

Iver Håkon Brevik

ELEMENTÆR UTLEDNING AV FLUIDMEKANIKKENS GRUNNLIKNINGER



Institutt for energi- og prosessteknikk
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Professor **Iver Håkon Brevik** ved institutt for energi og prosessteknikk på NTNU utarbeidet en håndskrevet versjon av kompendiet i 2010. Året etter ble kompendiet utvidet av samme forfatter. Kompendiet ble først digitalisert etter eget initiativ av **Sigbjørn Løland Bore** i 2012, med ny utgave i 2014.

I 2016 ble kompendiet revidert av **Andreas Øverlie Svela**.

Elementær utledning av fluidmekanikkens grunnlikninger er underlagt Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

Omslagsfoto: Turbulens i en hydrodynamisk tank, DLR-Archiv Göttingen.

Innhold

Forord	5
1 Grunnlag	7
1.1 Kontinuumsmodellen	7
1.2 Gauss' integrasjonsteorem	7
1.3 Bevegelseslikningene til et fluid	8
2 Statikk	9
2.1 Atmosfæren	9
2.2 Inkompressibelt fluid	11
3 Konstant akselerasjon	12
3.1 Lineær akselerasjon	12
3.2 Uniform rotasjon	13
4 Eulers likning	14
4.1 1-dimensjonal bevegelse	14
4.2 3-dimensjonal bevegelse	14
5 Bernoullis likning	16
5.1 Strømlinjer	16
5.2 Bernoullis likning	16
5.3 Bernoulli fra Eulers likning	17
6 Friksjon, Navier-Stokes' likning	19
6.1 Heftbetingelsen (no-slip condition)	19
6.2 Navier-Stokes' likning	19
7 Konserveringslikninger	22
7.1 Impulsbalansen	23
7.2 Energibalansen	23
8 Strømfunksjonen ψ	25
8.1 Sammenhengen mellom ψ og virveling $\zeta \equiv \nabla \times \mathbf{V}$	25
8.2 Geometrisk betrakting av ψ	25
8.3 Sammenheng mellom ψ og volumfunksjonen Q	26
8.4 Sammenhengen mellom ζ og rotasjonshastigheten ω for et fluidelement	27
9 Hastighetspotensialet ϕ	28
9.1 Ekvipotensiallinjer er ortogonale til strømlinjer	28
10 Potensialstrømning	29
10.1 Uniform strømning	29
10.2 Singulariteter	29
11 Det komplekse potensial	34
11.1 Strømning gjennom en åpning	39

11.2 Strømning omkring en cylinder	42
11.3 Blasius' teorem	43
11.4 Kutta-Joukowskis teorem	44
Formelark for eksamen	45

Forord

Hensikten med dette kortfattede kompendiet er å gi en utledning av grunnlikningene i fluidmekanikken uten å benytte et tungt formelapparat. Lærebøkers utledninger vil vanligvis bygge på Reynolds' transport-teorem, som i og for seg er en elegant og fullstendig metode, men som kan være noe tøff for en student på andre årstrinn.

Grundigere utledninger finnes i for eksempel Frank M. Whites *Fluid Mechanics*, 8. utg. (McGraw-Hill 2016). Whites bok er en teknologisk bok med vekt på anvendelser. Eksempler på andre bøker skrevet mer spesielt for fysikere, og mer avansert matematisk, er

- L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon 1987);
- P. K. Kundu & I. M. Cohen, *Fluid Mechanics* (Elsevier 2004); og
- B. Lautrup, *Physics of Continuous Matter*, 2. utg. (2011).

Den første utgaven av dette kompendiet kom i 2010. I 2011-utgaven ble noen trykkfeil rettet opp, og kapitlene 8–10 lagt til. I 2012 ble det håndskrevne kompendiet først digitalisert, etter initiativ av Sigbjørn L. Bore, med en oppdatert versjon i 2014. I 2016 ble kompendiet igjen oppdatert og revidert av Andreas Ø. Svela, med opprettning av trykkfeil samt forbedring av enkelte forklaringer og den grafiske utformingen.

Vi håper kompendiet vil være til hjelp i arbeidet med fluidmekanikken. Lykke til med faget!

Trondheim, 29. januar 2016.

Iver H. Brevik Sigbjørn L. Bore Andreas Ø. Svela

Om tegnsettingen i kompendiet:

- Skalare størrelser er angitt i kursiv type, for eksempel *a*.
- Vektorer er angitt i fet type, for eksempel **a**.
- Enheter er angitt med normal type (roman), for eksempel $[g] = \text{ms}^{-2}$.
- Enhetsvektorer (vektorer med lengde 1) er markert med hatt (i tillegg til fet type), for eksempel $\hat{\mathbf{n}}$, $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$.
- For å markere at en størrelse er konstant, benyttes «KONST». Vær oppmerksom på at denne notasjonen kan benyttes flere ganger i samme avsnitt selv om konstanten kan være forskjellig fra likning til likning i det samme avsnittet.
- Referanser til likninger er markert med parentes, for eksempel likning (3.1).
- Referanser til figurer er markert uten parentes, for eksempel figur 3.1.

1 Grunnlag

1.1 Kontinuumsmodellen

Et fluid er en fellesbetegnelse på væske (liquid) og gass. Teorien bygger på kontinuumshypotesen (eller -modellen), som betyr at en betrakter systemet som et «utsmyrt» system, karakterisert ved massetetthet ρ , $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$. Hypotesen antas gyldig over et stort skalaområde. De minste systemene fluiddynamikk kan benyttes på er av størrelse noen hundre nanometer ($1000 \text{ nm} = 1 \mu\text{m} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$). I andre enden av skalaen kan fluiddynamikken også brukes i astrofysikken: Vår galakse inneholder $\sim 200 \cdot 10^9$ stjerner, og det er minst $200 \cdot 10^9$ stjerner i alt. Så i kosmologisk sammenheng er det fullt legitimt å betrakte vår galakse som ett massepunkt!

Hastigheten til et fluidelement med volum $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ skal vi kalle \mathbf{V} . Dens komponenter kalles (u, v, w) . Altså i kartesiske koordinater

$$\mathbf{V} = \hat{\mathbf{i}} u + \hat{\mathbf{j}} v + \hat{\mathbf{k}} w,$$

hvor $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ er enhetsvektorene i (x, y, z) retning. Generelt er \mathbf{V} tidsavhengig, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$ eller $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$. Strømningen er stasjonær dersom $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$. Vi vil ofte trenge nabla-operatoren, ∇ . For kartesiske koordinater er den som kjent gitt ved

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Dette er en operator, ikke et tall. Ved å ta skalarproduktet av ∇ og \mathbf{V} får en

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

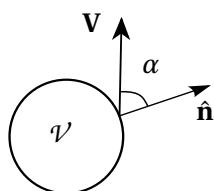
Dette er divergensen til \mathbf{V} , en skalar størrelse, altså et tall. Vi trenger også curl til \mathbf{V} ; curlen er en vektor. Vi skal skrive den slik: $\nabla \times \mathbf{V}$. Komponentene er

$$(\nabla \times \mathbf{V})_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (\nabla \times \mathbf{V})_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

1.2 Gauss' integrasjonsteorem

Betrakt en vilkårlig lukket integrasjonsflate med utoverrettet enhetsnormal $\hat{\mathbf{n}}$ (lengden av $\hat{\mathbf{n}}$ er altså lik $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$), se figur 1.1. Skalarproduktet av \mathbf{V} og $\hat{\mathbf{n}}$ på overflaten A er $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = V \cos \alpha$. Ved integrasjon av $\nabla \cdot \mathbf{V}$ over volumet V vil i følge Gauss' teorem (divergensteoremet)

$$\iiint_{\text{volum}} \nabla \cdot \mathbf{V} dV = \iint_{\text{overflate}} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA$$



Figur 1.1: Integrasjonsoverflate.

1.3 Bevegelseslikningene til et fluid

Bevegelseslikningene for et fluid er som for alle andre legemer, Newtons andre lov,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

hvor \mathbf{F} er kraften og \mathbf{a} er akselerasjonen, med enhetene $[\mathbf{F}] = \text{N}$, og $[\mathbf{a}] = \text{m s}^{-2}$. I fluidmekanikken er det vanlig å skrive akselerasjonsleddet på venstre side, og dessuten betrakte én masseenhed av fluidet. Altså $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{f}$, hvor \mathbf{f} er krafttetheten med enhet $[\mathbf{f}] = \text{Nm}^{-3}$, mens massen $m \rightarrow \rho$. Vi får dermed

$$\rho\mathbf{a} = \mathbf{f}. \quad (1.1)$$

Vi vil ta i betraktning følgende tre bidrag til krafttetheten \mathbf{f} (med engelske subscripter):

(i) **Trykkraft**, $\mathbf{f}_{\text{press}}$. Hvis trykket omkring et volumelement er ulikt i forskjellige retninger, vil det resultere i en trykkraft på elementet.

(ii) **Tyngdekraft**, \mathbf{f}_{grav} . Denne krafttetheten kan skrives

$$\mathbf{f}_{\text{grav}} = \rho\mathbf{g},$$

hvor $\mathbf{g} = (0, 0, g_z) = (0, 0, -g)$ med $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ er tyngdens akselerasjon og z -aksen regnet konvensjonelt positiv oppover.

(iii) **Viskøs kraft**, \mathbf{f}_{visc} , fra fluidets viskositet (eller seighet om du vil).

Innsatt i likning (1.1) gir dette

$$\rho\mathbf{a} = \mathbf{f}_{\text{press}} + \mathbf{f}_{\text{grav}} + \mathbf{f}_{\text{visc}}. \quad (1.2)$$

Vi vil komme tilbake til utrykkene for $\mathbf{f}_{\text{press}}$ og \mathbf{f}_{visc} senere. Først skal vi imidlertid behandle tilfellet hydrostatikk, $\mathbf{V} = 0$.

2 Statikk

Betrakt et skiveformet element av et fluid i ro, altså $\mathbf{V} = 0$. Elementet har et tverrsnitt A , høyden er dz , og det befinner seg i atmosfæren der $\rho = \rho(z)$. Figur 2.1 viser en skisse av elementet. Trykket p er en kraft fra omgivelsene på fluidelementet, per enhet av tverrsnittet. Trykket har enhet $[p] = \text{N m}^{-2} \equiv \text{Pa}$. Kraft på undersiden er pA , mens kraften på oversiden er $(p + dp)A$. Resulterende kraft $pA - (p + dp)A = -Adp$ i retning oppover må ved likevekt balansere tyngdekraften $\rho g Adz$ i retning nedover:

$$\begin{aligned} -Adp &= \rho g Adz \\ \iff \frac{dp}{dz} &= -\rho g \end{aligned} \quad (2.1)$$

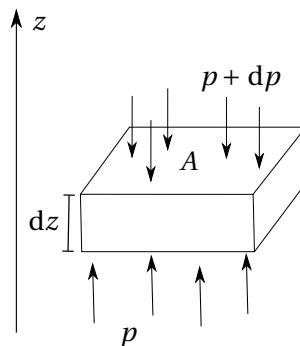
Dermed er $p = p(z)$, altså er trykket i uavhengig av x og y . Av dette følger en viktig setning i hydrodynamikken:

Trykket p er likt i samme horisontale plan ($z = \text{KONST}$), for en og samme væske.

Fra likning (2.1) ser en at krafttettheten kan skrives på vektorform som en gradient:

$$\mathbf{f}_{\text{press}} = -\nabla p$$

Merk at p er en skalar størrelse, ikke en vektor.



Figur 2.1: Skisse av et skiveformet fluidelement.

2.1 Atmosfæren

Standardatmosfæren er en fast, ideell atmosfære, som kan tjene som referanse i beregninger. Den gir et rimelig bilde av virkeligheten i de fleste tilfeller. For standardatmosfæren er temperaturen ved havoverflaten definert til $t_0 = 15^\circ\text{C}$, det vil si $T_0 = t_0 + 273 = 288\text{K}$. Av størst interesse er troposfæren, som strekker seg opp til høyden $z = 11\text{ km}$. I denne delen av atmosfæren av temperaturen $T(z)$ lineært med høyden. Temperaturfallet i troposfæren er omtrent $6,5\text{ K km}^{-1}$, altså kan temperaturen uttrykkes slik:

$$T(z) = T_0 - Bz, \quad (2.2)$$

der $B = 0,0065\text{ Km}^{-1}$.

Tropopausen ligger i (det tilnærmede) knekkpunktet. På oversiden av knekkpunktet ligger standard stratosfære, hvor temperaturen settes lik $t_s = -66,5^\circ\text{C}$ opp til en høyde cirka $z = 20\text{ km}$.

Tilstandslikningen i aerodynamikken skrives vanligvis slik:

$$p = \rho RT. \quad (2.3)$$

Dette betyr at vi betrakter én masseenhet, med volum $1/\rho$. Videre er R den *spesifikke* gasskonstanten, som i SI-enheter er gitt ved $R = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$. Merk at likning (2.3) medfører at

$$\frac{p}{\rho T} = \text{KONST.}$$

Ofte er det nyttig å skrive avsnitt 2.1

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0}, \quad (2.4)$$

der indeks 0 refererer til havoverflaten, $z = 0$, eller en annen høyde der p, ρ, T er kjente.

