Mandatory 3 - STAT210

Sigbjørn Fjelland

10.11.2021

Oppgave 1

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \tag{1}$$

som vi sjeller for diagonal dominans (med en matrise av denne størrelsen er det trivielt):

$$\text{Rad 1: } 9 - 9 - 1 < 0$$
$$\text{Rad 2: } 7 - 2 - 2 > 0$$
$$\text{Rad 3: } 5 - 2 - 2 > 0$$

og grunnet rad 1 er den altså ikkw diagonal dominant.

For å sjekke om den likevel konvergerer er sjekker vi spektral radiusen:

$$\rho(A) = \rho(D^{-1} \cdot (L + U)) = max\{|\lambda|\} < 1 \tag{2}$$

der λ er en vektor med egenverdier. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n),)$.
Dette er gjort i koden med følgende resultat:

$$\rho(A) = 0.7793465859112173 < 1$$

med andre ord så konvergerer metoden. Ved 100 iterasjoner fikk vi følgende resultat:

Jacobi ($n = 100$)	x_1	x_2	x_3
Approximated x_i	1.0000000000018265	2.000000000001248	3.000000000001578

Og følgende nøyaktighet

Jacobi ($n = 100$)	|x|	|e|
$norms$	3.000000000001578	2.9245939003885724e-11

Error plot:

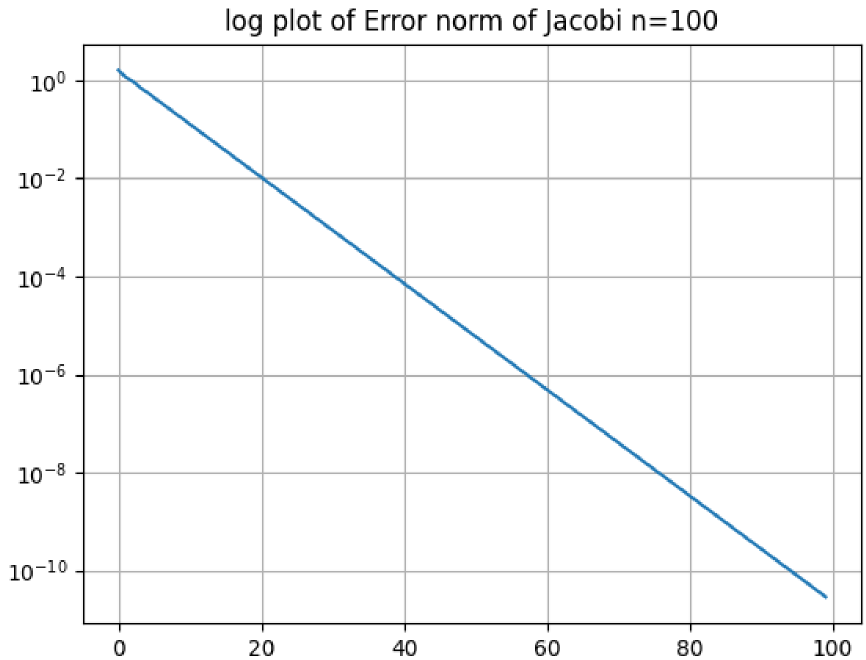

Figure 1: Jacobi method 100 steps

|x| plot:

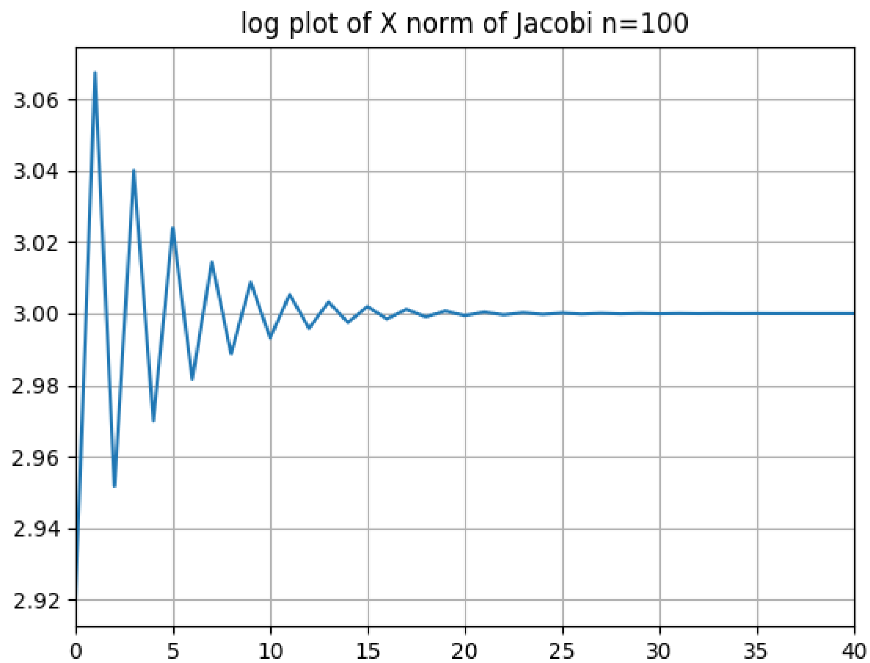

Figure 2: Jacobi method |x| 100 steps

Oppgave 2

Jacobi-method med 10 siffers nøyaktighet (stop kriterie $tol = 0.5e - 10$). Konvergerer ved 98 iterasjoner ($n = 98$).

Jacobi ($tol = 0.5e - 10$)	x_1	x_2	x_3
Approximated x_i	1.0000000000030072	2.0000000000020544	3.000000000002598

Og følgende nøyaktighet

Jacobi ($tol = 0.5e - 10$)	|x|	|e|
$norms$	3.000000000002598	4.814992848878319e-11

Error plot:

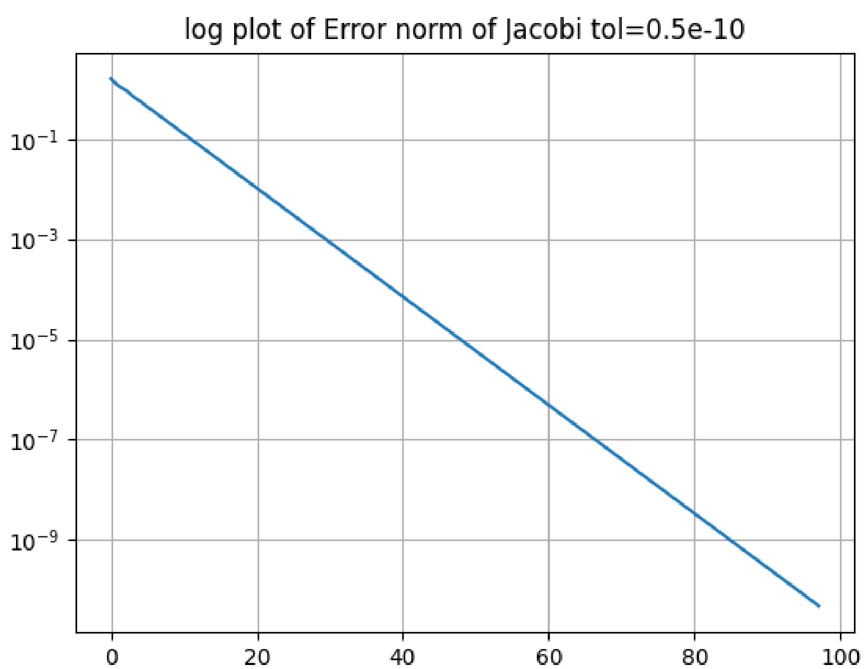

Figure 3: Jacobi method tol=0.5e-10

|x| plot:

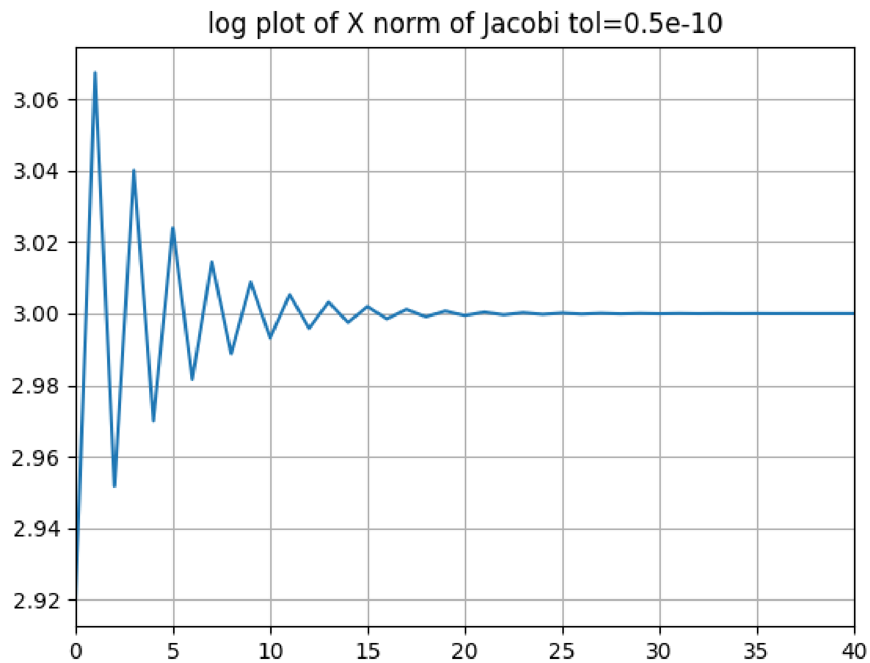

Figure 4: Jacobi method |x| tol=0.5e-10

Oppgave 3

Jacobi-method med 10 siffers nøyaktighet (stop kriterie $tol = 0.5e-10$). Konvergerer ved 18 iterasjoner ($n = 18$). Som vi ser er x_3 bedre enn 10 siffers nøyaktighet, og $|x|$ konvergerer med 10 siffers nøyaktighet allerede etter 4 iterasjoner (se tabell i koden)

GS ($tol = 0.5e-10$)	x_1	x_2	x_3
Approximated x_i	1.9999999999932219	2.0000000000020544	3.00000000000....

Og følgende nøyaktighet

GS ($tol = 0.5e-10$)	|x|	|e|
$norms$	3.00000000000....	3.388933578207798e-11

Error plot:

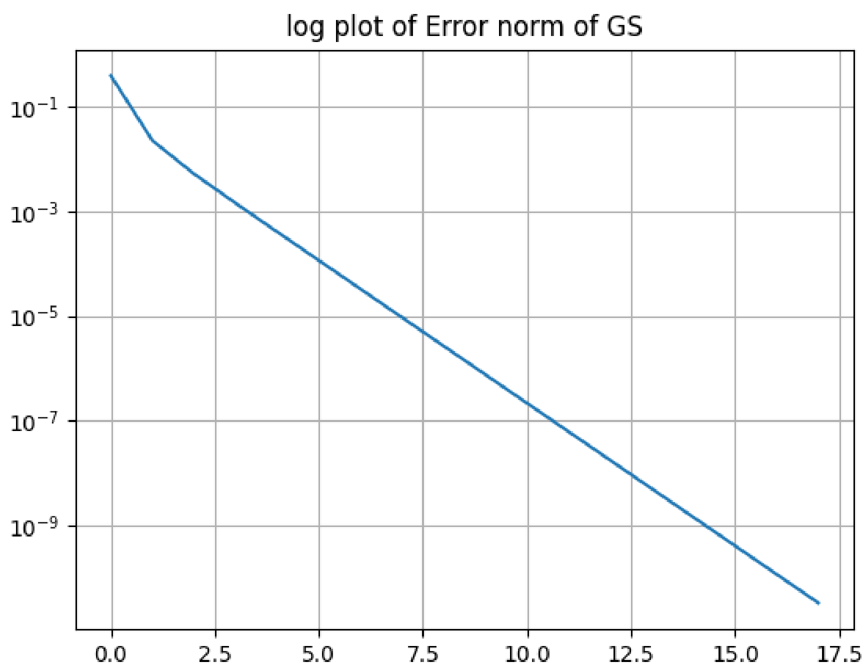

Figure 5: Gauss Seidel method tol=0.5e-10

|x| plot:

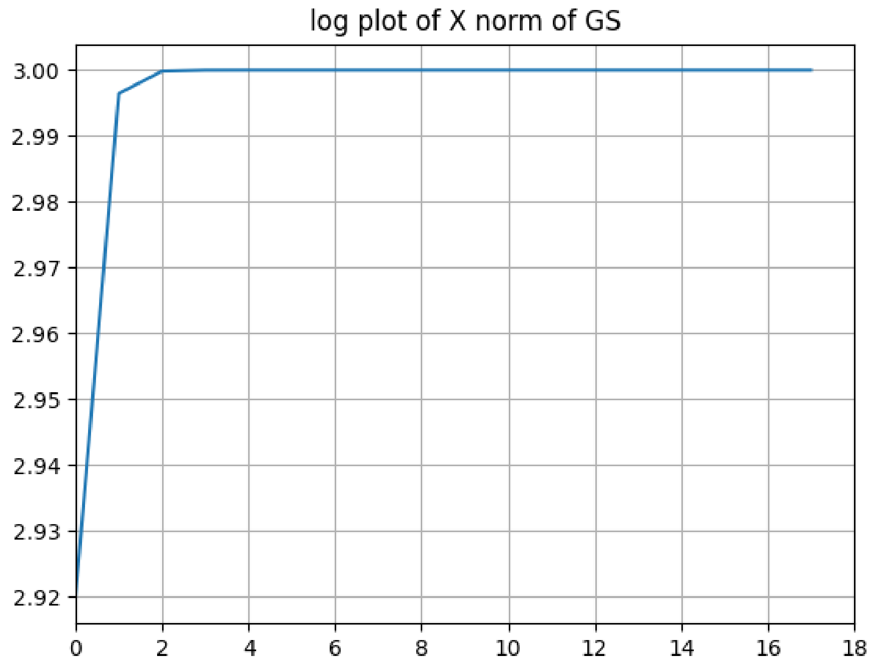

Figure 6: Gauss Seidel method |x| tol=0.5e-10

Oppgave 4

Som vi ser av antall iterasjoner for å nå 10 desimalers nøyaktighet Gauss Seidel betydlig mer effektiv enn Jacobi. Bare ved å bruke den nyeste tilgjengelige informasjonen i hvert steg knepper vi 80 steg på en liten matrise og som vi ser av plottet for error ser vi at det er lineær (GS en tanke sub lineær), altså vil det samme matrealisere seg for en større matrise. Det er altså mye å hente på GS, men ett større problem vil også ta mange iterasjoner, s.a metodene i seg selv er ikke veldig effektive. For å forbedre konvergens raten kan vi enten utvide Jacobi til en vektet utgave (3), eller Sucessive Over Relaxation (SOR) som er en vektet utgave av Gauss Seidel (4).

$$x_{i+1} = \omega \cdot D^{-1} \cdot b - (I - \omega \cdot D^{-1} \cdot A)) \cdot x_i \qquad (Weighted\ Jacobi) \tag{3}$$

$$x_{i+1} = (\omega \cdot L + D)^{-1} \cdot ((1-\omega) \cdot D \cdot x_i - \omega \cdot U \cdot x_i) + \omega(D + \omega \cdot L)^{-1} \cdot b \qquad (SOR) \tag{4}$$