Mat160 - Obligatorisk oppgave 2

Innleveringsfrist 6. november

Praktisk info

- Oppgaven er individuell. Man kan jobbe sammen, men hver student må skrive sin egen kode og sin egen oppgave.
- Oppgaven skal leveres i form av et kjøreskript som demonstreres for gruppeleder. Dette kan være et ordinært script som returnerer aktuelle verdier og plot, eller i form av Matlab LiveScript/Jupyter Notebook etc.
- Det skal ikke leveres inn hverken kode eller tekst. Etter gjennomgang med gruppeleder vil det bli notert hvem som har bestått
- Om en ikke har mulighet til å møte fysisk på en gruppe, så kan et ZOOM-møte med gruppeleder avtales.
- Kandidater som er på grensen til å ikke bestå vil bli kontaktet av emneansvarlig og vil kunne få mulighet til å muntlig korrigere ev. misforståelser.

Oppgave 1

Triangulære matriser

Gitt ligningsystemet $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der U er en øvre triangulær matrise.

a) Lag en kode som løser $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for en vilkårlig U og $\mathbf{b}$ vha nøstede ligninger ('back-substitution')

b) La U være en 10×10 - matrise som har 1 på hele diagonalen og alle elementer over diagonalen er -1, og b være en vektor av 1-ere,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bruk koden fra oppgave a) til å løse ligningsystemet $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Løsnings-scriptet skal returnere løsningsvektoren $\mathbf{x}$.

Oppgave 2

Jacobi og Gauss-Seidel

a) Lag en funksjon som implementerer Jacobis metode. Funksjonen skal ta inn en matrise A, en høyreside $\mathbf{b}$, en startvektor $\mathbf{x_0}$ og antall iterasjoner n. Funksjonen skal returnere en løsning $\mathbf{x}$ samt en vektor $\mathbf{e}$ med feilverdier. Feilvektoren skal ha elementer $e_i = ||A\mathbf{x}_i - \mathbf{b}||_\infty$, der $\mathbf{x}_i$ er estimatet for $\mathbf{x}$ ved iterasjon nr. i.

b) Lag en kode som implementerer Gauss-Seidel-metoden metoden med samme input og output som i a). Du kan gjerne bruke koden fra oppgave 1 som en del av løsningsalgoritmen din.

Vi skal studere det lineære ligningsystemet $A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}$ for en 1000×1000, tridiagonal matrise A_α. A_α har verdien $2 + \alpha$ langs hele hoved-diagonalen og verdien -1 langs hele super- og sub-diagonalen. Høyresiden er en vektor av 1-ere slik som i oppgave 1.

c) For hvilke verdier av α forventer du at metodene fra a) og b) vil konvergere? Løsnings-scriptet ditt skal returnere en setning med forklaring. Bruk f.eks. `disp`() i Matlab for å returnere enkel tekst.

d) Løs systemet $A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}$ for $\alpha = 0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 2$ v.h.a. metodene fra a) og b). Plott de tilhørende feil-vektorene $\mathbf{e}$ for de første 200 iterasjonene. Løsnings-scriptet skal generere to plot, et tilhørende Jacobi-metoden og et tilhørende G-S-metoden. Hvert plott skal inneholde fire kurver tilhørende de respektive α-verdiene. Bruk logaritmisk skala på y-aksen.

e) Hvorfor flater plottene ut for de høyere verdiene av α?. Løsnings-scriptet ditt skal returnere en setning med forklaring. Bruk f.eks. `disp`() i Matlab for å returnere enkel tekst.