Uhr bis 15.00 Uhr) durchschnittlich nur alle 15 Minuten ein Kunde den Laden betritt.

a) Wie ist die Zufallsvariable U_1: "Wartezeit bis zum Eintreffen des nächsten Kunden in der Mittagszeit" verteilt? Geben Sie Verteilungstyp und Verteilungsparameter an.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mona in der Mittagszeit mehr als 30 Minuten auf den ersten Kunden warten muss?

c) Mona wartet nun schon 30 Minuten vergeblich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch in den nächsten 15 Minuten kein Kunde den Laden betritt?

B. Mona erhält regelmäßig alle 3 Stunden frische Ware. Sie hat heute leider ihre Uhr vergessen und bittet ihren Freund Leonardo, der ihr Gesellschaft leistet, um statistischen Rat.

a) Wie ist die Zufallsgröße U_2: "Wartezeit auf die frische Ware" verteilt? (Verteilungstyp und Verteilungsparameter)

b) Mona hat sich bereits eine Stunde angeregt mit Leonardo unterhalten, ohne dass frische Ware eingetroffen ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mona innerhalb der nächsten halben Stunde frische Ware erhält?

Aufgabe 6-20: *Briefmarkenschalter*

Am Briefmarkenschalter eines Postamtes kommen im Durchschnitt 4 Kunden pro Minute an den Schalter. Der Schalterbeamte kann maximal 5 Kunden pro Minute abfertigen. Zu Beginn eines Beobachtungszeitraumes sei kein Kunde am Schalter. Es sei X die „Anzahl der Kunden, die pro Minute eintreffen“. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich nach einer Minute eine Schlange gebildet hat.

Aufgabe 6-21: *Bogenschütze*

Bogenschütze A. Mor will seine Freunde mit seiner Kunst beeindrucken. Er weiß, dass er im Durchschnitt 3 Treffer bei 5 Schüssen erzielt. Um sein Können unter Beweis zu stellen, schießt er 8 mal auf eine Scheibe.

a) Wie ist die Zufallsvariable X_i: „Treffer beim i–ten Schuß“ und die Zufallsvariable Y: „Treffersumme bei 8 Schüssen“ verteilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie die zu erwartende Treffersumme allgemein und konkret für das Beispiel an.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A. Mor genau dreimal trifft?

Verteilungsmodelle-Bogenschuetze.mp4

Aufgabe 6-22: *Straßenmusikant*

Der Straßenmusikant Johann hat beobachtet, dass er im Durchschnitt alle 5 Minuten ein Geldstück für seine Darbietung erhält.

a) Wie ist die Zufallsvariable X: „Anzahl der erhaltenen Geldstücke je Zeiteinheit“ verteilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Welchen Verdienst kann Johann in 4 Stunden erwarten, wenn man annimmt, dass 5 Geldstücke 3 EUR entsprechen?

c) Johann ist schon ziemlich müde. Dennoch will er erst nach Hause gehen, wenn er noch ein weiteres Geldstück erhält. Wie lange muß er im Durchschnitt noch spielen, bevor er gehen kann, wenn er soeben eine Münze erhalten hat? Geben Sie dafür auch die Zufallsvariable und deren Verteilung an.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 3 Minuten auf das nächste Geldstück warten muß?

Verteilungsmodelle-Strassenmusikant.mp4

Aufgabe 6-23: *Gaststätte*
In einer Gaststätte, die nur Kontakt suchende Singles betreten dürfen, kann sich ein Gast durch zünftige Menüs verwöhnen lassen.

A. An einem normalen Sonntag, an dem die Gaststätte von 19.00 Uhr bis 24.00 Uhr geöffnet ist, kommen gewöhnlich – unabhängig voneinander – 25 Gäste. Man kann davon ausgehen, dass während der Öffnungszeit in jedem Zeitabschnitt gleich viele Gäste erwartet werden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der ersten Stunde genau ein Gast kommt?

b) Wieviele Minuten vergehen an einem Sonntagabend im Mittel zwischen der Ankunft zweier Gäste?

B. Ein Gast hat die Möglichkeit, so oft nachzubestellen, wie es ihm beliebt. Der Wirt geht davon aus, dass jeder Gast – unabhängig von den anderen Gästen – höchstens einmal nachbestellt. Er weiß weiterhin, dass ein Gast mit 70%–iger Wahrscheinlichkeit nicht nachbestellt.

a) Wie ist die Zufallsvariable X: „Anzahl der Nachbestellungen an einem Sonntagabend“ exakt verteilt, wenn man von der o.g. gewöhnlichen Gästezahl ausgeht?

b) Ist die gewöhnliche Gästezahl erschienen, wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05% die Kapazität der Küche durch die Nachbestellungen überschritten. Bestimmen Sie, bei wie vielen Nachbestellungen die Kapazitätsgrenze erreicht ist.

Aufgabe 6-24: *Tulpenzwiebeln*
In einem Gartenmarkt werden Tulpenzwiebeln in 10–er Packungen verkauft. Es ist bekannt, dass 5% der Tulpen nicht blühen werden. Um die Tulpen trotzdem loszuwerden, garantiert der Gartenmarkt, dass mindestens 9 der 10 Tulpen einer Packung blühen werden.
An einem bestimmten Tag liegen 50 dieser 10–er Packungen im Regal des Gartenmarktes. Bestimmen Sie für eine zufällig herausgegriffene Packung die Wahrscheinlichkeit, dass das Garantieversprechen nicht erfüllt ist.
▶ Verteilungsmodelle-Tulpenzwiebeln.mp4

Aufgabe 6-25: *Supermarkt*
Die Studentin Fritzi will im Supermarkt den Backstand und den Käsestand aufsuchen. Aus jahrelanger Erfahrung weiß sie, dass man am Backstand durchschnittlich 5 Minuten warten muß, bevor man bedient wird. Am Käsestand muss man dagegen durchschnittlich nur 4 Minuten warten.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritzi an mindestens einem der beiden Verkaufsstände mehr als 10 Minuten warten muss, wenn beide Wartezeiten als unabhängig und exponentialverteilt angenommen werden?

Aufgabe 6-26: *Abendessen*
Die Studentin Fritzi kauft für ein Abendessen mit Freunden ein. Beim Obst- und Gemüsehändler kauft sie eine 1 kg-Schale Äpfel und ein 1 kg-Netz Mandarinen.
Der statistisch versierte Obst- und Gemüsehändler Paul erklärt ihr, dass er seine 1 kg-Packungen immer gewissenhaft überprüft. Über die Jahre sind alle Packungen immer normalverteilt und haben tatsächlich einen Erwartungswert von 1 kg. Interessanterweise haben die Apfel-Schalen eine Varianz von 400 g^2, während die Mandarinen-Netze nur eine Varianz von 225 g^2 haben.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritzi bei zufälliger Auswahl der Apfel–Schale und des Mandarinen-Netzes mehr als 1950 g Obst nach Hause trägt?

Aufgabe 6-27: *Pizza– und Kuchenverkauf*
Die Bäckerei Backfrisch betreibt seit neuestem auch einen Pizzaverkauf. Verkäuferin Mona hat beobachtet, dass vormittags (8-11 Uhr) durchschnittlich alle 5 Minuten ein Kunde kommt, der Kuchen will. Ein Kunde, der Pizza will, kommt vormittags nur durchschnittlich alle 20 Minuten.
Mona macht heute pünktlich um 8 Uhr ihren Laden auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (in %), dass innerhalb der ersten 10 Minuten nach Ladenöffnung mindestens ein Pizza-Kunde und kein Kuchen-Kunde kommt?

Aufgabe 6-28: *Wertpapierkurse*
Am Computer einer Bank kommt im Mittel alle 20 Sekunden eine Anfrage über die aktuellen Wertpapierkurse von einem der angeschlossenen, unabhängig arbeitenden Terminals an.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Anfragen mehr als 30 Sekunden vergehen?

Aufgabe 6-29: *Zug nach Brandenburg*
Vom Bahnhof Berlin–Zoo fährt regelmäßig im 3-Stunden-Takt der Regionalzug nach Brandenburg. Ein Tourist kommt zu einem zufälligen Zeitpunkt zum Bahnhof Berlin–Zoo.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss er mindestens eine Stunde auf die Abfahrt des Regionalzuges nach Brandenburg warten?

Aufgabe 6-30: *Radrennen*
An einem Radrennen nehmen zehn Teams mit je drei Fahrern teil. Sie sind der sportliche Leiter eines dieser Teams. Am Ende des Rennens wird eine Dopingkontrolle durchgeführt. Dazu werden insgesamt vier Fahrer aus dem gesamten Fahrerfeld ausgewählt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von Ihrem Team alle drei Fahrer kontrolliert werden?

Aufgabe 6-31: *Rückversicherungsgesellschaft*
Eine Versicherungsgesellschaft geht davon aus, dass ihr durchschnittlich alle 4 Monate ein Großschaden gemeldet wird, für den sie ihre Rückversicherungsgesellschaft in Anspruch nehmen muss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr mindestens 5 derartige Großschadensfälle auftreten?

Aufgabe 6-32: *Landwirtschaftsexperte*
Ein Landwirtschaftsexperte ist der Auffassung, dass 10% der europäischen Rinder BSE–verseucht sind. Geben Sie die kleinstmögliche Anzahl von zufällig ausgewählten Rindern an, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens ein BSE–verseuchtes Rind zu erhalten.

Aufgabe 6-33: *Unfallmeldungen*
Die Zeitspanne, die zwischen zwei Unfallmeldungen in einer Polizeistation verstreicht, beträgt durchschnittlich 160 Minuten. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zeitspanne größer als 60, aber höchstens 160 Minuten ist.

Aufgabe 6-34: *Radrennfahrer*
Die Radrennfahrer Anton und Bertram trainieren hart für die nächste Meisterschaft. Anton fährt jeden Tag 180 km, Bertram sogar jeden Tag 30 km mehr als Anton. Da sie auf öffentlichen Straßen trainieren müssen, sind Unfälle nicht vermeidbar. Bei Anton kommt es im Mittel alle 12000 km zu einem Unfall, bei Bertram im Mittel alle 10000 km. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Rennfahrer zusammen innerhalb von zwei Wochen höchstens einen Unfall haben?

Aufgabe 6-35: *Polizeistation*
In einer Polizeistation kommen durchschnittlich in einer Stunde 0,5 Unfallmeldungen herein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass länger als 2 Stunden auf die erste Unfallmeldung gewartet werden muss.

Aufgabe 6-36: *Fahrtkostenzuschuss*
Die 50 Mitarbeiter eines Unternehmens bekommen für ihren Weg zur Arbeitsstelle einen pauschalen Fahrtkostenzuschuss von EUR 0,10 pro Kilometer und Tag. Der tatsächliche Weg von zu Hause zur Arbeit (in km) der einzelnen Mitarbeiter sei unabhängig voneinander und identisch normalverteilt mit den Parametern $\mu = 50$ km und $\sigma^2 = 32$ km^2.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Unternehmen an die Mitarbeiter mehr als 255 Euro pro Tag zu zahlen?

Aufgabe 6-37: *Gleichverteilung*
Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt in den Grenzen a und b und besitze den Erwartungswert 16 und die Varianz 12.
Bestimmen Sie die numerischen Werte der Grenzen a und b.

Aufgabe 6-38: *Parkplaketten*
In einer Universität werden jedes Semester 400 Parkplaketten verlost. An dieser Verlosung nehmen jedes Semester 1000 Studenten teil.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student Meyer in mindestens zwei der nächsten drei Semester eine Parkplakette erhält, wenn er jedes Semester an der Verlosung teilnimmt?

Aufgabe 6-39: *Traineeprogramm*
Im Rahmen eines Traineeprogramms stellt ein Unternehmen Hochschulabsolventen einer bestimmten Fachrichtung ein, um nach Abschluß dieses Programms 20 freie Stellen zu besetzen. Aufgrund langjähriger Erfahrung kann davon ausgegangen werden, dass sich die Bewerber mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,90 als geeignet erweisen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei 23 eingestellten Trainees mindestens 20 geeignet?

Aufgabe 6-40: *Suppe mit Fleischeinlage*
In einer Mensa wird regelmäßig Suppe mit Fleischeinlage angeboten. Bei der Zubereitung werden der Grundsubstanz 400 Fleischstücke zu je 5 g zugegeben und gut umgerührt, so dass sich 125 l Suppe ergeben. Dann werden – unter ständigem Umrühren – Portionen zu je einem viertel Liter ausgegeben.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einer Portion mehr als 2 Fleischstücke befinden.

Aufgabe 6-41: *Miss–Wahl*
Bei der Vorauswahl zur Miss-Wahl 2015 bewerben sich 25 Kandidatinnen, die unabhängig voneinander von einer Jury beurteilt werden. Aufgrund langjähriger Erfahrung kann davon ausgegangen werden, dass sich eine Kandidatin mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,55 für den weiteren Wettbewerb als geeignet erweist.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden von der Jury 12 Kandidatinnen für den Endausscheid ausgewählt?

Aufgabe 6-42: *Computernetzwerk*
Bei einem Computernetzwerk treten durchschnittlich 3 Defekte in 30 Tagen auf.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bis zum nächsten Defekt mehr als 21 Tage vergehen?

Aufgabe 6-43: *Produktionsanlage*
Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einer bestimmten Produktionsanlage Ausschuß produziert wird, ist $p = 0,002$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter $n = 500$ Stück mindestens 499 Stück normgerecht sind?

Aufgabe 6-44: *Samstagslotto*
Beim Samstagslotto werden 6 Kugeln zufällig und ohne Zurücklegen aus einem Behältnis mit 49 Kugeln gezogen. Die Kugeln sind von 1 bis 49 durchnummeriert.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von den 6 gezogenen Kugeln genau 3 Kugeln gerade Nummern tragen.

Aufgabe 6-45: *Kommode*
In aller Eile greift Studentin Fritzi morgens in ihre Kommode um zwei einzelne Handschuhe herauszuziehen. In der Kommode befanden sich 10 Paar schwarze Handschuhe.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritzi zwei linke Handschuhe erwischt hat?

Aufgabe 6-46: *Geschirr*
Die lieben Verwandten haben ihren alljährlichen Besuch bei Familie Furchtsam angekündigt. Die Besuchsdauer wird 5 Tage betragen. Mutter Furchtsam sieht dem Besuch mit großer Sorge entgegen, denn täglich zertrümmern die Verwandten von Tag zu Tag unabhängig mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% Geschirr.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während der Besuchsdauer an genau zwei Tagen Geschirr kaputt geht?

Aufgabe 6-47: *Prüfgebiete*
Für eine Prüfung gibt ein Prüfer sechs Gebiete an. Ein Prüfling bereitet sich nur auf vier dieser Gebiete vor. Bei der Prüfung wählt der Prüfer aus den sechs angegebenen Gebieten drei zufällig aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sich der Prüfling auf zwei der vom Prüfer ausgewählten Gebiete vorbereitet?

Aufgabe 6-48: *Dichtefunktion*
Es sei f eine durch folgende Formel beschriebene Dichtefunktion der Zufallsvariablen X gegeben.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} -\infty < x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{für} \quad 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert von $(X - 0,5)^2$.

7 Stichprobentheorie

Aufgabe 7-1: *Drei Personen*
Aus einer Grundgesamtheit von $N = 3$ Personen mit den Lebensaltern 20, 22 und 24 werden Zufallsstichproben vom Umfang $n = 2$ mit Zurücklegen gezogen.

a) Berechnen Sie den Mittelwert μ und die Varianz σ^2 dieser Grundgesamtheit!

b) Wieviele 2–Tupel enthält der Stichprobenraum?

c) Listen Sie alle 2–Tupel, die als Stichprobenergebnisse möglich sind, auf!

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen folgender Stichprobenfunktionen:

(i) $Y = \sum_{i=1}^{2} X_i$
Berechnen Sie $E(Y)$ und $Var(Y)$.

(ii) $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2} X_i$
Berechnen Sie $E(\overline{X})$ und $Var(\overline{X})$.

(iii) $S'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2} (X_i - \overline{X})^2$
Berechnen Sie $E(S'^2)$.

