¡¡APRUEBE SU EXAMEN CON SCHAUM!!

Álgebra superior

Schaum

3ª EDICIÓN

Murray R. Spiegel • Robert E. Moyer

- ABARCA TODOS LOS FUNDAMENTOS DEL CURSO Y COMPLEMENTA CUALQUIER TEXTO SOBRE EL TEMA
- PROPORCIONA TÉCNICAS EFECTIVAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
- OFRECE 1,940 PROBLEMAS CON SUS RESPUESTAS
- MÁS DE UN CENTENAR DE PROBLEMAS RESUELTOS
- LA GUÍA PERFECTA PARA EL AUTOAPRENDIZAJE

Utilícelo para las siguientes asignaturas:

- ✓ ÁLGEBRA SUPERIOR
- ✓ PRECÁLCULO
- ✓ ÁLGEBRA I
- ✓ ÁLGEBRA II
- ✓ ÁLGEBRA LINEAL
- ✓ ÁLGEBRA INTERMEDIA
- ✓ ARITMÉTICA Y TEMAS SOBRE ÁLGEBRA

Mc Graw Hill

ÁLGEBRA SUPERIOR

ÁLGEBRA SUPERIOR

Tercera edición

MURRAY R. SPIEGEL, Ph.D.
Former Professor and Chairman, Mathematics Department
Rensselaer Polytechnic Institute, Hartford Graduate Center

ROBERT E. MOYER, Ph.D.
Associate Professor of Mathematics
Southwest Minnesota State University

Revisión técnica

Dra. Natalia Antonyan
Profesora del Departamento de Matemáticas
ITESM, campus Ciudad de México

McGraw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
LISBOA • MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Director editorial: Ricardo A. del Bosque Alayón
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Editora de desarrollo: Lorena Campa Rojas
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Carlos Roberto Cordero Pedraza

ÁLGEBRA SUPERIOR
Tercera edición

McGraw-Hill Interamericana

A Subsidiary of ***The McGraw-Hill*** *Companies, Inc.*
Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN-13: 978-970-10-6255-5
ISBN-10: 970-10-6255-8

ISBN de la edición anterior: 970-10-2172-X

Traducido de la tercera edición en inglés de la obra Shaum's Outlines of COLLEGE ALGEBRA,
by Murray R. Spiegel and Robert E. Moyer.
ISBN 10: 0-07-145227-3
ISBN 13: 978-0-07-145227-4

1234567890 09865432107

Impreso en México *Printed in Mexico*

The McGraw-Hill Companies

Acerca de los autores

MURRAY R. SPIEGEL recibió el grado de Maestro en Ciencias en Física y el doctorado en Matemáticas de Cornell University. Ha ocupado puestos en Harvard University, Columbia University, Oak Ridge y Rensselaer Polytechnic Institute y ha trabajado como consultor en matemáticas en varias compañías de prestigio. Su último puesto fue profesor y jefe de Matemáticas en el Rensselaer Polytechnic Institute, Hatford Graduate Center. Enfocó su interés en gran número de ramas de las Matemáticas, en especial en las que involucran aplicaciones a problemas de Física e Ingeniería. Es autor de gran número de artículos y de 14 libros sobre diferentes temas de matemáticas.

El **DR. ROBERT E. MOYER** ha impartido Matemáticas y enseñanza de las Matemáticas en Southwest Minnesota State University en Marshall, Minnesota, desde 2002. Antes de ingresar a SMSU, impartió clases en Fort Valley State University en Fort Valley, Georgia, desde 1985 hasta el 2000, trabajando como jefe del Departamento de Matemáticas y Física durante el periodo 1992-1994.

Antes de impartir clases en la universidad, el Dr. Moyer trabajó siete años como consultor en Matemáticas en la Agencia Regional de Servicios Educativos de cinco condados en Georgia y doce años como profesor de Matemáticas de preparatoria en Illinois. Ha diseñado e impartido cursos a profesores de Matemáticas.

Recibió su doctorado en Enseñanza de Matemáticas de la University of Illinois (Urbana-Champaign) en 1974. Recibió el grado de Maestro en Ciencias en 1967 y el grado de licenciatura en Ciencias en 1964, ambos en enseñanza de Matemáticas por la Southern Illinois University (Carbondale).

PREFACIO

Esta tercera edición conserva la amplitud de la segunda de tal forma que todos los temas que incluye la enseñanza del álgebra superior están en una sola fuente. Reconociendo que el uso de las tablas de logaritmos y de los determinantes es cada día menor, se redujo el material acerca de estas dos áreas y los dos capítulos sobre determinantes de la segunda edición fueron transformados en uno solo en esta nueva edición. El material acerca de la resolución de problemas utilizando logaritmos en forma manual se conservó para aquellos que desean aprender cómo resolverlos antes de utilizar una calculadora. El texto también conserva las pruebas de las propiedades de los determinantes con el fin de subrayar las bases de las propiedades utilizadas en la evaluación de los mismos.

Este libro es muy completo por sí solo y pueden utilizarlo tanto quienes estudian por primera vez álgebra superior, como aquellos que desean repasar sus principios fundamentales y procedimientos. Quienes estudien álgebra avanzada en preparatoria podrán utilizar este libro como una fuente adicional de ejemplos, explicaciones y problemas. El tratamiento minucioso de los temas permite al instructor utilizar este libro como el texto para un curso, como un recurso para obtener material acerca de un tema específico o como una fuente de problemas adicionales.

Cada capítulo cuenta con un resumen de las definiciones y teoremas necesarios seguidos por un conjunto de problemas resueltos. Los problemas resueltos incluyen las pruebas de los teoremas y las deducciones de las fórmulas. Los capítulos terminan con un conjunto de problemas complementarios y sus respuestas.

El uso de una calculadora es elección del propio estudiante, pues aunque no es necesaria, puede utilizarse con el libro. Tampoco existen instrucciones acerca de cómo utilizar una calculadora gráfica para resolver los problemas, sin embargo, en varios casos de procedimientos generales, si el alumno decide utilizarla, deberá consultar el manual de la calculadora que esté utilizando para implantar los procedimientos.

DR. ROBERT E. MOYER
Associate Professor of Mathematics
Southwest Minnesota State University

CONTENIDO

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON LOS NÚMEROS

1

1.1 LAS CUATRO OPERACIONES

Cuatro operaciones son fundamentales en el álgebra y en la aritmética. Éstas son la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Cuando se suman dos números a y b, la adición se expresa como $a + b$. Por lo tanto $3 + 2 = 5$.

Cuando el número b se resta de un número a, la diferencia se expresa como $a - b$. Por lo tanto $6 - 2 = 4$.

La resta puede definirse en términos de la suma. Esto es, se puede definir que $a - b$ represente un número x de tal forma que x sumado con b dé a o $x + b = a$. Por ejemplo, $8 - 3$ es un número x que cuando se suma a 3 da 8, es decir, $x + 3 = 8$; por lo tanto $8 - 3 = 5$.

El producto de dos números a y b es tal que $a \times b = c$. La operación de multiplicación puede indicarse por una cruz, un punto o un paréntesis. Por lo tanto $5 \times 3 = 5 \cdot 3 = 5(3) = (5)(3) = 15$, donde los factores son 5 y 3 y el producto es 15. Cuando se utilizan letras, como en el álgebra, la notación $p \times q$ se evita a menudo ya que $\times$ podría confundirse con una letra que representara un número.

Cuando un número a se divide entre un número b, el cociente obtenido se escribe como

$$a \div b \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} \quad \text{o} \quad a/b,$$

donde a se llama dividendo y b se llama divisor. La expresión a/b también es conocida como una fracción cuyo numerador es a y su denominador es b.

La división entre cero no está definida. Vea los problemas 1.1 *b*) y *e*).

La división puede definirse en términos de la multiplicación. Esto es, se puede considerar a/b como ese número x que al multiplicarse por b resulta a, es decir, $bx = a$. Por ejemplo, $6/3$ es un número x tal que 3 multiplicado por x da 6, o $3x = 6$; por lo tanto, $6/3 = 2$.

1.2 SISTEMA DE NÚMEROS REALES

El sistema de números reales, como se conoce en la actualidad, es el resultado de un avance gradual, como se indica a continuación.

1. *Números naturales* 1, 2, 3, 4,… (los puntos suspensivos significan "y así sucesivamente") son utilizados para contar y se conocen también como enteros positivos. Si dos de dichos números son sumados o multiplicados, el resultado es siempre un número natural.
2. *Números positivos racionales* o fracciones positivas son los cocientes de dos enteros positivos tales como $2/3$, $8/5$ y $121/17$. Los números racionales positivos incluyen al conjunto de números naturales. Por lo tanto, el número racional $3/1$ es el número natural 3.
3. *Números irracionales positivos* no son racionales, tales como $\sqrt{2}$ y π.
4. El *cero* se escribe 0 y surge con el fin de agrandar el sistema numérico para permitir operaciones como $6 - 6$ o $10 - 10$. El cero tiene la propiedad de que cualquier número multiplicado por cero da cero. El cero dividido entre cualquier número $\neq 0$ (es decir, no es igual a cero) es cero.
5. Enteros *negativos*; los números racionales negativos y los números irracionales negativos tales como -3, $-2/3$ y $-\sqrt{2}$, surgen para agrandar el sistema numérico para permitir operaciones como $2 - 8$, $\pi - 3\pi$ o $2 - 2\sqrt{2}$.

Cuando no se coloca ningún signo antes de un número, se entiende que el signo es positivo. Por ende, 5 es $+5$, $\sqrt{2}$ es $+\sqrt{2}$. Se considera el cero como un número racional sin signo.

El sistema numérico real consiste de una colección de números racionales e irracionales positivos y negativos y el cero.

Nota: La palabra "real" se utiliza en contradicción con otros números que contienen $\sqrt{-1}$, los cuales son conocidos como *imaginarios* y se estudiarán después, aunque son muy útiles en las matemáticas y las ciencias. A menos que se especifique otra cosa, sólo se utilizarán números reales.

1.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS REALES

A menudo es de utilidad representar a los números reales por medio de puntos sobre una línea. Para llevar a cabo lo anterior, seleccione un punto sobre una línea para representar el número real cero y llame a este punto el origen. Los enteros positivos $+1$, $+2$, $+3$,… están asociados entonces con los puntos sobre la línea a las distancias 1, 2, 3,… unidades respectivamente a la *derecha* del origen (vea la figura 1-1), mientras que los enteros negativos -1, -2, -3,… están asociados con los puntos sobre la línea a las distancias 1, 2, 3,… unidades, respectivamente, a la *izquierda* del origen.

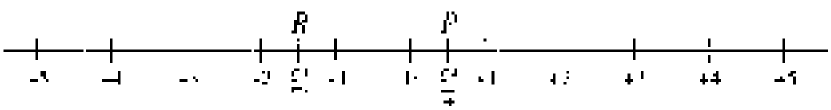


Figura 1-1

El número racional $1/2$ se representa sobre esta escala por un punto P a la mitad de 0 y $+1$. El número negativo $-3/2$ o $-1\frac{1}{2}$ se representa por un punto R a $1\frac{1}{2}$ unidades a la izquierda del origen.

Se puede demostrar que existe uno y sólo un punto sobre la línea que corresponde a cada número real; y de manera inversa, para cada punto sobre la línea corresponde uno y sólo un número real.

La posición de los números reales sobre una línea establece un orden en el sistema de números reales. Si un punto A se encuentra a la derecha de otro punto B sobre la línea, se dice que el número que corresponde a A es *más grande o mayor* que el número que corresponde a B, o que el número que corresponde a B es *menor o más pequeño* que el que corresponde a A. Los símbolos "mayor que" y "menor que" son $>$ y $<$ respectivamente. Estos símbolos se llaman "signos de desigualdad".

Por lo tanto, el 5 se encuentra a la derecha del 3, 5 es mayor que 3 o $5 > 3$; también se puede decir que 3 es menor que 5 y escribir $3 < 5$. De forma similar, puesto que -6 se encuentra a la izquierda de -4, -6 es menor que -4, es decir, $-6 < -4$; también se puede escribir $-4 > -6$.

Los términos valor absoluto o valor numérico de un número se refieren a la distancia desde el origen hasta ese número sobre una línea numérica. El valor absoluto se indica por medio de dos líneas verticales alrededor del número. Por lo tanto, $|-6| = 6$, $|+4| = 4$, $|-3/4| = 3/4$.

1.4 PROPIEDADES DE LA SUMA Y LA MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

1. *Propiedad conmutativa de la suma* El orden de la suma de dos números no afecta el resultado.

   Por lo tanto, $a + b = b + a, \qquad 5 + 3 = 3 + 5 = 8$

2. *Propiedad asociativa de la suma* Los términos de una suma pueden agruparse de cualquier forma sin que ello afecte al resultado.

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad 3 + 4 + 1 = 3 + (4 + 1) = (3 + 4) + 1 = 8$$

3. *Propiedad conmutativa de la multiplicación* El orden de los factores de un producto no afecta el resultado.

$$a \cdot b = b \cdot a, \qquad 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 10$$

4. *Propiedad asociativa de la multiplicación* Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier forma sin que ello afecte el resultado.

$$abc = a(bc) = (ab)c, \qquad 3 \cdot 4 \cdot 6 = 3(4 \cdot 6) = (3 \cdot 4)6 = 72$$

5. *Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma* El producto de un número a por la suma de dos números $(b + c)$ es igual a la suma de los productos ab y ac.

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad 4(3 + 2) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 20$$

Se pueden hacer extensiones de estas leyes. Por lo tanto, se pueden sumar los números a, b, c, d, e agrupándolos en cualquier orden, como por ejemplo $(a + b) + c + (d + e)$, $a + (b + c) + (d + e)$. De forma similar, en la multiplicación se puede escribir $(ab)c(de)$ o $a(bc)(de)$, y el resultado será independiente del orden o agrupamiento.

1.5 LEYES DE LOS SIGNOS

1. Para sumar dos números con signos iguales, sume sus valores absolutos y coloque el signo común. Por lo tanto, $3 + 4 = 7$, $(-3) + (-4) = -7$.

2. Para sumar dos números con signos diferentes, encuentre la diferencia entre sus valores absolutos y coloque el signo del número que tenga el valor absoluto mayor.

EJEMPLOS 1.1 $17 + (-8) = 9, \qquad (-6) + 4 = \ 2, \qquad (-18) + 15 = -3$

3. Para restar un número b de otro número a, cambie la operación a suma y reemplace b por su opuesto, $-b$.

EJEMPLOS 1.2 $12 - (7) = 12 + (-7) = 5, \qquad (-9) - (4) = -9 + (-4) = -13, \qquad 2 - (-8) = 2 + 8 = 10$

4. Para multiplicar (o dividir) dos números que tengan signos iguales, multiplique (o divida) sus valores absolutos y anteponga el signo más (o ningún signo).

EJEMPLOS 1.3 $(5)(3) = 15, \qquad (-5)(-3) = 15, \qquad \dfrac{-6}{-3} = 2$

5. Para multiplicar (o dividir) dos números que tengan signos diferentes, multiplique (o divida) sus valores absolutos y anteponga el signo menos.

EJEMPLOS 1.4 $(-3)(6) = -18, \qquad (3)(-6) = -18, \qquad \dfrac{-12}{4} = -3$

1.6 EXPONENTES Y POTENCIAS

Cuando un número a se multiplica por sí mismo n veces, el producto $a \cdot a \cdot a \cdots a$ (n veces) se indica por el símbolo a^n el cual se lee como "la *enésima* potencia de a" o "a a la n".

EJEMPLOS 1.5 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$, $\quad (-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$
$2 \cdot x \cdot x \cdot x = 2x^3$, $\quad a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b = a^3b^2$, $\quad (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)^3$

En a^n, el número a se le llama *base* y el entero positivo n se llama *exponente*.
Si p y q son enteros positivos, entonces las leyes de los exponentes son las siguientes:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $\quad$ Por lo tanto: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
2. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = \dfrac{1}{a^{q-p}}$ si $a \neq 0$ $\quad \dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3; \quad \dfrac{3^4}{3^6} = \dfrac{1}{3^{6-4}} = \dfrac{1}{3^2}$
3. $(a^p)^q = a^{pq}$ $\quad (4^2)^3 = 4^6, \quad (3^4)^2 = 3^8$
4. $(ab)^p = a^pb^p, \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$ si $b \neq 0$ $\quad (4 \cdot 5)^2 = 4^2 \cdot 5^2 \quad \left(\dfrac{5}{2}\right)^3 = \dfrac{5^3}{2^3}$

1.7 OPERACIONES CON FRACCIONES

Las operaciones con fracciones pueden llevarse a cabo de acuerdo con las reglas siguientes:

1. El valor de una fracción permanece igual si su numerador y denominador se multiplican o dividen entre el mismo número siempre y cuando dicho número sea diferente de cero.

EJEMPLOS 1.6 $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \dfrac{6}{8}, \quad \dfrac{15}{18} = \dfrac{15 \div 3}{18 \div 3} = \dfrac{5}{6}$

2. El cambio de signo del numerador o denominador de una fracción cambia el signo de la propia fracción.

EJEMPLOS 1.7 $\dfrac{-3}{5} = -\dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{-5}$

3. La suma de dos fracciones con un común denominador da una fracción cuyo numerador es la suma de los numeradores de las fracciones dadas y cuyo denominador es igual al común denominador.

EJEMPLOS 1.8 $\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{3+4}{5} = \dfrac{7}{5}$

4. La suma o diferencia de dos fracciones que tengan diferentes denominadores puede encontrarse escribiendo las fracciones con un común denominador.

EJEMPLOS 1.9 $\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{12} + \dfrac{8}{12} = \dfrac{11}{12}$

5. El producto de dos fracciones es una fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de las fracciones dadas y cuyo denominador es el producto de los denominadores de las fracciones.

EJEMPLOS 1.10 $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}, \quad \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{8}{9} = \dfrac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$

6. El recíproco de una fracción es otra cuyo numerador es el denominador de la fracción dada y cuyo denominador es el numerador de la fracción dada. Por lo tanto, el recíproco de 3 (es decir, $3/1$) es $1/3$. De forma similar, los recíprocos de $5/8$ y $-4/3$ son $8/5$ y $3/-4$ o $-3/4$, respectivamente.

7. Para dividir dos fracciones, multiplique la primera por el recíproco de la segunda.

EJEMPLOS 1.11 $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}, \quad \dfrac{2}{3} \div \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

Este resultado puede expresarse como sigue:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a/b \cdot bd}{c/d \cdot bd} = \frac{ad}{bc}.$$

Problemas resueltos

1.1 Escriba la suma S, diferencia D, producto P y cociente Q de cada uno de los pares de números siguientes:

a) 48, 12; *b*) 8, 0; *c*) 0, 12; *d*) 10, 20; *e*) 0, 0.

SOLUCIÓN

a) $S = 48 + 12 = 60$, $D = 48 - 12 = 36$, $P = 48(12) = 576$, $Q = 48 \div 12 = \frac{48}{12} = 4$

b) $S = 8 + 0 = 8$, $D = 8 - 0 = 8$, $P = 8(0) = 0$, $Q = 8 \div 0$ u $8/0$
Sin embargo, por definición $8/0$ es un número x (si existe) tal que $x(0) = 8$. Es claro que no existe, puesto que cualquier número multiplicado por 0 debe dar 0.

c) $S = 0 + 12 = 12$, $D = 0 - 12 = -12$, $P = 0(12) = 0$, $Q = \frac{0}{12} = 0$

d) $S = 10 + 20 = 30$, $D = 10 - 20 = -10$, $P = 10(20) = 200$, $Q = 10 \div 20 = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

e) $S = 0 + 0 = 0$, $D = 0 - 0 = 0$, $P = 0(0) = 0$, $Q = 0 \div 0$ o $0/0$ es por definición un número x (si existe) tal que $x(0) = 0$. Puesto que esto es válido para *todos* los números x, no existe ningún número que pueda representarse por $0/0$.

A partir de *b*) y *e*) se puede observar que la división entre cero es una operación indefinida.

1.2 Efectúe cada una de las operaciones indicadas.

a) $42 + 23$, $23 + 42$

b) $27 + (48 + 12)$, $(27 + 48) + 12$

c) $125 - (38 + 27)$

d) $6 \cdot 8$, $8 \cdot 6$

e) $4(7 \cdot 6)$, $(4 \cdot 7)6$

f) $35 \cdot 28$

g) $756 \div 21$

h) $\dfrac{(40 + 21)(72 - 38)}{(32 - 15)}$

i) $72 \div 24 + 64 \div 16$

j) $4 \div 2 + 6 \div 3 - 2 \div 2 + 3 \cdot 4$

k) $128 \div (2 \cdot 4)$, $(128 \div 2) \cdot 4$

SOLUCIÓN

a) $42 + 23 = 65$, $23 + 42 = 65$. Por lo tanto, $42 + 23 = 23 + 42$.
Esto ilustra la ley conmutativa de la suma.

b) $27 + (48 + 12) = 27 + 60 = 87$, $(27 + 48) + 12 = 75 + 12 = 87$. Por lo tanto, $27 + (48 + 12) = (27 + 48) + 12$.
Esto ilustra la ley asociativa de la suma.

c) $125 - (38 + 27) = 125 - 65 = 60$.

d) $6 \cdot 8 = 48$, $8 \cdot 6 = 48$. Por lo tanto, $6 \cdot 8 = 8 \cdot 6$, ilustra la ley conmutativa de la multiplicación.

e) $4(7 \cdot 6) = 4(42) = 168$, $(4 \cdot 7)6 = (28)6 = 168$. Por lo tanto $4(7 \cdot 6) = (4 \cdot 7)6$.
Esto ilustra la ley asociativa de la multiplicación.

f) $(35)(28) = 35(20 + 8) = 35(20) + 35(8) = 700 + 280 = 980$ por la ley distributiva de la multiplicación.

g) $\frac{756}{21} = 36$ Verificación: $21 \cdot 36 = 756$.

h) $\dfrac{(40 + 21)(72 - 38)}{(32 - 15)} = \dfrac{(61)(34)}{17} = \dfrac{61 \cdot \overset{2}{\cancel{34}}}{\underset{1}{\cancel{17}}} = 61 \cdot 2 = 122.$

i) Los cálculos en aritmética, por convención, obedecen la regla siguiente: Las operaciones de multiplicación y división preceden a las operaciones de suma y resta.
Por lo tanto, $72 \div 24 + 64 \div 16 = 3 + 4 = 7$.

j) La regla de *i*) se aplica aquí. Por lo tanto, $4 \div 2 + 6 \div 3 - 2 \div 2 + 3 \cdot 4 = 2 + 2 - 1 + 12 = 15$.

k) $128 \div (2 \cdot 4) = 128 \div 8 = 16$, $(128 \div 2) \cdot 4 = 64 \cdot 4 = 256$.
De aquí que si uno escribe $128 \div 2 \cdot 4$ sin paréntesis, se efectuarían las operaciones de multiplicación y división en el orden en que se presentan de izquierda a derecha, por lo que $128 \div 2 \cdot 4 = 64 \cdot 4 = 256$.

1.3 Clasifique cada uno de los números siguientes de acuerdo con las categorías: número real, entero positivo, entero negativo, número racional, número irracional, ninguno de los anteriores.

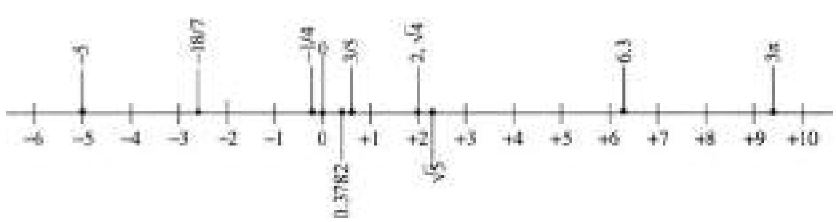
$$-5,\ 3/5,\ 3\pi,\ 2,\ -1/4,\ 6{:}3,\ 0,\ \sqrt{5},\ \sqrt{-1},\ 0{:}3782,\ \sqrt{4},\ \ 18/7$$

SOLUCIÓN Si el número pertenece a una o más categorías, éstas se indican con un signo de verificación.

	Número real	**Entero positivo**	**Entero negativo**	**Número racional**	**Número irracional**	**Ninguno de los anteriores**
-5	√		√	√		
$3/5$	√			√		
3π	√				√	
2	√	√		√		
$-1/4$	√			√		
6.3	√			√		
0	√			√		
$\sqrt{5}$	√				√	
$\sqrt{-1}$						√
0.3782	√	√		√		
$\sqrt{4}$	√			√		
$-18/7$	√			√		

1.4 Represente (de manera aproximada) con un punto, en una escala gráfica, cada uno de los números reales del problema 1.3.

Nota: 3π es aproximadamente $3(3.14) = 9.42$, de tal forma que el punto correspondiente se encuentra entre $+9$ y $+10$ como se indica. $\sqrt{5}$ se encuentra entre 2 y 3, su valor con tres cantidades decimales es 2.236.



1.5 Coloque el símbolo de desigualdad adecuado ($<$ o $>$) entre cada par de números reales.

a) 2, 5 *c*) 3, 1 *e*) $-4, -3$ *g*) $\sqrt{7}, 3$ *i*) $-3/5, -1/2$
b) 0, 2 *d*) $-4, +2$ *f*) $\pi, 3$ *h*) $-\sqrt{2}, -1$

SOLUCIÓN

a) $2 < 5$ (o $5 > 2$), es decir, 2 *es menor que* 5 (o 5 *es mayor que* 2)
b) $0 < 2$ (o $2 > 0$) *e*) $-4 < -3$ (o $-3 > -4$) *h*) $-\sqrt{2} < -1$ ($-1 > -\sqrt{2}$)
c) $3 > -1$ (o $-1 < 3$) *f*) $\pi > 3$ (o $3 < \pi$) *i*) $-3/5 < -1/2$ puesto que $-.6 < -.5$
d) $-4 < +2$ (o $+2 > -4$) *g*) $3 > \sqrt{7}$ (o $\sqrt{7} < 3$)

1.6 Escriba cada uno de los grupos de números reales siguientes en orden ascendente de su magnitud.

a) $-3, 22/7, \sqrt{5}, -3.2, 0$ *b*) $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -1{:}6, -3/2$

SOLUCIÓN

a) $-3.2 < -3 < 0 < \sqrt{5}, < 22/7$ *b*) $-\sqrt{3}, < -1.6 < -3/2, -\sqrt{2}$

1.7 Escriba el valor absoluto de cada uno de los números reales siguientes:

$$-1, +3, 2/5, \quad -\sqrt{2}, -3.14, 2.83, -3/8, -\pi, +5/7$$

SOLUCIÓN Se pueden escribir los valores absolutos de estos números como,

$$|-1|, |+3|, |2/5|, |-\sqrt{2}, |, |-3.14|, |2.83|, |-3/8|, |-\pi|, |+5/7|$$

que a su vez puede escribirse como 1, 3, $2/5$, $\sqrt{2}$, 3.14, 2.83, $3/8$, π, $5/7$, respectivamente.

1.8 A continuación se ilustran la suma y la resta de números reales.

a) $(-3) + (-8) = 11$ *d*) $-2 + 5 = 3$ *g*) $50 - 23 - 27 = 0$
b) $(-2) + 3 = 1$ *e*) $-15 + 8 = -7$ *h*) $-3 - (-4) = -3 + 4 = 1$
c) $(-6) + 3 = -3$ *f*) $(-32) + 48 + (-10) = 6$ *i*) $-(-14) + (-2) = 14 - 2 = 12$

1.9 Escriba la suma *S*, diferencia *D*, producto *P* y cociente *C* de cada uno de los pares de números reales siguientes:

a) $-2, 2$; *b*) $-3, 6$; *c*) $0, -5$; *d*) $-5, 0$

SOLUCIÓN

a) $S = -2 + 2 = 0$, $D = (-2)\ \ -2 = -4$, $P = (-2)(2) = -4$, $C = -2/2 = -1$
b) $S = (-3) + 6 = 3$, $D = (-3) -6 = -9$, $P = (-3)(6) = -18$, $C = -3/6 = -1/2$
c) $S = 0 + (-5) = -5$, $D = 0 - (-5) = 5$, $P = (0)(-5) = 0$, $C = 0/-5 = 0$
d) $S = (-5) + 0 = -5$, $D = (-5) - 0 = -5$, $P = (-5)(0) = 0$, $C = -5/0$ (una operación indefinida, por lo que no es un número)

1.10 Efectúe las operaciones que se indican.

a) $(5)(-3)(-2) = [(5)(-3)](-2) = (-15)(-2) = 30$
$\qquad\qquad\qquad = (5)[(-3)(-2)] = (5)(6) \qquad = 30$

El arreglo de los factores de un producto no afecta el resultado.

b) $8(-3)(10) = -240$

c) $\dfrac{8(-2)}{-4} + \dfrac{(-4)(-2)}{2} = \dfrac{-16}{-4} + \dfrac{8}{2} = 4 + 4 = 8$

d) $\dfrac{12(-40)(-12)}{5(-3) - 3(-3)} = \dfrac{12(-40)(-12)}{-15 - (-9)} = \dfrac{12(-40)(-12)}{-6} = -960$

1.11 Evalúe lo siguiente:

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) $5(3)^2 = 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$

c) $2^4 \cdot 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} = 1\,024$

d) $2^5 \cdot 5^2 = (32)(25) = 800$

e) $\dfrac{3^4 \cdot 3^3}{3^2} = \dfrac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5 = 243$

f) $\dfrac{5^2 \cdot 5^3}{5^7} = \dfrac{5^5}{5^7} = \dfrac{1}{5^{7-5}} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

g) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

h) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$

i) $\dfrac{(3^4)^3 \cdot (3^2)^4}{(-3)^{15} \cdot 3^4} = \dfrac{3^{12} \cdot 3^8}{-3^{15} \cdot 3^4} = -\dfrac{3^{20}}{3^{19}} = -3^1 = -3$

j) $\dfrac{3^8}{3^5} - \dfrac{4^2 \cdot 2^4}{2^6} + 3(-2)^3 = 3^3 - \dfrac{4^2}{2^2} + 3(-8) = 27 - 4 - 24 = -1$

1.12 Escriba cada una de las fracciones siguientes como una fracción equivalente que tenga el denominador que se indica.

a) $1/3$; 6 *b*) $3/4$; 20 *c*) $5/8$; 48 *d*) $-3/7$; 63 *e*) $-12/5$; 75

SOLUCIÓN

a) Para obtener el denominador 6, multiplique el numerador y el denominador de la fracción $1/3$ por 2. Entonces $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{2} = \dfrac{2}{6}$.

b) $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \dfrac{15}{20}$

c) $\dfrac{5}{8} = \dfrac{5 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \dfrac{30}{48}$

d) $-\dfrac{3}{7} = -\dfrac{3 \cdot 9}{7 \cdot 9} = -\dfrac{27}{63}$

e) $-\dfrac{12}{5} = -\dfrac{12 \cdot 15}{5 \cdot 15} = -\dfrac{180}{75}$

1.13 Encuentre la suma *S*, diferencia *D*, producto *P* y cociente *C* en cada uno de los pares de números racionales: *a*) $1/3$, $1/6$; *b*) $2/5$, $3/4$; *c*) $-4/15$, $-11/24$.

SOLUCIÓN

a) $1/3$ puede escribirse como la fracción equivalente $2/6$.

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{18}$$

$$D = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \qquad C = \frac{1/3}{1/6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $2/5$ y $3/4$ pueden expresarse con denominador 20: $2/5 = 8/20$, $3/4 = 15/20$.

$$S = \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20} \qquad P = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$D = \frac{2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{8}{20} - \frac{15}{20} = -\frac{7}{20} \qquad C = \frac{2/5}{3/4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$$

c) $-4/15$ y $-11/24$ tienen como mínimo común denominador 120: $-4/15 = -32/120$, $-11/24 = -55/120$.

$$S = \left(-\frac{4}{15}\right) + \left(-\frac{11}{24}\right) = -\frac{32}{120} - \frac{55}{120} = -\frac{87}{120} = -\frac{29}{40} \qquad P = \left(-\frac{4}{15}\right)\left(-\frac{11}{24}\right) = \frac{11}{90}$$

$$D = \left(-\frac{4}{15}\right) - \left(-\frac{11}{24}\right) = -\frac{32}{120} + \frac{55}{120} = \frac{23}{120} \qquad C = \frac{-4/15}{-11/24} = \left(-\frac{4}{15}\right)\left(-\frac{24}{11}\right) = \frac{32}{55}$$

1.14 Evalúe las expresiones siguientes, dados $x = 2$, $y = -3$, $z = 5$, $a = 1/2$, $b = -2/3$.

a) $2x + y = 2(2) + (-3) = 4 - 3 = 1$

b) $3x - 2y - 4z = 3(2) - 2(-3) - 4(5) = 6 + 6 - 20 = -8$

c) $4x^2y = 4(2)^2(-3) = 4 \cdot 4 \cdot (-3) = -48$

d) $\dfrac{x^3 + 4y}{2a - 3b} = \dfrac{2^3 + 4(-3)}{2(1/2) - 3(-2/3)} = \dfrac{8 - 12}{1 + 2} = -\dfrac{4}{3}$

e) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\dfrac{b}{a}\right)^3 = \left(\dfrac{2}{-3}\right)^2 - 3\left(\dfrac{-2/3}{1/2}\right)^3 \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 3\left(-\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{4}{9} - 3\left(-\dfrac{64}{27}\right) = \dfrac{4}{9} + \dfrac{64}{9} = \dfrac{68}{9}$

Problemas propuestos

1.15 Escriba la suma *S*, diferencia *D*, producto *P* y cociente *C* de cada uno de los pares de números siguientes:

a) 54, 18; *b*) 4, 0; *c*) 0, 4; *d*) 12, 24; *e*) 50, 75.

1.16 Efectúe cada una de las operaciones indicadas.

a) $38 + 57$, $57 + 38$

b) $15 + (33 + 8)$, $(15 + 33) + 8$

c) $(23 + 64) - (41 + 12)$

d) $12 \cdot 8$, $8 \cdot 12$

e) $6(4 \cdot 8)$, $(6 \cdot 4)8$

f) $42 \cdot 68$

g) $1\,296 \div 36$

h) $\dfrac{(35 - 23)(28 + 17)}{43 - 25}$

i) $45 \div 15 + 84 \div 12$

j) $10 \div 5 - 4 \div 2 + 15 \div 3 + 2 \cdot 5$

k) $112 \div (4 \cdot 7)$, $(112 \div 4) \cdot 7$

l) $\dfrac{15 + 3 \cdot 2}{9 - 4 \div 2}$

1.17 Coloque el símbolo de desigualdad apropiado ($<$ o $>$) entre cada uno de los pares de números reales siguientes.

a) $4, 3$ *c*) $-1, 2$ *e*) $-8, -7$ *g*) $-3, -\sqrt{11}$
b) $-2, 0$ *d*) $3, -2$ *f*) $1, \sqrt{2}$ *h*) $-1/3, -2/5$

1.18 Escriba cada uno de los grupos de números reales siguientes en orden ascendente en cuanto a magnitud.

a) $-\sqrt{3}, -2, \sqrt{6}, -2.8, 4, 7/2$ *b*) $2\pi, -6, \sqrt{8}, -3\pi, 4{:}8, 19/3$

1.19 Escriba el valor absoluto de cada uno de los números reales siguientes: $2, -3/2, -\sqrt{6}, +3.14, 0, 5/3, \sqrt{4},$

1.20 Evalúe:

a) $6 + 5$ *d*) $6 + (-4)$ *g*) $(-18) + (-3) + 22$ *j*) $-(-16) - (-12) + (-5) - 15$
b) $(-4) + (-6)$ *e*) $-8 + 4$ *h*) $40 - 12 + 4$
c) $(-4) + 3$ *f*) $-4 + 8$ *i*) $-12 - (-8)$

1.21 Escriba la suma S, diferencia D, producto P y cociente C de cada uno de los pares de números reales siguientes:

a) $12, 4$; *b*) $-6, -3$; *c*) $-8, 4$; *d*) $0, -4$; *e*) $3, -2$.

1.22 Efectúe las operaciones indicadas.

a) $(-3)(2)(-6)$ *c*) $4(-1)(5) + (-3)(2)(-4)$ *e*) $(-8) \div (-4) + (-3)(2)$

b) $(6)(-8)(-2)$ *d*) $\dfrac{(-4)(6)}{-3} + \dfrac{(-16)(-9)}{12}$ *f*) $\dfrac{(-3)(8)(-2)}{(-4)(-6) - (2)(-12)}$

1.23 Evalúe

a) 3^3 *e*) $\dfrac{5^6 \cdot 5^3}{5^5}$ *i*) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 \cdot 2^5$

b) $3(4)^2$ *f*) $\dfrac{3^4 \cdot 3^8}{3^6 \cdot 3^5}$ *j*) $\dfrac{(-2)^3 \cdot (2)^3}{3(2^2)^2}$

c) $2^4 \cdot 2^3$ *g*) $\dfrac{7^5}{7^3 \cdot 7^4}$ *k*) $\dfrac{3(-3)^2 + 4(-2)^3}{2^3 - 3^2}$

d) $4^2 \cdot 3^2$ *h*) $(3^2)^3$ *l*) $\dfrac{5^7}{5^4} - \dfrac{2^{10}}{8^2 \cdot (-2)^3} - 4(-3)^4$

1.24 Escriba cada una de las fracciones siguientes como una fracción equivalente que tenga el denominador indicado.

a) $2/5; 15$ *c*) $5/16; 64$ *e*) $11/12; 132$
b) $-4/7; 28$ *d*) $-10/3; 42$ *f*) $17/18; 90$

1.25 Encuentre la suma S, diferencia D, producto P y cociente C de cada uno de los pares de números racionales siguientes:

a) $1/4, 3/8$; *b*) $1/3, 2/5$; *c*) $-4, 2/3$; *d*) $-22/3, -3/2$.

1.26 Evalúe las expresiones siguientes, dadas $x = -2, y = 4, z = 1/3, a = -1, b = 1/2$:

a) $3x - 2y + 6z$ *d*) $\dfrac{3y^2 - 4x}{ax + by}$

b) $2xy + 6az$ *e*) $\dfrac{x^2y(x + y)}{3x + 4y}$

c) $4b^2x^3$ *f*) $\left(\dfrac{y}{x}\right)^3 - 4\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - \dfrac{xy}{z^2}$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

1.15 *a*) $S = 72, D = 36, P = 972, C = 3$ *d*) $S = 36, D = -12, P = 288, C = 1/2$
b) $S = 4, D = 4, P = 0, C$ indefinido *e*) $S = 125, D = -25, P = 3\,750, C = 2/3$
c) $S = 4, D = -4, P = 0, C = 0$

1.16 *a*) 95, 95 *c*) 34 *e*) 192, 192 *g*) 36 *i*) 10 *k*) 4, 196
b) 56, 56 *d*) 96, 96 *f*) 2 856 *h*) 30 *j*) 15 *l*) 3

1.17 *a*) $3 < 4$ o $4 > 3$ *d*) $-2 < 3$ o $3 > -2$ *g*) $-\sqrt{11} < -3$ o $-3 > -\sqrt{11}$
b) $-2 < 0$ o $0 > -2$ *e*) $-8 < -7$ o $-7 > -8$ *h*) $-2/5 < -1/3$ o $-1/3 > -2/5$
c) $-1 < 2$ o $2 > -1$ *f*) $1 < \sqrt{2}$ o $\sqrt{2} > 1$

1.18 *a*) $-2{:}8 < -2 < -\sqrt{3} < \sqrt{6} < 7/2 < 4$ *b*) $-3\pi < -6 < \sqrt{8} < 4{:}8 < 2\pi < 19/3$

1.19 $2, 3/2, \sqrt{6}, 3{:}14, 0, 5/3, \sqrt{4}, 0{:}001, \pi + 1$

1.20 *a*) 11 *c*) -1 *e*) -4 *g*) 1 *i*) -4
b) -10 *d*) 2 *f*) 4 *h*) 32 *j*) 8

1.21 *a*) $S = 16, D = 8, P = 48, C = 3$ *d*) $S = -4, D = 4, P = 0, C = 0$
b) $S = -9, D = -3, P = 18, C = 2$ *e*) $S = 1, D = 5, P = -6, C = -3/2$
c) $S = -4, D = -12, P = -32, C = -2$

1.22 *a*) 36 *b*) 96 *c*) 4 *d*) 20 *e*) -4 *f*) 1

1.23 *a*) 27 *c*) 128 *e*) $5^4 = 625$ *g*) $1/49$ *i*) $1/2$ *k*) 5
b) 48 *d*) 144 *f*) 3 *h*) $3^6 = 729$ *j*) $-4/3$ *l*) -201

1.24 *a*) $6/15$ *b*) $-16/28$ *c*) $20/64$ *d*) $-140/42$ *e*) $121/132$ *f*) $85/90$

1.25 *a*) $S = 5/8, D = -1/8, P = 3/32, C = 2/3$
b) $S = 11/15, D = -1/15, P = 2/15, C = 5/6$
c) $S = -10/3, D = -14/3, P = -8/3, C = -6$
d) $S = -13/6, D = 5/6, P = 1, C = 4/9$

1.26 *a*) -12 *b*) -18 *c*) -8 *d*) 14 *e*) $16/5$ *f*) 48

2 OPERACIONES FUNDAMENTALES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es una combinación de números y literales ordinarios que representan números,

Por lo tanto, $3x^2 - 5xy + 2y^4$, $2a^3b^5$, $\dfrac{5xy + 3z}{2a^3 - c^2}$

son expresiones algebraicas.

Un término consiste de productos y cocientes de números y literales ordinarios que representan números. Por lo tanto, $6x^2y^3$, $5x/3y^4$, $-3x^7$ son términos.

Sin embargo, $6x^2 + 7xy$ es una expresión algebraica que consiste de dos términos.

Un monomio es una expresión algebraica que consiste de un término solamente. Por lo tanto, $7x^3y^4$, $3xyz^2$, $4x^2/y$ son monomios.

Debido a esta definición, a menudo a los monomios se les llama simplemente términos.

Un binomio es una expresión algebraica que consiste de dos términos. Por lo tanto, $2x + 4y$, $3x^4 - 4xyz^3$ son binomios.

Un trinomio es una expresión algebraica que consiste de tres términos. Por lo tanto, $3x^2 - 5x + 2$, $2x + 6y - 3z$, $x^3 - 3xy/z - 2x^3z^7$ son trinomios.

Un polinomio es una expresión algebraica que consiste de más de un término. Por lo tanto, $7x + 6y$, $3x^3 + 6x^2y - 7xy + 6$, $7x + 5x^2/y - 3x^3/16$ son polinomios.

2.2 TÉRMINOS

Se dice que el factor de un término es el coeficiente del resto de dicho término. Por ende, en el término $5x^3y^2$, $5x^3$ es el coeficiente de y^2, $5y^2$ es el coeficiente de x^3, y 5 es el coeficiente de x^3y^2.

Si un término consiste en el producto de un número ordinario y una o más literales, se le llama coeficiente numérico (o simplemente el coeficiente) del término al número. Por lo tanto, en el término $-5x^3y^2$, el -5 es el coeficiente numérico o simplemente el coeficiente.

Los términos semejantes o similares difieren solamente en sus coeficientes numéricos. Por ejemplo, $7xy$ y $-2xy$ son términos semejantes; $3x^2y^4$ y $-\frac{1}{2}x^2y^4$ son términos semejantes; sin embargo, $-2a^2b^3$ y $-3a^2b^7$ son términos diferentes.

En una expresión algebraica, dos o más términos semejantes pueden simplificarse para formar un solo término. Por lo tanto, $7x^2y - 4x^2y + 2x^2y$ puede simplificarse y escribirse como $5x^2y$.

Un término es entero y racional respecto a ciertas literales (letras que representan números) si dicho término está formado por:

a) potencias enteras positivas de las variables multiplicadas por un factor que no contiene ninguna variable o,
b) ninguna variable.

Por ejemplo, los términos $6x^2y^3$, $-5y^4$, 7, $-4x$ y $\sqrt{3}x^3y^6$ son enteros y racionales en las variables presentes. Sin embargo, $3\sqrt{x}$ no es racional en x, $4/x$ no es entero en x.

Un polinomio es un monomio o multinomio en el que todos sus términos son enteros y racionales.

Por ejemplo, $3x^2y^3 - 5x^4y + 2$, $2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 5x + 2$, $4xy + z$, y $3x^2$ son polinomios. Sin embargo, $3x^2 - 4/x$ y $4\sqrt{y} + 3$ no son polinomios.

2.3 GRADO

El grado de un monomio es la suma de todos los exponentes de las variables de un término. Por lo tanto, el grado de $4x^3y^2z$ es $3 + 2 + 1 = 6$. El grado de una constante como 6, 0, $-\sqrt{3}$ o π, es cero.

El grado de un polinomio es el mismo que el del término que tiene el coeficiente de mayor grado diferente de cero. Por lo tanto, $7x^3y^2 - 4xz^5 + 2x^3$ tiene términos de grado 5, 6 y 4, respectivamente; de aquí que el grado del polinomio es 6.

2.4 AGRUPAMIENTO

Los símbolos de agrupamiento tales como los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las llaves { } a menudo se utilizan para expresar que los términos contenidos en éstos se deben considerar como una sola cantidad.

Por ejemplo, la suma de las dos expresiones algebraicas $5x^2 - 3x + y$ y $2x - 3y$ puede escribirse como $(5x^2 - 3x + y) + (2x - 3y)$. La diferencia de éstas puede escribirse como $(5x^2 - 3x + y) - (2x - 3y)$ y su producto como $(5x^2 - 3x + y)(2x - 3y)$.

La eliminación de los símbolos de agrupamiento está gobernada por las siguientes leyes.

1. Si un signo + precede a un símbolo de agrupamiento, éste puede quitarse sin afectar a los términos contenidos en el grupo.

   Por lo tanto, $$(3x + 7y) + (4xy - 3x^3) = 3x + 7y + 4xy - 3x^3.$$

2. Si un signo − precede a un símbolo de agrupamiento, éste puede ser retirado si los signos de los términos contenidos en el grupo son modificados.

   Por lo tanto, $$(3x + 7y) - (4xy - 3x^3) = 3x + 7y - 4xy + 3x^3.$$

3. Si el agrupamiento tiene más de un signo, los símbolos interiores se quitarán primero.

   Por lo tanto, $$2x - \{4x^3 - (3x^2 - 5y)\} = 2x - \{4x^3 - 3x^2 + 5y\} = 2x - 4x^3 + 3x^2 - 5y.$$

2.5 CÁLCULO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

La suma de expresiones algebraicas se lleva a cabo combinando términos semejantes. Con el fin de realizar esta suma, las expresiones pueden colocarse en filas con los términos semejantes en la misma columna; enseguida se suman estas columnas.

EJEMPLO 2.1 Sume $7x + 3y^3 - 4xy$, $3x - 2y^3 + 7xy$, y $2xy - 5x - 6y^3$.

$$\begin{array}{rrrr} \text{Escriba:} & 7x & 3y^3 & -4xy \\ & 3x & -2y^3 & 7xy \\ & -5x & -6y^3 & 2xy \\ \hline \text{Suma:} & 5x & -5y^3 & 5xy. \end{array}$$

Entonces el resultado es: $5x - 5y^3 + 5xy$.

La resta de dos expresiones algebraicas se lleva a cabo cambiando el signo de cada uno de los términos de la expresión que está siendo sustraída (a menudo llamada sustraendo) y sumando este resultado a la otra expresión (llamada minuendo).

EJEMPLO 2.2 Reste $2x^2 - 3xy + 5y^2$ de $10x^2 - 2xy - 3y^2$.

$$\begin{array}{rr} & 10x^2 - 2xy - 3y^2 \\ & 2x^2 - 3xy + 5y^2 \\ \hline \text{Resta:} & 8x^2 + \ xy - 8y^2 \end{array}$$

También se puede escribir $(10x^2 - 2xy - 3y^2) - (2x^2 - 3xy + 5y^2) = 10x^2 - 2xy - 3y^2 - 2x^2 + 3xy - 5y^2 = 8x^2 + xy - 8y^2$.

La multiplicación de expresiones algebraicas se lleva a cabo multiplicando los términos contenidos en los factores de las expresiones.

1. Para multiplicar dos o más monomios utilice las leyes de los exponentes, la ley de los signos y las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación.

EJEMPLO 2.3 Multiplique $-3x^2y^3z$, $2x^4y$ y $-4xy^4z^2$.

Escriba
$$(-3x^2y^3z)(2x^4y)(-4xy^4z^2).$$

Ordenando de acuerdo con las leyes asociativa y conmutativa,

$$\{(-3)(2)(-4)\}\{(x^2)(x^4)(x)\}\{(y^3)(y)(y^4)\}\{(z)(z^2)\}.$$

Combine utilizando las reglas de los signos y las leyes de los exponentes para obtener,

$$24x^7y^8z^3.$$

El paso 1) puede realizarse mentalmente cuando se tiene un cierto grado de experiencia.

2. Para multiplicar un polinomio por un monomio, multiplique cada término del polinomio por el monomio y combine los resultados.

EJEMPLO 2.4 Multiplique $3xy - 4x^3 + 2xy^2$ por $5x^2y^4$.

Escriba
$$\begin{aligned} &(5x^2y^4)(3xy - 4x^3 + 2xy^2) \\ &= (5x^2y^4)(3xy) + (5x^2y^4)(-4x^3) + (5x^2y^4)(2xy^2) \\ &= 15x^3y^5 - 20x^5y^4 + 10x^3y^6. \end{aligned}$$

3. Para multiplicar un polinomio por un polinomio, multiplique cada término de un polinomio por cada uno de los términos del otro polinomio y combine los resultados.

   Con mucha frecuencia es de utilidad ordenar los polinomios en función de las potencias ascendentes (o descendentes) de una de las literales involucradas.

EJEMPLO 2.5 Multiplique $-3x + 9 + x^2$ por $3 - x$.
Ordenando en potencias descendentes de x,

$$
\begin{array}{lr}
 & x^2 - 3x + 9 \\
 & -x + 3 \\
\hline
\text{Multiplicando (2) por } -x, & -x^3 + 3x^2 - 9x \\
\text{Multiplicando (2) por 3,} & x^2 - 9x + 27 \\
\hline
\text{Sumando,} & -x^3 + 6x^2 - 18x + 27
\end{array}
$$

La división de expresiones algebraicas se logra utilizando las leyes de la división de los exponentes.

1. Para dividir un monomio entre otro monomio, encuentre el cociente de los coeficientes numéricos, encuentre los cocientes de las variables y multiplíquelos.

EJEMPLO 2.6 Divida $24x^4y^2z^3$ entre $-3x^3y^4z$.

Escriba:

$$\frac{24x^4y^2z^3}{-3x^3y^4z} = \left(\frac{24}{-3}\right)\left(\frac{x^4}{x^3}\right)\left(\frac{y^2}{y^4}\right)\left(\frac{z^3}{z}\right) = (-8)(x)\left(\frac{1}{y^2}\right)(z^2) = -\frac{8xz^2}{y^2}.$$

2. Para dividir un polinomio por otro polinomio:

   a) Ordene los términos de ambos polinomios en orden descendente (o ascendente) de acuerdo con la potencia de una de las variables comunes a ambos polinomios.
   b) Divida el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. Lo anterior nos da el primer término del cociente.
   c) Multiplique el primer término del cociente por el divisor y réstelo del dividendo, obteniendo así un nuevo dividendo.
   d) Utilice el dividendo obtenido en *c*) para repetir los pasos *b*) y *c*) hasta que se obtenga un residuo, el cual tendrá un grado menor que el grado del divisor o cero.
   e) El resultado se escribe:

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}.$$

EJEMPLO 2.7 Divida $x^2 + 2x^4 - 3x^3 + x - 2$ entre $x^2 - 3x + 2$.

Escriba los polinomios en orden descendente de acuerdo con su potencia de x y ordene de la forma siguiente.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x + 6 \\
\hline
x^2 - 3x + 2 & 2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2 \\
 & 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 3x^3 - 3x^2 + x - 2 \\
 & \quad 3x^3 - 9x^2 + 6x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 6x^2 - 5x - 2 \\
 & \qquad 6x^2 - 18x + 12 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 13x - 14
\end{array}
$$

De aquí que,

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = 2x^2 + 3x + 6 + \frac{13x - 14}{x^2 - 3x + 2}.$$

Problemas resueltos

2.1 Evalúe cada una de las expresiones algebraicas, dado que $x = 2, y = -1, z = 3, \quad a = 0, b = 4, c = 1/3$.

a) $2x^2 - 3yz = 2(2)^2 - 3(-1)(3) = 8 + 9 = 17$

b) $2z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 2(3)^4 - 3(3)^3 + 4(3)^2 - 2(3) + 3 = 162 - 81 + 36 - 6 + 3 = 114$

c) $4a^2 - 3ab + 6c = 4(0)^2 - 3(0)(4) + 6(1/3) = 0 - 0 + 2 = 2$

d) $\dfrac{5xy + 3z}{2a^3 - c^2} = \dfrac{5(2)(-1) + 3(3)}{2(0)^3 - (1/3)^2} = \dfrac{-10 + 9}{-1/9} = \dfrac{-1}{-1/9} = 9$

e) $\dfrac{3x^2y}{z} - \dfrac{bc}{x + 1} = \dfrac{3(2)^2(-1)}{3} - \dfrac{4(1/3)}{3} = -4 - 4/9 = -40/9$

f) $\dfrac{4x^2y(z - 1)}{a + b - 3c} = \dfrac{4(2)^2(-1)(3 - 1)}{0 + 4 - 3(1/3)} = \dfrac{4(4)(-1)(2)}{4 - 1} = -\dfrac{32}{3}$

2.2 Clasifique cada una de las expresiones algebraicas siguientes de acuerdo con las categorías término o monomio, binomio, trinomio, multinomio y polinomio.

a) $x^3 + 3y^2z$ *d*) $y + 3$ *g*) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
b) $2x^2 - 5x + 3$ *e*) $4z^2 + 3z - 2\sqrt{z}$ *h*) $\sqrt{y} + \sqrt{z}$
c) $4x^2y/z$ *f*) $5x^3 + 4/y$ *i*) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

SOLUCIÓN Si la expresión pertenece a una o más categorías, éstas se indican con un signo de verificación.

	Término o monomio	Binomio	Trinomio	Multinomio	Polinomio
$x^3 + 3y^2z$		√		√	√
$2x^2 - 5x + 3$			√	√	√
$4x^2y/z$	√				
$y + 3$		√		√	√
$4z^2 + 3z - 2\sqrt{z}$			√	√	
$5x^3 + 4/y$		√		√	
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	√				
$\sqrt{y} + \sqrt{z}$		√		√	
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$				√	√

2.3 Encuentre el grado de cada uno de los polinomios siguientes.

a) $2x^3y + 4xyz^4$. El grado de $2x^3y$ es 4 y el de $4xyz^4$ es 6; de aquí que el polinomio es de grado 6.
b) $x^2 + 3x^3 - 4$. El grado de x^2 es 2, de $3x^3$ es 3 y de -4 es 0; de aquí que el grado del polinomio es 3.
c) $y^3 - 3y^2 + 4y - 2$ es de grado 3.
d) $xz^3 + 3x^2z^2 - 4x^3z + x^4$. Cada término es de grado 4; de aquí que el polinomio es de grado 4.
e) $x^2 - 10^5$ es de grado 2. (El grado de la constante 10^5 es cero.)

2.4 Remueva los símbolos de agrupación en cada una de las siguientes expresiones y simplifique las expresiones resultantes combinando términos semejantes.

a) $3x^2 + (y^2 - 4z) - (2x - 3y + 4z) = 3x^2 + y^2 - 4z - 2x + 3y - 4z = 3x^2 + y^2 - 2x + 3y - 8z$

b) $2(4xy + 3z) + 3(x - 2xy) - 4(z - 2xy) = 8xy + 6z + 3x - 6xy - 4z + 8xy = 10xy + 3x + 2z$

c) $x - 3 - 2\{2 - 3(x - y)\} = x - 3 - 2\{2 - 3x + 3y\} = x - 3 - 4 + 6x - 6y = 7x - 6y - 7$

d) $$\begin{aligned} &4x^2 - \{3x^2 - 2[y - 3(x^2 - y)] + 4\} = 4x^2 - \{3x^2 - 2[y - 3x^2 + 3y] + 4\} \\ &= 4x^2 - \{3x^2 - 2y + 6x^2 - 6y + 4\} = 4x^2 - \{9x^2 - 8y + 4\} \\ &= 4x^2 - 9x^2 + 8y - 4 = -5x^2 + 8y - 4 \end{aligned}$$

2.5 Sume las expresiones algebraicas de cada uno de los grupos siguientes.

a) $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2yz$, $\quad y^2 + z^2 - x^2 + 2yz - 2zx$, $\quad z^2 + x^2 - y^2 + 2zx - 2xy$, $1 - x^2 - y^2 - z^2$

SOLUCIÓN

Ordenando
$$\begin{array}{rrrrrrr} x^2 & +y^2 & -z^2 & +2xy & -2yz & & \\ -x^2 & +y^2 & +z^2 & & +2yz & -2zx & \\ x^2 & -y^2 & +z^2 & -2xy & & +2zx & \\ -x^2 & -y^2 & -z^2 & & & & +1 \\ \hline 0 & +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & +1 \end{array}$$
Sumando

El resultado de la suma es 1.

b) $5x^3y - 4ab + c^2$, $\quad 3c^2 + 2ab - 3x^2y$, $\quad x^3y + x^2y - 4c^2 - 3ab$, $\quad 4c^2 - 2x^2y + ab^2 - 3ab$

SOLUCIÓN

Ordenando,
$$\begin{array}{rrrrr} & 5x^3y & -4ab & +c^2 & \\ -3x^2y & & +2ab & +3c^2 & \\ x^2y & +x^3y & -3ab & -4c^2 & \\ -2x^2y & & -3ab & +4c^2 & +ab^2 \\ \hline -4x^2y & +6x^3y & -8ab & +4c^2 & +ab^2 \end{array}$$
Sumando,

2.6 Reste la segunda expresión de la primera en cada una de las expresiones siguientes:

a) $a - b + c - d$, $\quad c - a + d - b$

SOLUCIÓN

Escriba
$$\begin{array}{r} a - b + c - d \\ -a - b + c + d \\ \hline 2a + 0 + 0 - 2d \end{array}$$
Restando, El resultado es $2a - 2d$.

De otra forma: $(a - b + c - d) - (c - a + d - b) = a - b + c - d - c + a - d + b = 2a - 2d$

b) $4x^2y - 3ab + 2a^2 - xy$, $\quad 4xy + ab^2 - 3a^2 + 2ab$.