Trykkvariasjonen $p = p(z)$ i stratosfæren finnes ved å bruke likning (2.1) og sette inn for likningene (2.2) og (2.3):

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dz = -\frac{g}{R(T_0 - Bz)} dz.$$

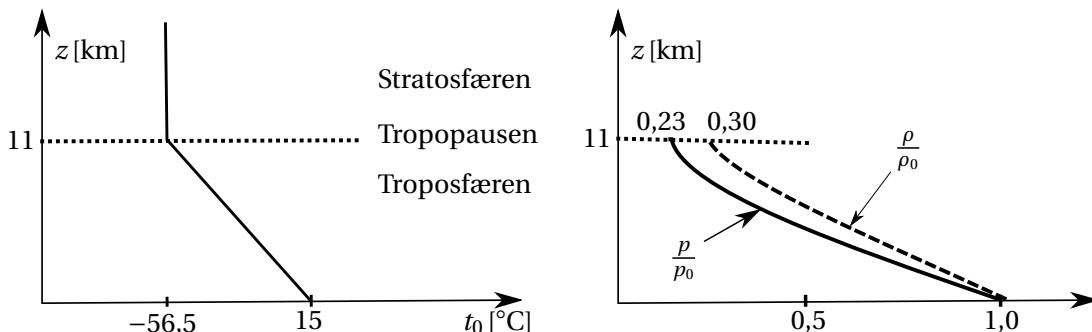
Denne likningen kan nå integreres, slik at

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^p \frac{dp^*}{p^*} &= -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz^*}{T_0 - Bz^*} \\ \iff \ln \frac{p}{p_0} &= \frac{g}{RB} \ln \frac{T}{T_0} = \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g}{RB}} \\ \iff \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5,26}. \end{aligned}$$

Ved å benytte likning (2.4), finnes da det tilsvarende tetthetsforholdet

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{4,26},$$

skissert sammen med trykkforholdet i figur 2.2b.



(a) Graf over hvordan temperaturen varierer med høyde i de ulike lagene av atmosfæren.

(b) Graf over hvordan trykket og tettheten varierer med høyde i troposfæren.

Figur 2.2: Standardatmosfærens temperatur, trykk og tetthet.

2.2 Inkompresibelt fluid

Med et inkompresibelt fluid menes et fluid med konstant volum uavhengig av ytre trykk, altså der $\rho = \text{KONST}$. Væsker vil ved normalt trykk stort sett regnes som inkompresible, mens gasser som oftest er kompressible, da volumet avhenger av trykket. Når en har inkompresible fluider innføres ofte den spesifikke tyngden med symbolet γ og $[\gamma] = \text{Pam}^{-1}$:

$$\gamma = \rho g = \text{KONST}.$$

Likning (2.1) gir

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma,$$

som ved integrasjon gir

$$p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1).$$

3 Konstant akselerasjon

Ved konstant akselerasjon kan en ofte behandle problemene enkelt ved bruk av hydrostatikk.

3.1 Lineær akselerasjon

Betrakt vognen i figur 3.1. Bevegelseslikning sett fra lab-systemet er

$$\rho \mathbf{a} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}.$$

Ved å dele på ρ og flytte akselerasjonsleddet over til høyre får en

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} - \mathbf{a}. \quad (3.1)$$

Betrakter så denne likningen slik: Ettersom likning (3.1) er bevegelseslikningen i det medfølgende koordinatsystem – altså i et referansesystem der forholdene er statiske – er det riktig at venstre side av likning (3.1) (akselerasjonsleddet) er lik null. På høyre side opptrer de kjente kretene $-(\nabla p)/\rho$ per masseenhett fra trykk, og gravitasjonskraften \mathbf{g} . Siste ledd $-\mathbf{a}$ i likning (3.1) er imidlertid en ny, fiktiv kraft, forårsaket av akselerasjonen.

Likning (3.1) kan integrereres ved å benytte sammenhengene i likningene:

$$\begin{aligned} \rho = \text{KONST} &\implies \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right); \\ \nabla z = \hat{\mathbf{k}} &\implies \mathbf{g} = -g \nabla z = -\nabla(gz); \\ \nabla x = \hat{\mathbf{i}} &\implies \mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} = a_x \nabla x = \nabla(xa_x); \end{aligned}$$

samt ved likning (3.1), får en at

$$0 = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla(gz) - \nabla(xa_x).$$

Ettersom derivasjon er en lineær operator kan nabla trekkes på utsiden:

$$0 = \nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz + xa_x \right),$$

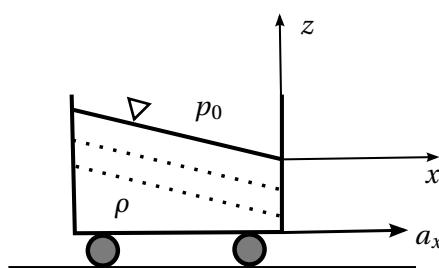
som ved integrasjon gir

$$\frac{p}{\rho} + gz + xa_x = \text{KONST} = C. \quad (3.2)$$

Verdien av konstanten C vil avhenge av problemet. Hvis origo legges som i figur 3.1, har en randbetingelsene $p = p_0$ for $x = z = 0$, som innsatt i likning (3.2) gir $C = p_0/\rho$.

Fra likning (3.2) har en da at for isobarer, $p = \text{KONST}$, gjelder

$$gz + xa_x = \text{KONST}.$$



Figur 3.1: Illustrasjon av en vogn som inneholder væske av tetthet ρ og utsettes for uniform akselerasjon a_x i x -retning.

3.2 Uniform rotasjon

Betrakter fluidet i figur 3.2 i det medfølgende, roterende system, der $\hat{\mathbf{e}}_r \equiv \hat{\mathbf{r}}$ er enhetsvektoren radielt utover. Sentrifugalkraften per masseenhett er $r\Omega^2 \hat{\mathbf{e}}_r$. Ettersom akselerasjonen av fluidet i det roterende system er null, blir bevegelseslikningen

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \underbrace{r\Omega^2 \hat{\mathbf{e}}_r}_{\text{fiktiv kraft som før}}. \quad (3.3)$$

Integratorer deretter likning (3.3): Som før er

$$\frac{1}{\rho} = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad \text{og} \quad g = -\nabla(gz).$$

Da $\nabla r^2 = 2r \hat{\mathbf{e}}_r$, blir $r \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{2} \nabla r^2$, altså $r\Omega^2 \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{2} \Omega^2 \nabla r^2 = \nabla \left(\frac{1}{2} r^2 \Omega^2 \right)$. Da blir likning (3.3)

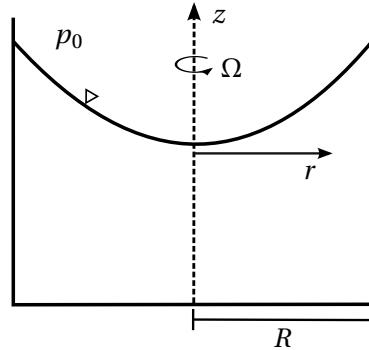
$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla(gz) + \nabla \left(\frac{1}{2} r^2 \Omega^2 \right) \\ \implies 0 &= \nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz - \frac{1}{2} r^2 \Omega^2 \right) \end{aligned}$$

som gir

$$\frac{p}{\rho} + gz - \frac{1}{2} r^2 \Omega^2 = \text{KONST} = C.$$

Hvis $p = p_0$ ved $z = r = 0$ som i figur 3.2, blir $C = p_0/\rho$. Isobarene, $p = \text{KONST}$, er gitt ved $gz - \frac{1}{2} r^2 \Omega^2 = \text{KONST}$, eller

$$z = \frac{1}{2g} r^2 \Omega^2 + \text{KONST}.$$



Figur 3.2: Illustrasjon av et uniformt roterende kar med radius R , vinkelfrekvens Ω og et atmosfæretrykk p_0 . Avstanden fra rotasjonsaksen er angitt med symbolet r .

4 Eulers likning

Vi skal nå se på de sentrale bevegelseslikningene, med utgangspunkt i lab-systemet. Den første av dem er Eulers likning, som forutsetter at fluidets viskositet er neglisjerbart, $\mathbf{a}_{\text{visc}} = 0$. Vi setter opp

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{press}} + \mathbf{a}_{\text{grav}} + \mathbf{a}_{\text{visc}} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + 0. \quad (4.1)$$

Vi ønsker å uttrykke \mathbf{a} ved den deriverte av \mathbf{V} . Generelt er

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

4.1 1-dimensjonal bevegelse

Se først på det enkle tilfellet i figur 4.1, der fluidet beveger seg langs x -aksen. Fluidhastigheten \mathbf{V} har kun x -komponent, dermed er $\mathbf{V} = u \hat{\mathbf{i}}$. I punkt A er $u_A = u(t, x)$, mens hastigheten i punkt B er $u_B = u(t + \Delta t, x + \Delta x)$. Hastighetsforskjellen er dermed $\Delta u = u_B - u_A = u(t + \Delta t, x + \Delta x) - u(t, x)$. Tar grensen $\Delta t \rightarrow dt$, $\Delta x \rightarrow dx$ og taylorutvikler til første orden:

$$\begin{aligned} u(t + dt, x + dx) &= u(t, x) + dt \frac{\partial u}{\partial t} + dx \frac{\partial u}{\partial x} \\ \implies \Delta u \rightarrow du &= dt \frac{\partial u}{\partial t} + dx \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Divider så med dt , benytter $du/dt = a_x$ (likning (4.2)) og $dx/dt = u$. Dette gir

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

4.2 3-dimensjonal bevegelse

Anta nå at hastighetskomponenten u er avhengig av alle tre koordinatene x , y og z i tillegg til tiden: $u = u(t, x, y, z)$. Utvikler til første orden slik som før:

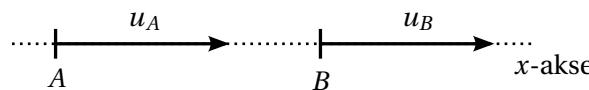
$$\begin{aligned} u(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz) &= u(t, x, y, z) + dt \frac{\partial u}{\partial t} + dx \frac{\partial u}{\partial x} + dy \frac{\partial u}{\partial y} + dz \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \implies du &= dt \frac{\partial u}{\partial t} + dx \frac{\partial u}{\partial x} + dy \frac{\partial u}{\partial y} + dz \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

Divider med dt og benytter $\partial u / \partial t = a_x$, samt

$$\mathbf{V} = u \hat{\mathbf{i}} + v \hat{\mathbf{j}} + w \hat{\mathbf{k}} = \frac{\partial x}{\partial t} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial t} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial t} \hat{\mathbf{k}},$$

som gir at

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}.$$



Figur 4.1: Illustrasjon av 1-dimensjonal bevegelse ved punktene A og B , med hastighetene u_A og u_B oppgitt.

Det samme resonnementet gjelder for alle de tre komponentene, og dermed kan u erstattes med den fulle hastighet \mathbf{V} :

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}.$$

Dette er det generelle utrykk for \mathbf{a} . Det kan skrives på mer kompakt form ved å utnytte nabla-operatoren, ∇ . Produktet

$$\begin{aligned}\mathbf{V} \cdot \nabla &= (\hat{\mathbf{i}}u + \hat{\mathbf{j}}v + \hat{\mathbf{k}}w) \cdot \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}$$

$\mathbf{V} \cdot \nabla$ er en *operator*. Hvis operatoren anvendes på vektoren \mathbf{V} , får en

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}.$$

Dette er jo det samme som de tre siste leddene i avsnitt 4.2. Altså kan avsnitt 4.2 også skrives på den mer kompakte formen

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}.$$

Akselerasjonsvektoren kan deles opp i to bidrag $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{local}} + \mathbf{a}_{\text{conv}}$, der $\mathbf{a}_{\text{local}} = \partial \mathbf{V} / \partial t$ er den lokale hastighetsendringen i en fast posisjon x , y og z , mens $\mathbf{a}_{\text{conv}} = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ er den konvektive hastighetsendringen ved at fluidet beveger seg fra punkt A til B . Likning (4.1) blir da

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (4.3)$$

Dette er *Eulers likning*, med følgende forutsetninger:

- null (neglisjerbar) viskositet;
- ellers ingen spesielle begrensninger. Altså tillater likningen kompressibelt fluid (og er derfor nyttig for gasser). Det er heller intet krav til $\nabla \times \mathbf{V}$.

5 Bernoullis likning

Et av de mest nyttige teoremmene i hydrodynamikken ble oppdaget av Daniel Bernoulli i 1738. Bernoullis likning uttrykker energibalanse for en ikke-viskøs væske. Vi trenger først å definere begrepet strømlinjer.

5.1 Strømlinjer

Vi antar stasjonær strømning. En strømlinje er definert ved at dens tangent har samme retning som fluidets hastighet i punktet.