(iv) $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{2} (X_i - \overline{X})^2$
Berechnen Sie $E(S^2)$.

e) Überprüfen Sie anhand der unter d) errechneten Ergebnisse folgende Behauptungen:

(i) $E(Y) = n \cdot \mu$ und $Var(Y) = n \cdot \sigma^2$

(ii) $E(\overline{X}) = \mu$ und $Var(\overline{X}) = \sigma^2/n$

(iii) $E(S'^2) = \sigma^2 \cdot (n-1)/n$

(iv) $E(S^2) = \sigma^2$

Aufgabe 7-2: *Normal–Verteilung Approximation*
Sie haben eine Zufallsvariable Y, die sich als Summe von Zufallsvariablen X_i $(i = 1, ..., n)$ darstellen lässt. Über die Verteilung der X_i sei nichts bekannt.

a) Welche Bedingungen an die einzelnen X_i und n müssen gelten, damit Sie Y als approximativ normalverteilt ansehen können?

b) Um welchen fundamentalen Satz der Statistik handelt es sich dabei?

c) Wenn die unter a) genannten Bedingungen erfüllt sind, wie ist dann Y (approximativ) verteilt?

Aufgabe 7-3: *Tabletten gegen Kopfschmerzen*
In Tabletten gegen Kopfschmerzen ist die Menge des enthaltenen Wirkstoffs normalverteilt. Da bei zu geringer Wirkstoffmenge die Tabletten nicht helfen, bei zu hoher Menge aber Nebenwirkungen auftreten, muß die Produktion laufend überwacht werden. Mit Hilfe von einfachen Zufallsstichproben wird geschätzt, wie hoch die durchschnittliche Wirkstoffmenge μ (in mg) ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Funktion $\overline{X}$ Werte annimmt, die mehr als 0,5mg über dem wahren μ liegen

(i) bei σ=1mg und $n = 16$,

(ii) bei σ=1mg und $n = 64$,

(iii) bei σ=2mg und $n = 64$?

Aufgabe 7-4: *Erwartungswert und Varianz*
Geben Sie bei nachfolgenden Verteilungen von X_i an, welche Verteilung, welchen Erwartungswert und welche Varianz die Stichprobenfunktion $\sum_{i=1}^{n} X_i$ hat, wobei n der Stichprobenumfang ist. Gehen Sie davon aus, dass die X_i unabhängig sind.
a) $X_i \sim B(1; p)$
b) $X_i \sim N(\mu; \sigma)$
c) $X_i \sim$ Einpunktverteilt(μ)

Aufgabe 7-5: *Spielautomat*
Bei einem Spielautomaten ist der Gewinn pro Spiel normalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gesamtgewinn eines Abends mit 16 Spielen höher als 16 EUR ist?

Aufgabe 7-6: *Anteil der Studentinnen an allen Studierenden*
Der Anteil der Studentinnen an allen Studierenden einer Hochschule beträgt 40%. Das Studentenwerk zieht für eine Erhebung eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang n = 30. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Stichprobe weniger als 30% oder mehr als 50% Studentinnen sind?

Aufgabe 7-7: *Lift*
In einem Bürohaus gibt es einen Lift mit der Aufschrift: Zugelassen für max. 36 Personen und max. 2800 kg. Alle Personen, die diesen Lift benutzen, haben ein mittleres Gewicht von 72 kg bei einer Standardabweichung von 24 kg. Es steigen 36 Personen in den Lift. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Lift überlastet ist?

Aufgabe 7-8: *Tippfehler*
Der Schriftsteller J. Kimmel hat gerade das Manuskript zu seinem neuesten Buchknüller "Zusammen sind wir nicht allein" auf seiner Schreibmaschine vollendet. Aus Erfahrung weiß er, dass auf jeder Seite mit Sicherheit mindestens ein Tippfehler steckt, ihm mehr als drei Tippfehler pro Seite jedoch noch nie unterlaufen sind und die Wahrscheinlichkeit für zwei bzw. drei Tippfehler pro Seite mit 20% bzw. 10% anzusetzen sind.
Da sich die Tippfehler völlig unsystematisch und voneinander unabhängig über das ganze Manuskript verteilen, wird der Korrektor, der das Manuskript vor Drucklegung lesen muss, seine liebe Not haben, sich durch den 1100 Seiten starken Wälzer durchzukämpfen.
Y sei die Zufallsgröß e: "Anzahl der Tippfehler im ganzen Manuskript".

a) Nennen Sie Verteilungstyp (approximativ) und Verteilungsparameter $E(Y)$ und $Var(Y)$ der Zufallsvariablen Y.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
   (i) mindestens 1600 Tippfehler im Manuskript stecken?
   (ii) zwischen 1500 und 1650 Tippfehler im Manuskript sind?
   (iii) genau 1540 Tippfehler unterlaufen sind?
   (iv) höchsten 1540 Tippfehler unterlaufen sind?

Stichprobentheorie-Tippfehler (13 min).mp4

Aufgabe 7-9: *Tennislehrer*
Ein Tennislehrer gibt in einem Monat (30 Tage) täglich acht Trainingsstunden. Er hat im Laufe seiner Trainerzeit festgestellt, dass ein Schüler pro Trainingsstunde mit einer Wahrscheinlichkeit von je 0,1 zwei bzw. sieben Bälle und mit je 30% Wahrscheinlichkeit einen bzw. sechs Bälle auf Nimmerwiedersehen über den den Platz begrenzenden Zaun schlägt. Drei, vier, weniger als einen und mehr als sieben Bälle hat jedoch noch keiner seiner Schüler über den Zaun befördert.

a) Wie groß ist die approximative Wahrscheinlichkeit, dass in einem Monat zwischen 900 und 1000 Bälle über den Zaun geschlagen werden?

b) Wie groß ist die approximative Wahrscheinlichkeit, dass in einem Monat mehr als 1050 Bälle über den Zaun befördert werden?

c) Geben Sie zum Erwartungswert symmetrische Grenzen an, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Ballschwund pro Monat innerhalb der Grenzen liegt, 99% beträgt.

d) Überprüfen Sie, ob die Voraussetzungen des dabei angewandten Satzes der Statistik in dieser Aufgabe gegeben sind.

Aufgabe 7-10: *Ausschussanteil*
In einem Produktionsprozeß wurde in der Vergangenheit ein Ausschussanteil von 2% beobachtet. Die Einhaltung dieser Qualitätsnorm soll durch laufende Stichproben vom Umfang
$n = 50$ überwacht werden.

a) Welche Verteilung wäre theoretisch exakt zu verwenden und welche Verteilung kann approximativ verwendet werden?

b) Bestimmen Sie unter Verwendung der approximativen Verteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, 0, 1, 2, 3, 4 bzw. 5 defekte Stücke in der Stichprobe zu finden.

c) Bestimmen Sie eine natürliche Zahl k, die mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% die obere Grenze für die Anzahl defekter Stücke in der Stichprobe bildet.

Stichprobentheorie-Ausschussanteil.mp4

Aufgabe 7-11: *Betriebsunfälle*
Statistiken haben ergeben, dass es bei jedem fünften Betriebsunfall schwerverletzte Personen gibt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 60 Unfällen der Anteil der Unfälle mit Schwerverletzten

a) unter 0,3 liegt,

b) über 0,2 liegt,

c) zwischen 0,15 und 0,25 liegt?

Aufgabe 7-12: *Urne*
Aus einer Urne mit N Kugeln, unter denen ein Anteil π roter Kugeln ist, werden Stichproben vom Umfang n ohne Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Stichprobenanteilswert roter Kugeln zwischen p_1 und p_2 liegt, wenn gilt

a) $N = 5$; $n = 3$; $\pi = 0,4$; $p_1 = 1/3$; $p_2 = 2/3$;

b) $N = 1000$; $n = 4$; $\pi = 0,2$; $p_1 = 0,25$; $p_2 = 0,75$;

c) $N = 250$; $n = 100$; $\pi = 0,2$; $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,3$;

d) $N = 2500$; $n = 100$; $\pi = 0,2$; $p_1 = 0,14$; $p_2 = 0,3$.

Aufgabe 7-13: *Tabletten gegen Kopfschmerzen, weiter*
Ausgehend von der Aufgabenstellung in Aufgabe 7-3 wird mit Hilfe von Zufallsstichproben geschätzt, wie groß die Varianz σ^2 der Wirkstoffmenge ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobenvarianzfunktion mehr als doppelt so groß ist wie die wahre Varianz

a) wenn μ bekannt ist und $n = 7$,

b) wenn μ bekannt ist und $n = 16$,

c) wenn μ unbekannt ist und $n = 16$?

latex

8 Statistische Schätzverfahren

Aufgabe 8-1: *Erwartungstreue*
Eine Grundgesamtheit habe den Mittelwert μ und die Varianz σ^2.
Sei $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ eine einfache (theoretische) Zufallsstichprobe aus dieser Grundgesamtheit. Folgende drei Schätzfunktionen sind gegeben:

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_1 &= \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\\ \widehat{\theta}_2 &= \frac{1}{4}(2X_1 + 2X_3)\\ \widehat{\theta}_3 &= \frac{1}{3}(2X_1 + X_3)\end{aligned}$$

a) Welche dieser Schätzfunktionen sind erwartungstreu?

b) Welcher Schätzfunktion würden Sie nach dem Kriterium der Wirksamkeit den Vorzug geben? (Begründung!)

Aufgabe 8-2: *Mittelwert und Varianz*
Eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 10$ aus einer Grundgesamtheit ergab folgende Werte:

`2; 4; 3; 5; 1; 4; 5; 1; 2; 3`

Schätzen Sie "möglichst gut" aus diesen Daten den Mittelwert und die Varianz der Grundgesamtheit.

Schaetztheorie-Mittelwert und Varianz.mp4

Aufgabe 8-3: *Lampen*
Eine Lieferung von $N = 1000$ Lampen soll mittels einer einfachen Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 20$ untersucht werden. Mit Hilfe der Zufallsvariablen X: "Anzahl der defekten Lampen in der Stichprobe vom Umfang $n = 20$" soll die Anzahl d der defekten Lampen in der Lieferung geschätzt werden.

a) Geben Sie eine erwartungstreue Schätzfunktion $\theta = f(X)$ für d an und zeigen Sie, dass gilt: $E(\theta) = d$!

b) In der vorliegenden Stichprobe ist die Anzahl der defekten Lampen gleich 3. Wie hoch schätzen Sie die Anzahl der defekten Lampen in der Lieferung?

c) Sollte man nicht eine uneingeschränkte Zufallsstichprobe verwenden? Ändert sich an dem Ergebnis in a), falls man dies tut?

Aufgabe 8-4: *Studienmotivation*
Die Studenten einer großen Universität werden nach ihre Studienmotivation befragt. Diese Zufallsvariable hat drei mögliche Realisationen:
0 (nicht motiviert), 1 (motiviert) und 2 (sehr motiviert).
Die unbekannten Anteile dieser Motivationsgrade in der Grundgesamtheit seien π_0, π_1 und π_2. Zu ihrer Schätzung wird eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 10$ gezogen. Die Zufallsvariablen X_i stellen den Motivationsgrad des i–ten Studenten der Stichprobe dar.
Als Schätzfunktion für π_1 wird

$$\widehat{\pi}_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(2X_i - X_i^2)$$

und für π_2

$$\widehat{\pi}_2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{10}(X_i^2 - X_i)$$

vorgeschlagen.

a) Sind die beiden Schätzfunktionen erwartungstreu?

b) Geben Sie eine erwartungstreue Schätzfunktion für den Anteil der nicht motivierten Studenten an.

c) Schätzen Sie π_0, π_1 und π_2, wenn in der Stichprobe die folgenden Antworten auftraten:

`0; 2; 1; 0; 0; 2; 2; 1; 0; 2`

Aufgabe 8-5: *Spielautomat*
Ein Spielautomat besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Gewinn X pro Spiel (in EUR):

x	-1	0	+1
$P(X = x)$	p	p	$1 - 2p$

Der Produzent dieser Spielautomaten beauftragt einen Statistiker, eine Schätzung für p durchzuführen, um eine Anhaltspunkt zu haben, ob sich der Wert von p seit Inbetriebnahme der Spielautomaten geändert hat.

a) Der Statistiker zieht eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 6$, d.h. er betätigt den Spielautomaten genau 6 mal und schreibt den jeweiligen Gewinn auf. Die Stichprobe (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) hat sich folgendermaßen realisiert: (-1, 1, -1, 0, 1, 1)
Verbalisieren Sie dieses Stichprobenergebnis.

b) Geben Sie folgende Wahrscheinlichkeiten an:
$P(X = 0)$; $P(X = -1)$; $P(X = 1)$

c) Wie würden Sie die Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn X pro Spiel aufgrund der obigen Stichprobe bestimmen, wenn Sie überhaupt keine Informationen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X besitzen?

d) Wie groß ist $P\{(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) = (-1, 1, -1, 0, 1, 1)\}$, wenn man obige Wahrscheinlichkeitsverteilung unterstellt?

e) Ermitteln Sie die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für p bei diesem Problem.

f) Schätzen Sie p aufgrund des vorliegenden Stichprobenergebnisses nach der Maximum-Likelihood-Methode.

g) Schätzen Sie p aufgrund des vorliegenden Stichprobenergebnisses nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Aufgabe 8-6: *Finanzamt*
Otto N. wartet auf dem Finanzamt. Er weiß, dass die Zeit T, die ein Klient im Zimmer der Beamten verbringt, exponentialverteilt ist:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$

Wenn Frau Hurtig Dienst hat, beträgt die durchschnittliche Zeit für die Abfertigung einer Person 3 Minuten, falls Herr Lasch Dienst hat, beträgt die durchschnittliche Zeit für die Abfertigung einer Person 5 Minuten.
Otto N. registriert, dass die drei vor ihm wartenden Personen nach 1 Minute, 5 Minuten und 3 Minuten das Zimmer der Beamten wieder verlassen.

a) Stellen Sie die Likelihoodfunktion $L(\lambda)$ für dieses Stichprobenergebnis auf!

b) Ermitteln Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert λ! Wer hat Ihrer Meinung nach Dienst?

Schaetztheorie-Finanzamt.mp4

Aufgabe 8-7: *Startprobleme*
Im Winter hat so manches Auto seine Startprobleme. Statistikstudent Karl weiß, dass X: "Anzahl der Startversuche bis sein Auto (endlich) anspringt" wie folgt verteilt ist:

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p,$$

wobei p die unbekannte Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der Motor bei einem Startversuch anspringt. Um p mit der Maximum-Likelihood-Methode zu schätzen, führt Karl unter gleichen Witterungsbedingungen zwei voneinander unabhängige Startversuchsreihen durch. Bei der ersten Versuchsreihe springt der Motor beim 7. Startversuch ($x_1 = 7$) und bei der zweiten Versuchsreihe springt der Motor beim 3. Startversuch ($x_2 = 3$) an.

a) Stellen Sie allgemein (p unbekannt) die Maximum-Likelihood-Funktion $L(p) = P\{(X_1 = 7) \cap (X_2 = 3)\}$ auf!

b) Bestimmen Sie für den unbekannten Parameter p den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\widehat{p}$ zur obigen Stichprobenrealisation!

Aufgabe 8-8: *Dichotome Grundgesamtheit*
Gegeben sei eine Zufallsstichprobe (0, 0, 1) aus einer dichotomen Grundgesamtheit, d.h. die Zufallsvariable X_i besitzt eine Bernoulli-Verteilung mit dem Parameter π. Leiten Sie mittels der Methode der kleinsten Quadrate einen Schätzwert für π her!

Aufgabe 8-9: *Unfallhäufigkeit*
Sie interessieren sich für die Unfallhäufigkeit an einem Verkehrsknotenpunkt. Sowohl die Polizei als auch die Versicherungsgesellschaften haben diesen Sachverhalt bereits in der Vergangenheit untersucht, so dass Sie auf diese Unterlagen zurückgreifen können:

Versicherungsgesellschaft:

x	0	1	2	$x \neq 0,1,2$
$P(X=x)$	0,7	0,1	0,2	0

Polizei:

x	0	1	2	$x \neq 0,1,2$
$P(X=x)$	0,1	0,4	0,5	0

Leider unterscheiden sich beide Wahrscheinlichkeitsverteilungen doch recht erheblich voneinander. Um zwischen beiden Verteilungen entscheiden zu können, stellen Sie sich selbst an 5 zufällig ausgewählten Stichtagen an diese Straßenkreuzung und registrieren die Unfälle. Die Stichprobe ergab folgendes Ergebnis: (0, 2, 0, 2, 1)

a) Für welche der beiden Verteilungen entscheiden Sie sich nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip?

b) Für welche der beiden Verteilungen entscheiden Sie sich nach der Methode der kleinsten Quadrate?