SOLUCIÓN

Escriba
$$\begin{array}{rrrrr} 4x^2y & -3ab & +2a^2 & -xy & \\ & 2ab & -3a^2 & +4xy & +ab^2 \\ \hline 4x^2y & -5ab & +5a^2 & -5xy & -ab^2 \end{array}$$
Restando,

De otra forma:
$$\begin{aligned} &(4x^2y - 3ab + 2a^2 - xy) - (4xy + ab^2 - 3a^2 + 2ab) \\ &= 4x^2y - 3ab + 2a^2 - xy - 4xy - ab^2 + 3a^2 - 2ab \\ &= 4x^2y - 5ab + 5a^2 - 5xy - ab^2 \end{aligned}$$

2.7 En cada una de las operaciones siguientes encuentre el producto de las expresiones algebraicas indicadas.

a) $(-2ab^3)(4a^2b^5)$
b) $(-3x^2y)(4xy^2)(-2x^3y^4)$
c) $(3ab^2)(2ab + b^2)$
d) $(x^2 - 3xy + y^2)(4xy^2)$
e) $(x^2 - 3x + 9)(x + 3)$
f) $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)(x - y)$
g) $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$
h) $(2x + y - z)(3x - z + y)$

SOLUCIÓN

a) $(-2ab^3)(4a^2b^5) = \{(-2)(4)\}\{(a)(a^2)\}\{(b^3)(b^5)\} = -8a^3b^8$

b) $(-3x^2y)(4xy^2)(-2x^3y^4) = \{(-3)(4)(-2)\}\{(x^2)(x)(x^3)\}\{(y)(y^2)(y^4)\} = 24x^6y^7$

c) $(3ab^2)(2ab + b^2) = (3ab^2)(2ab) + (3ab^2)(b^2) = 6a^2b^3 + 3ab^4$

d) $(x^2 - 3xy + y^2)(4xy^2) = (x^2)(4xy^2) + (-3xy)(4xy^2) + (y^2)(4xy^2) = 4x^3y^2 - 12x^2y^3 + 4xy^4$

e)
$$\begin{array}{l}
x^2 - 3x + 9 \\
x + 3 \\
\hline
x^3 - 3x^2 + 9x \\
\qquad 3x^2 - 9x + 27 \\
\hline
x^3 + \ 0 \ + 0 \ + 27
\end{array}$$
Resp. $x^3 + 27$

f)
$$\begin{array}{l}
x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \\
x - y \\
\hline
x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 \\
\qquad -x^4y - x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5 \\
\hline
x^5 + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ - y^5
\end{array}$$
Resp. $x^5 - y^5$

g)
$$\begin{array}{l}
x^2 - xy + y^2 \\
x^2 + xy + y^2 \\
\hline
x^4 - x^3y + x^2y^2 \\
\qquad x^3y - x^2y^2 + xy^3 \\
\qquad\qquad x^2y^2 - xy^3 + y^4 \\
\hline
x^4 + \ 0 \ + x^2y^2 + \ 0 \ + y^4
\end{array}$$
Resp. $x^4 + x^2y^2 + y^4$

h)
$$\begin{array}{l}
2x + y - z \\
3x + y - z \\
\hline
6x^2 + 3xy - 3xz \\
\qquad 2xy \qquad + y^2 \ - yz \\
\qquad\quad -2xz \qquad - yz + z^2 \\
\hline
6x^2 + 5xy - 5xz + y^2 - 2yz + z^2
\end{array}$$

2.8 Efectúe las divisiones que se indican.

a) $$\frac{24x^3y^2z}{4xyz^2} = \left(\frac{24}{4}\right)\left(\frac{x^3}{x}\right)\left(\frac{y^2}{y}\right)\left(\frac{z}{z^2}\right) = (6)(x^2)(y)\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{6x^2y}{z}$$

b) $$\frac{-16a^4b^6}{-8ab^2c} = \left(\frac{-16}{-8}\right)\left(\frac{a^4}{a}\right)\left(\frac{b^6}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{2a^3b^4}{c}$$

c) $$\frac{3x^3y + 16xy^2 - 12x^4yz^4}{2x^2yz} = \left(\frac{3x^3y}{2x^2yz}\right) + \left(\frac{16xy^2}{2x^2yz}\right) + \left(\frac{-12x^4yz^4}{2x^2yz}\right) = \frac{3x}{2z} + \frac{8y}{xz} - 6x^2z^3$$

d) $$\frac{4a^3b^2 + 16ab - 4a^2}{-2a^2b} = \left(\frac{4a^3b^2}{-2a^2b}\right) + \left(\frac{16ab}{-2a^2b}\right) + \left(\frac{-4a^2}{-2a^2b}\right) = -2ab - \frac{8}{a} + \frac{2}{b}$$

e) $$\frac{2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1}{x - 2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 + 7x^2 + 13x + 26 \\
\hline
x - 2 & 2x^4 + 3x^3 - x^2 \qquad - 1 \\
 & 2x^4 - 4x^3 \\
\hline
 & 7x^3 - x^2 \qquad - 1 \\
 & 7x^3 - 14x^2 \\
\hline
 & 13x^2 \qquad - 1 \\
 & 13x^2 - 26x \\
\hline
 & 26x - 1 \\
 & 26x - 52 \\
\hline
 & 51
\end{array}$$

f) $$\frac{16y^4 - 1}{2y - 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 8y^3 + 4y^2 + 2y + 1 \\
\hline
2y - 1 & 16y^4 \qquad\qquad - 1 \\
 & 16y^4 - 8y^3 \\
\hline
 & 8y^3 \qquad - 1 \\
 & 8y^3 - 4y^2 \\
\hline
 & 4y^2 \qquad - 1 \\
 & 4y^2 - 2y \\
\hline
 & 2y - 1 \\
 & 2y - 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Por lo tanto $\dfrac{2x^4+3x^3-x^2-1}{x-2} = 2x^3+7x^2+13x+26+\dfrac{51}{x-2}$ y $\dfrac{16y^4-1}{2y-1} = 8y^3+4y^2+2y+1.$

g) $\dfrac{2x^6+5x^4-x^3+1}{-x^2+x+1}.$

Acomode en potencias descendentes de x.

$$
\begin{array}{r|l}
 & -2x^4-2x^3-9x^2-10x-19 \\ \hline
-x^2+x+1 & 2x^6 \qquad +5x^4-x^3 \qquad\qquad +1 \\
 & \underline{2x^6-2x^5-2x^4} \\
 & \qquad 2x^5+7x^4-x^3 \qquad\qquad +1 \\
 & \qquad \underline{2x^5-2x^4-2x^3} \\
 & \qquad\qquad 9x^4+x^3 \qquad\qquad +1 \\
 & \qquad\qquad \underline{9x^4-9x^3-9x^2} \\
 & \qquad\qquad\qquad 10x^3+9x^2 \qquad +1 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{10x^3-10x^2-10x} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 19x^2+10x+1 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{19x^2-19x-19} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 29x+20
\end{array}
$$

Por lo tanto $\dfrac{2x^6+5x^4-x^3+1}{-x^2+x+1} = -2x^4-2x^3-9x^2-10x-19+\dfrac{29x+20}{-x^2+x+1}.$

h) $\dfrac{x^4-x^3y+x^2y^2+2x^2y-2xy^2+2y^3}{x^2-xy+y^2}.$

Acomode en potencias descendentes de una literal, digamos x.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2y \\ \hline
x^2-xy+y^2 & x^4-x^3y+x^2y^2+2x^2y-2xy^2+2y^3 \\
 & \underline{x^4-x^3y+x^2y^2} \\
 & \qquad\qquad\qquad 2x^2y-2xy^2+2y^3 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{2x^2y-2xy^2+2y^3} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto $\dfrac{x^4-x^3y+x^2y^2+2x^2y-2xy^2+2y^3}{x^2-xy+y^2} = x^2-2y.$

2.9 Compruebe el trabajo que se realizó en los problemas 2.7 *h*) y 2.8 *g*) utilizando el valor $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

SOLUCIÓN Del problema 2.7 *h*), $(2x+y-z)(3x-z+y) = 6x^2+5xy-5xz-2yz+z^2+y^2$. Sustituya $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$ y obtenga

$$[2(1)+(-1)-2][3(1)-(2)-1] = 6(1)^2+5(1)(-1)-5(1)(2)-2(-1)(2)+(2)^2+(-1)^2$$

o

$$[-1][0] = 6-5-10+4+4+1, \text{ es decir } 0 = 0.$$

Del problema 2.8 *g*),

$$\frac{2x^6+5x^4-x^3+1}{-x^2+x+1} = -2x^4-2x^3-9x^2-10x-19+\frac{29x+20}{-x^2+x+1}.$$

Asigne $x = 1$ y obtenga

$$\frac{2+5-1+1}{-1+1+1} = -2-2-9-10-19+\frac{29+20}{-1+1+1} \quad \text{o} \quad 7 = 7.$$

Aunque una comprobación por sustitución de números por variables no es totalmente concluyente, puede utilizarse para identificar posibles errores.

Problemas propuestos

2.10 Evalúe cada una de las expresiones algebraicas, dado que $x = -1$, $y = 3$, $z = 2$, $a = 1/2$, $b = -2/3$.

a) $4x^3y^2 - 3xz^2$

b) $(x-y)(y-z)(z-x)$

c) $9ab^2 + 6ab - 4a^2$

d) $\dfrac{xy^2 - 3z}{a+b}$

e) $\dfrac{z(x+y)}{8a^2} - \dfrac{3ab}{y-x+1}$

f) $\dfrac{(x-y)^2 + 2z}{ax+by}$

g) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

h) $\dfrac{(x-1)(y-1)(z-1)}{(a-1)(b-1)}$

2.11 Determine el grado de cada uno de los polinomios siguientes.

a) $3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5$

b) $4xy^4 - 3x^3y^3$

c) $x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$

d) $\sqrt{3}xyz - 5$

e) -10^3

f) $y^2 - 3y^5 - y + 2y^3 - 4$

2.12 Elimine los símbolos de agrupación y simplifique las expresiones resultantes combinando términos semejantes.

a) $(x + 3y - z) - (2y - x + 3z) + (4z - 3x + 2y)$

b) $3(x^2 - 2yz + y^2) - 4(x^2 - y^2 - 3yz) + x^2 + y^2$

c) $3x + 4y + 3\{x - 2(y - x) - y\}$

d) $3 - \{2x - [1 - (x + y)] + [x - 2y]\}$

2.13 Sume las expresiones algebraicas en cada uno de los grupos siguientes.

a) $2x^2 + y^2 - x + y, \quad 3y^2 + x - x^2, \quad x - 2y + x^2 - 4y^2$

b) $a^2 - ab + 2bc + 3c^2, \quad 2ab + b^2 - 3bc - 4c^2, \quad ab - 4bc + c^2 - a^2, \quad a^2 + 2c^2 + 5bc - 2ab$

c) $2a^2bc - 2acb^2 + 5c^2ab, \quad 4b^2ac + 4bca^2 - 7ac^2b, \quad 4abc^2 - 3a^2bc - 3ab^2c, \quad b^2ac - abc^2 - 3a^2bc$

2.14 Reste la segunda expresión de la primera en las expresiones siguientes.

a) $3xy - 2yz + 4zx, \quad 3zx + yz - 2xy$

b) $4x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 2, \quad 2x - y^2 + 3x^2 - 4y + 3$

c) $r^3 - 3r^2s + 4rs^2 - s^3, \quad 2s^3 + 3s^2r - 2sr^2 - 3r^3$

2.15 Reste $xy - 3yz + 4xz$ del doble de la suma de las expresiones siguientes: $3xy - 4yz + 2xz$ y $3yz - 4zx - 2xy$.

2.16 Obtenga el producto de las expresiones algebraicas en cada uno de los grupos siguientes.

a) $4x^2y^5, \quad -3x^3y^2$

b) $3abc^2, \quad -2a^3b^2c^4, 6a^2b^2$

c) $-4x^2y, \quad 3xy^2 - 4xy$

d) $r^2s + 3rs^3 - 4rs + s^3, \quad 2r^2s^4$

e) $y - 4, \quad y + 3$

f) $y^2 - 4y + 16, \quad y + 4$

g) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3, \quad x - y$

h) $x^2 + 4x + 8, \quad x^2 - 4x + 8$

i) $3r - s - t^2, \quad 2s + r + 3t^2$

j) $3 - x - y, \quad 2x + y + 1, x - y$

2.17 Realice las divisiones que se indican.

a) $\dfrac{-12x^4yz^3}{3x^2y^4z}$ *b*) $\dfrac{-18r^3s^2t}{-4r^5st^2}$ *c*) $\dfrac{4ab^3 - 3a^2bc + 12a^3b^2c^4}{-2ab^2c^3}$ *d*) $\dfrac{4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x + 1}$

2.18 Efectúe las divisiones que se indican.

a) $\dfrac{27s^3 - 64}{3s - 4}$ *b*) $\dfrac{1 - x^2 + x^4}{1 - x}$ *c*) $\dfrac{2y^3 + y^5 - 3y - 2}{y^2 - 3y + 1}$ *d*) $\dfrac{4x^3y + 5x^2y^2 + x^4 + 2xy^3}{x^2 + 2y^2 + 3xy}$

2.19 Realice las operaciones indicadas y verifíquelas utilizando los valores $x = 1, y = 2$.

a) $(x^4 + x^2y^2 + y^4)(y^4 - x^2y^2 + x^4)$ *b*) $\dfrac{x^4 + xy^3 + x^3y + 2x^2y^2 + y^4}{xy + x^2 + y^2}$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

2.10 *a*) -24 *b*) -12 *c*) -1 *d*) 90 *e*) $11/5$ *f*) -8 *g*) $-1/6$ *h*) $-24/5$

2.11 *a*) 4 *b*) 6 *c*) 5 *d*) 3 *e*) 0 *f*) 5

2.12 *a*) $3y - x$ *b*) $8y^2 + 6yz$ *c*) $12x - 5y$ *d*) $y - 4x + 4$

2.13 *a*) $2x^2 + x - y$ *b*) $a^2 + b^2 + 2c^2$ *c*) abc^2

2.14 *a*) $5xy - 3yz + zx$ *b*) $x^2 + 4y^2 - 8x + 8y - 5$ *c*) $4r^3 - r^2s + rs^2 - 3s^3$

2.15 $xy + yz - 8xz$

2.16 *a*) $-12x^5y^7$

b) $-36a^6b^5c^6$

c) $-12x^3y^3 + 16x^3y^2$

d) $2r^4s^5 + 6r^3s^7 - 8r^3s^5 + 2r^2s^7$

e) $y^2 - y - 12$

f) $y^3 + 64$

g) $x^4 - y^4$

h) $x^4 + 64$

i) $3r^2 + 5rs + 8rt^2 - 2s^2 - 5st^2 - 3t^4$

j) $y^3 - 2y^2 - 3y + 3x + 5x^2 - 3xy - 2x^3 - x^2y + 2xy^2$

2.17 *a*) $-\dfrac{4x^2z^2}{y^3}$ *b*) $\dfrac{9s}{2r^2t}$ *c*) $-\dfrac{2b}{c^3} + \dfrac{3a}{2bc^2} - 6a^2c$ *d*) $4x^2 - 9x + 12 + \dfrac{-14}{x + 1}$

2.18 *a*) $9s^2 + 12s + 16$ *b*) $-x^3 - x^2 + \dfrac{1}{1 - x}$ *c*) $y^3 + 3y^2 + 10y + 27 + \dfrac{68y - 29}{y^2 - 3y + 1}$ *d*) $x^2 + xy$

2.19 *a*) $x^8 + x^4y^4 + y^8$. Comprobación: $21(13) = 273$. *b*) $x^2 + y^2$. Comprobación: $35/7 = 5$.

3 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS

3.1 CONJUNTOS DE NÚMEROS

El conjunto de los números cardinales (o naturales) es el conjunto de los números: 1, 2, 3, 4, 5, …

El conjunto de los números enteros no negativos es el conjunto de los números cardinales y cero: 0, 1, 2, 3, 4, …

El conjunto de los números enteros es el conjunto de los números cardinales, el cero y los inversos de los números cardinales: …, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …

El conjunto de los números reales es el conjunto de todos los números que corresponden a los puntos en una recta numérica. Los números reales pueden dividirse en dos subconjuntos diferentes: números racionales y números irracionales.

El conjunto de números racionales es el conjunto de números reales que pueden escribirse en la forma a/b, donde a y b son enteros y b es diferente de cero. Se puede pensar de los números racionales como el conjunto de enteros y fracciones comunes. Los números -4, $2/3$, $50/7$, $\sqrt{9}$, $10/5$, $-1/2$, 0, 145 y $15/1$ son ejemplos de números racionales.

El conjunto de números irracionales es el conjunto de números reales que no son números racionales. Los números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt{3} + 4$, $\sqrt[3]{6} - 5$ y las constantes matemáticas π y e son ejemplos de números irracionales.

3.2 PROPIEDADES

Un conjunto es cerrado respecto a una operación si el resultado de llevar a cabo la operación con dos elementos del conjunto es también un elemento del conjunto. El conjunto X es cerrado respecto a la operación * si para todos los elementos a y b en el conjunto X, el resultado $a*b$ está en el conjunto X.

Un conjunto posee una identidad respecto a una operación si existe un elemento en el conjunto que, cuando se combina con cada elemento de dicho conjunto, no modifica dicho elemento. El conjunto X tiene una identidad respecto a la operación * si existe un elemento j en el conjunto X tal que $j*a = a*j = a$ para todos los elementos a en el conjunto X.

Un conjunto posee inversas respecto a una operación si para cada elemento del conjunto existe un elemento tal que cuando esos dos elementos se combinan utilizando la operación, el resultado es la identidad para el conjunto al que se le aplicó la operación. Si un conjunto no posee identidad respecto a una operación, éste no posee la propiedad inversa respecto a esa operación. Si X es un conjunto que tiene una identidad j respecto a la operación *, entonces dicho conjunto tiene inversas si para cada elemento a en el conjunto X, existe un elemento a' en el conjunto X tal que $a*a' = j$ y $a'*a = j$.

Los conjuntos también pueden tener la propiedad asociativa y la conmutativa respecto a una operación, como se describió en la sección 1.4. Si existen dos operaciones en el conjunto, entonces podría tener la propiedad distributiva, que también se describe en esa sección.

EJEMPLO 3.1 ¿Qué propiedades son válidas para los números cardinales, números enteros no negativos, números enteros, números racionales, números irracionales y números reales en la suma?

+	Cardinal	Enteros no negativos	Enteros	Racionales	Irracionales	Reales
Cerradura	Sí	Sí	Sí	Sí	No	Sí
Identidad	No	Sí	Sí	Sí	No	Sí
Inversa	No	No	Sí	Sí	No	Sí
Asociativa	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Conmutativa	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

3.3 PROPIEDADES ADICIONALES

Existen algunas propiedades que poseen los conjuntos de números que no dependen de una operación para que sean válidas. Tres de dichas propiedades son orden, densidad y completez.

Un conjunto de números posee un orden si dados dos elementos distintos en el conjunto, uno de ellos es mayor que el otro.

Un conjunto de números tiene una densidad si entre cualquier par de elementos del conjunto existe otro elemento del conjunto.

Un conjunto de números tiene completez si los puntos, utilizando sus elementos como coordenadas, llenan totalmente una línea o un plano.

EJEMPLO 3.2 ¿Qué propiedades son válidas para los números cardinales, números enteros no negativos, enteros, números racionales, números irracionales y números reales?

	Cardinales	Enteros no negativos	Enteros	Racionales	Irracionales	Reales
Orden	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Densidad	No	No	No	Sí	Sí	Sí
Completez	No	No	No	No	No	Sí

Problemas resueltos

3.1 ¿Cuál de las propiedades de cerradura, identidad e inversa posee el conjunto de enteros pares respecto a la suma?

SOLUCIÓN Puesto que los enteros pares son de la forma $2n$ donde n es un entero, permita que $2m$ y $2k$ sea n cualquier par de números pares. La suma de dos enteros pares es $2m + 2k = 2(m + k)$. A partir del ejemplo 3.1 se sabe que $m + k$ es un entero, puesto que m y k son enteros. Por lo tanto, $2(m + k)$ es 2 veces un entero y es par, por lo que $2m + 2k$ es par. Por ende, los enteros pares con cerrados respecto a la suma.

El cero es un entero par puesto que $2(0) = 0$. $2m + 0 = 2m + 2(0) = 2(m + 0) = 2m$. Por lo tanto, 0 es la identidad para los enteros pares en relación con la suma.

Para el entero par $2m$, la inversa es $-2m$. Ya que m es un entero, $-m$ es un entero. Por lo tanto, $-2m = 2(-m)$ es un entero par. Asimismo, $2m + (-2m) = 2(m + (-\ m)) = 2(0) = 0$. Por lo tanto, todo entero par tiene inversa.

3.2 ¿Cuál de las propiedades de cerradura, identidad, inversa, asociativa y conmutativa son válidas en relación con la multiplicación para el conjunto de números cardinales, enteros no negativos, enteros, racionales, irracionales y reales?

SOLUCIÓN

·	Cardinales	Enteros no negativos	Enteros	Racionales	Irracionales	Reales
Cerradura	Sí	Sí	Sí	Sí	No	Sí
Identidad	Sí	Sí	Sí	Sí	No	Sí
Inversa	No	No	No	Sí	No	Sí
Asociativa	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Conmutativa	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

3.3 ¿Cuál de las propiedades de cerradura, identidad e inversa posee el conjunto de enteros impares respecto a la multiplicación?

SOLUCIÓN Puesto que los enteros impares son de la forma $2n + 1$ donde n es un entero, deje que $2m + 1$ y $2k +1$ sean cualquier par de números impares. El producto de dos números impares se representa como $(2m + 1)(2k + 1) = 4mk + 2m + 2k + 1 = 2(2mk + m + k) + 1$. Puesto que los enteros son cerrados respecto a la suma y la multiplicación, $(2mk + m + k)$ es un entero y el producto $(2m + 1)(2k + 1)$ es igual a dos veces un entero más 1. Por lo tanto, el producto es un entero impar. Así, los enteros impares son cerrados respecto a la multiplicación.

El uno es un entero impar, puesto que $2(0) + 1 = 0 + 1 = 1$. Asimismo $(2m + 1)(1) = (2m)(1) + (1)(1) = 2m +1$. Por lo tanto, 1 es la identidad para los enteros impares en relación con la multiplicación.

El siete es un entero impar, ya que $2(3) + 1 = 7$. Asimismo, $7(1/7) = 1$, sin embargo, $1/7$ no es un entero impar. Por lo tanto, 7 no tiene un inverso respecto a la multiplicación. Puesto que hay al menos un entero impar que no tiene un inverso respecto a la multiplicación, el conjunto de enteros impares respecto a la multiplicación no tiene la propiedad inversa.

3.4 ¿El conjunto de enteros pares tiene las propiedades de orden, densidad y completez?

SOLUCIÓN Dados dos enteros pares diferentes $2m$ y $2k$ donde m y k son enteros, se sabe que $m > k$ o $k > m$. Si $m > k$, entonces $2m > 2k$, sin embargo, si $k > m$, entonces $2k > 2m$. Por lo tanto, el conjunto de enteros pares posee la propiedad del orden, puesto que para dos enteros pares diferentes $2m$ y $2k$, ya sea que $2m > 2k$ o $2k > 2m$.

Los números $2m$ y $2m + 2$ son enteros pares. No existe un entero par entre $2m$ y $2m + 2$, puesto que $2m + 2 = 2(m + 1)$ y no existe un entero entre m y $m + 1$. Por lo tanto, los enteros pares no poseen la propiedad de densidad.

Entre los dos enteros pares 8 y 10 se encuentra el entero impar 9. Por lo tanto, los enteros pares no representan las coordenadas para todos los puntos en una línea numérica. Por lo tanto, los enteros pares no poseen la propiedad de completez.

3.5 Sea $K = \{-1,1\}$. *a*) ¿Es K cerrado respecto a la multiplicación? *b*) ¿Tiene K una identidad respecto a la multiplicación? *c*) ¿Tiene K inversas respecto a la multiplicación?

SOLUCIÓN

a) $(1)(1) = 1$, $(-1)(-1) = 1$, $(1)(-1) = -1$ y $(-1)(1) = -1$. Para todos los productos posibles de dos elementos en K, el resultado se encuentra en K. Por lo tanto, K es cerrado respecto a la multiplicación.

b) 1 está en K, $(1)(1) = 1$ y $(1)(-1) = -1$. Por lo tanto 1 es la identidad para K respecto a la multiplicación.

c) Puesto que $(1)(1) = 1$ y $(-1)(-1) = 1$, cada elemento de K es su propio inverso.

Problemas propuestos

3.6 ¿Cuáles de las propiedades de cerradura, identidad e inversa tiene el conjunto de enteros pares respecto a la multiplicación?

3.7 ¿Cuáles de las propiedades de cerradura, identidad e inversa tiene el conjunto de enteros impares respecto a la suma?

3.8 ¿Tiene el conjunto de enteros impares las propiedades de orden, densidad y completez?

3.9 ¿Cuáles de las propiedades de cerradura, identidad, inversa, asociativa y conmutativa son válidas respecto a la resta para los conjuntos de números cardinales, enteros no negativos, enteros, racionales, irracionales y reales?

3.10 ¿Cuáles de las propiedades de cerradura, identidad, inversa, asociativa y conmutativa son válidas respecto a la división entre cero para los conjuntos de números cardinales, enteros no negativos, enteros, racionales, irracionales y reales?

3.11 ¿Cuáles de las propiedades de cerradura, identidad, inversa, asociativa y conmutativa son válidas para el conjunto cero $\{0\}$, respecto a *a*) la suma, *b*) la resta y *c*) la multiplicación?

3.12 ¿Cuáles de las propiedades de cerradura, identidad, inversa, asociativa y conmutativa son válidas para el conjunto $\{1\}$ respecto a *a*) la suma, *b*) la resta, *c*) la multiplicación y *d*) la división?

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

3.6 Cerradura: sí; identidad: no; inverso: no.

3.7 Cerradura: no; identidad: no; inversa: no.

3.8 Orden: sí; densidad: no; totalidad: no.

3.9

$-$	**Cardinales**	**Enteros no negativos**	**Enteros**	**Racionales**	**Irracionales**	**Reales**
Cerradura	No	No	Sí	Sí	No	Sí
Identidad	No	No	No	No	No	No
Inversa	No	No	No	No	No	No
Asociativa	No	No	No	No	No	No
Conmutativa	No	No	No	No	No	No

3.10

$\div$	**Cardinales**	**Enteros no negativos**	**Enteros**	**Racionales**	**Irracionales**	**Reales**
Cerradura	No	No	No	No	No	Sí
Identidad	No	No	No	No	No	No
Inversa	No	No	No	No	No	No
Asociativa	No	No	No	No	No	No
Conmutativa	No	No	No	No	No	No

3.11

	Cerradura	Identidad	Inversa	Asociativa	Conmutativa
a) $+$	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
b) $-$	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
c) $\cdot$	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

3.12

	Cerradura	Identidad	Inversa	Asociativa	Conmutativa
a) $+$	No	No	No	Sí	Sí
b) $-$	No	No	No	No	Sí
c) $\cdot$	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
d) $\div$	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

PRODUCTOS ESPECIALES

4

4.1 PRODUCTOS ESPECIALES

A continuación aparecen algunos de los productos que se presentan con frecuencia en matemáticas y el alumno debe familiarizarse con ellos tan pronto como sea posible. Las demostraciones de estos resultados pueden obtenerse mediante la multiplicación.

I. Producto de un monomio y un binomio

$$a(c + d) = ac + ad$$

II. Producto de la suma y la diferencia de dos términos

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

III. Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

IV. Producto de dos binomios

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

V. Cubo de un binomio

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

VI. Cuadrado de un trinomio

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

4.2 PRODUCTOS QUE PROPORCIONAN RESPUESTAS DE LA FORMA $a^n \pm b^n$

Puede verificarse por medio de la multiplicación que

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$$
$$(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$$
$$(a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) = a^6 - b^6$$

etc., la regla es clara. Estas expresiones pueden resumirse como

VII. $$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$$

donde n es cualquier entero positivo (1, 2, 3, 4, …).

De manera similar, puede verificarse que

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5$$
$$(a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) = a^7 + b^7$$

etc., la regla es clara. Estas expresiones pueden resumirse como

VIII. $$(a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = a + b^n$$

donde n es cualquier entero positivo impar (1, 3, 5, 7, …).

Problemas resueltos

Encuentre cada uno de los productos siguientes.

4.1 *a*) $3x(2x + 3y) = (3x)(2x) + (3x)(3y) = 6x^2 + 9xy$, utilizando I con $a = 3x, c = 2x$, $d = 3y$:

b) $x^2y(3x^3 - 2y + 4) = (x^2y)(3x^3) + (x^2y)(-2y) + (x^2y)(4) = 3x^5y - 2x^2y^2 + 4x^2\text{y}$

c) $(3x^3y^2 + 2xy - 5)(x^2y^3) = (3x^3y^2)(x^2y^3) + (2xy)(x^2y^3) + (-5)(x^2y^3)$
$= 3x^5y^5 + 2x^3y^4 - 5x^2y^3$

d) $(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$, utilizado II con $a = 2x$, $b = 3y$.

e) $(1 - 5x^3)(1 + 5x^3) = (1)^2\,(5x^3)2 = 1 - 25x^6$

f) $(5x + x^3y^2)(5x - x^3y^2) = (5x)^2 - (x3y^2)^2 = 25x^2\, x^6y^4$

g) $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$, utilizado III con $a = 3x$, $b = 5y$:

h) $(x + 2)^2 = x^2 + 2(x)(2) + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

i) $(7x^2 - 2xy)^2 = (7x^2)^2 - 2(7x^2)(2xy) + (2xy)^2$
$= 49x^4\; 28x3\text{y} + 4x^2y^2$, utilizado III con $a = 7x^2$, $b = 2xy$.

j) $(ax - by)^2 = (ax)^2 - 2(ax)(2by) + (2by)^2 = a^2x^2 - 4axby + 4b^2y^2$

k) $(x^4 + 6)^2 = (x^4)^2 + 2(x^4)(6) + (6)^2 = x^8 + 12x^4 + 36$

l) $(3y^2 - 2)^2 = (3y^2)^2 - 2(3y^2)(2) + (2)^2 = 9y^4 - 12y^2 + 4$

m) $(x + 3)(x + 5) = x^2 + (3 + 5)x + (3)(5) = x^2 + 8x + 15$, utilizado IV con $a = 3, b = 5$.

n) $(x - 2)(x + 8) = x^2 + (-2 + 8)x + (-2)(8) = x^2 + 6x - 16$

o) $(x + 2)(x - 8) = x^2 + (2 - 8)x + (2)(-8) = x^2 - 6x - 16$

p) $(t^2 + 10)(t^2 - 12) = (t^2)^2 + (10 - 12)t^2 + (10)(-12) = t^4 - 2t^2 - 120$

q) $(3x + 4)(2x - 3) = (3)(2)x^2 + [(3)(-3) + (4)(2)]x + (4)(-3)$
$= 6x^2 - x - 12$, utilizado IV con $a = 3, b = 4, c = 2, d = -3$.

r) $(2x + 5)(4x - 1) = (2)(4)x^2 + [(2)(-1) + (5)(4)x + (5)(-1) = 8x^2 + 18x - 5$

s) $(3x + y)(4x - 2y) = (3x)(4x) + (y)(4x) + (3x)(-2y) + (y)(-2y)$
$= 12x^2 - 2xy - 2y^2$, utilizado V con $a = 3x, b = y, c = 4x, d = -2y$.

t) $(3t^2s - 2)(4t - 3s) = (3t^2s)(4t) + (-2)(4t) + (3t^2s)(-3s) + (-2)(-3s)$
$= 12t^3s - 8t - 9t^2s^2 + 6s$

u) $(3xy + 1)(2x^2 - 3y) = (3xy)(2x^2) + (3xy)(-3y) + (1)(2x^2) + (1)(-3y)$
$= 6x^3y - 9xy^2 + 2x^2 - 3y$

v) $(x + y + 3)(x + y - 3) = (x + y)^2 - 3^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 9$

w) $(2x - y - 1)(2x - y + 1) = (2x - y)^2 - (1)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2 - 1$

x) $(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - 2xy + y^2) = (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - 2xy)$
$= (x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

y) $(x + 2 + xy)(x^3 - 2 + xy) = (x^3 + xy + 2)(x^3 + xy - 2)$
$= (x^3 + xy)^2 - 2^2 = x^6 + 2(x^3)(xy) + (xy)^2 - 4 = x^6 + 2x^4y + x^2y^2 - 4$

4.2 *a*) $(x + 2y)^3 = x^3 + 3(x)^2(2y) + 3(x)(2y)^2 + (2y)^3$
$= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$, utilizando V con $a = x, b = 2y$.

b) $(3x + 2)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(2) + 3(3x)(2)^2 + (2)^3 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$

c) $(2y - 5)^3 = (2y)^{3\,-}\, 3(2y)^2(5) + 3(2y)(5)^2 - (5)^3$
$= 8y^3 - 60y^2 + 150y - 125$, utilizando IV con $a = 2y, b = 5$.

d) $(xy - 2)^3 = (xy)^3 - 3(xy)^2(2) + 3(xy)(2)^2 - (2)^3 = x^3y^3 - 6x^2y^2 + 12xy - 8$

e) $(x^2y - y^2)^3 = (x^2y)^3 - 3(x^2y)^2(y^2) + 3(x^2y)(y^2)^2 - (y^2)^3 = x^6y^3 - 3x^4y^4 + 3x^2y^5 - y^6$

f) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$, utilizando VII con $a = x, b = 1$.
Si no es una forma reconocida, multiplique así.
$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x(x^2 + x + 1) - 1(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$

g) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = x^3 - (2y)^3 = x^3 - 8y^3$, utilizando VII con $a = x, b = 2y$.

h) $(xy + 2)(x^2y^2 - 2xy + 4) = (xy)^3 + (2)^3 = x^3y^3 + 8$, utilizando VIII con $a = xy, b = 2$.

i) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = (2x)^3 + 1 = 8x^3 + 1$

j) $(2x + 3y + z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(2x)(z) + 2(3y)(z)$
$= 4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy + 4xz + 6yz$, utilizando VI con $a = 2x, b = 3y, c = z$.

k) $(u^3 - v^2 + 2w)^2 = (u^3)^2 + (-v^2)^2 + (2w)^2 + 2(u^3)(-v^2) + 2(u^3)(2w) + 2(-v^2)(2w)$
$= u^6 + v^4 + 4w^2 - 2u^3v^2 + 4u^3w - 4v^2w$

4.3 *a*) $(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^6 - 1$, utilizando VII con $a = x, b = 1, n = 6$.

b) $(x - 2y)(x^4 + 2x^3y + 4x^2y^2 + 8xy^3 + 16y^4) = x^5 - (2y)^5$
$= x^5 - 32y^5$, utilizando VII con $a = x, b = 2y$.

c) $(3y + x)(81y^4 - 27y^3x + 9y^2x^2 - 3yx^3 + x^4) = (3y)^5 + x^5$
$= 243y^5 + x^5$; utilizando VIII con $a = 3y$, $b = x$.

4.4 *a*) $(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z)$. Los primeros dos factores pueden escribirse como

$$(x + y + z)(x + y - z) = (x + y)^2 - z^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2,$$

y los dos factores siguientes como

$$(x - y + z)(x - y - z) = (x - y)^2 - z^2 = x^2 - 2xy + y^2 - z^2.$$

El resultado puede escribirse como

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 - z^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - z^2 - 2xy) &= (x^2 + y^2 - z^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2)^2 + (y^2)^2 + (-z^2)^2 + 2(x^2)(y^2) + 2(x^2)(-z^2) + 2(y^2)(-z^2) - 4x^2y^2 \\ &= x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2\end{aligned}$$

b) $(x + y + z + 1)^2 = [(x + y) + (z + 1)]^2 = (x + y)^2 + 2(x + y)(z + 1) + (z + 1)^2$
$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2x + 2yz + 2y + z^2 + 2z + 1$

c) $(u - v)^3(u + v)^3 = [(u - v)(u + v)]^3 = (u^2 - v^2)^3$
$= (u^2)^3 - 3(u^2)^2v^2 + 3(u^2)(v^2)^2 - (v^2)^3 = u^6 - 3u^4v^2 + 3u^2v^4 - v^6$

d) $(x^2 - x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2 = [(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)]^2 = [(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)]^2$
$= [(x^2 + 1)^2 - x^2]^2 = [x^4 + 2x^2 + 1 - x^2]^2 = (x^4 + x^2 + 1)^2$
$= (x^4)^2 + (x^2)^2 + 1^2 + 2(x^4)(x^2) + 2(x^4)(1) + 2(x^2)(1)$
$= x^8 + x^4 + 1 + 2x^6 + 2x^4 + 2x^2 = x^8 + 2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1$

e) $(e^y + 1)(e^y - 1)(e^{2y} + 1)(e^{4y} + 1)(e^{8y} + 1) = (e^{2y} - 1)(e^{2y} + 1)(e^{4y} + 1)(e^{8y} + 1)$
$= (e^{4y} - 1)(e^{4y} + 1)(e^{8y} + 1) = (e^{8y} - 1)(e^{8y} + 1) = e^{16y} - 1$

Problemas propuestos

Encuentre cada uno de los productos siguientes.

4.5 *a*) $2xy(3x^2y - 4y^3) = 6x^3y^2 - 8xy^4$
b) $3x^2y^3(2xy - x - 2y) = 6x^3y^4 - 3x^3y^3 - 6x^2y^4$
c) $(2st^3 - 4rs^2 + 3s^3t)(5rst^2) = 10rs^2t^5 - 20r^2s^3t^2 + 15rs^4t^3$
d) $(3a + 5b)(3a - 5b) = 9a^2 - 25b^2$
e) $(5xy + 4)(5xy - 4) = 25x^2y^2 - 16$
f) $(2 - 5y^2)(2 + 5y^2) = 4 - 25y^4$
g) $(3a + 5a^2b)(3a - 5a^2b) = 9a^2 - 25a^4b^2$
h) $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$
i) $(y + 3x)^2 = y^2 + 6xy + 9x^2$
j) $(z - 4)^2 = z^2 - 8z + 16$
k) $(3 - 2x^2)^2 = 9 - 12x^2 + 4x^4$
l) $(x^2y - 2z)^2 = x^4y^2 - 4x^2yz + 4z^2$
m) $(x + 2)(x + 4) = x^2 + 6x + 8$

n) $(x-4)(x+7)=x^2+3x-28$
o) $(y+3)(y-5)=y^2-2y-15$
p) $(xy+6)(xy-4)=x^2y^2+2xy-24$
q) $(2x-3)(4x+1)=8x^2-10x-3$
r) $(4+3r)(2-r)=8+2r-3r^2$
s) $(5x+3y)(2x-3y)=10x^2-9xy-9y^2$
t) $(2t^2+s)(3t^2+4s)=6t^4+11t^2s+4s^2$
u) $(x^2+4y)(2x^2y-y^2)=2x^4y+7x^2y^2-4y^3$
v) $x(2x-3)(3x+4)=6x^3-x^2-12x$
w) $(r+s-1)(r+s+1)=r^2+2rs+s^2-1$
x) $(x-2y+z)(x-2y-z)=x^2-4xy+4y^2-z^2$
y) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)=x^4+4x^2+16$

4.6 *a*) $(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$
b) $(3x+2y)^3=27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$
c) $(r-2s)^3=r^3-6r^2s+12rs^2-8s^3$
d) $(x^2-1)^3=x^6-3x^4+3x^2-1$
e) $(ab^2-2b)^3=a^3b^6-6a^2b^5+12ab^4-8b^3$
f) $(t-2)(t^2+2t+4)=t^3-8$
g) $(z-x)(x^2+xz+z^2)=z^3-x^3$
h) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)=x^3+27y^3$

4.7 *a*) $(x-2y+z)^2=x^2-4xy+4y^2+2zx-4zy+z^2$
b) $(s-1)(s^3+s^2+s+1)=s^4-1$
c) $(1+t^2)(1-t^2+t^4-t^6)=1-t^8$
d) $(3x+2y)^2(3x-2y)^2=81x^4-72x^2y^2+16y^4$
e) $(x^2+2x+1)^2(x^2-2x+1)^2=x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1$
f) $(y-1)^3(y+1)^3=y^6-3y^4+3y^2-1$
g) $(u+2)(u-2)(u^2+4)(u^4+16)=u^8-256$

5 FACTORIZACIÓN

5.1 FACTORIZACIÓN

Los factores de una determinada expresión algebraica consisten en dos o más expresiones algebraicas que cuando se multiplican entre sí generan la expresión dada.

EJEMPLOS 5.1 Factorice cada una de las expresiones siguientes:

a) $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$

b) $x^2 + 8x = x(x + 8)$

c) $6x^2 - 7x - 5 = (3x - 5)(2x + 1)$

d) $x^2 + 2xy \quad 8y^2 = (x + 4y)(x - 2y)$

El proceso de factorización, en general, se restringe a encontrar factores de polinomios con coeficientes enteros en cada uno de sus términos. En dichos casos, se requiere que los factores sean también polinomios con coeficientes enteros. A menos que se especifique otra cosa, nos apegaremos a esta limitación.

Por lo tanto, no se considerará a $(x - 1)$ como una expresión factorizable como $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$ ya que estos factores no son polinomios. De manera similar, no se considerará a $(x^2 - 3y^2)$ como factorizable en $(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y)$ ya que estos factores no son polinomios con coeficientes enteros. Asimismo, a pesar de que $3x + 2y$ podría escribirse como $3(x + \frac{2}{3}y)$, ésta no se considerará forma factorizable ya que $x + \frac{2}{3}y$ no es un polinomio con coeficientes enteros.

Se dice que un determinado polinomio con coeficientes enteros es primo si éste no puede factorizarse de acuerdo con las restricciones descritas con anterioridad. Por lo tanto, $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$ se ha expresado como el producto de los factores primos $x - 1$ y $x - 6$.

También se dice que un polinomio está totalmente factorizado cuando éste se expresa como el producto de factores primos.

Nota 1. En la factorización se permiten cambios triviales de signo. Por lo tanto, $x^2 - 7x + 6$ puede factorizarse como $(x - 1)(x - 6)$ o $(1 - x)(6 - x)$. Puede demostrarse que la factorización en primos, independientemente de los cambios triviales de signo y del arreglo de los factores, es posible de una y sólo una manera. A esto se le conoce como el Teorema de Factorización Única.

Nota 2. A veces se utiliza la definición de factores primos siguiente. Se dice que un polinomio es primo si no tiene factores aparte del más y el menos y ± 1. Esto es análogo a la definición de número primo o entero tal como el 2, 3, 5, 7, 11, … y puede verse como equivalente a la definición anterior.

Nota 3. En ocasiones se pueden factorizar polinomios con coeficientes racionales, por ejemplo, $x^2 - 9/4 = (x + 3/2)(x - 3/2)$. En dichos casos los factores deben ser polinomios con coeficientes racionales.

Nota 4. En algunas ocasiones se desea factorizar una expresión sobre un conjunto específico de números, por ejemplo, $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ sobre el conjunto de números reales, sin embargo, es primo sobre el conjunto de números racionales. A menos que se especifique el conjunto de números a utilizar como coeficientes de los factores, se supone que es el conjunto de los enteros.

5.2 PROCEDIMIENTOS DE FACTORIZACIÓN

Las fórmulas I-VIII del capítulo 4 son muy útiles en la factorización. De la misma forma que cuando se leen de izquierda a derecha ayuda a obtener los *productos*, cuando se leen de derecha a izquierda ayudan a encontrar los *factores*.

Los procedimientos de factorización siguientes son muy útiles.

A. Factor monomio común. Tipo: $ac + ad = a(c + d)$

EJEMPLOS 5.2

a) $6x^2y - 2x^3 = 2x^2(3y - x)$
b) $2x^3y - xy^2 + 3x^2y = xy(2x^2 - y + 3x)$

B. Diferencia de dos cuadrados. Tipo: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

EJEMPLOS 5.3

a) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$ donde $a = x$, $b = 5$
b) $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$ donde $a = 2x$, $b = 3y$

C. Trinomio cuadrado perfecto. Tipos: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

De lo anterior se deduce que un trinomio es un cuadrado perfecto si dos términos son cuadrados perfectos y el tercer término es numéricamente dos veces el producto de las raíces cuadradas de los otros dos términos.

EJEMPLOS 5.4

a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
b) $9x^2 = 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$

D. Otros trinomios. Tipos: $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

EJEMPLOS 5.5

a) $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$ donde $a = -4$, $b = -1$ por lo que su suma es $(a + b) = -5$ y su producto $ab = 4$.
b) $x^2 + xy - 12y^2 = (x - 3y)(x + 4y)$ donde $a = -3y$, $b = 4y$
c) $3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$. Aquí $ac = 3$, $bd = -2$, $ad + bc = -5$; por tanteos se obtiene que $a = 1$, $c = 3$, $b = -2$, $d = 1$ satisface $ad + b\text{c} = -5$.
d) $6x^2 + x - 12 = (3x - 4)(2x + 3)$
e) $8 - 14x + 5x^2 = (4 - 5x)(2 - x)$

E. Suma, diferencia de dos cubos. Tipos: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

EJEMPLOS 5.6

a) $$\begin{aligned} 8x^3 + 27y^3 &= (2x)^3 + (3y)^3 \\ &= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2] \\ &= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) \end{aligned}$$
b) $8x^3y^3 - 1 = (2xy)^3 - 1^3 = (2xy - 1)(4x^2y^2 + 2xy + 1)$

F. Agrupamiento de términos. Tipo: $ac + bc + ad + bd = c(a + b) + d(a + b) = (a + b)(c + d)$

EJEMPLO 5.7 $2ax - 4bx + ay - 2by = 2x(a - 2b) + y(a - 2b) = (a - 2b)(2x + y)$

G. Factores de $a^n \pm b^n$. Se aplican las fórmulas VII y VIII del capítulo 4.

EJEMPLOS 5.8

a) $32x^5 + 1 = (2x)^5 + 1^5 = (2x + 1)[(2x)^4 - (2x)^3 + (2x)^2 - 2x + 1]$
$\quad = (2x + 1)(16x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 2x + 1)$

b) $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

H. Suma y resta de términos

EJEMPLO 5.9 Factorice $x^3 + 4$.
Sumando y restando $4x^2$ (dos veces el producto de las raíces cuadradas de x^4 y 4), se tiene,

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

I. Combinaciones de métodos anteriores.

EJEMPLOS 5.10

a) $$\begin{aligned} x^4 - xy^3 - x^3y + y^4 &= (x^4 - xy^3) - (x^3y - y^4) \\ &= x(x^3 - y^3) - y(x^3 - y^3) \\ &= (x^3 - y^3)(x - y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x - y) \\ &= (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x^2y - 3x^2 - y + 3 &= (x^2y - 3x^2) + (-y + 3) \\ &= x^2(y - 3) - (y - 3) \\ &= (y - 3)(x^2 - 1) \\ &= (y - 3)(x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 - y^2 &= (x^2 + 6x + 9) - y^2 \\ &= (x + 3)^2 - y^2 \\ &= [(x + 3) + y][(x + 3) - y] \\ &= (x + y + 3)(x - y + 3) \end{aligned}$$

5.3 MÁXIMO COMÚN DIVISOR

El máximo común divisor (MCD) de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado y mayor coeficiente numérico (prescindiendo de los signos) del cual es factor cada uno de los polinomios dados.

Para encontrar el MCD de varios polinomios se sugiere el uso del método siguiente. *a*) Escriba cada polinomio como el producto de factores primos. *b*) El MCD es el producto que se obtiene al elevar cada factor a la potencia del *menor valor* que se presenta en cualquiera de los polinomios.

EJEMPLO 5.11 El MCD de $2^3 3^2(x - y)^3(x + 2y)^2$, $2^2 3^3(x - y)^2(x + 2y)^3$, $3^2(x - y)^2(x + 2y)$ es $3^2(x - y)^2(x + 2y)$.

Dos o más polinomios son primos relativamente si su MCD es 1.

5.4 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El mínimo común múltiplo (MCM) de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado y menor coeficiente (prescindiendo de los signos) del cual es factor cada uno de los polinomios dados.

Para encontrar el MCM de varios polinomios se sugiere el uso del método siguiente. *a*) Escriba cada polinomio como el producto de factores primos. *b*) El MCM es el producto que se obtiene al elevar cada factor a la potencia de *mayor valor* que se presenta en cualquiera de los polinomios.

EJEMPLOS 5.12 El MCM de $2^3 3^2(x - y)^3(x + 2y)^2$, $2^2 3^3(x - y)^2(x + 2y)^3$, $3^2(x - y)^2(x + 2y)$ es $2^3 3^3(x - y)^3(x + 2y)^3$.

Problemas resueltos

Factor monomio común

Tipo: $ac + ad = a(c + d)$

5.1 *a*) $2x^2 - 3xy = x(2x - 3y)$
b) $4x + 8y + 12z = 4(x + 2y + 3z)$
c) $3x^2 + 6x^3 + 12x^4 = 3x^2(1 + 2x + 4x^2)$
d) $9s^3t + 15s^2t^3 - 3s^2t^2 = 3s^2t(3s + 5t^2 - t)$
e) $10a^2b^3c^4 - 15a^3b^2c^4 + 30a^4b^3c^2 = 5a^2b^2c^2(2bc^2 - 3ac^2 + 6a^2b)$
f) $4a^{n+1} - 8a^{2n} = 4a^{n+1}(1 - 2a^{n-1})$

Diferencia de dos cuadrados

Tipo: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

5.2 *a*) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$
b) $25x^2 - 4y^2 = (5x)^2 - (2y)^2 = (5x + 2y)(5x - 2y)$
c) $9x^2y^2 - 16a^2 = (3xy)^2 - (4a)^2 = (3xy + 4a)(3xy - 4a)$
d) $1 - m^2n^4 = 1^2 - (mn^2)^2 = (1 + mn^2)(1 - mn^2)$
e) $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x + 2)(x - 2)$
f) $x^2y^2 - 36y^4 = y^2[x^2 - (6y)^2] = y^2(x + 6y)(x - 6y)$
g) $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$
h) $1 - x^8 = (1 + x^4)(1 - x^4) = (1 + x^4)(1 + x^2)(1 - x^2) = (1 + x^4)(1 + x^2)(1 + x)(1 - x)$
i) $32a^4b - 162b^5 = 2b(16a^4 - 81b^4) = 2b(4a^2 + 9b^2)(4a^2 - 9b^2) = 2b(4a^2 + 9b^2)(2a + 3b)(2a - 3b)$
j) $x^3y - y^3x = xy(x^2 - y^2) = xy(x + y)(x - y)$
k) $(x + 1)^2 - 36y^2 = [(x + 1) + (6y)][(x + 1) - (6y)] = (x + 6y + 1)(x - 6y + 1)$
l) $(5x + 2y)^2 - (3x - 7y)^2 = [(5x + 2y) + (3x - 7y)][(5x + 2y) - (3x - 7y)] = (8x - 5y)(2x + 9y)$

Trinomio cuadrado perfecto

Tipos: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

5.3 *a*) $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2(x)(4) + 4^2 = (x + 4)^2$
b) $1 + 4y + 4y^2 = (1 + 2y)^2$
c) $t^2 - 4t + 4 = t^2 - 2(t)(2) + 2^2 = (t - 2)^2$
d) $x^2 - 16xy + 64y^2 = (x - 8y)^2$
e) $25x^2 + 60xy + 36y^2 = (5x + 6y)^2$
f) $16m^2 - 40mn + 25n^2 = (4m - 5n)^2$
g) $9x^4 - 24x^2y + 16y^2 = (3x^2 - 4y)^2$
h) $2x^3y^3 + 16x^2y^4 + 32xy^5 = 2xy^3(x^2 + 8xy + 16y^2) = 2xy^3(x + 4y)^2$
i) $16a^4 - 72a^2b^2 + 81b^4 = (4a^2 - 9b^2)^2 = [(2a + 3b)(2a - 3b)]^2 = (2a + 3b)^2(2a - 3b)^2$
j) $(x + 2y)^2 + 10(x + 2y) + 25 = (x + 2y + 5)^2$
k) $a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2$
l) $4m^6n^6 + 32m^4n^4 + 64m^2n^2 = 4m^2n^2(m^4n^4 + 8m^2n^2 + 16) = 4m^2n^2(m^2n^2 + 4)^2$

Otros trinomios

Tipos: $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

5.4 *a*) $x^2 + 6x + 8 = (x + 4)(x + 2)$
b) $x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$
c) $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$
d) $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$
e) $x^2 - 7xy + 12y^2 = (x - 3y)(x - 4y)$
f) $x^2 + xy - 12y^2 = (x + 4y)(x - 3y)$
g) $16 - 10x + x^2 = (8 - x)(2 - x)$
h) $20 - x - x^2 = (5 + x)(4 - x)$
i) $3x^3 - 3x^2 - 18x = 3x(x^2 - x - 6) = 3x(x - 3)(x + 2)$
j) $y^4 + 7y^2 + 12 = (y^2 + 4)(y^2 + 3)$
k) $m^4 + m^2 - 2 = (m^2 + 2)(m^2 - 1) = (m^2 + 2)(m + 1)(m - 1)$
l) $(x + 1)^2 + 3(x + 1) + 2 = [(x + 1) + 2][(x + 1) + 1] = (x + 3)(x + 2)$
m) $s^2t^2 - 2st^3 - 63t^4 = t^2(s^2 - 2st - 63t^2) = t^2(s - 9t)(s + 7t)$
n) $z^4 - 10z^2 + 9 = (z^2 - 1)(z^2 - 9) = (z + 1)(z - 1)(z + 3)(z - 3)$
o) $2x^6y - 6x^4y^3 - 8x^2y^5 = 2x^2y(x^4 - 3x^2y^2 - 4y^4) = 2x^2y(x^2 + y^2)(x^2 - 4y^2) = 2x^2y(x^2 + y^2)(x + 2y)(x - 2y)$
p) $x^2 - 2xy + y^2 + 10(x - y) + 9 = (x - y)^2 + 10(x - y) + 9$
$= [(x - y) + 1][(x - y) + 9] = (x - y + 1)(x - y + 9)$
q) $4x^8y^{10} - 40x^5y^7 + 84x^2y^4 = 4x^2y^4(x^6y^6 - 10x^3y^3 + 21) = 4x^2y^4(x^3y^3 - 7)(x^3y^3 - 3)$
r) $x^{2a} - x^a - 30 = (x^a - 6)(x^a + 5)$
s) $x^{m+2n} + 7x^{m+n} + 10x^m = x^m(x^{2n} + 7x^n + 10) = x^m(x^n + 2)(x^n + 5)$
t) $a^{2(y-1)} - 5a^{y-1} + 6 = (a^{y-1} - 3)(a^{y-1} - 2)$

5.5 *a*) $3x^2 + 10x + 3 = (3x + 1)(x + 3)$
b) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$
c) $2y^2 - y - 6 = (2y + 3)(y - 2)$
d) $10s^2 + 11s - 6 = (5s - 2)(2s + 3)$
e) $6x^2 - xy - 12y^2 = (3x + 4y)(2x - 3y)$
f) $10 - x - 3x^2 = (5 - 3x)(2 + x)$
g) $4z^4 - 9z^2 + 2 = (z^2 - 2)(4z^2 - 1) = (z^2 - 2)(2z + 1)(2z - 1)$
h) $16x^3y + 28x^2y^2 - 30xy^3 = 2xy(8x^2 + 14xy - 15y^2) = 2xy(4x - 3y)(2x + 5y)$
i) $12(x + y)^2 + 8(x + y) - 15 = [6(x + y) - 5][2(x + y) + 3] = (6x + 6y - 5)(2x + 2y + 3)$
j) $6b^{2n+1} + 5b^{n+1} - 6b = b(6b^{2n} + 5b^n - 6) = b(2b^n + 3)(3b^n - 2)$
k) $18x^{4p+m} - 66x^{2p+m}y^2 - 24x^my^4 = 6x^m(3x^{4p} - 11x^{2p}y^2 - 4y^4) = 6x^m(3x^{2p} + y^2)(x^{2p} - 4y^2)$
$= 6x^m(3x^{2p} + y^2)(x^p + 2y)(x^p - 2y)$
l) $64x^{12}y^3 - 68x^8y^7 + 4x^4y^{11} = 4x^4y^3(16x^8 - 17x^4y^4 + y^8) = 4x^4y^3(16x^4 - y^4)(x^4 - y^4)$
$= 4x^4y^3(4x^2 + y^2)(4x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
$= 4x^4y^3(4x^2 + y^2)(2x + y)(2x - y)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

Suma y diferencia de dos cubos

Tipos: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

5.6 *a*) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
b) $a^3 - 27 = a^3 - 3^3 = (a - 3)(a^2 + 3a + 3^2) = (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$
c) $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)[(a^2)^2 - a^2b^2 + (b^2)^2] = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$
d) $a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
e) $a^9 + b^9 = (a^3)^3 + (b^3)^3 = (a^3 + b^3)[(a^3)^2 - a^3b^3 + (b^3)^2] = (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^6 - a^3b^3 + b^6)$
f) $a^{12} + b^{12} = (a^4)^3 + (b^4)^3 = (a^4 + b^4)(a^8 - a^4b^4 + b^8)$
g) $64x^3 + 125y^3 = (4x)^3 + (5y)^3 = (4x + 5y)[(4x)^2 - (4x)(5y) + (5y)^2]$
$= (4x + 5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$
h) $(x + y)^3 - z^3 = (x + y - z)[(x + y)^2 + (x + y)z + z^2] = (x + y - z)(x^2 + 2xy + y^2 + xz + yz + z^2)$

$i)$ $(x-2)^3+8y^3=(x-2)^3+(2y)^3=(x-2+2y)[(x-2)^2-(x-2)(2y)+(2y)^2]$
$=(x-2+2y)(x^2-4x+4-2xy+4y+4y^2)$

$j)$ $x^6-7x^3-8=(x^3-8)(x^3+1)=(x^3-2^3)(x^3+1)=(x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)$

$k)$ $x^8y-64x^2y^7=x^2y(x^6-64y^6)=x^2y(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)=x^2y[x^3+(2y)^3][x^3-(2y)^3]$
$=x^2y(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

$l)$ $54x^6y^2-38x^3y^2-16y^2=2y^2(27x^6-19x^3-8)=2y^2(27x^3+8)(x^3-1)=2y^2[(3x)^3+2^3](x^3-1)$
$=2y^2(3x+2)(9x^2-6x+4)(x-1)(x^2+x+1)$

Agrupamiento de términos

Tipo: $ac+bc+ad+bd=c(a+b)+d(a+b)=(a+b)(c+d)$

5.7 $a)$ $bx-ab+x^2-ax=b(x-a)+x(x-a)=(x-a)(b+x)=(x-a)(x+b)$

$b)$ $3ax-ay-3bx+by=a(3x-y)-b(3x-y)=(3x-y)(a-b)$

$c)$ $6x^2-4ax-9bx+6ab=2x(3x-2a)-3b(3x-2a)=(3x-2a)(2x-3b)$

$d)$ $ax+ay+x+y=a(x+y)+(x+y)=(x+y)(a+1)$

$e)$ $x^2-4y^2+x+2y=(x+2y)(x-2y)+(x+2y)=(x+2y)(x-2y+1)$

$f)$ $x^3+x^2y+xy^2+y^3=x^2(x+y)+y^2(x+y)=(x+y)(x^2+y^2)$

$g)$ $x^7+27x^4-x^3-27=x^4(x^3+27)-(x^3+27)=(x^3+27)(x^4-1)$
$=(x^3+3^3)(x^2+1)(x^2-1)=(x+3)(x^2-3x+9)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$h)$ $x^3y^3-y^3+8x^3-8=y^3(x^3-1)+8(x^3-1)=(x^3-1)(y^3+8)$
$=(x-1)(x^2+x+1)(y+2)(y^2-2y+4)$

$i)$ $a^6+b^6-a^2b^4-a^4b^2=a^6-a^2b^4+b^6-a^4b^2=a^2(a^4-b^4)-b^2(a^4-b^4)=(a^4-b^4)(a^2-b^2)$
$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)(a+b)(a-b)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)(a+b)(a-b)$
$=(a^2+b^2)(a+b)^2(a-b)^2$

$j)$ $a^3+3a^2-5ab+2b^2-b^3=(a^3-b^3)+(3a^2-5ab+2b^2)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)(3a-2b)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2+3a-2b)$

Factores de $a^n \pm b^n$

5.8 a^n+b^n tiene $a+b$ como factor si y sólo si n es un entero impar positivo. Entonces,

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}):$$

$a)$ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$b)$ $64+y^3=4^3+y^3=(4+y)(4^2-4y+y^2)=(4+y)(16-4y+y^2)$

$c)$ $x^3+8y^6=x^3+(2y^2)^3=(x+2y^2)[x^2-x(2y^2)+(2y^2)^2]=(x+2y^2)(x^2-2xy^2+4y^4)$

$d)$ $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$e)$ $1+x^5y^5=1^5+(xy)^5=(1+xy)(1-xy+x^2y^2-x^3y^3+x^4y^4)$

$f)$ $z^5+32=z^5+2^5=(z+2)(z^4-2z^3+2^2z^2-2^3z+2^4)=(z+2)(z^4-2z^3+4z^2-8z+16)$

$g)$ $a^{10}+x^{10}=(a^2)^5+(x^2)^5=(a^2+x^2)[(a^2)^4-(a^2)^3x^2+(a^2)^2(x^2)^2-(a^2)(x^2)^3+(x^2)^4]$
$=(a^2+x^2)(a^8-a^6x^2+a^4x^4-a^2x^6+x^8)$

$h)$ $u^7+v^7=(u+v)(u^6-u^5v+u^4v^2-u^3v^3+u^2v^4-uv^5+v^6)$

$i)$ $x^9+1=(x^3)^3+1^3=(x^3+1)(x^6-x^3+1)=(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)$

5.9 a^n-b^n tiene $a-b$ como factor si n es cualquier entero positivo. Entonces,

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}):$$

Si n es un entero impar positivo, a^n-b^n también tiene $a+b$ como factor.