Strømlinjens deriverte er lik dy/dx . Det er det samme som forholdet v/u mellom hastighetskomponentene. Altså

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (5.1)$$

Hvis $u = u(x, y)$ og $v = v(x, y)$ er kjente funksjoner, kan strømlinjebildet $y = y(x)$ finnes av likning (5.1) ved integrasjon. For en stasjonær strømning er strømlinjene det samme som banelinjene (path lines). Banelinjer er de baner som fluidpartiklene følger.

5.2 Bernoullis likning

En enkel utledning er som følger: Vi betrakter strømningsrøret i figur 5.2. Trykkraften på elementets venstre side er pA , og på høyre side $-(p + dp)A$ (endringen i A fra venstre til høyre side er neglisjerbar). Netto trykkraft i strømrørets lengderetning er altså $-Adp$, som ifølge Newtons andre lov må være lik massen $\rho A dl$ av elementet multiplisert med akselerasjonen dV/dt :

$$\begin{aligned} -Adp &= \rho A dl \frac{\partial V}{\partial t} \\ \Rightarrow -\frac{dp}{\rho} &= dl \frac{dV}{dt} = V dV \end{aligned}$$

Integrasjon langs strømlinjen, og antakelse om ρ konstant (altså inkompresibelt fluid) gir

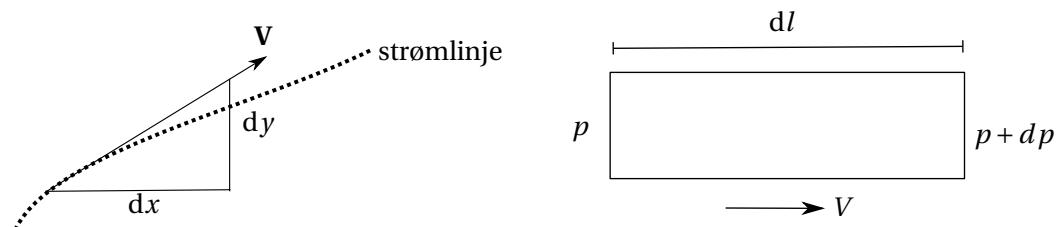
$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 = \text{KONST.} \quad (5.2)$$

Konstanten kan ha forskjellig verdi fra strømlinje til strømlinje. Likning (5.2) skrives ofte

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{KONST.}$$

Hvis tyngdekrefter inkluderes, får en

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = \text{KONST,}$$



Figur 5.1: Strømlinje i 2 dimensjoner, x og y .

Figur 5.2: Tynt strømningsrør med tverrsnitt A , hvor fluidelementets hastighet er V .

som er *Bernoullis likning*. Utgangspunktet for Bernoullis likning er altså kraftbalanse og deretter integrasjon, med andre ord er den et uttrykk for energibalanse langs strømlinjer. Forutsetningene for Bernoullis likning er:

- inkompresibelt fluid;
- ikke-viskøst (taps-fritt) fluid;
- stasjonært hastighetsfelt ($\partial \mathbf{V} / \partial t = 0$);
- gjelder langs strømlinje;
- men dersom strømningen er curl-fri, $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, gjelder Bernoulli *mellan vilkårlige punkter*, som vises i neste avsnitt.

5.3 Bernoulli fra Eulers likning

Ved stasjonær strømning, $\partial \mathbf{V} / \partial t = 0$, blir Eulers likning (4.3)

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}.$$

Med antakelse om inkompresibelt fluid er $(\nabla p) / \rho = \nabla(p/\rho)$. Som tidligere er også $\mathbf{g} = -\nabla(gz)$. Benytter en vektoridentitet fra matematikken:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 \right) - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\zeta},$$

der $\boldsymbol{\zeta}$ er virvlingen (vorticity)

$$\boldsymbol{\zeta} \equiv \nabla \times \mathbf{V}. \quad (5.3)$$

Kan nå skrive Eulers likning som

$$\nabla \left(\frac{1}{2} V^2 \right) - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\zeta} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla(gz).$$

Deriverer langs strømlinjen: Bidraget fra $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\zeta}$ blir null, fordi dette kryssproduktet er ortogonalt til strømlinjen. Dermed står en igjen med

$$d \left(\frac{1}{2} V^2 \right) = -d \left(\frac{p}{\rho} \right) - g dz,$$

som ved integrasjon langs strømlinjen gir

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{KONST}$$

Altså har vi kommet frem til samme resultat som i forrige avsnitt.

Her skal vi nevne et **viktig spesialtilfelle**: ved curl-fri strømning, altså virvling $\boldsymbol{\zeta} = 0 \iff \nabla \times \mathbf{V} = 0$. I dette tilfellet er det likegyldig om vi betrakter en strømlinje eller ikke ettersom bidraget fra ledet $\boldsymbol{\zeta} = 0$ simpelthen blir null. Derfor, for curl-fri strømning gjelder Bernoulli mellom to *vilkårlige* punkter.

Eksempel 5.1: Virvel med delt forskrift

Gitt en 2-dimensjonal strømning i horisontalplanet, som vist i figur 5.3, skal vi finne $p(r)$. Benytter plane polarkoordinater r og θ . Strømningen består av to deler, et indre og et ytre område:

$$V_\theta = \begin{cases} r\omega, & r \leq r_0 \\ A/r, & r > r_0 \end{cases} \quad (5.4)$$

der ω, A er konstanter. Strømningen i det ytre området ($r > r_0$) kalles en naturlig virvel.

Vi bestemmer først konstanten A ved at V_θ må være kontinuerlig ved $r = r_0$:

$$r_0\omega = \frac{A}{r_0} \implies A = r_0^2\omega$$

Virveling er som vanlig gitt ved likning (5.3). Her vil virvelingen kun ha z -komponent, generelt i sylinderkoordinater gitt ved

$$\zeta_z = (\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta}.$$

I dette tilfellet, med $V_r = 0$ og V_θ som i likning (5.4), har en da følgende

$$\zeta_z = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2\omega) = 2\omega, & r < r_0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{A}{r}) = 0, & r > r_0. \end{cases}$$

Altså diskontinuerlig virveling ved $r = r_0$. Dette er fullt mulig, i motsetning til trykket som alltid må være kontinuerlig.

Starter med Bernoulli i det ytre området. Velger $r = \infty$ som referansepunkt. For $r > r_0$ kan vi skrive direkte:

$$p(r) + \frac{1}{2} \rho V_\theta^2(r) = p_\infty + \underbrace{V_\theta^2(\infty)}_{\rightarrow 0} \implies p(r > r_0) = p_\infty - \frac{1}{2} \rho \frac{r_0^4 \omega^2}{r^2}$$

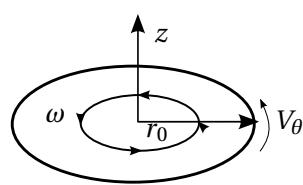
For $r \leq r_0$ må vi benytte Eulers likning:

$$-\frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

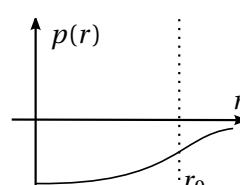
Innsetting av $V_\theta = r\omega$, samt integrasjon med hensyn på r gir $p(r) = (1/2)\rho r^2 \omega^2 + C$. Trykket er kontinuerlig ved $r = r_0$, dermed

$$\frac{1}{2} \rho r_0^2 \omega^2 + C = p_\infty - \frac{1}{2} \rho \frac{r_0^4 \omega^2}{r_0^2} \implies C = p_\infty - \rho r_0^2 \omega^2$$

$$p(r \leq r_0) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (r^2 - r_0^2) + p_\infty$$



Figur 5.3: Indre område av strømning i horisontalplanet.



Figur 5.4: Grafer over $p(r)$.

6 Friksjon, Navier-Stokes' likning

Friksjon kalles i fluidmekanikken for viskositet (viscosity). Et utgangspunkt for å diskutere effekten er ved å se på den såkalte *Couette-strømningen*, illustrert i figur 6.1.

Jo seigere væsken er, jo større kraft må en utøve på øvre flate for å opprettholde hastighet V . Betrakt et vilkårlig, horisontalt snitt AA' i væsken: Væsken på oversiden beveger seg litt fortare enn på undersiden. På AA' virker derfor en horizontal kraft i motsatt retning av bevegelsen. Kraft per flateenhet kalles skjærspenning (shear stress), med standardsymbolet τ og benevning lik som for trykk, nemlig $[\tau] = \text{N m}^{-2} = \text{Pa}$. Skjærspenningen blir større for økende verdier av hastighetsgradienten du/dy , ettersom større hastighetsgradient gir større relativ glidningshastighet. Enkleste mulighet er å anta at τ og du/dy er proporsjonale:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

Dette er Newtons friksjonslov. Konstanten μ , den dynamiske viskositet, har dimensjon $[\mu] = \text{Pas}$.

6.1 Heftbetingelsen (no-slip condition)

Ved en fast overflate er væskens hastighet i forhold til overflatene lik null. Ved nedre overflate altså $u(0) = 0$; ved øvre flate hvor $y = h$ er $u(h) = V$. En fri overflate er ikke i stand til å opppta skjærspenninger, altså

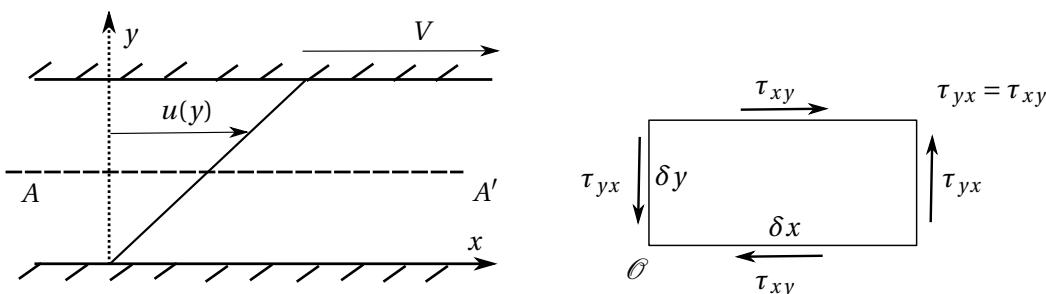
$$\tau \Big|_{\text{overflate}} = \mu \frac{du}{dy} \Big|_{\text{overflate}} = 0.$$

6.2 Navier-Stokes' likning

Vi betrakter det mer generelle tilfellet hvor en viskøs væske er i vilkårlig bevegelse. Anta 2-dimensjonal strømning som før.

Notasjonen er generell: τ_{xy} er kraften i x -retning når sidens normalvektor peker i y -retning, osv. La et lite element ha volum $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ og la punktet \mathcal{O} med koordinatene x, y ligge i venstre nedre hjørne, som illustrert i figur 6.2. Horizontal kraft mot høyre på elementets øvre kant er $\tau_{xy}(y + \delta y) \delta x \delta z$, hvor δz er utstrekningen inn i planet. Denne kraften virker mot høyre (som på figurens overside) dersom τ_{xy} er positiv. Tilsvarende er horizontal kraft mot venstre på elementets nedre kant $\tau_{xy}(y) \delta x \delta z$. Resulterende kraft på elementet i x -retning er altså:

$$f_{\text{visc},x} \delta V = \tau_{xy}(y + \delta y) \delta x \delta z - \tau_{xy}(y) \delta x \delta z.$$



Figur 6.1: 2-dimensjonal strømning mellom to planter. Nedre plate ligger i ro, mens øvre plate beveger seg med konstant hastighet V i x -retningen. I mellomplanet er horisontal fluidhastighet $u = u(y)$.

Figur 6.2: Fluidelement med volum $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ og skjærspenninger tegnet inn.

Første ordens Taylorutvikling av τ_{xy} :

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(y + \delta y) &= \tau_{xy}(y) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \delta y \\ \implies f_{\text{visc},x} \delta \mathcal{V} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \delta \mathcal{V}.\end{aligned}$$

Avsnitt 6 tilsvarer i denne notasjonen

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \implies \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{\text{visc},x}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Dette kan generaliseres: Den viskøse krafttettheten \mathbf{f}_{visc} er på formen

$$\mathbf{f}_{\text{visc}} = \mu \mathcal{R} \mathbf{V},$$

Hvor operatoren \mathcal{R} er rotasjonsinvariant, det vil si uavhengig av orienteringen til aksene x, y og z . Fra likning (6.1) ser vi at den naturlige utvidelsen av $\partial^2/\partial y^2$ er

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \nabla^2.$$

Altså generelt er

$$\mathbf{f}_{\text{visc}} = \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

Alle ledd i den generelle bevegelseslikning (1.2) er nå kjent:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{V},$$

eller

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$$

Dette er *Navier-Stokes' likning*, der $\nu \equiv \mu/\rho$ er den kinematiske viskositet, $[\nu] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Legg merke til at det er den greske bokstaven ν som brukes for den kinematiske viskositeten. Den er ikke lik en vanlig enkelt- v , v , som gjerne beskriver hastighetskomponent i y -retning, altså $v \neq \nu$. Forutsetninger for N-S-likning:

- μ er konstant (newtonsk væske);
- ρ er konstant (inkompressibel væske);
- men stiller intet krav til $\nabla \times \mathbf{V}$.

Det mer generelle tilfellet med kompressibel væske behandles for eksempel i Landau-Lifshitz: Fluid Mechanics.