▶ Schaetztheorie-Unfallhaeufigkeit.mp4

Aufgabe 8-10: *Likelihood-Funktion*
X_1, X_2, X_3 und X_4 sind unabhängige Zufallsvariablen, die Poisson-verteilt sind mit dem unbekannten Parameter λ. Eine Zufallsstichprobe hat folgende Realisationen ergeben:
$x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6,\ x_4 = 3.$

a) Wie lautet die Likelihood-Funktion?

b) Ermitteln Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für den unbekannten Parameter λ.

Aufgabe 8-11: *Fahrradschläuche*
Eine Maschine produziert Fahrradschläuche mit einem Durchmesser von 40cm. Man weiß aus Erfahrung, dass der Durchmesser der produzierten Fahrradschläuche vom Zufall abhängt und $N(\mu;\sigma)$–verteilt ist. Um zu kontrollieren, ob die Maschine noch richtig eingestellt ist, werden 25 Fahrradschläuche zufällig ausgewählt. Aus den 25 Werten wurde ein mittlerer Durchmesser von 41cm bei einer Standardabweichung von 3cm ermittelt.

a) Geben Sie explizit das Konfidenzintervall $[V_u; V_o]$ für μ zum Niveau $1-\alpha$ an!

b) Bestimmen Sie das Schätzintervall für μ $(1-\alpha = 90\%)$!

c) Wenn Sie davon ausgehen, dass die Stichprobenstandardabweichung garantiert kleiner oder gleich 5cm ist, wie groß müssen Sie dann den Stichprobenumfang mindestens wählen, damit das Schätzintervall maximal 1cm breit wird?

Aufgabe 8-12: *Schweinemäster*
Ein Schweinemäster möchte Informationen über das Gewicht seiner ausgewachsenen Mastschweine gewinnen. Dazu bittet er den gerade auf seinem Hof Urlaub machenden Studenten S. Tatistik um seine Mithilfe.
Sie ziehen eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 6$ Schweinen und wiegen diese. Es ergaben sich folgende 6 Meßwerte (in kg):
100; 104; 98; 100; 101; 97.
Nehmen Sie an, dass X: "Gewicht eines Schweins" eine $N(\mu; \sigma)$–verteilte Zufallsvariable ist.

a) Führen Sie mit Hilfe obiger Daten eine erwartungstreue Punktschätzung für $E(X) = \mu$ bzw. $Var(X) = \sigma^2$ durch!

b) Geben Sie explizit das Konfidenzintervall für den tatsächlichen Gewichtsdurchschnittswert μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ an!

c) Bestimmen Sie das Schätzintervall für μ $(1 - \alpha = 95\%)$!

d) Verbalisieren Sie das Ergebnis von c).

e) Welche Möglichkeiten haben Sie bei der Planung der Untersuchung, Einfluss auf die Länge des Schätzintervalls zu nehmen?

f) Wie würde sich das Schätzintervall verändern, wenn $\sigma^2 = 6$ als bekannt vorausgesetzt werden kann? (Begründung!)

▶ Konfidenzintervall-Schweinmaester (14 min).mp4

Aufgabe 8-13: *Milchfettgehalt*
Der Milchfettgehalt bei Kühen einer bestimmten Züchtung sei durch eine Zufallsvariable, die einer Normalverteilung mit dem Erwartungswert 3,7352 und der Varianz 0,0081 folgt, beschrieben. Um einen züchterischen Fortschritt zu erreichen, sollen die Tiere mit niedrigen Leistungen laufend ausgesondert und nur 61% als Zuchtkühe verwendet werden.
Geben Sie die untere Grenze für den Fettgehalt an, den die Milch eines Tieres haben soll, das als Zuchttier verbleiben soll.

Aufgabe 8-14: *Apfelsinen*
Das Gewicht von Apfelsinen sei $N(\mu; 20\text{g})$. Aus einer umfangreichen Lieferung werden mittels einer einfachen Zufallsstichprobe 25 Apfelsinen ausgewählt. In dieser Stichprobe wurde ein Gesamtgewicht der 25 Apfelsinen von 7500g ermittelt.
Berechnen Sie mittels eines Konfidenzschätzverfahrens zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,8064$ das konkrete Schätzintervall.

▶ Konfidenzintervall-Apfelsinen.mp4

Aufgabe 8-15: *PKWs in Berlin*
Für Berlin soll mittels einer einfachen Zufallsstichprobe der Anteil der Haushalte mit mehr als einem PKW geschätzt werden. Berechnen Sie den notwendigen Stichprobenumfang für ein 95%-Konfidenzintervall der Länge 0,06 für den wahren Anteil π der Haushalte mit mehr als einem PKW.
Der Stichprobenumfang muss mindestens betragen:

a) 433	b) 689	c) 748	d) 1050	e) 1068
f) 2663	g) 3912	h) 4101	i) 4998	j) 5012

Aufgabe 8-16: *Konfidenzniveau*
Die Daten einer Strichprobe vom Umfang $n = 100$ aus einer Verteilung ergeben für den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit das Schätzintervall [1,6;6,4]. Für die Stichprobenvarianz S^2 lieferten die Stichprobenwerte die Realisation $s^2 = 100$.
Wie groß ist das Konfidenzniveau $1 - \alpha$ des zugehörigen Konfidenzintervalls?

Aufgabe 8-17: *Gasverbrauch*
Die Erfahrung hat gezeigt, dass der Gasverbrauch eines bestimmten Heizungstyps bei Maximaleinstellung normalverteilt ist und im Mittel 5 m^3 beträgt. Es wird eine Stichprobe vom Umfang 36 gezogen, die eine Varianz von 4 m^6 ergibt.
In welchem Bereich wird der Stichprobenmittelwert mit einer Sicherheit von 95% liegen?

▶ Konfidenzintervall-Gasverbrauch.mp4

Aufgabe 8-18: *Kugelschreiber*
Ein Unternehmen stellt Kugelschreiber her, die jeweils aus einer Schreibmine, einer Metallfeder und einer Kunststoffhülle bestehen. Das Gewicht der Schreibminen hat die Standardabweichung 0,4 g, das Gewicht der Metallfedern die Standardabweichung 0,2 g, das Gewicht der Kunststoffhüllen die Standardabweichung 0,4 g. Alle drei Gewichte sind voneinander unabhängig und normalverteilt. Aus der Produktion von Kugelschreibern wird eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 25$ gezogen. In dieser Stichprobe wird ein Gesamtgewicht der 25 Kugelschreiber von 375 g ermittelt.
Berechnen Sie mittels eines Konfidenzschätzverfahrens zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,8064$ das konkrete Schätzintervall für den Erwartungswert μ des Gewichts eines Kugelschreibers.

Aufgabe 8-19: *Kaltwasserverbrauch*
Man nimmt an, dass der Kaltwasserverbrauch pro Spülgang eines bestimmten Geschirrspülautomaten mit einer Standardabweichung von 2 Litern normalverteilt ist.
Wie groß müsste mindestens eine einfache Zufallsstichprobe sein, um den durchschnittlichen Kaltwasserverbrauch mit einem Konfidenzniveau von 95% auf einen Schätzfehler von
$e = 0,5$ Liter genau zu schätzen?

Aufgabe 8-20: *Konfidenzniveau 2*
Die Daten einer Stichprobe vom Umfang $n = 100$ aus einer Verteilung ergeben für den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit das Schätzintervall $[2,1; 5,9]$. Für die Stichprobenvarianz S^2 lieferten die Stichprobenwerte die Realisation $s^2 = 100$.
Wie groß ist das Konfidenzniveau $1-\alpha$ des zugehörigen Konfidenzintervalls?

Aufgabe 8-21: *Stichprobenmittelwert*
Die Erfahrung hat gezeigt, dass der Gasverbrauch eines bestimmten Heizungstyps bei Maximaleinstellung normalverteilt ist und im Mittel $5m^3$ beträgt. Es wird eine Stichprobe vom Umfang 25 gezogen, die eine Varianz von $4m^6$ ergibt.
In welchem Bereich wird der Stichprobenmittelwert mit einer Sicherheit von 99% liegen? Runden Sie auf vier Dezimalstellen.

Aufgabe 8-22: *Konzentration des Stoffes E*
Eine Umweltgruppe möchte die mittlere Konzentration des Stoffes E im Wasser schätzen. Man geht davon aus, dass die Konzentration des Stoffes E im Wasser einer Normalveteilung folgt. Eine einfach Zufallsstichprobe von 9 Wasserproben liefert nachstehende Konzentrationswerte:
10; 8; 10; 12; 1; 15; 9; 13; 12.
Berechnen Sie das Schätzintervall für die mittlere Konzentration des Stoffes E im Wasser zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0,9$. Runden Sie das Ergebnis auf drei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe 8-23: *Brikett*
Otto hat bei einem Händler für 300 EUR eine Tonne Briketts gekauft. Er will prüfen, ob er für sein Geld mindestens den Gegenwert erhalten hat. Ist weniger als eine Tonne geliefert worden, so würde der Vorrat nicht für den ganzen Winter reichen und Otto müsste frieren. Von der Verbraucherzentrale erfährt er, dass ein Brikett dieser Sorte im Mittel 500g betragen sollte und das Gewicht dieser Briketts normalverteilt ist mit der Varianz $2500g^2$. Mittels einer einfachen Zufallsstichprobe wählt er 25 Briketts aus der Lieferung und wiegt sie auf der Küchenwaage. Es ergibt sich ein Stichprobenmittelwert von 510g.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dieser berechnete Wert überschritten?

Aufgabe 8-24: *Mietverein*
Der Mietverein in Brandelin will den durchschnittlichen Mietpreis einer 80 m^2–Altbauwohnung schätzen. Man weiß, dass der Mietpreis einer solchen Wohnung normalverteilt ist mit einer Standardabweichung von $\sigma = 180$ EUR. Berechnen Sie den notwendigen Stichprobenumfang für ein 95%–Konfidenzintervall der Länge 120 für den wahren durchschnittlichen Mietpreis einer solchen Wohnung.

Aufgabe 8-25: *Jährliche Fahrleistung*
Es wurden 20 Versicherte einer großen Kfz-Haftpflichtversicherung zufällig ausgewählt und nach ihrer jährlichen Fahrleistung X befragt. Es ist bekannt, dass die jährliche Fahrleistung normalverteilt ist. Die Auswertung der Befragungsaktion ergab eine durchschnittliche jährliche Fahrleistung
$\overline{x} = 25$ [1000 km] und eine Varianz $s^2 = 80$ [10^6km^2].

a) Wie lautet das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ für die durchschnittliche jährliche Fahrleistung eines Versicherten bei dieser Kfz-Haftpflichtversicherung?

b) Bestimmen Sie das Schätzintervall zum Konfidenzniveau von 95%.

Aufgabe 8-26: *Dioxinausstoß*
Man nimmt an, dass der Dioxinausstoß einer Kosmetikfabrik normalverteilt ist und im Mittel 5 kg je Minute mit einer Standardabweichung von 1 kg betrage.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Durchschnitt einer Stichprobe vom Umfang $n = 9$ zwischen 4 und 6 kg/min liegen?

b) In welchem Bereich wird der Durchschnitt einer Stichprobe vom Umfang $n = 9$ mit einer Sicherheit von 95% liegen?

c) Wie groß müsste eine Stichprobe sein, um den durchschnittlichen Dioxinausstoß mit einer Sicherheit von 95% auf einen Schätzfehler von $e = 0,5$ kg/min genau zu schätzen?

d) Geben Sie zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ das Konfidenzintervall für den durchschnittlichen Dioxinausstoß an.

Sie messen zu 9 zufälligen Zeitpunkten den Dioxinausstoß (kg/min):

```
7,0; 4,0; 5,0; 10,0; 9,0; 6,0; 8,0; 6,5; 7,5
```

e) Geben Sie das Schätzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,98$ an.

Aufgabe 8-27: *Mietverein 2*
Der Mietverein in Bärenhausen will den durchschnittlichen Mietpreis einer 80m^2 - Altbauwohnung schätzen. Dazu läßt er sich vom Wohnungsamt 36 derartige Wohnungen zufällig auswählen und die zur Zeit dafür bezahlte Miete erheben.

a) Geben Sie zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ das Konfidenzintervall für den durchschnittlichen Mietpreis einer 80m^2 - Altbauwohnung an und beschreiben Sie ausführlich die dort auftauchenden Größen.

Aus der Stichprobe wurden folgende Werte berechnet:
$\overline{x} = 950$ EUR; $s = 180$ EUR

b) Geben Sie das Schätzintervall zum Niveau $1 - \alpha = 0,98$ an.

Aufgabe 8-28: *Love–Parade*
Die Durchführung der Love-Parade in Berlin ist heftig umstritten. Befürworter der Love-Parade weisen unter anderem darauf hin, dass dem Berliner Einzelhandel durch die Teilnehmer der Love Parade erhebliche Einnahmen entstehen. Um diesem Argument auf den Grund zu gehen, führt eine Berliner Tageszeitung eine Befragung von 100 zufällig ausgewählten Love-Parade-Teilnehmern durch. Beim Auswerten der Interviews wird ermittelt, dass die Befragten im Durchschnitt 350 EUR während des Love-Parade-Wochenendes ausgeben. Die Stichprobenvarianz der Pro-Kopf-Ausgaben beträgt 576 EUR^2. Berechnen Sie das approximative Konfidenzintervall mit überdeckungswahrscheinlichkeit 95% für die mittleren Pro-Kopf-Ausgaben aller Love-Parade-Teilnehmer.

Aufgabe 8-29: *Langlebensdauergarantie*
Ein namhafter Hersteller von Stromsparlampen gibt eine „Lang lebensdauergarantie Garantie für seine Produkte. Um die Qualität der Produktion zu sichern, wird in regelmäßigen Abständen eine einfache Zufallsstichprobe von 100 Stromsparlampen ausgewählt und einem speziellen Dauertest unterzogen.
Bei der Stichprobe des letzten Quartals ergab sich die durchschnittliche Brenndauer von 1300 Stunden, die Varianz der Brenndauer wurde als
$\sum(X_i - \overline{X}_i)^2/(n-1) = 10000$ aus der Stichprobe geschätzt.
Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Signifikanzniveau
$\alpha = 0,02$ für die erwartete Brenndauer einer Stromsparlampe an.

Aufgabe 8-30: *Trinkwasserverbrauch*
Der sparsame Herr Übergenau kontrolliert genau den Trinkwasserverbrauch seines Haushalts. An 100 aufeinander folgenden Tagen hat er einen durchschnittlichen Wasserverbrauch von 12 l täglich mit einer Standardabweichung von 5 l festgestellt.
Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Signifikanzniveau 0,05 für den täglichen Wasserverbrauch von Herrn übergenau an.

Aufgabe 8-31: *500 Haushalte*
In einem Ort wurde eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 500$ Haushalte gezogen und die Haushaltsgrößen wie folgt festgestellt:

Haushaltsgröße (Personen)	Anzahl der Haushalte
1	100
2	125
3	140
4	80
5	55
	$\sum = 500$

Geben Sei ein Konfidenzintervall zum Signifikanzniveau 0,05 für die durchschnittliche Haushaltsgröße in Personen an.

Aufgabe 8-32: *Glücksspiel*
Die Studentin Fritzi versucht mit Glücksspiel ihr Bafög aufzubessern. An ihrem Lieblingsautomaten hat sie schon 50 Spiele gemacht. Dabei ergaben sich folgende Erträge bei jeweils gleichem Einsatz pro Spiel:

Gewinn minus Einsatz	-1	0	1	2	4
Anzahl	36	11	1	1	1

Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Signifikanzniveau 0,05 für den erwarteten Ertrag (Gewinn minus Einsatz) an.

