# Mathematische Beschreibung der auf nlmodels möglichen Operationen

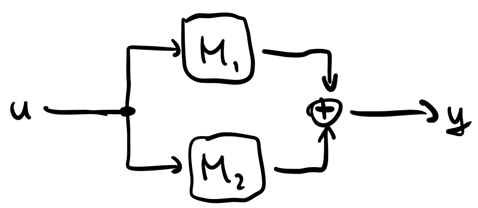
Im folgenden bezeichnen $M_1$ und $M_2$ zwei nichtlineare Modelle, die als nlmodel-Objekte vorliegen. Die Jacobimatrizen seien $A_i, B_i, C_i, D_i$, als Funktionen von $(x_i, u_i)$.

$$M_1: \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, u_1) \\ y_1 &= h_1(x_1, u_1) \end{aligned}$$

$$M_2: \begin{aligned} \dot{x}_2 &= f_2(x_2, u_2) \\ y_2 &= h_2(x_2, u_2) \end{aligned}$$

## Parallel interconnection [nlmodel.plus]

$$M = M_1 + M_2$$




$$M: \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\boldsymbol{\cdot}} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, u) \\ f_2(x_2, u) \end{bmatrix} =: f(x,u)$$

$$y = h_1(x_1, u) + h_2(x_2, u) =: h(x,u)$$

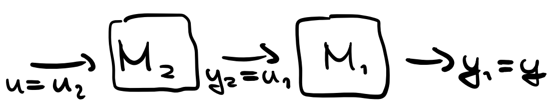
Jacobians: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial u} = D_1 + D_2$$

(in $(x_1, u)$ bzw. $(x_2, u)$ ausgewertet)

## Series interconnection [nlmodel.mtimes]

$$M = M_1 \cdot M_2$$




$$M: \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\boldsymbol{\cdot}} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, h_2(x_2, u)) \\ f_2(x_2, u) \end{bmatrix} = f(x,u)$$

$$y = h_1(x_1, h_2(x_2, u)) =: h(x,u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} B_1 D_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} C_1 & D_1 C_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial u} = D_1 D_2$$

wobei die Jacobimatrizen von $M_1$ im Punkt $(x_1, h_2(x_2, u))$ ausgewertet werden, und die von $M_2$ in $(x_2, u)$

## Horizontal concatenation [nlmodel.horzcat]

$$M = (M_1\ M_2): \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \longmapsto M_1 u_1 + M_2 u_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, u_1) \\ f_2(x_2, u_2) \end{bmatrix}$$

$$y = y_1 + y_2 = h_1(x_1, u_1) + h_2(x_2, u_2)$$

Jacobians:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 & D_2 \end{array}\right]$$

Die Jacobimatrizen von $M_1$ werden in $(x_1, u_1)$ und die von $M_2$ in $(x_2, u_2)$ ausgewertet.

## Vertical concatenation [nlmodel.vertcat]

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}: u \longmapsto \begin{pmatrix} M_1 u \\ M_2 u \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, u) \\ f_2(x_2, u) \end{bmatrix} =: f(x,u)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1, u) \\ h_2(x_2, u) \end{bmatrix} =: h(x,u)$$

Jacobians:

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_1 \\ 0 & C_2 & D_2 \end{array}\right]$$

ausgewertet in $(x_1, u_1)$ bzw. $(x_2, u_2)$

## nlmodel linearisieren [nlmodel.linearize]

Geht nur, wenn Jacobians vorhanden sind!

Gibt ss-Objekt mit den Jacobimatrizen $\frac{A|B}{C|D}$ ausgewertet in Ruhelage $(x_e, u_e)$ als Systemmatrizen zurück.

$h = h(x)$: $D$ darf für ss-model keine leere Matrix sein.

$$D = \frac{\partial h}{\partial u} = 0 \in \mathbb{R}^{m \times k} \Rightarrow \text{nicht leer, auch wenn } h = h(x)$$

## SS-model zu nlmodel: [ss2nlmodel.m]

Diese Funktion wird auch aufgerufen, wenn man dem Konstruktor von nlmodel ein ss-Objekt übergibt.