Eksempel 6.1: Væskefilm på skråplan

Skal finne væskefilmens hastighet u . Filmens tykkelse er h . Aksene er som vist i figur 6.3, med x -akse langs skråplanet. Antar stasjonære forhold. Strømningen opprettholdes av tyngden alene. Trykket p må derfor være uavhengig av x -posisjon, ettersom fluidet drives av gravitasjon alene (intet ytre trykk), altså $p = p(y)$. Farten u er likadan, altså $u = u(y)$. Ingen akselerasjon, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Setter atmosfæretrykket $p_0 = 0$.

$$\text{N-S, } x\text{-retning: } 0 = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0, \text{ trykket uavhengig av } x} + g_x + \nu \nabla^2 u.$$

$$\text{N-S, } y\text{-retning: } 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu \underbrace{\nabla^2 v}_{=0, \text{ ettersom } v = 0}.$$

Her er $g_x = g \sin \alpha$, $g_y = g \cos \alpha$ og $\nabla^2 u = d^2 u / dy^2$. Altså

$$\text{N-S, } x\text{-retning: } \Leftrightarrow 0 = g \sin \alpha + v \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (6.2)$$

$$\text{N-S, } y\text{-retning: } \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \alpha. \quad (6.3)$$

Av likning (6.3) er

$$p = -\rho g y \cos \alpha + C_1$$

og da $p = p_0 = 0$ for $y = h$ kan C_1 bestemmes, slik at

$$p = \rho g h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cos \alpha.$$

Av likning (6.2) er $d^2 u / dy^2 = -g / v \sin \alpha$. Integrasjon gir

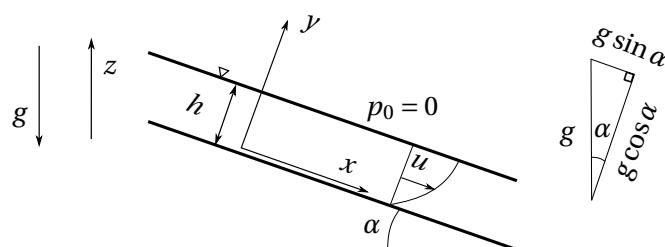
$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{gy}{v} \sin \alpha + C_2.$$

Da $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0$ følger $C_2 = gh/v \sin \alpha$. Ny integrasjon og innsetting av C_1 gir

$$u = -\frac{gy}{2v} \sin \alpha + \frac{gh}{v} y \sin \alpha + C_3.$$

$u = 0$ for $y = 0$ gir $C_3 = 0$, og dermed

$$u = \frac{gh}{v} y \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \sin \alpha .$$



Figur 6.3: Væskefilm med konstant tykkelse h som renner nedover et skråplan med vinkel α .

7 Konserveringslikninger

Betrakt et vilkårlig volum \mathcal{V} med overflate A , slik som i figur 7.1. La $\hat{\mathbf{n}}$ være enhetsnormal utover ($|\hat{\mathbf{n}}| = 1$). Strømtettheten (også kalt massefluksstettheten eller impulsstettheten, tenk over hvorfor?¹) er $\dot{m} = \rho\mathbf{V}$ og har benevning $[\dot{m}] = \text{kg s}^{-1} \text{ m}^{-2}$ Masse per tidsenhet gjennom overflatelementet dA er $\rho\mathbf{V} \cos \alpha = \rho\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Anta at \mathcal{V} har en INN-seksjon og en UT-seksjon slik som i figur 7.2. Da er

$$\begin{aligned}\text{massefluks inn: } \dot{m}_{\text{INN}} &= - \int_{\text{INN}} \rho\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA, \\ \text{massefluks ut: } \dot{m}_{\text{UT}} &= \int_{\text{UT}} \rho\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA.\end{aligned}$$

Netto massetilførsel til volumet:

$$\begin{aligned}\dot{m}_{\text{INN}} - \dot{m}_{\text{UT}} &= - \int_{\text{INN}} \rho\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA - \int_{\text{UT}} \rho\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \\ &= - \oint \rho\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = - \int \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V}.\end{aligned}$$

Økningen i masse kan alternativt skrives som $\int \partial\rho/\partial t d\mathcal{V}$. Altså

$$\int \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) \right] d\mathcal{V} = 0$$

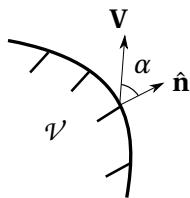
Da \mathcal{V} er vilkårlig, må integranden være null:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0 \quad (7.1)$$

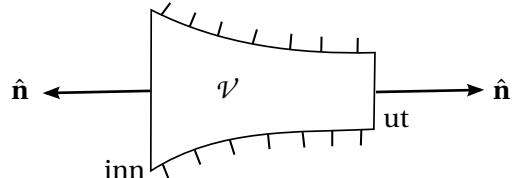
Dette er kontinuitetslikningen på differensiell form. For inkompressibelt fluid, ρ konstant, gir likning (7.1) at

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Vi tester altså for inkompressibilitet simpelthen ved å regne ut $\nabla \cdot \mathbf{V}$.



Figur 7.1: Integrasjonsoverflaten A på et volum \mathcal{V} . Normalvektoren $\hat{\mathbf{n}}$, samt vinkelen α er tegnet inn.



Figur 7.2: Volum med inn- og utseksjon.

¹Forklaring (ikke les meg før du har tenkt selv):

Massefluksstetthet forteller hvor mye masse som strømmer (fluks: altså flytter seg per tid) over et gitt tverrsnitt (derav tetthet). Altså trengs enhetene kg s^{-1} og m^{-2} .

Impulstetthet: impuls kalles også bevegelsesmengde og er som kjent masse ganger hastighet. Dermed forteller impulstettheten hvor stor tettheten er av impuls i gitt volum, altså trengs enhetene kg m s^{-1} og m^{-3} .

7.1 Impulsbalansen

Betrakt en stasjonær, inkompressibel strømning. Vi skriver summen av alle kreftene som virker på fluidet inne i kontrollvolumet (CV) på formen $\sum \mathbf{F}$. Da impulsen til vannet (fluidet) inne i CV ikke endres med tiden ettersom strømmen er stasjonær, må $\sum \mathbf{F}$ være lik impulsfluksen $\dot{\mathbf{M}}_{\text{UT}}$ av vannet ut av CV, minus impulsfluksen $\dot{\mathbf{M}}_{\text{INN}}$ inn i CV.

Impulstetthet (eller masseflukstetthet osv.) er $\rho \mathbf{V}$. Impulsflukstetthet er ρV^2 . Impulsfluktetthet langs normalen $\hat{\mathbf{n}}$ er

$$\rho V^2 \cos \alpha = \rho V (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}),$$

eller på fullverdig vektorform: $\rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}})$. Den totale impulsfluks ut dermed

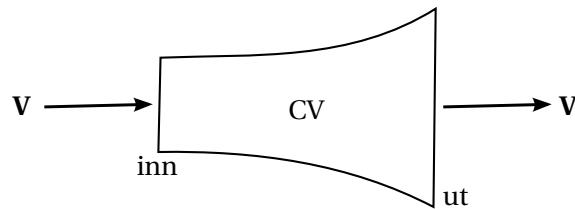
$$\dot{\mathbf{M}}_{\text{UT}} = \oint_{\text{UT}} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA.$$

Tilsvarende defineres impulsfluks inn:

$$\dot{\mathbf{M}}_{\text{INN}} = - \oint_{\text{INN}} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA.$$

Impulsbalansen blir dermed

$$\sum \mathbf{F}_{\text{på fluidet}} = \dot{\mathbf{M}}_{\text{UT}} - \dot{\mathbf{M}}_{\text{INN}}.$$



Figur 7.3: Kontrollvolum med strømning gjennom.

7.2 Energibalansen

Stasjonær, inkompressibel strømning som ovenfor. Starter med Bernoulli:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2. \quad (7.2)$$

Bernoulli forutsetter intet arbeid og intet tap, men likning (7.2) kan generaliseres: La w_s være nyttig arbeid (shaft work) per masseenhed, og skriv friksjonstapet som gh_f , der h_f kalles friksjonshøyden (head loss). Da blir energibalansen

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2 + w_s + gh_f,$$

ettersom noe av fluidets energi ved punkt 1 går med til friksjonstap og nyttig arbeid før fluidet kommer til punkt 2.

Eksempel 7.1: Strømning mellom to åpne basseng

a) Energilikning 1 → 2, ved fri strømning mellom bassengene:

$$\frac{p_1}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V_1^2}_{\approx 0} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \underbrace{\frac{1}{2}V_2^2}_{\approx 0} + gz_2 + \underbrace{w_s}_{=0} + gh_f$$

$$\Rightarrow h_f = z_1 - z_2 = 40 \text{ m}$$

Friksjonshøyde er altså lik geometrisk høydeforskjell.

Merk:

- Energitap per masseenhett: gh_f
- Energitap per volumenhett: ρgh_f
- Energitap per tidsenhett: $\rho gh_f Q$

b) Anta at samme vannmengde pumpes opp fra 2 til 1. Hva er pumpeeffekten? Energilikning 2 → 1:

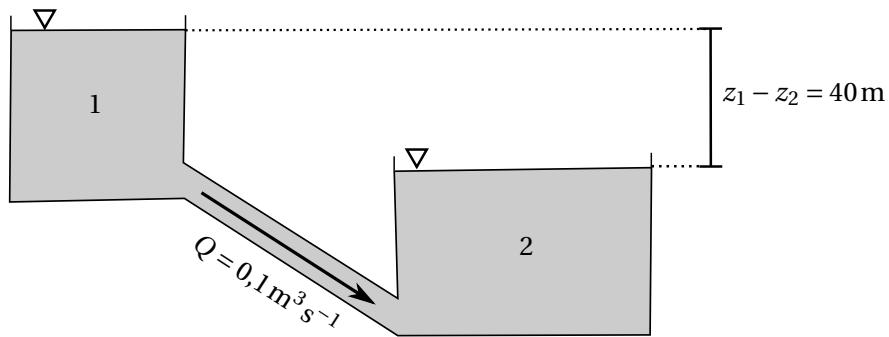
$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 + w_s + gh_f.$$

$$\Rightarrow -w_s = g(z_1 - z_2) + gh_f.$$

Negligerer tap i pumpen $\Rightarrow h_f = 80 \text{ m}$ som før selv om strømningen er reversert. Gir at:

$$\frac{w_s}{g} = 40 \text{ m} + 40 \text{ m} = 80 \text{ m.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Pumpeeffekt } P = \rho(-w_s)Q = 10^3 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 0,1 \text{ W} = 80 \text{ kW}}$$



Figur 7.4: To åpne basseng tilknyttet hverandre med et rør. Volumstrømmen Q og høydeforskjellen $z_1 - z_2$ er gitt.

8 Strømfunksjonen ψ

De vektorielle grunnlikningene – Euler og Navier-Stokes – kan være vanskelige å løse. Derfor ønsker vi å finne skalare likninger som kan benyttes i stedet for vektorlikningene, dersom det er mulig. Til dette brukes de to skalare funksjonene: strømfunksjonen ψ og hastighetspotensialet ϕ . Vi skal i dette kapitlet betrakte ψ .

Anta at strømningen er todimensjonal og stasjonær. I kartesiske koordinater altså, $\psi = \psi(x, y)$. Anta videre at strømningen er inkompressibel, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ (Vanligvis vil ψ bli benyttet bare i slike tilfeller). Med $\mathbf{V} = (u, v)$, vil hastighetskomponentene u og v være gitt som

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (8.1a)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8.1b)$$

Disse uttrykkene definerer strømfunksjonen² ψ i kartesiske koordinater. Merk at ψ ikke er entydig bestemt: En kan ha $\psi \rightarrow \psi + \text{KONST}$ uten at det har innvirkning på u og v . Likningene (8.1) oppfyller kontinuitetslikningen automatisk ved definisjonen:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

8.1 Sammenhengen mellom ψ og virveling $\zeta \equiv \nabla \times \mathbf{V}$

Av interesse er ζ_z , komponenten av ζ vinkelrett på bevegelsesplanet. Regner ut

$$\zeta_z = (\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi$$

Altså

$$\nabla^2 \psi = -\zeta_z \quad (8.2)$$

i kartesiske koordinater. Dette er altså *ikke* en vektorlikning og dermed *ikke* gyldig i alle koordinatsystemer. Den gjelder blant annet i kartesiske og planpolare koordinater, men *ikke* i aksialsymmetriske koordinater.