Aufgabe 8-33: *Jährliche Fahrleistung 2*
Es wurden 20 Versicherte einer großen Kfz-Haftpflichtversicherung zufällig ausgewählt und nach ihrer jährlichen Fahrleistung X befragt. Es ist bekannt, dass die jährliche Fahrleistung normalverteilt ist mit einer durchschnittlichen jährlichen Fahrleistung von 25 [1000 km]. Die Auswertung der Befragungsaktion ergab eine Varianz $s^2 = 80$ $[10^6\ \text{km}^2]$.
In welchem zentralen Schwankungsintervall wird der Stichprobenmittelwert mit einer Sicherheit von 95% liegen?

Aufgabe 8-34: *Antibiotikumtabletten*
Für einen Pharma-Hersteller ist der Wirkstoffgehalt (gemessen in Milligramm) in Antibiotikumtabletten von besonderer Bedeutung. Deshalb überwacht er statistisch den Fertigungsprozess durch die turnusgemäße Entnahme einer einfachen Zufallsstichprobe und die Berechnung des Konfidenzintervalls für den Wirkstoffmittelwert. Speziell in diesem Fall ist eine möglichst genaue Schätzung nötig, da eine nennenswerte Verschiebung des Milligrammbetrages je Tablette unangenehme Nebenwirkungen bei den Patienten hervorrufen würde. Aus dem langjährigen Herstellungsprozess ist Normalverteilung für die Zufallsvariable „Wirkstoffgehalt einer Tablette“ mit einer Streuung $\sigma = 10$ Milligramm bekannt.
Wie groß muss der Stichprobenumfang bei der turnusgemäßen Entnahme mindestens sein, um jeweils einen Schätzfehler von 2 Milligramm und ein Konfidenzniveau von 98% zu sichern?

Aufgabe 8-35: *Weizenhektarerträge*
Für 1996 wurden die Weizenhektarerträge [in dt/ha] für
Deutschland mittels einer einfachen Zufallsstichprobe ermittelt. Dabei wurden 48 Hektar aus den neuen Bundesländern und 96 Hektar aus den alten Bundesländern zufällig erfasst. Für die neuen Bundesländer ergab sich ein durchschnittlicher Hektarertrag von 60,4 dt/ha und für die alten Bundesländer ein durchschnittlicher Hektarertrag von 68,8 dt/ha. Aufgrund unterschiedlicher Bodenqualitäten ist die Varianz der Hektarerträge in Deutschland mit $\sigma^2 = 324$ [dt/ha]^2 bekannt.
Berechnen Sie mittels eines Konfidenzschätzverfahrens zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0,8064$ das konkrete Schätzintervall für den durchschnittlichen Hektarertrag für Weizen in Deutschland.

Aufgabe 8-36: *Fluggesellschaft*
Für eine Fluggesellschaft soll die Auslastung der innerdeutschen Flüge untersucht werden. Als Auslastung wird hier der Anteil der belegten Plätze an den insgesamt verfügbaren Plätzen bezeichnet:

$$\text{Auslastungsanteil in } \% = 100 \frac{\text{belegte Plätze}}{\text{verfügbare Plätze}}$$

Sie sind damit beauftragt, ein Schätzintervall für den Auslastungsanteil anzugeben. Es wird von Ihnen erwartet, dass Sie eine Methode verwenden, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 ein Konfidenzintervall liefert, dass den wahren Auslastungsanteil enthält. Ihre Stichprobe besteht aus 200 zufällig ausgewählten Sitzen auf innerdeutschen Flügen. Von diesen waren 180 belegt. Geben Sie das entsprechende Schätzintervall an.

Aufgabe 8-37: *Faktenmagazin*
Ein bekanntes deutsches Faktenmagazin möchte eine Untersuchung zum Verdienst von Akademikern durchführen. Dafür werden 25 Absolventen der Humboldt-Universität zu ihrem Einstiegsgehalt befragt. Der durchschnittliche Jahresverdienst der befragten Absolventen beträgt 74000 EUR. Die aus der Stichprobe ermittelte Standardabweichung beträgt 10000 EUR. Es wird unterstellt, dass das Einstiegsgehalt normalverteilt ist. Geben Sie ein Schätzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,99$ an.

Aufgabe 8-38: *Handybesitzer*
Ein Telekommunikationsunternehmen will mittels einer einfachen Zufallsstichprobe den Anteil der Handybesitzer in einer Großstadt schätzen.
Berechnen Sie den notwendigen Stichprobenumfang für ein 95%-Konfidenzintervall der Länge 0,06 für den wahren Anteil π der Handybesitzer, so dass für jeden möglichen Wert von π der Stichprobenumfang ausreichend groß ist. Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein?

Aufgabe 8-39: *Jährliche Fahrleistung 3*
Es wurden 100 Versicherte einer großen Kfz-Haftpflichtversicherung zufällig ausgewählt und nach ihrer jährlichen Fahrleistung X befragt.
Die Auswertung der Befragungsaktion ergab eine durchschnittliche jährliche Fahrleistung $\overline{x} = 25$ [in 1000 km] und eine Varianz $s^2 = 90,25$ [10^6 km^2]. Es ist bekannt, dass die jährliche Fahrleistung normalverteilt ist.
Bestimmen Sie ein Schätzintervall zum Konfidenzniveau
$1 - \alpha = 0,95$ für den Erwartungswert der jährlichen Fahrleistung eines Versicherten bei dieser Kfz – Haftpflichtversicherung.

Aufgabe 8-40: *Notwendiger Stichprobenumfang*
Für die Bundesrepublik Deutschland soll mittels einer einfachen Zufallsstichprobe der Anteil der landwirtschaftlichen Betriebe mit BSE–Verdacht geschätzt werden. Berechnen Sie den notwendigen Stichprobenumfang für ein 99%–Konfidenzintervall der Länge 0,05 für den wahren Anteil π der landwirtschaftlichen Betriebe mit BSE–Verdacht. Wieviel muss der Stichprobenumfang mindestens betragen?

Aufgabe 8-41: *Eintagsfliegen*
Die Lebensdauer von Eintagsfliegen ist annähernd normalverteilt. Eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 16$ ergibt eine durchschnittliche Lebensdauer von 1440 Minuten bei einer Varianz von $s^2 = 57600$.
Zu welchem Konfidenzniveau liefern die angegebenen Stichprobendaten ein Schätzintervall für den bekannten Erwartungswert μ, dass mit $[1263,12; 1616,88]$ übereinstimmt?

Aufgabe 8-42: *Absolventen der Fakultät*
Die Studentenvertretung der Fakultät vermutet, dass 60% der Absolventen der Fakultät unmittelbar nach Beendigung des Studiums einen Job erhalten. Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens gewählt werden, um ein Schätzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,95$ zu erhalten, bei dem der Schätzfehler maximal 0,2 beträgt?

Aufgabe 8-43: *Sportliche Betätigung*
Von einem Meinungsforschungsinstitut wurde eine Studie über die sportliche Betätigung von Berliner Jugendlichen erarbeitet. Dazu wurden 200 Berliner Jugendliche zufällig und unabhängig ausgewählt und befragt. 180 der Befragten gaben an, regelmäßig Sport zu treiben. Sie sind beauftragt, ein Schätzintervall für den Anteil der regelmäßig Sport treibenden Berliner Jugendlichen anzugeben. Es wird von Ihnen erwartet, dass Sie eine Methode verwenden, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99012 ein Konfidenzintervall liefert, dass den wahren Anteil enthält.
Geben Sie das entsprechende Schätzintervall an.

Aufgabe 8-44: *Schwankungsintervall*
In einer Grundgesamtheit sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $\mu = 354$ und der Varianz $\sigma^2 = 506,25$. Aus dieser Grundgesamtheit wird eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 81$ gezogen. Bestimmen Sie die Grenzen eines zentralen Schwankungsintervalls für den Stichprobenmittelwert X zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0,95$.

Aufgabe 8-45: *Kilometerleistung*

A Bei einem Test wurden 49 zufällig ausgewählte PKW's des gleichen Typs mit der gleichen Kraftstoffmenge ausgestattet. Mit dieser Füllung legten sie im Durchschnitt 50 km zurück. Die Standardabweichung der Grundgesamtheit ist mit 7 km als bekannt vorausgesetzt.

   a) Geben Sie explizit das Konfidenzintervall $[V_u, V_o]$ für die durchschnittliche Kilometerleistung μ dieses PKW-Typs zum Konfidenzniveau 1 - α an!

   b) Bestimmen Sie das Schätzintervall für μ $(1 - \alpha = 95\%)$!

   c) Wie groß müsste der Stichprobenumfang n gewählt werden, wenn bei gleichem Konfidenzniveau das Schätzintervall für μ eine Breite von 2 km aufweisen soll?

B Einige Zuschauer dieser Testveranstaltung werden zufällig von einem Reporter ausgewählt und nach ihrer Zugehörigkeit zum ADAC befragt. Unter den 200 befragten Personen befanden sich 40 Mitglieder des ADAC. Bestimmen Sie das Schätzintervall für π $(1 - \alpha = 99\%)$!

C Ein geschäftstüchtiger Automatenaufsteller hat am Rande der Zuschauertribüne einen Kaffee-Automaten aufgestellt, der die Plastikbecher zu je $0,2\,\ell$ gegen Einwurf einer Münze mit Kaffee füllt. Man kann davon ausgehen, dass die Füllmenge annähernd normalverteilt ist. Eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 5$ ergab folgende Werte in ℓ: 0,18; 0,25; 0,12; 0,20; 0,25.

   a) Geben Sie explizit das Konfidenzintervall $[V_u; V_o]$ für die durchschnittliche Füllmenge μ dieses Kaffee-Automaten zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ an!

b) Bestimmen Sie das Schätzintervall für μ $(1-\alpha = 95\%)$!

9 Statistische Testverfahren

Aufgabe 9-1: *Spezialgefrierschränke*
Ein Unternehmen stellt Spezialgefrierschränke her, die zur Konservierung bestimmter Güter verwendet werden. Die Soll-Kühltemperatur beträgt für derartige Gefrierschränke -25^{o}C.
Da man weiß, dass die tiefgefrorenen Güter bei höheren Temperaturen leicht verderben, und da der potentielle Kundenstamm nicht sehr groß ist, würde ein mangelhaftes Produkt, das also nicht tief genug kühlt, das Schlimmste, nämlich den Ruin der Firma, bedeuten. Aus Gründen der Vorsicht soll nun die Kühlleistung der Gefrierschränke an 100 zufällig aus der Produktion ausgewählten Gefrierschränken auf einem Signifikanzniveau von 2,275% getestet werden, um zu entscheiden, ob die Produktion weiterlaufen kann oder eine Konstruktionsänderung an den Geräten vorgenommen werden muss.
Aus Erfahrung weiß man, dass die erreichte Kühltemperatur eines solchen Gefrierschrankes normalverteilt ist mit einer Standardabweichung von 2^{o}C.

a) Wie lauten die Hypothesen für diesen Test? Begründen Sie Ihre Wahl in Form einer Risikobetrachtung!

b) Geben Sie die zugrundeliegende Stichprobenfunktion formal und verbal sowie ihre Verteilung unter H_0 an!

c) Wie lautet die Testfunktion und wie ist diese unter H_0 verteilt?

d) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich für diesen Test!

e) Die Zufallsstichprobe ergab eine mittlere Kühltemperatur pro Gerät von -26^{o}C bei einer Standardabweichung von 1,5^{o}C.
   (i) Wie lautet die Testentscheidung?
   (ii) Interpretieren Sie das Testergebnis inhaltlich und statistisch exakt!

f) Die Zufallsstichprobe ergab eine mittlere Kühltemperatur pro Gerät von -25,3^{o}C.
   (i) Wie lautet die Testentscheidung?
   (ii) Interpretieren Sie das Testergebnis inhaltlich und statistisch exakt!
   (iii) Welcher Fehler kann bei dieser Entscheidung unterlaufen sein?

(iv) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fehler hier unterlaufen ist?

(v) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Testverfahren diesen Fehler zu machen, wenn μ tatsächlich -29^{o}C beträgt?

g) Warum reicht es beim einseitigen Test aus, dass man unter der Nullhypothese nur den Fall $\mu = \mu_0$ betrachtet?

Aufgabe 9-2: *Spezialgefrierschränke (Gütefunktion)*
Für den in Test in der Aufgabe *Spezialgefrierschränke*

a) bestimmen Sie die Werte der Gütefunktion, falls die mittlere Kühltemperatur in Wahrheit
(i) - 24,8^{o}C, (ii) - 25,8^{o}C, (iii) - 29,0^{o}C beträgt!

b) Skizzieren Sie die Gütefunktion.

Aufgabe 9-3: *Durchmesser von Wellen*
Für den Durchmesser von Wellen ist ein Sollwert von 200mm vorgeschrieben. Außerdem ist bekannt, dass der Durchmesser der Wellen normalverteilt ist mit einer Standardabweichung von 5 mm. Um die Produktion zu kontrollieren, zog der Kontrolleur K_1 eine Zufallsstichprobe von $n = 100$. Das arithmetische Mittel aus diesen 100 Messungen des Durchmessers ergab eine Abweichung vom Sollwert von +0,4mm.
Es soll die Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

a) Geben Sie den Verwerfungsbereich an!

b) Wie entscheidet sich K_1?

c) Welchen Fehler könnte K_1 bei seiner Entscheidung begangen haben?

d) Ein zweiter Kontrolleur K_2 berechnet aus einer zweiten Zufallsstichprobe von $n = 100$ ein $\overline{x} = 202$mm. Wie entscheidet sich K_2 (bei gleichen Entscheidungskriterien)?

e) Welchen Fehler könnte K_2 bei seiner Entscheidung begangen haben?

Aufgabe 9-4: *Phosphatgehalt der Waschmittel*
Seit geraumer Zeit beklagen Umweltschützer die Verschmutzung der Seen durch die Abwässer der Haushalte – insbesondere durch den Phosphatgehalt der Waschmittel. So greifen sie auch eine bestimmte Firma an, da sie glauben, dass der zulässige Durchschnittswert von höchstens 18g pro Packung in deren Produkt überschritten wird. Die Firma bestreitet energisch und verspricht den Umweltschützern, das Produkt vom Markt zu nehmen, falls sich statistisch zeigen läßt, dass der mittlere Phosphatgehalt ihres Produkts tatsächlich zu hoch ist.
Die Firma will nun diesen Test durchführen und schlägt den Umweltschützern eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,001 vor, da man dann mit hoher Sicherheit ein richtiges Testergebnis bekommen würde. Die Umweltschützer akzeptieren dies, da ihnen die Argumentation völlig einleuchtet. Die Varianz des Phosphatgehalts pro Packung wird mit 36g^2 als bekannt vorausgesetzt.
Bei einer gezogenen Zufallsstichprobe von 36 Packungen ergab sich ein durchschnittlicher Phosphatgehalt von 20g.

a) Formulieren Sie die Hypothesen für diesen Test!

b) Geben Sie die zugrundeliegende Stichprobenfunktion formal und verbal an. Wie ist sie unter H_0 verteilt?

c) Wie lautet die Testfunktion und wie ist diese unter H_0 verteilt?

d) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für diesen Test.

e) Wie lautet die Testentscheidung?

Die Firma gibt folgende Pressemitteilung heraus:

> "Mit Hilfe eines Tests konnte unsere Firma statistisch belegen, dass der mittlere Phosphatgehalt in unseren Waschmittelpaketen den Richtwert von 18g nicht überschreitet. Für diesen Test wurden unter den Augen der Umweltschützer 36 Waschmittelpakete zufällig ausgewählt und untersucht. Um eine Fehlentscheidung bei diesem Test fast vollständig auszuschließen, haben wir nach Absprache mit den Umweltschützern den Test so durchgeführt, dass

eine Fehlentscheidung nur mit 0,1%-iger Wahrscheinlichkeit vorkommen kann. Damit hat unsere Firma wieder einmal bewiesen, dass sie zu den umweltbewußten Herstellern von... usw. ... usw.”

f) Nehmen Sie ausführlich Stellung zu dieser Pressemitteilung!

g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Fehlentscheidung, falls der mittlere Phosphatgehalt pro Paket den wahren Wert 21,09g hat.

▶ Testtheorie-Phosphatgehalt der Waschmittel (12 min).mp4

Aufgabe 9-5: *Phosphatgehalt der Waschmittel (Gütefunktion)*
Ist der Verlauf der Gütefunktion für den in Test in der Aufgabe *Phosphatgehalt der Waschmitte* abhängig vom Stichprobenergebnis bzw. vom Stichprobenumfang?