StateSpaceModel - Objekt repräsentiert LTI-System:

$$\dot{x}_\Delta = A x_\Delta + B u_\Delta$$
$$y_\Delta = C x_\Delta + D u_\Delta$$

Als nlmodel (mit Ruhelage als Offset optional)

Ruhelage: $(x_e, u_e)$, s.t. $f(x_e, u_e) = 0$
$y_e = h(x_e, u_e)$

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$y = h(x,u)$$

Es soll gelten:

$x - x_e = x_\Delta$ und $y - y_e = y_\Delta$ bei input $u = u_\Delta + u_e$

$$\Rightarrow \quad f(x,u) = A(x - x_e) + B(u - u_e)$$
$$h(x,u) = C(x - x_e) + D(u - u_e) + y_e$$

Jacobians: $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}$

## Jacobians of series interconnection (Derivation) [nlmodel.mtimes]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [f_1(x_1, h_2(x_2,u))]}{\partial x_1} & \frac{\partial [f_1(x_1, h_2(x_2,u))]}{\partial x_2} \\ \frac{\partial [f_2(x_2,u)]}{\partial x_1} & \frac{\partial [f_2(x_2,u)]}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x_1, h_2(x_2,u))} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right|_{(x_1, h_2(x_2,u))} \left.\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right|_{(x_2,u)} \\ 0 & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x_2,u)} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

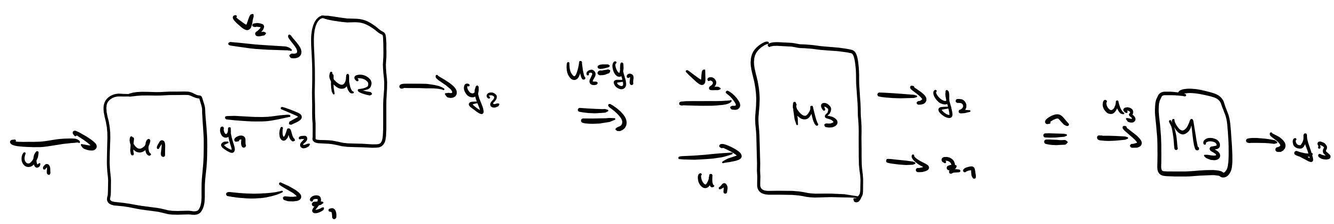
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [f_1(x_1, h_2(x_2,u))]}{\partial u} \\ \frac{\partial [f_2(x_2,u)]}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial h_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 D_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \dots = [C_1 \quad D_1 C_2]$$

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \dots = D_1 D_2$$

wobei die Jacobimatrizen von $M_1$ im Punkt $(x_1, h_2(x_2,u))$ ausgewertet werden, und die von $M_2$ in $(x_2, u)$

Series interconnection (advanced) [series_nl.m]




$M_1$: $\dot{x}_1 = f_1(x_1, u_1)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = h_1(x_1, u_1) = \begin{bmatrix} h_{11}(x_1, u_1) \\ h_{12}(x_1, u_1) \end{bmatrix}$$

$M_2$: $\dot{x}_2 = f_2\left(x_2, \begin{bmatrix} v_2 \\ u_2 \end{bmatrix}\right)$

$$y_2 = h_2\left(x_2, \begin{bmatrix} v_2 \\ u_2 \end{bmatrix}\right)$$

$M_3$: $\dot{x}_1 = f_1(x_1, u_1)$

$$\dot{x}_2 = f_2\left(x_2, \begin{bmatrix} v_2 \\ h_{11}(x_1, u_1) \end{bmatrix}\right)$$

$$y_2 = h_2\left(x_2, \begin{bmatrix} v_2 \\ h_{11}(x_1, u_1) \end{bmatrix}\right)$$

$$z_1 = h_{12}(x_1, u_1)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_3 = f_3(\underbrace{x_3}_{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}, \underbrace{u_3}_{\begin{bmatrix} v_2 \\ u_1 \end{bmatrix}}) := \begin{bmatrix} f_1(x_1, u_1) \\ f_2\left(x_2, \begin{bmatrix} v_2 \\ h_{11}(x_1, u_1) \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

$$y_3 = h_3(x_3, u_3) := \begin{bmatrix} h_2\left(x_2, \begin{bmatrix} v_2 \\ h_{11}(x_1, u_1) \end{bmatrix}\right) \\ h_{12}(x_1, u_1) \end{bmatrix}$$

$h_3 = h_3(x_3)$ dann wenn (hinreichend)

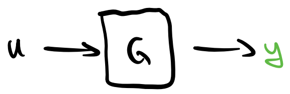
- $h_2 = h_2(x_2)$ und
- $h_{12} = h_{12}(x_1) \Rightarrow h_1 = h_1(x_1)$

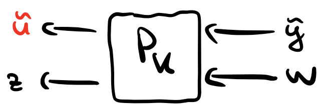
Jacobians sind hier nicht implementiert!