8.2 Geometrisk betrakting av ψ

Betrakt en kurve som i figur 8.1 hvor strømfunksjonen $\psi(x, y)$ er konstant, det vil si $d\psi = 0$ langs kurven. Dermed er

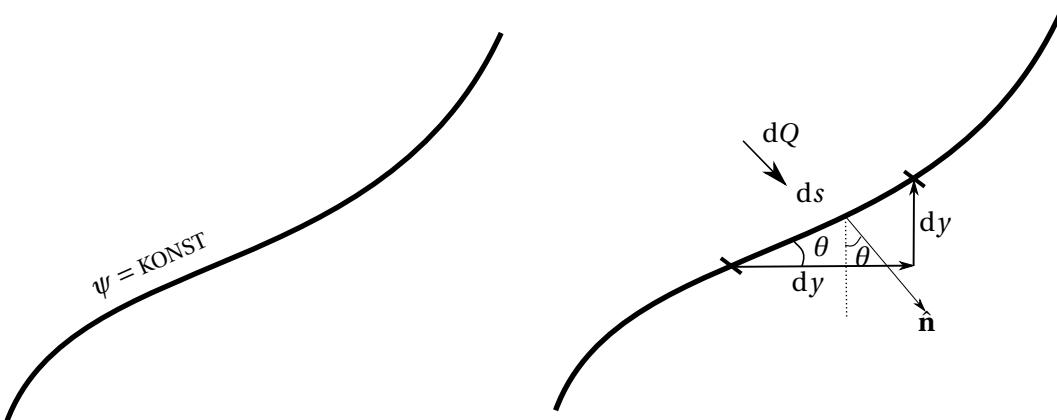
$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0,$$

og videre

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi} = -\frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y} = \frac{v}{u}$$

ifølge likning (8.1). Men v/u er jo det samme som vinkelkoeffisientene dx/dy for strømlinjer, se likning (5.1). Altså: $\psi = \text{KONST}$ langs en strømlinje i *stasjonær strømning*.

²Matematisk sidebenevnning: Definisjonslikningene (8.1) betyr at en innfører det såkalte vektorpotensial, vanligvis kalt \mathbf{A} . Her er $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = (0, 0, \psi)$. Hastigheten følger som $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$.

**Figur 8.1:** Kurve til strømfunksjonen ψ .**Figur 8.2:** Differensielt linjeelement og differensiell volumstrøm.

8.3 Sammenheng mellom ψ og volumfunksjonen Q

Betrakt et linjeelement ds på en vilkårlig linje. Hastighetsvektoren $\mathbf{V} = \hat{\mathbf{i}}u + \hat{\mathbf{j}}v$, hvor $\hat{\mathbf{i}}$ og $\hat{\mathbf{j}}$ er enhetsvektorer i x - og y -retning. Av figur 8.2 er

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos \theta, \\ dy &= ds \sin \theta. \end{aligned}$$

Normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ til linjeelementet er

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}} \sin \theta - \hat{\mathbf{j}} \cos \theta.$$

Det infinitesimale volumstrømelementet dQ gjennom ds er $dQ = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$, det vil si

$$\begin{aligned} dQ &= (\hat{\mathbf{i}}u + \hat{\mathbf{j}}v) \cdot (\hat{\mathbf{i}} \sin \theta - \hat{\mathbf{j}} \cos \theta) ds = u \underbrace{\sin \theta ds}_{dy} - v \underbrace{\cos \theta ds}_{dx} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi \end{aligned}$$

Det betyr at volumstrømmen Q_{12} mellom to strømlinjer 1 og 2 er

$$Q_{12} = \int_1^2 \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1,$$

se eksempelet i figur 8.3.

Med plane polarkoordinater (r, θ) blir definisjonslikningene slik:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

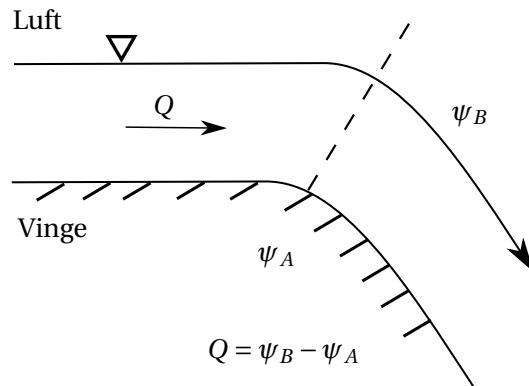
Som for kartesiske koordinater oppfylles kontinuitetsbetingelsen automatisk:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

Også i disse koordinatene oppfylles likningen

$$\nabla^2 \psi = -\zeta_z,$$

slik som i likning (8.2). Altså: Strømfunksjonen kan anvendes også for viskøs strømning. Ofte er det nyttig i praksis. Vi kan for eksempel benytte strømfunksjonen til å beskrive hastighetsprofilen i en elv når en tar hensyn til virveling. På denne måten er strømfunksjonen mer anvendelig enn hastighetspotensialet som introduseres i neste kapittel.



Figur 8.3: Eksempel: Luftstrømning rundt overflaten av en flyvinge.

8.4 Sammenhengen mellom ζ og rotasjonshastigheten ω for et fluidelement

Anta at et fluidelement roterer med konstant vinkelhastighet ω om origo. Elementets hastighet $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, der $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$. Ta curl til dette uttrykket:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{r}}_{=(*)} - \mathbf{r} \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}}_{=0} + \underbrace{(\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}}_{=0} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{r}$$

med

$$(*) = \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Anta at rotasjonen foregår om z -aksen. Tar z -komponenten av likningen, finner altså ζ_z

$$[\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]_z = 3\omega_z - \omega_z \frac{\partial z}{\partial z} = 3\omega_z - \omega_z = 2\omega_z.$$

Vinkelhastigheten er dermed gitt ved

$$\omega_z = \frac{1}{2}\zeta_z = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{V})_z.$$

9 Hastighetspotensialet ϕ

Vi forutsetter igjen 2-dimensjonal, stasjonær strømning. I kartesiske koordinater er altså $\phi = \phi(x, y)$. Anta at strømningen er curl-fri,

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0. \quad (9.1)$$

I følge matematikken vil det da være mulig å definere et potensiale ϕ for vektorfeltet \mathbf{V} slik

$$\mathbf{V} = \nabla\phi.$$

Dette kan vises enkelt ved å ta utgangspunkt i at curl til en gradient alltid er null ($\nabla \times (\nabla a) \equiv 0$ for enhver a). Dermed overholdes likning (9.1) for enhver ϕ .

Kurver $\phi = \text{KONST}$ kalles ekvipotensialkurver. De er nivåflater, på samme måte som gravitasjonspotensialet $\phi_{\text{grav}} = gz$ er en nivåflate. Vi bruker ϕ bare i tilfeller hvor viskositeten er null (neglisjerbar). Hvis $\mu \neq 0$ vil det med én gang oppstå virveling.

9.1 Ekvipotensiallinjer er ortogonale til strømlinjer

Anta ρ konstant. Langs en linje $\phi = \text{KONST}$ er $d\phi = 0$,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = 0,$$

som gir at

$$\Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi} = -\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y} = -\frac{u}{v}. \quad (9.2)$$

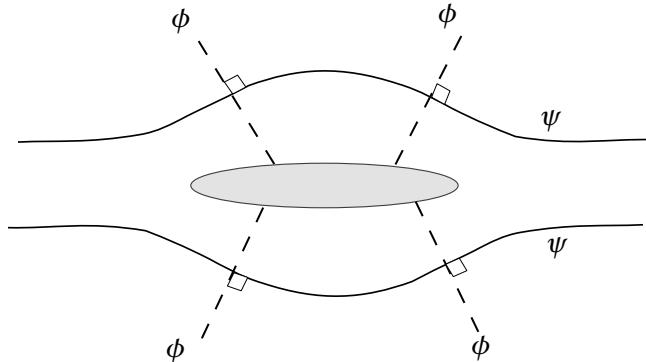
For en strømlinje $\psi = \text{KONST}$ har vi fra før

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi} = \frac{u}{v}. \quad (9.3)$$

Kombinasjonen av likningene (9.2) og (9.3) gir

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi} \cdot \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi} = -1.$$

Med andre ord er kurveskalarene ortogonale.



Figur 9.1: Strømningfunksjonen og hastighetspotensial rundt et elliptisk objekt.

10 Potensialstrømning

Anta et fluid som er todimensjonalt, stasjonært, og ikke-viskøst. Teorien forutsetter:

- (i) rotasjonsfritt (curl-fritt) fluid, $\nabla \times \mathbf{V} = 0$; og
- (ii) inkompresibelt fluid, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.

En kan nå starte fra (i), som gjør at det er mulig å innføre ϕ via $\mathbf{V} = \nabla\phi$ (hvorfor?³). Da vil (ii) føre til $\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2\phi = 0$. Altså gjelder Laplaces likning:

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (10.1)$$

Alternativt kan en starte fra (ii), som gjør det mulig å innføre ψ via $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$. Ettersom $\nabla^2\psi = -\zeta_z$, vil dette medføre Laplaces likning igjen, men denne gangen i ψ :

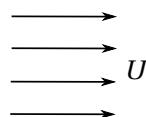
$$\nabla^2\psi = 0. \quad (10.2)$$

Merk at likning (10.2), så vel som likning (10.1), hviler på både (i) og (ii).

10.1 Uniform strømning

En uniform strømning er en strømning der hastigheten er konstant, slik som figur 10.1 viser. Likningene som beskriver en uniform strømning med hastighet U er

$$\begin{aligned}\phi &= Ux, \\ \psi &= Uy.\end{aligned}$$



Figur 10.1: Uniform strømning med hastighet U .

10.2 Singulariteter

Vi skal se på 2-dimensjonal strømning. I enkelte punkter kan potensialene og/eller de fysiske størrelsene divergere. Dette kaller vi singulariteter.

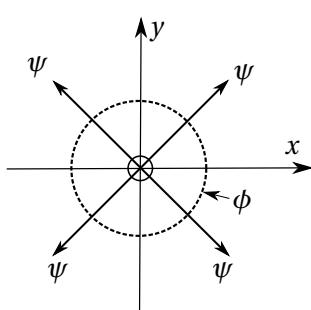
10.2.1 Linjekilde/-sluk i origo

Singularitet plassert i origo som i figur 10.2. Kilden (et tynt rør) plassert i z -aksen. Ser bare på én lengdeenhet i z -retning. Radiell hastighet er

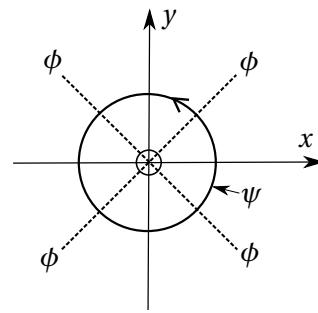
$$V_r = \frac{m}{r} \quad \text{der} \quad \begin{cases} m > 0 \iff \text{kilde} \\ m < 0 \iff \text{sluk} \end{cases}, \quad (10.3)$$

der symbollet m ikke er masse, men kalles styrken til linjekilden/-sluket og har enhet $[m] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

³Forklaring: Vet fra matematikken at det finnes et potensial for ethvert vektorfelt med curl lik null.



Figur 10.2: Figuren viser strømning- og hastighetspotensialet rundt en linjekilde.



Figur 10.3: Figuren viser strømnings- og hastighetspotensialet rundt en linjevirvel, med positiv virvelstyrke k .

Hvis Q er volumstrøm ut fra kilden per lengdeenhet i z -retning, er $V_r = Q/(2\pi r)$. Ved integrasjon av likningene

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{r}, \\ V_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

finnes

$$\begin{aligned} \psi &= m\theta, \\ \phi &= m \ln r. \end{aligned}$$

Dermed kan hastighetskomponentene i x - og y -retning beregnes:

$$\begin{aligned} u &= V_r \cos \theta = m \cdot \frac{x}{r^2} = \frac{mx}{x^2 + y^2}, \\ v &= V_r \sin \theta = m \cdot \frac{y}{r^2} = \frac{my}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

10.2.2 Linjevirvel i origo

Asimutal hastighet $V_\theta = K/r$. Av

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \\ V_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

finnes

$$\begin{aligned} \psi &= -K \ln r, \\ \phi &= K\theta. \end{aligned}$$

I tillegg kan henholdsvis virvling og sirkulasjon regnes ut:

$$\begin{aligned} \zeta_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = 0 \\ \Gamma &= \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} V_r r d\theta = V_\theta 2\pi r = 2\pi K. \end{aligned}$$

Virvelen er en fri virvel ettersom $\zeta_z = 0$.

10.2.3 Dublett/dipol

Anta en kilde av styrke $+m$ i $(-a, 0)$ og et sluk av styrke $-m$ i $(a, 0)$, slik som i figur 10.4. La $a \rightarrow 0$ og $m \rightarrow \infty$ slik at hjelpestørrelsen kalt dipolmomentet $\lambda = 2am$ holdes konstant. Fra det generelle uttrykket for en kilde $\phi_{\text{kilde}} = m \ln r$, finnes for dipolen at

$$\phi = m \ln r_1 - m \ln r_2 = m \ln(r_1/r_2).$$

Videre behandler vi tilfellet approksimativt: Fra figur 10.4 er

$$r_1 - r_2 \simeq 2a \cos \theta$$

som medfører at

$$\phi = m \ln \left(1 + \frac{2a}{r} \right) \cos \theta \simeq m \frac{2a}{r} \cos \theta,$$

der den siste tilnærmingen kommer av $\ln(1+x) \simeq x$ for små x (i vårt tilfelle er det $a \rightarrow 0$). Ved å sette inn $\lambda = 2am$ får en at

$$\phi = \frac{\lambda}{r} \cos \theta \quad (10.4)$$

for dipolen.