Aufgabe 9-6: *Durchschnittsgewicht*
Ein Supermarkt hat bisher Hähnchen mit einem Durchschnittsgewicht von 1400g zu einem bestimmten Preis bezogen. Ein Händler macht nun das Angebot, Hähnchen von gleichem Durchschnittsgewicht zu einem günstigeren Stückpreis liefern zu können. Die Einkäufer E_1 und E_2 des Supermarkts, die beide wissen, dass das Hähnchengewicht normalverteilt ist, vermuten, dass der günstige Preis durch ein zu geringes Durchschnittsgewicht zustande kommt. E_1 wiegt daraufhin 25 zufällig ausgewählte Hähnchen ab. Dabei stellt sich heraus, dass das arithmetische Mittel um -9g vom Sollgewicht abweicht und die Standardabweichung sich zu 50g aus der Stichprobe ergab. Das Signifikanzniveau des Test soll 5% betragen.

a) Der Einkäufer stellt folgende Hypothesen auf:

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 (= 1400) \quad \text{und} \quad H_A : \mu < \mu_0 (= 1400).$$

Welches Risiko wird bei dieser Hypothesenformulierung klein gehalten?

b) Geben Sie diejenige Stichprobenfunktion, die sich zur Prüfung der aufgestellten Hypothesen eignet, verbal an!

c) Geben Sie ihre Verteilung und Parameter unter der Annahme an, dass H_0 richtig ist.

d) Wie lautet die Testfunktion und wie ist diese unter H_0 verteilt?

e) Ermitteln Sie den Annahmebereich und den Ablehnungsbereich der H_0.

f) Wie entscheidet sich E_1?

g) Welchen Fehler kann E_1 gemacht haben?

E_2 entnimmt eine zweite Zufallsstichprobe von n=25. Es ergibt sich ein Durchschnittsgewicht von 1381g bei gleicher Standardabweichung wie zuvor.

h) Wie entscheidet sich E_2?

i) Welchen Fehler kann E_2 gemacht haben?

Aufgabe 9-7: *Sollwerte*
Kein Produktionsprozess ist vollkommen. Deshalb muss man darauf bedacht sein, dass die vorgeschriebenen Sollwerte der Produkte möglichst gut eingehalten werden. Unter Verwendung einer geeigneten Prüfgröße testet man die Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$, dass ein bestimmter Sollwert eingehalten ist, gegen die Alternativhypothese $H_A : \mu \neq \mu_0$. Behält man bei einem solchen Test $\mu = \mu_0$ bei, so lässt man den Produktionsvorgang weiterlaufen. Führt der Test zur Ablehnung, so stoppt man den Prozess.
Ein Füllmaschine füllt Konserven mit Erbsen. Der Hersteller vermutet, dass die Füllgewichte seiner Dosen normalverteilt sind. Der Sollwert sei $\mu_0 = 300$g. Ein Kontrolleur nimmt aus der laufenden Produktion eine Zufallsstichprobe von $n = 100$ und errechnet aus den Stichprobenwerten ein Durchschnittsgewicht von 304g bei einer Standardabweichung von 20g.

a) Muss aufgrund des Ergebnisses der Stichprobe der Produktionsprozess gestoppt werden? ($\alpha = 0,05$) Ein Abnehmer hat die Vermutung, dass die Dosen aus dieser Produktion zu leicht sind und möchte diesen Sachverhalt statistisch prüfen.

b) Welche Hypothesenformulierung wählt er?

Aufgabe 9-8: *Zigarettenpreis*
Der Zigarettenkonzern TAB will den Zigarettenpreis erhöhen, obwohl dieser vor einem Jahr schon einmal angehoben wurde. Prokurist L. liegt das Wohl des Konzerns am Herzen und weil er meint, dass der Zigarettenkonsum pro Tag bei neuerlichen Preiserhöhungen abnehmen werde, will er einen Test durchführen. Er weiß, dass der tägliche Zigarettenkonsum pro Raucher vor der letzten Preiserhöhung einem erwarteten Wert von 16 Stück entsprach.
Mit Hilfe einer zufälligen Befragung unter $n = 100$ Rauchern will er statistisch zeigen, dass sich der durchschnittliche Konsum verringert hat ($\alpha = 0,01$).

a) Formulieren Sie die Null- und die Alternativhypothese.

b) Geben Sie die zugrundeliegende Stichprobenfunktion verbal an.

c) Geben Sie Verteilungstyp und Verteilungsparameter dieser Stichprobenfunktion unter der Annahme an, dass H_0 richtig ist.

d) Wie lautet die Testfunktion und wie ist diese verteilt?

e) Angenommen, die 100 Versuchspersonen rauchen durchschnittlich 15 Zigaretten pro Tag bei einer Standardabweichung von 5 Stück.
Wie entscheidet sich der Prokurist?

f) Welchen Fehler kann der Prokurist bei seiner Entscheidung gemacht haben?

g) Formulieren Sie in einer Pressemitteilung kurz, aber statistisch exakt das Testergebnis.

Testtheorie-Zigarettenpreis.mp4

Aufgabe 9-9: *Schwergewichtsboxer*
Die beiden Schwergewichtsboxer Jim Knockout und Bill Uppercut werden aufgrund von Computer-Ranglisten als gleichstarke weltbeste Boxer eingeschätzt. Eine bekannte Firma für Hühneraugenpflaster will dem weltbesten Boxer einen Werbevertrag für 1 Mill. EUR pro Jahr anbieten. Der Chef dieser Firma glaubt, dass Jim Knockout, der schon viele k.o.–Siege errungen hat, der bessere Boxer ist.
Um diese These statistisch zu zeigen, organisiert der Firmenchef 11 Schaukämpfe zwischen den beiden Boxern, wobei es in jedem dieser Kämpfe stets einen Sieger geben soll, ein Unentschieden also nicht möglich ist. ($\alpha = 0.05$)

a) Stellen Sie die Hypothesen für diesen Test auf.

b) Definieren Sie die Testfunktion für diesen Test.

c) Wie ist diese Testfunktion bei Zutreffen der Nullhypothese verteilt?

d) Bestimmen Sie den Annahme- und den Ablehnungsbereich für diesen Test.

e) Wie entscheiden Sie sich bei diesem Test, wenn J. Knockout 3 Kämpfe verliert?

f) Können Sie einen Fehler bei Ihrer Testentscheidung begangen haben? Wenn ja, welchen?

g) Die Firma beabsichtigt, das Testergebnis in kurzer und verständlicher Form in einer Presseerklärung zu veröffentlichen. Formulieren Sie diese Presseerklärung.

Aufgabe 9-10: *Skirennen*
In einem bekannten Wintersportort wird alljährlich ein großes Skirennen für Gäste veranstaltet, bei dem alle Gäste teilnehmen können. Diesmal soll der Slalom an einem erst kürzlich erschlossenen Hang stattfinden. Eine Gruppe von Skilehrern bekommt den Auftrag, einen Slalom abzustecken, der für alle Gäste befahrbar ist. Es ist beabsichtigt, dass im Mittel mehr als 90% der Gäste heil durchs Ziel kommen sollen. Die bisherigen Erfahrungen haben gezeigt, dass man den Schwierigkeitsgrad des Hanges noch überprüfen muss. Es soll ein Test auf einem Signifikanzniveau von 10% durchgeführt werden auf der Basis der Ergebnisse von 22 zufällig ausgewählten Gastskiläufern, die den abgesteckten Slalom zu durchfahren haben.

a) Formulieren Sie die Hypothesen für diesen Test.

b) Welche Verteilung besitzt die Testfunktion unter H_0?

c) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für diesen Test.

d) Wie groß ist die exakte Wahrscheinlichkeit, sich bei diesem Test fälschlicherweise für H_A zu entscheiden?

e) Von den 22 Testläufern schied ein Läufer aus. Wie lautet die Testentscheidung?

f) Rechtfertigen Sie diese Entscheidung.

Testtheorie-Skirennen (11 min).mp4

Aufgabe 9-11: *Skirennen (Gütefunktion)*
Für den Test in der Aufgabe *Skirennen*

a) geben Sie den Wert der Gütefunktion $g(p)$ an für $p = 0$, $p = 0,1$ und $p = 0,2$.

b) Skizzieren Sie den Verlauf der Gütefunktion unter Verwendung der unter g) ermittelten Werte.

Aufgabe 9-12: *Chininhaltige Limonade*
Der Getränkegroßhändler H. beabsichtigt, chininhaltige Limonade aus England zu importieren. Allerdings vermutet er aufgrund einschlägiger Erfahrungen mit englischen Importeuren, dass höchstens 90% aller importierten Flaschen dieser Limonade den hier geltenden Gesundheitsvorschriften hinsichtlich des Chiningehaltes genügen. Der Großhändler H. bittet nun Sie, für ihn einen statistischen Test auf einem Signifikanzniveau von 5% und einer Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 30$ durchzuführen.

a) Formulieren Sie die Hypothesen für diesen Test, wobei Sie davon ausgehen können, dass der Großhändler sich eher einen neuen Importeur sucht als ein zu hohes Risiko einzugehen, Ärger mit dem Gesundheitsamt zu bekommen.

b) Wie lautet die Testfunktion bei diesem Test?

c) Wie ist die Testfunktion unter H_0 verteilt?

d) Bestimmen Sie den Annahme und den Ablehnungsbereich.

Aus der Stichprobe ergab sich, dass eine Flasche den Gesundheitsvorschriften nicht entsprach.

e) Wie lautet die Testentscheidung?

f) Interpretieren Sie das Testergebnis unter dem Gesichtspunkt der Konsequenzen, die sich eventuell für den Großhändler ergeben.

g) Skizzieren Sie die Gütefunktion dieses Tests für folgende Werte $p = 0$, $p = 0,1$ und $p = 0,2$!

Aufgabe 9-13: *Schlampiges Gepäck-Handling*
Einer im Berlin–Verkehr tätigen ausländischen Fluggesellschaft wird gelegentlich schlampiges Gepäck-Handling vorgeworfen. Gewöhnlich verteidigt sich der Deutschlanddirektor der Fluggesellschaft gegenüber Journalisten mit dem Hinweis, dass es sich bei diesen Vorkommnissen um "seltene" Ereignisse handelt. Als der Deutschlanddirektor durch Zufall erfährt, dass es eine statistische Verteilung gibt, die gerade "Verteilung der seltenen Ereignisse" heißt, wittert er eine Chance, seine Behauptung statistisch zu untermauern. Dies soll durch einen statistischen Test geschehen, bei dem die Behauptung "Nichtmitnahme von Passagiergepäck mit dem Flugzeug unterliegt der Verteilung der seltenen Ereignisse" auf einem Signifikanzniveau von 1% überprüft werden soll.
Von der Vertretung der Airline in Berlin-Tegel läßt er sich eine zufällige Auswahl von 1000 Flügen vorlegen. Danach wurde in 460 Fällen ohne Beanstandung abgefertigt. In 350 Fällen wurde das Gepäck jeweils eines Passagiers nicht befördert. Für 135 Flüge war dies bei zwei Fluggästen, für 40 Flüge bei drei und für 15 Flüge bei vier Berlin-Reisenden der Fall. In keinem Fall hatten mehr als vier Fluggäste Grund zur Beanstandung.
(Hinweis: Die Poisson-Verteilung wird auch "Verteilung der seltenen Ereignisse" genannt)

a) Formulieren Sie die Hypothesen für diesen Test!

b) Wie ist die Testfunktion unter H_0 verteilt? (Verteilungstyp und Verteilungsparameter)

c) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich für diesen Test.

d) Welche Schätzfunktion ergibt sich nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip, falls zur Durchführung dieses Tests Parameter geschätzt werden müssen?

e) Wie lautet die Testentscheidung?
Hinweis: Runden Sie die Werte aus den Verteilungstabellen auf drei Stellen nach dem Komma!

f) Nach Kenntnisnahme des Testergebnisses argumentiert der Deutschlanddirektor wie folgt:

> "Vorwürfe widerlegt! Mittels eines Tests konnte auf der Grundlage einer Stichprobe vom Umfang 1000 mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% statistisch bewiesen werden, dass fehlerhaftes Gepäck-Handling einer Verteilung der seltenen Ereignisse unterliegt."

Nehmen Sie Stellung zu dieser Behauptung und begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 9-14: *Münzen*
Drei unterscheidbare Münzen werden insgesamt 240 mal geworfen, und jedesmal wurde die erscheinende Anzahl von "Kopf" beobachtet.
Die Ergebnisse sind im folgenden zusammengefasst:

0 mal Kopf:	24
1 mal Kopf:	108
2 mal Kopf:	85
3 mal Kopf:	23

Testen Sie die Hypothese, dass es sich bei den drei Münzen um ideale Münzen handelt ($\alpha = 0,05$)!

(Bei einer idealen Münze werden Kopf und Zahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit geworfen.)

Aufgabe 9-15: *Torerfolge*
In einer Fußball–Liga wurden für eine Saison die Torerfolge pro Spiel in folgender Häufigkeitstabelle zusammengefasst:

Torerfolge pro Spiel	Häufigkeit
0	18
1	24
2	56
3	63
4	61
5	39
6	26
7	6
8	5
9	2
>9	0

Es soll mit einem statistischen Testverfahren überprüft werden, ob die Torerfolge pro Spiel einer Poissonverteilung mit $\lambda = 3{,}4$ folgen ($\alpha = 0,1$).

a) Wie lauten die Hypothesen für den Chi-Quadrat-Anpassungstest?

b) Wie lautet die Testfunktion und wie ist diese unter H_0 verteilt? Begründung!

c) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich für diesen Test! Runden Sie die np_i - Werte auf ganz Zahlen!

d) Wie lautet die Testentscheidung? Interpretieren Sie das Testergebnis kurz, aber statistisch exakt!

Aufgabe 9-16: *Wetterlage und Geschäftslage*
Ein Taxiunternehmen will überprüfen, ob sich eine Abhängigkeit zwischen der Wetterlage und der Geschäftslage nachweisen lässt. Dazu werden einige Tage des vergangenen Jahres zufällig ausgewählt. Folgende Angaben stehen zur Verfügung:

- Von insgesamt 20 Regentagen gab es ebensoviele mit guter wie mit schlechter Geschäftslage.
- 5 Sonnentage brachten ein normales Geschäft.
- 15 Tage brachten ein schlechtes Geschäft.
- Ein gutes Geschäft konnte an 15 Sonnentagen beobachtet werden.
- Das Geschäft lief an 15 Tagen normal.

a) Stellen Sie das Ergebnis in einer Kontingenztabelle dar!

b) Formulieren Sie verbal die Hypothesen!

c) Ist eine Anwendung der χ^2-Verteilung hier gerechtfertigt?

d) Fällen Sie die Entscheidung bei (i) $\alpha = 1\%$ bzw. (ii) $\alpha = 5\%$.

e) Welcher Fehler kann Ihnen im Fall (i) bzw.(ii) jeweils unterlaufen sein?

Testtheorie-Wetterlage und Geschäftslage (14 min).mp4

Aufgabe 9-17: *Mietpreisbindung*
Der Mieterverein von Bärenhausen kämpfte vor einiger Zeit gegen die Aufhebung der Mietpreisbindung für Altbauwohnungen. Alles, was er jedoch erreichen konnte, war eine Einigung darüber, dass der Mietpreis jährlich um maximal 5% angehoben werden darf. Ein Jahr nach Inkrafttreten des Gesetzes veröffentlicht der Verein der "Baulöwen und Großgrundbesitzer" folgende Meldung:

> "Entgegen allen Befürchtungen der Mieter lag die durchschnittliche Mietpreissteigerung bei den Altbauwohnungen im letzten Jahr nur bei 2,5%. Ferner ist festzustellen, dass die Höhe der einzelnen Mietpreissteigerungen einer Gleichverteilung innerhalb des vereinbarten Bereiches folgt."