$a)$ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

b) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
c) $27x^3 - y^3 = (3x)^3 - y^3 = (3x - y)[(3x)^2 + (3x)y + y^2] = (3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$
d) $1 - x^3 = (1 - x)(1^2 + 1x + x^2) = (1 - x)(1 + x + x^2)$
e) $a^5 - 32 = a^5 - 2^5 = (a - 2)(a^4 + a^3 \cdot 2 + a^2 \cdot 2^2 + a \cdot 2^3 + 2^4) = (a - 2)(a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16)$
f) $y^7 - z^7 = (y - z)(y^6 + y^5z + y^4z^2 + y^3z^3 + y^2z^4 + yz^5 + z^6)$
g) $x^6 - a^6 = (x^3 + a^3)(x^3 - a^3) = (x + a)(x^2 - ax + a^2)(x - a)(x^2 + ax + a^2)$
h) $u^8 - v^8 = (u^4 + v^4)(u^4 - v^4) = (u^4 + v^4)(u^2 + v^2)(u^2 - v^2) = (u^4 + v^4)(u^2 + v^2)(u + v)(u - v)$
i) $x^9 - 1 = (x^3)^3 - 1 = (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$
j) $x^{10} - y^{10} = (x^5 + y^5)(x^5 - y^5) = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

Suma y resta de términos

5.10 *a*) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ (sumando y restando a^2b^2)
$= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$
$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$

b) $36x^4 + 15x^2 + 4$ (sumando y restando $9x^2$)
$= (36x^4 + 24x^2 + 4) - 9x^2 = (6x^2 + 2)^2 - (3x)^2$
$= [(6x^2 + 2) + 3x][(6x^2 + 2) - 3x] = (6x^2 + 3x + 2)(6x^2 - 3x + 2)$

c) $64x^4 + y^4$ (sumando y restando $16x^2y^2$)
$= (64x^4 + 16x^2y^2 + y^4) - 16x^2y^2 = (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2$
$= (8x^2 + y^2 + 4xy)(8x^2 + y^2 - 4xy)$

d) $u^8 - 14u^4 + 25$ (sumando y restando $4u^4$)
$= (u^8 - 10u^4 + 25) - 4u^4 = (u^4 - 5)^2 - (2u^2)^2$
$= (u^4 - 5 + 2u^2)(u^4 - 5 - 2u^2) = (u^4 + 2u^2 - 5)(u^4 - 2u^2 - 5)$

Problemas diversos

5.11 *a*) $x^2 - 4z^2 + 9y^2 - 6xy = (x^2 - 6xy + 9y^2) - 4z^2$
$= (x - 3y)^2 - (2z)^2 = (x - 3y + 2z)(x - 3y - 2z)$

b) $16a^2 + 10bc - 25c^2 - b^2 = 16a^2 - (b^2 - 10bc + 25c^2)$
$= (4a)^2 - (b - 5c)^2 = (4a + b - 5c)(4a - b + 5c)$

c) $x^2 + 7x + y^2 - 7y - 2xy - 8 = (x^2 - 2xy + y^2) + 7(x - y) - 8$
$= (x - y)^2 + 7(x - y) - 8 = (x - y + 8)(x - y - 1)$

d) $a^2 - 8ab - 2ac + 16b^2 + 8bc - 15c^2 = (a^2 - 8ab + 16b^2) - (2ac - 8bc) - 15c^2$
$= (a - 4b)^2 - 2c(a - 4b) - 15c^2 = (a - 4b - 5c)(a - 4b + 3c)$

e) $m^4 - n^4 + m^3 - mn^3 - n^3 + m^3n = (m^4 - mn^3) + (m^3n - n^4) + (m^3 - n^3)$
$= m(m^3 - n^3) + n(m^3 - n^3) + (m^3 - n^3)$
$= (m^3 - n^3)(m + n + 1) = (m - n)(m^2 + mn + n^2)(m + n + 1)$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

5.12 *a*) $9x^4y^2 = 3^2x^4y^2$, $12x^3y^3 = 2^2 \cdot 3x^3y^3$
MCD $= 3x^3y^2$, MCM $= 2^2 \cdot 3^2x^4y^3 = 36x^4y^3$

b) $48r^3t^4 = 2^4 \cdot 3r^3t^4$, $54r^2t^6 = 2 \cdot 3^3r^2t^6$, $60r^4t^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5r^4t^2$
MCD $= 2 \cdot 3r^2t^2 = 6r^2t^2$, MCM $= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5r^4t^6 = 2160r^4t^6$

c) $6x - 6y = 2 \cdot 3(x - y)$, $4x^2 - 4y^2 = 2^2(x^2 - y^2) = 2^2(x + y)(x - y)$
MCD $= 2(x - y)$, MCM $= 2^2 \cdot 3(x + y)(x - y)$

d) $y^4 - 16 = (y^2 + 4)(y + 2)(y - 2)$, $y^2 - 4 = (y + 2)(y - 2)$, $y^2 - 3y + 2 = (y - 1)(y - 2)$
MCD $= y - 2$, MCM $= (y^2 + 4)(y + 2)(y - 2)(y - 1)$

e) $3 \cdot 5^2(x + 3y)^2(2x - y)^4$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5(x + 3y)^3(2x - y)^2$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5(x + 3y)^4(2x - y)^5$
MCD $= 3 \cdot 5(x + 3y)^2(2x - y)^2$, MCM $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2(x + 3y)^4(2x - y)^5$

Problemas propuestos

Descomponga en factores las expresiones siguientes.

5.13 *a*) $3x^2y^4 + 6x^3y^3$
b) $12s^2t^2 - 6s^5t^4 + 4s^4t$
c) $2x^2yz - 4xyz^2 + 8xy^2z^3$
d) $4y^2 - 100$
e) $1 - a^4$
f) $64x - x^3$
g) $8x^4 - 128$
h) $18x^3y - 8xy^3$
i) $(2x + y)^2 - (3y - z)^2$
j) $4(x + 3y)^2 - 9(2x - y)^2$
k) $x^2 + 4x + 4$
l) $4 - 12y + 9y^2$
m) $x^2y^2 - 8xy + 16$
n) $4x^3y + 12x^2y^2 + 9xy^3$
o) $3a^4 + 6a^2b^2 + 3b^4$
p) $(m^2 - n^2)^2 + 8(m^2 - n^2) + 16$
q) $x^2 + 7x + 12$
r) $y^2 - 4y - 5$
s) $x^2 - 8xy + 15y^2$
t) $2z^3 + 10z^2 - 28z$
u) $15 + 2x - x^2$

5.14 *a*) $m^4 - 4m^2 - 21$
b) $a^4 - 20a^2 + 64$
c) $4s^4t - 4s^3t^2 - 24s^2t^3$
d) $x^{2m+4} + 5x^{m+4} - 50x^4$
e) $2x^2 + 3x + 1$
f) $3y^2 - 11y + 6$
g) $5m^3 - 3m^2 - 2m$
h) $6x^2 + 5xy - 6y^2$
i) $36z^6 - 13z^4 + z^2$
j) $12(x - y)^2 + 7(x - y) - 12$
k) $4x^{2n+2} - 4x^{n+2} - 3x^2$

5.15 *a*) $y^3 + 27$
b) $x^3 - 1$
c) $x^3y^3 + 8$
d) $8z^4 - 27z^7$
e) $8x^4y - 64xy^4$
f) $m^9 - n^9$
g) $y^6 + 1$
h) $(x - 2)^3 + (y + 1)^3$
i) $8x^6 + 7x^3 - 1$

5.16 *a*) $xy + 3y - 2x - 6$
b) $2pr - ps + 6qr - 3qs$
c) $ax^2 + bx - ax - b$
d) $x^3 - xy^2 - x^2y + y^3$
e) $z^7 - 2z^6 + z^4 - 2z^3$
f) $m^3 - mn^2 + m^2n - n^3 + m^2 - n^2$

5.17 *a*) $z^5 + 1$ *e*) $x^5 + 32y^5$ *i*) $32 - u^5$ *a*) $m^{10} - 1$ *a*) $1 - z^7$

5.18 *a*) $z^4 + 64$
b) $4x^4 + 3x^2y^2 + y^4$
c) $x^8 - 12x^4 + 16$
d) $m^2 - 4p^2 + 4mn + 4n^2$
e) $6ab + 4 - a^2 - 9b^2$
f) $9x^2 - x^2y^2 + 4y^2 + 12xy$
g) $x^2 + y^2 - 4z^2 + 2xy + 3xz + 3yz$

5.19 Encuentre el MCD y MCM de cada grupo de polinomios
a) $16y^2z^4, \quad 24y^3z^2$
b) $9r^3s^2t^5, 12r^2s^4t^3, \quad 21r^5s^2$
c) $x^2 - 3xy + 2y^2, \quad 4x^2 - 16xy + 16y^2$
d) $6y^3 + 12y^2z, \quad 6y^2 - 24z^2, \quad 4y^2 - 4yz - 24z^2$
e) $x^5 - x, \quad x^5 - x^2, \quad x^5 - x^3$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

5.13 *a*) $3x^2y^3(y + 2x)$
b) $2s^2t(6t - 3s^3t^3 + 2s^2)$
c) $2xyz(x - 2z + 4yz^2)$
d) $4(y + 5)(y - 5)$
e) $(1 + a^2)(1 + a)(1 - a)$
f) $x(8 + x)(8 - x)$
g) $8(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$
h) $2xy(3x + 2y)(3x - 2y)$
i) $(2x + 4y - z)(2x - 2y + z)$
j) $(8x + 3y)(9y - 4x)$
k) $(x + 2)^2$
l) $(2 - 3y)^2$
m) $(xy - 4)^2$
n) $xy(2x + 3y)^2$
o) $3(a^2 + b^2)^2$
p) $(m^2 - n^2 + 4)^2$
q) $(x + 3)(x + 4)$
r) $(y - 5)(y + 1)$
s) $(x - 3y)(x - 5y)$
t) $2z(z + 7)(z - 2)$
u) $(5 - x)(3 + x)$

5.14 *a*) $(m^2-7)(m^2+3)$
b) $(a+2)(a-2)(a+4)(a-4)$
c) $4s^2t(s-3t)(s+2t)$
d) $x^4(x^m-5)(x^m+10)$
e) $(2x+1)(x+1)$
f) $(3y-2)(y-3)$
g) $m(5m+2)(m-1)$
h) $(2x+3y)(3x-2y)$
i) $z^2(2z+1)(2z-1)(3z+1)(3z-1)$
j) $(4x-4y-3)(3x-3y+4)$
k) $x^2(2x^n+1)(2x^n-3)$

5.15 *a*) $(y+3)(y^2-3y+9)$
b) $(x-1)(x^2+x+1)$
c) $(xy+2)(x^2y^2-2xy+4)$
d) $z^4(2-3z)(4+6z+9z^2)$
e) $8xy(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$
f) $(m-n)(m^2+mn+n^2)(m^6+m^3n^3+n^6)$
g) $(y^2+1)(y^4-y^2+1)$
h) $(x+y-1)(x^2-xy+y^2-5x+4y+7)$
i) $(2x-1)(4x^2+2x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

5.16 *a*) $(x+3)(y-2)$
b) $(2r-s)(p+3q)$
c) $(ax+b)(x-1)$
d) $(x-y)^2(x+y)$
e) $z^3(z-2)(z+1)(z^2-z+1)$
f) $(m+n)(m-n)(m+n+1)$

5.17 *a*) $(z+1)(z^4-z^3+z-z+1)$
b) $(x+2y)(x^4-2x^3y+4x^2y^2-8xy^3+16y^4)$
c) $(2-u)(16+8u+4u^2+2u^3+u^4)$
d) $(m+1)(m^4-m^3+m^2-m+1)(m-1)(m^4+m^3+m^2+m+1)$
e) $(1-z)(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)$

5.18 *a*) $(z^2+4z+8)(z^2-4z+8)$
b) $(2x^2+xy+y^2)(2x^2-xy+y^2)$
c) $(x^4+2x^2-4)(x^4-2x^2-4)$
d) $(m+2n+2p)(m+2n-2p)$
e) $(2+a-3b)(2-a+3b)$
f) $(3x+xy+2y)(3x-xy+2y)$
g) $(x+y+4z)(x+y-z)$

5.17 *a*) MCD $= 2^3y^2z^2 = 8y^2z^2$, MCM $= 2^4\cdot 3y^3z^4 = 48y^3z^4$
b) MCD $= 3r^2s^2$, MCM $= 252r^5s^4t^5$
c) MCD $= x-2y$, MCM $= 4(x-y)(x-2y)^2$
d) MCD $= 2(y+2z)$, MCM $= 12y^2(y+2z)(y-2z)(y-3z)$
e) MCD $= x(x-1)$, MCM $= x^3(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)$

FRACCIONES

6

6.1 FRACCIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Una fracción algebraica racional es una expresión que se puede escribir como el cociente de dos polinomios P/Q. El polinomio P es el numerador y Q el denominador de la fracción. Por lo tanto,

$$\frac{3x-4}{x^2-6x+8} \qquad \text{y} \qquad \frac{x^3+2y^2}{x^4-3xy+2y^3}$$

son fracciones algebraicas racionales.

Las reglas para el cálculo con fracciones algebraicas son las mismas que las correspondientes de las fracciones en aritmética. Una de las fundamentales es: El valor de una fracción no se altera si se multiplican o dividen el numerador y el denominador por una misma cantidad, siempre que ésta sea distinta de cero. En estas condiciones las fracciones se llaman *equivalentes*.

Por ejemplo, si multiplicamos el numerador y denominador de $(x+2)/(x-3)$ por $(x-1)$, obtenemos la fracción equivalente

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$$

siempre y cuando $(x-1)$ no sea cero, es decir, siempre y cuando $x \neq 1$.

De manera similar, la fracción $(x^2+3x+2)/(x^2+4x+3)$, se puede expresar como,

$$\frac{(x+2)(x+1)}{(x+3)(x+1)}$$

y dividir el numerador y el denominador entre $(x+1)$ para obtener $(x+2)/(x+3)$ siempre y cuando $(x+1)$ no sea cero, es decir, siempre y cuando $x \neq -1$. La operación de dividir entre un factor común al numerador y al denominador recibe el nombre de simplificación y puede indicarse por medio de una línea diagonal, por lo que,

$$\frac{(x+2)\cancel{(x+1)}}{(x+3)\cancel{(x+1)}} = \frac{x+2}{x+3}:$$

Simplificar una fracción es transformarla en otra equivalente cuyo numerador y denominador no tengan más factores comunes (excepto ± 1). En tal caso se dice que la fracción se ha *simplificado a sus términos de menor grado*.

Esta reducción se logra factorizando el numerador y denominador y eliminando los factores comunes, suponiendo que éstos son diferentes de cero.

Por lo tanto, $\dfrac{x^2 - 4xy + 3y^2}{x^2 - y^2} = \dfrac{(x - 3y)\cancel{(x - y)}}{(x + y)\cancel{(x - y)}} = \dfrac{x - 3y}{x + y}$, siempre y cuando $(x - y) \neq 0$.

Tres signos están asociados con una fracción: el correspondiente al numerador, el del denominador y el de la fracción. Se puede cambiar cualquier par de estos signos sin que cambie el valor de la fracción. Si a una fracción no se le antepone signo alguno, se sobrentiende que es positivo.

EJEMPLOS 6.1

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}, \qquad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, \qquad -\left(\frac{-a}{-b}\right) = -\frac{a}{b}$$

A menudo la simplificación consiste en un cambio de signo. Por lo tanto,

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x} = \frac{(x - 2)(x - 1)}{2 - x} = \frac{(x - 2)(x - 1)}{-(x - 2)} = \frac{x - 1}{-1} = 1 - x.$$

6.2 OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

La suma algebraica de fracciones que tienen el *mismo denominador* es otra fracción cuyo numerador es la suma algebraica de los numeradores de las fracciones dadas y cuyo denominador es el denominador común.

EJEMPLOS 6.2

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3 - 4 - 2 + 1}{5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{x - 3} - \frac{3x + 4}{x - 3} + \frac{x^2 + 5}{x - 3} = \frac{2 - (3x + 4) + (x^2 + 5)}{x - 3} = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 3}$$

Para sumar y restar fracciones con *distinto denominador*, escriba cada fracción dada como fracciones equivalentes que tengan un denominador común.

El *mínimo común denominador* (MCD) de un conjunto de fracciones dado es el *mínimo común múltiplo* (MCM) del denominador de las fracciones.

Por lo tanto, el MCD de $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, y $\frac{7}{10}$ es el MCM de 4, 5 y 10 el cual es 20 y el MCD de

$$\frac{2}{x^2}, \frac{3}{2x}, \frac{x}{7} \qquad \text{es } 14x^2.$$

EJEMPLOS 6.3

$$\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{7}{10} = \frac{15}{20} - \frac{16}{20} + \frac{14}{20} = \frac{15 - 16 + 14}{20} = \frac{13}{20}$$

$$\frac{2}{x^2} - \frac{3}{2x} - \frac{x}{7} = \frac{2(14) - 3(7x) - x(2x^2)}{14x^2} = \frac{28 - 21x - 2x^3}{14x^2}$$

$$\frac{2x + 1}{x(x + 2)} - \frac{3}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{(2x + 1)(x - 1) - 3x}{x(x + 2)(x - 1)} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{x(x + 2)(x - 1)}$$

El producto de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

EJEMPLOS 6.4

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{16}=\frac{2\cdot 4\cdot 15}{3\cdot 5\cdot 16}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{x^2-9}{x^2-6x+5}\cdot\frac{x-5}{x+3}&=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-5)(x-1)}\cdot\frac{x-5}{x+3}\\&=\frac{\cancel{(x+3)}(x-3)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-1)\cancel{(x+3)}}=\frac{x-3}{x-1}\end{aligned}$$

El cociente de dos fracciones es otra fracción que se obtiene invirtiendo el divisor y después multiplicando.

EJEMPLOS 6.5

$$\frac{3}{8}\div\frac{5}{4}\qquad\text{o}\qquad\frac{3/8}{5/4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{10}$$

$$\frac{7}{x^2-4}\div\frac{xy}{x+2}=\frac{7}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x+2}{xy}=\frac{7}{xy(x-2)}$$

6.3 FRACCIONES COMPLEJAS

Una fracción compleja es aquella que tiene una o más fracciones en el numerador, en el denominador o en ambos. Para simplificar una fracción compleja:

Método 1

1. Reduzca el numerador y el denominador a fracciones simples.
2. Divida las dos fracciones resultantes

EJEMPLO 6.6

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$$

Método 2

1. Multiplique el numerador y el denominador de la fracción compleja por el MCM de todos los denominadores de las fracciones en la fracción compleja.
2. Simplifique lo más posible la fracción resultante.

EJEMPLO 6.7

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{x^2}-4}{\frac{1}{x}-2}&=\frac{\left(\frac{1}{x^2}-4\right)x^2}{\left(\frac{1}{x}-2\right)x^2}=\frac{1-4x^2}{x-2x^2}=\frac{(1+2x)(1-2x)}{x(1-2x)}\\&=\frac{1+2x}{x}\end{aligned}$$

Problemas resueltos

Simplificación de fracciones

6.1 *a*) $\frac{15x^2}{12xy} = \frac{3 \cdot 5 \cdot x \cdot x}{3 \cdot 4 \cdot x \cdot y} = \frac{5x}{4y}$ *c*) $\frac{14a^3b^3c^2}{-7a^2b^4c^2} = -\frac{2a}{b}$

b) $\frac{4x^2y}{18xy^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y}{2 \cdot 9 \cdot x \cdot y \cdot y^2} = \frac{2x}{9y^2}$ *d*) $\frac{8x-8y}{16x-16y} = \frac{8\cancel{(x-y)}}{16\cancel{(x-y)}} = \frac{1}{2}$ (donde $x - y \neq 0$)

e) $\frac{x^3y - y^3x}{x^2y - xy^2} = \frac{xy(x^2-y^2)}{xy(x-y)} = \frac{\cancel{xy(x-y)}(x+y)}{\cancel{xy(x-y)}} = x + y$

f) $\frac{x^2 - 4xy + 3y^2}{y^2 - x^2} = \frac{(x-3y)(x-y)}{(y-x)(y+x)} = -\frac{(x-3y)\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x-y)}(y+x)} = -\frac{x-3y}{y+x} = \frac{3y-x}{y+x}$

g) $\frac{6x^2 - 3xy}{-4x^2y + 2xy^2} = \frac{3x(2x-y)}{2xy(y-2x)} = -\frac{3x\cancel{(2x-y)}}{2xy\cancel{(2x-y)}} = -\frac{3}{2y}$

h) $\frac{r^3s + 3r^2s + 9rs}{r^3 - 27} = \frac{rs(r^2+3r+9)}{r^3 - 3^3} = \frac{rs(r^2+3r+9)}{(r-3)(r^2+3r+9)} = \frac{rs}{r-3}$

i) $\frac{(8xy + 4y^2)^2}{8x^3y + y^4} = \frac{(4y[2x+y])^2}{y(8x^3+y^3)} = \frac{16y^2(2x+y)^2}{y(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)} = \frac{16y(2x+y)}{4x^2-2xy+y^2}$

j) $\frac{x^{2n+1} - x^{2n}y}{x^{n+3} - x^ny^3} = \frac{x^{2n}(x-y)}{x^n(x^3-y^3)} = \frac{x^{2n}(x-y)}{x^n(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{x^n}{x^2+xy+y^2}$

Multiplicación de fracciones

6.2 *a*) $\frac{2x}{3y^2} \cdot \frac{6y}{x^2} = \frac{12xy}{3x^2y^2} = \frac{4}{xy}$ *b*) $\frac{9}{3x+3} \cdot \frac{x^2-1}{6} = \frac{9}{3(x+1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{6} = \frac{x-1}{2}$

c) $\frac{x^2-4}{xy^2} \cdot \frac{2xy}{x^2-4x+4} = \frac{(x+2)(x-2)}{xy^2} \cdot \frac{2xy}{(x-2)^2} = \frac{2(x+2)}{y(x-2)}$

d) $\frac{6x-12}{4xy+4x} \cdot \frac{y^2-1}{2-3x+x^2} = \frac{6(x-2)}{4x(y+1)} \cdot \frac{(y+1)(y-1)}{(2-x)(1-x)}$

$$= -\frac{6\cancel{(x-2)}\cancel{(y+1)}(y-1)}{4x\cancel{(y+1)}\cancel{(x-2)}(1-x)} = -\frac{3(y-1)}{2x(1-x)} = \frac{3(y-1)}{2x(x-1)}$$

e) $\left(\frac{ax+ab+cx+bc}{a^2-x^2}\right)\left(\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2+(b+a)x+ab}\right) = \frac{(a+c)(x+b)}{(a-x)(a+x)} \cdot \frac{(x-a)(x-a)}{(x+a)(x+b)}$

$$= -\frac{(a+c)(x+b)}{(x-a)(a+x)} \cdot \frac{(x-a)(x-a)}{(x+a)(x+b)} = -\frac{(a+c)(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{(a+c)(a-x)}{(x+a)^2}$$

División de fracciones

6.3 *a*) $\frac{5}{4} \div \frac{3}{11} = \frac{5}{4} \cdot \frac{11}{3} = \frac{55}{12}$

b) $\frac{9}{7} \div \frac{4}{7} = \frac{9}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$

c) $\frac{3x}{2} \div \frac{6x^2}{4} = \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{6x^2} = \frac{1}{x}$

$d)$ $\dfrac{10xy^2}{3z} \div \dfrac{5xy}{6z^3} = \dfrac{10xy^2}{3z} \cdot \dfrac{6z^3}{5xy} = 4yz^2$

$e)$ $\dfrac{x+2xy}{3x^2} \div \dfrac{2y+1}{6x} = \dfrac{x+2xy}{3x^2} \cdot \dfrac{6x}{2y+1} = \dfrac{x(1+2y)}{3x^2} \cdot \dfrac{6x}{(2y+1)} = 2$

$f)$ $\dfrac{9-x^2}{x^4+6x^3} \div \dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2+7x+6} = \dfrac{9-x^2}{x^4+6x^3} \cdot \dfrac{x^2+7x+6}{x^3-2x^2-3x}$

$$= \frac{(3-x)(3+x)}{x^3(x+6)} \cdot \frac{(x+1)(x+6)}{x(x-3)(x+1)} = -\frac{3+x}{x^4}$$

$g)$ $\dfrac{2x^2-5x+2}{\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)} = \dfrac{(2x^2-5x+2)}{1} \cdot \dfrac{3}{2x-1} = \dfrac{(2x-1)(x-2)}{1} \cdot \dfrac{3}{2x-1} = 3(x-2)$

$h)$ $\dfrac{\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+7x-8}\right)}{\left(\dfrac{9-x^2}{64-x^2}\right)} = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+7x-8} \cdot \dfrac{64-x^2}{9-x^2} = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+8)(x-1)} \cdot \dfrac{(8-x)(8+x)}{(3-x)(3+x)}$

$$= -\frac{(x-2)(8-x)}{(x-1)(3+x)} = \frac{(x-2)(x-8)}{(x-1)(x+3)}$$

Suma y resta de fracciones

6.4 $a)$ $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$b)$ $\dfrac{5}{18} + \dfrac{7}{24} = \dfrac{5(4)}{72} + \dfrac{7(3)}{72} = \dfrac{41}{72}$

$c)$ $\dfrac{x}{6} + \dfrac{5x}{21} = \dfrac{x(7)+5x(2)}{42} = \dfrac{17x}{42}$

$d)$ $\dfrac{3t^2}{5} - \dfrac{4t^2}{15} = \dfrac{3t^2(3) - 4t^2(1)}{15} = \dfrac{5t^2}{15} = \dfrac{t^2}{3}$

$e)$ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{y+x}{xy}$

$f)$ $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{3y} = \dfrac{3(3y)+4(x)}{3xy} = \dfrac{9y+4x}{3xy}$

$g)$ $\dfrac{5}{2x} - \dfrac{3}{4x^2} = \dfrac{5(2x)-3(1)}{4x^2} = \dfrac{10x-3}{4x^2}$

$h)$ $\dfrac{3a}{bc} + \dfrac{2b}{ac} = \dfrac{3a(a)+2b(b)}{abc} = \dfrac{3a^2+2b^2}{abc}$

$i)$ $\dfrac{3t-1}{10} + \dfrac{5-2t}{15} = \dfrac{(3t-1)3+(5-2t)2}{30} = \dfrac{9t-3+10-4t}{30} = \dfrac{5t+7}{30}$

$j)$ $\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{3x(x+1)-2x^2+2(x+1)}{x^2(x+1)} = \dfrac{x^2+5x+2}{x^2(x+1)}$

$k)$ $5 - \dfrac{5}{x+3} + \dfrac{10}{x^2-9} = \dfrac{5(x^2-9)-5(x-3)+10}{x^2-9} = \dfrac{5(x^2-x-4)}{x^2-9}$

$l)$ $\dfrac{3}{y-2} - \dfrac{2}{y+2} - \dfrac{y}{y^2-4} = \dfrac{3(y+2)-2(y-2)-y}{y^2-4} = \dfrac{10}{y^2-4}$

Fracciones complejas

6.5 $a)$ $\dfrac{5/7}{3/4} = \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{20}{21}$ $b)$ $\dfrac{2/3}{7} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{7} = \dfrac{2}{21}$ $c)$ $\dfrac{10}{5/6} = \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{6}{5} = \dfrac{60}{5} = 12$

$d)\ \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{6}\right)}{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{\left(\dfrac{4}{6}+\dfrac{5}{6}\right)}{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{\dfrac{9}{6}}{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{9}{6}\cdot\dfrac{8}{3} = 4$

$f)\ \dfrac{\left(\dfrac{2}{a-b}\right)}{a-b} = \dfrac{2}{a-b}\cdot\dfrac{1}{a-b} = \dfrac{2}{(a-b)^2}$

$e)\ \dfrac{\left(\dfrac{x+y}{3x^2}\right)}{\left(\dfrac{x-y}{x}\right)} = \dfrac{x+y}{3x^2}\cdot\dfrac{x}{x-y} = \dfrac{x+y}{3x(x-y)}$

$g)\ \dfrac{2a}{\left(\dfrac{a}{x+1}\right)} = \dfrac{2a}{1}\cdot\dfrac{x+1}{a} = 2(x+1)$

$h)\ \dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+1\right)}{\left(\dfrac{1}{x}-1\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+1\right)x}{\left(\dfrac{1}{x}-1\right)x} = \dfrac{1+x}{1-x}$

Problemas propuestos

Demuestre que:

6.6 $a)\ \dfrac{24x^3y^2}{18xy^3} = \dfrac{4x^2}{3y}$ $d)\ \dfrac{4x^2-16}{x^2-2x} = \dfrac{4(x+2)}{x}$ $g)\ \dfrac{ax^4-a^2x^3-6a^3x^2}{9a^4x-a^2x^3} = -\dfrac{x(x+2a)}{a(x+3a)}$

$b)\ \dfrac{36xy^4z^2}{-15x^4y^3z} = \dfrac{-12yx}{5x^3}$ $e)\ \dfrac{y^2-5y+6}{4-y^2} = \dfrac{3-y}{y+2}$ $h)\ \dfrac{xy-y^2}{x^4y-xy^4} = \dfrac{1}{x(x^2+xy+y^2)}$

$c)\ \dfrac{5a^2-10ab}{a-2b} = 5a$ $f)\ \dfrac{(x^2+4x)^2}{x^2+6x+8} = \dfrac{x^2(x+4)}{x+2}$ $i)\ \dfrac{3a^2}{4b^3}\cdot\dfrac{2b^4}{9a^3} = \dfrac{b}{6a}$

6.7 $a)\ \dfrac{8xyz^2}{3x^3y^2z}\cdot\dfrac{9xy^2z}{4xz^5} = \dfrac{6y}{x^2z^3}$ $d)\ \dfrac{x^2-4y^2}{3xy+3x}\cdot\dfrac{2y^2-2}{2y^2+xy-x^2} = -\dfrac{2(x+2y)(y-1)}{3x(x+y)}$

$b)\ \dfrac{xy^2}{2x-2y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^3y^2} = \dfrac{x+y}{2x^2}$ $e)\ \dfrac{y^2-y-6}{y^2-2y+1}\cdot\dfrac{y^2+3y-4}{9y-y^3} = -\dfrac{(y+2)(y+4)}{y(y-1)(y+3)}$

$c)\ \dfrac{x^2+3x}{4x^2-4}\cdot\dfrac{2x^2+2x}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2-4x+3}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ $f)\ \dfrac{t^3+3t^2+t+3}{4t^2-16t+16}\cdot\dfrac{8-t^3}{t^3+t} = \dfrac{(t+3)(t^2+2t+4)}{4t(2-t)}$

6.8 $a)\ \dfrac{3x}{8y}\div\dfrac{9x}{16y} = \dfrac{2}{3}$ $b)\ \dfrac{24x^3y^2}{5z^2}\div\dfrac{8x^2y^3}{15z^4} = \dfrac{9xz^2}{y}$ $c)\ \dfrac{x^2-4y^2}{x^2+xy}\div\dfrac{x^2-xy-6y^2}{y^2+xy} = \dfrac{y(x-2y)}{x(x-3y)}$

6.9 $a)\ \dfrac{6x^2-x-2}{\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)} = (2x+1)^2$ $b)\ \dfrac{\left(\dfrac{y^2-3y+2}{y^2+4y-21}\right)}{\left(\dfrac{4-4y+y^2}{9-y^2}\right)} = -\dfrac{(y-1)(y+3)}{(y-2)(y+7)}$ $c)\ \dfrac{\left(\dfrac{x^2y+xy^2}{x-y}\right)}{x+y} = \dfrac{xy}{x-y}$

6.10 $a)\ \dfrac{2x}{3}-\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{6}$ $e)\ \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x}{x^2-4} = \dfrac{x}{x^2-4}$

$b)\ \dfrac{4}{3x}-\dfrac{5}{4x} = \dfrac{1}{12x}$ $f)\ \dfrac{r-1}{r^2+r-6}-\dfrac{r+2}{r^2+4r+3}+\dfrac{1}{3r-6} = \dfrac{r^2+4r+12}{3(r+3)(r-2)(r+1)}$

$c)\ \dfrac{3}{2y^2}-\dfrac{8}{y} = \dfrac{3-16y}{2y^2}$ $g)\ \dfrac{x}{2x^2+3xy+y^2}-\dfrac{x-y}{y^2-4x^2}+\dfrac{y}{2x^2+xy-y^2} = \dfrac{3x^2+xy}{(2x+y)(2x-y)(x+y)}$

$d)\ \dfrac{x+y^2}{x^2}+\dfrac{x-1}{x}-1 = \dfrac{y^2}{x^2}$ $h)\ \dfrac{a}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{b}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{c}{(b-c)(c-a)} = 0$

6.11 *a*) $\dfrac{x+y}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} = xy$

b) $\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{2x^2+x} = \dfrac{1}{x^2}$

c) $\dfrac{\left(y+\dfrac{2y}{y-2}\right)}{\left(1+\dfrac{4}{y^2-4}\right)} = y+2$

d) $\dfrac{\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right)} = 2$

e) $\dfrac{x}{1-\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{y}}\right)} = x+y$

f) $2-\dfrac{2}{1-\left(\dfrac{2}{2-\dfrac{2}{x^2}}\right)} = 2x^2$

7 EXPONENTES

7.1 EXPONENTE ENTERO POSITIVO

Si n es un entero positivo, a^n representa el producto de n factores iguales a a. Así pues, $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$. En la expresión a^n, a recibe el nombre de base y n el de exponente o índice de la potencia. a^n se lee "potencia *enésima* de a", o bien "a a la n". Si $n = 2$, a^2 se lee "a al cuadrado"; a^3 se lee "a al cubo".

EJEMPLOS 7.1

$$x^3 = x \cdot x \cdot x, \qquad 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32, \qquad (-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$$

7.2 EXPONENTE ENTERO NEGATIVO

Si n es un entero positivo, se define

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{suponiendo que } a \neq 0.$$

EJEMPLOS 7.2

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}, \qquad \frac{1}{3^{-3}} = 3^3 = 27, \qquad -4x^{-2} = \frac{-4}{x^2}, \qquad (a+b)^{-1} = \frac{1}{(a+b)}$$

7.3 RAÍCES

Si n es un entero positivo y a y b son tales que $a^n = b$, por definición, a es la raíz *enésima* de b.

Si b es positivo, solamente hay un número positivo a tal que $a^n = b$. Dicho número se representa por $\sqrt[n]{b}$ y recibe el nombre de la raíz *enésima principal* de b.

EJEMPLO 7.3 $\sqrt[4]{16}$ es un número positivo que, elevado a la cuarta potencia, da lugar al número 16. Es evidente que dicho número es $+2$ y, por lo tanto, $\sqrt[4]{16} = +2$.

EJEMPLO 7.4 El número -2 elevado a la cuarta potencia también da lugar a 16. En estas condiciones, -2 es una raíz cuarta de 16, pero no es la raíz cuarta principal de 16.

Si b es negativo, no existe una raíz *enésima* positiva de b, pero sí existe una raíz *enésima* negativa de b siempre que n sea impar. Este número negativo recibe el nombre de raíz *enésima* principal de b y se representa por $\sqrt[n]{b}$.

EJEMPLO 7.5 $\sqrt[3]{-27}$ es un número que, elevado a la tercera potencia (o al cubo), da lugar a -27. Se ve fácilmente que dicho número es -3 y, por lo tanto, $\sqrt[3]{-27} = -3$ es la raíz cúbica principal de -27.

EJEMPLO 7.6. Siempre que n sea par, por ejemplo $\sqrt[4]{-16}$, la raíz enésima principal no se puede representar por medio de un número real.

Nota: En matemáticas superiores se demuestra que hay exactamente n valores tales que $a^n = b$, $b \neq 0$, siempre que se introduzcan los números imaginarios (o complejos).

7.4 EXPONENTES RACIONALES

Si m y n son enteros positivos, por definición

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{(suponiendo que } a \geq 0 \text{ si } n \text{ es par)}$$

EJEMPLOS 7.7

$$4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8, \qquad (27)^{2/3} = \sqrt[3]{(27)^2} = 9$$

Si m y n son enteros positivos, por definición

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$$

EJEMPLOS 7.8

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}, \qquad x^{-5/2} = \frac{1}{x^{5/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

Se define $a^0 = 1$ si $a \neq 0$.

EJEMPLOS 7.9

$$10^0 = 1, \qquad (-3)^0 = 1, \qquad (ax)^0 = 1 \qquad (\text{si } ax \neq 0)$$

7.5 LEYES GENERALES DE LOS EXPONENTES

Si p y q son números reales, se verifican las leyes siguientes:

A. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

EJEMPLOS 7.10

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32, \qquad 5^{-3} \cdot 5^7 = 5^{-3+7} = 5^4 = 625, \qquad 2^{1/2} \cdot 2^{5/2} = 2^3 = 8$$
$$3^{1/3} \cdot 3^{1/6} = 3^{1/3+1/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}, \qquad 3^9 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-3} = 3^4 = 81$$

B. $(a^p)^q = a^{pq}$

EJEMPLOS 7.11

$$(2^4)^3 = 2^{(4)(3)} = 2^{12}, \qquad (5^{1/3})^{-3} = 5^{(1/3)(-3)} = 5^{-1} = 1/5, \qquad (3^2)^0 = 3^{(2)(0)} = 3^0 = 1$$
$$(x^5)^{-4} x^{(5)(4)} = x^{-20}, \qquad (a^{2/3})^{3/4} = a^{(2/3)(3/4)} = a^{1/2}$$

C. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad a \neq 0$

EJEMPLOS 7.12

$$\frac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4, \qquad \frac{3^{-2}}{3^4} = 3^{-2-4} = 3^{-6}, \qquad \frac{x^{1/2}}{x^{-1}} = x^{1/2-(-1)} = x^{3/2}$$
$$\frac{(x+15)^{4/3}}{(x+15)^{5/6}} = (x+15)^{4/3-5/6} = (x+15)^{1/2} = \sqrt{x+15}$$

D. $(ab)^p = a^p b^p$

EJEMPLOS 7.13

$$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4, \qquad (2x)^3 = 2^3x^3 = 8x^3, \qquad (3a)^{-2} = 3^{-2}a^{-2} = \frac{1}{9a^2}$$

$$(4x)^{1/2} = 4^{1/2}x^{1/2} = 2x^{1/2} = 2\sqrt{x}$$

E. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \qquad b \neq 0$

EJEMPLOS 7.14

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}, \qquad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-3} = \frac{(x^2)^{-3}}{(y^3)^{-3}} = \frac{x^{-6}}{y^{-9}} = \frac{y^9}{x^6}$$

$$\left(\frac{5^3}{2^6}\right)^{-1/3} = \frac{(5^3)^{-1/3}}{(2^6)^{-1/3}} = \frac{5^{-1}}{2^{-2}} = \frac{2^2}{5^1} = \frac{4}{5}$$

7.6 NOTACIÓN CIENTÍFICA

Tanto los números muy largos como los muy cortos, a menudo se escriben en notación científica cuando se realizan cálculops con ellos. Un número expresado en notación científica se escribe como N veces una potencia de 10 donde $1 \leq N < 10$ y N contiene todos los dígitos significativos del número.

EJEMPLOS 7.15 Escriba cada uno de los números siguientes en notación científica. *a*) 5 834 000, *b*) 0.028 031, *c*) 45.6.

a) $5\,834\,000 = 5.834 \times 10^6$
b) $0.028\,031 = 2.8031 \times 10^2$
c) $45.6 = 4.56 \times 10^1$

Se puede teclear el número 3.1416×10^3 en la calculadora utilizando la tecla EE o la tecla EXP. Cuando se teclea 3.1416, se oprime la tecla EE y después se teclea el 3 seguido por el botón ENTER o la tecla $=$, se obtiene en la pantalla 3 141.6. De forma similar, se puede ingresar 4.902×10^{-2}, tecleando 4.902, presionando la tecla EE y, después, ingresando -2 seguida de ENTER a fin de obtener en la pantalla 0.049 02. A menudo, el exponente puede ser cualquier entero entre -99 y 99. En función de la cantidad de dígitos en el número y en el exponente que se utilizó, una calculadora puede redondear el número y/o dejar el resultado en notación científica. El número de dígitos que pueden formar el número N varía de calculadora a calculadora, así como también si una calculadora presenta en la pantalla un resultado en particular en notación científica o en notación estándar.

A menudo las calculadoras despliegan el resultado en notación científica, por ejemplo 3.69E-7 o 3.69^{-07}. En cada caso la respuesta será interpretada como 3.69×10^{-7}. Las calculadoras despliegan los dígitos significativos en el resultado seguidos de la potencia de 10 que se utilizará. Cuando teclee un número en notación científica en su calculadora como parte de un cálculo, presione la tecla de signo después de cada número hasta que esté listo para calcular el resultado.

EJEMPLO 7.16 Calcule $(1.892 \times 10^8) \times (5.34 \times 10^{-3})$ utilizando una calculadora.

Ingrese el 1.892, presione la tecla EE, teclee 8, teclee el signo $\times$, ingrese 5.34, presione la tecla EE, ingrese -3 y presione la tecla ENTER; obtendrá en la pantalla el número 1 010 328.

$$(1.892 \times 10^8) \times (5.34 \times 10^{-3}) = 1\,010\,328$$

Problemas resueltos

Exponente entero positivo

7.1 *a*) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{243}$

d) $(3y)^2(2y)^3 = (3y)(3y)(2y)(2y)(2y) = 72y^5$

e) $(-3xy^2)^3 = (-3xy^2)(-3xy^2)(-3xy^2) = -27x^3y^6$

Exponente entero negativo

7.2 *a*) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

b) $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

c) $-4(4)^{-2} = -4\left(\frac{1}{4^2}\right) = -\frac{1}{4}$

d) $-2b^{-2} = -2\left(\frac{1}{b^2}\right) = -\frac{2}{b^2}$

e) $(-2b)^{-2} = \frac{1}{(-2b)^2} = \frac{1}{4b^2}$

f) $5 \cdot 10^{-3} = 5\left(\frac{1}{10^3}\right) = \frac{5}{1\,000} = \frac{1}{200}$

g) $\frac{8}{10^{-2}} = 8 \cdot 10^2 = 800$

h) $\frac{4}{x^{-2}y^{-2}} = 4x^2y^2$

i) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{(3/4)^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$

j) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3} = \frac{1}{(x/y)^3} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{y^3}{x^3}$

k) $(0.02)^{-1} = \left(\frac{2}{100}\right)^{-1} = \frac{100}{2} = 50$

l) $\frac{ab^{-4}}{a^{-2}b} = \frac{a \cdot a^2}{b \cdot b^4} = \frac{a^3}{b^5}$

m) $\frac{(x-1)^{-2}(x+3)^{-1}}{(2x-4)^{-1}(x+5)^{-3}} = \frac{(2x-4)(x+5)^3}{(x-1)^2(x+3)}$

Exponentes racionales

7.3 *a*) $(8)^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ *b*) $(-8)^{2/3} = \sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $(-x^3)^{1/3} = \sqrt[3]{-x^3} = -x$ *d*) $\left(\frac{1}{16}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{16} = \frac{1}{4}}$ *e*) $\left(-\frac{1}{8}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$

7.4 *a*) $x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $(8)^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}$

c) $(-8)^{-2/3} = \frac{1}{(-8)^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{4}$

d) $(-x^3)^{-1/3} = \frac{1}{(-x^3)^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-x^3}} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$

e) $(-1)^{-2/3} = \frac{1}{(-1)^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-1)^2}} = 1$

f) $-(1)^{-2/3} = -\frac{1}{1^{2/3}} = -1$

g) $-(-1)^{-3/5} = -\frac{1}{(-1)^{3/5}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{(-1)^3}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{-1}} = -\frac{1}{-1} = 1$

7.5 *a*) $7^0 = 1, \quad (-3)^0 = 1, \quad (-2/3)^0 = 1$

b) $(x-y)^0 = 1,$ si $x - y \neq 0$

c) $3x^0 = 3 \cdot 1 = 3,$ si $x \neq 0$

i) $(3x)^0 = 1,$ si $3x \neq 0$, es decir si $x \neq 0$

i) $(3x)^0(4y)^0 = 1 \cdot 1 = 1,$ si $3x \neq 0$ y $4\ y \neq 0,$ es decir si $x \neq 0, \quad y \neq$

j) $-2(3x + 2y - 4)^0 = -2(1) = -2,$ si $3x + 2y - 4 \neq 0$

k) $\frac{(5x+3y)}{(5x+3y)^0} = \frac{5x+3y}{1} = 5x + 3y,$ si $5x + 3y \neq 0$

l) $4(x^2+y^2)(x^2+y^2)^0 = 4(x^2+y^2)(1) = 4(x^2+y^2),$ si $x^2 + y^2 \neq 0$

e) $4 \cdot 10^0 = 4 \cdot 1 = 4$

f) $(4 \cdot 10)^0 = (40)^0 = 1$

g) $-(1)^0 = -1$

h) $(-1)^0 = 1$

Leyes generales de los exponentes

7.6 *a*) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

b) $a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8$

c) $3^4 \cdot 3^5 = 3^9$

d) $a^{n+1} \cdot a^{n-2} = a^{2n-1}$

e) $x^{1/2} \cdot x^{1/3} = x^{1/2+1/3} = x^{5/6}$

f) $x^{1/2} \cdot x^{-1/3} = x^{1/2-1/3} = x^{1/6}$

g) $10^7 \cdot 10^{-3} = 10^{7-3} = 10^4$

h) $(4 \cdot 10^{-6})(2 \cdot 10^4) = 8 \cdot 10^{4-6} = 8 \cdot 10^{-2}$

i) $a^x \cdot a^y \cdot a^{-z} = a^{x+y-z}$

j) $(\sqrt{x+y})(x+y) = (x+y)^{1/2}(x+y)^1 = (x+y)^{3/2}$

k) $10^{1.7} \cdot 10^{2.6} = 10^{4.3}$

l) $10^{-4.4} \cdot 10^{3.5} \cdot 10^{-.1} = 10^{-4.1+3.5-.1} = 10^{-.7}$

$m)\quad \left(\frac{b}{a}\right)^{3/2}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{-2/3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{3/2-2/3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{5/6}$

$n)\quad \left(\frac{x}{x+y}\right)^{-1}\left(\frac{x}{x+y}\right)^{1/2}=\left(\frac{x}{x+y}\right)^{-1/2}=\left(\frac{x+y}{x}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{x+y}{x}}$

$o)\quad (x^2+1)^{-5/2}(x^2+1)^0(x^2+1)^2=(x^2+1)^{-5/2+0+2}=(x^2+1)^{-1/2}=\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

7.7
- $a)$ $(a^p)^q=a^{pq}$
- $b)$ $(x^3)^4=x^{3\cdot 4}=x^{12}$
- $c)$ $(a^{m+2})^n=a^{(m+2)n}=a^{mn+2n}$
- $d)$ $(10^3)^2=10^{3\cdot 2}=10^6$
- $e)$ $(10^{-3})^2=10^{-3\cdot 2}=10^{-6}$
- $f)$ $(49)^{3/2}=(7^2)^{3/2}=7^{2\cdot 3/2}=7^3=343$
- $g)$ $(3^{-1/2})^{-2}=3^1=3$
- $h)$ $(u^{-2})^{-3}=u^{(-2)(-3)}=u^6$
- $i)$ $(81)^{3/4}=(3^4)^{3/4}=3^3=27$
- $j)$ $(\sqrt{x+y})^5=[(x+y)^{1/2}]^5=(x+y)^{5/2}$
- $k)$ $(\sqrt[3]{x^3+y^3})^6=[(x^3+y^3)^{1/3}]^6=(x^3+y^3)^{1/3\cdot 6}=(x^3+y^3)^2$
- $l)$ $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[6]{a^{2/3}}=(a^{2/3})^{1/6}=a^{1/9}=\sqrt[9]{a}$

7.8
- $a)$ $\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$
- $b)$ $\frac{a^5}{a^3}=a^{5-3}=a^2$
- $c)$ $\frac{7^4}{7^3}=7^{4-3}=7^1=7$
- $d)$ $\frac{p^{2n+3}}{p^{n+1}}=p^{(2n+3)-(n+1)}=p^{n+2}$
- $e)$ $\frac{10^2}{10^5}=10^{2-5}=10^{-3}$
- $f)$ $\frac{x^{m+3}}{x^{m-1}}=x^4$
- $g)$ $\frac{y^{2/3}}{y^{1/3}}=y^{2/3-1/3}=y^{1/3}$
- $h)$ $\frac{z^{1/2}}{z^{3/4}}=z^{1/2-3/4}=z^{-1/4}$
- $i)$ $\frac{(x+y)^{3a+1}}{(x+y)^{2a+5}}=(x+y)^{a-4}$
- $j)$ $\frac{8\cdot 10^2}{2\cdot 10^{-6}}=\frac{8}{2}\cdot 10^{2+6}=4\cdot 10^8$
- $k)$ $\frac{9\cdot 10^{-2}}{3\cdot 10^4}=\frac{9}{3}\cdot 10^{-2-4}=3\cdot 10^{-6}$
- $l)$ $\frac{a^3b^{-1/2}}{ab^{-3/2}}=a^2b^1=a^2b$
- $m)$ $\frac{4x^3y^{-2}z^{-3/2}}{2x^{-1/2}y^{-4}z}=\left(\frac{4}{2}\right)x^{3+1/2}y^{-2+4}z^{-3/2-1}=2x^{7/2}y^2z^{-5/2}$
- $n)$ $\frac{8\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{y}\sqrt{1/z}}{-2\sqrt[3]{x}\sqrt{y^5}\sqrt{z}}=\frac{8x^{2/3}y^{1/4}z^{-1/2}}{-2x^{1/3}y^{5/2}z^{1/2}}=-4x^{1/3}y^{-9/4}z^{-1}$

7.9
- $a)$ $(ab)^p=a^pb^b$
- $b)$ $(2a)^4=2^4a^4=16a^4$
- $c)$ $(3\cdot 10^2)^4=3^4\cdot 10^8=81\cdot 10^8$
- $d)$ $(4x^8y^4)^{1/2}=4^{1/2}(x^8)^{1/2}(y^4)^{1/2}=2x^4y^2$
- $e)$ $\sqrt[3]{64a^{12}b^6}=(64a^{12}b^6)^{1/3}=(64)^{1/3}(a^{12})^{1/3}(b^6)^{1/3}=4a^4b^2$
- $f)$ $(x^{2n}y^{-1/2}z^{n-1})^2=x^{4n}y^{-1}z^{2n-2}$
- $g)$ $(27x^{3p}y^{6q}z^{12r})^{1/3}=(27)^{1/3}(x^{3p})^{1/3}(y^{6q})^{1/3}(z^{12r})^{1/3}=3x^py^{2q}z^{4r}$

7.10
- **$a)$** $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$
- **$b)$** $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$
- **$c)$** $\left(\frac{3a}{4b}\right)^3=\frac{(3a)^3}{(4b)^3}=\frac{27a^3}{64b^3}$
- $e)$ $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^n=\frac{x^{2n}}{y^{3n}}$
- $f)$ $\left(\frac{a^{m+1}}{b}\right)^m=\frac{a^{m^2+m}}{b^m}$
- $g)$ $\left(\frac{a^2}{b^4}\right)^{3/2}=\frac{(a^2)^{3/2}}{(b^4)^{3/2}}=\frac{a^3}{b^6}$ (donde $a\geq 0,\ b\neq 0$)

g) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{3} = \dfrac{125}{8}$

h) $\left(\dfrac{5^3}{2^6}\right)^{-1/3} = \left(\dfrac{2^6}{5^3}\right)^{1/3} = \dfrac{2^2}{5} = \dfrac{4}{5}$

i) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^{3n}}{27y^6}} = \left(\dfrac{8x^{3n}}{27y^6}\right)^{1/3} = \dfrac{(8x^{3n})^{1/3}}{(27y^6)^{1/3}} = \dfrac{8^{1/3}x^n}{27^{1/3}y^2} = \dfrac{2x^n}{3y^2}$

j) $\left(\dfrac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^{3/2} = \dfrac{(a^{1/3})^{3/2}}{(x^{1/3})^{3/2}} = \dfrac{a^{1/2}}{x^{1/2}}$

k) $\left(\dfrac{x^{-1/3}y^{-2}}{z^{-4}}\right)^{-3/2} = \dfrac{(x^{-1/3}y^{-2})^{-3/2}}{(z^{-4})^{-3/2}} = \dfrac{(x^{-1/3})^{-3/2}(y^{-2})^{-3/2}}{z^6} = \dfrac{x^{1/2}y^3}{z^6}$

l) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[5]{x}\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[3]{z^2}}} = \sqrt{\dfrac{x^{1/5}y^{3/4}}{x^{2/3}}} = \left(\dfrac{x^{1/5}y^{3/4}}{z^{2/3}}\right)^{1/2} = \dfrac{x^{1/10}y^{3/8}}{z^{1/3}}$

Ejemplos diversos

7.11 *a*) $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} = 8 + 4 + 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = 15\dfrac{7}{8}$

b) $4^{3/2} + 4^{1/2} + 4^{-1/2} + 4^{-3/2} = 8 + 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} = 10\dfrac{5}{8}$

c) $\dfrac{4x^0}{2^{-4}} = 4(1)(2^4) = 4 \cdot 16 = 64$

d) $10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 + 10^{-1} + 10^{-2} = 10\,000 + 1\,000 + 100 + 10 + 1 + 0.1 + 0.01$
$= 11\,111.11$

e) $3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = 3524$

f) $\dfrac{4^{3n}}{2^n} = \dfrac{(2^2)^{3n}}{2^n} = \dfrac{2^{6n}}{2^n} = 2^{6n-n} = 2^{5n}$

g) $(0.125)^{1/3}(0.25)^{-1/2} = \dfrac{\sqrt[3]{0.125}}{\sqrt{0.25}} = \dfrac{0.5}{0.5} = 1$

7.12 *a*) Evalúe $4x^{-2/3} + 3x^{1/3} + 2x^0$ cuando $x = 8$.

$$4 \cdot 8^{-2/3} + 3 \cdot 8^{1/3} + 2 \cdot 8^0 = \frac{4}{8^{2/3}} + 3 \cdot 8^{1/3} + 2 \cdot 8^0 = \frac{4}{4} + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 9$$

b) Evalúe

$$\frac{(-3)^2(-2x)^{-3}}{(x+1)^{-2}}$$

cuando $x = 2$

$$\frac{(-3)^2(-4)^{-3}}{3^{-2}} = \frac{9\left(\dfrac{1}{-4}\right)^3}{\dfrac{1}{3^2}} = 9\left(-\frac{1}{4}\right)^3(9) = -\frac{81}{64}$$

7.13 *a*) $\dfrac{2^0 - 2^{-2}}{2 - 2(2)^{-2}} = \dfrac{1 - 1/2^2}{2 - 2/2^2} = \dfrac{1 - 1/4}{2 - 2/4} = \dfrac{3/4}{6/4} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{2a^{-1}+a^0}{a^{-2}} = \dfrac{\left(\dfrac{2}{a}+1\right)}{\left(\dfrac{1}{a^2}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{2+a}{a}\right)}{\left(\dfrac{1}{a^2}\right)} = \dfrac{2+a}{a}\cdot a^2 = (2+a)a = 2a+a^2$

c) $\left(\dfrac{2^0}{8^{1/3}}\right)^{-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = \dfrac{1}{1/2} = 2$ o $\left(\dfrac{2^0}{8^{1/3}}\right)^{-1} = \left(\dfrac{8^{1/3}}{2^0}\right)^{1} = \dfrac{2}{1} = 2$

d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = (3)^2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = 9 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{80}{9}$

e) $\left(-\dfrac{1}{27}\right)^{-2/3} + \left(-\dfrac{1}{32}\right)^{2/5} = (-27)^{2/3} + \left(-\dfrac{1}{2^5}\right)^{2/5} = [(-3)^3]^{2/3} + \left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5\right]^{2/5}$

$$= (-3)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{37}{4}$$

7.14 *a*) $\dfrac{(-3a)^3\cdot 3a^{-2/3}}{(2a)^{-2}\cdot a^{1/3}} = \dfrac{(-3a)^3\cdot 3\cdot (2a)^2}{a^{2/3}\cdot a^{1/3}} = \dfrac{-27a^3\cdot 3\cdot 4a^2}{a^{2/3+1/3}} = \dfrac{-324a^5}{a} = -324a^4$

b) $\dfrac{(x^{-2})^{-3}\cdot(x^{-1/3})^9}{(x^{1/2})^{-3}\cdot(x^{-3/2})^5} = \dfrac{x^6\cdot x^{-3}}{x^{-3/2}\cdot x^{-15/2}} = \dfrac{x^{6-3}}{x^{-3/2-15/2}} = \dfrac{x^3}{x^{-9}} = x^{12}$

c) $\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^m\cdot\left(x-\dfrac{1}{y}\right)^n}{\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^m\cdot\left(y-\dfrac{1}{x}\right)^n} = \dfrac{\left(\dfrac{xy+1}{y}\right)^m\cdot\left(\dfrac{xy-1}{y}\right)^n}{\left(\dfrac{xy+1}{x}\right)^m\cdot\left(\dfrac{xy-1}{x}\right)^n} = \dfrac{\left(\dfrac{(xy+1)^m}{y^m}\right)\cdot\left(\dfrac{(xy-1)^n}{y^n}\right)}{\left(\dfrac{(xy+1)^m}{x^m}\right)\cdot\left(\dfrac{(xy-1)^n}{x^n}\right)}$

$$= \frac{\left(\dfrac{(xy+1)^m(xy-1)^n}{y^{m+n}}\right)}{\left(\dfrac{(xy+1)^m(xy-1)^n}{x^{m+n}}\right)} = \frac{x^{m+n}}{y^{m+n}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{m+n}$$

d) $\dfrac{3^{pq+q}}{3^{pq+p}}\cdot\dfrac{3^{2p}}{3^{2q}} = \dfrac{3^{pq+q+2p}}{3^{pq+p+2q}} = 3^{(pq+q+2p)-(pq+p+2q)} = 3^{p-q}$

7.15 *a*) $\dfrac{(x^{3/4}\cdot x^{1/2})^{1/3}}{(y^{2/3}\cdot y^{4/3})^{1/2}} = \dfrac{(x^{5/4})^{1/3}}{(y^2)^{1/2}} = \dfrac{x^{5/12}}{y}$

b) $\dfrac{(x^{3/4})^{2/3}-(y^{5/4})^{2/5}}{(x^{3/4})^{1/3}+(y^{2/3})^{3/8}} = \dfrac{x^{1/2}-y^{1/2}}{x^{1/4}+y^{1/4}} = \dfrac{(x^{1/4})^2-(y^{1/4})^2}{x^{1/4}+y^{1/4}} = \dfrac{(x^{1/4}+y^{1/4})(x^{1/4}-y^{1/4})}{x^{1/4}+y^{1/4}} = x^{1/4}-y^{1/4}$

c) $\dfrac{1}{1+x^{p-q}} + \dfrac{1}{1+x^{q-p}} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x^p}{x^q}\right)} + \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x^q}{x^p}\right)} = \dfrac{x^q}{x^q+x^p} + \dfrac{x^p}{x^p+x^q} = \dfrac{x^q+x^p}{x^q+x^p} = 1$

d) $\dfrac{x^{3n}-y^{3n}}{x^n-y^n} = \dfrac{(x^n)^3-(y^n)^3}{x^n-y^n} = \dfrac{(x^n-y^n)(x^{2n}+x^ny^n+y^{2n})}{x^n-y^n} = x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}$

e) $\sqrt[a]{a^{a^2-a}} = [a^{a(a-1)}]^{1/a} = a^{a-1}$

f) $2^{2^{3^2}} = 2^{2^9} = 2^{512}$

7.16 *a*) $(0.004)(30\,000)^2 = (4 \times 10^{-3})(3 \times 10^4)^2 = (4 \times 10^{-3})(3^2 \times 10^8) = 4 \cdot 3^2 \times 10^{-3+8}$
$= 36 \times 10^5$ o $3\,600\,000$

b) $\dfrac{48\,000\,000}{1\,200} = \dfrac{48 \times 10^6}{12 \times 10^2} = 4 \times 10^{6-2} = 4 \times 10^4$ o $40\,000$

c) $\dfrac{0.078}{0.00012} = \dfrac{78 \times 10^{-3}}{12 \times 10^{-5}} = 6.5 \times 10^{-3+5} = 6.5 \times 10^2$ o 650

d) $\dfrac{(80\,000\,000)^2(0.000\,003)}{(600\,000)(0.0002)^4} = \dfrac{(8 \times 10^7)^2(3 \times 10^{-6})}{(6 \times 10^5)(2 \times 10^{-4})^4} = \dfrac{8^2 \cdot 3}{6 \cdot 2^4} \cdot \dfrac{10^{14} \cdot 10^{-6}}{10^5 \cdot 10^{-16}} = 2 \times 10^{19}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{(0.004)^4(0.0036)}{(120.000)^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{(4 \times 10^{-3})^4(36 \times 10^{-4})}{(12 \times 10^4)^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{256(36)}{144} \cdot \dfrac{10^{-12} \cdot 10^{-4}}{10^8}}$
$= \sqrt[3]{64 \times 10^{-24}} = 4 \times 10^{-8}$

7.17 ¿Para qué valores reales de las variables involucradas, serán válidas cada una de las operaciones siguientes y se obtendrán números reales?

a) $\sqrt{x^2} = (x^2)^{1/2} = x^1 = x$

b) $\sqrt{a^2 + 2a} + 1 = \sqrt{(a+1)^2} = a + 1$

c) $\dfrac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}} = \dfrac{(a^{-1})^2 - (b^{-1})^2}{a^{-1} - b^{-1}} = \dfrac{(a^{-1} + b^{-1})(a^{-1} - b^{-1})}{(a^{-1} - b^{-1})} = a^{-1} + b^{-1}$

d) $\sqrt{x^4 + 2x^2} + 1 = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1$

e) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{(x-1)^1}{(x-1)^{1/2}} = (x-1)^{1-1/2} = (x-1)^{1/2} = \sqrt{x-1}$

SOLUCIÓN

a) Siendo x un número real, $\sqrt{x^2}$ debe ser positivo o cero. Suponiendo que $\sqrt{x^2} = x$ para todos los valores de x, si $x = -1$ se tendría $\sqrt{(-1)^2} = -1$ o $\sqrt{1} = -1$, es decir $1 = -1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\sqrt{x^2} = x$ no puede ser válido para todos los valores de x. Entonces, $\sqrt{x^2} = x$ siempre que $x \geq 0$. Si $x \leq 0$, se tiene $\sqrt{x^2} = -x$. Un resultado válido para ambos casos, $x \geq 0$ y $x \leq 0$ puede ser $\sqrt{x^2} = |x|$ (valor absoluto de x).

b) $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$ debe ser positivo o cero y, por lo tanto, será igual a $a + 1$ si $a + 1 \geq 0$, es decir, si $a \geq -1$. Un resultado válido para todos los valores de a viene dado por $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = |a + 1|$.

c) $(a^{-2} - b^{-2})/(a^{-1} - b^{-1})$ carece de sentido si a y b son ambos iguales a cero. Tampoco tiene sentido si el denominador $a^{-1} - b^{-1} = 0$, es decir, si $a^{-1} = b^{-1}$ o $a = b$. De aquí que el resultado $(a^{-2} - b^{-2})/(a^{-1} - b^{-1}) = a^{-1} + b^{-1}$ sea válido si y sólo si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $a \neq b$.

d) $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$ debe ser positivo o cero y será igual a $x^2 + 1$ si $x^2 + 1 \geq 0$. Puesto que $x^2 + 1$ es mayor a cero para todos los números reales x, el resultado es válido para todos los valores reales de x.

e) $\sqrt{x - 1}$ no es un número real si $x - 1 < 0$, es decir, si $x < 1$. Asimismo, $(x-1)/\sqrt{x-1}$ carece de sentido si el denominador es cero, es decir, si $x = 1$. De aquí que $(x-1)/\sqrt{x-1} = \sqrt{x-1}$ si y sólo si $x > 1$.