For å finne strømfunksjonen for dubletten tar vi utgangspunkt i det generelle uttrykket $\psi_{\text{kilde}} = m\theta$. Ved å legge sammen for kilde og sluk får en at

$$\psi = m(\theta_1 - \theta_2).$$

Som vist i figur 10.4 er $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = (2a \sin \theta)/r$ der $r_1 \simeq r_2 \simeq r$ fordi $r_1, r_2 \gg a$. Altså

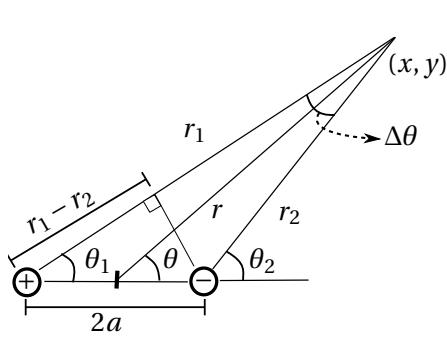
$$\psi = -\frac{2am}{r} \sin \theta. \quad (10.5)$$

Ved igjen å sette inn $\lambda = 2am$ får en at

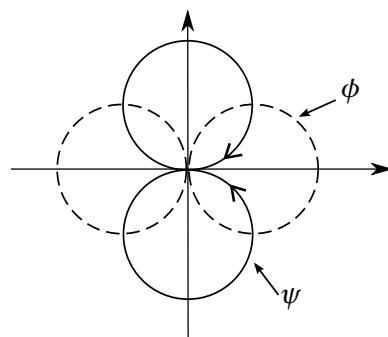
$$\psi = -\frac{\lambda}{r} \sin \theta.$$

Hastighetskomponentene kan finnes for eksempel ved derivasjon av ϕ :

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\lambda}{r^2} \cos \theta, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\lambda}{r^2} \sin \theta.$$



Figur 10.4: Geometrisk skisse av en dipol bestående av kilde og sluk.



Figur 10.5: Hastighets- og strømpotensialet rundt en dipol plassert i origo.

Eksempel 10.1: Superposisjon av uniform strømning, dublett og virvel

Legger sammen strømfunksjonene for komponentene,

$$\psi_{\text{uniform}} = Uy = Ur \sin \theta,$$

$$\psi_{\text{dipol}} = -\frac{\lambda}{r} \sin \theta,$$

$$\psi_{\text{virvel}} = -K \ln r,$$

og får dermed

$$\psi = \left(Ur - \frac{\lambda}{r} \right) \sin \theta - K \ln r.$$

Innfører en lengde a (en hjelpestørrelse som viser seg å ha en fysisk tolkning) og benytter deretter hjelpestørrelsen $\lambda = Ua^2$. Dessuten legges en konstant $C = -\ln a$ til siste ledd slik at $-K \ln r \rightarrow -K \ln(r/a)$ (dette kan gjøres siden ψ etter definisjonen ikke avhenger av eventuelle konstanter). Dette gir

$$\psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta - K \cdot \ln \frac{r}{a}$$

En ser at $\psi = 0$ når $r = a$, det vil si at vi kan tolke $r = a$ som en cylinderoverflate for en sylinder med radius a og sentrum i origo. På overflaten $r = a$ må da $V_r(a, \theta) = 0$. Finner V_r og setter inn:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad \Rightarrow \quad V_r(r = a) = 0.$$

Videre er

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{K}{r},$$

på overflaten altså

$$V_\theta(r = a, \theta) = -2U \sin \theta + \frac{K}{a},$$

ettersom det ikke er noen heftbetingelser (teorien forutsetter ikke-viskøse væsker som nevnt i første setning i dette kapitlet). For moderate verdier av $K(> 0)$ blir strømningsbildet som i figur 10.6.

Ettersom $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ kan Bernoulli anvendes mellom vilkårlige punkter. Relaterer $r = \infty$ til et punkt på overflaten:

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 = \frac{p(a, \theta)}{\rho} + \frac{1}{2} \underbrace{\left[2U \sin \theta - \frac{K}{a} \right]}_{V(\text{overflate})=V_\theta(r=a,\theta)}^2$$

Gage-trykk $p(a, \theta) - p_\infty = p_G$ på overflaten er altså

$$p_G(a, \theta) = \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{\rho}{2} \left[4U^2 \sin^2 \theta - \frac{4KU}{a} \sin \theta + \frac{K^2}{a^2} \right]$$

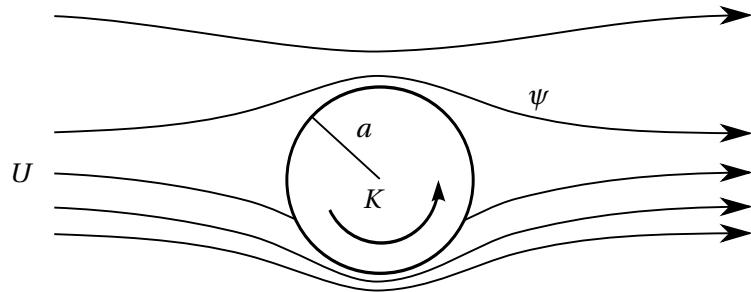
Trykkraft på overflateelement per lengdeenhet $dA = a d\theta$. Kraftkomponentene per lengdeenhet er altså

$$\begin{aligned} F_x &= - \int p_G(a, \theta) \cos \theta dA = - \int_0^{2\pi} p_G(a, \theta) a \cos \theta d\theta = 0, \\ F_y &= - \int_0^{2\pi} p_G(a, \theta) a \sin \theta d\theta = -2\rho KU \underbrace{\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta}_{=\pi} = -\rho U 2\pi K. \end{aligned}$$

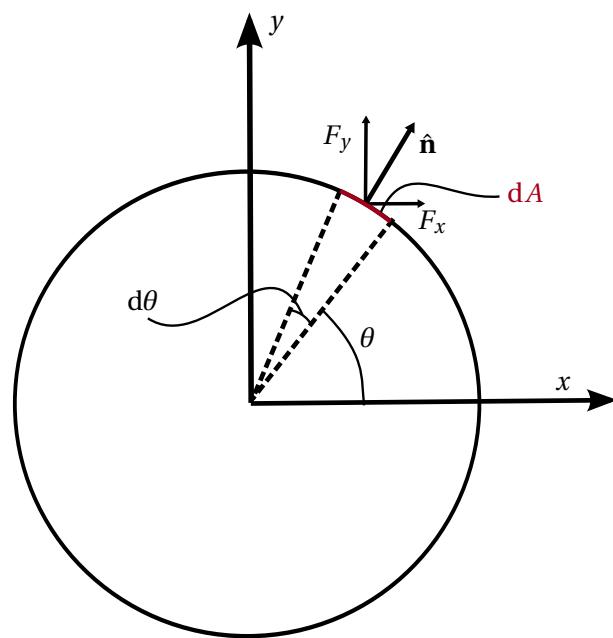
Da sirkulasjonen er $\Gamma = 2\pi K$, gir dette

$$F_y = -\rho U \Gamma, \tag{10.6}$$

som har navnet Kutta-Joukowskis teorem og behandles ytterligere i avsnitt 11.4



Figur 10.6: Strømingsbilde for kombinasjon av uniform strømning, dublett og virvel.



Figur 10.7: Overflateelement dA og kreftene som virker på det.

11 Det komplekse potensial

Vi skal betrakte en tidsuavhengig potensialstrømning i to dimensjoner. Fluidet er friksjonsfritt (ideelt), og virvingen $\zeta \equiv \nabla \times \mathbf{V} = 0$. I kartesiske koordinater er hastighetspotensialet $\phi = \phi(x, y)$ og strømfunksjonen $\psi = \psi(x, y)$. Som kjent er komponentene u og v av hastighetsvektoren \mathbf{V} gitt ved

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, & v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, & v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Dette er Cauchy-Riemanns likninger fra matematikken. Vi innfører den komplekse koordinaten z og dens komplekse konjugerte

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ \bar{z} &= x - iy \end{aligned}$$

Ettersom ϕ og ψ tilfredsstiller Cauchy-Riemanns likninger, kan vi definere en funksjon $w(z)$ som vi vet at er en analytisk (holomorf) funksjon av z overalt i planet hvor ϕ og ψ er definert. Funksjonen

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

kalles ofte for det *komplekse potensial*.

Potensialet $w(x, y)$ har en veldefinert derivert,

$$\frac{dw}{dz} \equiv w'(z)$$

hvor $w'(z)$ er den samme uansett fra hvilken retning i planet vi regner den ut. Deriverer, for eksempel i x -retning:

$$w'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv.$$

Dette er den komplekse hastighet. Størrelse og argument for $w'(z)$ gir fart V og vinkel θ mellom \mathbf{V} og x -aksen:

$$w'(z) = Ve^{-i\theta}, \quad (11.1)$$

hvor en ser av figur 11.1 at θ er gitt ved

$$\tan \theta = \frac{v}{u}.$$

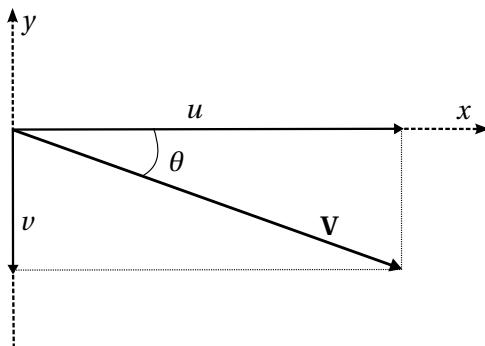
Ser så på en fast flate C som i figur 11.2, med potensialstrømning omkring (altså ingen friksjon). På overflaten må hastigheten være tangensiell, $\psi = \text{KONST}$. Kan velge $\psi = 0$ på C . Har da at

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \rightarrow \phi(x, y).$$

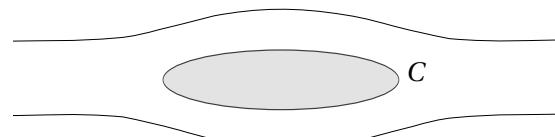
Strømningsproblemets reduserer seg til å finne en analytisk funksjon $w(z)$ som er reell på randen av C . Benytter residueteoremet⁴ på den komplekse hastighet:

$$\oint w'(z) dz = 2\pi i \sum_k A_k, \quad (11.2)$$

⁴Kort oppsummert sier residueteoremet at $f(z) = \sum_{-m} \frac{a_m}{(z-a)^m} + \phi(z) \Rightarrow \oint f(z) dz = 2\pi a_{-1} \cdot i$



Figur 11.1: Illustrasjon av fartskomponentene til \mathbf{V} .



Figur 11.2: Strømning rundt en flate C .

hvor A_k er residuene til $w'(z)$. Kan også dele opp integralet:

$$\begin{aligned} \oint_C w'(z) dz &= \oint_C (u - iv)(dx + idy) \\ &= \oint_C \underbrace{(udx + vd y)}_{=\mathbf{V} \cdot ds} + i \oint_C \underbrace{(udy - vdx)}_{=dQ} \\ &= \underbrace{\oint_C \mathbf{V} \cdot ds}_{\equiv \Gamma, \text{sirkulasjon}} + i \underbrace{\oint_C dQ}_{=Q, \text{volumgjennomstrømning}} \\ &= \Gamma + Q. \end{aligned}$$

Gjennom en fast flate kan det ikke være noen gjennomstrømning, altså $Q = 0$. Dermed blir integralet $\oint_C w'(z) dz = \Gamma$, som sammen med residueregningen i likning (11.2) gir at

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k.$$

Alle residuene er i dette tilfellet imaginære.

Eksempel 11.1: $w = z^2$

Har at $w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. Dette gir strømningsfunksjon og hastighetspotensiale

$$\begin{aligned} \phi &= x^2 - y^2, \\ \psi &= 2xy. \end{aligned}$$

Kurvene $\phi = \text{KONST}$ og $\psi = \text{KONST}$ skjærer hverandre ortogonalt som vist i figur 11.3.

Eksempel 11.2: Konstruksjon av w for en linjekilde

Hastighets- og strømpotensialet for en linjekilde er gitt ved

$$\begin{aligned} \phi &= m \ln r, \\ \psi &= m\theta. \end{aligned}$$

En får da at

$$w = m(\ln r + i\theta) = m \ln z.$$

Eksempel 11.3: Konstruksjon av w for en virvel

Hastighets- og strømpotensialet for en virvel er gitt ved

$$\begin{aligned}\phi &= K\theta, \\ \psi &= -K \ln r.\end{aligned}$$

En får da at

$$w = K(\theta - i \ln r) = -iK(\ln r + i\theta) = iK \ln z.$$

Uttrykt med sirkulasjonen $\Gamma = 2\pi K$, er w gitt ved

$$w = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z.$$

I de følgende eksemplene er U en hastighet og a en lengde.

Eksempel 11.4: $w = Uz$

Dette gir

$$\begin{aligned}\phi &= Ux, \\ \psi &= Uy.\end{aligned}$$

Dette er homogen strømning, skisert i figur 11.4.