Der Mieterverein bezweifelt diese Zahlen und führt deshalb selbst eine Erhebung vom Umfang $n = 100$ durch. Diese Erhebung brachte folgende Ergebnisse:

Mietpreissteigerung in%	Häufigkeit
0 - 1	0
1 - 2	0
2 - 3	10
3 - 4	10
4 - 5	40
über 5	40

a) Mit welchem statistischen Testverfahren kann der Mieterverein die Verteilungsannahme der Gegenseite überprüfen?

b) Formulieren Sie die Hypothesen für diesen Test!
Berechnen Sie dafür die untere und obere Grenze der von der Gegenseite behaupteten Verteilung!

c) Wie lautet die Testfunktion für diesen Test?

d) Wie ist diese Testfunktion unter H_0 verteilt? Begründung!

e) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich für diesen Test bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,5%!

f) Wie lautet die Testentscheidung?

g) Interpretieren Sie das Testergebnis <u>inhaltlich</u> und statistisch exakt!

Aufgabe 9-18: *Wocheneinkommen*
Ein Lebensmittelunternehmen will in einem neuen Stadtteil eine Filiale errichten. Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass eine Filiale nur dann gewinnbringend arbeitet, wenn das durchschnittliche Wocheneinkommen der Bewohner mehr als 400 EUR beträgt. Weiterhin sei die Standardabweichung des Wocheneinkommens mit $\sigma = 20$ EUR bekannt. Es wird eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 100$ gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art wird mit
$\alpha = 0,050503$ vorgegeben.
Angenommen, in Wirklichkeit betrage das durchschnittliche Wocheneinkommen in diesem Stadtteil 406 EUR. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Fehler 2. Art zu begehen.

Aufgabe 9-19: *Testfunktion*
Für die Daten einer Stichprobe aus einer Grundgesamtheit mit beliebiger Verteilung wird der Test der Nullhypothese
$H_0 : \mu \leq 0$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ computergestützt durchgeführt.
Der Computerausdruck enthält folgende Angaben:
Stichprobenumfang: $n = 200$
realisierter Wert der Testfunktion V: $v = 2,06$
$\gamma = P(V > 2,06) = 0,0197$,
wobei V eine standardnormalverteilte Testfunktion ist.
Wann wird die Nullhypothese zum vorgegebenen Signifikanzniveau α abgelehnt?

Aufgabe 9-20: *Zugkraft eines Drahtseiles*
Die durchschnittliche Zugkraft eines Drahtseiles soll nach Angaben des Herstellers $\mu = 15$ Tonnen mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0,4964$ Tonnen betragen. Um die Behauptung eines Kunden zu widerlegen, dass die Zugkraft geringer sei, werden 49 Drahtseile geprüft und die Hypothese $H_0 : \mu \geq \mu_0$ auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,07927$ getestet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn in Wirklichkeit $\mu = 14,8$ Tonnen beträgt.

Aufgabe 9-21: *Paketversandfirma*
Eine Paketversandfirma wirbt mit der Behauptung, dass mehr als 90% der von ihr beförderten Pakete ihren Empfänger innerhalb einer Woche erreichen. Wenn diese Behauptung stimmt, will ein Unternehmen diese Firma mit dem Versand seiner Pakete beauftragen. Das Unternehmen läßt deshalb einen Test mit den Hypothesen $H_0 : \pi \leq \pi_0$ und $H_1 : \pi > \pi_0$ auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,0359$, basierend auf einer Zufallsstichprobe von 900 Paketen durchführen. Von den 900 Paketen erreichten 828 ihre Empfänger innerhalb einer Woche.
Geben Sie die Testfunktion und ihre Verteilung unter H_0, den Ablehnungsbereich der H_0 an und treffen Sie die Testentscheidung mit exakter inhaltlicher und statistischer Interpretation.

Aufgabe 9-22: *Dicke der Fahrbahndecke*
Beim Bau eines Autobahnabschnittes wird vereinbart, dass der Bauunternehmer Abzüge vom vereinbarten Kaufpreis hinnehmen muss, wenn sich auf Grund einer Stichprobe von 64 Bohrkernen und auf einem Signifikanzniveau von 5% ergibt, dass die mittlere Dicke der Fahrbahndecke den Wert 3,5 unterschreitet. Formulieren Sie die Hypothesen für diesen Test aus der Sicht des Bauunternehmers mit Begründung.

Aufgabe 9-23: *Neues Präparat*
Von der Pharma–Industrie wurde ein neues Präparat gegen das bisher als unheilbar geltende und weltweit verbreitete „Nasenjucken" entwickelt, wobei vom Hersteller versprochen wird, dass bei höchstens 65% der mit diesem Präparat behandelten Patienten kein Heilerfolg eintritt.
Da Sie es als behandelnder Arzt mit der Kostendämpfung im Gesundheitswesen genau nehmen, wollen Sie Ihren Patienten dieses teure Präparat nur verschreiben, wenn man den Angaben des Herstellers trauen kann und die Krankenkassen nicht zur Kasse gebeten werden für die Bezahlung eines Präparats, dessen Heilung minimal ist.
Sie beschließen, dieses Präparat an 19 zufällig ausgewählten Patienten, die an „Nasenjucken" leiden, auszuprobieren und die Angaben des Herstellers zu testen ($\alpha = 0,01$). Von dieser Testentscheidung wollen Sie die Einführung des Präparats abhängig machen.

a) Stellen Sie die Hypothesen für diesen Test auf. überlegen Sie genau, welches Risiko zu kontrollieren ist und begründen Sie die Wahl der Hypothesen.

b) Geben Sie die Testfunktion für diesen Test verbal und formal an.

c) Wie ist die Testfunktion unter H_0 verteilt?

d) Bestimmen Sie den Nicht–Ablehnungsbereich und den Ablehnungsbereich für diesen Test, sowie das zugehörige exakte Signifikanzniveau.

Da man in der Regel erst nach ein paar Tagen über den Heilerfolg von medizinischen Präparaten konkret etwas aussagen kann, beantworten Sie in der Zeit, in der Sie auf das Stichprobenergebnis warten, die folgende Frage:

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit und um welche Wahrscheinlichkeiten handelt es sich, dass Sie sich aufgrund des Testergebnisses
   1. nicht für die Einführung des Präparates entscheiden, wenn die Heilungsquote in Wahrheit sogar 50% betragen sollte?
   2. für die Einführung des Präparates entscheiden, wenn die Heilungsquote in Wahrheit 40% ausmachen sollte?

Aufgabe 9-24: *Batterien Lebensdauer*
Der altgediente Leiter der statistischen Abteilung einer Batterie–Firma geht davon aus, dass die Lebensdauer der produzierten Batterien normalverteilt ist. Der neu eingestellte Statistiker S. Kepsis möchte es genau wissen. Dem Protokoll einer unlängst durchgeführten Qualitätskontrolle entnimmt er folgende Daten:

i	Batterie–Lebensdauer in Std. von ... bis unter	beobachtete Häufigkeit	$\bar{x}_i$
1	... – 300	10	160
2	300 – 340	10	320
3	340 – 460	60	400
4	460 – ...	20	560

Die Stichprobenstandardabweichung dieser Daten beträgt 100 Stunden.

a) Mit welchem statistischen Verfahren läßt sich die Annahme des Leiters der statistischen Abteilung überprüfen?

b) Formulieren Sie die Hypothesen für diesen Test.

c) Führen Sie den Test auf einem Signifikanzniveau von 1% mit allen Begründungen durch.

d) Interpretieren Sie das Testergebnis statistisch exakt.

e) Ist Ihnen bei der Testentscheidung ein Fehler unterlaufen?

Aufgabe 9-25: *Kaffee Packungen*
Die Firma „Tschiduscho“ produziert unter anderem die Kaffeesorte „Dröhnung“. Die Abfüllung in 500 g–Packungen variiert zufällig, wie die Beobachtungen der Vergangenheit zeigen, und zwar gemäß einer Normalverteilung mit $\mu = 500$ g und der Varianz von 100 g^2. Die Firma muss aus bestimmten Gründen den Lieferanten von Kaffeebohnen wechseln. Da die Bohnen des neuen Lieferanten größer sind, vermutet man, dass in die Kaffeepackungen effektiv weniger abgefüllt wird. Das aber hätte Ärger mit den deutschen Kaffeetrinkern zur Folge, was die Firma auf jeden Fall vermeiden will.
Aus Erfahrung weiß man, dass ein solcher Wechsel der Kaffeebohnensorte weder die Verteilungsform noch die Varianz der Füllmenge pro Packung verändert, sondern allenfalls den Erwartungswert. Die Firma möchte nun einen Test auf diesen Erwartungswert durchführen auf einem Signifikanzniveau von 2,275% und auf der Basis einer einfachen Zufallsstichprobe von 25 Kaffeepackungen.

a) Wie lauten die Hypothesen für diesen Test? überlegen Sie genau, welches Risiko zu kontrollieren ist und begründen Sie so Ihre Wahl der Hypothesen.

b) Geben Sie die von Ihnen verwendete Schätzfunktion verbal und formal an und begründen Sie deren Verteilung unter H_0.

c) Wie lautet die Testfunktion konkret und wie ist sie unter H_0 verteilt?

d) Bestimmen Sie den Nicht–Ablehnungsbereich und den Ablehnungsbereich für diesen Test.

Die Zufallsstichprobe ergab eine mittlere Abfüllmenge pro Packung von 504,5 g.

e) Wie lautet Ihre Testentscheidung?

f) Interpretieren Sie das Testergebnis inhaltlich und statistisch exakt.

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn μ in Wahrheit den Wert $\mu_1 = 501$ g hat?

h) Bestimmen und interpretieren Sie den Wert der Gütefunktion, falls μ in Wahrheit folgenden Wert hat:
(i) $\mu_1 = 499$ g (ii)$\mu_2 = 502$ g.

Aufgabe 9-26: *FKK*
In einer Zeitung stand, dass ein Meinungsforschungsinstitut eine Stichprobe von 100 „alten“ und 50 „neuen“ Bundesbürgern über ihre Haltung zu FKK befragte. Je 20 Alt– und Neubundesbürger sprachen sich für FKK aus, der Rest dagegen.
Prüfen Sie die Behauptung, die Neigung zu FKK sei unabhängig von der Region auf einem Signigfikanzniveau von 1%. Definieren Sie dazu die Zufallsvariablen, stellen Sie die Hypothesen auf und geben Sie die Testfunktion und ihre Verteilung unter H_0 an.

Aufgabe 9-27: *Gewinnspiel–Automat*
An einem Gewinnspiel–Automaten ergaben sich nach 50 Spielen folgende Erträge bei jeweils gleichem Einsatz pro Spiel:

Gewinn minus Einsatz	-1	0	1	2	4
Anzahl	36	11	1	1	1

Testen Sie die Hypothese H_0, dass der erwartete Ertrag (Gewinn minus Einsatz) nicht negativ ist, zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$.
Wie klein dürfte der mittlere Ertrag gerade noch sein, damit die Hypothese nicht abgelehnt wird?

Aufgabe 9-28: *Werbeaktion*
Ein bekannter Technik-Markt führt seit einiger Zeit eine Werbeaktion mit großen Zeitungsanzeigen durch. Der Geschäftsleiter möchte diese Werbeaktion jedoch nur fortführen, wenn sich der Umsatz um mindestens 10% erhöht hat.
Vor der Werbeaktion betrug der Umsatz üblicherweise 150 EUR pro Kunde.
Der Geschäftsleiter ermittelt nun die Umsätze u_i von 900 Kunden in einer Woche und erhält eine Gesamtsumme von $u = \sum u_i = 148000$ EUR.
Die geschätzte Varianz der Umsätze $s^2 = \sum(u_i - u/900)^2/899$ beläuft sich auf 900 EUR.
Der Geschäftsleiter will daraufhin die Werbeaktion stoppen, sein Assistent weist ihn jedoch daraufhin, dass statistisch gesehen die Hypothese „erwarteter Umsatz pro Kunde“ $\geq$165 EUR nicht unbedingt abgelehnt werden kann.
Wie klein darf der tatsächliche wöchentliche Umsatz sein, um diese Hypothese zu einem Signifikanzniveau von 5% gerade nicht mehr abzulehnen?

Aufgabe 9-29: *1000g–Portionen*
Obst- und Gemüsehändler Paul lässt seine äpfel in 1000g-Portionen abpacken. Natürlich kann man nicht immer exakt 1000g abwiegen. Paul wiegt daher bei jeder Lieferung eine Stichprobe von 25 Portionen nach, um sicherzustellen, dass der Mittelwert von 1000g eingehalten wird. Heute hat er allerdings eine Stichprobe gezogen, deren Stichprobenmittelwert bei 1015g liegt. Paul ist beunruhigt und benötigt statistische Hilfe. Aus langjähriger Erfahrung weiß er, dass das Gewicht der gelieferten Portionen normalverteilt ist und eine Varianz von 625g^2 aufweist.
Testen Sie anhand von Pauls Stichprobe, ob die Hypothese
„mittleres Portionsgewicht = 1000g“ erfüllt ist.
Um wieviel Gramm muss der Stichprobenmittelwert nach beiden Seiten von 1000g abweichen, um die Hypothese zu einem Signifikanzniveau von 5% abzulehnen?

Aufgabe 9-30: *Arbeitsproduktivität*
Bei der Vorbereitung technischer Arbeitsnormen wurden in einem Betrieb mit Monoproduktfertigung 64 unabhängige Messungen der Arbeitsproduktivität von Arbeitern durchgeführt. Es sei bekannt, dass die Standardabweichung der Arbeitsproduktivität bei derartiger Fertigung $\sigma = 0,8$ Stück/Stunde ist. Die durchschnittliche Arbeitsproduktivität betrug in der Stichprobe 5,2 Stück/Stunde.
Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ wird die zweiseitige Hypothese, dass die durchschnittliche Arbeitsproduktivität aller Arbeiter des Betriebes 5,5 Stück/Stunde beträgt, geprüft. Es wird nunmehr angenommen, dass in Wirklichkeit die durchschnittliche Arbeitsproduktivität 5,6 Stück/Stunde beträgt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Fehler 2. Art zu begehen.

Aufgabe 9-31: *Anzahl der Kinder*
Eine Umfrage unter 200 Familien mit 3 Kindern
(J = Junge, M = Mädchen) ergab folgende Verteilung:

Anzahl der Kinder	3J, 0M	2J, 1M	1J, 2M	0J, 3M
Anzahl der Familien	16	60	92	32

Prüfen Sie mit dem Chi–Quadrat–Anpassungstest die Hypothese, dass die Wahrscheinlichkeit der Geburt von Jungen und Mädchen gleich groß ist. Welches ist das kleinste Signifikanzniveau, zu dem die Nullhypothese abgelehnt wird?

Aufgabe 9-32: *Ausfallsicherheit*
Ein Hersteller von Internetservern möchte die Ausfallsicherheit seiner Produkte untersuchen. Er möchte statistisch zeigen, dass die Ausfallzeit seiner Server geringer ist als 1% der Gesamtbetriebszeit, wobei er das Risiko einer Fehlentscheidung möglichst klein halten will. Dafür werden die Ausfallzeiten von 25 Servern innerhalb eines Jahres (=365 Tage) beobachtet. Es ergab sich eine mittlere Ausfallzeit von 84,2 Stunden bei einer Stichprobenvarianz von 100.
Führen Sie einen Test durch, um die genannte Aussage des Herstellers zu prüfen ($\alpha = 0,05$). Gehen Sie davon aus, dass die Server das ganze Jahr in Betrieb waren und die Ausfallzeit normalverteilt ist. Wie groß ist der Wert der Teststatistik v und wie ist Ihre Testentscheidung?

Aufgabe 9-33: *Ausgaben für Urlaubsreisen*
Von den 2,5 Millionen Haushalten eines Landes werden 10.000 Haushalte nach ihren Ausgaben im Jahre 2001 für Urlaubsreisen befragt. In der Stichprobe ergab sich ein arithmetisches Mittel von 3780 EUR und eine Standardabweichung von 2290 EUR. Ein Tourismusexperte geht von der Annahme eines hypothetischen Wertes für die Gesamtausgaben für Urlaubsreisen in der Grundgesamtheit von 10 Milliarden EUR aus und testet auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ die Nullhypothese, dass der Mittelwert μ in der Grundgesamtheit nicht größer ist als der hypothetische Mittelwert μ_0:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0.$$

Wählen Sie eine adäquate Teststatistik und berechnen Sie den Wert der Teststatistik für die Stichprobe.