7.18 A una alumna se le solicitó evaluar la expresión $x + 2y + \sqrt{(x-2y)^2}$ para $x = 2$, $y = 4$. Ella escribió

$$x + 2y + \sqrt{(x-2y)^2} = x + 2y + x - 2y = 2x$$

y, por lo tanto, obtuvo el valor $2x = 2(2) = 4$. ¿Es correcta su respuesta?

SOLUCIÓN

Haciendo $x = 2$, $y = 4$ en la expresión dada se obtiene

$$x + 2y + \sqrt{(x - 2y)^2} = 2 + 2(4) + \sqrt{(2 - 8)^2} = 2 + 8 + \sqrt{36} = 2 + 8 + 6 = 16.$$

La alumna cometió la equivocación de escribir $\sqrt{(x - 2y)^2} = x - 2y$, lo cual es válido únicamente si $x \geq 2y$. Si $x \leq 2y$, $\sqrt{(x - 2y)^2} = 2y - x$. En todos los casos, $\sqrt{(x - 2y)^2} = |x - 2y|$. La simplificación correcta debió ser $x + 2y + 2y - x = 4y$, lo cual da como resultado 16 cuando $y = 4$.

Problemas propuestos

Evalúe cada una de las expresiones siguientes:

7.19 *a*) 3^4 *e*) $(-4x)^{-2}$ *i*) $\dfrac{8^{-2/3}(-8)^{2/3}}{8^{1/3}}$ *m*) $(x - y)^0[(x - y)^4]^{-1/2}$

b) $(-2x)^3$ *f*) $(2y^{-1})^{-1}$ *j*) $(-a^3b^3)^{-2/3}$ *n*) $x^y \cdot x^{4y}$

c) $\left(\dfrac{3y}{4}\right)^3$ *g*) $\dfrac{3^{-1}x^2y^{-4}}{2^{-2}x^{-3}y^3}$ *k*) $-3(-1)^{-1/5}(4)^{-1/2}$ *o*) $3y^{2/3} \cdot y^{4/3}$

d) 4^{-3} *h*) $(16)^{1/4}$ *l*) $(10^3)^0$ *p*) $(4 \cdot 10^3)(3 \cdot 10^{-5})(6 \cdot 10^4)$

7.20 *a*) $\dfrac{2^3 \cdot 2^{-2} \cdot 2^4}{2^{-1} \cdot 2^0 \cdot 2^{-3}}$ *d*) $\dfrac{(x + y)^{2/3}(x + y)^{-1/6}}{[(x + y)^2]^{1/4}}$ *g*) $\dfrac{4^{-1/2}a^{2/3}b^{-1/6}c^{-3/2}}{8^{2/3}a^{-1/3}b^{-2/3}c^{5/2}}$

b) $\dfrac{10^{x+y} \cdot 10^{y-x} \cdot 10^{y+1}}{10^{y+1} \cdot 10^{2y+1}}$ *e*) $\dfrac{(10^2)^{-3}(10^3)^{1/6}}{\sqrt{10} \cdot (10^4)^{-1/2}}$ *h*) $\left(\dfrac{2^{-8} \cdot 3^4}{5^{-4}}\right)^{-1/4}$

c) $\dfrac{3^{1/2} \cdot 3^{-2/3}}{3^{-1/2} \cdot 3^{1/3}}$ *f*) $[(x^{-1})^{-2}]^{-3}$ *i*) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{b^5}}}{c^{-2}d^2}}$

7.21 *a*) $\sqrt{27^{-2/3}} + 5^{2/3} \cdot 5^{1/3}$ *g*) $x^{3/2} + 4x^{-1} - 5x^0$ cuando $x = 4$

b) $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + 2^{-1} - 16^{-1/2} \cdot 4 \cdot 3^0$ *h*) $y^{2/3} + 3y^{-1} - 2y^0$ cuando $y = 1/8$

c) $8^{2/3} + 3^{-2} - \dfrac{1}{9}(10)^0$ *i*) $64^{-2/3} \cdot 16^{5/4} \cdot 2^0 \cdot (\sqrt{3})^4$

d) $27^{2/3} - 3(3x)^0 + 25^{1/2}$ *j*) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot a^{-2/3}}{\sqrt[6]{a^5}} + \dfrac{a^{-5/6}}{\sqrt[3]{a^2 \cdot a^{-1/2}}}$

e) $8^{2/3} \cdot 16^{-3/4} \cdot 2^0 - 8^{-2/3}$

f) $\sqrt[3]{(x - 2)^{-2}}$ cuando $x = -6$ *k*) $\left(\dfrac{\sqrt{72y^{2n}}}{3} \cdot 9^0\right)(2y^{n+2})^{-1}$

7.22 *a*) $25^0 + 0.25^{1/2} - 8^{1/3} \cdot 4^{-1/2} + 0.027^{1/3}$ *f*) $(64)^{-2/3} - 3(150)^0 + 12(2)^{-2}$

b) $\dfrac{1}{8^{-2/3}} - 3a^0 + (3a)^0 + (27)^{-1/3} - 1^{3/2}$ *g*) $(0.125)^{-2/3} + \dfrac{3}{2 + 2^{-1}}$

c) $\dfrac{3^{-2} + 5(2)^0}{3 - 4(3)^{-1}}$ *h*) $\sqrt[n]{\dfrac{32}{2^{5+n}}}$

d) $\dfrac{3^0x + 4x^{-1}}{x^{-2/3}}$ si $x = 8$ *i*) $\dfrac{(60\,000)^3(0.00\,002)^4}{100^2(72\,000\,000)(0.0002)^5}$

e) $\dfrac{2 + 2^{-1}}{5} + (-8)^0 - 4^{3/2}$

7.23 *a*) $\dfrac{(x^2+3x+4)^{1/3}[-\frac{1}{2}(5-x)^{-1/2}]-(5-x)^{1/2}[(x^2+3x+4)^{-2/3}(2x+3)/3]}{(x^2+3x+4)^{2/3}}$ si $x = 1$

b) $\dfrac{(9x^2-5y)^{1/4}(2x)-x^2[\frac{1}{4}(9x^2-5y)^{-3/4}(18x)]}{(9x^2-5y)^{1/2}}$ si $x = 2,\quad y = 4$

c) $\dfrac{(x+1)^{2/3}[\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}]-(x-1)^{1/2}[\frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}]}{(x+1)^{4/3}}$

d) $x-1+\sqrt{x^2+2x+1}$

e) $3x-2y-\sqrt{4x^2-4xy+y^2}$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

7.19 *a*) 81 *d*) $1/64$ *g*) $\dfrac{4x^5}{3y^7}$ *j*) $\dfrac{1}{a^2b^2}$ *m*) $\dfrac{1}{(x-y)^2}$ *p*) 7 200

b) $-8x^3$ *e*) $\dfrac{1}{16x^2}$ *h*) 2 *k*) $3/2$ *n*) x^{5y}

c) $\dfrac{27y^3}{64}$ *f*) $y/2$ *i*) $1/2$ *l*) 1 *o*) $3y^2$

7.20 *a*) 2^9 *b*) $1/10$ *c*) 1 *d*) 1 *e*) 10^{-4} *f*) x^{-6} *g*) $\dfrac{a\sqrt{b}}{8c^4}$ *h*) $\dfrac{4}{15}$ *i*) $\dfrac{a^{1/4}b^{5/6}c}{d}$

7.21 *a*) $\dfrac{16}{3}$ *b*) $\dfrac{7}{2}$ *c*) 4 *d*) 11 *e*) $\dfrac{1}{4}$ *f*) $\dfrac{1}{4}$ *g*) 4 *h*) $\dfrac{89}{4}$ *i*) 18 *j*) $\dfrac{2}{a}$ *k*) $\dfrac{\sqrt{2}}{y^2}$

7.22 *a*) 0.8 *b*) $\dfrac{4}{3}$ *c*) $\dfrac{46}{15}$ *d*) 34 *e*) $-\dfrac{13}{2}$ *f*) $\dfrac{1}{16}$ *g*) $\dfrac{26}{5}$ *h*) $\dfrac{1}{2}$ *i*) 150

7.23 *a*) $-\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{7}{8}$

c) $\dfrac{7-x}{6(x-1)^{1/2}(x+1)^{5/3}}$

d) $2x$ si $x \geq -1$, $\quad -2$ si $x \leq -1$

e) $x-y$ si $2x \geq y$, $\quad 5x-3y$ si $2x \leq y$

8 RADICALES

8.1 EXPRESIONES CON RADICALES

Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$ que representa la raíz *enésima* principal de a. El entero positivo n es el índice u orden del radical y el número a es el subradical. El índice no se suele escribir si $n = 2$.

Así, por ejemplo, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{7x^3 - 2y^2}$, $\sqrt{x + 10}$ son radicales de índices 3, 4, 2 y subradicales 5, $7x^3 - 2y^2$, $x + 10$, respectivamente.

8.2 LEYES DE LOS RADICALES

Las leyes de los radicales son las mismas que las correspondientes a las potencias, ya que $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. A continuación se exponen las leyes utilizadas con más frecuencia. Nota: Si n es par, se supone $a, b \geq 0$.

A. $(\sqrt[n]{a})^n = a$

EJEMPLOS 8.1 $(\sqrt[3]{6})^3 = 6, \quad (\sqrt[4]{x^2 + y^2})^4 = x^2 + y^2$

B. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

EJEMPLOS 8.2 $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}, \qquad \sqrt[7]{x^2y^5} = \sqrt[7]{x^2}\,\sqrt[7]{y^5}$

C. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad b \neq 0$

EJEMPLOS 8.3 $\sqrt[5]{\dfrac{5}{32}} = \dfrac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{32}} = \dfrac{\sqrt[5]{5}}{2}, \qquad \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^3}{(y-2)^6}} = \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(y-2)^6}} = \dfrac{x+1}{(y-2)^2}$

D. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

EJEMPLOS 8.4 $\sqrt[3]{(27)^4} = (\sqrt[3]{27})^4 = 3^4 = 81$

E. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

EJEMPLOS 8.5 $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}, \qquad \sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[12]{2}, \qquad \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{x^2}$

8.3 SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

La forma de un radical puede cambiarse de las formas siguientes:

a) Sacando de la raíz las potencias *enésimas* de la cantidad subradical.

EJEMPLOS 8.6

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3(4)} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt{8x^5y^7} = \sqrt{(4x^4y^6)(2xy)} = \sqrt{4x^4y^6}\,\sqrt{2xy} = 2x^2y^3\,\sqrt{2xy}$$

b) Reduciendo el índice del radical.

EJEMPLOS 8.7 $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{6/4} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ donde el índice se reduce de 4 a 2. $\sqrt[6]{25x^6} = \sqrt[6]{(5x^3)^2} = (5x^3)^{2/6} = (5x^3)^{1/3} = \sqrt[3]{5x^3} = x\sqrt[3]{5}$, donde el índice se reduce de 6 a 3.
Nota. $\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$. Es *incorrecto* escribir $\sqrt[4]{(-4)^2} = (-4)^{2/4} = (-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$.

c) Racionalizando el denominador en el subradical.

EJEMPLO 8.8 Racionalice el denominador de $\sqrt[3]{9/2}$.

Se multiplica el numerador y denominador del subradical (9/2) por un número que transforme al denominador en una potencia enésima perfecta (en este caso, $n = 3$) y se saca dicho denominador de la raíz. El número, en este caso, es 22. Por lo tanto,

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\left(\frac{2^2}{2^2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{9(2^2)}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{2}.$$

EJEMPLO 8.9 Racionalice el denominador de $\sqrt[4]{\dfrac{7a^3y^2}{8b^6x^3}}$.

Para transformar $8b^6x^3$ en una cuarta potencia perfecta, se multiplica el numerador y el denominador por $2b^2x$, con lo cual,

$$\sqrt[4]{\frac{7a^3y^2}{8b^6x^3}} = \sqrt[4]{\frac{7a^3y^2}{8b^6x^3}\cdot\frac{2b^2x}{2b^2x}} = \sqrt[4]{\frac{14a^3y^2b^2x}{16b^8x^4}} = \frac{\sqrt[4]{14a^3y^2b^2x}}{2b^2x}$$

Se dice que un radical se encuentra en su forma más simple si:

a) Se han sacado de la raíz todas las potencias *enésimas* perfectas,
b) El índice de la raíz es el menor posible,
c) Se ha racionalizado el denominador, es decir, cuando no existan fracciones en el subradical.

8.4 OPERACIONES CON RADICALES

Dos o más radicales son semejantes cuando, reducidos a su forma más simple, tienen el mismo índice y el mismo subradical.

Por lo tanto, $\sqrt{32}$, $\sqrt{1/2}$ y $\sqrt{8}$ son semejantes ya que,

$$\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = 4\sqrt{2}, \qquad \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{y} \qquad \sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}.$$

Todos los subradicales son 2 y todos los índices son 2. Sin embargo, $\sqrt[3]{32}$ y $\sqrt[3]{2}$ no son semejantes, ya que $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8\cdot 4} = 2\sqrt[3]{4}$.

Para sumar algebraicamente dos o más radicales se reducen a su forma más simple y se combinan los términos con radicales semejantes. Por lo tanto:

$$\sqrt{32} - \sqrt{1/2} - \sqrt{8} = 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = \left(4 - \frac{1}{2} - 2\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Cuando se multiplican dos radicales, seleccione el procedimiento a utilizar con base en la consideración de si los índices de los radicales son los mismos o no.

a) Para multiplicar dos o más radicales del *mismo índice* se aplica la propiedad *B*:

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

EJEMPLOS 8.10 $(2\sqrt[3]{4})(3\sqrt[3]{16}) = 2 \cdot 3\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{16} = 6\sqrt[3]{64} = 6 \cdot 4 = 24$

$$(3\sqrt[4]{x^2y})(\sqrt[4]{x^3y^2}) = 3\sqrt[4]{(x^2y)(x^3y^2)} = 3\sqrt[4]{x^5y^3} = 3x\sqrt[4]{xy^3}$$

b) Para multiplicar radicales de *índices distintos* conviene utilizar exponentes fraccionarios y aplicar las leyes de los exponentes.

EJEMPLOS 8.11 $\sqrt[3]{5}\sqrt{2} = 5^{1/3} \cdot 2^{1/2} = 5^{2/6} \cdot 2^{3/6} = (5^2 \cdot 2^3)^{1/6} = (25 \cdot 8)^{1/6} = \sqrt[6]{200}.$
$\sqrt[3]{4}\sqrt{2} = \sqrt[3]{2^2}\sqrt{2} = 2^{2/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{4/6} \cdot 2^{3/6} = 2^{7/6} = \sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}$

Cuando se dividen dos radicales, seleccione el procedimiento a utilizar con base en la consideración de si los índices de los radicales son los mismos o no.

a) Para dividir dos radicales del *mismo índice* se aplica la ley *C*,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

y simplifique.

EJEMPLO 8.12

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3} \cdot \frac{3^2}{3^2}} = \sqrt[3]{\frac{45}{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{45}}{3}$$

También se puede racionalizar directamente el denominador como sigue.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{5 \cdot 3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{45}}{3}$$

b) Para dividir dos radicales de *índices distintos* conviene utilizar exponentes fraccionarios y aplicar las leyes de los exponentes.

EJEMPLOS 8.13

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{6^{1/2}}{2^{1/4}} = \frac{6^{2/4}}{2^{1/4}} = \sqrt[4]{\frac{6^2}{2}} = \sqrt[4]{\frac{36}{2}} = \sqrt[4]{18}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2}} = \frac{2^{2/3}}{2^{1/2}} = \frac{2^{4/6}}{2^{3/6}} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$$

8.5 RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES FORMADOS POR BINOMIOS

Los binomios irracionales $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ se denominan conjugados entre sí. Por lo tanto, $2\sqrt{3} + \sqrt{2}$ y $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$ están conjugados. La propiedad de éstos conjugados que los vuelve interesantes es el hecho de que son la suma y la diferencia de los mismos dos términos, por lo que su producto es la diferencia de los cuadrados de dichos términos. De aquí que, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - \sqrt{b})^2 = (a - b)$.

Para racionalizar una fracción cuyo denominador es un binomio con radicales de índice 2, multiplique el numerador y el denominador por el conjugado.

EJEMPLO 8.14

$$\frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{12-2} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

Si el denominador de una fracción es $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ multiplique el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ para obtener un denominador de $a+b$. Si el denominador original tiene la forma $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$, multiplique el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ y obtenga como denominador $a-b$. (Consulte la sección 4.2 acerca de las reglas de los productos especiales).

EJEMPLO 8.15

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}-2} = \frac{3(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+4)}{(\sqrt[3]{5}-2)(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+4)} = \frac{3(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+4)}{(\sqrt[3]{5})^3-(2)^3}$$

$$= \frac{3(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+4)}{5-8} = \frac{3(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+4)}{-3} = -\sqrt[3]{25}-2\sqrt[3]{5}-4$$

Problemas resueltos

Reducción de una expresión radical a su forma más simple

8.1 *a*) $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{80}=\sqrt[3]{8\cdot 10}=\sqrt[3]{2^3\cdot 10}=2\sqrt[3]{10}$

c) $5\sqrt[3]{243}=5\sqrt[3]{27\cdot 9}=5\sqrt[3]{3^3\cdot 9}=15\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt[3]{648}=\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3\cdot 3}=6\sqrt[3]{3}$

e) $a\sqrt{9b^4c^3}=a\sqrt{3^2b^4c^2\cdot c}=3ab^2c\sqrt{c}$

f) $\sqrt[6]{343}=\sqrt[6]{7^3}=7^{3/6}=7^{1/2}=\sqrt{7}$

g) $\sqrt[6]{81a^2}=\sqrt[6]{3^4a^2}=3^{4/6}a^{2/6}=3^{2/3}a^{1/3}=\sqrt[3]{9a}$ Observe que $a\geq 0$. Consulte el inciso *k*)

h) $\sqrt[3]{64x^7y^{-6}}=\sqrt[3]{4^3x^6\cdot xy^{-6}}=4x^2y^{-2}\sqrt[3]{x}=\dfrac{4x^2}{y^2}\sqrt[3]{x}$

i) $\sqrt[5]{(72)^4}=(72)^{4/5}=(8\cdot 9)^{4/5}=(2^3\cdot 3^2)^{4/5}=2^{12/5}\cdot 3^{8/5}$

$=(2^2\cdot 2^{2/5})(3\cdot 3^{3/5})=2^2\cdot 3\sqrt[5]{2^2\cdot 3^3}=12\sqrt[5]{108}$

j) $(7\sqrt[3]{4ab})^2=49(4ab)^{2/3}=49\sqrt[3]{16a^2b^2}=98\sqrt[3]{2a^2b^2}$

k) $2a\sqrt{a^2+6a+9}=2a\sqrt{(a+3)^2}=2a(a+3)$. Se recuerda al estudiante que $\sqrt{(a+3)^2}$ es un número positivo o cero; de aquí que $\sqrt{(a+3)^2}=a+3$ sólo si $a+3\geq 0$. Si los valores de a son tales que $a+3<0$ están incluidos, debe escribir $\sqrt{(a+3)^2}=|a+3|$.

l) $\dfrac{x-25}{\sqrt{x}+5}=\dfrac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x}+5}=\sqrt{x}-5$

m) $\sqrt{12x^4-36x^2y^2+27y^4}=\sqrt{3(4x^4-12x^2y^2+9y^4)}=\sqrt{3(2x^2-3y^2)^2}=(2x^2-3y^2)\sqrt{3}$
Observe que esto es válido sólo si $2x^2\geq 3y^2$. Consulte el inciso *k*) más atrás.

n) $\sqrt[n]{a^nb^{2n}c^{3n+1}d^{n+2}}=(a^nb^{2n}c^{3n+1}d^{n+2})^{1/n}=ab^2c^3c^{1/n}dd^{2/n}=ab^2c^3d\,\sqrt[n]{cd^2}$

o) $\sqrt[3]{\sqrt{256}}=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot 2}=2\sqrt[3]{2}$

p) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{6ab^2}}=[(6ab^2)^{1/3}]^{1/4}=(6ab^2)^{1/12}=\sqrt[12]{6ab^2}$

q) $\sqrt[5]{729\sqrt{a^3}}=\sqrt[5]{729a^{3/2}}=(3^6a^{3/2})^{1/5}=3^{12/10}a^{3/10}=3\sqrt[10]{9a^3}$

Transformación de un radical

8.2 Exprese como radicales de orden 12 :

a) $\sqrt[3]{5}=5^{1/3}=5^{4/12}=\sqrt[12]{5^4}=\sqrt[12]{625}$

b) $\sqrt{ab} = (ab)^{1/2} = (ab)^{6/12} = \sqrt[12]{(ab)^6} = \sqrt[12]{a^6b^6}$

c) $\sqrt[6]{x^n} = x^{n/6} = x^{2n/12} = \sqrt[12]{x^{2n}}$

8.3 Exprese en términos de radicales del menor orden posible:

a) $\sqrt[4]{9} = 9^{1/4} = (3^2)^{1/4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

b) $\sqrt[12]{8x^3y^6} = \sqrt[12]{(2xy^2)^3} = (2xy^2)^{3/12} = (2xy^2)^{1/4} = \sqrt[4]{2xy^2}$

c) $\sqrt[8]{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt[8]{(a+b)^2} = (a+b)^{2/8} = (a+b)^{1/4} = \sqrt[4]{a+b}$

8.4 Transforme en radicales enteros, es decir, en radicales de coeficiente 1:

a) $6\sqrt{3} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108}$

b) $4x^2\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{(4x^2)^3y^2} = \sqrt[3]{64x^6y^2}$

c) $\dfrac{2x}{y}\sqrt[4]{\dfrac{2y}{x}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{2x}{y}\right)^4 \cdot \dfrac{2y}{x}} = \sqrt[4]{\dfrac{16x^4}{y^4} \cdot \dfrac{2y}{x}} = \sqrt[4]{\dfrac{32x^3}{y^3}}$

d) $\dfrac{a-b}{a+b}\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \cdot \dfrac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$

8.5 Determine cuál es el mayor de los siguientes números irracionales:

a) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}$ *b*) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{11}$ *c*) $2\sqrt{5}, 3\sqrt{2}$

SOLUCIÓN

a) $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{4/12} = (2^4)^{1/12} = (16)^{1/12}$; $\sqrt[4]{3} = 3^{1/4} = 3^{3/12} = (3^3)^{1/12} = (27)^{1/12}$.
Puesto que $(27)^{1/12} > (16)^{1/12}$, $\sqrt[4]{3} > \sqrt[3]{2}$.

b) $\sqrt{5} = 5^{1/2} = 5^{3/6} = (5^3)^{1/6} = (125)^{1/6}$; $\sqrt[3]{11} = (11)^{1/3} = (11)^{2/6} = (11^2)^{1/6} = (121)^{1/6}$.
Puesto que $125 > 121$, $\sqrt{5} > \sqrt[3]{11}$.

c) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$; $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$.
De aquí que $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$.

8.6 Racionalice el denominador

a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{3}} = \sqrt{\dfrac{6}{3^2}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{6}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{6}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6 \cdot 6^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{36}}{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{36}$

Otro método: $\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}} = \dfrac{3}{6^{1/3}} \cdot \dfrac{6^{2/3}}{6^{2/3}} = \dfrac{3 \cdot 6^{2/3}}{6^1} = \dfrac{3\sqrt[3]{6^2}}{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{36}$

c) $3x\sqrt[4]{\dfrac{y}{2x}} = 3x\sqrt[4]{\dfrac{y(2x)^3}{2x(2x)^3}} = 3x\sqrt[4]{\dfrac{y(8x^3)}{(2x)^4}} = \dfrac{3x}{2x}\sqrt[4]{8x^3y} = \dfrac{3}{2}\sqrt[4]{8x^3y}$

d) $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b} \cdot \dfrac{a+b}{a+b}} = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}} = \dfrac{1}{a+b}\sqrt{a^2-b^2}$

e) $\dfrac{4xy^2}{\sqrt[3]{2xy^2}} = \dfrac{4xy^2}{\sqrt[3]{2xy^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{(2xy^2)^2}}{\sqrt[3]{(2xy^2)^2}} = \dfrac{4xy^2\sqrt[3]{(2xy^2)^2}}{2xy^2} = 2\sqrt[3]{4x^2y^4} = 2y\sqrt[3]{4x^2y}$

Suma y resta de radicales similares

8.7 *a*) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{72}=\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{36\cdot 2}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-6\sqrt{2}=(3+5-6)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{27}-4\sqrt{12}=2\sqrt{9\cdot 3}-4\sqrt{4\cdot 3}=2\cdot 3\sqrt{3}-4\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}-8\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

c) $4\sqrt{75}+3\sqrt{4/3}-2\sqrt{48}=4\cdot 5\sqrt{3}+3\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{3}}-2\cdot 4\sqrt{3}=\left(20+3\cdot\frac{2}{3}-8\right)\sqrt{3}=14\sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{432}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{1/32}=\sqrt[3]{6^3\cdot 2}-\sqrt[3]{5^3\cdot 2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2^5}\cdot\frac{2}{2}}=\left(6-5+\frac{1}{4}\right)\sqrt[3]{2}=\frac{5}{4}\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{81}-\sqrt{27}+5\sqrt[3]{3}=\sqrt{3}+\sqrt[3]{27\cdot 3}-\sqrt{9\cdot 3}+5\sqrt[3]{3}$

$=\sqrt{3}+3\sqrt[3]{3}-3\sqrt{3}+5\sqrt[3]{3}=-2\sqrt{3}+8\sqrt[3]{3}$

f) $2a\sqrt[3]{27x^3y}+3b\sqrt[3]{8x^3y}-6c\sqrt[3]{-x^3y}=6ax\sqrt[3]{y}+6bx\sqrt[3]{y}+6cx\sqrt[3]{y}=6x(a+b+c)\sqrt[3]{y}$

g) $2\sqrt{\frac{2}{3}}+4\sqrt{\frac{3}{8}}-5\sqrt{\frac{1}{24}}=2\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}}+4\sqrt{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{2}}-5\sqrt{\frac{1}{24}\cdot\frac{6}{6}}$

$=\left(\frac{2}{3}+4\cdot\frac{1}{4}-\frac{5}{12}\right)\sqrt{6}=\frac{5}{4}\sqrt{6}$

h) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{0.1}}-\sqrt{1.6}=\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{2}}+\frac{3}{\sqrt{1/10}}-\sqrt{(0.16)(10)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{10}+3\sqrt{10}-0.4\sqrt{10}=3.1\sqrt{10}$

i) $2\sqrt{\frac{a}{b}}-3\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{4}{\sqrt{ab}}=2\sqrt{\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}}-3\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{a}}+\frac{4}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{2}{b}\sqrt{ab}-\frac{3}{a}\sqrt{ab}+\frac{4}{ab}\sqrt{ab}=\left(\frac{2}{b}-\frac{3}{a}+\frac{4}{ab}\right)\sqrt{ab}=\left(\frac{2a-3b+4}{ab}\right)\sqrt{ab}$

Multiplicación de radicales

8.8 *a*) $(2\sqrt{7})(3\sqrt{5})=(2\cdot 3)\sqrt{7\cdot 5}=6\sqrt{35}$

b) $(3\sqrt[3]{2})(5\sqrt[3]{6})(8\sqrt[3]{4})=(3\cdot 5\cdot 8)\sqrt[3]{2\cdot 6\cdot 4}=120\sqrt[3]{48}=240\sqrt[3]{6}$

c) $(\sqrt[3]{18x^2})(\sqrt[3]{2x})=\sqrt[3]{36x^3}=x\sqrt[3]{36}$

d) $\sqrt[4]{ab^{-1}c^5}\cdot\sqrt[4]{a^3b^3c^{-1}}=\sqrt[4]{a^4b^2c^4}=\sqrt{a^2bc^2}=ac\sqrt{b}$

e) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}=3^{1/2}\cdot 2^{1/3}=3^{3/6}\cdot 2^{2/6}=\sqrt[6]{3^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{108}$

f) $(\sqrt[3]{14})(\sqrt[4]{686})=(\sqrt[3]{7\cdot 2})(\sqrt[4]{7^3\cdot 2})=(7^{1/3}\cdot 2^{1/3})(7^{3/4}\cdot 2^{1/4})=(7^{4/12}\cdot 2^{4/12})(7^{9/12}\cdot 2^{3/12})$

$=7(7^{1/12}\cdot 2^{7/12})=7\sqrt[12]{7\cdot 2^7}=7\sqrt[12]{896}$

g) $(-\sqrt{5}\sqrt[3]{x})^6=5^{6/2}x^{6/3}=5^3x^2=125x^2$

h) $(\sqrt{4\times 10^{-6}})(\sqrt{8.1\times 10^3})(\sqrt{0.0016})=(\sqrt{4\times 10^{-6}})(\sqrt{81\times 10^2})(\sqrt{16\times 10^{-4}})$

$=(2\times 10^{-3})(9\times 10)(4\times 10^{-2})=72\times 10^{-4}=0.0072$

i) $(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-2\sqrt{3})=\sqrt{6}\sqrt{6}+\sqrt{3}\sqrt{6}+(\sqrt{6})(-2\sqrt{3})+(\sqrt{3})(-2\sqrt{3})$

$=6+\sqrt{18}-2\sqrt{18}-2\cdot 3=-\sqrt{18}=-3\sqrt{2}$

j) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2=(\sqrt{5})^2+2(\sqrt{5})(\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{10}+2=7+2\sqrt{10}$

k) $(7\sqrt{5}-4\sqrt{3})^2=(7\sqrt{5})^2-2(7\sqrt{5})(4\sqrt{3})+(4\sqrt{3})^2$

$=7^2\cdot 5-2\cdot 7\cdot 4\sqrt{15}+4^2\cdot 3=245-56\sqrt{15}+48=293-56\sqrt{15}$

l) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3})^2 - (1)^2 = 3 - 1 = 2$

m) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5}) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 4\cdot 3 - 5 = 12 - 5 = 7$

n) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}) = (2\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 4\cdot 5 - 9\cdot 2 = 20 - 18 = 2$

o) $(2+\sqrt[3]{3})(2-\sqrt[3]{3}) = 4 - \sqrt[3]{9}$

p) $(3\sqrt{2}+2\sqrt[3]{4})(3\sqrt{2}-2\sqrt[3]{4}) = (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt[3]{4})^2 = 18 - 4\sqrt[3]{16} = 18 - 8\sqrt[3]{2}$

q) $(3\sqrt{2}-4\sqrt{5})(2\sqrt{3}+3\sqrt{6}) = (3\sqrt{2})(2\sqrt{3}) - (4\sqrt{5})(2\sqrt{3}) + (3\sqrt{2})(3\sqrt{6}) - (4\sqrt{5})(3\sqrt{6})$

$$= 6\sqrt{6} - 8\sqrt{15} + 9\sqrt{12} - 12\sqrt{30} = 6\sqrt{6} - 8\sqrt{15} + 18\sqrt{3} - 12\sqrt{30}$$

r) $(\sqrt{x+y}-z)(\sqrt{x+y}+z) = x + y - z^2$

s) $(2\sqrt{x}-1-x\sqrt{2})(3\sqrt{x-1}+2x\sqrt{2}) = 6(x-1) - 3x\sqrt{2(x-1)} + 4x\sqrt{2(x-1)} - 4x^2$

$$= 6(x-1) + x\sqrt{2(x-1)} - 4x^2$$

8.9 *a*) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$$= [(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}][(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]$$

$$= (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 - 5 = 2\sqrt{6}$$

b) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+1)(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-1) = [2\sqrt{3}+(3\sqrt{2}+1)][2\sqrt{3}-(3\sqrt{2}+1)]$

$$= (2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2}+1)^2 = 12 - (9\cdot 2 + 6\sqrt{2} + 1) = -7 - 6\sqrt{2}$$

c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{2})(\sqrt{3}) + 2(\sqrt{3})(\sqrt{5}) + 2(\sqrt{2})(\sqrt{5})$

$$= 2 + 3 + 5 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{10} = 10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{10}$$

d) $\left(\sqrt{6+3\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right) = \sqrt{(6+3\sqrt{3})(6-3\sqrt{3})} = \sqrt{36-9\cdot 3} = \sqrt{9} = 3$

e) $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}) = a + b - 2\sqrt{(a+b)(a-b)} + a - b = 2a - 2\sqrt{a^2-b^2}$

División de radicales, racionalización de denominadores

8.10 *a*) $\dfrac{10\sqrt{6}}{5\sqrt{2}} = \dfrac{10}{5}\sqrt{\dfrac{6}{2}} = 2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt[4]{30}}{3\sqrt[4]{5}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{\dfrac{30}{5}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{6}$

c) $\dfrac{4x}{y}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{xy}} = \dfrac{4x}{y}\sqrt[3]{\dfrac{x^2y^2}{xy}} = \dfrac{4x}{y}\sqrt[3]{xy}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{3}} = \sqrt{\dfrac{6}{9}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{6}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{9}} = \sqrt[3]{\dfrac{18}{27}} = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{18}$

f) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{16}{16}} = \sqrt[5]{\dfrac{16}{32}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[5]{16}$

g) $\dfrac{\sqrt{3}+4\sqrt{2}-5\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+4\sqrt{2}-5\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+4\cdot 2-5\quad 16}{2} = \dfrac{6-12}{2}$

$$h)\quad \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$i)\quad \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+2\sqrt{2}+2}{1-2} = -(3+2\sqrt{2})$$

$$j)\quad \frac{1}{x-\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{(x+\sqrt{x^2-y^2})-(x-\sqrt{x^2-y^2})}{(x-\sqrt{x^2-y^2})(x+\sqrt{x^2-y^2})} = \frac{2\sqrt{x^2-y^2}}{y^2}$$

$$k)\quad \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3(3^{3/6})(4^{2/6})}{4\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[6]{3^3\cdot 4^2}}{8} = \frac{3}{8}\sqrt[6]{432}$$

$$l)\quad \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}} = \frac{(x-1)-2\sqrt{(x-1)(x+1)}+(x+1)}{(x-1)-(x+1)} = \sqrt{x^2-1}-x$$

$$m)\quad \frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x} = \frac{x+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1+x-\sqrt{x}}{1+x-\sqrt{x}} = \frac{x^2+\sqrt{x}}{(1+x)^2-x} = \frac{x^2+\sqrt{x}}{1+x+x^2}$$

$$n)\quad \frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt{3^{1/3}+4^{1/3}}}$$ Sea $x = 3^{1/3}$, $y = 4^{1/3}$. Entonces

$$\frac{1}{x+y}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-xy+y^2} = \frac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3} = \frac{3^{2/3}-3^{1/3}4^{1/3}+4^{2/3}}{(3^{1/3})^3+(4^{1/3})^3} = \frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{2}}{7}$$

$$o)\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = \frac{1(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})} = \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$$

$$p)\quad \frac{m+n}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}} = \frac{(m+n)(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})}{(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})} = \frac{(m+n)(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})}{(m+n)}$$
$$= \sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}$$

Problemas propuestos

Demuestre que

8.11 *a*) $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

b) $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{20} = 6\sqrt{5}$

d) $\frac{2}{5}\sqrt{50a^2} = 2a\sqrt{2}$ Suponiendo que $a \geq 0$)

e) $\frac{a}{b}\sqrt{75a^3b^2} = 5a^2\sqrt{3a}$

f) $\frac{4}{ab}\sqrt{98a^2b^3} = 28\sqrt{2b}$

g) $\sqrt[3]{640} = 4\sqrt[3]{10}$

h) $\sqrt[3]{88x^3y^6z^5} = 2xy^2z\sqrt[3]{11z^2}$

i) $\sqrt{a/b} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

j) $14\sqrt{2/7} = 2\sqrt{14}$

l) $3\sqrt[3]{2/3} = \sqrt[3]{18}$

m) $\frac{3a}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{2a}} = \frac{3}{8}\sqrt[3]{12a^2}$

n) $xyz\sqrt{\frac{5}{2x^2yz}} = \frac{1}{2}\sqrt{10yz}$

n) $60\sqrt{4/45} = 8\sqrt{5}$

o) $3\sqrt[4]{4/9} = \sqrt{6}$

8.12 *a*) $\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{12} = 5\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{8}-3\sqrt{18} = \sqrt{2}$

c) $2\sqrt{150}-4\sqrt{54}+6\sqrt{48} = 24\quad 3-2\quad 6$

d) $5\sqrt{2}-3\sqrt{50}+7\sqrt{288} = 74\sqrt{2}$

e) $\sqrt{16a^3-48a^2b} = 4a\sqrt{a-3b}$ $(a \geq 0)$

f) $3\sqrt[3]{16a^3}+8\sqrt[3]{a^3/4} = 10a\sqrt[3]{2}$

$g)$ $\sqrt{\sqrt[3]{128}} = 2\sqrt[6]{2}$

$h)$ $\sqrt[n]{x^{n+1}y^{2n-1}z^{3n}} = xy^2z^3\sqrt[n]{x/y}$

$i)$ $3\sqrt[4]{9} - 2\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$

$j)$ $6\sqrt{8a^3/3} - 2\sqrt{24ab^2} + a\sqrt{54a} = (7a-4b)\sqrt{6a} \quad a,b \geq 0$

$k)$ $(x+1)\sqrt[3]{16x^2} - 4x\sqrt[3]{x^2/4} = 2\sqrt[3]{2x^2}$

$l)$ $2\sqrt{54} - 6\sqrt{2/3} - \sqrt{96} = 0$

$m)$ $4\sqrt{x/y} + \dfrac{3}{\sqrt[4]{x^2y^2}} - 5\sqrt[6]{y^3/x^3} = \dfrac{4x-5y+3}{xy}\sqrt{xy}$

8.13 $a)$ $(3\sqrt{8})(6\sqrt{5}) = 36\sqrt{10}$

$b)$ $\sqrt{48x^5}\ \sqrt{3x^3} = 12x^4$

$c)$ $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{32} = 4$

$d)$ $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{18}) = 8$

$e)$ $(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2}) = 23$

$f)$ $(x+\sqrt{y})(x+\sqrt{y}) = x^2 - y$

$g)$ $(2\sqrt{3}-\sqrt{6})(3\sqrt{3}+3\sqrt{6}) = 9\sqrt{2}$

$h)$ $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}) = 6+\sqrt{6}$

$i)$ $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 10$

$j)$ $(2\sqrt{a}+5\sqrt{a-b})(\sqrt{a}+\sqrt{a-b}) = 7a-5b+7\sqrt{a^2-ab}$

$k)$ $(\sqrt{3}+\sqrt{5+\sqrt{7}})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}) = 1+2\sqrt{15}$

$l)$ $\sqrt{8-2\sqrt{7}}\sqrt{8+2\sqrt{7}} = 6$

$m)$ $\dfrac{4+\sqrt{8}}{2} = 2+\sqrt{2}$

$n)$ $\dfrac{6-\sqrt{18}}{3} = 2-\sqrt{2}$

$o)$ $\dfrac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$p)$ $\dfrac{8+4\sqrt{48}}{8} = 1+2\sqrt{3}$

$q)$ $\dfrac{36-2\sqrt[3]{81}}{6} = 6-\sqrt[3]{3}$

8.14 $a)$ $\dfrac{2\sqrt{24x^3}}{\sqrt{3x}} = 4x\sqrt{2} \quad (x>0)$

$b)$ $\dfrac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{b}$

$c)$ $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$

$d)$ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$e)$ $\sqrt[3]{\dfrac{9V^2}{16\pi^2}} = \dfrac{1}{4\pi}\sqrt[3]{36\pi V^2}$

$f)$ $\dfrac{6a}{\sqrt[3]{12}} = a\sqrt[3]{18}$

$g)$ $\dfrac{\sqrt[5]{3a^7b^6c^5}}{\sqrt[5]{24a^2bc}} = \dfrac{ab}{2}\sqrt[5]{4c^4}$

$h)$ $\sqrt[3]{\dfrac{x^{-2}y^{-3}z^{-1}}{4xyz^2}} = \dfrac{1}{2xy^2z}\sqrt[3]{2y^2}$

$i)$ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{9}}{3} = \dfrac{\sqrt[6]{648}}{3}$

$j)$ $\dfrac{\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{12}} = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{45} - \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{12}$

$k)$ $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2} = \dfrac{\sqrt{7}+2}{3}$

$l)$ $\dfrac{5}{3+\sqrt{2}} = \dfrac{5}{7}(3-\sqrt{2})$

$m)$ $\dfrac{-2}{2-\sqrt{3}} = -4-2\sqrt{3}$

$n)$ $\dfrac{s\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3s}{2} + \dfrac{s\sqrt{3}}{2}$

$o)$ $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2} = 5\sqrt{3}-8$

$p)$ $\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} = \dfrac{2\sqrt{x+1}-x-2}{x}$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

9

9.1 NÚMEROS COMPLEJOS

La unidad de los números imaginarios es $\sqrt{-1}$ y se representa por la letra i. Muchas de las leyes de los números reales son válidas también para los números imaginarios.

Por lo tanto, $\sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$, $\sqrt{-18} = \sqrt{18(-1)} = \sqrt{18}\sqrt{-1} = 3\sqrt{2}i$. Asimismo, como $i = \sqrt{-1}$, se tiene que $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$, y de manera similar para cualquier potencia entera de i.

Nota. Se debe tener sumo cuidado al aplicar algunas de las leyes de los números reales. Por ejemplo, se puede pensar que

$$\sqrt{-4}\,\sqrt{-4} = \sqrt{(-4)(-4)} = \sqrt{16} = 4, \quad \text{lo cual es incorrecto.}$$

Para evitar tales dificultades, se expresará siempre $\sqrt{-m}$**,** donde m es un número positivo, como $\sqrt{m}i$; y se utilizará $i^2 = -1$ siempre que aparezca. Por lo tanto,

$$\sqrt{-4}\,\sqrt{-4} = (2i)(2i) = 4i^2 = -4, \quad \text{lo cual es correcto.}$$

Un número complejo es una expresión de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$. En el número complejo $a + bi$, a se llama la *parte real* y bi la *parte imaginaria.* Cuando $a = 0$, el número complejo se llama imaginario puro. Si $b = 0$, el número complejo se reduce al número real a. Por consiguiente, en los números complejos están incluidos todos los números reales y todos los imaginarios puros.

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son *iguales* si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Por consiguiente, $a + bi = 0$ si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$. Si $c + di = 3$, entonces $c = 3$, $d = 0$.

El conjugado de un número complejo $a + bi$ es $a – bi$ y recíprocamente. Por lo tanto, $5 - 3i$ y $5 + 3i$ están conjugados.

9.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Con la ayuda de los ejes coordenados rectangulares, el número complejo $x + yi$ se representa como, o corresponde al punto cuyas coordenadas son (x, y). Consulte la figura 9-1.

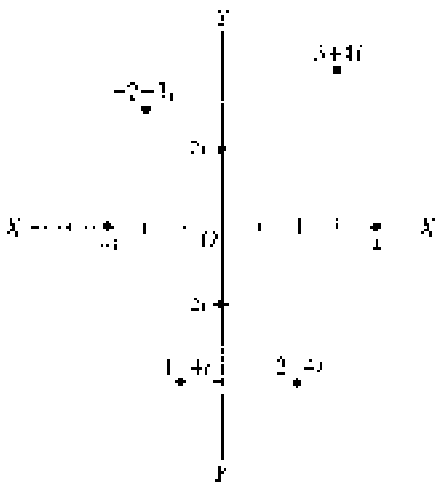


Figura 9-1

Para representar el número complejo $3 + 4i$, recorra 3 unidades a lo largo del eje $X'X$ hacia la derecha del punto O y, después, 4 unidades hacia arriba.

Para representar el número $-2 + 3i$, recorra 2 unidades a lo largo del eje $X'X$ hacia la izquierda del punto O y, después 3 unidades hacia arriba.

Para representar el número $-1 - 4i$, recorra 1 unidad a lo largo del eje $X'X$ hacia la derecha del punto O y después 4 unidades hacia abajo.

Para representar el número $2 - 4i$, recorra 2 unidades a lo largo del eje $X'X$ hacia la derecha del punto O, y después 4 unidades hacia abajo.

Los números imaginarios puros (como $2i$ y $-2i$) se representan por medio de puntos sobre la línea $Y'Y$. Los números reales (como el 4 y -3) se representan por medio de puntos sobre la línea $X'X$.

9.3 OPERACIONES ALGEBRAICAS CON NÚMEROS COMPLEJOS

Para *sumar* dos números complejos se adicionan, por un lado, las partes reales y, por otro, las imaginarias. Por lo tanto,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(5 + 4i) + (3 + 2i) = (5 + 3) + (4 + 2)i = 8 + 6i$$
$$(-6 + 2i) + (4 - 5i) = (-6 + 4) + (2 - 5)i = -2 - 3i.$$

Para *restar* dos números complejos se sustraen, por un lado, las partes reales y, por otro, las imaginarias. Por lo tanto,

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$
$$(3 + 2i) - (5 - 3i) = (3 - 5) + (2 + 3)i = -2 + 5i$$
$$(-1 + i) - (-3 + 2i) = (-1 + 3) + (1 - 2)i = 2 - i.$$

Para *multiplicar* dos números complejos se efectúa la operación como si se tratase de dos binomios sustituyendo i^2 por -1. Por lo tanto,

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$(5 + 3i)(2 - 2i) = 10 - 10i + 6i - 6i^2 = 10 - 4i - 6(-1) = 16 - 4i.$$

Para *dividir* dos números complejos se multiplican el numerador y denominador de la fracción por el conjugado del denominador, sustituyendo i^2 por -1. Por lo tanto,

$$\frac{2+i}{3-4i} = \frac{2+i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{6+8i+3i+4i^2}{9-16i^2} = \frac{2+11i}{25} = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i.$$

Problemas resueltos

9.1 Exprese los números siguientes en términos de i.

a) $\sqrt{-25} = \sqrt{(25)(-1)} = \sqrt{25}\,\sqrt{-1} = 5i$

b) $3\sqrt{-36} = 3\sqrt{36}\sqrt{-1} = 3 \cdot 6 \cdot i = 18i$

c) $-4\sqrt{-81} = -4\sqrt{81}\,\sqrt{-1} = -4 \cdot 9 \cdot i = -36i$

d) $\sqrt{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{2}{4}}\,i = \frac{\sqrt{2}}{2}i$

e) $2\sqrt{\frac{-16}{25}} - 3\sqrt{\frac{-49}{100}} = 2 \cdot \frac{4}{5}i - 3 \cdot \frac{7}{10}i = \frac{8}{5}i - \frac{21}{10}i = \frac{16}{10}i - \frac{21}{10}i = -\frac{1}{2}i$

f) $\sqrt{-12} - \sqrt{-3} = \sqrt{12}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = \sqrt{3}i$

g) $3\sqrt{-50} + 5\sqrt{-18} - 6\sqrt{-200} = 15\sqrt{2}i + 15\sqrt{2}i - 60\sqrt{2}i = -30\sqrt{2}i$

h) $-2 + \sqrt{-4} = -2 + \sqrt{4}i = -2 + 2i$

i) $6 - \sqrt{-50} = 6 - \sqrt{50}i = 6 - 5\sqrt{2}i$

j) $\sqrt{8} + \sqrt{-8} = \sqrt{8} + \sqrt{8}i = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

k) $\frac{1}{5}(-10 + \sqrt{-125}) = \frac{1}{5}(-10 + 5\sqrt{5}i) = -2 + \sqrt{5}i$

l) $\frac{1}{4}(\sqrt{32} + \sqrt{-128}) = \frac{1}{4}(4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}i) = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

m) $\frac{\sqrt[3]{-8} + \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}i}{2} = -1 + \sqrt{2}i$

9.2 Represente las operaciones indicadas algebraica y gráficamente:

a) $(2 + 6i) + (5 + 3i)$, *b*) $(-4 + 2i)\ \ (3 + 5i)$.

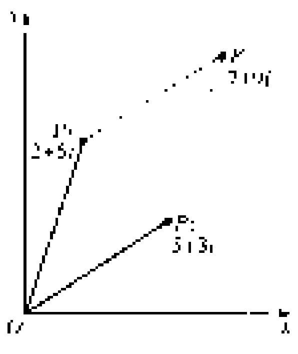


Figura 9-2

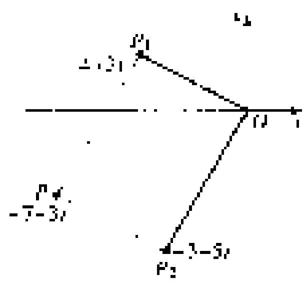


Figura 9-3

SOLUCIÓN

a) Algebraicamente: $(2 + 6i) + (5 + 3i) = 7 + 9i$

Gráficamente: Represente los dos números complejos por medio de los puntos $P1$ y $P2$ respectivamente como se muestra en la figura 9-2. Conecte dichos puntos con el origen O y complete el paralelogramo que tiene como lados adyacentes $OP1$ y $OP2$. El vértice P (punto $7 + 9i$) representa la suma de los dos números complejos dados.

b) Algebraicamente: $(-4 + 2i) - (3 + 5i) = -7 - 3i$

Gráficamente: $(-4 + 2i) - (3 + 5i) = (-4 + 2i) + (-3 - 5i)$. Ahora se procede a sumar $(-4 + 2i)$ con $(-3 - 5i)$.

Represente los dos números complejos $(-4 + 2i)$ y $(-3 - 5i)$ por medio de los puntos $P1$ y $P2$ respectivamente, como se muestra en la figura 9-3. Una los puntos $P1$ y $P2$ con el origen O y complete el paralelogramo que tiene a $OP1$ y $OP2$ como lados adyacentes. El vértice P (punto $-7 - 3i$) representa la resta $(-4 + 2i) - (3 + 5i)$.

9.3 Efectúe las operaciones indicadas y simplifique.

a) $(5 - 2i) + (6 + 3i) = 11 + i$

b) $(6 + 3i) - (4 - 2i) = 6 + 3i - 4 + 2i = 2 + 5i$

c) $(5 - 3i) - (-2 + 5i) = 5 - 3i + 2 - 5i = 7 - 8i$

d) $\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{8}i\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{4}\right)i = \frac{5}{4} + \frac{7}{8}i$

e) $(a + bi) + (a - bi) = 2a$

f) $(a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi$

g) $(5 - \sqrt{-125}) - (4 - \sqrt{-20}) = (5 - 5\sqrt{5}i) - (4 - 2\sqrt{5}i) = 1 - 3\sqrt{5}i$

9.4 *a*) $\sqrt{-2}\sqrt{-32} = (\sqrt{2}i)(\sqrt{32}i) = \quad 2\sqrt{32}i^2 = \sqrt{64}(-1) = -8$

b) $-3\sqrt{-5}\sqrt{-20} = -3(\sqrt{5}i)(\sqrt{20}i) = -3(\sqrt{5}\sqrt{20})i^2 = -3\sqrt{100}(-1) = 30$

c) $(4i)(-3i) = -12i^2 = 12$

d) $(6i)^2 = 36i^2 = -36$

e) $(2\sqrt{-1})^3 = (2i)^3 = 8i^3 = 8i(i^2) = -8i$

f) $3i(i + 2) = 3i^2 + 6i = -3 + 6i$

g) $(3 - 2i)(4 + i) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot i - (2i)4 - (2i)i = 12 + 3i - 8i + 2 = 14 - 5i$

h) $(5 - 3i)(i + 2) = 5i + 10 - 3i^2 - 6i = 5i + 10 + 3 - 6i = 13 - i$

i) $(5 + 3i)^2 = 5^2 + 2(5)3i + (3i)^2 = 25 + 30i + 9i^2 = 16 + 30i$

j) $(2 - i)(3 + 2i)(1 - 4i) = (6 + 4i - 3i - 2i^2)(1 - 4i) = (8 + i)(1 - 4i)$
$= 8 - 32i + i - 4i^2 = 12 - 31i$

k) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i$

l) $(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

m) $(3 - 2i)^3 = 3^3 + 3(3^2)(-2i) + 3(3)(-2i)^2 + (-2i)^3$
$= 27 + 3(9)(-2i) + 3(3)(4i^2) - 8i^3 = 27 - 54i - 36 + 8i = -9 - 46i$

n) $(3 + 2i)^3 = 3^3 + 3(3^2)(2i) + 3(3)(2i)^2 + (2i)^3$
$= 27 + 54i + 36i^2 + 8i^3 = 27 + 54i - 36 - 8i = -9 + 46i$

o) $(1 + 2i)^4 = [(1 + 2i)^2]^2 = (1 + 4i + 4i^2)^2 = (-3 + 4i)^2 = 9 - 24i + 16i^2 = -7 - 24i$

p) $(-1 + i)^8 = [(-1 + i)^2]^4 = (1 - 2i + i^2)^4 = (-2i)^4 = 16i^4 = 16$

9.5 *a*) $\dfrac{1+i}{3-i}=\dfrac{1+i}{3-i}\cdot\dfrac{3+i}{3+i}=\dfrac{3+3i+i+i^2}{3^2-i^2}=\dfrac{2+4i}{10}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$

b) $\dfrac{1}{i}=\dfrac{1}{i}\left(\dfrac{-i}{-i}\right)=\dfrac{-i}{-i^2}=\dfrac{-i}{1}=-i$

c) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}i}{3\sqrt{2}-4\sqrt{3}i}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}i}{3\sqrt{2}-4\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}i}{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}i}=\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(3\sqrt{2}+4\sqrt{3}i)}{(3\sqrt{2})^2-(4\sqrt{3})^2i^2}$

$$=\frac{6\sqrt{6}+8\sqrt{9}i+3\sqrt{4}i+4\sqrt{6}i^2}{18+48}=\frac{2\sqrt{6}+30i}{66}=\frac{\sqrt{6}}{33}+\frac{5}{11}i$$

Problemas propuestos

9.6 Exprese en función de i

a) $2\sqrt{-49}$ *b*) $-4\sqrt{-64}$ *c*) $6\sqrt{-1/9}$ *d*) $4\sqrt{-1/8}$ *e*) $3\sqrt{-25}-5\sqrt{-100}$ *f*) $2\sqrt{-72}+3\sqrt{-32}$ *g*) $\dfrac{-4+\sqrt{-4}}{2}$ *h*) $\dfrac{1}{6}(-12-\sqrt{-288})$ *i*) $4\sqrt{-81}-3\sqrt{-36}+4\sqrt{25}$ *j*) $3\sqrt{12}-3\sqrt{-12}$

9.7 Represente las expresiones dadas algebraica y gráficamente.

a) $(3+2i)+(2+3i)$ *b*) $(2-i)+(-4+5i)$ *c*) $(4-3i)-(-2+i)$ *d*) $(-2+2i)-(-2-i)$

9.8 Efectúe cada una de las operaciones indicadas y simplifique.

a) $(3+4i)+(-1-6i)$
b) $(-2+5i)-(3-2i)$
c) $\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}i\right)-\left(-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}i\right)$
d) $(3+\sqrt{-8})-(2-\sqrt{-32})$
e) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$
f) $(-i\sqrt{2})(i\sqrt{2})$
g) $(2i)^4$
h) $(\frac{1}{2}\sqrt{-3})^6$
i) $5i(2-i)$
j) $(2+i)(2-i)$
k) $(-3+4i)(-3-4i)$
l) $(2-5i)(3+2i)$
m) $(3-4i)^2$
n) $(1+i)(2+2i)(3-i)$
o) $(i-1)^3$
p) $(2+3i)^3$
q) $(1-i)^4$
r) $(i+2)^5$

9.9 *a*) $\dfrac{2-5i}{4+3i}$ *b*) $\dfrac{-1}{2-2i}$ *c*) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}i}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}i}$ *d*) $\dfrac{3-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}$ *e*) $\dfrac{1}{1-2i}+\dfrac{3}{1+4i}$ *f*) $\dfrac{5}{3-4i}+\dfrac{10}{4+3i}$ *g*) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4}{1+i}$ *h*) $\dfrac{i^{26}-i}{i-1}$ *i*) $\left(\dfrac{4i^{11}-i}{1+2i}\right)^2$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

9.6 *a*) $14i$ *b*) $-32i$ *c*) $2i$ *d*) $\sqrt{2}i$ *e*) $-35i$ *f*) $24\sqrt{2}i$ *g*) $-2+i$ *h*) $-2-2\sqrt{2}i$ *i*) $18i+20$ *j*) $6\sqrt{3}-6\sqrt{3}i$

9.7 *a*) $5+5i$ y fig. 9-4 *b*) $-2+4i$ y fig. 9-5 *c*) $6-4i$ y fig. 9-6 *d*) $3i$ y fig. 9-7

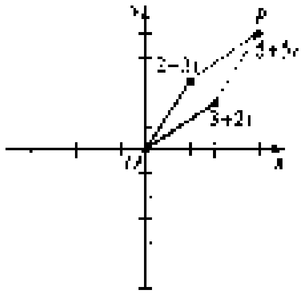


Figura 9-4

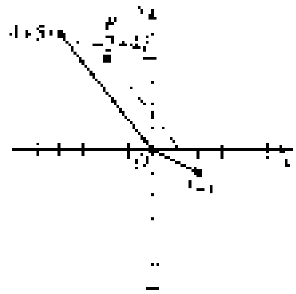


Figura 9-5

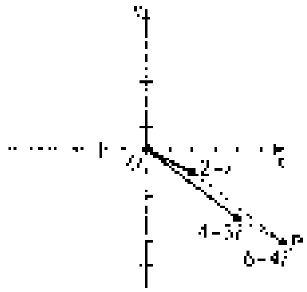


Figura 9-6

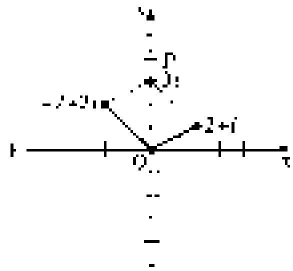


Figura 9-7

9.8 *a*) $2-2i$ *d*) $1+6\sqrt{2}i$ *g*) 16 *j*) 5 *m*) $-7-24i$ *p*) $-46+9i$
b) $-5+7i$ *e*) -6 *h*) $-27/64$ *k*) 25 *n*) $4+12i$ *q*) -4
c) $1-i$ *f*) 2 *i*) $5+10i$ *l*) $16-11i$ *o*) $2+2i$ *r*) $-38+41i$

9.9 *a*) $-\frac{7}{25}-\frac{26}{25}i$ *c*) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\sqrt{6}i$ *e*) $\frac{32}{85}-\frac{26}{85}i$ *g*) 0 *i*) $3+4i$
b) $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ *d*) $-1-\frac{3}{2}\sqrt{2}i$ *f*) $\frac{11}{5}-\frac{2}{5}i$ *h*) i

ECUACIONES EN GENERAL 10

10.1 ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que se denominan miembros de la misma.