Eksempel 11.5: $w = Ua^2/z$

Med $z = re^{i\theta}$ er

$$\psi = \operatorname{Im} w = -\frac{Ua^2}{r} \sin \theta = -\frac{Ua^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Strømlinjer $\psi = \text{KONST}$ når

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \text{KONST} \equiv \frac{1}{2y_0} \implies x^2 + (y - y_0)^2 = y_0^2.$$

Innfører ny konstant λ (dipolmoment) ved

$$\lambda = Ua^2$$

og får

$$\begin{aligned}\psi &= -\lambda \frac{\sin \theta}{r}, \\ \phi &= \lambda \frac{\cos \theta}{r}.\end{aligned}$$

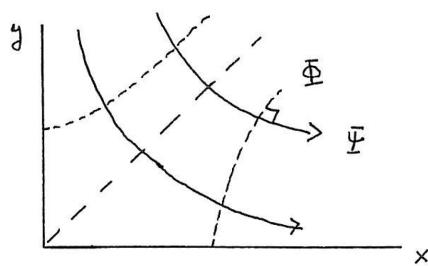
Strømningsbildet rundt en dipol er skissert i figur 11.5

Eksempel 11.6: $w = Ua(z/a)^{\pi/\alpha}$

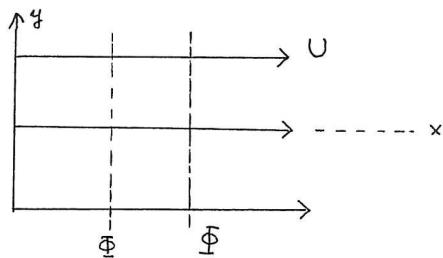
Antar at $0 < \alpha < \pi$. Setter $z = re^{i\theta}$ og regner ut

$$\begin{aligned}\phi &= Ua \left(\frac{r}{a}\right)^{(\pi/\alpha)} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha}, \\ \psi &= Ua \left(\frac{r}{a}\right)^{(\pi/\alpha)} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}\end{aligned}$$

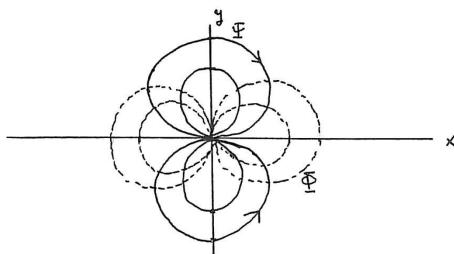
Strømningsfunksjonen og hastighetspotensialet til w er skissert i figur 11.6.



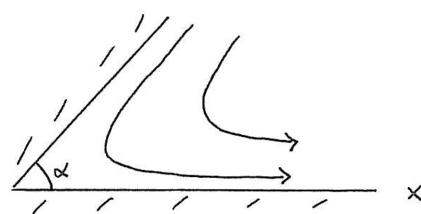
Figur 11.3: Eksempel 11.1: Strømfunksjon og hastighetspotensial ved $w = z^2$.



Figur 11.4: Eksempel 11.4: Strømfunksjon og hastighetspotensial ved $w = Uz$.



Figur 11.5: Eksempel 11.5: Strømfunksjon og hastighetspotensial ved $w = (Ua^2)/z$.



Figur 11.6: Eksempel 11.6: Strømfunksjon og hastighetspotensial ved $w = Ua(z/a)^{\pi/\alpha}$.

Stagnasjonspunkter

Disse er generelt gitt ved at $u = v = 0$, slik at den komplekse hastigheten $w'(z) = 0$. I eksempel 11.6 får en at stagnasjonspunktet bestemmes av

$$w'(z) = z^{(\pi/\alpha)-1} = 0.$$

Når $\alpha < \pi$, som forutsatt ovenfor, blir $(\pi/\alpha) - 1 > 0$, og stagnasjonspunktet må dermed være i origo.

Fart

Av likning (11.1) fås farten V som

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \left| \frac{dw}{dz} \right| \equiv |w'(z)|. \quad (11.3)$$

Siden

$$\frac{dw}{dz} = u - i v,$$

så blir

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = \frac{d}{d\bar{z}} (\phi - i\psi) = \frac{\partial}{\partial x} (\phi - i\psi) = u + i v,$$

slik at

$$V^2 = \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}.$$

Eksempel 11.7: $w = 2z + 3iz^2$

For å finne farten trenger en w' og $\overline{w'}$. Den deriverte w' er gitt ved

$$w' = \frac{dw}{dz} = 2 + i6z.$$

$\overline{w'}$ fås ved

$$\overline{w'} = \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = \overline{2 + i6z} = 2 - 6i\bar{z}.$$

Farten kvadrert er da gitt ved

$$\begin{aligned} V^2 &= (2 + 6iz)(2 - 6i\bar{z}) = 4 + 36 \underbrace{z\bar{z}}_{|z|^2} + 12i \underbrace{(z - \bar{z})}_{2\text{Im}(z)=2y} \\ &= 4 + 36(x^2 + y^2) - 24y, \end{aligned}$$

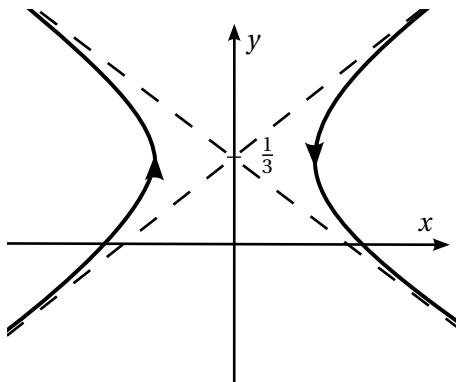
Stagnasjonspunkt når $w' = 0$. Det vil si

$$2 + 6iz = 0 \implies \begin{cases} z = \frac{i}{3} \\ \bar{z} = -\frac{i}{3} \end{cases}.$$

Likning for strømlinjer finnes ved å definere konstanten a legge denne til på høyre side slik at en får et fullstendig kvadrat

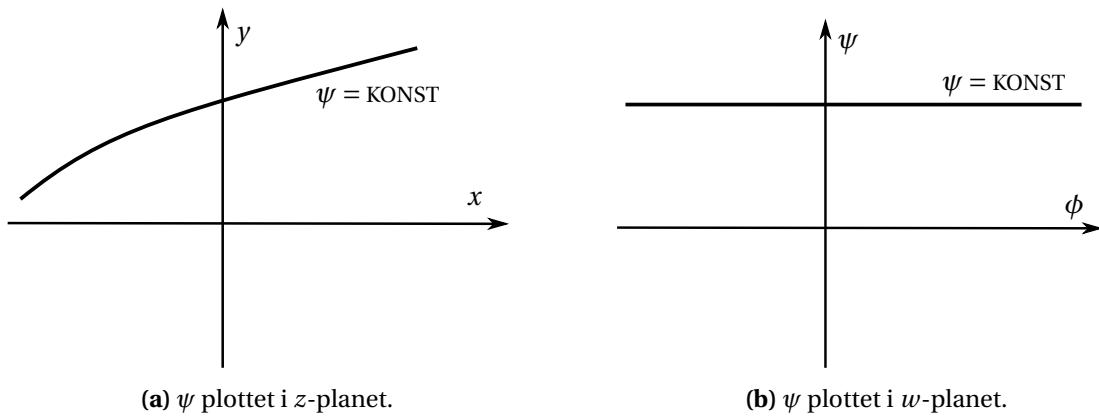
$$\begin{aligned} \psi &= 2y + 3(x^2 - y^2) = 3a^2 + \frac{1}{3} \\ &\implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{(y - \frac{1}{3})^2}{a^2} = 1 \end{aligned}$$

Strømningsfunksjonen ψ er skissert i figur 11.7.



Figur 11.7: Eksempel 11.7: Strømfunksjon for $w = 2z + 3iz^2$.

Fundamentalt prinsipp for bruk av det komplekse potensial: Funksjonen $w(z)$ bestemmer avbildningen av z -planet på w -planet. Strømlinjene i z -planet avbildes som rette linjer, $\psi = \text{KONST}$, parallelle med den reelle akse, i w -planet, se figur 11.8. Hvis en kan finne en hensiktsmessig avbildning mellom de to plan, vil dette ofte forenkle bestemmelsen av potensialene.



Figur 11.8: Illustrasjon av $z \mapsto w$.

11.1 Strømning gjennom en åpning

Hvis $w = w(z)$, kan en i prinsippet invertere funksjonen og skrive $z = z(w)$. Noen ganger er dette nyttig.

La oss velge funksjonen $z = c \cosh w$, som kan skrives om på følgende vis

$$z = c \cosh w = c \cosh(\phi + i\psi) \stackrel{(*)}{=} \underbrace{c \cosh \phi \cos \psi}_{\text{reell}} + i \underbrace{c \sinh \phi \sin \psi}_{\text{imaginær}}.$$

Identiteten som er brukt ved (*) er kombinasjonen av addisjonsteoremet for $\cosh(x \pm y)$ på side 83 i Rottmann og formlene under overskriften *relasjoner til trigonometriske funksjoner* på side 85 i samme bok. Har nå at

$$\begin{aligned} x &= c \cosh \phi \cos \psi, \\ y &= c \sinh \phi \sin \psi. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Eliminerer ϕ ved å kvadere likningene for x og y og benytter identiteten $\cosh^2 \gamma - \sinh^2 \gamma = 1$ (nederst på side 82 i Rottmann):

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \psi} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \psi} = \cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1. \quad (11.5)$$

Kurvene $\psi = \text{KONST}$ er hyperbler, med halvakser $c \cos \psi$, $c \sin \psi$, og brennpunkter i $(c, 0)$ og $(-c, 0)$. Dette kan en se ved å sette

$$\begin{aligned} a &= c \cos \psi, \\ b &= c \sin \psi, \end{aligned}$$

får vi likning (11.5) på følgende form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Figur 11.9 viser en hyperbel med halvakser.

Strømningen kan anskueliggjøres ved å se på den ved x -aksen: Fra likning (11.5) får en på positiv x -akse ($x > 0, y = 0$)

$$x = c \cos \psi \implies \psi = \arccos \frac{x}{c}.$$

y -komponenten v av farten \mathbf{V} , finnes ved

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2/c^2}} \frac{1}{c} > 0.$$

Åpningen på x -aksen vil være der det er gjennomstrømning i y -retning. Gjennomstrømning krever reell v ulik null. En kan dermed tolke $-c < x < c$ som en åpning, slik som i figur 11.10. Denne tolkningen kommer man også frem til på følgende måte: Velg en av hyperblene som fast flate. Vi får da et bilde av strømningen gjennom åpningen (slik som i figur 11.11). Ta så grensen når flaten går mot å være en flat plate, altså har vertikal halvakse er null. Det betyr at $\psi = 0$ eller $\psi = \pi$. Vi får et bilde av en strømning gjennom en åpning av bredde $2c$ i en fast plate.

Det viser seg at strømningbildet er urealistisk på kantene, fordi hastigheten går mot uendelig der. Viser dette, ved å regne ut

$$V^2 = \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \quad (11.6)$$

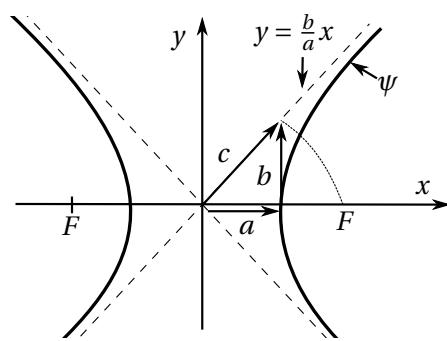
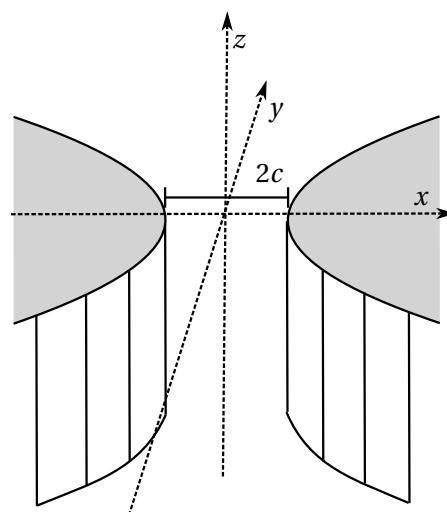
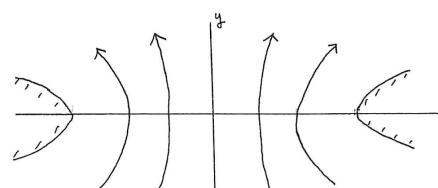
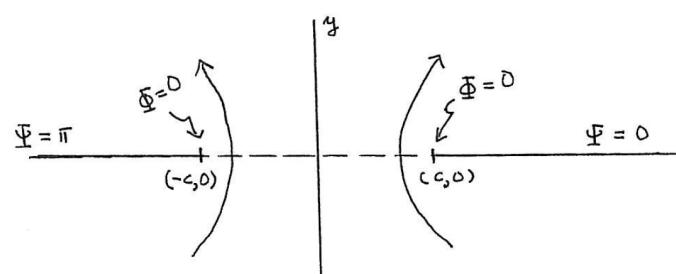
På kantene $(c, 0)$ og $(-c, 0)$ finner vi av likning (11.4) at

$$\begin{aligned} \pm 1 &= \cosh \phi \cos \psi, \\ 0 &= \sinh \phi \sin \psi, \end{aligned}$$

som gir $\phi = 0$ og $\psi = 0$ eller $\psi = \pi$. Altså ved innsetting i likning (11.6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^2} &= \frac{dz}{dw} \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} = c^2 \sinh w \cdot \sinh \bar{w} = \frac{1}{2} c^2 [\cosh(w + \bar{w}) - \cosh(w - \bar{w})] \\ &= \frac{1}{2} c^2 [\cosh 2\phi - \cos 2\psi] = \frac{c^2}{2} (1 - 1) = 0, \end{aligned}$$

altså $V \rightarrow \infty$.