Aufgabe 9-34: *Kaffee Packungen 2*
Eine Maschine füllt Packungen Kaffee ab, die ein Sollgewicht von 500 g haben sollen. Aufgrund langer Beobachtungen kann angenommen werden, dass für diese Maschine $\sigma = 15$ g ist. Aus dieser Grundgesamtheit wird eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 100$ gezogen. Auf einem Signifikanzniveau von von $\alpha = 0,05$ wurde das mittlere Füllgewicht der Kaffeepackungen mittels der Hypothese $H_0 : \mu \geq \mu_0$ und $H_1 : \mu < \mu_0$ geprüft.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art, wenn $\mu = 497$ g das wahre mittlere Füllgewicht ist?

Aufgabe 9-35: *Lagerhaltungsprobleme*
In Zusammenhang mit bestimmten Lagerhaltungsproblemen ist zu prüfen, ob die Poisson–Verteilung ein geeignetes Modell für die Nachfrage nach einem Produkt ist. Eine einfache Zufallsstichprobe von $n = 100$ Verkaufstagen liefert die folgenden Daten:

Anzahl der nachgefragten Produkte pro Tag (x)	Anzahl der Tage, an denen x Produkte nachgefragt wurden
0	17
1	20
2	27
3	18
4	18
5 und mehr	0

Wählen Sie einen geeigneten Test aus und bestimmen Sie dafür den kritischen Wert für ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$.

Aufgabe 9-36: *Grönländische Bohrlochkerne*
Es wird angenommen, dass Grönländische Bohrlochkerne in 300 m Tiefe im ewigen Eis eine durchschnittliche Temperatur von -25C haben. Aus Erfahrung weiß man, dass die Temperatur der Bohrlochkerne normalverteilt ist mit Varianz $\sigma^2 = 4$. Forscher vermuten, dass die Klimaerwärmung eine Erwärmung des Eises zur Folge hat und führen deshalb eine Messreihe an 100 zufällig ausgewählten Bohrlochkernen des letzten Jahres durch, die eine mittlere Temperatur von -24C bei einer Standardabweichung von 1,5C ergab. Die Nullhypothese H_0 wird auf einem Signifikanzniveau von 2,5% geprüft. Wenn in Wirklichkeit die durchschnittliche Temperatur der Bohrlochkerne $-24,8$C beträgt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich richtigerweise für die Alternativhypothese zu entscheiden, d.h. $P(„H_1“|H_1) = 1 - \beta$?

Aufgabe 9-37: *Fachgebiete*
Die Studentinnen Gerda und Bärbel stehen in der Bibliothek vor einem großen Regal mit Büchern, von denen sich jedes eindeutig einem Fachgebiet zuordnen lässt. Gerda behauptet, dass 10% der Bücher zur Statistik, 30% der Bücher zur VWL, 40% der Bücher zur BWL und der Rest zur Wirtschaftsinformatik gehören. Bärbel bezweifelt diese Behauptung und wählt zufällig 100 Bücher aus diesem Regal. Sie stellt fest, dass 5 Bücher zur Statistik, 35 zur VWL, 50 zur BWL und der Rest zur Wirtschaftsinformatik gehören. Wählen Sie einen geeigneten statistischen Test und berechnen Sie für diesen den Prüfwert.

Aufgabe 9-38: *Benzinverbrauch Test*
Ein Autohersteller behauptet, dass sein neuestes Auto einen mittleren Benzinverbrauch von 6 l/100 km hat. Ein Automobilclub lässt auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ überprüfen, ob es Abweichungen von dieser Behauptung gibt, wobei angenommen wird, dass der Benzinverbrauch normalverteilt ist. Eine einfache Zufallsstichprobe an 16 dieser Autos liefert folgende Informationen: $\sum_i x_i = 97,6$ und
$\sum_i (x_i - \overline{x})^2 = 0,6615$.Wählen Sie einen geeigneten Test zur überprüfung der Hypothese und geben Sie dafür den Prüfwert (gerundet auf drei Stellen nach dem Komma) und den absoluten kritischen Wert an.

10 Regressionsanalyse

Aufgabe 10-1: *Gesamtkosten und Produktionsmenge*
In einem Unternehmen mit einer Vielzahl von Filialen wurden in einem bestimmten Zeitraum für n = 12 Filialen folgende Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Produktionsmenge beobachtet:

Filiale i	Produktionsmenge x_i (in Tsd. Stück)	Gesamtkosten y_i (in Tsd. EUR)
1	45	205
2	30	128
3	35	165
4	40	175
5	20	104
6	55	240
7	65	275
8	58	250
9	30	142
10	60	265
11	25	112
12	49	214

Schätzen Sie nach der Methode der kleinsten Quadrate die lineare Gesamtkostenfunktion für das Unternehmen.
Aufgabe 10-2: *Konsumausgaben und verfügbares Einkommen*
Aus Kenntnis der ökonomischen Theorie vermutet man bei einer bestimmten Gruppe von Haushalten einen linearen Zusammenhang zwischen den Konsumausgaben (Y) und dem verfügbaren Einkommen (X):

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i.$$

Bei der Untersuchung von 8 ausgewählten Haushalten ergaben sich folgende Wertepaare (in 100 EUR):

Konsumausgaben	15	19	21	22	23	28	27	29
verfügbares Einkommen	19	21	23	26	27	31	33	36

Schätzen Sie mittels der Methode der kleinsten Quadrate die lineare Regressionsbeziehung und interpretieren Sie die Werte der Regressionskoeffizienten.
Aufgabe 10-3: *Querschnittsanalyse von 11 Unternehmen*
In einer Querschnittsanalyse werden 11 Unternehmen einer Branche bezüglich der Abhängigkeit des Umsatzes Y (in Mill. EUR) von den Investitionen X_1 (in 1 000 EUR), den Aufwendungen für Forschung und Entwicklung X_2 (in 1 000 EUR) und den Werbeaufwendungen X_3 (in 1 000 EUR) für einen gegebenen Zeitraum untersucht. Die Werte der erklärenden Variablen X_1, X_2, X_3 und der Variablen Y sind in der folgenden Tabelle erfasst.

i	y_i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}
1	12,6	117,0	84,5	3,1
2	13,1	126,3	89,7	3,6
3	15,1	134,4	96,2	2,3
4	15,1	137,5	99,1	2,3
5	14,9	141,7	103,2	0,9
6	16,1	149,4	107,5	2,1
7	17,9	158,4	114,1	1,5
8	21,0	166,5	120,4	3,8
9	22,3	177,1	126,8	3,6
10	21,9	179,8	127,2	4,1
11	21,0	183,8	128,7	1,9

a) Bestimmen Sie die einfachen linearen Regressionsfunktionen des Umsatzes bezüglich der Investitionen bzw. der Aufwendungen für Forschung und Entwicklung bzw. der Werbeaufwendungen, sowie die zugehörigen Bestimmtheitsmaße.

b) Berechnen Sie alle einfachen linearen Korrelationskoeffizienten zwischen diesen Merkmalen.

Aufgabe 10-4: *Hypothekenzinssatz*
Für 6 verschiedene Monate liegen die Daten über den Hypothekenzinssatz X (in %) vor sowie über den saisonbereinigten Auftragseingang Y im Bauhauptgewerbe (in Tsd. EUR), der auf den privaten Wohnungsbau entfällt:

Monat i	1	2	3	4	5	6
x_i	6	5	7	7	8	9
y_i	3 000	3 200	2 500	2 300	2 000	2 000

Bestimmen Sie hieraus

a) den Korrelationskoeffizienten,

b) die lineare Regressionsfunktion,

c) das Bestimmtheitsmaß,

d) Prognosewerte für den Auftragseingang, der bei einem Hypothekenzinssatz von 4% bzw. von 7.5% zu erwarten ist.

▶ Regression-Hypothekenzinssatz.mp4

Aufgabe 10-5: *Konsumausgaben*
Das verfügbare Gesamteinkommen von 8 privaten Haushalten betrug im März 1992
30 880 EUR. Im gleichen Monat tätigten alle 8 Haushalte Konsumausgaben in Höhe von 26 800 EUR. Pro EUR Einkommenserhöhung wurden von diesen Haushalten durchschnittlich 0,813 EUR für den Konsum ausgegeben.

a) Geben Sie die (ökonomisch sinnvolle) lineare Regressionsfunktion an.

b) Welche Konsumausgaben sind bei einer verfügbaren Einkommenshöhe von 2 800 EUR im Mittel zu erwarten?

Aufgabe 10-6: *Kunstdünger*
Auf gleichgroßen Flächeneinheiten eines homogenen Bodens wurden unterschiedliche Mengen eines Kunstdüngers eingesetzt. Für die Mengen des eingesetzten Kunstdüngers (X) in Dezitonne (dt) und das Ernteergebnis (Y) in dt wurden folgende Werte beobachtet:

Kunstdüngereinsatz	1	2	3	5	7	9
Ernteergebnis	24	32	32	47	58	63

a) Prüfen Sie mittels eines Streuungsdiagramms, ob zwischen den Merkmalen eine Abhängigkeit besteht.

b) Berechnen Sie die lineare Regressionsfunktion.

c) Mit welchem Ernteergebnis würden Sie bei einem Kunstdüngereinsatz von 11 dt rechnen?

d) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß.

Aufgabe 10-7: *Zusätzliche statistische Einheit*
Die Merkmale X und Y wurden an 9 statistischen Einheiten beobachtet, jedoch liegen nicht die einzelnen Wertepaare (x_i, y_i) vor, sondern die Summen

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 34, \sum_{i=1}^{9} y_i = 60, \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 144, \sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 422, \sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 244.$$

Nachträglich stellt sich heraus, dass auch das Wertepaar $(x_{10}, y_{10}) = (6; 10)$ zu berücksichtigen ist.
Welche der folgenden Regressionsgeraden $y = b_0 + b_1 x$ nach der Methode der kleinsten Quadrate für die 10 Wertepaare $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, 10$ ist richtig angegeben?

a) $y = 0,2 + 1,7x$ b) $y = 0,6 + 1,6x$ c) $y = 1,2 + 1,5x$ d) $y = 1,4 + 1,4x$
e) $y = 1,8 + 1,3x$ f) $y = 2,0 + 1,8x$ g) $y = 2,2 + 1,2x$ h) $y = 2,8 + 1,0x$

Aufgabe 10-8: *Gewinn eines Unternehmens*
Für den Gewinn (Y) eines Unternehmens ergaben sich im Verlauf von 10 Monaten (X) nachstehende Werte:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	-4	-6	-5	-6	0	5	7	6	3	0

Berechnen Sie die lineare Regressionsfunktion (Trend) für den Gewinn in diesen 10 Monaten.
Aufgabe 10-9: *Arbeitslosenquoten*
Die folgende Tabelle gibt die Arbeitslosenquoten für Deutschland in den letzten Jahren an:

Jahr	Zeitpunkt x_i	Arbeitslosenquote in %
1994	0	10,6
1995	1	10,4
1996	2	11,5
1997	3	12,7

(Quelle: Sachverständigenrat zur Begutachtung der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung)

Passen Sie eine lineare Funktion für die Regression von Arbeitslosenquote Y auf den Zeitpunkt X mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate an. Prognostizieren Sie mit Hilfe dieser linearen Regression den Wert für 1998.
Aufgabe 10-10: *Quadratmetermiete*
In einem Wohnviertel mit Häusern verschiedener Wohnungseigentümer wird die Quadratmetermiete in Abhängigkeit von der Wohnfläche analysiert. Es ergibt sich aus der Auswertung von 10 Mietwohnungen folgendes Bild:

Wohnfläche (m^2) x_i	Miete (EUR/m^2) y_i			
40	12	12	15	
60	12			
80	10	10		
90	9	10	10	10

Regression-Quadratmetermiete.mp4

Aufgabe 10-11: *Ökonomische Variablen*
Als Mitarbeiter der volkswirtschaftlichen Abteilung eines Ministeriums möchten Sie den Zusammenhang zwischen zwei ökonomischen Variablen X und Y untersuchen, d.h. Sie interessieren sich für ein Modell der Gestalt $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, wobei β_0 und β_1 unbekannte Parameter und ϵ_i ein Störterm sind.
Folgende Daten, die auf einer Stichprobe vom Umfang $n = 10$ basieren, wurden bereits von einem Mitarbeiter des Ministeriums zusammengetragen:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 40 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 180 \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 70 \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 522 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 304$$

Schätzen Sie auf Basis dieser Angaben die Parameter β_0 und β_1.
Aufgabe 10-12: *Immobiliensachverständiger*
Ein Immobiliensachverständiger muss für ein Gutachten den Preis eines Hauses vorhersagen. Er nimmt an, dass das Alter einen Einfluss auf den Preis hat. Er führt unter Verwendung nachstehender Daten eine einfache lineare Regressionsschätzung durch, um diese Abhängigkeit zu ermitteln.

Objekt i	Alter in Jahren	Preis in 1000 EUR
1	15	190
2	12	210
3	3	400
4	17	125
5	5	300
6	8	197

Das Ergebnis der Regressionsschätzung verwendet er, um den Preis des Hauses, das 1 Jahr alt ist, zu berechnen.
Wie hoch ist der vorhergesagte Preis des Hauses in 1000 EUR?

Aufgabe 10-13: *Umsatz und Werbeetat*
Für die 6 Filialen eines Unternehmens sind aus dem Jahre 2001 nachstehende Angaben über den Umsatz (1000 EUR) und den Werbeetat (100 EUR) bekannt:

Filiale	1	2	3	4	5	6
Umsatz (1000 EUR)	20	16	18	17	12	13
Werbeetat (100 EUR)	29	25	28	26	20	22

Schätzen Sie bei Zugrundelegung einer linearen Beziehung denjenigen Regressionsparameter, der die Abhängigkeit des Umsatzes vom Werbeetat beinhaltet.

Aufgabe 10-14: *Kosten und Output*
Ein Unternehmen stellt ein Produkt her. Für die Kalkulation soll eine lineare Regressionsfunktion der Kosten in Abhängigkeit vom Output ermittelt werden. Dafür werden in 10 Perioden die Produktionsmenge in Tonnen und die Gesamtkosten in 1000 Euro registriert.

Periode	1	2	3	4	5
Output	9	12	14	12	12
Kosten	1216	1300	1356	1288	1276
Periode	6	7	8	9	10
Output	13	10	11	12	15
Kosten	1292	1260	1244	1288	1360

Die Varianz der Kosten ist 1801,6. Die Kovarianz zwischen Output und Kosten beträgt 67,2. Bestimmen Sie den Parameter der linearen Regressionsfunktion, der die mittlere Abhängigkeit der Kosten vom Output angibt.

Aufgabe 10-15: *Alter und Händlerverkaufspreis*
Für das Alter (X) und den Händlerverkaufspreis (Y) gebrauchter PKW eines bestimmten Typs liegen folgende Informationen vor: Die Kovarianz zwischen Alter und Verkaufspreis beträgt $-5,4$; die Varianz des Verkaufspreises ist 4. Durch eine lineare Abhängigkeit vom Alter werden 81% der Variation in den Verkaufspreisen erklärt.
Wie groß ist die Standardabweichung des Alters?

11 Zeitreihenanalyse

Aufgabe 11-1: *Warenausfuhr*
Die Warenausfuhr der Bundesrepublik Deutschland nach Frankreich betrug 1985 53,892 Mrd. EUR. Sie stieg 1987 gegenüber 1985 um 7 Prozent und betrug 1990 74,237 Mrd. EUR.
Quelle: DIW–Wochenbericht 3/92, S. 28.

a) Wie hat sich die Warenausfuhr nach Frankreich im Zeitraum 1985 bis 1990 im Mittel jährlich entwickelt?

Vorausgesetzt, diese durchschnittliche Entwicklung der Warenausfuhr nach Frankreich im Zeitraum 1985 bis 1990 setzt sich in den nächsten Jahren fort,

b) wie hoch wird voraussichtlich im Jahre 1992 die Warenausfuhr sein?

c) in welchem Jahr wird die Warenausfuhr 100 Mrd. EUR voraussichtlich überschreiten?

Aufgabe 11-2: *Anzahl der Beschäftigten*
Die Anzahl der Beschäftigten in einem Reichsbahnausbesserungswerk entwickelte sich von 1984 bis 1990 etwa nach folgender Funktion: $\widehat{x} = 983 - 9t$.

a) Ist die Angabe für diese Trendfunktion vollständig?
Ergänzen Sie diese Angabe gegebenenfalls sinnvoll unter Verwendung der Information, dass 1986 die Zahl der Beschäftigten 990 und 1990 957 betrug.

b) Interpretieren Sie die Trendparameter konkret für die Problemstellung.