Una ecuación que sólo se verifique para ciertos valores de las letras (o incógnitas) recibe el nombre de *ecuación condicional* o, simplemente, ecuación.

Una ecuación que se verifique para todos los valores permitidos de sus literales (o incógnitas) recibe el nombre de *identidad*. Valores permitidos son aquellos para los que están definidos los miembros de la ecuación.

EJEMPLO 10.1 $x + 5 = 8$ es válida sólo para $x = 3$; es una ecuación condicional.

EJEMPLO 10.2 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ es válida para todos los valores de x e y; es una identidad.

EJEMPLO 10.3

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$$

se verifica para todos los valores excepto para los no permitidos $x = 2$, $x = 3$; para estos valores, la operación se reduce a una división entre cero, la cual carece de sentido. Como la ecuación se verifica para todos los valores permitidos de x, es una identidad.

El símbolo $\equiv$ es a menudo utilizado en identidades en lugar de $=$.

Las soluciones de una ecuación condicional son los valores de las incógnitas que transforman la ecuación en una identidad, es decir, se igualan ambos miembros. Las soluciones satisfacen a la ecuación. Si la ecuación sólo contiene una incógnita, las soluciones se denominan *raíces* de la ecuación. Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones.

Por lo tanto, $x = 2$ es una raíz o solución de la ecuación $2x + 3 = 7$, ya que sustituyendo $x = 2$ en ésta, se obtiene $2(2) + 3 = 7$ y ambos elementos son iguales, es decir, la ecuación se satisface. De manera similar, tres (o muchas) soluciones de $2x + y = 4$ son: $x = 0$, $y = 4$; $x = 1$, $y = 2$; $x = 5$, $y = -6$.

10.2 OPERACIONES UTILIZADAS EN LA TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES

A. Si se suman miembro a miembro varias igualdades, se obtiene otra igualdad.

Por lo tanto, si $x - y = z$, se puede sumar y a ambos miembros y obtener $x = y + z$.

B. Si se restan miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad.

Por lo tanto, si $x + 2 = 5$, se puede restar 2 a ambos miembros con lo que se obtiene $x = 3$.

Nota: Como consecuencia de A y B se deduce que para trasponer un término de una ecuación de un miembro a otro no hay más que cambiarlo de signo. Así si $3x + 2y - 5 = x - 3y + 2$, entonces, $3x - x + 2y + 3y = 5 + 2$ o $2x + 5y = 7$.

C. Si se multiplican miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad.

Por lo tanto, si se multiplican por 4 los dos miembros de la igualdad $\frac{1}{4}y = 2x^2$ se obtiene $y = 8x^2$.

Análogamente, si los dos miembros de $\frac{9}{5}C = F - 32$ se multiplican por $\frac{5}{9}$ se obtiene $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

D. Si se dividen miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad, siempre que no si divida entre cero.

Por lo tanto, si se dividen los dos miembros de la igualdad $-4x = -12$ por -4, se obtiene $x = 3$.

De manera similar, en la igualdad $E = RI$ se pueden dividir los dos miembros entre $R \neq 0$, obteniéndose $I = E/R$.

E. Si se elevan al mismo exponente los dos miembros de una igualdad, se obtiene otra igualdad.

Por lo tanto, si $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, entonces $T^2 = (2\pi\sqrt{l/g})^2 = 4\pi^2 l/g$.

F. Si se extrae la raíz enésima de los dos miembros de una igualdad se obtiene otra igualdad. Así,

$$\text{si } r^3 = \frac{3V}{4\pi}, \quad \text{entonces} \quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

G. Los recíprocos de una igualdad son iguales, siempre y cuando el recíproco no sea cero.

Por lo tanto, $1/x = 1/3$, cuando $x = 3$. De la misma forma,

$$\text{si } \frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad \text{entonces} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

A menudo, las operaciones *A-F* se llaman axiomas de igualdad.

10.3 ECUACIONES EQUIVALENTES

Son las que tienen las mismas soluciones.

Por ejemplo, $x - 2 = 0$ y $2x = 4$ tienen la solución común $x = 2$ *y*, por lo tanto, son equivalentes. Sin embargo, $x - 2 = 0$ y $x^2 - 2x = 0$ no son equivalentes, ya que $x^2 - 2x = 0$ tiene, además, la solución $x = 0$.

Las operaciones anteriores aplicadas a la transformación de ecuaciones no dan lugar, en todos los casos, a ecuaciones equivalentes a las originales. La aplicación de estas operaciones puede conducir a ecuaciones derivadas que tengan distintas soluciones que la ecuación original.

Si se llega a una ecuación con más soluciones que la original, las soluciones nuevas se denominan *extrañas* y la ecuación derivada se llama *redundante* respecto a la original. Si se llega a una ecuación con menos soluciones que la original, la ecuación derivada recibe el nombre de *defectuosa* respecto a la original.

Las operaciones A y B siempre conducen a ecuaciones equivalentes. Sin embargo, C y E pueden dar lugar a ecuaciones redundantes y soluciones extrañas y D y F a ecuaciones defectuosas.

10.4 FÓRMULAS

Una fórmula es una ecuación que expresa un hecho general, una regla o un principio.

Por ejemplo, la fórmula de geometría $A = \pi r^2$ expresa el área A de un círculo en función de su radio r.

En física, la fórmula $s = \frac{1}{2}gt^2$, donde g tiene un valor aproximado de 32.2 pies/s^2, proporciona la relación entre la distancia s, en pies, que recorre un cuerpo que cae libremente partiendo del reposo, y el tiempo t en segundos, que emplea en el movimiento.

Resolver una fórmula respecto a una de las literales que figuran en ella es efectuar las mismas operaciones en ambos miembros de la misma hasta que aparezca la letra deseada aislada en uno de ellos, pero no en el otro.

Por lo tanto, si $F = ma$, se puede dividir entre m obteniéndose $a = F/m$, con lo cual queda despejada a en función de F y de m. Como comprobación, si se sustituye $a = F/m$ en la ecuación original se obtiene $F = m(F/m)$, que es una identidad.

10.5 ECUACIONES CON POLINOMIOS

Un monomio consiste en un determinado número de incógnitas x, y, z,… que tiene la forma $ax^p y^q z^r \cdots$ donde los exponentes p, q, r,… son números enteros y positivos, o cero, y el coeficiente a es independiente de las incógnitas. La suma de los exponentes, $p + q + r + \cdots$ se denomina grado del término con respecto a las incógnitas x, y, z,…

EJEMPLOS 10.4 $3x^2z^3$, $\frac{1}{2}x^4$, 6 son monomios.
$3x^2z^3$ es de grado 2 en x, 3 en z, y de 5 en x y z
$\frac{1}{2}x^4$ es de cuarto grado. 6 es de grado cero.
$4y/x = 4yx^{-1}$ no es entero en x; $3x\sqrt{y}z^3$ no es racional en y.

Si al hablar del grado no se especifica a qué incógnitas se refiere, se sobrentiende que es respecto a todas las que figuran en el término.

Un polinomio de varias incógnitas consta de términos, cada uno de los cuales es racional y entero. El grado de la expresión es dado por el correspondiente al término de mayor grado.

EJEMPLO 10.5 $3x^3y^4z + xy^2z^5 - 8x + 3$ es un polinomio de grado 3 en x, 4 en y, 5 en z, 7 en x y y, 7 en y y z, 6 en x y z y 8 en x, y y z.

Una ecuación polinomial es una igualdad de dos polinomios. El grado de dicha ecuación es el mismo que el del término de mayor grado presente en la ecuación.

EJEMPLO 10.6 $xyz^2 + 3xz = 2x^3y + 3z^2$ es de grado 3 en x, 1 en y, 2 en z, 4 en x y y, 3 en y y z, 3 en x y z y 4 en x, y y z.

En una ecuación se pueden reducir los términos semejantes. Por ejemplo, $4x^3y + x^2z - xy^2 = 4x^3y + z$ se puede escribir en la forma $x^2z - xy^2 = z$.

Una ecuación se llama *lineal* si es de primer grado, y *cuadrática* si es de segundo grado. De manera similar, las palabras *cúbica*, *cuarto* y *quinto* se refieren a ecuaciones de *tercer*, *cuarto* y *quinto* grado, respectivamente.

EJEMPLOS 10.7 $2x + 3y = 7z$ es una ecuación lineal en x, y y z.
$x^2 - 4xy + 5y^2 = 10$ es una ecuación cuadrática en x y y.
$x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = 0$ es una ecuación cúbica en x.

Una ecuación polinomial de grado n respecto a la incógnita x puede escribirse como,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

siendo a_0, a_1, …, a_n constantes y n es un entero positivo.

Como casos especiales tenemos los siguientes:

$a_0x + a_1 = 0$ o $ax + b = 0$	es de grado 1 (ecuación lineal),
$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ o $ax^2 + bx + c = 0$	es de grado 2 (ecuación cuadrática),
$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$	es de grado 3 (ecuación cúbica),
$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$	es de grado 4 (ecuación de cuarto grado).

Problemas resueltos

10.1 Determine cuáles de las expresiones siguientes son ecuaciones condicionales y cuáles son identidades:

a) $3x - (x + 4) = 2(x - 2)$, $2x - 4 = 2x$ 4; identidad.

b) $(x-1)(x+1)=(x-1)^2$, $x^2-1=x^2-2x+1$; ecuación condicional.
c) $(y-3)^2+3(2y-3)=y(y+1)-y$, $y^2-6y+9+6y-9=y^2+y-y$, $y^2=y^2$; identidad.
d) $x+3y-5=2(x+2y)+3$, $x+3y-5=2x+4y+3$; ecuación condicional.

10.2 Verifique si la solución o soluciones indicadas satisfacen las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=10$; $x=12$. $\quad \dfrac{12}{2}+\dfrac{12}{3}=10$, $6+4=10$, y $x=12$ es una solución.

b) $\dfrac{x^2+6x}{x+2}=3x-2$; $x=2$, $x=-1$. $\quad \dfrac{2^2+6(2)}{2+2}=3(2)-2$, $\dfrac{16}{4}=4$, y $x=2$ es una solución.

$\dfrac{(-1)^2+6(-1)}{-1+2}=3(-1)-2$, $\dfrac{-5}{1}=-5$, y $x=-1$ es una solución.

c) $x^2-xy+y^2=19$; $x=-2$, $y=3$; $x=4$, $y=2+\sqrt{7}$; $x=2$, $y=-1$:
$x=-2$, $y=3$: $(-2)^2\ \ (-2)^3+3^2=19$, $19=19$, y $x=-2$, $y=3$ es una solución.
$x=4$, $y=2+\sqrt{7}$: $4^2-4(2+\sqrt{7}+(2+\sqrt{7})^2=19$, $16-8-4\sqrt{7}+(4+4\sqrt{7}+7)=19$, $19=19$, y $x=4$, $y=2+\sqrt{7}$ es una solución.
$x=2$, $y=-1$: $2^2\ \ -2(-1)+(-1)^2=19$, $7=19$, y $x=2$, $y=-1$ no es una solución.

10.3 Utilice los axiomas de igualdad para resolver cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $2(x+3)=3(x-1)$, $2x+6=3x-3$:

Trasponiendo términos: $2x-3x=-6-3$, $-x=-9$: Multiplicando por -1: $x=9$:

Comprobación: $2(9+3)=3(9-1)$, $24=24$:

b) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{6}=1$

Multiplicando por 6: $2x+x=6$, $3x=6$: Dividiendo entre 3: $x=2$:

Comprobación: $2/3+2/6=1$, $1=1$:

c) $3y-2(y-1)=4(y+2)$, $3y-2y+2=4y+8$, $y+2=4y+8$:

Transponiendo: $y-4y=8-2$, $3y=6$. Dividiendo entre -3: $y=6/(-3)=-2$.

Comprobación: $3(-2)-2(-2-1)=4(-2+2)$, $0=0$.

d) $\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{4x-5}{x-1}$. Multiplicando por $x-1$, $2x-3=4x-5$ o $x-1$.

Comprobación: Sustituyendo $x=1$ en la ecuación dada se obtiene $-1/0=-1/0$. Como la división entre cero carece de sentido, la ecuación dada no tiene solución.
Observe que

$$i)\ \frac{2x-3}{x-1}=\frac{4x-5}{x-1} \qquad \text{y} \qquad ii)\ 2x-3=4x-5$$

no son ecuaciones equivalentes. Cuando *i*) se multiplican por $x-1$ se presenta una *solución extraña* $x=1$ y la ecuación *ii*) es *redundante* respecto a la *i*).

e) $x(x-3)=2(x-3)$. Dividiendo ambos miembros entre $x-3$ proporciona la solución $x=2$.
Ahora bien, $x-3=0$ o $x=3$ también es solución de la ecuación dada pero se ha perdido al dividir. Las raíces buscadas son $x=2$ y $x=3$.
La ecuación $x=2$ es *defectuosa* respecto a la dada.

f) $\sqrt{x+2} = -1$. Elevando al cuadrado los dos miembros, $x + 2 = 1$ o $x = -1$.
Comprobación: Sustituyendo $x = -1$ en la ecuación dada, $\sqrt{1} = -1$ o $1 = -1$, lo cual es falso.
Por lo tanto $x = -1$ es una *solución extraña*. La ecuación dada no tiene solución.

g) $\sqrt{2x-4} = 6$. Elevando al cuadrado los dos miembros, $2x - 4 = 36$, es decir, $x = 20$.
Comprobación: Si $x = 20$, $\sqrt{2(20)-4} = 6$ o $\sqrt{36} = 6$ lo cual es válido.
De aquí que $x = 20$ es una solución. En este caso no se han introducido raíces extrañas.

10.4 Despejar, en las fórmulas siguientes, las incógnitas que se indican.

a) $E = IR$. Despejar R. Dividiendo los dos miembros entre $I \neq 0$, se obtiene $R = E/I$.

b) $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$, despejar a.
Transponiendo, $\frac{1}{2}at^2 = s - v_0t$. Multiplicando por 2, $at^2 = 2(s - v_0t)$.
Dividiendo entre $t2 \neq 0$,

$$a = \frac{2(s - v_0t)}{t^2}.$$

c) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, despejar p. Transponiendo,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{q} = \frac{q-f}{fq}.$$

Calculando los recíprocos,

$$p = \frac{fq}{q-f} \qquad \text{suponiendo } q \neq f)$$

d) $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, para g. Elevando al cuadrado los dos miembros,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g}.$$

Multiplicando por g, $gT^2 = 4\pi^2 l$. Dividiendo entre $T^2 \neq 0$, $g = 4\pi^2 l/T^2$.

10.5 Hallar el valor de la incógnita que se indica conocidos los valores de las restantes.

a) $F = \frac{9}{5}C + 32$, $F = 68$; encuentre C. $68 = \frac{9}{5}C + 32$, $36 = \frac{9}{5}C$, $C = \frac{5}{9}(36) = 20$.

Otro método: $\frac{9}{5}C = F - 32$, $C = \frac{5}{9}(F - 32) = \frac{5}{9}(68 - 32) = \frac{5}{9}(36) = 20$.

b) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$, $R = 6$, $R_1 = 15$; encuentre R_2. $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{R_2}$, $\dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{15} = \dfrac{5-2}{30} = \dfrac{1}{10}$, $R_2 = 10$.

Otro método:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} = \frac{R_1 - R}{RR_1}, \qquad R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R} = \frac{6(15)}{15-6} = 10.$$

c) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, $V = 288\pi$; encuentre r. $288\pi = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, $r^3 = \dfrac{288\pi}{4\pi/3} = 216$, $r = 6$.

Otro método:

$$3V = 4\pi r^3, \qquad r^3 = \frac{3V}{4\pi}, \qquad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3(288\pi)}{4\pi}} = \sqrt[3]{216} = 6.$$

10.6 Determine el grado de las ecuaciones siguientes respecto a las incógnitas que se indican.

a) $2x^2 + xy - 3 = 0$: x; y; x y y.
Grado 2 en x, 1 en y, 2 en x y y.

b) $3xy^2 - 4y^2z + 5x - 3y = x^4 + 2$: x; z; y y z; x, y, y z.
Grado 4 en x, 1 en z, 3 en y y z, 4 en x, y y z.

c) $x^2 = \dfrac{3}{y+z}$: x; x y z; x, y, y z.

La ecuación, escrita de esta forma, no es una ecuación con polinomios. Sin embargo, se puede transformar en dicho tipo si se multiplica por $y + z$, para obtener $x^2(y + z) = 3$ o $x^2y + x^2z = 3$. La ecuación que se dedujo es racional entera de segundo grado en x, de tercero en x y z y de tercero también en x, y y z.

d) $\sqrt{x+3} = x + y$: y; x y y.

Igualmente, esta ecuación se puede transformar en polinomio elevando al cuadrado sus dos miembros. Por lo tanto, se obtiene $x + 3 = x^2 + 2xy + y^2$, que es de segundo grado en y y de segundo también en x e y.

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que las ecuaciones no son equivalentes, ya que $x^2 + 2xy + y^2 = x + 3$ incluye tanto a $\sqrt{x+3} = x + y$ como a $-\sqrt{x+3} = x + y$.

10.7 Hallar los valores de x para los cuales *a*) $x^2 = 81$, *b*) $(x - 1)^2 = 4$.

SOLUCIÓN

a) Como nada se dice sobre si debe ser positivo o negativo, se tendrán que considerar las dos posibilidades. Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros de la ecuación se obtiene $\sqrt{x^2} = \sqrt{81} = 9$. Ahora bien, $\sqrt{x^2}$ representa un número positivo (o cero) si x es real. Por consiguiente, $\sqrt{x^2} = x$ si x es positivo, mientras que $\sqrt{x^2} = -x$ si x es negativo. En resumen, cuando se escribe $\sqrt{x^2}$ se debe considerar que es igual a x (si $x > 0$) o $-x$ (si $x < 0$). Por ejemplo, la ecuación $\sqrt{x^2} = 9$ equivale a $x = 9$ o a $-x = 9$ (es decir, $x = -9$). Las dos soluciones se representan por $x = \pm 9$.

b) $(x - 1)^2 = 4$, $\pm(x - 1) = 2$ o $(x - 1) = \pm 2$, y las dos raíces son $x = 3$ y $x = -1$.

10.8 Encuentre el error cometido en el razonamiento siguiente.

a)	Sea $x = y$:	$x = y$
b)	Se multiplican los dos miembros por x:	$x^2 = xy$
c)	Se resta y^2 a ambos miembros:	$x^2 - y^2 = xy - y^2$
d)	Se escribe el resultado en la forma siguiente:	$(x - y)(x + y) = y(x - y)$
e)	Se dividen los dos miembros entre $x - y$:	$x + y = y$
f)	Se sustituye x por su igual, y:	$y + y = y$
g)	De aquí resulta:	$2y = y$
h)	Dividiendo entre y:	$2 = 1.$

SOLUCIÓN No hay nada que objetar a las operaciones efectuadas en *a*), *b*), *c*) y *d*).

Sin embargo, en *e*) se divide entre $x - y$ y esto no es válido, ya que, por hipótesis, el divisor es igual a cero. Como la división entre cero carece de sentido, todo lo que se haga a partir de *e*) es falso.

10.9 Demuestre que $\sqrt{2}$ es un número irracional, es decir, un número que no se puede representar por el cociente de dos enteros.

SOLUCIÓN Suponga que $\sqrt{2} = p/q$ siendo p y q dos enteros que no tengan más divisores comunes que la unidad, ± 1, es decir, p/q es una fracción irreductible. Elevando al cuadrado los dos miembros se obtiene $p^2/q^2 = 2$, o sea $p^2 = 2q^2$.

Como $2q^2$ es un miembro par, p^2 será par y p también (si p fuera impar, p^2 también lo sería); por tanto, $p = 2k$, donde k un número entero, Así pues, $p^2 = 2q^2$ también se puede escribir en la forma $(2k)^2 = 2q^2$, o sea $q^2 = 2k^2$; en consecuencia, q y q^2 también son números pares. Pero si p y q son ambos pares, deberán tener el divisor común 2, en contra de la hipótesis hecha de que solo admitían como divisores comunes a la unidad, ± 1. Por consiguiente, $\sqrt{2}$ es irracional.

Problemas propuestos

10.10 Determine cuáles de las expresiones siguientes son ecuaciones y cuáles son identidades:

a) $2x + 3 - (2 - x) = 4x - 1$

b) $(2y - 1)^2 + (2y + 1)^2 = (2y)^2 + 6$

c) $2\{x + 4 - 3(2x - 1)\} = 3(4 - 3x) + 2 - x$

d) $(x + 2y)(x - 2y) - (x - 2y)^2 + 4y(2y - x) = 0$

e) $\dfrac{9x^2 - 4y^2}{3x - 2y} = 2x + 3y$

f) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - 27$

g) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^2}{12} = x^2$

h) $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$

10.11 Compruebe si la solución o soluciones indicadas satisfacen las ecuaciones.

a) $\dfrac{y^2 - 4}{y - 2} = 2y - 1;\ y = 3$

b) $x^2 - 3x = 4;\ -1, -4$

c) $\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 2} = 4;\ 34,\ 2$

d) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0;\ 1,\ 2,\ 3$

e) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{x - 1};\ x = 3$

f) $y^3 + y^2 - 5y - 5 = 0;\ \pm\sqrt{5}, -1$

g) $x^2 - 2y = 3y^2;\ x = 4,\ y = 2;\ x = 1,\ y = -1$

h) $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$; cualquier valor de x, y

10.12 Aplique los axiomas de la igualdad para resolver las ecuaciones siguientes. Compruebe las soluciones obtenidas.

a) $5(x - 4) = 2(x + 1) - 7$

b) $\dfrac{2y}{3} - \dfrac{y}{6} = 2$

c) $\dfrac{1}{y} = 8 - \dfrac{3}{y}$

d) $\dfrac{x + 1}{x - 1} = \dfrac{x - 1}{x - 2}$

e) $\dfrac{3x - 2}{x - 2} = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

f) $\sqrt{3x - 2} = 4$

g) $\sqrt{2x + 1} + 5 = 0$

h) $\sqrt[3]{2x - 3} + 1 = 0$

i) $(y + 1)^2 = 16$

j) $(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 = 34$

10.13 Despejar la incógnita que se indica en las fórmulas siguientes:

a) $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2};\ T_2$

b) $t = \sqrt{\dfrac{2s}{g}};\ s$

c) $m = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2};\ c$

d) $\omega^2 = v_0^2 + 2as;\ a$

e) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}};\ k$

f) $S = \dfrac{n}{2}\,[2a + (n - 1)d];\ d$

10.14 Hallar el valor de la incógnita que se indica conocidos los valores de las restantes.

a) $v = v_0 + at$; encuentre a si $v = 20$, $v_0 = 30$, $t = 5$.

b) $S = \dfrac{n}{2}\,(a + d)$; encuentre d si $S = 570$, $n = 20$, $a = 40$.

c) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$; encuentre q si $f = 30$, $p = 10$.

d) $Fs = \dfrac{1}{2}\,mv^2$; encuentre v si $F = 100$, $s = 5$, $m = 2.5$.

e) $f = \dfrac{1}{2\pi \quad LC}$; encontrar C con cuatro cifras decimales si $f = 1\,000$, $L = 4 \cdot 10^{-6}$.

10.15 Determine el grado de las ecuaciones siguientes respecto a las incógnitas que se indican:

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$: x
b) $x^2 + xy + 3y^4 = 6$: x; y; x y y
c) $2xy^3 - 3x^2y^2 + 4xy = 2x^3$: x; y; x y y
d) $xy + yz + xz + z^2x = y^4$: x; y; z; x y z; y y z; x, y, y z

10.16 Clasificar las ecuaciones siguientes (transformándolas si es preciso) según sean lineales, cuadráticas, de tercero, cuarto o quinto orden respecto a todas las incógnitas que figuran en ellas.

a) $2x^4 + 3x^3 - x - 5 = 0$
b) $x - 2y = 4$
c) $2x^2 + 3xy + y^2 = 10$
d) $x^2y^3 - 2xyz = 4 + y^5$
e) $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = x + y$
f) $\dfrac{2x + y}{x - 3y} = 4$
g) $3y^2 - 4y + 2 = 2(y - 3)^2$
h) $(z + 1)^2(z - 2) = 0$

10.17 La ecuación $\sqrt{(x + 4)^2} = x + 4$, ¿es una identidad? Explique la respuesta.

10.18 Demuestre que $\sqrt{3}$ es irracional.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

10.10 *a*) Ecuación condicional *b*) Ecuación condicional *c*) Identidad *d*) Identidad *e*) Ecuación condicional *f*) Identidad *g*) Ecuación condicional *h*) Identidad

10.11
a) $y = 3$ es solución.
b) $x = -1$ es solución, $x = -4$ no lo es.
c) $x = 34$ es solución, $x = 2$ no lo es.
d) $x = 1, 2, 3$ son todas soluciones.
e) $x = 3$ es solución.
f) $y = \pm\sqrt{5}, -1$ son todas soluciones.
g) $x = 4, y = 2$; $x = 1, y = -1$ es solución.
h) La ecuación es una identidad; luego todos los valores de x y y son soluciones.

10.12 *a*) $x = 5$ *b*) $y = 4$ *c*) $y = 1/2$ *d*) $x = 3$ *e*) no tiene solución *f*) $x = 6$ *g*) no tiene solución *h*) $x = 1$ *i*) $y = 3, -5$ *j*) $x = \pm 2$

10.13 *a*) $T_2 = \dfrac{P_2V_2T_1}{P_1V_1}$ *b*) $s = \frac{1}{2}gt^2$ *c*) $c = \pm\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4m^2}$ *d*) $a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2s}$ *e*) $k = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}$ *f*) $d = \dfrac{2S - 2an}{n(n - 1)}$

10.14 *a*) $a = -2$ *b*) $d = 17$ *c*) $q = -15$ *d*) $v = \pm 20$ *e*) $C = 0.0063$

10.15 *a*) 3 *b*) 2, 4, 4 *c*) 3, 3, 4 *d*) 1, 4, 2, 3, 4, 4

10.16 *a*) cuarto grado *b*) lineal *c*) cuadrática *d*) de quinto grado *e*) cuadrática *f*) lineal *g*) cuadrática *h*) de tercer grado

10.17 $\sqrt{(x + 4)^2} = x + 4$ sólo si $x + 4 \geq 0$; $\sqrt{(x + 4)^2} = -(x + 4)$ si $x + 4 \leq 0$.
La ecuación dada no es una identidad

10.18 Suponga $\sqrt{3} = p/q$ donde p y q son enteros que no tienen factor común excepto ± 1. Elevando al cuadrado, se obtiene $p^2/q^2 = 3$ o $p^2 = 3q^2$. Por lo que p^2 es un múltiplo de 3 o $p = 3k$ donde k es un entero (si $p = 3k + 1$ o $p = 3k + 2$, entonces, p^2 no es un múltiplo de 3). Por lo tanto, $p^2 = 3q^2$ se convierte $(3k)^2 = 3q^2$ y $q^2 = 3k^2$. Puesto que q^2 es un múltiplo de 3, q es un múltiplo de 3. Sin embargo, si tanto p como q son múltiplos de 3, entonces tiene como factor común 3. Esto contradice el supuesto que ambos no tienen factor común excepto ± 1. De aquí que $\sqrt{3}$ es irracional.

RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD 11

11.1 RAZÓN

La razón de dos números a y b se escribe $a : b$ y es el cociente o fracción a/b, siempre y cuando $b \neq 0$.
Así pues, $a : b = a/b$, $b \neq 0$. Si $a = b \neq 0$, la razón es $1 : 1$ o $1/1 = 1$.

EJEMPLOS 11.1

1. La razón de 4 a $6 = 4 : 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
2. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2/3}{4/5} = \frac{5}{6}$
3. $5x : \frac{3y}{4} = \frac{5x}{3y/4} = \frac{20x}{3y}$

11.2 PROPORCIÓN

Una proporción es una igualdad entre dos razones. Por ejemplo, $a : b = c : d$, o $a/b = c/d$ es una proporción en la que a y d se llaman *extremos* y b y c se llaman *medios*, mientras que d se llama la *cuarta proporcional* de a, b y c.

En la proporción $a : b = b : c$, c es la *tercera proporcional* entre a y b, y b es la *media proporcional* entre a y c.

Las proporciones son ecuaciones que pueden transformarse utilizando ciertos procedimientos aplicables a las ecuaciones. Algunas de estas ecuaciones transformadas se utilizan a menudo y se llaman leyes de la proporcionalidad. Si $a/b = c/d$, entonces

1. $ad = bc$
2. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
3. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
4. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
5. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
6. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

11.3 VARIACIÓN

En la literatura de material científico es común encontrar enunciados como “La presión de un gas encerrado varía en proporción directa con la temperatura”. Este enunciado así como otros similares poseen significados matemáticos precisos y representan un tipo específico de función llamada función de variación. Los tres tipos generales de funciones de variación son directas, inversas y conjuntas.

1. Si x varía *directamente* con y, entonces $x = ky$ o $x/y = k$, donde k se llama la constante de proporcionalidad o la constante de variación.
2. Si x varía *directamente* con y^2, entonces $x = ky^2$.
3. Si x varía i*nversamente* con y, entonces $x = k/y$.
4. Si x varía *inversamente* con y^2, entonces $x = k/y^2$.
5. Si x varía *conjuntamente* con y y z, entonces $x = kyz$.
6. Si x varía *directamente* con y^2 e *inversamente* con z, entonces $x = ky^2/z$.

La constante k puede determinarse si se conoce un conjunto de valores de las variables.

11.4 PRECIO UNITARIO

Cuando se va de compras, uno encuentra que muchos productos se venden en tamaños distintos. Para comparar precios, es necesario calcular el precio por unidad de medida de cada uno de los tamaños en los que se ofrece el artículo.

EJEMPLOS 11.2 ¿Cuál es el precio unitario de cada artículo?

a) Un frasco de 3 onzas de olivos que cuesta \$0.87.

$$\frac{x¢}{87¢} = \frac{1 \text{ onza}}{3 \text{ onzas}} \qquad x = \frac{87}{3} = 29 \qquad 29¢ \text{ por onza}$$

b) Una caja de cereal de 12 onzas que cuesta \$1.32

$$\frac{x¢}{132¢} = \frac{1 \text{ onza}}{12 \text{ onzas}} \qquad x = \frac{132}{12} = 11 \qquad 11¢ \text{ por onza}$$

EJEMPLOS 11.3 ¿Cuál es el precio unitario de cada artículo expresado con una cifra decimal?

a) Una lata de atún de 6.5 onzas que cuesta \$1.09

$$\frac{x¢}{109¢} = \frac{1 \text{ onza}}{6.5 \text{ onzas}} \qquad x = \frac{109}{6.5} = 16.8 \qquad 16.8¢ \text{ por onza}$$

b) Una lata de salmón de 14 onzas que cuesta \$1.95

$$\frac{x¢}{195¢} = \frac{1 \text{ onza}}{14 \text{ onzas}} \qquad x = \frac{195}{14} = 13.9 \qquad 13.9¢ \text{ por onza}$$

11.5 MEJOR COMPRA

Para determinar la mejor compra, se compara el precio unitario de cada uno de los tamaños del artículo y el tamaño con el precio unitario menor representa la mejor compra. Al realizar este proceso, se hacen dos suposiciones —que un tamaño mayor no representa un desperdicio y que el comprador puede pagar el precio total de los diferentes tamaños del artículo—. El precio unitario es a menudo redondeado a la primera cifra decimal cuando se trata de encontrar la mejor compra.

EJEMPLO 11.4 ¿Cuál es la mejor compra en una botella de aceite vegetal si un galón cuesta \$5.99, una pinta cuesta 89¢ y 24 onzas cuestan \$1.29?

$$\frac{a¢}{599¢} = \frac{1 \text{ onza}}{128 \text{ onzas}} \qquad a = \frac{599}{128} = 4.7 \qquad 4.7¢ \text{ por onza}$$
$$\frac{b¢}{89¢} = \frac{1 \text{ onza}}{16 \text{ onzas}} \qquad b = \frac{89}{16} = 5.6 \qquad 5.6¢ \text{ por onza}$$
$$\frac{c¢}{129¢} = \frac{1 \text{ onza}}{24 \text{ onzas}} \qquad c = \frac{129}{24} = 5.4 \qquad 5.4¢ \text{ por onza}$$

La mejor compra es un galón de aceite vegetal que cuesta \$5.99.

Problemas resueltos

Razón y proporción

11.1 Exprese las razones siguientes por medio de una fracción simplificada.

a) $96:128 = \dfrac{96}{128} = \dfrac{3}{4}$ *b*) $\dfrac{2}{3} : \dfrac{3}{4} = \dfrac{2/3}{3/4} = \dfrac{8}{9}$ *c*) $xy^2 : x^2y = \dfrac{xy^2}{x^2y} = \dfrac{y}{x}$

d) $(xy^2 - x^2y):(x-y)^2 = \dfrac{xy^2 - x^2y}{(x-y)^2} = \dfrac{xy(y-x)}{(y-x)^2} = \dfrac{xy}{y-x}$

11.2 Encuentre la razón entre las cantidades siguientes:

a) 6 libras a 12 onzas
Se suelen expresar las cantidades en las mismas unidades
Entonces, la razón de 96 onzas y 12 onzas es 96 : 12 = 8 : 1.

b) 3 cuartos a 2 galones
La razón es 3 cuartos y 8 cuartos o 3 : 8

c) 3 yardas cuadradas a 6 pies cuadrados
Puesto que 1 yarda cuadrada = 9 pies cuadrados, la razón es 27 pies^2 :
6 pies^2 = 9 : 2.

11.3 Encuentre el valor de x en las proporciones siguientes:

a) $(3-x):(x+1) = 2:1$, $\dfrac{3-x}{x+1} = \dfrac{2}{1}$ y $x = \dfrac{1}{3}$.

b) $(x+3):10 = (3x-2):8$, $\dfrac{x+3}{10} = \dfrac{3x-2}{8}$ y $x = 2$.

c) $(x-1):(x+1) = (2x-4):(x+4)$, $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2x-4}{x+4}$, $x^2 - 5x = 0$,
$x(x-5) = 0$ y $x = 0, 5$.

11.4 Encuentre la cuarta proporcional de los conjuntos de números siguientes. En cada caso, sea x la cuarta proporcional.

a) 2, 3, 6. Aquí $2:3 = 6:x$, $\dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{x}$ y $x = 9$.

b) 4, −5, 10. Aquí $4:-5 = 10:x$ y $x = -\dfrac{25}{2}$.

c) a^2, ab, 2. Aquí $a^2 : ab = 2:x$, $a^2x = 2ab$ y $x = \dfrac{2b}{a}$.

11.5 Encuentre la tercera proporcional de los pares de números siguientes. Sea, en cada caso, x la tercera proporcional.

a) 2, 3. Aquí $2:3 = 3:x$ y $x = 9/2$.

b) $-2, \frac{8}{3}$. Aquí $-2:\frac{8}{3} = \frac{8}{3}:x$ y $x = -\frac{32}{9}$.

11.6 Encuentre la media proporcional entre 2 y 8.

SOLUCIÓN Sea x la media proporcional. Por lo tanto, $2 : x = x : 8$, $x^2 = 16$ y $x = \pm 4$.

11.7 Un segmento de 30 pulgadas se divide en dos partes cuyas longitudes están en razón de 2 : 3. Encuentre las longitudes de ambos segmentos.

SOLUCIÓN Sean las longitudes pedidas x y $30 - x$. Por lo tanto,

$$\frac{x}{30 - x} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad x = 12 \text{ in.}, \quad 30 - x = 18 \text{ in.}$$

11.8 Las edades actuales de dos hermanos son 5 y 8 años respectivamente. ¿Al cabo de cuántos años (x) sus edades estarán en razón de 3 : 4?

SOLUCIÓN Las edades al cabo de x años son $5 + x$ y $8 + x$.
Por lo tanto, $(5 + x) : (8 + x) = 3 : 4$, $4(5 + x) = 3(8 + x)$ y $x = 4$.

11.9 Divida 253 en cuatro partes proporcionales a 2, 5, 7, 9.

SOLUCIÓN Sean las cuatro partes $2k$, $5k$, $7k$, $9k$
Entonces $2k + 5k + 7k + 9k = 253$ y $k = 11$. Por lo tanto, las cuatro partes son 22, 55, 77, 99.

11.10 Si $x : y : z = 2 : -5 : 4$ y $x - 3y + z = 63$, encuentre x, y, z.

SOLUCIÓN Sean $x = 2k$, $y = -5k$, $z = 4k$.
Sustituyendo estos valores en $x - 3y + z = 63$ se obtiene $2k - 3(-5k) + 4k = 63$ donde $k = 3$.
Luego $x = 2k = 6$, $y = -5k = -15$, $z = 4k = 12$.

Variación

11.11 Escriba una ecuación para cada uno de los enunciados siguientes empleando k como constante de proporcionalidad.

a) La circunferencia C de un círculo cambia proporcionalmente a su diámetro d. *Resp.* $C = kd$.

b) El periodo T de la oscilación de un péndulo simple en un lugar determinado es proporcional a la raíz cuadrada de su longitud l. *Resp.* $T = k\sqrt{l}$.

c) La energía radiante E emitida en la unidad de tiempo y por unidad de área por un radiador perfecto es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta T. *Resp.* $E = kT^4$.

d) El calor H en calorías que se genera en un conductor con resistencia R ohms por el que circula una corriente de intensidad I amperes es conjuntamente proporcional al cuadrado de la intensidad, a la resistencia del conductor y al tiempo t durante el cual pasa la corriente. *Resp.* $H = kI^2Rt$.

e) La intensidad I de la onda sonora es conjuntamente proporcional al cuadrado de la frecuencia n, al cuadrado de su amplitud r, a la velocidad del sonido v y a la densidad d del medio en el que se propaga. *Resp.* $I = kn^2r^2vd$.

f) La fuerza de atracción F entre dos masas m_1 y m_2 es directamente proporcional al producto de ambas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre ellas. *Resp.* $F = km_1m_2/r^2$.

g) A temperatura constante, el volumen V de una masa dada de un gas perfecto es inversamente proporcional a la presión p a la cual está sometida. *Resp.* $V = k/p$.

h) La resultante F de un sistema de fuerzas aplicadas a un sólido le comunica una aceleración a directamente proporcional a dicha resultante e inversamente proporcional a la masa m del sólido en cuestión. *Resp.* $a = kF/m$.

11.12 La energía cinética E de un cuerpo es proporcional a su peso W y al cuadrado de su velocidad v. Un cuerpo de 8 libras que se mueve a 4 pies por segundo posee una energía cinética de 2 pies por libra. Encuentre la energía cinética de un camión de 3 toneladas (6 000 libras) a una velocidad de 60 millas/hora (88 pies por segundo).

SOLUCIÓN

Para encontrar k: $E = kWv^2$ o $k = \dfrac{E}{Wv^2} = \dfrac{2}{8(4^2)} = \dfrac{1}{64}$.

Por lo tanto, la energía cinética del camión es: $E = \dfrac{Wv^2}{64} = \dfrac{6\,000(88)^2}{64} = 726\,000$ ft-lb.

11.13 La presión p de una masa dada de un gas perfecto es inversamente proporcional al volumen V que ocupa y directamente proporcional a la temperatura absoluta T. ¿A qué presión se deben someter pies cúbicos de helio a 1 atmósfera de presión y 253 grados de temperatura para que se reduzcan a 50 metros cúbicos a una temperatura de 313 grados absolutos?

SOLUCIÓN

Para encontrar k: $p = k\dfrac{T}{V}$ o $k = \dfrac{pV}{T} = \dfrac{1(100)}{253} = \dfrac{100}{253}$.

La presión pedida es: $p = \dfrac{100}{253}\dfrac{T}{V} = \dfrac{100}{253}\left(\dfrac{313}{50}\right) = 2.47$ atmósferas.

Otro método: Se designará por 1 y 2 las condiciones inicial y final del gas, respectivamente.

Entonces: $k = \dfrac{p_1V_1}{T_1} = \dfrac{p_2V_2}{T_2}$, $\dfrac{p_1V_1}{T_1} = \dfrac{p_2V_2}{T_2}$, $\dfrac{1(100)}{253} = \dfrac{p_2(50)}{313}$ y $p_2 = 2.47$ atm.

11.14 Sabiendo que 8 hombres tardan 12 días en poner a punto 16 máquinas, encuentre el número de días que emplearán 15 hombres en poner a punto 50 máquinas.

SOLUCIÓN El número de días (x) varía directamente con el número de máquinas (y) e inversamente con el número de hombres (z).

Luego $x = \dfrac{ky}{z}$ donde $k = \dfrac{xz}{y} = \dfrac{12(8)}{16} = 6$.

De aquí que el número de días que se precisan es $x = \dfrac{6y}{z} = \dfrac{6(50)}{15} = 20$ días.

Precio unitario y mejor compra

11.15 ¿Cuál es el precio unitario de 12 naranjas que cuestan $0.99?

SOLUCIÓN

$$\frac{x¢}{99¢} = \frac{1 \text{ naranja}}{12 \text{ naranjas}} \qquad x = \frac{99}{12} = 8.25 \qquad 8.25¢ \text{ por naranja}$$

11.16 ¿Cuál es el precio unitario de las bolsas para basura si 20 bolsas cuestan $2.50?

SOLUCIÓN

$$\frac{x¢}{250¢} = \frac{1 \text{ bolsa}}{20 \text{ bolsas}} \qquad x = \frac{250}{20} = 12.5 \qquad 12.5¢ \text{ por bolsa}$$

11.17 ¿Cuál es la mejor compra de 7 latas de sopa que cuestan $2.25 y 3 latas del mismo producto que cuestan $0.95?

SOLUCIÓN

$$\frac{a¢}{225¢} = \frac{1 \text{ lata}}{7 \text{ latas}} \qquad a = \frac{225}{7} = 32.1 \qquad 32.1¢ \text{ por lata}$$

$$\frac{b¢}{95¢} = \frac{1 \text{ lata}}{3 \text{ latas}} \qquad b = \frac{95}{3} = 31.7 \qquad 31.7¢ \text{ por lata}$$

La mejor compra es 3 latas que cuesten $0.95.

11.18 ¿Cuál es la mejor compra cuando de un paquete de 3 onzas de queso crema que cuesta $0.43 y un paquete de 8 onzas del mismo producto que cuesta $0.87?

SOLUCIÓN

$$\frac{a¢}{43¢} = \frac{1 \text{ onza}}{3 \text{ onzas}} \qquad a = \frac{43}{3} = 14.3 \qquad 14.3¢ \text{ por onza}$$

$$\frac{b¢}{87¢} = \frac{1 \text{ onza}}{8 \text{ onzas}} \qquad b = \frac{87}{8} = 10.9 \qquad 10.9¢ \text{ por onza}$$

La mejor compra es un paquete de 8 onzas de queso crema que cuesta $0.87.

Problemas propuestos

11.19 Exprese las razones siguientes por medio de una fracción simplificada:

a) $40 : 64$ *b*) $4/5 : 8/3$ *c*) $x^2y^3 : 3xy^4$ *d*) $(a^2b + ab^2) : (a^2b^3 + a^3b^2)$

11.20 Encuentre la razón entre las cantidades siguientes:

a) 20 yardas a 40 pies *c*) 2 pies cuadrados a 96 pulgadas cuadradas
b) 8 pintas a 5 cuartos *d*) 6 galones a 30 pintas

11.21 Encuentre el valor de *x* en las proporciones siguientes:

a) $(x + 3) : (x \quad 2) = 3 : 2$ *c*) $(x + 1) : 4 = (x + 6) : 2x$
b) $(x + 4) : 1 = (2 \quad x) : 2$ *d*) $(2x + 1) : (x + 1) = 5x : (x + 4)$

11.22 Encuentre la cuarta proporcional de los conjuntos de números siguientes:

a) 3, 4, 12 *b*) −2, 5, 6 *c*) a, b, c *d*) $m + 2, m - 2, 3$

11.23 Encuentre la tercera proporcional de los pares de números siguientes:

a) 3, 5 *b*) −2, 4 *c*) a, b *d*) $ab, \sqrt{ab}$

11.24 Calcule la media proporcional de los pares de números siguientes:

a) 3, 27 *b*) −4, −8 *c*) $3\sqrt{2}$ y $6\sqrt{2}$ *d*) $m + 2$ y $m + 1$

11.25 Si $(x + y) : (x - y) = 5 : 2$, calcule $x : y$.

11.26 Encuentre dos números sabiendo que están en la razón 3 : 4 y que sumándoles 4 unidades su razón se convierte en 4 : 5.

11.27 Un segmento de 120 pulgadas se divide en tres partes cuyas longitudes son directamente proporcionales a los números 3, 4, 5. Halle las longitudes de cada una de ellas.

11.28 Si $x : y : z = 4 : -3 : 2$ y $2x + 4y - 3z = 20$, encuentre x, y, z.

11.29 *a*) Si x es directamente proporcional a y y para $x = 8, y = 5$, encuentre y cuando $x = 20$.
b) Si x es directamente proporcional a y^2 y para $x = 4, y = 3$, encuentre x cuando $y = 6$.
c) Si x es directamente proporcional a y para $x = 8, y = 3$, encuentre y cuando $x = 2$.

11.30 La distancia recorrida por un cuerpo que cae libremente, partiendo del reposo, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo de descenso. Sabiendo que un cuerpo que cae desde 144 pies en 3 segundos, ¿qué distancia habrá caído en 10 segundos?

11.31 La fuerza ejercida por el viento sobre la vela de un barco es directamente proporcional al área de la vela y al cuadrado de la velocidad del viento. Sabiendo que la fuerza ejercida sobre 1 pie cuadrado de vela cuando la velocidad del viento es de 15 millas por hora vale una libra. Encuentre la fuerza que se ejercerá cuando la velocidad del viento es de 45 millas por hora en una vela de 20 yardas cuadradas de área.

11.32 Si dos hombres pueden transportar 6 acres de tierra en 4 horas, ¿cuántos hombres se necesitan para transportar 18 acres en 8 horas?

11.33 ¿Cuál es el precio unitario de cada artículo redondeado a centenas?

a) Una lata de 1.36 litros de jugo de frutas que cuesta \$1.09
b) Un frasco de 283 gramos de mermelada que cuesta \$0.79
c) Un frasco de 10.4 onzas de crema facial que cuesta \$3.73
d) Una docena de latas de chícharos que cuesta \$4.20
e) 25 libras de semillas de pasto que cuesta \$27.75
f) 3 donas que cuestan \$0.49

11.34 ¿Cuál es la mejor compra?

a) 100 pastillas de aspirina a \$1.75 o 200 pastillas de aspirina a \$2.69
b) Un frasco de 6 onzas de mantequillas de nuez a \$0.85 o uno de 12 onzas a \$1.59
c) Una botella de 14 onzas de antiséptico bucal a \$1.15 o una de 20 onzas a \$1.69
d) Un frasco de 9 onzas con mostaza a \$0.35 o uno de 24 onzas a \$0.89
e) Una caja de galletas de 454 gramos a \$1.05 o una de 340 gramos a \$0.93
f) Una botella de 0.94 litros de suavizante para ropa a \$0.99 o una de 2.76 litros a \$2.65

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

11.19 *a*) $5/8$ *b*) $3/10$ *c*) $x/3y$ *d*) $1/ab$

11.20 *a*) 3 : 2 *b*) 4 : 5 *c*) 3 : 1 *d*) 8 : 5

11.21 *a*) 12 *b*) -2 *c*) $4, -3$ *d*) $2, -2/3$

11.22 *a*) 16 *b*) -15 *c*) bc/a *d*) $3(m-2)/(m+2)$

11.23 *a*) $25/3$ *b*) -8 *c*) b^2/a *d*) 1

11.24 *a*) ± 9 *b*) $\pm 4\sqrt{2}$ *c*) ± 6 *d*) $\pm\sqrt{m^2+3m+2}$

11.25 7/3

11.26 12, 16

11.27 30, 40, 50 in.

11.28 $-8, 6, -4$

11.29 *a*) $12\frac{1}{2}$ *b*) 16 *c*) 12

11.30 1 600 ft

11.31 1 620 lb

11.32 3 hombres

11.33 *a*) 80.1¢ por litro *c*) 35.9¢ por onza *e*) 111¢ por libra
b) 0.3¢ por gramo *d*) 35¢ por lata *f*) 16.3¢ por dona

11.34 *a*) 200 aspirinas por $2.69 *c*) botella de 14 onzas por $1.15 *e*) caja de 454 gramos por $1.05
b) frasco de 12 onzas por $1.59 *d*) frasco de 24 onzas por 89¢ *f*) botella de 2.76 litros por $2.65

FUNCIONES Y GRÁFICAS 12

12.1 VARIABLES

Una variable es un símbolo al que se le puede asignar un conjunto de valores. Una *constante* es un símbolo al que sólo se le puede asignar un valor.

Para representar las variables se emplean las letras finales del alfabeto, x, y, z, u, v, y w y para las constantes se emplean las primeras, a, b, c.

12.2 RELACIONES

Una relación es un conjunto de pares ordenados. Una relación se especifica por medio de una ecuación, una regla o una tabla. Al conjunto de los primeros componentes de los pares ordenados se le conoce como dominio de la relación. Al conjunto de los segundos componentes se le llama rango de la relación. En este capítulo, se considerarán solamente relaciones que tengan conjuntos de números reales como su dominio y su rango.

EJEMPLO 12.1 ¿Cuál es el dominio y el rango de la relación $\{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$?

$$\text{dominio} = \{1, 2, 3, 4\} \qquad \text{rango} = \{3, 6, 9, 12\}$$

12.3 FUNCIONES

Una función es una relación tal que cada elemento del dominio tiene su par con un solo elemento del rango.

EJEMPLOS 12.2 ¿Qué relaciones son funciones?

a) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
función − cada primer elemento tiene su par con un segundo elemento exactamente.

b) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 8), (3, 9)\}$
no es una función − 1 tiene como pares 2 y 3.

c) $\{(1, 3), (2, 3), (4, 3), (9, 3)\}$
función − cada primer elemento tiene su par con un segundo elemento exactamente.

A menudo, las funciones y las relaciones se expresan como ecuaciones. Cuando no se especifica el dominio, se determina el subconjunto más grande de números reales para los que se define la ecuación y ése es el dominio. Una vez que el dominio se ha determinado, se define el rango encontrando el valor de la ecuación para cada uno de los valores del dominio. La variable asociada con el dominio se llama independiente y la variable asociada con el rango se llama dependiente. En las ecuaciones con variables x y y, en general se supone que x es la variable independiente y y la variable dependiente.

EJEMPLO 12.3 ¿Cuál es el dominio y el rango de $y = x^2 + 2$?

El dominio es el conjunto de todos los números reales puesto que el cuadrado de cada número real es otro número real y ese número real más 2, sigue siendo un número real. Dominio = {todos los números reales}

El rango es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a 2, puesto que el cuadrado de un número real es al menos cero y cuando se suma un 2 a cada valor se tienen los números reales que son al menos 2. Rango = {todos los números reales ≥ 2}

EJEMPLO 12.4 ¿Cuál es el dominio y el rango de $y = 1/(x - 3)$?

La ecuación no está definida cuando $x = 3$, por lo que el dominio es el conjunto de todos los números reales que no son iguales a 3. Dominio = {números reales $\neq 3$}.

Una fracción puede ser cero solamente cuando el numerador pueda ser cero. Puesto que el numerador de esta fracción es siempre 1, la fracción nunca puede ser igual a cero. Por lo tanto, el rango es el conjunto de todos los números reales diferentes a cero. Rango = {números reales $\neq 0$}.

12.4 NOTACIÓN FUNCIONAL

La notación $y = f(x)$, que se lee "y igual a f de x", es utilizada para representar que y es una función de x. Según esta notación, $f(a)$ significa el valor de la variable dependiente y cuando $x = a$ (siempre que dicho valor exista).

Así pues, $y = x^2 - 5x + 2$ se puede escribir $f(x) = x^2 - 5x + 2$. Por lo tanto, $f(2)$, que es el valor de $f(x)$ o y cuando $x = 2$, es $f(2) = 2^2 - 5(2) + 2 = -4$. De manera análoga, $f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 2 = 8$.

En la notación funcional se puede emplear una letra cualquiera; esto es, $g(x)$, $h(x)$, $F(x)$, etc., representan, asimismo, funciones de x.

12.5 SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES

Un sistema de coordenadas rectangulares se utiliza para representar una gráfica de la relación entre dos variables.

Sean $X'X$ y $Y'Y$ dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en el punto O, como se indica en la figura 12-1.

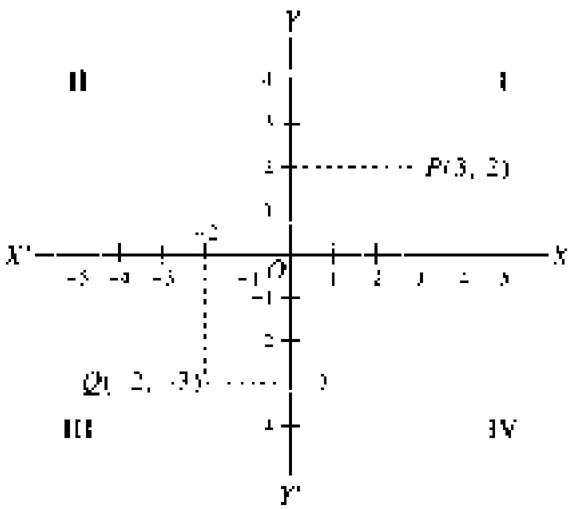


Figura 12-1

La recta $X'X$, denominada eje x, se sitúa normalmente en posición horizontal.

La recta $Y'Y$, denominada eje y, se sitúa normalmente en posición vertical.

El punto O recibe el nombre de origen del sistema.

Empleando una unidad de longitud adecuada se pueden situar sobre el eje x, a la derecha e izquierda del origen *O*, los puntos 1, 2, 3, 4, …, y -1, -2, -3, -4, …, sin más que ir tomando, sucesivamente, dicha unidad de longitud. En la figura hemos tomado arbitrariamente *OX* como semieje positivo; esto es lo más corriente, aunque no obligatorio.

Asimismo, hemos tomado *OY* como semieje positivo. Es también normal utilizar la misma unidad de longitud sobre ambos ejes, aunque tampoco es obligatorio.

Los ejes *x* y *y* dividen el plano en 4 regiones o *cuadrantes*, denominados I, II, III y IV, como se indica en la figura.

Sea *P* un punto cualquiera del plano *xy*. Trazando desde *P* las perpendiculares a los ejes *x* y *y*, los valores de *x* y *y* de los puntos de intersección de dichas perpendiculares con los ejes determinan, respectivamente, la *coordenada x* (abscisa) y la *coordenada y* (ordenada) del punto *P*. Estas coordenadas se representan por el símbolo (x, y).

Recíprocamente, dadas las coordenadas de un punto, se puede situar éste en el plano *xy*.

Por ejemplo, las coordenadas del punto *P* de la figura 12-1 son (3, 2). El punto cuyas coordenadas son $(-2, -3)$ es *Q*.

La gráfica de una función $y = f(x)$ es el lugar geométrico de los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación $y = f(x)$.

12.6 FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Se dice que una variable *z* es función de las variables *x* y *y* si existe una relación tal que a cada par de valores de *x* y *y* le corresponde uno o más valores de *z*. En este caso, *x* y *y* son variables independientes, y *z* es la variable dependiente o función.

La notación funcional que se utiliza es $z = f\,(x, y)$, que se lee "*z* igual a *f* de *x* y *y*". Entonces, $f\,(a, b)$ representa el valor de *z* cuando $x = a$ y $y = b$, siempre que la función esté definida para dichos valores.

Por lo tanto, si $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2x$, tendremos $f\,(2, 3) = 2^3 + 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = 20$.

De igual forma se definirían las funciones de más de dos variables.

12.7 SIMETRÍA

Cuando el lado izquierdo de una gráfica es la imagen espejo del derecho, se dice que la gráfica es simétrica respecto al eje *y* (vea la figura 12-2). Esta simetría se presenta debido a que para cualquier valor de *x*, tanto *x* como $-x$ da como resultado el mismo valor de *y*, esto es $f(x) = f(-x)$. La ecuación puede o no ser función de *y* en términos de *x*.