## Upper LFT for a non-linear state-space model [nl_upper_lft.m]

21.02.2023

Diese Funktion schließt den unten dargestellten Regelkreis bestehend aus dem nichtlinearen Modell G (Klasse "nlmodel") und dem linearen Modell $P_K$ (Klasse "ss"). Die in blau dargestellten Offsets werden berücksichtigt. G darf keinen direkten Durchgriff haben, um die Wohlgestelltheit auf einfache Art garantieren zu können.



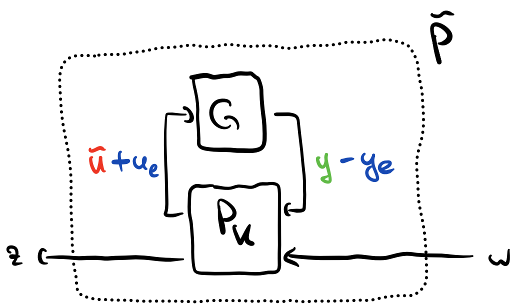

$$G: \quad \dot x = f(x,u), \qquad y = h(x)$$

$$P_K: \quad \begin{aligned} \dot x &= Ax + B_1 \breve y + B_2 w \\ \breve u &= C_1 x + D_{11}\breve y + D_{12} w \\ z &= C_2 x + D_{21}\breve y + D_{22} w \end{aligned}$$

Der Regelkreis wird durch folgende algebraische Beziehungen geschlossen:

$$u = \breve u + u_e \qquad \text{und} \qquad \breve y = y - y_e, \quad (y_e = h(x_e))$$

Das resultierende System besitzt folgende Dynamik:




stacked state: $x := \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \dot x_G &= f(x_G, C_1 x_K + D_{11}(h(x_G) - y_e) + D_{12} w + u_e) \\ \dot x_K &= A x_K + B_1 (h(x_G) - y_e) + B_2 w \\ z &= C_2 x_K + D_{21}(h(x_G) - y_e) + D_{22} w \end{aligned} \qquad (*)$$

Die Jacobimatrizen des resultierenden Systems lauten:

$$\breve P: \quad \left[\begin{array}{cc|c} A_G + D_{11} C_G & B_G C_1 & D_{12} \\ B_1 C_G & A & B_2 \\ \hline D_{21} C_G & C_2 & D_{22} \end{array}\right] \qquad \left(\text{als Funktion von } x = \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} \text{ und } w\right)$$

Die Jacobimatrizen $A_G, B_G, C_G, D_G$ des Systems G werden im Punkt

$$(x_G, C_1 x_K + D_{11}(h(x_G) - y_e) + D_{12} w + u_e)$$

ausgewertet (siehe Herleitung auf der nächsten Seite).

Im Fall verschwindender Offsets liefert das Star-Product den alg. Zusammenhang:

$$\begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \implies z = (P_{22} + P_{21} G (I - P_{11} G) P_{12}) w \qquad (u_e = 0,\ y_e = 0 \Rightarrow u = \breve u, y = \breve y)$$

$$y = G u$$

Zur Herleitung der Jacobians des resultierenden Systems betrachte dessen Vektorfeld $\tilde{f}$ und Output-Map $\tilde{h}$:

$$\tilde{f}(\tilde{x},w) := \begin{pmatrix} f(x_G, \overbrace{C_1 x_K + D_{11}(h(x_G)-y_e) + D_{12} w + u_e}^{=:u(\tilde{x},w)}) \\ A x_K + B_1(h(x_G)-y_e) + B_2 w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(\tilde{x},w) \\ \tilde{f}_2(\tilde{x},w) \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix}$$