**Figur 11.9:** Kurver med konstant ψ .**Figur 11.10:** Eksempel på konfigurasjon for strømning gjennom en åpning.**Figur 11.11:** Strømningbilde gjennom en åpning.**Figur 11.12:** Strømningbilde gjennom en åpning i en plate.

11.2 Strømning omkring en sylinder

Gitt det komplekse potensial

$$w(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right),$$

som gir

$$\begin{aligned}\phi &= V_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \\ \psi &= V_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta.\end{aligned}$$

Dette er kjent fra potensialteori tidligere. Det er her forutsatt at sentrum ligger i origo. Hvis sentrum i stedet ligger i $z = z_0$ får en

$$w(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z - z_0} \right).$$

Virvel med sirkulasjon Γ omkring en sylinder er gitt ved likningen

$$w(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R},$$

som betyr

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \\ \psi &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R},\end{aligned}$$

når vi velger $\psi = 0$ på overflaten.

Kombinerer de to potensialene:

$$w(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{R}.$$

På overflaten, $z = Re^{i\theta}$, er

$$w(Re^{i\theta}) = 2V_\infty R \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta,$$

altså reell, slik at $\psi = 0$ på overflaten.

Stagnasjonspunktene finnes av $dw/dz = 0$. Av

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} = 0$$

finnes

$$\frac{z}{R} = \frac{i\Gamma}{4\pi RV_\infty} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi RV_\infty} \right)^2}.$$

Antar at

$$\frac{\Gamma}{4\pi RV_\infty} < 1,$$

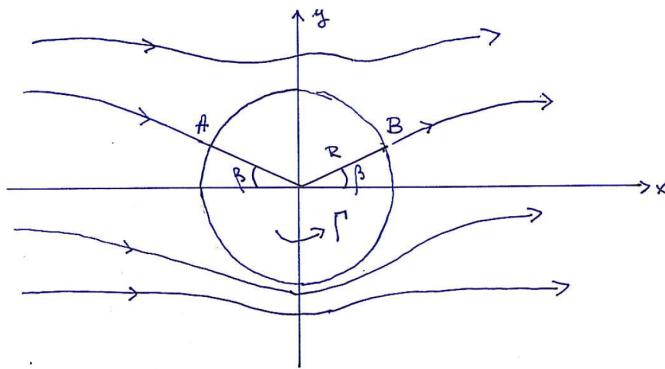
og innfører β slik at

$$\frac{\Gamma}{4\pi RV_\infty} = \sin \beta.$$

Stagnasjonspunktene er da gitt ved

$$\frac{z}{R} = i \sin \beta \pm \cos \beta.$$

Stagnasjonspunktene A og B er markert på figur 11.13.



Figur 11.13: Strømningsbilde rundt en sylinder.

11.3 Blasius' teorem

En sylinder (ikke nødvendigvis med sirkulært tverrsnitt) er plassert i en uniform strømning. Kraftkomponentene er F_x og F_y (som i figur 11.14a). Ytre krefter, slik som gravitasjon, utelates. Kraften $d\mathbf{F}$ på et linjeelement ds i to dimensjoner er

$$d\mathbf{F} = -p \hat{\mathbf{n}} ds.$$

Fra figur 11.14b ser en at

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, \cos \theta),$$

og at

$$\begin{aligned} dy &= ds \sin \theta > 0, \\ dx &= -ds \cos \theta < 0. \end{aligned}$$

Komponentene til $d\mathbf{F}$ er da gitt ved

$$\begin{aligned} dF_x &= -pn_x ds = -p dy, \\ dF_y &= -pn_y ds = p dx. \end{aligned}$$

Dermed blir

$$d(F_x - iF_y) = -ip(dx - i dy) = -ip d\bar{z}.$$

Bernoullis likning

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = C_1 = \text{KONST}$$

gir – ettersom C_1 er uten betydning – at

$$p \rightarrow -\frac{1}{2}\rho V^2 = -\frac{1}{2}\rho \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{dz}.$$

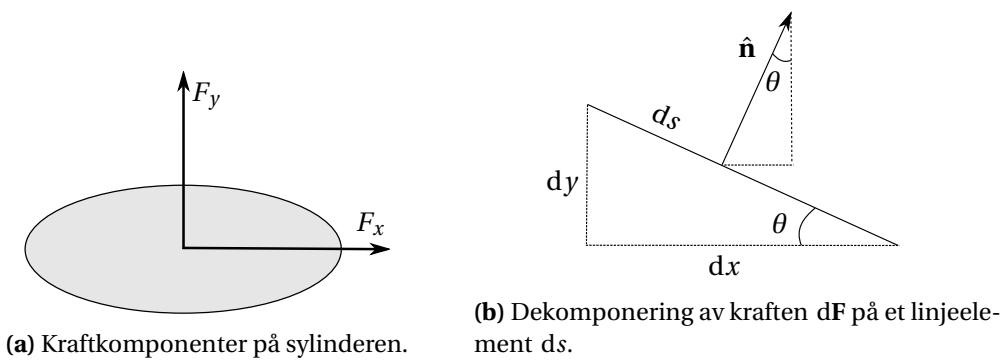
På overflaten er $\psi = \text{KONST}$, slik at $d\bar{w} = dw (= d\phi)$. Altså

$$d(F_x - iF_y) = \frac{1}{2}i\rho \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

og dermed

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\rho \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \quad (11.7)$$

som er *Blasius' teorem*.



Figur 11.14

11.4 Kutta-Joukowskis teorem

For store verdier av $|z|$ utvikles

$$\begin{aligned} w'(z) &= V_\infty + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots \\ w(z) &= V_\infty z + A \ln z - \frac{B}{z} + \dots \end{aligned}$$

Sammenlikning med en enkel virvel,

$$w(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z, \text{ gir } A = -\frac{i\Gamma}{2\pi}.$$

Vi regner ut

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = \left(V_\infty - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots \right)^2 = V_\infty^2 - \frac{i\Gamma V_\infty}{\pi z} + \frac{2V_\infty B - (\Gamma/2\pi)^2}{z^2} + \dots$$

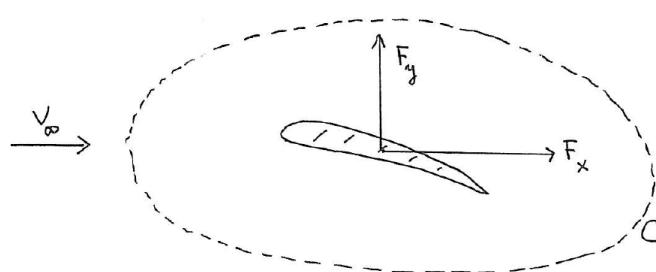
Benytter så likning (11.7) og legger integrasjonsveien C langt ute (Dette er tillatt, selv om det ikke bevises her.). Vi får da bidrag bare fra $1/z$ -leddet:

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} i\rho \frac{-i\Gamma V_\infty}{\pi} \underbrace{\oint_C \frac{dz}{z}}_{2\pi i} = i\rho V_\infty \Gamma.$$

Altså

$$F_y = -\rho V_\infty \Gamma,$$

som vi kjenner fra før. Dessuten fås $F_x = 0$, altså null drag!



Figur 11.15: Strømning rundt en flyvinge.

Formelark, TEP4105 Fluidmekanikk

Overflatespenning

$$\Delta p = \Upsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Langs en strømlinje

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}.$$

Atmosfæretrykk

$$\frac{p(z)}{p_0} = \left(\frac{T(z)}{T_0} \right)^{5.26}.$$

Ideell gass:

$$p = \rho RT; \quad R_{\text{luft}} = 287 \text{ J/kg K}.$$

Reynolds tall:

$$Re = \frac{UL}{\nu}.$$

Kinematisk viskositet

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Skjærspenning

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Hydraulisk trykk

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

Hydrostatiske krefter på plane flater (atmosfæretrykk utekant)

$$F = \gamma h_{\text{CG}} A.$$

Med $\xi_{\text{CP}} = \text{trykksenter}$ og $\xi_{\text{CG}} = \text{centroide}$, er

$$\xi_{\text{CP}} - \xi_{\text{CG}} = \frac{I_{xx}}{\xi_{\text{CG}} A}, \quad x_{\text{CP}} = -\frac{I_{xy}}{\xi_{\text{CG}} A}.$$

Kraft på krum flate

$$F_{\text{H}} = \gamma h_{\text{CG}} A_x, \quad F_{\text{V}} = \gamma V.$$

Trykkfordeling ved alselerasjon

$$\vec{\nabla} p + \rho g \vec{k} = -\rho \vec{a}.$$

Trykkfordeling ved jevn rotasjon

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2 - \rho g z.$$

Akselerasjon (Kartesisk)

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}.$$

Virvling

$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}.$$

Reynolds transportteorem ($\phi = \beta \rho$ hos White)

$$\frac{d}{dt} B_{\text{syst}} \equiv \frac{d}{dt} \int_{\text{syst}} \phi dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \phi dV + \oint_{\text{CS}} \phi (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA.$$

Bernoulli, langs en strømlinje

$$\text{Stasjonær strømning:} \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = \text{konst.}$$

$$\text{Tidsavhengig strømning:} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = \text{konst.}$$

Energilikningen

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{shaft}} - \dot{W}_{\text{viscous}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \rho e dV + \oint_{\text{CS}} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA,$$

hvor total energi per masseenhet er

$$e = \hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz.$$

Energilikning for stasjonær, inkompressibel strømning med ett inn- og utløp

$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{\text{inn}} = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{\text{ut}} + h_{\text{turbin}} + h_{\text{friksjon}} - h_{\text{pumpe}}.$$

Impulssatsen (stasjonær strømning og stasjonært CV)

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{M}}_{\text{UT}} - \dot{\vec{M}}_{\text{INN}},$$

hvor

$$\begin{aligned} \dot{\vec{M}}_{\text{UT}} &= \int_{\text{UT}} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA, \\ \dot{\vec{M}}_{\text{INN}} &= - \int_{\text{INN}} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA. \end{aligned}$$

Trykkrefleksjon på CV

$$\vec{F}_{\text{press}} = - \oint_{\text{CS}} p_{\text{gage}} \vec{n} dA$$

Kritisk Reynoldstall for rørstrømning

$$\text{Re}_{\text{crit}} \approx 2300.$$

Darcys friksjonsfaktor for laminær strømning

$$f = \frac{64}{\text{Re}}.$$

Kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0.$$

Kontinuitetslikningen i sylinderiske koordinater

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Inkompressibel kontinuitetslikning

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0.$$

Eulerlikningen

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}.$$

Inkompressibel Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}.$$

Hastighetspotensial

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi.$$

Inkompressibel strømningsfunction ψ

(kartesisk)	$u = \frac{\partial \psi}{\partial y};$	$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x};$
(sylinderisk)	$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta};$	$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r};$
(aksesymmetrisk)	$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z};$	$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$

Potensialstrømning

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0.$$

Noen strømningsfelt

(Uniform strømning)	$\psi = Vy;$	$\phi = Vx;$
(kilde/sluk)	$\psi = m\theta;$	$\phi = m \ln r;$
(linjevirvel)	$\psi = -K \ln r;$	$\phi = K\theta;$
(dublett)	$\psi = -\lambda \frac{\sin \theta}{r};$	$\phi = \lambda \frac{\cos \theta}{r}.$

Strømning forbi en sylinder

$$\psi = V_\infty (r - a^2/r) \sin \theta.$$

Drag og løft

$$D = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho V^2 A, \quad L = C_L \cdot \frac{1}{2} \rho V^2 A.$$

Sirkulasjon

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

Kutta-Joukowsky

$$L = -\rho U \Gamma.$$

Bølgetall

$$k = \frac{2\pi}{L}.$$

Vinkelfrekvens

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Fasehastighet

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T}.$$

Gruppehastighet

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

Vannbølger

$$\phi = \frac{ga}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos(\omega t - kx)$$

Dispersjonsrelasjonen

$$\omega^2 = gk \tanh kd.$$

Kinematisk overflatebettingelse

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w, \quad \text{ved } z = \eta.$$

Dynamisk trykk

$$p_d = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Komplekst potensial

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y); \quad z = x + iy.$$

Kompleks hastighet

$$w'(z) = \frac{dw}{dz} = u - iv = Ve^{-i\theta}.$$

Blasius' teorem

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} i\rho \oint_c (w'(z))^2 dz$$