Algunas gráficas tienen una mitad inferior que es la imagen espejo de la superior, por lo que se dice que estas gráficas son simétricas respecto al eje *x*. La simetría respecto al eje *x* se presenta cuando para cada valor de *y*, tanto *y* como $-y$, da como resultado el mismo valor de *x* (vea la figura 12-3). En estos casos, no se tiene una función para *y* en términos de *x*.

Si sustituyendo $-x$ por *x* y $-y$ por *y* en una ecuación se genera una ecuación equivalente, se dice que la gráfica es simétrica respecto al origen (vea la figura 12-4). Estas ecuaciones representan relaciones que no siempre son funciones.

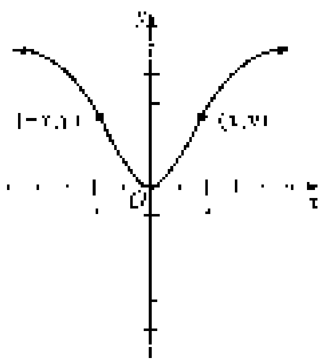


Figura 12-2

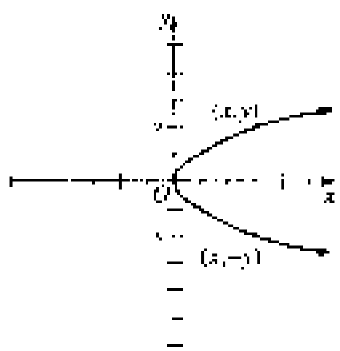


Figura 12-3

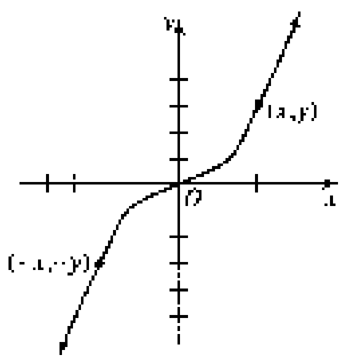


Figura 12-4

La simetría puede utilizarse para facilitar el bosquejo de las gráficas de relaciones y funciones. Una vez que se determinan el tipo de simetría, si existe, y la forma de la mitad de la gráfica, se puede dibujar la otra mitad utilizando la simetría. La mayor parte de las gráficas no son simétricas respecto al eje y, eje x o al origen. Sin embargo, muchas gráficas utilizadas con frecuencia presentan una de estas simetrías y su uso para graficar la relación simplifica el proceso de graficación.

EJEMPLO 12.5 Pruebe la simetría de la relación $y = 1/x$.

Sustituyendo $-x$ por x, se obtiene $y = -1/x$, por lo que la gráfica no es simétrica respecto al eje y.

Sustituyendo $-y$ por y, se obtiene $-y = 1/x$, por lo que la gráfica no es simétrica respecto al eje x.

Sustituyendo $-x$ por x y $-y$ por y, se obtiene $-y = -1/x$ que es equivalente a $y = 1/x$, por lo que la gráfica es simétrica respecto al origen.

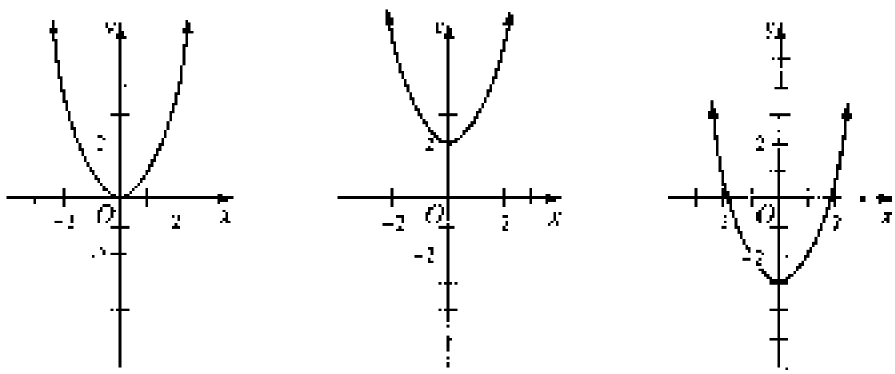
12.8 DESPLAZAMIENTOS

La gráfica de $y = f(x)$ se desplaza hacia arriba sumando una constante positiva a cada valor de y en la gráfica. Se desplaza hacia abajo sumando una constante negativa a cada valor de y en la gráfica de $y = f(x)$. Por lo tanto, la gráfica de $y = f(x) + b$ es distinta a la gráfica de $y = f(x)$ por un desplazamiento vertical de $|b|$ unidades. El desplazamiento es hacia arriba si $b > 0$ y hacia abajo si $b < 0$.

EJEMPLOS 12.6 ¿En qué forma difieren las gráficas de $y = x^2 + 2$ y $y = x^2 - 3$ de la gráfica $y = x^2$?

La gráfica de $y = x^2$ se desplaza dos unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $y = x^2 + 2$ (vea las figuras 12-5*a* y *b*).

La gráfica de $y = x^2$ se desplaza 3 unidades hacia abajo para obtener la gráfica de $y = x^2 - 3$ (vea las figuras 12-5*a* y *c*).



a) $y = x^2$ *b*) $y = x^2 + 2$ *c*) $y = x^2 - 3$

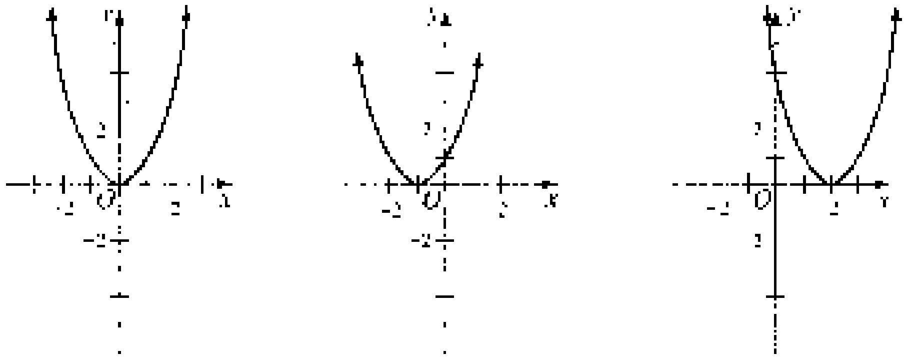
Figura 12-5

La gráfica de $y = f(x)$ se desplaza a la derecha cuando se resta un número positivo de cada valor de x. Se desplaza hacia la izquierda si se resta un número negativo de cada valor de x. Por ende, la gráfica de $y = f(x - a)$ difiere de la gráfica de $y = f(x)$ por un desplazamiento horizontal de $|a|$ unidades. El desplazamiento es hacia la derecha si $a > 0$ y hacia la izquierda si $a < 0$.

EJEMPLOS 12.7 ¿En qué forma difieren las gráficas $y = (x + 1)^2$ y $y = (x - 2)^2$ de la gráfica $y = x^2$?

La gráfica de $y = x^2$ se desplaza una unidad hacia la izquierda para obtener una gráfica de $y = (x + 1)^2$ puesto que $x + 1 = x - (-1)$ (vea las figuras 12-6*a* y *b*).

La gráfica de $y = x^2$ se desplaza 2 unidades hacia la derecha para obtener la gráfica de $y = (x - 2)^2$ (vea las figuras 12-6*a* y *c*).



a) $y = x^2$ *b*) $y = (x + 1)^2$ *c*) $y = (x - 2)^2$

Figura 12-6

12.9 ESCALAMIENTO

Si cada valor de y se multiplica por un número positivo mayor a 1, la rapidez de cambio de y aumenta respecto a la rapidez de cambio de los valores de y en $y = f(x)$. Sin embargo, si cada valor de y se multiplica por un número positivo entre 0 y 1, la rapidez de cambio de los valores de y disminuye respecto a la rapidez de cambio de los valores de y en $y = f(x)$. Por ende, la gráfica de $y = cf(x)$, donde c es un número positivo, difiere de la gráfica de $y = f(x)$ por la rapidez de cambio en y. Si $c > 1$, la rapidez de cambio de y aumenta y si $0 < c < 1$, la rapidez de cambio en y disminuye.

La gráfica de $y = f(x)$ se refleja con respecto al eje x cuando cada valor de y se multiplica por un número negativo. Por lo tanto, la gráfica de $y = cf(x)$, donde $c < 0$, es el reflejo de $y = |c|\ f(x)$ con respecto al eje x.

EJEMPLOS 12.8 ¿En qué forma difieren las gráficas de $y = -|x|$, $y = 3|x|$ y $y = ½|x|$ de la gráfica de $y = |x|$?

La gráfica de $y = |x|$ se refleja respecto al eje x resultando $y = -|x|$ (vea las figuras 12-7*a* y *b*).

La gráfica de $y = |x|$ tiene el valor de y multiplicado por 3 para cada valor de x para obtener la gráfica de $y = 3|x|$ (vea las figuras 12-7*a* y *c*).

La gráfica de $y = |x|$ tiene el valor de y multiplicado por ½ para cada valor de x para obtener la gráfica de $y = ½\ |x|$ (vea las figuras 12-7 *a*) y *d*).

12.10 UTILIZACIÓN DE LA CALCULADORA GRÁFICA

En el estudio de las calculadoras gráficas la información que se proporcionará será general, aunque se haya utilizado una calculadora gráfica Texas Instruments TI-84 para verificar los procedimientos generales. La mayor parte de las calculadoras gráficas funcionan de forma muy parecida, sin embargo, usted necesita utilizar el manual de instrucciones de su calculadora con fin de ver cómo efectuar estas operaciones para ese modelo en particular.

Una calculadora gráfica le permite graficar funciones de manera sencilla. El punto clave para hacer gráficas consiste en configurar la ventana de graficación adecuadamente. Para hacer lo anterior, usted necesita el dominio de la función con el fin de fijar los valores máximo y mínimo de x y el rango para fijar los valores máximo y mínimo de y. Cuando el dominio o el rango representan un intervalo grande, puede ser necesario utilizar la escala de x o y para hacer la gráfica más pequeña, aumentando el tamaño de las unidades a lo largo de cualquiera de los ejes. En ocasiones, puede ser necesario observar la gráfica en partes de su dominio o rango para ver la gráfica en realidad.

Para comparar las gráficas de $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ y $y = x^2 - 3$ en una calculadora gráfica, usted debe ingresar cada función en el menú $y =$. Sean $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 + 2$ y $y_3 = x^2 - 3$. Apague las funciones y_2 y y_3 y configure la ventana de graficación en modo estándar. Cuando usted presiona la tecla gráfica, podrá observar una gráfica parecida a la que se muestra en la figura 12-5*a*. Apague la función y_1 y encienda la función y_2, luego presione la tecla gráfica. La gráfica que se despliega se muestra en la figura 12-5*b*. Ahora apague la función y_2 y encienda la función y_3. Presione la tecla gráfica y podrá observar la gráfica de la figura 12-5*c*. Cuando usted enciende las funciones $y_1 y_2$ y y_3 y presiona la tecla gráfica, podrá observar las tres funciones graficadas sobre los mismos ejes (vea la figura 12-8). La gráfica de $y_2 = x^2 + 2$ está 2 unidades arriba de la gráfica de $y_1 = x^2$, mientras que la gráfica de $y_3 = x^2 - 3$ se encuentra a 3 unidades por debajo de la gráfica de y_1.

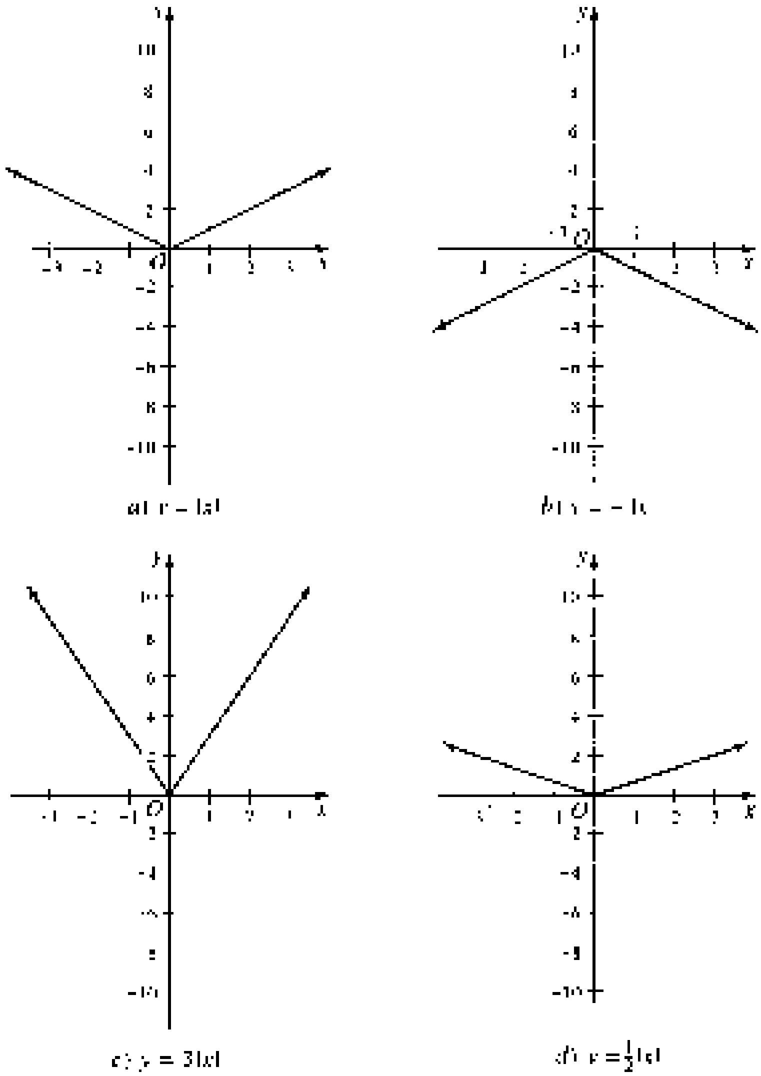


Figura 12-7

De la misma forma, usted puede comparar la gráfica de $y_1 = f(x)$ y $y_2 = f(x) + b$ para cualquier función $f(x)$. Observe que cuando $b > 0$, la gráfica de y_2 está b unidades por encima de la gráfica de y_1. Cuando $b < 0$, la gráfica de y_2 es $|b|$ unidades por debajo de la gráfica de y_1.

Considere las gráficas de $y = x^2$, $y = (x + 1)^2$ y $y = (x - 2)^2$. Para comparar éstas graficas utilizando una calculadora, se necesita fijar $y_1 = x^2$, $y_2 = (x + 1)^2$ y $y_3 = (x - 2)^2$. Utilizando la ventana estándar y graficando las tres funciones al mismo tiempo, se puede observar que $y_2 = (x + 1)^2$ se encuentra una unidad a la izquierda de la gráfica de $y_1 = x^2$. Asimismo, la gráfica de $y_3 = (x - 2)^2$ se encuentra a dos unidades a la derecha de la gráfica de y_1 (vea la figura 12-9).

En general, para comparar las gráficas de $y_1 = f(x)$ y $y_2 = f(x - a)$ para todas las funciones $f(x)$, se observa que la gráfica de $y_2 = f(x - a)$ se encuentra a a unidades a la derecha de $y_1 = f(x)$ cuando $a > 0$. Cuando $a < 0$, la gráfica de y_2 es $|a|$ unidades a la izquierda de y_1.

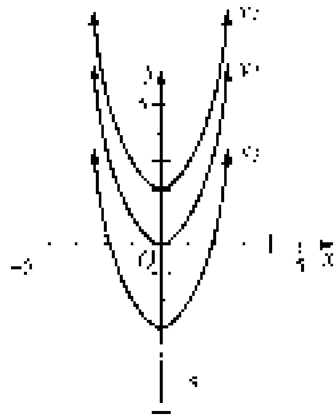


Figura 12-8

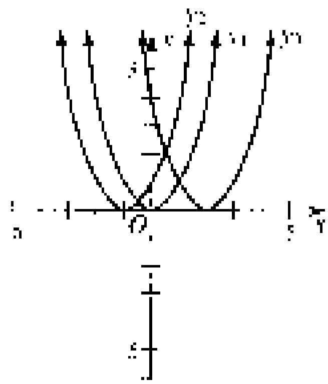


Figura 12-9

EJEMPLO 12.9 Grafique $x^2 + y^2 = 9$.

Para graficar $x^2 + y^2 = 9$ en una calculadora, primero se despeja y en la ecuación obteniéndose $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Sea $y_1 = +\sqrt{9 - x^2}$ y $y^2 = -\sqrt{9 - x^2}$, grafíquense ambas en los mismos ejes coordenados. Si se utiliza la ventana estándar, se obtiene una versión distorsionada de esta gráfica debido a que la escala en el eje y no es igual a la escala en el eje x. Mediante la multiplicación por el factor 0.67 (para la TI-84), se puede ajustar el intervalo de y y así obtener una versión más precisa de la gráfica. Por lo tanto, utilizando el dominio $[-10, 10]$ y el rango de $[-6.7, 6.7]$, se obtiene la gráfica de un círculo (vea la figura 12-10).

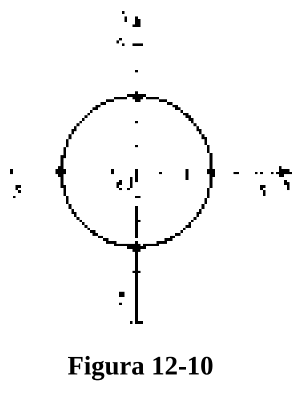


Figura 12-10

Problemas resueltos

12.1 Exprese el área A de un cuadrado en función de su *a*) lado x, *b*) perímetro P y *c*) diagonal D (vea la figura 12-11).

SOLUCIÓN

a) $A = x^2$

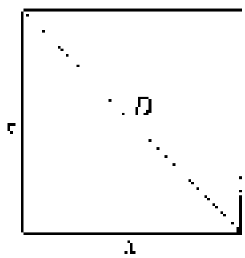


Figura 12-11

b) $P = 4x$ o $x = \dfrac{P}{4}$. Por lo tanto $A = x^2 = \left(\dfrac{P}{4}\right)^2$ o $A = \dfrac{P^2}{16}$.

c) $D = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$ o $x = \dfrac{D}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto $A = x^2 = \left(\dfrac{D}{\sqrt{2}}\right)^2$ o $A = \dfrac{D^2}{2}$.

12.2 Exprese *a*) el área A, *b*) el perímetro P y *c*) la diagonal D de un rectángulo en función de sus lados x y y. (Vea la figura 12-12.)

SOLUCIÓN

a) $A = xy$, *b*) $P = 2x + 2y$, *c*) $D = \sqrt{x^2 + y^2}$

Figura 12-12

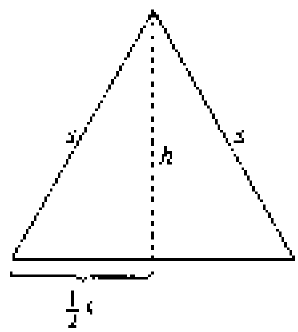


Figura 12-13

12.3 Exprese *a*) la altura h y *b*) el área A de un triángulo equilátero en función de sus lados. (Vea la figura 12-13.)

SOLUCIÓN

a) $h = \sqrt{s^2 - \left(\dfrac{1}{2}s\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}s^2} = \dfrac{s\sqrt{3}}{2}$ *b*) $A = \dfrac{1}{2}hs = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s\sqrt{3}}{2}\right)s = \dfrac{s^2\sqrt{3}}{4}$

12.4 El área S de una superficie esférica es $S = 4\pi r^2$, y su volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Exprese *a*) r en función de S y de V, *b*) V en función de S y *c*) S en función de V.

SOLUCIÓN

a) De $S = 4\pi r^2$ se obtiene

$$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

De $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ se obtiene

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

b) Sustituyendo

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

en $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ se obtiene

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)^3 = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

c) Sustituyendo

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

en $S = 4\pi r^2$ se obtiene

$$S = 4\pi\sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2} = 4\pi\sqrt[3]{\frac{9V^2}{16\pi^2}\cdot\frac{4\pi}{4\pi}} = \sqrt[3]{36\pi V^2}.$$

12.5 Dada la función $y = 3x^2 - 4x + 1$, encuentre los valores de y correspondientes a $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

SOLUCIÓN

Para $x = -2$, $y = 3(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 21$; para $x = -1$, $y = 3(-1)^2 - 4(-1) + 1 = 8$; para $x = 0$, $y = 3(0)^2 - 4(0) + 1 = 1$; para $x = 1$, $y = 3(1)^2 - 4(1) + 1 = 0$; para $x = 2$, $y = 3(2)^2 - 4(2) + 1 = 5$. Estos valores de x y y figuran en la tabla siguiente:

x	-2	-1	0	1	2
y	21	8	1	0	5

12.6 Amplíe la tabla de valores del problema 12.5 calculando los valores de y correspondientes a $x = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$.

SOLUCIÓN

Para $x = -3/2$, $y = 3(-3/2)^2 - 4(-3/2) + 1 = 13\,\frac{3}{4}$; etc. En la tabla siguiente se resumen los resultados.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	21	$13\frac{3}{4}$	8	$3\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$1\frac{3}{4}$	5

12.7 Mencione el dominio y rango de cada relación

a) $y = 3 - x^2$ *b*) $y = x^3 + 1$ *c*) $y = \sqrt{x+2}$ *d*) $y = \sqrt[3]{x}$

SOLUCIÓN

a) Dominio = {todos los números reales} Puesto que todos los números reales pueden elevarse al cuadrado, $3 - x^2$ está definido para todos los números reales.
Rango = {todos los números reales ≤ 3} Puesto que x^2 es positivo para todos los números reales, $3 - x^2$ no excede 3.

b) Dominio = {todos los números reales} Puesto que todos los números reales pueden elevarse al cubo, $x^3 + 1$ está definido para todos los números reales.
Rango = {todos los números reales} Puesto que x^3 funciona para todos los números reales, $x^3 + 1$ también funciona para todos los números reales.

c) Dominio = {todos los números reales ≥ -2} Puesto que la raíz cuadrada da como resultado números reales solamente con números reales positivos, x debe ser al menos -2.
Rango = {todos los números reales ≥ 0} Puesto que se desea la raíz cuadrada principal, los valores serán números positivos.

d) Dominio = {todos los números reales} Puesto que la raíz cúbica da como resultado un número real para todos los números reales, x puede ser cualquier número real.
Rango = {todos los números reales} Puesto que cualquier número real puede ser la raíz cúbica de un número real, se obtienen todos los números reales.

12.8 ¿En cuál de las ecuaciones siguientes y es una función de x?

a) $y = 3x^3$ *c*) $xy = 1$ *e*) $y = \sqrt{4x}$
b) $y^2 = x$ *d*) $y = 2x + 5$ *f*) $y^3 = 8x$

SOLUCIÓN

a) Función — Para cada valor de x, $3x^3$ da exactamente como resultado un valor.
b) No es una función — Para $x = 4$, y puede ser 2 o -2.
c) Función — $y = 1/x$. Para cada número real diferente de cero $1/x$ da exactamente un valor.
d) Función — Para cada valor de x, $2x + 5$ da como resultado exactamente un valor.
e) Función — Para cada valor de $x \geq 0$, $\sqrt{4x}$ da como resultado la raíz cuadrada principal.
f) Función — Para cada número real, $8x$ es un número real y cada número real tiene exactamente una raíz cúbica real.

12.9 Si $f(x) = x^3 - 5x - 2$, encuentre $f(-2)$, $f(-3/2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

SOLUCIÓN

$f(-2) = (-2)^3 - 5(-2) - 2 = 0$
$f(-3/2) = (-3/2)^3 - 5(-3/2) - 2 = 17/8$
$f(-1) = (-1)^3 - 5(-1) - 2 = 2$
$f(0) = 0^3 - 5(0) - 2 = -2$
$f(1) = 1^3 - 5(1) - 2 = -6$
$f(2) = 2^3 - 5(2) - 2 = -4$

Se pueden presentar estos valores en una tabla

x	-2	$-3/2$	-1	0	1	2
$f(x)$	0	17/8	2	-2	-6	-4

12.10 Si $F(t) = \dfrac{t^3 + 2t}{t - 1}$, encuentre $F(-2)$, $F(x)$, $F(-x)$.

SOLUCIÓN

$$F(-2) = \frac{(-2)^3 + 2(-2)}{-2-1} = \frac{-8-4}{-3} = 4$$

$$F(x) = \frac{x^3 + 2x}{x-1}$$

$$F(-x) = \frac{(-x)^3 + 2(-x)}{-x-1} = \frac{-x^3 - 2x}{-x-1} = \frac{x^3 + 2x}{x+1}$$

12.11 Dada $R(x) = (3x - 1)/(4x + 2)$, encuentre

a) $R\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$, *b*) $\dfrac{R(x+h) - R(x)}{h}$, *c*) $R[R(x)]$.

SOLUCIÓN

a) $$R\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{3\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right) - 1}{4\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right) + 2} = \frac{\left(\dfrac{2x-5}{x+2}\right)}{\left(\dfrac{6x}{x+2}\right)} = \frac{2x-5}{6x}$$

b) $$\frac{R(x+h) - R(x)}{h} = \frac{1}{h}\{R(x+h) - R(x)\} = \frac{1}{h}\left(\frac{3(x+h)-1}{4(x+h)+2} - \frac{3x-1}{4x+2}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{[3(x+h)-1][4x+2] - [3x-1][4(x+h)+2]}{[4(x+h)+2][4x+2]}\right) = \frac{5}{2(2x+2h+1)(2x+1)}$$

c) $$R[R(x)] = R\left(\frac{3x-1}{4x+2}\right) = \frac{3\left(\dfrac{3x-1}{4x+2}\right) - 1}{4\left(\dfrac{3x-1}{4x+2}\right) + 2} = \frac{5x-5}{20x} = \frac{x-1}{4x}$$

12.12 Si $F(x, y) = x^3 - 3xy + y^2$, encuentre

a) $F(2, 3)$, *b*) $F(-3, 0)$, *c*) $\dfrac{F(x, y+k) - F(x, y)}{k}$.

SOLUCIÓN

a) $F(2, 3) = 2^3 - 3(2)(3) + 3^2 = -1$

b) $F(-3, 0) = (-3)^3 - 3(-3)(0) + 0^2 = -27$

c) $\dfrac{F(x, y+k) - F(x, y)}{k} = \dfrac{x^3 - 3x(y+k) + (y+k)^2 - [x^3 - 3xy + y^2]}{k} = -3x + 2y + k$

12.13 Grafique los puntos siguientes en un sistema coordenado rectangular: $(2, 1)$, $(4, 3)$, $(-2, 4)$, $(-4, 2)$, $(-4, -2)$, $(-5/2, -9/2)$, $(4, -3)$, $(2, -\sqrt{2})$.

SOLUCIÓN

Consulte la figura 12-14.

12.14 Dada $y = 2x - 1$, obtenga los valores de y correspondientes a $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y grafique los puntos (x, y) así obtenidos.

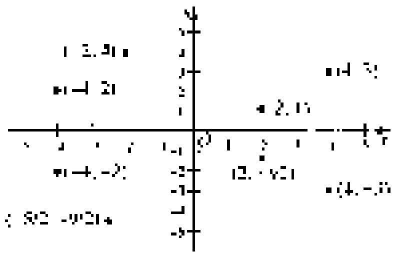


Figura 12-14

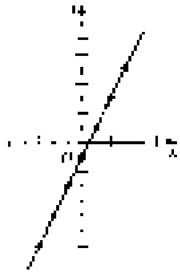


Figura 12-15

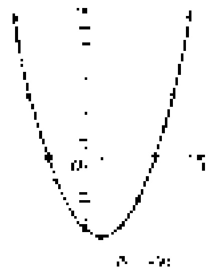


Figura 12-16

SOLUCIÓN

La tabla siguiente lista los valores de y correspondientes a los valores dados de x.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Los puntos $(-3, -7)$, $(-2, -5)$, $(-1, -3)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$ se encuentran graficados como se muestra en la figura 12-15.

Observe que todos los puntos que satisfacen $y = 2x - 1$ se encuentran sobre una línea recta. En general la gráfica de $y = ax + b$, donde a y b son constantes, es una línea recta; de aquí que $y = ax + b$ para $f(x) = ax + b$ se llama *función lineal*. Puesto que dos puntos determinan una línea recta, sólo es necesario graficar dos puntos y la línea que los conecta.

12.15 Obtenga la gráfica de la función definida por $y = x^2 - 2x - 8$ o $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

SOLUCIÓN

La tabla siguiente proporciona los valores de y o $f(x)$ para varios valores de x.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y o $f(x)$	16	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	16

Por lo tanto, los puntos siguientes caen sobre la gráfica: $(-4, 16)$, $(-3, 7)$, $(-2, 0)$, $(-1, -5)$, etc.

Para graficar estos puntos es conveniente utilizar diferentes escalas sobre los ejes x y y, como se muestra en la figura 12-16. Los puntos marcados con $\times$ se sumaron con los que se obtuvieron a fin de obtener un panorama más preciso.

La curva obtenida de esta forma se le conoce como *parábola*. Al punto más bajo P, llamado punto mínimo, es el *vértice* de la parábola.

12.16 Grafique la función definida por $y = 3 - 2x - x^2$.

SOLUCIÓN

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12	-21

La curva obtenida es una parábola, como se muestra en la figura 12-17. El punto $Q(-1, 4)$, el vértice de la parábola, es un punto máximo. En general, $y = ax^2 + bx + c$ representa una parábola cuyo vértice es un máximo o un mínimo dependiendo de si a es $-$ o $+$, respectivamente. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es a menudo llamada función cuadrática.

12.17 Obténgase la gráfica de $y = x^3 + 2x^2 - 7x - 3$.

SOLUCIÓN

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	9	11	5	-3	-7	-1	21

La gráfica se muestra en la figura 12-18. Los puntos marcados con $\times$ no están listados en la tabla; éstos se sumaron a fin de mejorar la precisión de la gráfica.

El punto A se llama *punto máximo relativo;* no es el punto más alto de toda la curva, sin embargo, los puntos en cualquiera de los lados están más abajo. El punto B se llama *punto mínimo relativo.* El cálculo permite determinar dichos puntos máximo y mínimo relativos.

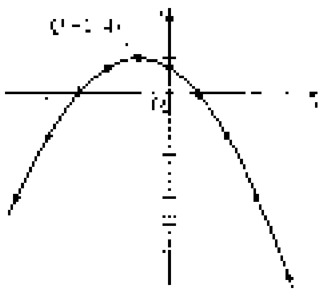


Figura 12-17

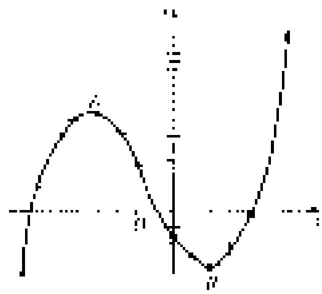


Figura 12-18

12.18 Obtenga la gráfica de $x^2 + y^2 = 36$.

SOLUCIÓN

Se puede escribir $y^2 = 36 - x^2$ o $y = \pm\sqrt{36 - x^2}$. Note que x debe tener un valor entre -6 y $+6$ si y va a representar un número real.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	0	$\pm\sqrt{11}$	$\pm\sqrt{20}$	$\pm\sqrt{27}$	$\pm\sqrt{32}$	$\pm\sqrt{35}$	± 6	$\pm\sqrt{35}$	$\pm\sqrt{32}$	$\pm\sqrt{27}$	$\pm\sqrt{20}$	$\pm\sqrt{11}$	0

Los puntos a graficar son $(-6, 0)$, $(-5, \sqrt{11})$, $(-5, -\sqrt{11})$, $(-4, \sqrt{20})$, $(-4, -\sqrt{20})$, etc.

La figura 12-19 muestra la gráfica, un círculo de radio 6.

En general, la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$ es un círculo con su centro en el origen y de radio a.

Se debe observar que si las unidades no se hubieran considerado como las mismas sobre los ejes x y y, la gráfica no hubiera tenido la forma de un círculo.

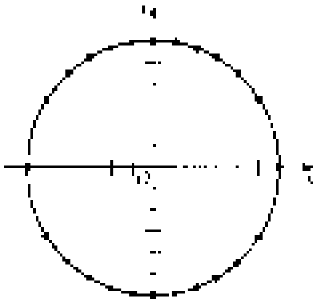


Figura 12-19

12.19 Determine si la gráfica es simétrica con respecto al eje y, al eje x o al origen.

a) $y = 4x$ *c*) $xy^2 = 1$ *e*) $y = x^3$
b) $x^2 + y^2 = 8$ *d*) $x = y^2 + 1$ *f*) $y = \sqrt{x}$

SOLUCIÓN

a) Origen — Puesto que $-y = 4(-x)$ equivale a $y = 4x$.
b) Eje y — Puesto que $(-x)^2 + y^2 = 8$ equivale a $x^2 + y^2 = 8$.
Eje x — Puesto que $x^2 + (-y)^2 = 8$ equivale a $x^2 + y^2 = 8$.
Origen — Puesto que $(-x)^2 + (-y)^2 = 8$ equivale a $x^2 + y^2 = 8$.
c) Eje x — Puesto que $x(-y)^2 = 1$ equivale a $xy^2 = 1$.
d) Eje x — Puesto que $x = (-y)^2 + 1$ equivale a $x = y^2 + 1$.
e) Origen — Puesto que $(-y) = (-x)^3$ equivale a $y = x^3$.
f) Ninguno

12.20 Utilice la gráfica $y = x^3$ para graficar $y = x^3 + 1$.

SOLUCIÓN

La gráfica de $y = x^3$ se muestra en la figura 12-20. La gráfica de $y = x^3 + 1$ es la gráfica de $y = x^3$, desplazada una unidad hacia arriba. Dicha gráfica se muestra en la figura 12-21.

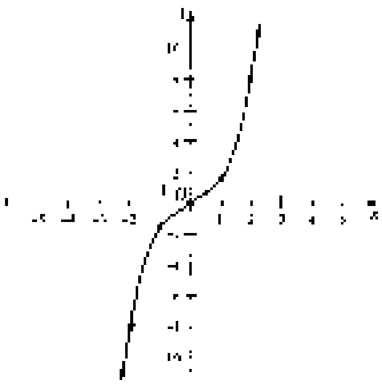


Figura 12-20

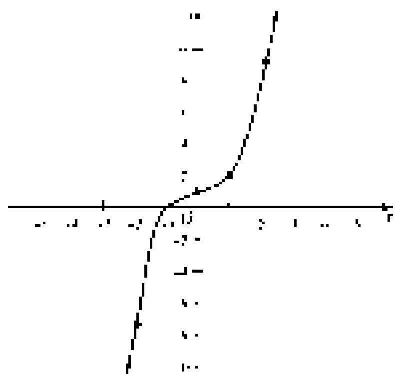


Figura 12-21

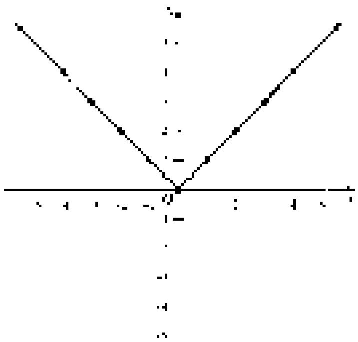


Figura 12-22

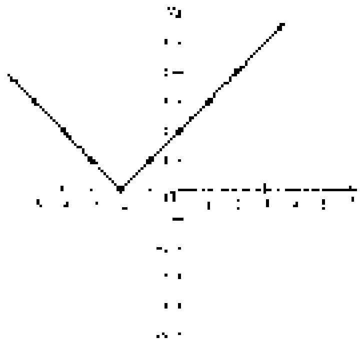


Figura 12-23

12.21 Utilice la gráfica de $y = |x|$ para graficar $y = |x + 2|$.

SOLUCIÓN

La gráfica de $y = |x|$ se muestra en la figura 12-22. La gráfica de $y = |x+2|$ es la gráfica de $y = |x|$ desplazada 2 unidades a la izquierda, puesto que $|x + 2| = |x - (-2)|$ y se muestra en la figura 12-23.

12.22 Utilice la gráfica de $y = x^2$ para graficar $y = -x^2$.

SOLUCIÓN

La gráfica de $y = x^2$ se muestra en la figura 12-24. La gráfica de $y = -x^2$ es la grafica de $y = x^2$ reflejada con respeto al eje x y se muestra en la figura 12-25.

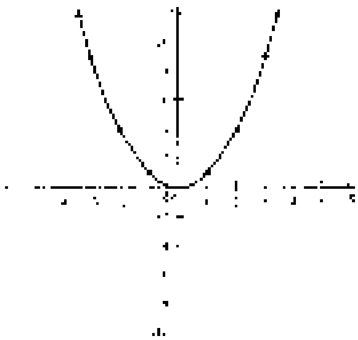


Figura 12-24

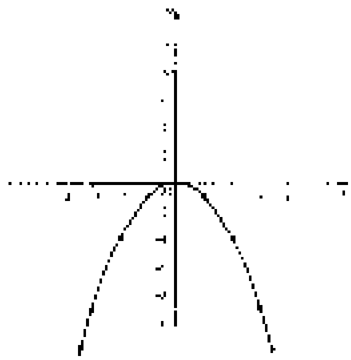


Figura 12-25

12.23 Un hombre tiene 40 pies de alambre para cercar un jardín rectangular. La cerca se utilizará solamente en tres lados del jardín, su casa será el cuarto lado. Determine el área máxima que puede cercar.

SOLUCIÓN

Sea x = longitud de cada uno de los dos lados con cerca del rectángulo; por lo tanto, $40 - 2x$ = longitud del tercer lado de la cerca.

El área A del jardín es $A = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$. Se trata de hallar el valor máximo de A. Se hace una tabla de valores y se representa gráficamente la función. Es fácil de ver que los valores de x deben estar comprendidos entre 0 y 20 pies para que A sea positivo.

x	0	5	8	10	12	15	20
A	0	150	192	200	192	150	0

A partir de la gráfica de la figura 12-26, las coordenadas del máximo P de la curva son (10 200), con lo cual las dimensiones del jardín han de ser 10 pies y 20 pies y su área resulta de 200 pies^2.

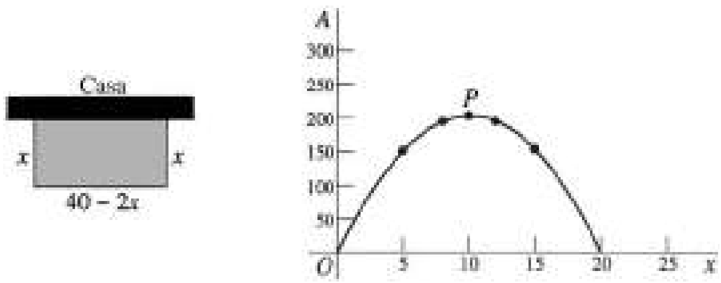


Figura 12-26

12.24 Las dimensiones de una placa rectangular de estaño son 12 por 18 pulgadas. Con ella se desea construir un cajón sin tapa cortando en sus esquinas unos cuadrados y doblando los lados. Calcule el lado de los cuadrados que se deben cortar para que el cajón que resulte sea de volumen máximo.

SOLUCIÓN

Sea x el lado del cuadrado que se ha de cortar en cada esquina. El volumen V del cajón que así resulta es $V = x(12 - 2x)(18 - 2x)$. Es fácil de ver que x debe estar comprendido entre 0 y 6 pulgadas para que se pueda realizar (consulte la figura 12-27).

x	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	6
V	0	160	224	$227\frac{1}{2}$	216	$192\frac{1}{2}$	160	80	0

A partir de la gráfica se deduce que el valor de x que corresponde al máximo valor de V está comprendido entre 2 y 2.5 pulgadas. Graficando más puntos, se puede observar que es de aproximadamente 2.4 pulgadas.

Todos los problemas de este tipo y los análogos al 12.23 se pueden resolver más fácilmente y de forma exacta, utilizando métodos del cálculo.

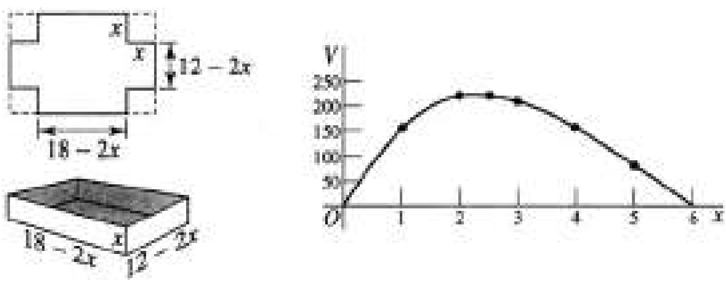


Figura 12-27

12.25 Se desea fabricar un bote cilíndrico de 200 pulgadas cúbicas. Calcule las dimensiones que debe tener para emplear la menor cantidad posible de material.

SOLUCIÓN

Sean x y y el radio y la altura, respectivamente, del cilindro.

El área de las bases superior e inferior es πx^2, y el de la superficie lateral, $2\pi xy$; por consiguiente, el área total es $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$.

El volumen del cilindro es $\pi x^2 y$, luego $\pi x^2 y = 200$ y $y = 200/\pi x^2$. Por lo tanto,

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x\left(\frac{200}{\pi x^2}\right) \qquad \text{o} \qquad S = 2\pi x^2 + \frac{400}{x}.$$

En la figura 12-28 se muestra una tabla de valores y la gráfica de S respecto a x. Se toma el valor de π de 3.14 aproximadamente.

x	1	2	3	3.2	3.5	4	4.5	5	6	7	8
S	406	225	190	189	191	200	216	237	293	365	452

A partir de la gráfica de la figura 12-28, se puede deducir que el mínimo $S = 189$ pulgadas^2 se presenta cuando $x = 3.2$ pulgadas aproximadamente; y a partir de $y = 200/\pi x^2$ se tiene $y = 6.2$ pulgadas, aproximadamente.

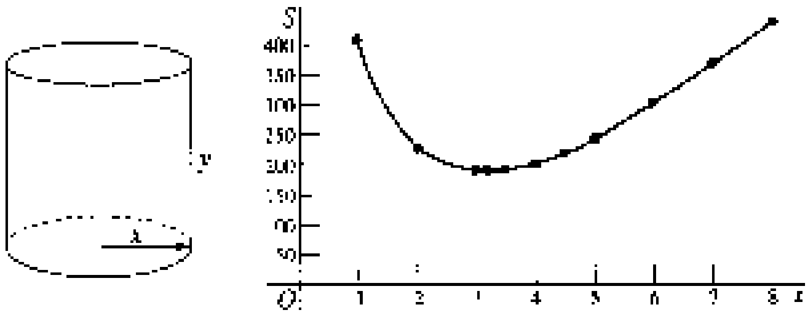


Figura 12-28

12.26 Encuentre de forma aproximada los valores de x para los cuales $x^3 + 2x^2 - 7x - 3 = 0$.

SOLUCIÓN

Considere $y = x^3 + 2x^2 - 7x - 3$. Se deben encontrar valores de x para los cuales $y = 0$.

A partir de la gráfica de $y = x^3 + 2x^2 - 7x - 3$, que se muestra en la figura 12-28 se puede deducir que existen tres valores reales de x para los cuales $y = 0$ (los valores de x donde la curva intersecta al eje x). Estos valores son $x = -3.7$, $x = -0.4$ y $x = 2.1$ aproximadamente. Se pueden obtener valores más exactos utilizando técnicas avanzadas.

12.27 La tabla siguiente representa la población (en millones de habitantes) de Estados Unidos en los años 1840, 1850, …, 1950. Represente estos datos gráficamente.

Año	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
Población (en millones)	17.1	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	150.7

SOLUCIÓN

Consulte la gráfica 12-29.

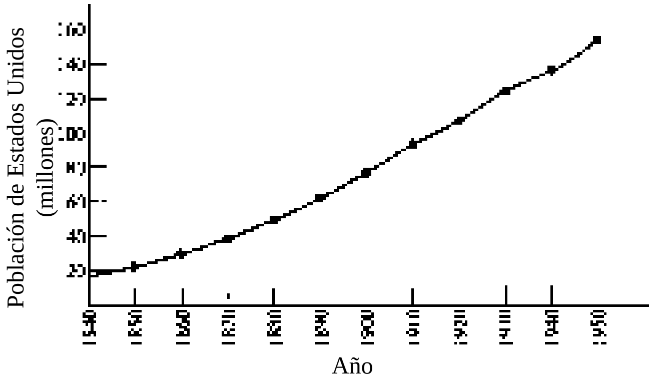


Figura 12-29

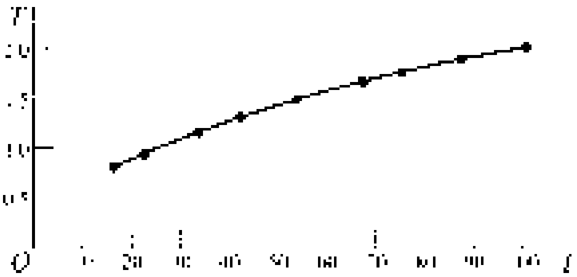


Figura 12-30

12.28 El tiempo T (en segundos) empleado por un péndulo de longitud l (en centímetros) en efectuar una oscilación completa viene dado por las siguientes observaciones obtenidas en un laboratorio de física experimental. Represente gráficamente T en función de l.

l	16.2	22.2	33.8	42.0	53.4	66.7	74.5	86.6	100.0
T	0.81	0.95	1.17	1.30	1.47	1.65	1.74	1.87	2.01

SOLUCIÓN

Los puntos están conectados por una curva pareja (figura 12-30) como normalmente se hace en ciencias e ingeniería.

Problemas propuestos

12.29 Las longitudes de los puntos de un rectángulo son x y $2x$. Exprese el área A del rectángulo en función de a) el lado x, b) el perímetro P, c) la diagonal D.

12.30 Exprese el área S de un círculo en función de a) el radio r, b) el diámetro d, c) la circunferencia C.

12.31 Exprese el área A de un triángulo isósceles en función de x y y, siendo x la longitud de los lados iguales y y la del tercer lado.

12.32 La longitud de la arista de un cubo es x. Exprese *a*) x en función del volumen V del cubo, *b*) la superficie S del cubo en función de x, *c*) el volumen V en función de la superficie S.

12.33 Dada la función $y = 5 + 3x - 2x^2$, encuentre los valores de y correspondientes a $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

12.34 Amplíe la tabla de valores del problema 12.33 hallando los valores de y correspondientes a $x = -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2$.

12.35 Establezca el dominio y el rango de cada ecuación

a) $y = -2x + 3$ *d*) $y = 5 - 2x^2$ *g*) $y = \sqrt[3]{1-2x}$
b) $y = x^2 - 5$ *e*) $y = \dfrac{2}{x+6}$ *h*) $y = \dfrac{x}{x+1}$
c) $y = x^3 - 4$ *f*) $y = \sqrt{x-5}$ *i*) $y = \dfrac{4}{x}$

12.36 ¿Para cuáles relaciones y es función de x?

a) $y = x^3 + 2$ *d*) $y = x^2 - 5$ *g*) $x = |y|$
b) $x = y^3 + 2$ *e*) $x^2 + y^2 = 5$ *h*) $y = \sqrt[3]{x+1}$
c) $x = y^2 + 4$ *f*) $y = \pm\sqrt{x-7}$ *i*) $y = \sqrt{5+x}$

12.37 Si $f(x) = 2x^2 + 6x - 1$, encuentre $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1/2)$, $f(3)$.

12.38 Si $F(u) = \dfrac{u^2 - 2u}{1+u}$, encuentre *a*) $F(1)$, *b*) $F(2)$, *c*) $F(x)$, *d*) $F(-x)$.

12.39 Si $G(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, encuentre

a) $G\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, *b*) $\dfrac{G(x+h) - G(x)}{h}$, *c*) $G(x^2 + 1)$.

12.40 Si $F(x, y) = 2x^2 + 4xy - y^2$, encuentre *a*) $F(1, 2)$, *b*) $F(-2, -3)$, *c*) $F(x + 1, y - 1)$.

12.41 Represente, en un sistema de coordenadas rectangulares, los puntos siguientes:

a) $(1, 3)$, *b*) $(-2, 1)$, *c*) $(-1/2, -2)$, *d*) $(-3, 2/3)$, *e*) $(-\sqrt{3}, 3)$.

12.42 Si $y = 3x + 2$, *a*) obtenga los valores de y correspondientes a $x = -2, -1, 0, 1, 2$ y *b*) represente los puntos (x, y) obtenidos.

12.43 Determine si la gráfica de cada relación es simétrica con respecto al eje y, al eje x o al origen.

a) $y = 2x^4 + 3$ *d*) $y = 3$ *g*) $y^2 = x + 2$
b) $y = (x - 3)^3$ *e*) $y = -5x^3$ *h*) $y = 3x - 1$
c) $y = -\sqrt{9-x}$ *f*) $y = 7x^2 + 4$ *i*) $y = 5x$

12.44 Establezca de qué forma la gráfica de la primera ecuación se relaciona con la de la segunda.

a) $y = -x^4$ y $y = x^4$ *f*) $y = |x| + 1$ y $y = |x|$
b) $y = 3x$ y $y = x$ *g*) $y = |x + 5|$ y $y = |x|$
c) $y = x^2 + 10$ y $y = x^2$ *h*) $y = -x^3$ y $y = x^3$
d) $y = (x - 1)^3$ y $y = x^3$ *i*) $y = x^2/6$ y $y = x^2$
e) $y = x^2 - 7$ y $y = x^2$ *j*) $y = (x + 8)^2$ y $y = x^2$

12.45 Represente las funciones *a*) $f(x) = 1 - 2x$, *b*) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, *c*) $f(x) = 4 - 3x - x^2$.

12.46 Represente $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

12.47 Represente *a*) $x^2 + y^2 = 16$, *b*) $x^2 + 4y^2 = 16$.

12.48 Se dispone de 120 pies de alambrada para cercar dos jardines rectangulares iguales, *A* y *B*, como se muestra en la figura 12-31. Sabiendo que no es necesario proteger los lados que limitan con la casa, determine el área máxima de los jardines que se puede cercar.

12.49 Encuentre el área del rectángulo más largo que se puede inscribir en un triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 pulgadas, respectivamente. (Consulte la figura 12-32).

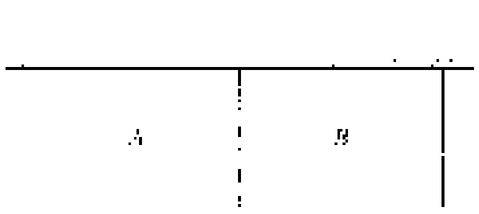


Figura 12-31

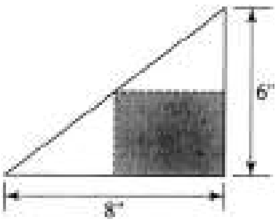


Figura 12-32

12.50 Obtenga los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 23$.

12.51 A partir de la gráfica $y = x^3 - 7x + 6$ obtenga las raíces de la ecuación $x^3 - 7x + 6 = 0$.

12.52 Demuestre que la ecuación $x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0$ sólo tiene una raíz real.

12.53 Demuestre que $x^4 - x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

12.54 El porcentaje de trabajadores agrícolas en Estados Unidos en los años 1860, 1870, …, 1950 viene dado en la tabla siguiente. Represente estos datos gráficamente.

Año	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
% de trabajadores agrícolas	58.9	53.0	49.4	42.6	37.5	31.0	27.0	21.4	18.0	12.8

12.55 El tiempo total empleado para detener un automóvil desde el momento en que el conductor se da cuenta de un peligro, se compone del *tiempo de reacción* (tiempo transcurrido desde el apercibimiento hasta que acciona el pedal del freno) y del *tiempo de frenado* (tiempo que tarda el coche en detenerse desde que se presiona el pedal correspondiente). La tabla que figura a continuación relaciona la distancia *d* (pies) que recorre hasta detenerse un automóvil que marcha a una velocidad *v* (millas por hora) en el instante en que se da cuenta del peligro. Represente gráficamente *d* en función de *v*.

Velocidad *v* (millas/hora)	20	30	40	50	60	70
Distancia de frenado *d* (en pies)	54	90	138	206	292	396

12.56 Los tiempos t que tarda un objeto en caer libremente partiendo del reposo desde distintas alturas h vienen dados en la tabla siguiente:

Tiempo t (en segundos)	1	2	3	4	5	6
Altura h (pies)	16	64	144	256	400	576

a) Represente gráficamente h en función de t.
b) Encuentre el tiempo que tardará un objeto en caer libremente, partiendo del reposo, desde una altura de 48 pies y de 300 pies.
c) Encuentre la distancia que recorre un objeto que cae libremente, partiendo del reposo, durante un tiempo de 3.6 seg.

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

12.29 $A = 2x^2, \qquad A = \dfrac{P^2}{18}, \qquad A = \dfrac{2D^2}{5}$

12.30 $A = \pi r^2, \qquad A = \dfrac{\pi d^2}{4}, \qquad A = \dfrac{C^2}{4\pi}$

12.31 $A = \dfrac{y}{2}\sqrt{x^2 - y^2/4} = \dfrac{y}{4}\sqrt{4x^2 - y^2}$

12.32 $x = \sqrt[3]{V}, \qquad S = 6x^2, \qquad V = \sqrt{\dfrac{S^3}{216}} = \dfrac{S}{36}\sqrt{6S}$

12.33

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-22	-9	0	5	6	3	-4

12.34

x	$-5/2$	$-3/2$	$-1/2$	$1/2$	$3/2$	$5/2$
y	-15	-4	3	6	5	0

12.35
a) Dominio = {todos los números reales}; rango = {todos los números reales}
b) Dominio = {todos los números reales}; rango = {todos los números reales ≥ -5}
c) Dominio = {todos los números reales}; rango = {todos los números reales}
d) Dominio = {todos los números reales}; rango = {todos los números reales ≤ 5}
e) Dominio = {todos los números reales $\neq -6$}; rango = {todos los números reales $\neq 0$}
f) Dominio = {todos los números reales ≥ 5}; rango = {todos los números reales ≥ 0}
g) Dominio = {todos los números reales}; rango = {todos los números reales}
h) Dominio = {todos los números reales $\neq -1$}; rango = {todos los números reales $\neq 1$}
i) Dominio = {todos los números reales $\neq 0$}; rango = {todos los números reales $\neq 0$}

12.36
a) Función
b) Función
c) No es una función
d) Función
e) No es una función
f) No es una función
g) No es una función
h) Función
i) Función

12.37 $f(-3) = -1, \quad f(-2) = -5, \quad f(0) = -1, \quad f(1/2) = 5/2, \quad f(3) = 35$

12.38 *a*) $-1/2$, *b*) 0, *c*) $\dfrac{x^2 - 2x}{1 + x}$, *d*) $\dfrac{x^2 + 2x}{1 - x}$

12.39 *a*) $\dfrac{-1}{2x+1}$, *b*) $\dfrac{2}{(x+1)(x+h+1)}$, *c*) $\dfrac{x^2}{x^2+2}$

12.40 *a*) 6, *b*) 23, *c*) $2x^2 + 4xy - y^2 + 6y - 3$

12.41 Consulte la figura 12-33

12.42 *a*) $-4, -1, 2, 5, 8$ *b*) Consulte la figura 12-34

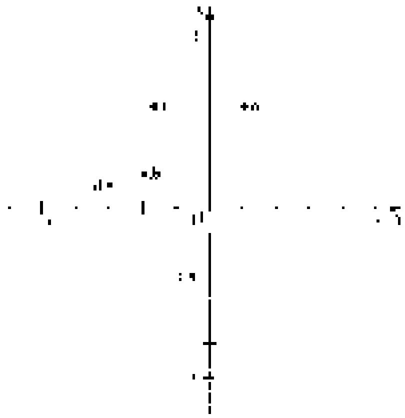


Figura 12-33

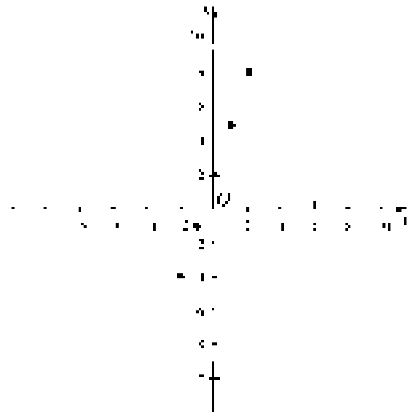


Figura 12-34

12.43
a) Eje *y*
b) Origen
c) Ninguno
d) Eje *y*
e) Origen
f) Eje *y*
g) Eje *x*
h) Ninguno
i) Origen

12.44
a) Reflejado respecto al eje *x*
b) La coordenada *y* aumenta tres veces más rápido
c) Desplazado 10 unidades hacia arriba
d) Desplazado una unidad hacia la derecha
e) Desplazado siete unidades hacia abajo
f) Desplazado una unidad hacia arriba
g) Desplazado cinco unidades hacia la izquierda
h) Reflejado respecto al eje *x*
i) *y* aumenta con una rapidez de $1/6$
j) Desplazado 8 unidades hacia la izquierda

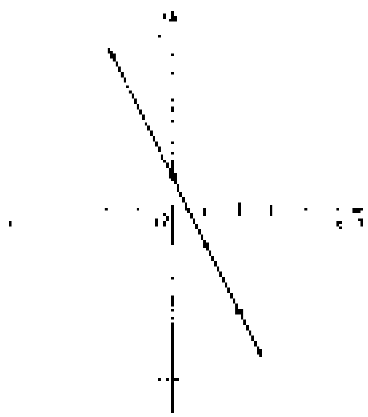


Figura 12-35

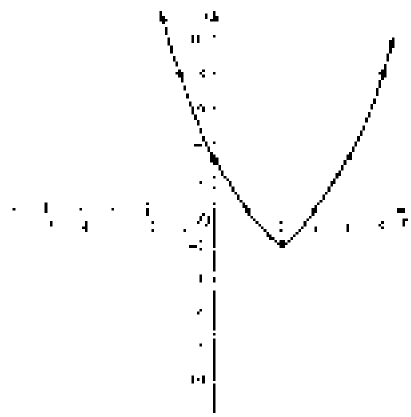


Figura 12-36

12.45 *a*) Consulte la figura 12-35. *b*) Consulte la figura 12-36. *c*) Consulte la figura 12-37.

12.46 Consulte la figura 12-38.

12.47 *a*) Consulte la figura 12-39. *b*) Consulte la figura 12-40.