$$\tilde{h}(\tilde{x},w) := C_2 x_K + D_{21}(h(x_G)-y_e) + D_{22} w$$

$$\Rightarrow \partial_{\tilde{x}} \tilde{f}\Big|_{(\tilde{x}_e,w_e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial[f(x_G, C_1 x_K + D_{11}(h(x_G)-y_e) + D_{12} w + u_e]}{\partial x_G} & \frac{\partial[f(x_G, C_1 x_K + D_{11}(h(x_G)-y_e) + D_{12} w + u_e]}{\partial x_K} \\ \frac{\partial[A x_K + B_1(h(x_G)-y_e) + B_2 w]}{\partial x_G} & \frac{\partial[A x_K + B_1(h(x_G)-y_e) + B_2 w]}{\partial x_K} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_{x_G} f\Big|_{(x_{G,e},\, u(\tilde{x}_e,w_e))} + \partial_u f\Big|_{(x_{G,e},\, u(\tilde{x}_e,w_e))} D_{11} \partial_{x_G} h\Big|_{x_{G,e}} & \partial_u f\Big|_{(x_{G,e},\, u(\tilde{x}_e,w_e))} C_1 \\ B_1 \partial_{x_G} h\Big|_{x_{G,e}} & A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_G + B_G D_{11} C_G & B_G C_1 \\ B_1 C_G & A \end{pmatrix}$$

$$\partial_w \tilde{f}\Big|_{(\tilde{x}_e,w_e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial[f(x_G, C_1 x_K + D_{11}(h(x_G)-y_e) + D_{12} w + u_e]}{\partial w} \\ \frac{\partial[A x_K + B_1(h(x_G)-y_e) + B_2 w]}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u f\Big|_{(x_{G,e},\, u(\tilde{x}_e,w_e))} D_{12} \\ B_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_G D_{12} \\ B_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{\tilde{x}} \tilde{h}\Big|_{(\tilde{x}_e,w_e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial[C_2 x_K + D_{21}(h(x_G)-y_e) + D_{22} w]}{\partial x_G} & \frac{\partial[C_2 x_K + D_{21}(h(x_G)-y_e) + D_{22} w]}{\partial x_K} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_{21} \partial_{x_G} h\Big|_{x_{G,e}} & C_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_{21} C_G & C_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_w \tilde{h}\Big|_{(\tilde{x}_e,w_e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial[C_2 x_K + D_{21}(h(x_G)-y_e) + D_{22} w]}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$= D_{22}$$

# Generalized Plant partitionieren im State-Space

split_plant.m

Diese Funktion partitioniert die Systemmatrizen eines LTI Systems entsprechend der Darstellung als generalized Plant.
Dazu müssen die Dimensionen $n_x, n_y, n_z, n_w$ angegeben werden.

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \Rightarrow P(s) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

state space:

$$\dot{x} = Ax + B \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = Cx + D \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{array}{c|c|cc} & x & w & u \\ \hline \dot{x} & A & B_1 & B_2 \\ \hline z & C_1 & D_{11} & D_{12} \\ y & C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}$$

| | $\rightarrow$ | Zeilen | Spalten | Startzeile | Startspalte |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $x \rightarrow \dot{x}$ | $n_x$ | $n_x$ | 1 | 1 |
| $B_1$ | $w \rightarrow \dot{x}$ | $n_x$ | $n_w$ | 1 | 1 |
| $B_2$ | $u \rightarrow \dot{x}$ | $n_x$ | $n_u$ | 1 | $n_w + 1$ |
| $C_1$ | $x \rightarrow z$ | $n_z$ | $n_x$ | 1 | 1 |
| $C_2$ | $x \rightarrow y$ | $n_y$ | $n_x$ | $n_z + 1$ | 1 |
| $D_{11}$ | $w \rightarrow z$ | $n_z$ | $n_w$ | 1 | 1 |
| $D_{12}$ | $u \rightarrow z$ | $n_z$ | $n_u$ | 1 | $n_w + 1$ |
| $D_{21}$ | $w \rightarrow y$ | $n_y$ | $n_w$ | $n_z + 1$ | 1 |
| $D_{22}$ | $u \rightarrow y$ | $n_y$ | $n_u$ | $n_z + 1$ | $n_w + 1$ |