Aufgabe 11-3: *Mikroprozessoren*
Die Produktion von Mikroprozessoren entwickelte sich in einem Unternehmen der elektronischen Industrie in folgenden Stückzahlen:

1986	1987	1988	1989	1990
110 000	130 000	155 000	180 000	220 000

a) Welche Art statistischer Reihe stellen hier die Stückzahlen der Mikroprozessoren dar?

b) Wie hat sich die Produktion von Mikroprozessoren im Mittel jährlich im Zeitraum 1986 – 1990 entwickelt?

c) Bestimmen Sie eine geeignete Funktion für die langfristige Entwicklung der Produktion von Mikroprozessoren und interpretieren Sie die Ergebnisse.

d) Erstellen Sie auf der Grundlage der Berechnungen unter b) und c) je eine Prognose für die Produktion 1992 und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 11-4: *Speiseeis*
Bei regelmäßigen Inventuren in einem Kühllager werden folgende Mengen Speiseeis registriert (in kg):

Zeit	1987		1988		1989		1990		1991
	1.1.	1.7.	1.1.	1.7.	1.1.	1.7.	1.1.	1.7.	1.1.
Menge	90	121	108	143	126	165	144	187	162

a) Bestimmen Sie eine passende Trendfunktion.

b) Stellen Sie ein geeignetes Trend–Saison–Modell auf (Runden Sie dafür die Trendparameter: das absolute Glied auf Zehner, Anstieg auf ganze Zahl).

c) Interpretieren Sie die Ergebnisse von a) und b)

d) Zur bequemeren Anwendung soll nachträglich der Zeitpunkt 0 auf den 1.1.1985 gelegt werden. Die Zeiteinheit soll ein Jahr werden. Bestimmen Sie die neue Gestalt des Modells.

e) Mit welchem Lagerbestand wäre am 1.7.1991 ungefähr zu rechnen?

Aufgabe 11-5: *Quartalsproduktion*
Die Quartalsproduktion eines Unternehmens (in EUR) kann in ihrer langfristigen Entwicklung durch folgende Funktion angenähert werden:

$$\widehat{x}_t = 2200000 + 115000t, \qquad \text{mit } t = 0 \mathrel{\widehat{=}} \text{IV. Quartal 1992.}$$

Im Durchschnitt der vergangenen Jahre lag die Produktion des Unternehmens im

I. Quartal um 10 000 EUR unter dem Trendwert,

II. Quartal um 90 000 EUR über dem Trendwert,

III. Quartal um 20 000 EUR über dem Trendwert und

IV. Quartal um 50 000 EUR unter dem Trendwert.

Treffen Sie eine Vorhersage über die Jahresproduktion des Unternehmens für 1993.

Aufgabe 11-6: *Quartalsproduktion 2*
Die Quartalsproduktion eines Unternehmens (in Tonnen) kann in ihrer langfristigen Entwicklung durch folgende Funktion angenähert werden:

$$\widehat{x}_t = 2200000 \cdot 1,15^t, \qquad \text{mit } t = 0 \mathrel{\widehat{=}} \text{IV. Quartal 1992.}$$

Im Durchschnitt der vergangenen Jahre lag die Produktion des Unternehmens im

I. Quartal um 10% unter dem Trendwert,

II. Quartal um 90% über dem Trendwert,

III. Quartal um 20% über dem Trendwert und

IV. Quartal um 50% unter dem Trendwert.

Treffen Sie eine Vorhersage über die Jahresproduktion des Unternehmens für 1993.

Aufgabe 11-7: *Trendfunktion*
Die Entwicklung der im Nahverkehr eines bestimmten Gebietes beförderten Personen (in Mio.) lässt sich für den Zeitraum 1983–1990 durch folgende Trendfunktion annähern:

$$\widehat{x}_t = 2528,875 + 16,244t$$

mit $t = -1$ für 1986 und $t = +1$ für 1987.

a) Interpretieren Sie die Trendparameter.

b) Wieviel Reisende werden im Nahverkehr in diesem Gebiet voraussichtlich im Jahre 1993 befördert und unter welcher Bedingung?

Aufgabe 11-8: *Maschinenzeitfondsauslastungen*
Für die ersten 9 Monate eines Jahres seien in einem Unternehmen die folgende prozentualen Maschinenzeitfondsauslastungen ermittelt worden:

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Auslastung	68,5	73	78,5	84	81,5	87	89,5	92	92,5

a) Bestimmen Sie für die Maschinenzeitfondsauslastung eine lineare und eine exponentielle Trendfunktion.
Interpretieren Sie die jeweiligen Trendparameter.

b) Vergleichen Sie die beiden Trendfunktionen bezüglich ihrer Anpassung an das empirische Datenmaterial.

c) Treffen Sie mittels der 'besten' Trendfunktion eine Vorhersage für den 12. Monat.

Aufgabe 11-9: *Eheschließungen und Ehescheidungen*
Im Datenreport 1989 (Bundeszentrale für politische Bildung, S. 46) werden folgende Angaben über die Anzahl der Eheschließungen und Ehescheidungen im früheren Bundesgebiet ausgewiesen:

Jahr Jahr	Eheschließungen (in 1000)	Ehescheidungen (in 1000)
1950	536	86
1955	462	49
1960	521	49
1965	492	59
1970	445	77
1975	387	107
1980	362	96
1981	360	110
1982	362	118
1983	370	121
1984	364	131
1985	365	128
1986	372	122
1987	383	130

a) Bestimmen Sie eine geeignete mathematische Funktion zur Widerspiegelung der Grundrichtung der Entwicklung der Anzahl der Eheschließungen bzw. der Ehescheidungen in den Jahren
   - 1980 bis 1987
   - 1950 bis 1985 (bei Verwendung der Daten im Fünfjahresabstand).

b) Schätzen Sie für die berechneten Trendfunktionen die Güte der Anpassung an die gegebenen Zeitreihen mittels eines statistischen Maßes ein.

c) Geben Sie eine Vorhersage der Anzahl der Eheschließungen bzw. der Ehescheidungen für das Jahr 1990 auf der Basis der unter a) bestimmten Trendfunktionen.

Aufgabe 11-10: *Bruttosozialprodukt von Deutschland*
In den Jahren 1980 bis 1988 wurde in der Bundesrepublik Deutschland insgesamt ein Bruttosozialprodukt von 14 025,5 Mrd. EUR (in Preisen von 1980) produziert. Berechnungen mit Hilfe einer mathematischen Funktion für alle Jahre des gleichen Zeitraums ergaben(mit $t = 0$ für 1980, $t = 1$ für 1981 usw.), dass in diesem Zeitraum das Bruttosozialprodukt jährlich im Durchschnitt um 28,413 Mrd. EUR stieg.

a) Geben Sie die mathematische Funktion vollständig an.

b) Bestimmen Sie die Höhe des Bruttosozialprodukts, dass sich schätzungsweise für das Jahr 1989 und 1990 ergibt.

Aufgabe 11-11: *Hausschlachtungen von Schweinen*
Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Hausschlachtungen von Schweinen (in 1 000) eines Bundeslandes für die Quartale der Jahre 1990 bis 1992 an:

Jahr	Quartal	Anzahl
1990	1	14
	2	6
	3	4
	4	13
1991	1	12
	2	5
	3	4
	4	12
1992	1	11
	2	5
	3	4
	4	12

Prognostizieren Sie die Anzahl der Hausschlachtungen von Schweinen für die vier Quartale des Jahres 1993 auf der Basis eines additiven Zeitreihenmodells mit linearem Trend.

Aufgabe 11-12: *Indizes der Aktienkurse*
Die folgende Tabelle enthält die Indizes der Aktienkurse einer Aktiengesellschaft für das Jahr 1992:

Monat	Index
1	85,2
2	85,5
3	83,6
4	85,8
5	86,0
6	82,8
7	79,4
8	80,4
9	77,4
10	74,9
11	76,6
12	80,5

a) Berechnen Sie mit Hilfe der gleitenden Durchschnitte 3. bzw. 4. Ordnung den Trend der Aktienkurse.

b) Bestimmen Sie die lineare Trendfunktion.

Aufgabe 11-13: *Transportleistung*
Die Entwicklung der Transportleistung einer Spedition (in 10^3 tkm) in den Jahren 1990 bis 1992 wird durch folgende Daten gegeben:

Jahr	Quartal	Anzahl
1990	1	13
	2	10
	3	11
	4	15
1991	1	14
	2	10
	3	12
	4	17
1992	1	17
	2	13
	3	14
	4	19

a) Stellen Sie die Entwicklung der Transportleistung dieser Spedition durch ein geeignetes statistisches Zeitreihenmodell dar.

b) Bestimmen Sie den Standardfehler des gewählten Modells.

c) Treffen Sie eine Vorhersage für die Gesamttransportleistung des Jahres 1993.

Aufgabe 11-14: *Souvenirhändler*
Der Umsatz eines Souvenirhändlers am Brandenburger Tor zeigte in den Monaten von Januar bis Juli 1992 folgende Werte (in 100 EUR):

`10;  90;  50; 160;   390;  650;  1 360;`

a) Glätten Sie diese Reihe.

b) Bestimmen Sie für die geglättete Reihe eine geeignete Trendfunktion und interpretieren Sie die Trendparameter.

c) Bestimmen Sie die Trendwerte für die Monate des Erfassungszeitraumes, für die die gleitenden Durchschnitte fehlen.

Aufgabe 11-15: *Haushalte eines Landes*
Für das verfügbare Einkommen X der Haushalte eines Landes wurden für 1989 bis 1993 folgende Werte angegeben (in Mill. EUR):

Jahr	1989	1990	1991	1992	1993
x_t	34	40	42	47	50

Bestimmen Sie für den Zeitraum 1989 - 1993 die lineare Grundrichtung der Entwicklung des verfügbaren Einkommens mit t = 0 für 1988.

Aufgabe 11-16: *Haushalte eines Landes 2*
Das verfügbare Einkommen X der Haushalte eines Landes betrug 1984 34 Mill. EUR, 1988 50 Mill. EUR, 1992 73 Mill. EUR und stieg 1993 gegenüber 1988 auf 153%.
Um wieviel Prozent stieg im Zeitraum 1984 - 1993 im Mittel jährlich das verfügbare Einkommen?

Aufgabe 11-17: *Telefonkosten*
Für die Telefonkosten einer Behörde wurden im Zeitraum von 1991 bis 1995 folgende Werte beobachtet (in Mill. EUR):

Jahr	1991	1992	1993	1994	1995
x_t	34	40	42	47	50

Bestimmen Sie für den Zeitraum 1991 - 1995 die lineare Grundrichtung der Entwicklung der Telefonkosten mit $t = 0$ für 1990.

Aufgabe 11-18: *Telefonkosten 2*
Die Telefonkosten einer Behörde betrugen für den Zeitraum von 1981 bis 1990 insgesamt 28 Mill. EUR. Der durchschnittliche jährliche Zuwachs der Telefonkosten in diesem Zeitraum belief sich auf 0,125 Mill. EUR.
Geben Sie eine geeignete Trendfunktion exakt an.

Aufgabe 11-19: *Gecrashte Festplatte*
Um den Absatz im 3. Quartal 1999 in seiner Firma abschätzen zu können, beauftragt der Firmenchef seine Volkswirtin, eine Prognose zu erstellen. Bevor die Volkswirtin jedoch die endgültige Prognose berechnen kann, crasht die Festplatte ihres Computers. Glücklicherweise gelingt es dem Computerspezialisten die unten angegebenen Fragmente von der Festplatte zu retten.

Daten		
Quartal	t	x
1/96	1	1,1
2/96	4	1,0
3/96	7	1,6
4/96	10	1,7
1/97	13	3,2
2/97	16	3,8
3/97	19	5,3
4/97	22	6,5
1/98	25	5,5
2/98	28	12,1
3/98	31	16,1
4/98	34	20,7

Linearer Trend			
$\bar{t}$		17,50	
$\overline{x}$		6,55	
$\sum_i t_i^2$		4962,00	
$\sum_i x_i^2$		967,04	
$\sum_i t_i \cdot x_i$		2058,60	
$\sum_i (t_i - \bar{t})^2$		1287,00	
$\sum_i (x_i - \overline{x})^2$		452,21	
	Saisonkomponente		
	keine	additiv	multiplikativ
$\overline{s}_1$	–	$-0,89$	0,26
$\overline{s}_2$	–	$-0,12$	0,01
$\overline{s}_3$	–	0,32	1,18
$\overline{s}_4$	–	0,69	0,91
$\sum_i (x_i - \hat{x}_i^{ZRM})^2$	89,64	85,44	233,89

Können Sie der verzweifelten Volkswirtin helfen, auf Grundlage des besten Modells die Prognose zu berechnen?

Aufgabe 11-20: *Arbeitslosenquoten*
Die folgende Tabelle gibt die Arbeitslosenquoten für Deutschland in den letzten Jahren an:

Jahr	Arbeitslosenquote in %
1994	10,6
1995	10,4
1996	11,5
1997	12,7

(Quelle: Sachverständigenrat zur Begutachtung der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung)

Prognostizieren Sie den Wert für 1998, indem Sie einen linearen Entwicklungstrend zugrunde legen.

Aufgabe 11-21: *Wachstum des Bruttoinlandsprodukts*
Die folgende Tabelle gibt das jährliche Wachstum des Bruttoinlandsprodukts an:

Jahr	Bruttoinlandsprodukt (Zuwachs gegenüber dem Vorjahr in %)
1994	$+2,7$
1995	$+1,8$
1996	$+1,4$
1197	$+2,2$

(Quelle: Sachverständigenrat zur Begutachtung der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung)
Berechnen Sie das mittlere Entwicklungstempo (in %) mit Hilfe eines geeigneten Mittelwertes.

Aufgabe 11-22: *Benutzer des Dial-In-Service*
Die folgende Tabelle gibt die Benutzer des Dial-In-Service des Rechenzentrums der Humboldt-Universität an:

Monat (in 1997)	Benutzer
Februar	1809
Mai	2342
August	2446
November	3500

Prognostizieren Sie den Wert für Mai 1998, indem Sie einen linearen Entwicklungstrend zugrunde legen.

Aufgabe 11-23: *Eheschließungen*
Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Eheschließungen in Deutschland pro 1000 Einwohner an:

Jahr	Eheschließungen
1950	11,0
1960	9,5
1970	7,4
1980	6,3
1990	6,5

Prognostizieren Sie den Wert für das Jahr 2000, indem Sie einen linearen Entwicklungstrend zugrunde legen.

Aufgabe 11-24: *Bauhauptgewerbe*
Die folgende Tabelle enthält die Quartalsumsätze (in Mio. EUR) des Bauhauptgewerbes in Mecklenburg-Vorpommern von 1991 bis 1994.

	1991	1992	1993	1994
I. Quartal	37	63	87	108
II. Quartal	65	102	145	172
III. Quartal	67	106	152	187
IV. Quartal	91	139	196	233

Wie hat sich der Jahresumsatz des Bauhauptgewerbes in Mecklenburg-Vorpommern im Zeitraum von 1991 bis 1994 im Mittel jährlich entwickelt? Runden Sie das Ergebnis auf 3 Dezimalstellen.

Aufgabe 11-25: *Abschreibung*
Eine Maschine, die zu Beginn eines Jahres für 50000 EUR angeschafft wurde, wird über 7 Jahre mit unterschiedlichen jährlichen Abschreibungsfaktoren vom Restbuchwert abgeschrieben, so dass schliesslich nur ein Erinnerungswert von 1 EUR verbleibt. Die Abschreibungsregel ist wie folgt:

$$\begin{array}{l} \text{Buchwert} \\ \text{in Jahre } t \end{array} = \begin{array}{l} \text{Buchwert} \\ \text{im Jahre}(t-1) \end{array} \times \begin{array}{l} \text{Abschreibungsfaktor} \\ \text{im Jahre } t \end{array}$$

Welcher konstanter mittlerer jährlicher Abschreibungsfaktor führt zum gleichen Ergebnis?

Aufgaben Index