12.48 1 200 pies^2

12.49 12 pulgadas^2

12.50 El máximo de $f(x)$ es 5 (en $x = 2$); el mínimo de $f(x)$ es 4(en $x = 3$).

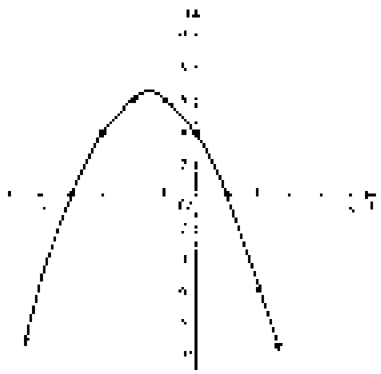


Figura 12-37

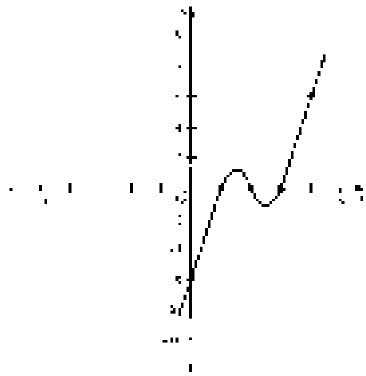


Figura 12-38

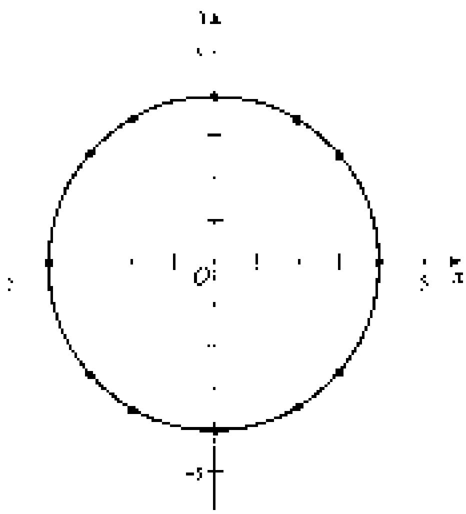


Figura 12-39

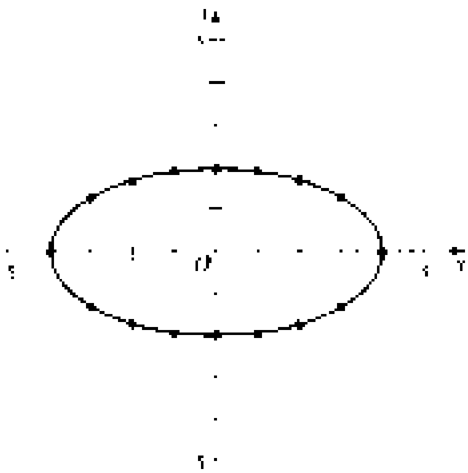


Figura 12-40

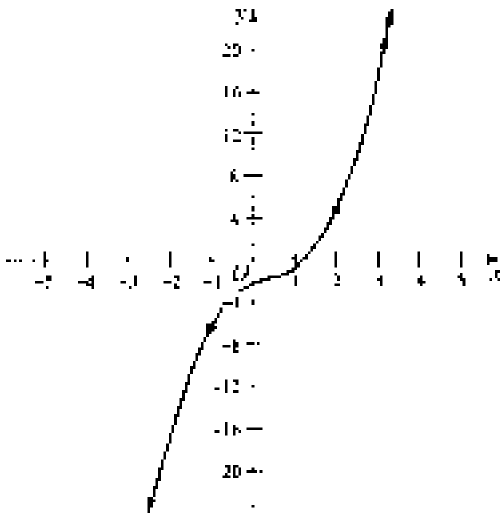


Figura 12-41

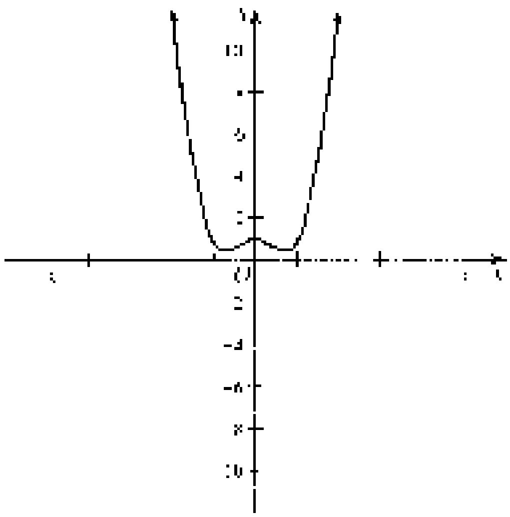


Figura 12-42

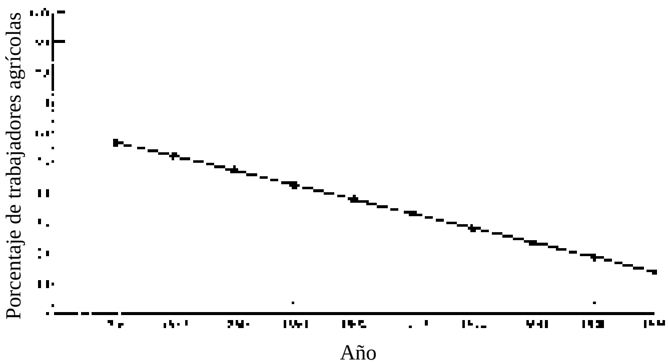


Figura 12-43

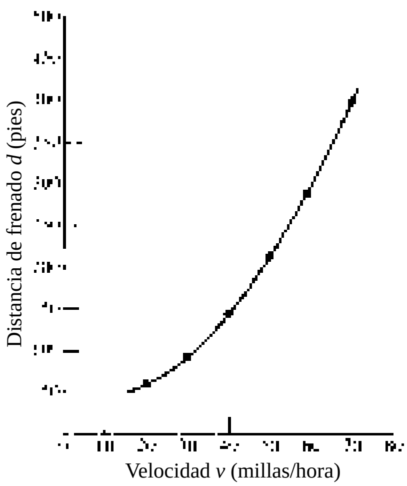


Figura 12-44

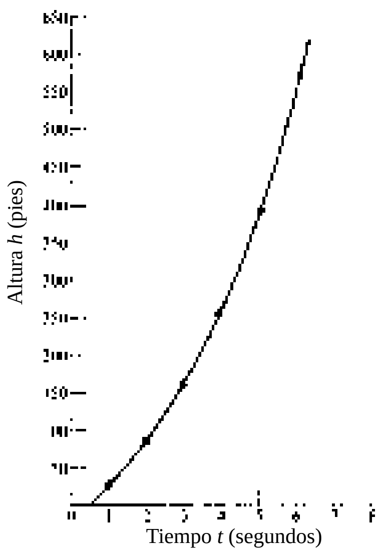


Figura 12-45

12.51 Las raíces son $x = -3$, $x = 1$, $x = 2$.

12.52 Consulte la figura 12-41.

12.53 Consulte la figura 12-42.

12.54 Consulte la figura 12-43.

12.55 Consulte la figura 12-44

12.56 *a*) Consulte la figura 12-45; *b*) 1.7 seg., 4.3 seg. *c*) 207 pies

13 ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

13.1 ECUACIONES LINEALES

Una ecuación lineal con una incógnita es de la forma $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$ y b son constantes. La solución viene dada por $x = -b/a$.

Cuando una ecuación lineal no está en la forma $ax + b = 0$, se simplifica la ecuación multiplicando cada término por el Mínimo Común Denominador (MCD) de todas las fracciones de la ecuación, quitando los paréntesis o combinando los términos semejantes. En algunas ecuaciones se pueden realizar más de uno de estos procedimientos.

EJEMPLO 13.1 Despeje x en la ecuación $x + 8 - 2(x + 1) = 3x - 6$.

$x + 8 - 2(x + 1) = 3x - 6$	Primero quite los paréntesis.
$x + 8 - 2x - 2 = 3x - 6$	Ahora combine los términos semejantes.
$-x + 6 = 3x - 6$ $-x + 6 - 3x = 3x - 6 - 3x$	Coloque los términos que contengan a la incógnita en un lado de la ecuación, restando 3x de cada lado de la misma.
$-4x + 6 = -6$ $-4x + 6 - 6 = -6 - 6$	Reste 6 de cada lado de la ecuación para obtener el término con la incógnita de un solo lado de la ecuación.
$-4x = -12$ $\dfrac{-4x}{-4} = \dfrac{-12}{-4}$	Por último, divida cada lado de la ecuación por el coeficiente de la incógnita, el cual es -4.
$x = 3$	A continuación verifique esta respuesta sustituyendo en la ecuación original.

Compruebe:

$3 + 8 - 2(3 + 1) \,?\, 3(3) - 6$ $11 - 2(4) \,?\, 9 - 6$ $11 - 8 \,?\, 3$	El signo de interrogación indica que no se sabe con seguridad si las dos cantidades son iguales.
$3 = 3$	La solución se comprueba.

13.2 ECUACIONES CON VARIABLES

La mayoría de las ecuaciones con variables que se presentan son fórmulas. A menudo, se desea utilizar una fórmula para determinar un valor aparte del estándar. Para hacer lo anterior, se consideran todas las variables excepto la de interés como constantes y se despeja la variable de interés de la ecuación.

EJEMPLO 13.2 Despeje $p = 2(l + w)$ para l.

$p = 2(l + w)$	Primero quite los paréntesis.
$p = 2l + 2w$	Reste $2w$ de cada lado de la ecuación.
$p - 2w = 2l$	Divida entre 2, el coeficiente de l.
$(p - 2w)/2 = l$	Reescriba la ecuación.
$l = (p - 2w)/2$	Ahora se cuenta con una fórmula que puede utilizarse para determinar l.

13.3 PROBLEMAS CON ENUNCIADO

Para resolver problemas con enunciado, el primer paso consiste en decidir lo que se va a buscar. El siguiente paso es traducir las condiciones especificadas en el problema en una ecuación o establecer una fórmula que exprese las condiciones del problema. La solución de la ecuación es el siguiente paso.

EJEMPLO 13.3 Si el perímetro de un rectángulo es de 68 metros y su longitud es 14 metros más que su ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Sea w = número de metros de ancho y $w + 14$ = número de metros de largo.

$$\begin{aligned} 2[(w + 14) + w] &= 68 \\ 2w + 28 + 2w &= 68 \\ 4w + 28 &= 68 \\ 4w &= 40 \\ w &= 10 \\ w + 14 &= 24 \end{aligned}$$

El rectángulo tiene un largo de 24 metros y un ancho de 10 metros.

EJEMPLO 13.4 La suma de dos números es -4 y su diferencia 6. ¿Cuáles son los números?

Sea n = el número más pequeño y $n + 6$ = el número más grande.

$$\begin{aligned} n + (n + 6) &= -4 \\ n + n + 6 &= -4 \\ 2n + 6 &= -4 \\ 2n &= -10 \\ n &= -5 \\ n + 6 &= 1 \end{aligned}$$

Los dos números son -5 y 1.

EJEMPLO 13.5 Si una bomba puede llenar una alberca en 16 horas y dos pueden llenarla en 6 horas, ¿qué tan rápido podrá la segunda bomba llenar la alberca?

Sea h = el número de horas que le lleva a la segunda bomba llenar la alberca.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} + \frac{1}{16} &= \frac{1}{6} \\ 48h\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{16}\right) &= 48h\left(\frac{1}{6}\right) \\ 48 + 3h &= 8h \\ 48 &= 5h \\ 9.6 &= h \end{aligned}$$

A la segunda bomba le toma 9.6 horas (o 9 horas 36 minutos) llenar la alberca.

EJEMPLO 13.6 ¿Cuántos litros de alcohol puro debe agregarse a 15 litros de una solución con 60% de alcohol para obtener 80% de solución alcohólica?

Sea $n =$ el número de litros de alcohol puro a agregarse.

$n + 0.60(15) = 0.80(n + 15)$ (La suma de la cantidad de alcohol en cada cantidad es igual a la cantidad de alcohol en la mezcla).

$$n + 9 = 0.8n + 12$$
$$0.2n = 3$$
$$n = 15$$

Se deben agregar quince litros de alcohol puro.

Problemas resueltos

13.1 Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $x + 1 = 5$, $x = 5 - 1$, $x = 4$.
Comprobación: Coloque $x = 4$ en la ecuación original y obtenga $4 + 1 ? 5$, $5 = 5$.

b) $3x - 7 = 14$, $3x = 14 + 7$, $3x = 21$, $x = 7$.
Comprobación: $3(7) \ -7 ? 14$, $14 = 14$.

c) $3x + 2 = 6x - 4$, $3x - 6x = -4 - 2$, $-3x = -6$, $x = 2$.

d) $x + 3(x - 2) = 2x - 4$, $x + 3x - 6 = 2x - 4$, $4x - 2x = 6 - 4$, $2x = 2$, $x = 1$.

e) $3x - 2 = 7 - 2x$, $3x + 2x = 7 + 2$, $5x = 9$, $x = 9/5$.

f) $2(t + 3) = 5(t - 1) - 7(t - 3)$, $2t + 6 = 5t - 5 - 7t + 21$, $4t = 10$, $t = 10/4 = 5/2$.

g) $3x + 4(x - 2) = x - 5 + 3(2x - 1)$, $3x + 4x - 8 = x - 5 + 6x - 3$, $7x - 8 = 7x - 8$.
Ésta es una identidad y es válida para todos los valores de x.

h) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{2x+4}{5}$, $5(x - 3) = 2(2x + 4)$, $5x - 15 = 4x + 8$, $x = 23$.

i) $3 + 2[y - (2y + 2)] = 2[y + (3y - 1)]$, $3 + 2[y - 2y - 2] = 2[y + 3y - 1]$,
$3 + 2y - 4y - 4 = 2y + 6y - 2$, $-2y - 1 = 8y - 2$, $-10y = -1$, $y = 1/10$.

j) $(s + 3)^2 = (s - 2)^2 - 5$, $s^2 + 6s + 9 = s^2 - 4s + 4 - 5$, $6s + 4s = -9 - 1$, $s = -1$.

k) $\dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{x-4}{x+4}$, $(x - 2)(x + 4) = (x - 4)(x + 2)$, $x^2 + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8$, $4x = 0$, $x = 0$.

Comprobación: $\dfrac{0-2}{0+2} ? \dfrac{0-4}{0+4}$, $\quad -1 = -1$.

l) $\dfrac{3x+1}{x+2} = \dfrac{3x-2}{x+1}$, $(x + 1)(3x + 1) = (x + 2)(3x - 2)$, $3x^2 + 4x + 1 = 3x^2 + 4x - 4$ o $1 = -4$.
No existe valor de x que satisfaga esta ecuación.

m) $\dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{2x} = 6$. Multiplicando por $2x$, $5(2) + 5 = 12x$, $12x = 15$, $x = 5/4$.

n) $\dfrac{x+3}{2x} + \dfrac{5}{x-1} = \dfrac{1}{2}$. Multiplicando por $2x(x - 1)$ el MCD de las fracciones,

$$(x + 3)(x - 1) + 5(2x) = x(x - 1), \quad x^2 + 2x - 3 + 10x = x^2 - x, \quad 13x = 3, \quad x = 3/13.$$

o) $\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{4}{x+3} = \dfrac{16}{x^2-9}$. Multiplicando por $(x-3)(x+3)$ o x^2-9,

$2(x+3) - 4(x-3) = 16, \quad 2x + 6 - 4x + 12 = 16, \quad -2x = -2, \quad x = 1$:

p) $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+3} = \dfrac{1}{y+2} - \dfrac{1}{y+5}, \quad \dfrac{(y+3)-y}{y(y+3)} = \dfrac{(y+5)-(y+2)}{(y+2)(y+5)}, \quad \dfrac{3}{y(y+3)} = \dfrac{3}{(y+2)(y+5)}$,

$(y+2)(y+5) = y(y+3), \quad y^2 + 7y + 10 = y^2 + 3y, \quad 4y = -10, y = -5/2$:

q) $\dfrac{3}{x^2-4x} - \dfrac{2}{2x^2-5x-12} = \dfrac{9}{2x^2+3x}$ o $\dfrac{3}{x(x-4)} - \dfrac{2}{(2x+3)(x-4)} = \dfrac{9}{x(2x+3)}$:

Multiplicando por $x(x-4)(2x+3)$, el MCD de las fracciones

$$3(2x+3) - 2x = 9(x-4), \quad 6x + 9 - 2x = 9x - 36, \quad 45 = 5x, \quad x = 9.$$

13.2 Despeje x.

a) $2x - 4p = 3x + 2p$, $2x - 3x = 2p + 4p$, $-x = 6p$, $x = -6p$.

b) $ax + a = bx + b$, $ax - bx = b - a$, $x(a-b) = b - a$, $x = \dfrac{b-a}{a-b} = -1$ siempre y cuando $a \neq b$.

Si $a = b$ la ecuación es una identidad y es válida para todos los valores de x.

c) $2cx + 4d = 3ax - 4b$, $2cx - 3ax = -4b - 4d$, $x = \dfrac{-4b-4d}{2c-3a} = \dfrac{4b+4d}{3a-2c}$ siempre y cuando $3a \neq 2c$.

Si $3a = 2c$ no existe solución al menos que $d = -b$, en cuyo caso la ecuación original es una identidad.

d) $\dfrac{3x+a}{b} = \dfrac{4x+b}{a}$, $3ax + a^2 = 4bx + b^2$, $3ax - 4bx = b^2 - a^2$, $x = \dfrac{b^2-a^2}{3a-4b}$ (siempre y cuando $3a \neq 4b$).

13.3 Exprese cada enunciado en términos de símbolos algebraicos.

a) El doble de un número más uno.
Sea x = el número. Entonces $2x$ = doble del número y el doble del número más uno es $= 2x + 1$.

b) El quíntuplo de un número menos tres.
Sea x = el número. El quíntuplo del número menos tres es $= 5x - 3$.

c) Dos números cuya suma es 100.
Si x = uno de los números, entonces $100 - x$ = al otro número.

d) Tres enteros consecutivos (por ejemplo, 5, 6, 7).
Si x es el menor de los enteros, entonces $(x + 1)$ y $(x + 2)$ serán los otros dos.

e) Dos números cuya diferencia sea 10.
Sea x = el número más pequeño; entonces $(x + 10)$ = número mayor.

f) El exceso de 100 sobre el triple de un número.
Sea x = al número dado. El exceso de 100 sobre $3x$ es $(100 - 3x)$.

g) Un número impar.
Sea x = un número cualquiera. Entonces $2x$ es siempre un número par, y $(2x + 1)$ es un entero impar.

h) Cuatro enteros impares consecutivos (por ejemplo, 1, 3, 5 ,7; 17, 19, 21, 23).
La diferencia entre dos enteros impares consecutivos es 2.
Sea $2x + 1$ = el entero impar más pequeño. Los números pedidos serán $2x + 1$, $2x + 3$, $2x + 5$, $2x + 7$.

i) El número de centavos en x número de dólares.
Como 1 dólar = 100 centavos, x dólares = $100x$ centavos.

j) La edad de Juan es el doble que la de Leticia y la de ésta es el triple que la de Fernando. Exprese cada una de estas edades en función de una de ellas.

Sea x = edad de Fernando. La de Leticia será $3x$ y la de Juan $2(3x) = 6x$.

Otro método: Sea y = edad de Juan; la de Leticia será $\frac{1}{2}y$, y la de Fernando, $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}y) = \frac{1}{6}y$.

k) Los tres ángulos A, B y C de un triángulo sabiendo que A es igual al doble de C más 10º.
Sea $C = x$º; entonces $A = (2x + 10)$º. Como $A + B + C = 180$º, $B = 180º - (A + C) = (170 - 3x)$º.

l) El tiempo invertido por un móvil en recorrer una distancia de x millas a una velocidad de 20 millas/hr.
Distancia = velocidad × tiempo. Por lo tanto,

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{x \text{ millas}}{20 \text{ millas/h}} = \frac{x}{20} \text{ h.}$$

m) El perímetro y el área de un rectángulo, uno de cuyos lados es 4 pies de largo que el otro.
Sea x = longitud del lado menor, entonces $(2x + 4)$ pies = longitud del lado mayor. El perímetro = $2(x) + 2(2x + 4) = (6x + 8)$ pies, y el área = $x(2x + 4)$ pies2

n) La fracción cuyo denominador es igual a 4 veces del denominador menos tres unidades.
Sea x = denominador; el numerador será = $4x - 3$. La fracción es $(4x - 3)/x$.

o) El número de cuartos de alcohol de un recipiente que contiene x galones de una mezcla al 40% de alcohol en volumen.
En x galones de mezcla habrá $0.40x$ galones de alcohol o $4(0.40x) = 1.6x$ cuartos de alcohol.

13.4 La suma de dos números es 21 y un número es dos veces el otro. Encuentre los números.

SOLUCIÓN

Sean x y $2x$ los números pedidos. En estas condiciones, $x + 2x = 21$, o sea $x = 7$; por lo tanto, los números pedidos son $x = 7$ y $2x = 14$.

Comprobación: $7 + 14 = 21$ y $14 = 2(7)$.

13.5 Encuentre un número sabiendo que si se multiplica por cuatro y se le resta diez se obtiene 14.

SOLUCIÓN

Sea x = el número buscado. Por lo tanto, $4x - 10 = 14$, $4x = 24$ y $x = 6$.

Comprobación: Cuatro veces 6 menos diez es $4(6) - 10 = 14$.

13.6 La suma de tres enteros consecutivos es 24. Encuentre los enteros.

SOLUCIÓN

Sean los tres números consecutivos x, $x + 1$, $x + 2$. Por lo tanto, $x + (x + 1) + (x + 2) = 24$ o $x = 7$; por lo tanto los números son 7, 8 y 9.

13.7 Encuentre dos números sabiendo que su suma es 37 y que si se divide el mayor entre el menor, el cociente vale 3 y el residuo 5.

SOLUCIÓN

Sea x = número menor, $37 - x$ = el número mayor.

Se tendrá $$\frac{\text{número mayor}}{\text{número menor}} = 3 + \frac{5}{\text{número menor}} \quad \text{o} \quad \frac{37 - x}{x} = 3 + \frac{5}{x}.$$

Despejando, $37 - x = 3x + 5$, $4x = 32$, $x = 8$. Los números buscados son 8 y 29.

13.8 La edad de una persona es 41 años y la de su hijo es 9. Encuentre al cabo de cuántos años la edad del padre triplicará la del hijo.

SOLUCIÓN

Sea x = el número de años buscado.

La edad del padre después de x años = 3(edad del hijo después de x años)

$41 + x = 3(9 + x)$, por lo tanto, $x = 7$ años

13.9 Hace 10 años, la edad de Carlos era cuatro veces mayor que la de Javier y, hoy en día, es solamente del doble. Encuentre las edades actuales de ambos.

SOLUCIÓN

Sea x = la edad de Javier; será $2x$ = edad actual de Carlos

Edad de Carlos hace diez años = 4(edad de Javier hace diez años)

$2x - 10 = 4(x - 10)$, por lo tanto $x = 15$ años

Luego, la edad actual de Javier es $x = 15$ años y la edad actual de Carlos es $2x = 30$ años.

Comprobación: Hace diez años Javier tenía 5 y Carlos 20, es decir, la edad de Carlos era cuatro veces mayor que la de Javier.

13.10 Pablo tiene 50 monedas de 5 y 10 centavos cuya suma es de \$3.50. ¿Cuántas monedas de 5 centavos tiene?

SOLUCIÓN

Sea x = número de monedas de 5 centavos; por lo tanto, $50 - x$ = número de monedas de 10 centavos.

cantidad de monedas de 5 centavos + cantidad de monedas de 10 centavos = 350 centavos.

$5x$ centavos + $10(50 - x)$ centavos = 350 centavos de los cuales $x = 30$ monedas de 5 centavos.

13.11 En una bolsa hay monedas de 5, 10 y 25 centavos que suman \$1.85. Hay dos veces más monedas de 10 centavos que monedas de 25 centavos y el número de monedas de 5 centavos es dos veces menor que el doble del número de monedas de 10 centavos. Determine el número de monedas de cada tipo.

SOLUCIÓN

Sea x = número de monedas de 25 centavos; entonces $2x$ = número de monedas de 10 centavos y $2(2x) - 2 = 4x - 2$ = número de monedas de 5 centavos.

cantidad de monedas de 25 centavos + cantidad de monedas de 5 centavos = 185 centavos.

$25(x)$ centavos + $10(2x)$ centavos + $5(4x - 2)$ centavos = 185 centavos; por lo tanto $x = 3$.

De aquí que $x = 3$ monedas de 25 centavos, $2x = 6$ monedas de 10 centavos y $4x - 2 = 10$ monedas de 5 centavos.

Comprobación: 3 monedas de 25 centavos = 75 centavos, 6 monedas de 10 centavos = 60 centavos, 10 monedas de 5 centavos = 50 centavos y su suma es = \$ 1.85.

13.12 El dígito de las decenas de un cierto número de dos cifras excede al de unidades en 4 y es 1 menos que dos veces la cifra de las unidades. Encuentre el número de dos cifras.

SOLUCIÓN

Sea x = cifras de las unidades; por ende, $x + 4$ = dígito de las decenas.

Puesto que la cifra de las decenas = 2 (cifra de las unidades) – 1, se tiene que $x + 4 = 2(x) - 1$ o $x = 5$.

Por lo tanto, $x = 5$, $x + 4 = 9$, y el número pedido es 95.

13.13 Encuentre el número de dos cifras sabiendo que la suma de éstas es 12 y que si se invierten el número que resulta es igual a 4/7 del primitivo.

SOLUCIÓN

Sea x = cifra de las unidades; $12 - x$ = cifra de las decenas.

Número original $= 10(12 - x) + x$; invirtiendo el orden de las cifras resulta el número $= 10x + (12 - x)$. Ahora bien, como

Número nuevo = 4/7 (número original), se tendrá $10x + (12 - x) = 4/7\,[10(12 - x) + x]$

Despejando x de esta ecuación resulta $x = 4$, $12 - x = 8$ y el número pedido es 84.

13.14 Una persona posee una inversión de \$4 000 de los cuales cierta parte está a 5% y el resto a 3% de interés. El ingreso total por año de estas inversiones es de \$168. ¿Cuánto habrá invertido esta persona en cada tasa de interés?

SOLUCIÓN

Sea x = cantidad invertida a 5%; \$4 000 – x = cantidad invertida a 3%.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Interés de la inversión al 5\%} & + & \text{interés de la inversión al 3\%} & = & \$168. \\ 0.05x & + & 0.03\,(4\,000 - x) & = & 168 \end{array}$$

Despejando, x = \$2 400 a 5%, \$4 000 – x = \$1 600 a 3%.

13.15 ¿Qué cantidad deberá recibir un empleado como sueldo sabiendo que deberá recibir \$500 después de habérsele deducido 30% en impuestos?

SOLUCIÓN

Sea x = sueldo

Por lo tanto sueldo − impuestos = \$500

o $x - 0.30x = \$500$ y $x = \$714.29$.

13.16 ¿A qué precio deberá asignarle un vendedor a un sofá que cuesta \$120 para que pueda ofrecerse con un descuento de 20% sobre el precio señalado y todavía obtener una ganancia de 25% sobre el precio de venta?

SOLUCIÓN

Sea x = precio marcado del artículo; el precio de venta $= x - 0.20x = 0.80x$.

Como la ganancia = 25% del precio de venta, el costo será = 75% del precio de venta. Por lo tanto, Sea x = precio marcado; por lo tanto, el precio de venta $= x - 0.20x = 0.80x$.

Puesto que la ganancia = 25% del precio de venta, el costo = 75% del precio de venta. Por ende, Costo = 0.75 (precio de venta)

$$\$120 = 0.75\,(0.8x), \qquad \$120 = 0.6x \qquad \text{y} \qquad x = \$200.$$

13.17 Cuando cada uno de los lados de un cuadrado aumenta en 4 pies, el área aumenta en 64 pies cuadrados. Determine las dimensiones del cuadrado original.

SOLUCIÓN

Sea x = lado del cuadrado; $x + 4$ = lado del nuevo cuadrado

$$\begin{aligned} \text{Área nueva} &= \text{área primitiva} + 64 \\ (x + 4)^2 &= x^2 + 64 \qquad \text{de donde } x = 6 \text{ pies.} \end{aligned}$$

13.18 Un cateto de un triángulo rectángulo mide 20 pulgadas y la hipotenusa es 10 pulgadas mayor que el otro cateto. Encuentre las longitudes de los lados desconocidos.

SOLUCIÓN

Sea x = longitud del cateto desconocido; $x + 10$ = longitud de la hipotenusa.

$$\text{Cuadrado de la hipotenusa} = \text{suma de los cuadrados de los catetos}$$
$$(x + 10)^2 = x^2 + (20)^2 \qquad \text{de donde } x = 15 \text{ pulgadas}$$

Los lados pedidos son $x = 15$ pulgadas y $x + 10 = 25$ pulgadas.

13.19 La temperatura en grados Fahrenheit = 9/5(temperatura en grados Celsius) + 32. ¿A qué temperatura ambas escalas tienen el mismo valor?

SOLUCIÓN

Sea x = temperatura buscada = temperatura Fahrenheit = temperatura Celsius.
Por lo tanto $x = 9/5x + 32$ o $x = -40°$. Por ende, -40 °F = -40 °C.

13.20 Encuentre el número de libras (lb) de dulces que se deben tomar de dos ingredientes cuyos precios son 45 y 85 centavos/libra, respectivamente, para obtener un producto de 40 libras a un precio de 60 centavos/libra.

SOLUCIÓN

Sea x = masa del dulce de 45 centavos; $40 - x$ = masa del dulce de 85 centavos.

$$\text{Valor del dulce de 45 centavos/libra} + \text{valor del dulce de 85 centavos/libra} = \text{valor de la mezcla}$$
o
$$x(45 \text{ centavos}) + (40 - x)(85 \text{ centavos}) = 40(60 \text{ centavos}).$$

Despejando, $x = 25$ libras del dulce de 45 centavos/libra; $40 - x = 15$ libras del dulce de 85 centavos/libra.

13.21 Un tanque contiene 20 litros de una mezcla de alcohol y agua a 40% de alcohol en volumen. ¿Qué porción de la mezcla se debe quitar y reemplazar por un volumen igual de agua a fin de que la solución resultante sea de 25% de alcohol en volumen?

SOLUCIÓN

Sea x = volumen que se extrae de la solución a 40%.

$$\text{Volumen de alcohol en la solución final} = \text{volumen de alcohol en 20 galones de solución a 25\%.}$$
Es decir,
$$0.40(20 - x) = 0.25(20) \qquad \text{de donde, } x = 7.5 \text{ galones}$$

13.22 ¿Qué masa de agua se debe evaporar a partir de 40 libras de una solución salina a 20% para obtener una mezcla a 50%? Los porcentajes están expresados en masa.

SOLUCIÓN

Sea x = masa de agua que se debe evaporar

$$\text{Masa de sal en la solución a 20\%} = \text{masa de sal en la solución a 50\%}$$
Es decir,
$$0.20(40 \text{ libras}) = 0.50(40 \text{ libras} - x) \qquad \text{de donde } x = 24 \text{ libras.}$$

13.23 ¿Cuántos cuartos de una solución de alcohol a 60% se deben adicionar a 40 cuartos de una solución de alcohol a 20% con el fin de obtener una mezcla a 30% de alcohol? Todos los porcentajes están expresados en volumen.

SOLUCIÓN

Sea x = número de cuartos de alcohol a 60% que se adicionarán.

$$\text{Alcohol en la solución a 60\%} + \text{alcohol en la solución a 20\%} = \text{alcohol en la solución a 30\%}$$

Es decir, $0.60x + 0.20(40) = 0.30(x + 40)$ de donde $x = 13\frac{1}{3}$ cuartos.

13.24 Dos minerales de manganeso (Mn) contienen 40 y 25% de dicho metal, respectivamente. Calcule las toneladas de cada uno de ellos que se deben mezclar para obtener 100 toneladas de mineral con una riqueza de 35%. Todos los porcentajes son en peso.

SOLUCIÓN

Sea x = peso necesario de mineral de 40%; $100 - x$ = peso necesario de mineral de 25%.

$$\begin{aligned} \text{Mn de 40\%} + \text{Mn de 25\%} &= \text{Mn total en las 100 toneladas} \\ 0.40x + 0.25(100 - x) &= 0.35\ (100) \end{aligned}$$

De esta ecuación resulta $x = 66\frac{2}{3}$ toneladas de mineral de 40% y $100 - x = 33\frac{1}{3}$ toneladas del mineral de 25%.

13.25 Dos automóviles A y B, cuyas velocidades medias son de 30 y 40 millas/h, respectivamente, distan 280 millas. Encuentre a qué hora se encontrarán sabiendo que a las 3:00 p.m. empiezan a moverse el uno hacia el otro.

SOLUCIÓN

Sea t = tiempo, en horas, que tardan en encontrarse. Distancia = velocidad × tiempo.

$$\begin{aligned} \text{Distancia recorrida por } A + \text{distancia recorrida por } B &= 280 \text{ millas} \\ 30t + 40t &= 280 \quad \text{de donde } t = 4 \text{ h} \end{aligned}$$

Se encuentran a las 7:00 p.m. a una distancia $30t = 120$ millas de la posición inicial de A, o bien a una distancia de $40t = 160$ millas de la correspondiente a B.

13.26 Dos automóviles, A y B parten del mismo punto y recorren un trayecto rectilíneo con velocidades medias de 30 y 50 millas/hr. respectivamente. Sabiendo que B parte 3 hrs. después que A, encuentre *a*) el tiempo y *b*) la distancia recorrida, hasta que se encuentran.

SOLUCIÓN

Sean t y $(t - 3)$ el tiempo, en horas, que A y B viajan hasta que se encuentran.

a) Distancia en millas = velocidad media (millas/h) × tiempo (h). Cuando se encuentren,

$$\begin{aligned} \text{Distancia recorrida por } A &= \text{distancia recorrida por } B \\ 30t &= 50(t - 3) \qquad \text{a partir de lo cual } t = 7\tfrac{1}{2} \text{ horas.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, A viaja durante $t = 7\frac{1}{2}$ horas y B viaja $(t - 3) = 4\frac{1}{2}$ horas.

b) Distancia $= 30t = 30(7\frac{1}{2}) = 225$ millas, o bien distancia $= 50(t - 3) = 50(4\frac{1}{2}) = 225$ millas.

13.27 Dos automóviles A y B recorren una pista circular de una milla de longitud en 6 y 10 minutos, respectivamente. Suponiendo que parten en el mismo instante y lugar, encuentre al cabo de cuánto tiempo se encontrarán si se mueven alrededor de la pista *a*) en la misma dirección, *b*) en direcciones opuestas.

SOLUCIÓN

Sea t = el tiempo pedido en minutos.

a) Se encontrarán cuando A recorra 1 milla más que B. Las velocidades de A y B son 1/6 y 1/10 millas/minuto, respectivamente. Por tanto, de la expresión distancia = velocidad × tiempo, resulta:

$$\text{Distancia recorrida por } A - \text{distancia recorrida por } B = 1 \text{ milla}$$

$$\frac{1}{6}t \quad - \quad \frac{1}{10}t \quad = 1 \quad \text{de donde} \quad t = 15 \text{ minutos.}$$

b) Distancia recorrida por A + distancia recorrida por $B = 1$ milla

$$\frac{1}{6}t \quad + \quad \frac{1}{10}t \quad = 1 \quad \text{de donde} \quad t = 15/4 \text{ minutos.}$$

13.28 La velocidad en aguas de reposo de un bote es de 25 millas/hora. Sabiendo que cuando avanza contra corriente recorre 4.2 millas en el mismo tiempo que recorre a favor de ella 5.8 millas, calcule la velocidad de la corriente.

SOLUCIÓN

Sea v = velocidad de la corriente. Tiempo = distancia/velocidad

Tiempo contra la corriente = tiempo a favor de la corriente

o
$$\frac{4.2 \text{ mi}}{(25 - v) \text{ mi/hr}} = \frac{5.8 \text{ mi}}{(25 + v) \text{ mi/hr}} \quad \text{y} \quad v = 4 \text{ mi/hr.}$$

13.29 Un obrero A puede realizar un trabajo en 3 días y otro B lo puede hacer en 6 días. Encuentre el tiempo que tardarán en realizar dicho trabajo los dos juntos.

SOLUCIÓN

Sea n = número de días que tardan trabajando A y B.

En 1 día, A realiza $1/3$ del trabajo y B hace $1/6$ del mismo. Trabajando juntos realizarán $1/n$ en 1 día.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{n} \qquad \text{de donde } n = 2 \text{ días.}$$

Otro método. En n días, A y B realizan el trabajo completo

$$n\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 1 \text{ trabajo completo.} \qquad \text{Despejando, } n = 2 \text{ días.}$$

13.30 Tres grifos llenan un depósito en 20, 30 y 60 minutos, respectivamente. Calcule el tiempo que tarda en llenarse dicho depósito cuando se utilizan los tres grifos simultáneamente.

SOLUCIÓN

Sea t = tiempo necesario en minutos.

En 1 minuto, los tres grifos juntos llenarán $(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60})$ del depósito. Por lo tanto, en t minutos llenarán

$$t\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60}\right) = 1 \text{ depósito completo.} \qquad \text{Despejando, } t = 10 \text{ minutos.}$$

13.31 Actuando juntos los operarios A y B realizan un trabajo en 6 días. El operario A trabaja dos veces más de prisa que B. Calcule el número de días que tardarán en realizar dicho trabajo trabajando cada uno por separado.

SOLUCIÓN

Sea n, $2n$ = número de días que necesitan A y B, respectivamente, trabajando por separado.

En 1 días, A realiza $1/n$ del trabajo y B hace $1/2n$ del mismo. Como en 6 días completan el trabajo, se tendrá que:

$$6\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right) = \text{trabajo completo.} \qquad \text{Despejando, } n = 9 \text{ días, } 2n = 18 \text{ días.}$$

13.32 La velocidad a que trabaja A es tres veces mayor que la de B. Los operarios A y B empiezan a trabajar juntos durante 4 horas, al cabo de las cuales A se retira y continúa solo B, que termina el trabajo en 2 horas. Encuentre el tiempo que tardará B en realizar todo el trabajo si actuara él solo.

SOLUCIÓN

Sean t, $3t$ = tiempos, en horas, que tardarían A y B, respectivamente, trabajando solos.

En 1 hora, A realiza $1/t$ del trabajo y B hace $1/3t$ del mismo. Por lo tanto,

$$4\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{3t}\right)+2\left(\frac{1}{t}\right)=1 \text{ trabajo completo. Despejando, } 3t=22 \text{ horas.}$$

13.33 Un empleado cobra \$18 diarios cuando acude al trabajo y cuando no lo hace sufre una penalización de \$3. Sabiendo que al cabo de 40 días la cantidad que percibió fue de \$531, ¿cuántos días faltó al trabajo?

SOLUCIÓN

Sea x = número de días que faltó al trabajo; $40 - x$ = número de días que trabajó.

$$\begin{array}{lccl} & \text{Cantidad ganada} - \text{cantidad descontada} & = \$531 & \\ \text{o} & \$18(40-x) \quad - \quad 3x & = \$531 & \text{y} \quad x = 9 \text{ días faltó al trabajo.}\end{array}$$

Problemas propuestos

13.34 Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $3x - 2 = 7$

b) $y + 3(y - 4) = 4$

c) $4x - 3 = 5 - 2x$

d) $x - 3 - 2(6 - 2x) = 2(2x - 5)$

e) $\dfrac{2t-9}{3}=\dfrac{3t+4}{2}$

f) $\dfrac{2x+3}{2x-4}=\dfrac{x-1}{x+1}$

g) $(x-3)^2+(x+1)^2=(x-2)^2+(x+3)^2$

h) $(2x+1)^2=(x-1)^2+3x(x+2)$

i) $\dfrac{3}{z}-\dfrac{4}{5z}=\dfrac{1}{10}$

j) $\dfrac{2x+1}{x}+\dfrac{x-4}{x+1}=3$

k) $\dfrac{5}{y-1}-\dfrac{5}{y+1}=\dfrac{2}{y-2}-\dfrac{2}{y+3}$

l) $\dfrac{7}{x^2-4}+\dfrac{2}{x^2-3x+2}=\dfrac{4}{x^2+x-2}$

13.35 Despeje la incógnita que se indica.

a) $2(x-p)=3(6p-x) : x$

b) $2by-2a=ay-4b : y$

c) $\dfrac{2x-a}{b}=\dfrac{2x-b}{a} : x$

d) $\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{x-c}{x-d} : x$

e) $\dfrac{1}{ay}+\dfrac{1}{by}=\dfrac{1}{c} : y$

13.36 Represente las expresiones siguientes por medio de símbolos algebraicos.

a) Cinco veces un cierto número más dos.
b) Dos veces un cierto número menos seis.
c) Dos números cuya diferencia sea 25.
d) Los cuadrados de tres enteros consecutivos.
e) El exceso del quíntuplo de un cierto número sobre 40.
f) El cuadrado de un entero impar cualquiera.
g) El exceso del cuadrado de un número sobre el doble del mismo.

h) El número de pintas de x galones
i) La diferencia entre los cuadrados de dos enteros pares consecutivos.
j) Carlos es seis años mayor que Javier, y éste tiene la mitad de años que Pablo. Exprese sus edades en función de una sola de ellas.
k) Los tres ángulos A, B y C de un triángulo ABC si el ángulo A excede en 20 al doble del ángulo B.
l) El perímetro y el área de un rectángulo si uno de los lados es 3 pies más pequeño que el triple del otro.
m) La fracción cuyo denominador es igual al cuadrado del numerador más cuatro.
n) La cantidad de sal en un depósito que contiene x cuartos de agua si la concentración es de 2 libras de sal por galón.

13.37 *a*) Encuentre un número sabiendo que su mitad es igual a su sexta parte más 10.
b) Encuentre dos números cuya diferencia es 20 y su suma 48.
c) Encuentre dos enteros pares consecutivos sabiendo que el doble del menor excede al mayor en 18.
d) Encuentre dos números sabiendo que su suma es 36 y que al dividir el mayor por el menor el cociente es 2 y el resto 3.
e) Encuentre los enteros impares consecutivos sabiendo que la diferencia de sus cuadrados es igual a 64.
f) Encuentre tres números cuya suma es 54 sabiendo que el primero es igual al doble del segundo más 4 y que el tercero es igual al doble del primero.

13.38 *a*) Un padre tiene 24 años más que su hijo. Determine sus edades actuales sabiendo que dentro de 8 años la edad del padre es el doble que la del hijo.
b) Leticia tiene quince años más que su hermana Begoña. Hace seis años la edad de Leticia era seis veces la de Begoña. Calcule sus edades actuales.
c) La edad actual de Juan es el doble de la de Fernando. Hace cinco años Juan era tres veces mayor que Fernando. Encuentre sus edades actuales.

13.39 *a*) Una bolsa contiene \$3.05 en monedas de 5 y 10 centavos. Sabiendo que hay 19 monedas más de 5 que de 25, encuentre el número de monedas de cada clase.
b) Ricardo tiene dos veces más monedas de 10 que de 25 centavos y la suma de todas es de \$6.75. ¿Cuántas monedas tiene?
c) Las entradas de un teatro valen 60 centavos para adultos y 25 para niños. Sabiendo que asistieron 280 personas y que la recaudación fue de \$140. ¿Cuántos niños asistieron a la función?

13.40 *a*) Encuentre un número de dos cifras sabiendo que la suma se éstas es igual a $1/7$ del número y que la cifra de las decenas excede en 3 a la correspondiente de las unidades.
b) Encuentre un número de dos cifras sabiendo que la suma de éstas es igual a 10 y que, si se invierten, el número que resulta es una unidad menor que el número original.
c) Encuentre un número de dos cifras sabiendo que la de las decenas es igual a $1/3$ de la correspondiente de las unidades y que, si se invierten, el número que resulta es igual al doble del primitivo más la suma de las cifras de éste más 2 unidades.

13.41 *a*) Un comerciante adquiere una mercancía a \$72. Encontrar el precio a que la debe poner en venta para que, haciendo un descuento de 10% sobre éste, gane en la operación 20% sobre el precio de venta.
b) Un empleado cobra \$20 diarios cuando acude al trabajo y cuando no lo hace le descuentan \$5. Sabiendo que al cabo de 25 días la cantidad de dinero que recibe es de \$450, encuentre el número de días que acudió al trabajo.
c) En cierta fábrica trabajan 400 empleados entre hombres y mujeres. Cada hombre percibe, diariamente, \$16 y cada mujer, \$12. Calcule el número de mujeres empleadas sabiendo que la nómina diaria del personal asciende a \$5 720.
d) Una persona tiene invertidas \$450, una parte a 2% y la otra a 3% de interés simple. Sabiendo que los intereses que percibe anualmente ascienden a \$11, encuentre las cantidades que tiene colocadas a los referidos tipos de interés.
e) Una persona ha invertido \$2 000 a 7% y \$5 000 a 4% de interés simple. Encuentre la cantidad que debe colocar a 6% para que el total invertido le resulte a un interés de 5%.

13.42 *a*) Encuentre las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es igual a 110 pies y que su longitud es 5 pies más pequeña que el doble de su altura.

b) Encuentre las dimensiones de una puerta rectangular sabiendo que su altura es 8 pies mayor que su anchura y que, si se aumentan sus dimensiones en 2 pies, el área se incrementa en 60 pies^2.

c) El área de un cuadrado excede a la de un rectángulo en 3 pulgadas^2. Encuentre el lado del cuadrado sabiendo que la anchura del rectángulo es 3 pulgadas más pequeña que el lado del cuadrado, y que la altura de aquel es 4 pulgadas mayor que éste.

d) El perímetro de un triángulo rectángulo es igual a 40 pulgadas. Sabiendo que uno de los catetos mide 15 pulgadas, encuentre la longitud de los otros dos lados.

e) La longitud de una piscina es igual al doble de su anchura. Determine sus dimensiones sabiendo que su contorno tiene 4 pies de anchura y un área de 784 pies^2.

13.43 *a*) Mezclando un aceite de 28 centavos/cuarto con otro de 33 centavos/cuarto se quieren obtener 45 cuartos de un producto al precio de 30 centavos/cuarto. Calcule las cantidades que se deben tomar de cada uno de los tipos de aceite.

b) Encuentre la masa de agua que se debe añadir a 50 libras de una solución de ácido sulfúrico a 36% para obtener una solución a 20%. Los porcentajes son valores en masa.

c) Calcule el número de cuartos de alcohol puro que se deben añadir a 10 cuartos de una solución a 15% para obtener una solución de alcohol a 25%. Los porcentajes son valores de volumen.

d) Se dispone de 60 galones de una solución de glicerina y agua a 50%. Encuentre el volumen de agua que se debe añadir para reducir la concentración de glicerina al 12%. Los porcentajes son valores de volumen.

e) El radiador de un jeep tiene una capacidad de 4 galones. Se encuentra lleno de una solución anticongelante de agua y glicerina a 10%. Encuentre el número de galones de solución que deben reemplazar por igual de glicerina para que la solución resultante sea de 25%. Los porcentajes son valores en volumen.

f) Se tienen 1 000 cuartos de leche con 4% de nata. Determine cuántos cuartos de leche, con un contenido en nata de 23% se deben separar de los anteriores para obtener una leche cuyo porcentaje de nata sea de 3%. Los porcentajes son valores en volumen.

g) Se dispone de 10 toneladas de un carbón con un contenido de azufre de 2.5%, y de otros dos tipos de carbón cuyos contenidos en azufre son 0.8 y 1.10%, respectivamente. Encuentre las cantidades de estos últimos que se deben mezclar con las 10 toneladas del primero para obtener 20 toneladas de carbón con un contenido de azufre de 1.7%.

13.44 *a*) Dos motoristas, a una distancia uno del otro de 225 millas, empiezan a moverse a las 4. 30 pm en sentido contrario. Sabiendo que sus velocidades medias son de 40 y 45 millas/hora, calcule a qué hora se encontrarán.

b) Dos aviones parten del mismo lugar y a la misma hora volando en direcciones opuestas. La velocidad de uno de ellos es 40 millas/hr mayor que la del otro. Sabiendo que al cabo de 5 horas se encuentran a 2 000 millas de distancia, encuentre sus velocidades medias.

c) Encuentre la velocidad a la que debe viajar un motorista *A* para alcanzar a otro *B* que marcha a una velocidad de 20 millas/hr, sabiendo que *A*, partiendo 2 hr después que *B*, desea alcanzarlo en 4 horas.

d) Un motorista parte de una ciudad *A* a las 2:00 p m. y viaja hacia la ciudad *B* a una velocidad de 30 millas/hora. Después de permanecer en *B* durante 1 hora, regresa por el mismo camino a una velocidad de 40 millas/hr y llega a *A* a las 6:30 p.m. Encuentre la distancia entre *A* y *B*.

e) Un automovilista recorre una distancia de 265 millas. Durante la primera parte del viaje marcha a una velocidad de 40 millas/hr y el resto lo hace a 35 millas/hr. Sabiendo que la duración del viaje fue de 7 horas, encuentre el tiempo que estuvo marchando a la velocidad de 40 millas/hr.

f) La velocidad de una canoa, en aguas en reposo, es de 8 millas/hr. Sabiendo que recorre 20 millas a favor de la corriente en el mismo tiempo que recorre 12 millas en contra de ella, encuentre la velocidad de la corriente.

g) La velocidad de un avión, en aire en reposo, es de 120 millas/hr. Cuando marcha en favor del viento recorre una cierta distancia en 4 horas, pero cuando va en contra de él recorre solamente los 3/5 de la misma en igual tiempo. Encuentre la velocidad del viento.

13.45 *a*) Un granjero puede trabajar un cierto terreno a una velocidad tres veces mayor que la de su hijo. Trabajando juntos invierten 6 horas en realizar la labor. Encuentre el tiempo que tardarían en realizarlo trabajando por separado.

b) Un pintor puede realizar un trabajo en 6 horas y su ayudante puede hacerlo en 10 horas. El pintor comienza a trabajar y al cabo de 2 horas se incorpora al trabajo su ayudante. Encuentre el tiempo que tardarán en completar el trabajo en cuestión.

c) Un grupo de operarios puede realizar un trabajo en 8 días. Después de que este grupo ha estado trabajando 3 días, se incorpora un segundo grupo y, juntos, terminan el trabajo en otros 3 días más. Encuentre el tiempo que tardaría en realizar dicho trabajo el segundo grupo trabajando por sí solo.

d) Dos grifos llenan un depósito en 10 y 15 minutos, respectivamente. Los dos grifos anteriores y un tercero, actuando todos simultáneamente, llenan el depósito en 4 minutos. Encuentre el tiempo que tardaría en llenarse el depósito empleando solamente el tercer grifo.

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

13.34 *a*) $x = 3$ *d*) $x = 5$ *g*) $x = -1/2$ *j*) $x = 1/4$
b) $y = 4$ *e*) $t = -6$ *h*) todos los valores de x (identidad) *k*) $y = 5$
c) $x = 4/3$ *f*) $x = 1/11$ *i*) $z = 22$ *l*) $x = -1$

13.35 *a*) $x = 4p$ *c*) $x = \dfrac{a+b}{2}$ si $a \neq b$ *d*) $x = \dfrac{bc - ad}{b + c - a - d}$ *e*) $y = \dfrac{ac + bc}{ab}$
b) $y = -2$ si $a \neq 2b$

13.36 *a*) $5x + 2$
b) $2x - 6$
c) $x + 25, x$
d) $x^2, (x+1)^2, (x+2)^2$
e) $5x - 40$
f) $(2x+1)^2$ donde $x =$ entero
g) $x^2 - 2x$
h) $8x$
i) $(2x+2)^2 - (2x)^2, x =$ entero
j) Edad de Javier x, Edad de Carlos $x + 6$, Edad de Pablo $2x$
k) $B = x°, A + (2x + 20)°, C + (160 - 3x)°$
l) Un lado es x, el lado adyacente es $3x - 3$.
Perímetro $+ 8x - 6$, área $= 3x^2 - 3x$
m) $\dfrac{x}{2x^2 + 4}$
n) $\dfrac{x}{2}$ libras de sal

13.37 *a*) 30 *b*) 34, 14 *c*) 20, 22 *d*) 25, 11 *e*) 15, 17 *f*) 16, 6, 32

13.38 *a*) Padre 40, hijo 16 *b*) Leticia 24, Begoña 9 *c*) Juan 20, Fernando 10

13.39 *a*) monedas de 10 centavos, monedas de 5 centavos *b*) monedas de 25 centavos, monedas de 10 centavos
c) 200 adultos, 80 niños

13.40 *a*) 63 *b*) 37 *c*) 26

13.41 *a*) \$100 *b*) 23 días *c*) 170 mujeres *d*) \$200 a 3%, \$250 a 2% *e*) \$1 000

13.42 *a*) ancho 20 pies, altura 35 pies
b) ancho 10 pies, altura 18 pies
c) 9 pulgadas
d) otro cateto 8 pies, hipotenusa 17 pies
e) 30 pies por 60 pies

13.43 *a*) 18 cuartos de 33¢, 27 cuartos de 28¢
b) 40 lb
c) 4/3 cuartos
d) 190 galones
e) 2/3 galones
f) 50 cuartos
g) 6.7 toneladas de 0.80%, 3.3 toneladas de 1.10%

13.44 *a*) 7:30 p.m. *c*) 60 millas/hora *e*) 4 hora *g*) 30 millas/hora
b) 180, 220 millas/hora *d*) 60 millas *f*) 2 millas/hora

13.45 *a*) Papá 8 hr, hijo 24 hr *b*) $2\frac{1}{2}$ hr *c*) 12 días *d*) 12 minutos

14 ECUACIONES DE RECTAS

14.1 PENDIENTE DE UNA RECTA

La ecuación $ax + by = c$, siendo a y b diferentes de cero y a, b y c números reales, es la forma estándar (o general) de la ecuación de una recta.

La pendiente de una recta es la razón del cambio en y comparada con el cambio en x.

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos sobre una recta y m es la pendiente de la recta, entonces

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{donde} \quad x_2 \neq x_1.$$

EJEMPLO 14.1 ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(5, -8)$ y $(6, 2)$?

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-8)}{5 - 6} = \frac{10}{-1} = -10$$

La pendiente de la recta que pasa por los dos puntos $(5, -8)$ y $(6, 2)$ es -10.

EJEMPLO 14.2 ¿Cuál es la pendiente de la recta expresada por la ecuación $3x - 4y = 12$?

Primero es necesario encontrar los dos puntos que satisfacen la ecuación de la recta $3x - 4y = 12$. Si $x = 0$, entonces $3(0) - 4y = 12$ y $y = -3$. Por ende, un punto es $(0, -3)$. Si $x = -4$, entonces $3(-4) - 4y = 12$ y $y = -6$. Por lo que, $(-4, -6)$ es otro punto que se encuentra sobre la recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - (-6)}{0 - (-4)} = \frac{3}{4}$$

La pendiente de la recta $3x\ 4y = 12$ es $3/4$.

En el ejemplo 14.1, la pendiente de la recta es negativa. Esto significa que, conforme se observa la gráfica de la recta de izquierda a derecha, a medida que x aumenta y disminuye (consulte la figura 14-1). En el ejemplo 14.2, la pendiente es positiva, lo que significa que conforme x aumenta y también lo hace (consulte la figura 14-2).

La recta horizontal $y = k$, donde k es una constante, tiene una pendiente igual a cero, ya que todos los valores de y son los mismos, $y_2 - y_1 = 0$.

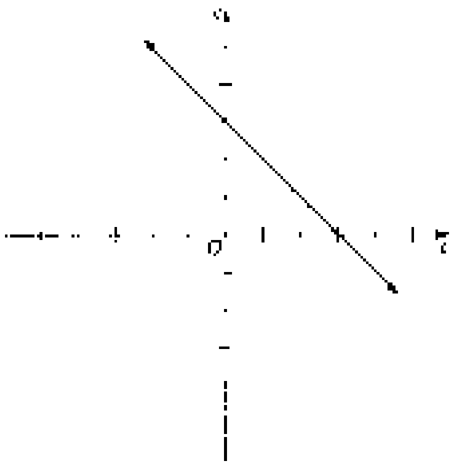


Figura 14-1

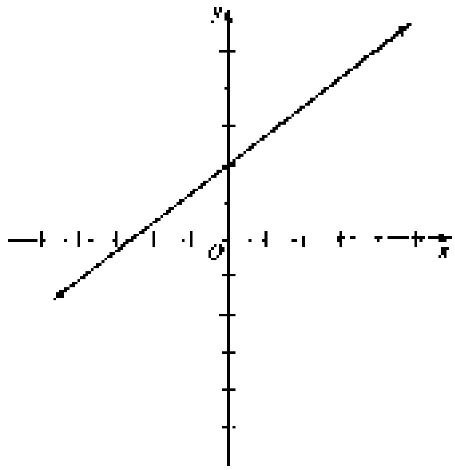


Figura 14-2

La recta vertical $x = k$, donde k es una constante, no tiene pendiente, es decir, ésta no se encuentra definida, ya que todos los valores de x son los mismos, $x_2 - x_1 = 0$ y la división entre cero no está definida.

14.2 RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales.

EJEMPLO 14.3 Demuestre que la figura *PQRS* que tiene como vértices a los puntos $P(0, -2)$, $Q(-2, 3)$, $R(3, 5)$ y $S(5, 0)$ es un paralelogramo.

El cuadrilátero *PQRS* es un paralelogramo si $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ son paralelas y $\overline{PS}$ y $\overline{QR}$ son también paralelos entre sí.

$$\text{pendiente }(\overline{PQ}) = \frac{3-(-2)}{-2-0} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2} \quad \text{y} \quad \text{pendiente }(\overline{RS}) = \frac{0-5}{5-3} = -\frac{5}{2}$$

$$\text{pendiente }(\overline{PS}) = \frac{0-(-2)}{5-0} = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad \text{pendiente }(\overline{QR}) = \frac{5-3}{3-(-2)} = \frac{2}{5}$$

Puesto que las rectas $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ tienen la misma pendiente, éstas son paralelas y ya que las rectas $\overline{PS}$ y $\overline{QR}$ también tienen la misma pendiente, son paralelas también. Por lo tanto, los lados opuestos de *PQRS* son paralelos, ya que *PQRS* es un paralelogramo.

EJEMPLO 14.4 Demuestre que los puntos $A(0, 4)$, $B(2, 3)$ y $C(4, 2)$ son colineales, esto es, ambos se encuentran en la misma recta.

Los puntos A, B y C son colineales si las pendientes de las rectas que forman cualquier par de estos puntos son las mismas.

$$\text{pendiente }(\overline{AB}) = \frac{3-4}{2-0} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \text{pendiente }(\overline{BC}) = \frac{2-3}{4-2} = -\frac{1}{2}$$

Las rectas *AB* y *BC* tiene la misma pendiente y comparten un punto en común, *B*, por lo que dichas rectas forman la misma rectas. Por lo tanto, los puntos *A*, *B* y *C* son colineales.

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a -1. Se dice que la pendiente de una recta es recíproca y de signo contrario respecto a la pendiente de la otra recta.

EJEMPLO 14.5 Demuestre que la recta que pasa a través de los puntos $A(3, 3)$ y $B(6, -3)$ es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $C(4, 2)$ y $D(8, 4)$.

$$\text{pendiente } (\overline{AB}) = \frac{-3-3}{6-3} = \frac{-6}{3} = -2 \qquad \text{y} \qquad \text{pendiente } (\overline{CD}) = \frac{4-2}{8-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Puesto que $(-2)(1/2) = -1$, las rectas AB y CD son perpendiculares.

14.3 FORMA PENDIENTE-ORDENADA AL ORIGEN DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Si una recta tiene una pendiente m y una ordenada al origen y igual a $(0, b)$, entonces para cualquier punto (x, y), donde $x \neq 0$, sobre la recta se tiene

$$m = \frac{y-b}{x-0} \qquad \text{y} \qquad y = mx = b.$$

La forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación de una recta con pendiente m y ordenada al origen b es $y = mx + b$.

EJEMPLO 14.6 Encuentre la pendiente y la ordenada al origen de la recta $3x + 2y = 12$.

Se despeja y en la ecuación $3x + 2y = 12$ para obtener $y = -\frac{3}{2}x + 6$. La pendiente de la recta es $-\frac{3}{2}$ y la ordenada al origen es 6.

EJEMPLO 14.7 Encuentre la ecuación de la recta cuya pendiente es -4 y tiene como ordenada al origen 6.

La pendiente de la recta es -4, por lo que $m = -4$ y la ordenada al origen es 6, así que $b = 6$. Sustituyendo en la forma $y = mx + b$, se obtiene $y = -4x + 6$ como ecuación de la recta.

14.4 FORMA PUNTO-PENDIENTE DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Si una recta tiene como pendiente m y pasa por el punto (x_1, y_1), entonces para cualquier punto (x, y) sobre dicha recta, se tiene que $m = (y - y_1)/(x - x_1)$ y $y - y_1 = m(x - x_1)$.

La forma punto-pendiente de la ecuación de una recta es $y - y_1 = m(x - x_1)$.

EJEMPLO 14.8 Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2)$ y tiene una pendiente de $-2/3$.

Puesto que $(x_1, y_1) = (1, -2)$ y $m = -2/3$, se sustituyen estos valores en $y - y_1 = m(x - x_1)$ para obtener así $y + 2 = -2/3(x - 1)$. Simplificando se obtiene $3(y + 2) = -2(x - 1)$, y por último, $2x + 3y = -4$.

La ecuación de la recta que pasa por $(1, -2)$ con una pendiente de $-2/3$ es $2x + 3y = -4$.

14.5 FORMA DE DOS PUNTOS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Si la recta pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), ésta tendrá como pendiente $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ si $x_2 \neq x_1$. Sustituyendo los valores en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

La forma de los dos puntos de la ecuación de la recta es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{si } x_2 \neq x_1.$$

Si $x_2 = x_1$, se obtiene al recta vertical $x = x_1$. Si $y_2 = y_1$, se obtiene la recta horizontal $y = y_1$.

EJEMPLO 14.9 Escriba la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, 6) y (−4, 4).

Sea $(x_1, y_1) = (3, 6)$ y $(x_2, y_2) = (-4, 4)$ y sustitúyalos en

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \\ y - 6 &= \frac{4 - 6}{-4 - 3}(x - 3) \\ -7(y - 6) &= -2(x - 3) \\ -7y = 42 &= -2x = 6 \\ 2x - 7y &= -36 \end{aligned}$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, 6) y (−4, 4) es $2x - 7y = -36$.

14.6 FORMA DE INTERSECCIÓN DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Si una recta intercepta el eje x en a y al eje y en b, significa que pasa por los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$. La ecuación de la recta es,

$$y - b = \frac{0 - b}{a - 0}(x - 0) \qquad \text{si } a \neq 0,$$

que se puede simplificar como $bx + ay = ab$. Si tanto a como b son diferentes de cero, se obtiene $x/a + y/b = 1$.

Si una recta intercepta al eje x en a y al eje y en b y tanto a como b son diferentes de cero, la ecuación de la recta es,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

EJEMPLO 14.10 Encuentre las intercepciones de la recta $4x - 3y = 12$.

Se divide la ecuación $4x - 3y = 12$ entre 12 a fin de obtener,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1.$$

La interceptación con el eje x es 3 y con el eje y es −4 para la recta $4x - 3y = 12$.

EJEMPLO 14.11 Escriba la ecuación de la recta que intercepta al eje x en 2 y al eje y en 5.

Se tiene que $a = 2$ y $b = 5$ para la ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Sustituyendo se tiene $$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1.$$

Simplificando se tiene $$5x + 2y = 10.$$

La recta que intercepta al eje x en 2 y al eje y en 5 es $5x + 2y = 10$.

Problemas resueltos

14.1 ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos siguientes?

a) (4, 1) y (7, 6) *b*) (3, 9) y (7, 4) *c*) (−4, 1) y (−4, 3) *d*) (−3, 2) y (2, 2)

SOLUCIÓN

a) $m = \dfrac{6-1}{7-4} = \dfrac{5}{3}$ La pendiente de la recta es $5/3$

b) $m = \dfrac{4-9}{7-3} = -\dfrac{5}{4}$ La pendiente de la recta es $-5/4$

c) $m = \dfrac{3-1}{-4-(-4)} = \dfrac{2}{0}$ La pendiente no está definida para esta recta.

d) $m = \dfrac{2-2}{2-(-3)} = \dfrac{0}{5} = 0$ La pendiente de la recta es 0.

14.2 Determine si la recta que pasa por lo puntos A y B es paralela, perpendicular o ninguna de las opciones anteriores a la recta que pasa por los puntos C y D.

a) $A(2, 4)$, $B(3, 8)$, $C(5, 1)$, y $D(4, -3)$
b) $A(2, -3)$, $B(-4, 5)$, $C(0, -1)$, y $D(-4, -4)$
c) $A(1, 9)$, $B(4, 0)$, $C(0, 6)$, y $D(5, 3)$
d) $A(8, -1)$, $B(2, 3)$, $C(5, 1)$, y $D(2, -1)$

SOLUCIÓN

a) pendiente $(\overline{AB}) = \dfrac{8-4}{3-2} = \dfrac{4}{1} = 4$; pendiente $(\overline{CD}) = \dfrac{-3-1}{4-5} = \dfrac{-4}{-1} = 4$

Puesto que las pendientes son iguales, las rectas AB y CD son paralelas.

b) pendiente $(\overline{AB}) = \dfrac{5-(-3)}{-4-2} = \dfrac{8}{-6} = -\dfrac{4}{3}$; pendiente $(\overline{CD}) = \dfrac{-4-(-1)}{-4-0} = \dfrac{-3}{-4} = \dfrac{3}{4}$

Puesto que $(-4/3)(3/4) = -1$, las rectas AB y CD son perpendiculares.

c) pendiente $(\overline{AB}) = \dfrac{0-9}{4-1} = \dfrac{-9}{3} = -3$; pendiente $(\overline{CD}) = \dfrac{3-6}{5-0} = -\dfrac{3}{5}$

Puesto que las pendientes no son iguales y su producto no es -1, las rectas AB y CD no son paralelas ni perpendiculares.

d) pendiente $(\overline{AB}) = \dfrac{3-(-1)}{2-8} = \dfrac{4}{-6} = -\dfrac{2}{3}$; pendiente $(\overline{CD}) = \dfrac{-1-1}{2-5} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$

Puesto que las pendientes no son iguales y su producto no es -1, las rectas AB y CD no son paralelas ni perpendiculares.

14.3 Determine si los tres puntos dados son colineales o no.

a) $(0, 3)$, $(1, 1)$, y $(2, -1)$ *b*) $(1, 5)$, $(-2, -1)$, y $(-3, -4)$

SOLUCIÓN

a) $m_1 = \dfrac{1-3}{1-0} = \dfrac{-2}{1} = -2$ y $m_2 = \dfrac{-1-1}{2-1} = \dfrac{-2}{1} = -2$

Puesto que la recta que pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(1, 1)$ y la que pasa por $(1, 1)$ y $(2, -1)$ tienen la misma pendiente, los puntos $(0, 3)$, $(1, 1)$ y $(2, -1)$ son colineales.

b) $m_1 = \dfrac{-1-5}{-2-1} = \dfrac{-6}{-3} = 2$ y $m_2 = \dfrac{-4-(-1)}{-3-(-2)} = \dfrac{-3}{-1} = 3$

Puesto que la pendiente de la recta que pasa por $(1, 5)$ y $(-2, -1)$ y la que pasa por $(-2, -1)$ y $(-3, -4)$ son diferentes, los puntos $(1, 5)$, $(-2, -1)$ y $(-3, -4)$ no son colineales.

14.4 Escriba la ecuación de la recta que tiene como pendiente m y que intercepta al eje y en b.

a) $m = -2/3, b = 6$ *b*) $m = -3, b = -4$ *c*) $m = 0, b = 8$ *d*) $m = 3, b = 0$

SOLUCIÓN

a) $y = mx + b = -2/3x + 6$ $2x + 3y = 18$
b) $y = mx + b = -3x\ 24$ $3x + y = -4$
c) $y = mx + b = 0x + 8$ $y = 8$
d) $y = mx + b = 3x + 0$ $3x - y = 0$

14.5 Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene una pendiente m.

a) $P(2, 5)$, $m = 4$ *b*) $P(1, 4)$, $m = 0$ *c*) $P(-1, -6)$, $m = 1/4$ *d*) $P(2, -3)$, $m = -3/7$

SOLUCIÓN

Se utiliza la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$.
a) $y - 5 = 4(x - 2)$ $4x - y = 3$
b) $y = 4 = 0(x - 1)$ $y = 4$
c) $y - (-6) = 1/4(x - (-1))$ $x - 4y = 23$
d) $y - (-3) = -3/7(x - 2)$ $3x + 7y = -15$

14.6 Escriba la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

a) $P(1, -4)$, $Q(2, 3)$ *c*) $P(-1, 4)$, $Q(3, 4)$ *e*) $P(7, 1)$, $Q(8, 3)$
b) $P(6, -1)$, $Q(0, 2)$ *d*) $P(1, 5)$, $Q(-2, 3)$ *f*) $P(4, -1)$, $Q(4, 3)$

SOLUCIÓN

a) $y - 3 = \dfrac{3 - (-4)}{2 - 1}(x - 2)$ $y - 3 = 7(x - 2)$ $7x - y = 11$

b) $y - 2 = \dfrac{2 - (-1)}{0 - 6}(x - 0)$ $y - 2 = -1/2x$ $x + 2y = 4$

c) $y - 4 = \dfrac{4 - 4}{3 - (-1)}(x - 3)$ $y - 4 = 0(x - 3)$ $y = 4$

d) $y - 3 = \dfrac{3 - 5}{-2 - 1}(x - (-2))$ $y - 3 = 2/3(x + 2)$ $2x - 3y = -13$

e) $y - 3 = \dfrac{3 - 1}{8 - 7}(x - 8)$ $y - 3 = 2(x - 8)$ $2x - y = 13$

f) Puesto que los puntos P y Q tienen el mismo valor de x, la pendiente no está definida. Sin embargo, la recta que pasa por P y Q debe tener como coordenada x a 4 en todos sus puntos. Por lo tanto, la recta es $x = 4$.

14.7 Escriba la ecuación de la recta que intercepta al eje x en -3 y al eje y en 4.

SOLUCIÓN

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{así} \quad \frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1 \qquad 4x - 3y = -12$$

14.8 Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-5, 6)$ y que es paralela a la recta $3x - 4y = 5$.

SOLUCIÓN

Escriba la ecuación $3x - 4y = 5$ en la forma pendiente-ordenada al origen a fin de identificar su pendiente, $y = 3/4x - 5/4$. Puesto que la forma es $y = mx + b$, $m = 3/4$. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente, por lo que la recta que se desea tiene una pendiente de $3/4$.

Ahora que se tiene la pendiente y un punto por el que pasa la recta, se puede escribir la ecuación mediante la forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$. Sustituyendo se obtiene $y - 6 = 3/4\,(x+5)$. Simplificando se obtiene $4y - 24 = 3x + 15$ y, por último, $3x - 4y = -39$. La ecuación que se desea es $3x - 4y = -39$.

14.9 Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, 6) y es perpendicular a la recta $2x - y = 8$.

SOLUCIÓN

En la forma pendiente-ordenada al origen, la recta dada es $y = 2x - 8$. La pendiente de la recta es 2, por lo que la pendiente de la recta perpendicular es el recíproco y de signo contrario de 2, es decir $-1/2$. Se desea escribir la ecuación de la recta con pendiente de $-1/2$ y que pase por el punto (4, 6). Por lo tanto, $y - 6 = -1/2(x - 4)$, por lo que $2y - 12 = -x + 4$ y, por último, $x + 2y = 16$. La recta que se busca es $x + 2y = 16$.

Problemas propuestos

14.10 ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa a través de cada uno de los pares de puntos siguientes?

a) $(-1, 2), (4, -3)$
b) $(3, 4), (-4, -3)$
c) $(5, 4), (5, -2)$
d) $(-5, 3), (2, 3)$
e) $(-1, 5), (-2, 3)$
f) $(7, 3), (8, -3)$

14.11 Determine si la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela, perpendicular o ninguna de las opciones anteriores a la recta que pasa por los puntos R y S.

a) $P(4, 2)$, $Q(8, 3)$, $R(-2, 8)$, y $S(1, -4)$
b) $P(0, -5)$, $Q(15, 0)$, $R(1, 2)$, y $S(0, 5)$
c) $P(-7, 8)$, $Q(8, -7)$, $R(-8, 10)$, y $S(6, -4)$
d) $P(8, -2)$, $Q(2, 8)$, $R(-2, -8)$, y $S(-8, -2)$

14.12 Determine una constante k real tal que las rectas AB y CD sean 1) paralelas y 2) perpendiculares.

a) $A(2, 1)$, $B(6, 3)$, $C(4, k)$, y $D(3, 1)$
b) $A(1, \mathrm{k})$, $B(2, 3)$, $C(1, 7)$, y $D(3, 6)$
c) $A(9, 4)$, $B(k, 10)$, $C(11, -2)$, y $D(-2, 4)$
d) $A(1, 2)$, $B(4, 0)$, $C(k, 2)$, y $D(1, -3)$

14.13 Determine si los tres puntos proporcionados son colineales o no.

a) $(-3, 1), (-11, -1)$, y $(-15, -2)$
b) $(1, 1), (4, 2)$, y $(2, 3)$

14.14 Escriba la ecuación de la recta que tiene como pendiente m y como ordenada al origen b.

a) $m = -3, b = 4$
b) $m = 0, b = -3$
c) $m = 2/3, b = -2$
d) $m = 4, b = 0$
e) $m = -1/2, b = 3$
f) $m = -5/6, b = 1/6$

14.15 Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene como pendiente m.

a) $P(-5, 2), m = -1$
b) $P(-4, -3), m = 4$
c) $P(4, -1), m = 2/3$
d) $P(0, 4), m = -4/3$
e) $P(2, 6), m = -5$
f) $P(-1, 6), m = 0$

14.16 Escriba la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

a) $P(1, 2), Q(2, 4)$
b) $P(1.6, 3), Q(0.3, 1.4)$
c) $P(0.7, 3), Q(0.7, -3)$
d) $P(10, 2), Q(5, 2)$
e) $P(3, 6), Q(-3, 8)$
f) $P(-4, 2), Q(2, 4)$
g) $P(-1, 3), Q(0, 6)$
h) $P(0, 0), Q(-3, 6)$

14.17 Escriba la ecuación de la recta que intercepta al eje x en la coordenada a y al eje y en la b.

a) $a = -2, b = -2$
b) $a = 6, b = -3$
c) $a = -1/2, b = 4$
d) $a = 6, b = 1/3$

14.18 Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es paralela a la recta l.

a) $P(2, -4)$, recta l: $y = 4x - 6$
b) $P(1, 0)$, recta l: $y = 3x + 1$
c) $P(-1, -1)$, recta l: $4x + 5y = 5$
d) $P(3, 5)$, recta l: $3x - 2y = 18$

14.19 Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta l.

a) $P(2, -1)$, recta l: $x = 4y$ *c*) $P(1, 1)$, recta l: $3x - 2y = 4$
b) $P(0, 6)$, recta l: $2x + 3y = 5$ *d*) $P(1, -2)$, recta l: $4x + y = 7$

14.20 Determine si el triángulo cuyos vértices son A, B y C es un triángulo rectángulo.

a) $A(4, 0)$, $B(7, -7)$, y $C(2, -5)$ *c*) $A(2, 1)$, $B(3, -1)$, y $C(1, -2)$
b) $A(5, 8)$, $B(-2, 1)$, y $C(2, -3)$ *d*) $A(-6, 3)$, $B(3, -5)$, y $C(-1, 5)$

14.21 Demuestre por medio de pendientes que las diagonales $\overline{PQ}$ y $\overline{QS}$ de un cuadrilátero $PQRS$ son perpendiculares.

a) $P(0, 0)$, $Q(5, 0)$, $R(8, 4)$, y $S(3, 4)$ *b*) $P(23, 0)$, $Q(6, 23)$, $R(7, 5)$, y $S(3, 3)$

14.22 Demuestre que los puntos P, Q, R y S son los vértices del paralelogramo $PQRS$.

a) $P(5, 0)$, $Q(8, 2)$, $R(6, 5)$, y $S(3, 3)$ *b*) $P(-9, 0)$, $Q(-10, -6)$, $R(4, 8)$, y $S(5, 14)$

14.23 Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto (7, 3) y es paralela al eje x.

14.24 Escriba la ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto $(-2, -3)$.

14.25 Escriba la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto (2, 4).

14.26 Escriba la ecuación de la recta que pasa por (5, 8) y es perpendicular al eje x.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

14.10 *a*) -1 *b*) 1 c) no está definida *d*) 0 *e*) 2 *f*) 26

14.11 *a*) perpendicular, pendientes 1/4 y -4 *c*) paralela, pendientes -1 y -1
b) perpendicular, pendientes 1/3 y -3 *d*) ninguna, pendientes $-5/3$ y -1

14.12 *a*) (1) 3/2 (2) -1 *c*) (1) -4 (2) 153/13
b) (1) 7/2 (2) 1 *d*) (1) $-13/2$ (2) 13/3

14.13 *a*) sí: m = 1/4 *b*) no: las pendientes no son iguales

14.14 *a*) $y = -3x + 4$ *c*) $2x - 3y = 6$ *e*) $x + 2y = 6$
b) $y = -3$ *d*) $y = 4x$ *f*) $5x + 6y = 1$

14.15 *a*) $x + y = -3$ *c*) $2x - 3y = 11$ *e*) $5x + y = 16$
b) $4x - y = -13$ *d*) $4x + 3y = 12$ *f*) $y = 6$

14.16 *a*) $y = 2x$ *c*) $10x = 7$ *e*) $x + 3y = 21$ *g*) $3x - y = -6$
b) $80x - 65y = -67$ *d*) $y = 2$ *f*) $x - 3y = -10$ *h*) $y = -2x$

14.17 *a*) $x + y = -2$ *b*) $x - 2y = 6$ *c*) $8x - y = -4$ *d*) $x + 18y = 6$

14.18 *a*) $y = 4x - 12$ *b*) $y = 3x - 3$ *c*) $4x + 5y = -9$ *d*) $3x - 2y = -1$

14.19 *a*) $4x + y = 7$ *b*) $3x - 2y = -12$ *c*) $2x + 3y = 5$ *d*) $x - 4y = 9$

14.20 *a*) sí $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ *b*) sí $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ *c*) sí $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ *d*) sí $\overline{AC} \perp \overline{BC}$

14.21 *a*) sí: las pendientes son 1/2 y -2 *b*) sí: las pendientes son 1/2 y -2

14.22 *a*) *sí*: $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ *y* $\overline{QR} \parallel \overline{SP}$ *b*) *sí*: $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ *y* $\overline{QR} \parallel \overline{SP}$

14.23 $y = 3$

14.24 $y = -3$

14.25 $x = 2$

14.26 $x = 5$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS

15

15.1 SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES

Una ecuación lineal con dos incógnitas x y y es de la forma $ax + by = c$, donde a, b y c son constantes y a, b son diferentes de cero. Considerando dos ecuaciones de este tipo

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

se dice que hay un sistema de ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas o un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Todo par de valores de x y y que satisfagan ambas ecuaciones simultáneamente recibe el nombre de *solución del sistema.*

Por ejemplo, la solución del sistema $x + y = 7$ y $x - y = 3$ es (5, 2).

A continuación se estudian tres métodos para la resolución de dichos sistemas de ecuaciones lineales.

A. Método de suma o resta. Si fuere necesario, multiplique las ecuaciones dadas por números tales que hagan que los coeficientes de una de las incógnitas en las ecuaciones resultantes sean numéricamente iguales. Si los signos de los coeficientes iguales son diferentes, sume las ecuaciones resultantes; si son iguales, réstelas. Por ejemplo,

$$(1)\ \ 2x - y = 4$$
$$(2)\ \ x + 2y = -3.$$

Para eliminar y, multiplique (1) por (2 y sume la ecuación resultante con la (2), y obtendrá,

$$\begin{aligned} 2 \times (1)\text{:}&\ \ 4x - 2y = 8 \\ (2)\text{:}&\ \ \underline{\ \ x + 2y = -3} \\ \text{Suma:}&\ \ 5x \qquad = 5 \qquad \text{o} \qquad x = 1. \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 1$ en (1) se obtiene $2 - y = 4$ o $y = -2$. Por lo tanto, la solución simultánea de (1) y (2) es (1, 2).

Comprobación: Asigne el valor $x = 1$, $y = -2$ en la ecuación (2) para obtener $1 + 2(-2)$? -3, $-3 = -3$.

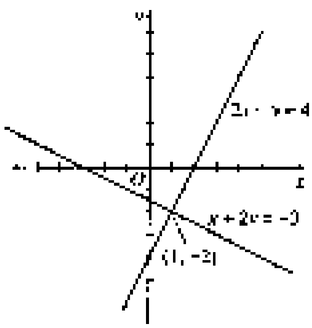
B. Método de sustitución. Encuentre el valor de una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones dadas y sustituya este valor en la otra ecuación.

Por ejemplo, considere el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) anteriores. A partir de (1) se obtiene $y = 2x - 4$ y se sustituye este valor en la ecuación (2) con el fin de obtener $x + 2(2x - 4) = -3$, lo cual se reduce a $x = 1$. A continuación se sustituye el valor $x = 1$ en cualquiera de las dos ecuaciones originales para obtener $y = -2$. La solución es (1, –2).

C. Método gráfico. Consiste en realizar la gráfica de ambas ecuaciones para obtener las dos líneas rectas. La solución la proporcionan las coordenadas (x, y) del punto de intersección de éstas líneas. La figura 15-1 muestra que la solución simultánea de (1) $2x - y = 4$ y (2) $x + 2y = -3$ es $x = 1$, $y = -2$, la cual se puede escribir también como $(1, -2)$.

Si las líneas son paralelas, el sistema de ecuaciones es incompatible, es decir, no tiene solución. Por ejemplo, (3) $x + y = 2$ y (4) $2x + 2y = 8$ son incompatibles, como se muestra en la figura 15-2. Observe que si la ecuación (3) se multiplica por 2, se obtiene $2x + 2y = 4$ que, evidentemente, es incompatible con (4).

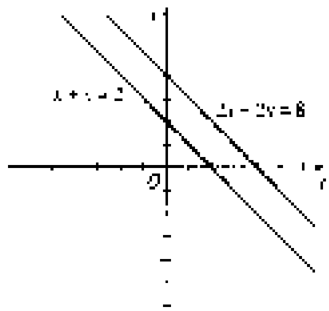
Las ecuaciones *dependientes* están representadas por una misma recta. Por consiguiente, todos los puntos de la recta constituyen una solución y, en definitiva, el sistema tendrá infinitas soluciones. Por ejemplo, (5) $x + y = 1$ y (6) $4x + 4y = 4$ son ecuaciones dependientes como se muestra en la figura 15-3. Observe que si (5) se multiplica por 4 es resultado es (6).



Ecuaciones compatibles

(1) $2x - y = 4$
(2) $x + 2y = -3$

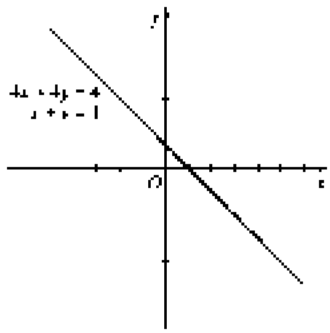
Figura 15-1



Ecuaciones incompatibles

(1) $x + y = 2$
(2) $2x + 2y = 8$

Figura 15-2



Ecuaciones dependientes

(1) $x + y = 1$
(2) $4x + 4y = 4$

Figura 15-3

15.2 SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas se resuelve mediante la eliminación de una incógnita de cualquier par de ecuaciones y, después, eliminando la misma incógnita de cualquier otro par de ecuaciones.

Las ecuaciones lineales con tres incógnitas representan planos y es factible que representen dos o más planos paralelos, los cuales serían incompatibles y no tendrían solución. Los tres planos podrían coincidir o intersecarse formando una línea común y ser dependientes. Los tres planos podrían intersectarse en un solo punto, por ejemplo en el caso de un techo y dos paredes que formen la esquina de una habitación y ser compatibles.

Las ecuaciones lineales con tres incógnitas x, y y z son de la forma $ax + by + cz = d$, donde a, b, c y d son números reales y a, b y c no pueden ser iguales a cero simultáneamente. Si se consideran tres ecuaciones que cumplan con lo anterior,

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

y se encuentra un valor (x, y, z) que satisfaga a las tres ecuaciones, se dice que se tiene una solución simultánea al sistema de ecuaciones.

EJEMPLO 15.1 Resuelva el sistema de ecuaciones $2x + 5y + 4z = 4$, $x + 4y + 3z = 1$, y $x - 3y - 2z = 5$.

$$\begin{array}{ll} (1) & 2x + 5y + 4z = 4 \\ (2) & x + 4y + 3z = 1 \\ (3) & x - 3y - 2z = 5 \end{array}$$

En primera instancia se procederá a eliminar x de (1) y (2) y de (2) y (3).

$$\begin{array}{lr} & 2x + 5y + 4z = 4 \\ & \underline{-2x - 8y - 6z = -2} \\ (4) & -3y - 2z = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & x + 4y + 3z = 1 \\ & \underline{-x + 3y + 2z = -5} \\ (5) & 7y + 5z = -4 \end{array}$$

A continuación se elimina z de las ecuaciones (4) y (5).

$$\begin{array}{lr} & -15y - 10z = 10 \\ & \underline{14y + 10z = -8} \\ (6) & -y \qquad = 2 \end{array}$$

Luego se despeja y en (6) y se obtiene $y = -2$.

Sustituyendo en (4) o (5), se despeja z.

$$\begin{array}{lr} (4) & -3(-2) - 2z = 2 \\ & +6 - 2z = 2 \\ & -2z = -4 \\ & z = 2 \end{array}$$

Sustituyendo en (1), (2) o (3), se despeja x.

$$\begin{array}{lr} (4) & 2x + 5(-2) + 4(2) = 4 \\ & 2x - 10 + 8 = 4 \\ & 2x - 2 = 4 \\ & 2x = 6 \\ & x = 3 \end{array}$$

La solución del sistema de ecuaciones es $(3, -2, 2)$.

Se comprueba la respuesta sustituyendo el punto $(3,-2,2)$ en las ecuaciones (1), (2) y (3).

$$\begin{array}{lr} (1) & 2(3) + 5(-2) + 4(2) \ ?\ 4 \\ & 6 - 10 + 8 \ ?\ 4 \\ & 4 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} (2) & 3 + 4(-2) + 3(2) \ ?\ 1 \\ & 3 - 8 + 6 \ ?\ 1 \\ & 1 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} (3) & 3 - 3(-2) - 2(2) \ ?\ 5 \\ & 3 + 6 - 4 \ ?\ 5 \\ & 5 = 5 \end{array}$$

Así, el valor $(3, -2, 2)$ se verifica en cada una de las tres ecuaciones originales por lo que es la solución al problema.

Problemas resueltos

Resuelva los sistemas siguientes:

15.1 (1) $2x - y = 4$
(2) $x + y = 5$

SOLUCIÓN Sumando (1) y (2) se obtiene $3x = 9$, $x = 3$.

Sustituyendo $x = 3$ en (1) o en (2) se obtiene $y = 2$. La solución es $x = 3$, $y = 2$ o $(3, 2)$.

Otro método: A partir de (1) se obtiene $y = 2x - 4$ y sustituyendo este valor en la ecuación (2) se llega a $x + 2x - 4 = 5$, $3x = 9$, $x = 3$. Sustituyendo $x = 3$ en (1) o en (2) se obtiene $y = 2$.

Comprobación: $2x - y = 2(3) - 2 = 4$ y $x + y = 3 + 2 = 5$.

Solución gráfica. La representación de una ecuación lineal es una línea recta. Como una recta queda determinada por dos puntos, basta con representar dos puntos de cada ecuación. Sin embargo, para obtener una precisión mayor se pueden representar tres puntos de cada recta.

Para $2x - y = 4$:

x	-1	0	1
y	-6	-4	-2

Para $x + y = 5$:

x	-1	0	1
y	6	5	4

La solución del sistema es el punto de intersección (3, 2) de las rectas (vea la figura 15-4)

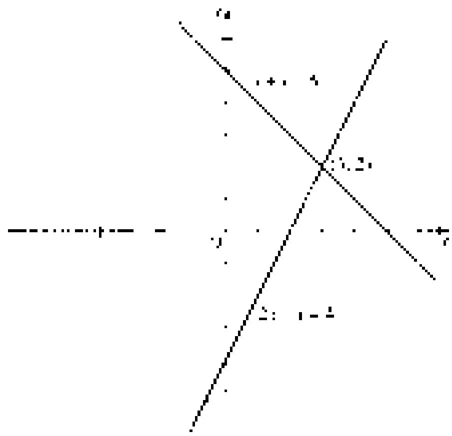


Figura 15-4

15.2 (1) $5x + 2y = 3$
(2) $2x + 3y = -1$

SOLUCIÓN Para eliminar y, se multiplica (1) por 3 y (2) por 2 y se restan los resultados.

$$\begin{array}{rl} 3 \times (1): & 15x + 6y = 9 \\ 2 \times (2): & \underline{4x + 6y = -2} \\ \text{Resta:} & 11x \qquad = 11 \qquad \text{o} \qquad x = 1. \end{array}$$

Sustituyendo $x = 1$ en (1) o en (2) se obtiene $y = -1$. La solución del sistema es $(1, -1)$.

15.3 (1) $2x + 3y = 3$
(2) $6y \quad 6x = 1$

SOLUCIÓN Reordenando (2),

$$\begin{array}{rl} (1) & 2x + 3y = 3 \\ (2) & -6x + 6y = 1 \end{array}$$

Para eliminar x, se multiplica (1) por 3 y se suma el resultado con (2) obteniendo

$$\begin{array}{rr} 3 \times (1): & 6x + 9y = \ \ 9 \\ (2): & \underline{-6x + 6y = \ \ 1} \\ & 15y = 10 \qquad \text{o} \qquad y = 2/3. \end{array}$$

Sustituyendo $y = 2/3$ en (1) o en (2) se obtiene $x = 1/2$. La solución es (1/2, 2/3).

15.4 (1) $5y = 3 - 2x$

(2) $3x + 2y + 1$

SOLUCIÓN Se aplica el método de sustitución

A partir de (1), $$y = \frac{3 - 2x}{5}.$$

Sustituyendo el valor en (2) se obtiene

$$3x = 2\left(\frac{3 - 2x}{5}\right) + 1 \qquad \text{o} \qquad x = \frac{11}{19}.$$

Luego $$y = \frac{3 - 2x}{5} = \frac{3 - 2(11/19)}{5} = \frac{7}{19}$$

y la solución es $\left(\frac{11}{19}, \frac{7}{19}\right)$.

15.5 1. $\dfrac{x - 2}{3} + \dfrac{y + 1}{6} = 2$

2. $\dfrac{x + 3}{4} - \dfrac{2y - 1}{2} = 1$

SOLUCIÓN Para quitar denominadores, se multiplica (1) por 6 y (2) por 4 y simplificando se obtiene

$$\begin{array}{l} (1_1)\ \ 2x + y = 15 \\ (2_1)\ \ x - 4y = -1 \end{array}$$

Despejando, se obtiene

$$x = \frac{59}{9}, \qquad y = \frac{17}{9} \qquad \text{y la solución es} \qquad \left(\frac{59}{9}, \frac{17}{9}\right).$$

15.6 (1) $x - 3y = 2a$

(2) $2x + \text{y} + 5a$

SOLUCIÓN Para eliminar x, se multiplica (1) por 2 y se resta (2); por lo tanto, $y = a/7$.
Para eliminar y, se multiplica (2) por 3 y se suma con (1); por lo tanto, $x = 17a/7$.

La solución es $\left(\frac{17a}{7}, \frac{a}{7}\right)$.

15.7 (1) $3u + 2v = 7r + s$

(2) $2u - v = 3s$

Se despejan u y v en función de r y s.

SOLUCIÓN Para eliminar v, se multiplica (2) por 2 y se suma con (1); luego $7u = 7r + 7s$ o sea $u = r + s$.
Para eliminar u, se multiplica (1) por 2, (2) por -3, y se suman los resultados; luego $v = 2r - s$.
La solución es $(r + s, 2r - s)$.

15.8 (1) $ax + by = 2a^2 - 3b^2$
(2) $x + 2y = 2a - 6b$

SOLUCIÓN Se multiplica (2) por a y se resta de (1); se tendrá $by - 2ay = 6ab - 3b^2$, $y(b - 2a) = 3b(2a - b)$, y $y = \dfrac{3b(2a-b)}{(b-2a)} = \dfrac{-3b(b-2a)}{b-2a} = -3b$ siempre que $b - 2a \neq 0$.

Análogamente, se obtiene $x = 2a$ siempre que $b - 2a \neq 0$.

Comprobación: (1) $a(2a) + b(-3b) = 2a^2 - 3b^2$, (2) $2a + 2(-3b) = 2a - 6b$.

Nota: Si $b - 2a = 0$ o $b = 2a$, las ecuaciones dadas se transforman en

$$(1_1)\ \ ax + 2ay = -10a^2$$
$$(2_1)\ \ x + 2y = -10a$$

que son dependientes, ya que (1_1) se deduce de (2_1) multiplicándola por a. Por lo tanto, si $b = 2a$, el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, todos los valores de x y y satisfacen a $x + 2y = -10a$.

15.9 Encuentre dos números cuya suma sea 28 y su diferencia 12.

SOLUCIÓN Sean x y y los dos números que se solicitan. Por lo tanto, (1) $x + y = 28$ y (2) $x - y = 12$
Sumando (1) y (2) se obtiene $2x = 40$, $x = 20$. Restando (2) de (1) se obtiene $2y = 16$, $y = 8$.
Nota: Este problema también se puede resolver empleando sólo una incógnita. Sean los números n y $28 - n$. Se tendrá $n - (28 - n) = 12$, o sea $n = 20$ y $28 - n = 8$.

15.10 Encuentre una fracción sabiendo que si el numerador se aumenta en 2 y el denominador en 1 se obtiene $1/2$, y que si el numerador se aumenta en 1 y el denominador se disminuye en 2, se obtiene $3/5$.

SOLUCIÓN Sea x = numerador, y = denominador y x/y = la fracción solicitada. Se tendrá que

$$(1)\ \ \frac{x+2}{y+1} = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad 2x - y = -3, \qquad \text{y} \qquad (2)\ \ \frac{x+1}{y-2} = \frac{3}{5} \quad \text{o} \quad 5x - 3y = -11.$$

Del sistema formado por (1) y (2) resulta $x = 2$, $y = 7$. La fracción pedida es $2/7$.

15.11 Hace dos años un padre era 6 veces mayor que su hijo. Encuentre sus edades actuales sabiendo que dentro de 18 años la edad del padre será el doble que la del hijo.

SOLUCIÓN Sea x = edad actual del padre, y = edad actual del hijo.

Ecuación para la condición de hace 2 años: (1) $(x - 2) = 6(y - 2)$.
Ecuación para la condición dentro de 18 años: (2) $(x + 18) = 2(y + 18)$.

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2) se obtiene $x = 32$, $y = 7$.

15.12 Encuentre el número de 2 cifras que satisfaga las 2 condiciones siguientes: (1) el cuádruplo de la cifra de las unidades es igual al doble de la correspondiente a las decenas menos 6, (2) el número es igual al triple del que se obtiene invirtiendo sus cifras menos 9.

SOLUCIÓN Sea t = cifra de las decenas y u = cifra de las unidades.
El número solicitado = $10t + u$; invirtiendo las cifras, el nuevo número = $10u + t$. Luego

$$(1)\quad 4u = 2t - 6 \qquad \text{y} \qquad (2)\quad 10t + u = 3(10u + t) - 9.$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2), $t = 7$, $u = 2$, el número solicitado es 72.

15.13 Cinco mesas y cuatro sillas cuestan \$115; tres mesas y cuatro sillas cuestan \$70. Encuentre el precio de cada mesa y de cada silla.

SOLUCIÓN Sea x = precio de una mesa, y = precio de una silla. Por lo tanto,

$$(1)\ 5x + 8y = \$115 \qquad \text{y} \qquad (2)\ 3x + 5y = \$70.$$

Resuelva (1) y (2) simultáneamente y obtenga $x = \$15$, $y = \$5$.

15.14 Un comerciante liquida sus existencias de camisas y corbatas por \$1 000; las primeras las vende a razón de \$10 el conjunto de 3 camisas y las segundas a \$2 cada una. Si hubiera vendido solamente la mitad de las camisas y las dos terceras partes de las corbatas, hubiera recaudado en total \$600. ¿Cuántas unidades vendió de cada uno de los artículos citados?

SOLUCIÓN Sea s = número de camisas vendidas, t = número de corbatas vendidas. Por lo tanto,

$$(1)\ \frac{10}{3}s + 2t = 1\,000 \qquad \text{y} \qquad (2)\ \frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}s\right) + 2\left(\frac{2}{3}t\right) = 600.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2), $s = 120$, $t = 300$.

15.15 Un inversionista ha colocado un cierto capital a 4% una parte y a 5% la otra recibiendo anualmente un interés de \$1 100. Si las hubiera invertido al revés, recibiría al año \$50 más en concepto de intereses. Encuentre la cantidad de dinero que ha invertido.

SOLUCIÓN Sea x = cantidad invertida a 4%, y = cantidad a 5%. Por lo tanto,

$$(1)\ 0.04x + 0.05y = 1\,100 \qquad \text{y} \qquad (2)\ 0.05x + 0.04y = 1\,150.$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2), $x = \$15\,000$, $y = \$10\,000$, y su suma es de \$25 000.

15.16 Un depósito *A* contiene 10 litros de agua y 5 litros de alcohol puro. Otro depósito *B* contiene 12 litros de agua y 3 litros de alcohol. Encuentre el número de litros que se debe extraer de cada depósito para conseguir una solución de 8 litros que contenga 25% en volumen de alcohol.

SOLUCIÓN En 8 galones de la solución que se quiere obtener habrá $0.25(8) = 2$ gal de alcohol.

Sean $x, y =$ volúmenes extraídos de los depósitos A y B, respectivamente; en estas condiciones se obtiene la primera ecuación de la forma (1) $x + y = 8$.

$$\text{Fracción de alcohol en el depósito } A = \frac{5}{10+5} = \frac{1}{3}, \text{ y en el } B = \frac{3}{12+3} = \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto, en x galones de A habrá $x/3$ galones de alcohol, y en y galones de B habrá $y/5$ galones de alcohol; luego, (2) $x/3 + y/5 = 2$.

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2) resulta $x = 3$ galones, $y = 5$ galones.

Otro método: utilizando sólo una incógnita. Sea $x =$ volumen extraído del depósito A; $8 - x =$ volumen extraído del B.

Entonces, $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}(8 - x) = 2$, de donde $x = 3$ galones, $8 - x = 5$ galones.

15.17 Cierta aleación contiene 20% de cobre y 5% de estaño. Encuentre el número de libras de cobre y estaño que se deben mezclar con 100 libras de la aleación dada para obtener una aleación que contenga 30% de cobre y 10% de estaño. Los porcentajes son valores en masa.

SOLUCIÓN Sean $x, y =$ número de libras de cobre y de estaño que se han de alear, respectivamente.

En 100 libras de la aleación dada hay 20 libras de cobre y 5 libras de estaño. Luego, en la nueva aleación,

$$\text{Fracción de cobre} = \frac{\text{libras de cobre}}{\text{libras de aleación}} \quad \text{o sea} \quad (1)\ 0.30 = \frac{20 + x}{100 + x + y}$$

$$\text{Fracción de estaño} = \frac{\text{libras de estaño}}{\text{libras de la aleación}} \quad \text{o sea} \quad (2)\ 0.10 = \frac{5 + y}{100 + x + y}.$$

La solución del sistema formado por (1) y (2) es $x = 1.75$ libras de cobre, $y = 7.5$ libras de estaño.

15.18 Encuentre la velocidad de una barca, en aguas en reposo, y la velocidad de la corriente del río, sabiendo que emplea 2 horas en navegar 9 millas en favor de la corriente y 6 horas en recorrer dicha distancia en sentido contrario.

SOLUCIÓN Sea $x =$ velocidad en agua en reposo, $y =$ velocidad de la corriente

En favor de la corriente:	$2\text{ hr} \times (x + y)\text{mi/hr} = 9\text{ mi}$	o	(1) $2x + 2y = 9$.
En contra de la corriente:	$6\text{ hr} \times (x - y)\text{mi/hr} = 9\text{ mi}$	o	(2) $6x - 6y = 9$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2), $x = 3$ millas/hr, $y = 3/2$ millas/hr.

15.19 Dos partículas se mueven a diferentes velocidades, pero constantes, alrededor de una circunferencia de 276 pies de longitud. Encuentre sus velocidades sabiendo que si parten del mismo punto e instante en sentido contrario se cruzan cada 6 segundos, y si lo hacen en las mismas condiciones pero en el mismo sentido, se cruzan cada 23 segundos.

SOLUCIÓN Sean $x, y =$ sus velocidades respectivas en pies/seg.

Sentido opuesto:	$6\text{ seg} \times (x + y)\text{ pie/seg} = 276$	o sea	(1) $6x + 6y = 276$.
Mismo sentido:	$23\text{ seg} \times (x - y)\text{ pie/seg} = 276$	o sea	(2) $23x - 23y = 276$.

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2), $x = 29$ pies/seg., $y = 17$ pies/seg.

15.20 La temperatura en la escala Fahrenheit $= m$(temperatura en la escala centígrada) $+ n$, es decir, $F = mC + n$, siendo m y n constantes. A la presión de 1 atm, la temperatura de ebullición del agua es 212 °F, o bien 100 °C, y el punto de congelación del agua es 32 °F, o bien 0 °C. *a*) Deduzca los valores de m y n. *b*) Encuentre la temperatura de la escala Fahrenheit que corresponde a -273 °C (la menor temperatura que se puede conseguir).

SOLUCIÓN

a) (1) $212 = m(100) + n$ y (2) $32 = m(0) + n$. Resolviendo, $m = 9/5$, $n = 32$.
b) $F = \frac{9}{5} = C + 32 = \frac{9}{5} = (-273) + 32 = 491.4 + 32 = -459$ °F, con aproximación al grado entero más cercano.

Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes:

15.21 (1) $2x - y + z = 3$
(2) $x + 3y - 2z = 11$
(3) $3x - 2y + 4z = 1$

SOLUCIÓN Para eliminar y entre (1) y (2), multiplique (1) por 3 y sume el resultado a (2) obteniendo así,

$$(1_1)\ \ 7x + z = 20.$$

Para eliminar y entre (2) y (3), multiplique (2) por 2, (3) por 3 y sume los resultados para obtener,

$$(2_1)\ \ 11x + 8z = 25.$$

Despejando (1_1) y (2_1) simultáneamente, se obtiene $x = 3$, $z = -1$. Sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones proporcionadas, se obtiene $y = 2$.

Por lo tanto, la solución es $(3, 2, -1)$.

15.22 (1) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{4} = 2,$ (2) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{2} = \dfrac{1}{6},$ (3) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{3} = \dfrac{23}{6}.$

SOLUCIÓN Para quitar denominadores, se multiplican las ecuaciones por 12 y se obtiene el sistema,

$$(1_1)\ \ 4x + 6y - 3z = 24$$
$$(2_1)\ \ 3x + 4y - 6z = 2$$
$$(3_1)\ \ 6x - 3y + 4z = 46$$

Para eliminar x entre (1_1) y (2_1) multiplique (1_1) por 3, (2_1) por -4 y sume los resultados con el fin de obtener,

$$(1_2)\ \ 2y + 15z = 64.$$

Para eliminar x entre (2_1) y (3_1), multiplique (2_1) por 2 y reste (3_1) a fin de obtener,

$$(2_2)\ \ 11y - 16z = -42.$$

La solución del sistema formado por (1_2) y (2_2) es $y = 2$, $z = 4$. Sustituyendo estos valores de y y z en una de las ecuaciones dadas, se obtiene $x = 6$.

Así pues, la solución del sistema formado por las tres ecuaciones dadas es (6, 2, 4).

15.23 (1) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} - \dfrac{2}{z} = 0,$ (2) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} + \dfrac{1}{z} = 1,$ (3) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{3}{z} = 3.$

SOLUCIÓN

Haciendo $\frac{1}{x} = u, \quad \frac{1}{y} = v, \quad \frac{1}{z} = w$

las ecuaciones dadas se transforman en

$$(1_1)\ u - 2v - 2w = 0$$
$$(2_1)\ 2u + 3v + w = 1$$
$$(3_1)\ 3u - v - 3w = 3$$

del que se obtiene $u = -2$, $v = 3$, $w = -4$.

Por lo tanto, $\frac{1}{x} = -2$ o $x = -1/2$, $\quad \frac{1}{y} = 3$ o $y = 1/3$, $\quad \frac{1}{z} = -4$ o $z = -1/4$.

La solución es $(-1/2, 1/3, -1/4)$.

Comprobación: (1) $\frac{1}{-1/2} - \frac{2}{1/3} - \frac{2}{-1/4} = 0$, $\quad$ (2) $\frac{2}{-1/2} + \frac{3}{1/3} + \frac{1}{-1/4} = 1$, $\quad$ (3) $\frac{3}{-1/2} - \frac{1}{1/3} - \frac{3}{-1/4} = 3$.

15.24 (1) $3x + y - z = 4$, $\quad$ (2) $x + y + 4z = 3$, $\quad$ (3) $9x + 5y + 10z = 8$.

SOLUCIÓN Restando (2) de (1), se obtiene (1_1) $2x - 5z = 1$.

Multiplicando (2) por 5 y restando (3) se obtiene (2_1) $-4x + 10z = 7$.

Ahora bien, (1_1) y (2_1) son incompatibles, ya que al multiplicar (1_1) por -2 resulta $-4x + 10z = -2$ que es incompatible con (2_1). Ello significa que el sistema dado es incompatible y que, por consiguiente, no tiene solución.

15.25 Los obreros A y B trabajando juntos pueden realizar una tarea en 4 días; B y C juntos pueden hacerlo en 3 días y A y C en 2.4 días. Encuentre el tiempo que tardaría cada obrero en realizar dicha tarea actuando independientemente.

SOLUCIÓN Sean a, b, c = los días que precisan cada uno para efectuar solos el trabajo, respectivamente. Se tendrá que $1/a$, $1/b$, $1/c$ = fracción del trabajo completo que cada uno realiza en 1 día, respectivamente. Luego,

(1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$, $\quad$ (2) $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$, $\quad$ (3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2.4}$.

Resolviendo el sistema formado por (1), (2) y (3), se obtiene $a = 6$, $b = 12$, $c = 4$ días.

Problemas propuestos

15.26 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por los métodos que se indican.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ Resolver (1) por el método de reducción, (2) por el de sustitución

b) $\begin{cases} 3x - y = -6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$ Resolver (1) gráficamente, (2) por el método de reducción

c) $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 5x - 3y = -2 \end{cases}$ Resolver (1) gráficamente, (2) por el método de reducción, 3) por el de sustitución.

15.27 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por uno de los métodos.

a) $\begin{cases} 2x - 5y = 10 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2y - x = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{5} = 6 \\ \dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{2} = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{y+2}{4} = 4 \\ \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x-y}{3} = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 3y = 9t \\ 4x - y = 8t \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 3x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2u - v = -5s \\ 3u + 2v = 7r - 4s \end{cases}$ Encuentre u y v en función de r y s.

h) $\begin{cases} 5/x - 3/y = 1 \\ 2/x + 1/y = 7 \end{cases}$

i) $\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ 2bx - ay = 2b^2 + 3ab - a^2 \end{cases}$ Encuentre x y y en función de a y b.

15.28 Indique cuáles de los sistemas siguientes son 1) compatibles, 2) indeterminados, 3) incompatibles.

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2y = 7 + 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x = 2y + 3 \\ x - 2y/3 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+3)/4 = (2y-1)/6 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} (x+2)/4 - (y-2)/12 = 5/4 \\ y = 3x - 7 \end{cases}$

15.29 *a*) Encuentre dos números sabiendo que si uno de ellos se suma con el doble del otro se obtiene 21, y que si este último se suma con el doble del primero resulta 18.

b) Encuentre una fracción sabiendo que si se aumentan el numerador y el denominador en 3 unidades se obtiene 2/3, y que si ambos se disminuyen en 2 unidades resulta ½.

c) Encuentre dos números sabiendo que el doble de su suma es igual al triple de su diferencia más 8, y que su semisuma es igual a su diferencia más 1.

d) Encuentre dos números sabiendo que si se divide el mayor por el menor da un cociente 6 y un resto también 6, y que si se divide el quíntuplo del menor por el mayor, el cociente es 2 y el resto 3.

15.30 *a*) Hace seis años, Agustín era 4 veces mayor que Pablo. Encuentre sus edades actuales sabiendo que dentro de 4 años sólo será dos veces mayor que Pablo.

b) *A* es 11 veces mayor que *B*. Dentro de cierto número de años, *A* será 5 veces mayor que *B* y, 5 años más tarde será 3 veces mayor que *B*. Encuentre sus edades actuales.

15.31 *a*) Encuentre el número de cifras sabiendo que el triple de la cifra de las decenas es igual al cuádruplo de la correspondiente a las unidades más 2, y que la diferencia entre el número dado y el obtenido al invertir sus cifras es igual al doble de la suma de éstas menos 2.

b) Encuentre un número de 2 cifras sabiendo que si se divide por el número obtenido al invertir sus cifras el cociente es 2 y el resto 7, y si se divide por la suma de sus cifras el cociente es 7 y el resto 6.

15.32 *a*) Dos libras de café y 3 kg de mantequilla cuestan \$4.20. Al cabo de 1 mes, el precio del café ha subido 10% y el de la mantequilla 20% de forma que la adquisición de los productos anteriores cuesta ahora \$4.86. Determine el precio original de cada uno de los productos.

b) Si se mezclan 3 galones de aceite del tipo *A* con 7 galones del tipo *B* el precio de la mezcla es de 43 centavos/galón. Sin embargo, si se mezclan 3 litros del aceite *A* con 2 litros del *B* el precio de la mezcla es de 46 centavos/galón. Encuentre el precio del galón de cada uno de los tipos de aceite.

c) Un inversionista tiene colocado parte de su capital a 3% y el resto a 5% de interés simple, percibiendo anualmente \$116 de intereses. Si aumenta en 25% el dinero que tiene a 3% y en 40% el que tiene a 5%, sus intereses anuales aumentan en \$41. Calcule el dinero que tiene invertido a cada uno de los tipos de interés.

15.33 *a*) Un depósito A contiene 32 galones de una solución de alcohol a 25% en volumen. Otro depósito B contiene 50 galones de solución de alcohol a 40% en volumen. Encuentre el volumen que se extrae de cada uno de ellos para formar 40 galones de solución de alcohol a 30% en volumen.

b) Un depósito A contiene 40 galones de una solución salina con una cantidad de sal de 80 libras. Otro depósito B tiene 120 galones de una solución con 60 libras de sal disuelta. Encuentre el volumen que se debe extraer de cada uno de ellos para formar 30 galones de solución cuya concentración sea de 1.5 libras/galón.

c) Una aleación contiene 10% de zinc y 20% de cobre. Encuentre el número de libras de zinc y cobre que se deben alear con 100 libras de la aleación dada, para obtener otra aleación con 20% de zinc y 24% de cobre. Los tantos por ciento son en masa.

d) Una aleación, cuya masa es de 600 libras, está compuesta por 100 libras de cobre y 50 libras de estaño. Otra aleación de 1 000 libras, está compuesta de 300 libras de cobre y 150 libras de estaño. Encuentre las masas de cobre y de estaño que se deben mezclar con las dos aleaciones dadas para obtener una tercera aleación con 32% de cobre y 28% de estaño. Los porcentajes son valores en masa.

15.34 *a*) Determine la velocidad de una motora, en aguas en reposo, y la velocidad de la corriente de un río, sabiendo que tarda 3 horas en recorrer una distancia de 45 millas aguas arriba, y 2 hr en recorrer 50 millas aguas abajo.

b) Encuentre las velocidades, en millas por hora, de dos automóviles sabiendo que se mueven, partiendo en el mismo instante y del mismo lugar, alrededor de una pista circular de 1 km de longitud, y que cuando se mueven en direcciones opuestas se cruzan cada 18 segundos, mientras que cuando lo hacen en la misma dirección se cruzan cada 90 segundos.

c) Un pasajero, situado en la parte frontal de un tren A, observa que otro tren B de 330 pies de longitud tarda 33 segundos en pasar por delante de él cuando ambos trenes marchan en la misma dirección, mientras que cuando lo hacen en direcciones contrarias tarda solamente 3 segundos. Calcule las velocidades de ambos trenes.

15.35 Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} 2x - y + 2z = -8 \\ x + 2y - 3z = 9 \\ 3x - y - 4z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = y - 2z \\ 2y = x + 3z + 1 \\ z = 2y - 2x - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} - z = 7 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{3y}{2} + \dfrac{z}{2} = -6 \\ \dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{4} - \dfrac{z}{3} = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 5 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} - \dfrac{4}{z} = -11 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{1}{z} = -6 \end{cases}$

15.36 Indique cuáles de los sistemas siguientes son 1) compatibles, 2) indeterminados, 3) incompatibles.

a) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ 3x - 5y + 3z = 4 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y - 3z = -2 \\ 3x - 4y + 5z = 1 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 3x - y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 8 \end{cases}$

15.37 Encuentre 3 números sabiendo que el primero es igual al segundo más la mitad del tercero, que la suma del segundo y el tercero es igual al primero más 1, y que si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero el resultado es 5.

15.38 Encuentre un número de 3 cifras sabiendo que si se divide por el número que resulta al invertir sus cifras el cociente es igual a 2 y el resto 25, que la cifra de las decenas es igual a la suma de la cifra de las centenas y la correspondiente a las unidades menos 1, y que si se resta la cifra de las unidades de la cifra de las decenas se obtiene el doble de la cifra de las centenas.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

15.26 *a*) $x = 2, y = -1$ *b*) $x = -1, y = 3$ *c*) $x = 1/2, y = 3/2$

15.27 *a*) $x = 5/2, y = 1$ *d*) $x = 5, y = 2$ *g*) $u = r - 2s, v = 2r + s$

b) $x = 3, y = 2$ *e*) $x = 3t/2, y = 2t$ *h*) $x = 1/2, y = 1/3$

c) $x = 6, y = 10$ *f*) $x = -1, y = 1$ *i*) $x = a + b, y = a - b$ si $a^2 \neq 2b^2$

15.28 *a*) Compatible, *c*) Indeterminado *e*) Compatible,
b) Incompatible, *d*) Incompatible, *f*) Indeterminado.

15.29 *a*) 5, 8 *b*) $7/12$ *c*) 7, 3 *d*) 16, 7

15.30 *a*) Pablo 11 años, Agustín 26 años *a*) *A* tiene 22 años, *B* tiene 2 años

15.31 *a*) 64 *b*) 83

15.32 *a*) Café 90 centavos/libra, mantequilla 80 centavos/libra
b) Tipo A 50 centavos/galón, Tipo B 40 centavos/galón,
c) $1 200 a 3%, $1 600 a 5%.

15.33 *a*) 26 2/3 galones de A, 13 1/3 galones de B *b*) 20 galones de A, 10 galones de B *c*) 150 libras de zinc, 100 libras de cobre *d*) 400 libras de cobre, 500 lb libras de estaño

15.34 *a*) Motor a 20 millas/hr, corriente 5 millas/hr *b*) 120 mi/hr, 80 mi/hr *c*) 60 pies/segundo, 50 pies/segundo

15.35 *a*) $x = -1, y = 2, z = -2$ *c*) $x = 6, y = 4, z = -3$
b) $x = 0, y = 2, z = 1$ *d*) $x = 1/2, y = -1/3, z = 1/6$

15.36 *a*) Indeterminado *b*) Incompatible *c*) Compatible

15.37 4, 2, 3

15.38 371

16 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

16.1 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación cuadrática en x es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c constantes y $a \neq 0$.

Por lo tanto, $x^2 - 6x + 5 = 0$, $2x^2 + x - 6 = 0$, $x^2 + 3x = 0$, y $3x^2 - 5 = 0$ son ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Las dos últimas ecuaciones se pueden dividir entre 2 y 3, respectivamente, obteniéndose $x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$ y $x^2 - \frac{5}{3} = 0$, siendo en ambos casos el coeficiente de x^2 igual a 1.

Una ecuación cuadrática incompleta es aquella en la que $b = 0$ o $c = 0$, por ejemplo, $4x^2 - 5 = 0$, $7x^2 - 2x = 0$, y $3x^2 = 0$.

Resolver una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación. Dichos valores de x se llaman ceros o raíces de la ecuación.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ se satisface con las raíces $x = 2$ y $x = 3$. Por ende, $x = 2$ y $x = 3$ son ceros o raíces de la ecuación.

16.2 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

A. Ecuaciones cuadráticas puras

EJEMPLOS 16.1 Despeje x en las ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 4 = 0$ *b*) $2x^2 - 21 = 0$ *c*) $x^2 + 9 = 0$

a) $x^2 - 4 = 0$. Entonces $x^2 = 4$, $x = \pm 2$, y las raíces son $x = 2, -2$.
b) $2x^2 - 21 = 0$. Entonces $x^2 = 21/2$ y las raíces son $x = \pm\sqrt{21/2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{42}$.
c) $x^2 + 9 = 0$. Entonces $x^2 = -9$ y las raíces son $x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$:

B. Por descomposición en factores

EJEMPLOS 16.2 Despeje x en las ecuaciones de segundo grado.

a) $7x^2 - 5x = 0$ *b*) $x^2 - 5x + 6 = 0$ *c*) $3x^2 + 2x - 5 = 0$ *d*) $x^2 - 4x + 4 = 0$

a) $7x^2 - 5x = 0$ puede escribirse como $x(7x - 5) = 0$. Puesto que el producto de dos factores es cero, se iguala cada uno a 0 y se resuelven las ecuaciones lineales. $x = 0$ o $7x - 5 = 0$. Por lo que $x = 0$ y $x = 5/7$ son las raíces de la ecuación.

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$ se puede escribir en la forma $(x - 3)(x - 2) = 0$. Puesto que el producto es igual a 0, se iguala cada factor a 0 y se resuelven las ecuaciones lineales, $x - 3 = 0$ o $x - 2 = 0$. Por lo que $x = 3$ y $x = 2$ son las raíces de la ecuación.

c) $3x^2 + 2x - 5 = 0$ puede escribirse como $(3x + 5)(x - 1) = 0$. Por lo tanto, $3x + 5 = 0$ o $x - 1 = 0$ y las raíces de la ecuación son $x = -5/3$ y $x = 1$.

d) $x^2 - 4x + 4 = 0$ puede escribirse como $(x - 2)(x - 2) = 0$. Por lo tanto, $x - 2 = 0$ y la ecuación tiene una doble raíz en $x = 2$.

C. Formando el cuadrado perfecto

EJEMPLO 16.3 Resuelva $x^2 - 6x - 2 = 0$.

Se escribe en un miembro los términos con la incógnita y se pasa el término independiente al otro miembro.

$$x^2 - 6x = 2.$$

Sumando 9 a ambos miembros el primero se transforma en un cuadrado perfecto, es decir,

$$x^2 - 6x + 9 = 2 + 9 \qquad \text{o} \qquad (x - 3)^2 = 11.$$

De donde $x - 3 = \pm\sqrt{11}$ y las raíces son $x = 3 \pm \sqrt{11}$.

Nota: Para aplicar este método 1) el coeficiente de x^2 debe ser 1 y 2) el número que hay que sumar a los dos miembros ha de ser el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

EJEMPLO 16.4 Resuelva $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Dividiendo entre $$x^2 - \frac{5x}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Sumando $\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{3}\right)\right]^2 = \frac{25}{36}$ a los dos miembros,

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36} = \frac{13}{36}, \qquad \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36},$$

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6} \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}.$$

D. Aplicando la fórmula general.
Las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dadas por la fórmula,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

en la que $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de *discriminante* de la ecuación cuadrática.
Para deducir esta fórmula, consulte el problema 16.5

EJEMPLO 16.5 Resuelva $3x^2 - 5x + 1 = 0$. En este caso, $a = 3$, $b = -5$, $c = 1$, por tanto,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6} \qquad \text{como en el ejemplo 16.4.}$$

EJEMPLO 16.6 Resuelva $4x^2 - 6x + 3 = 0$.
En este caso $a = 4$, $b = -6$ y $c = 3$.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(4)(3)}}{2(4)} = \frac{6 \pm \sqrt{-12}}{8} = \frac{6 \pm 2i\ \ 3}{8} = \frac{2(3 \pm i\sqrt{3})}{8}$$

$$x = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{4}$$

E. Solución gráfica
Las raíces o soluciones reales de $ax^2 + bx + c = 0$ son los valores de x que corresponden a $y = 0$ en la gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$. Esto es, las soluciones son las abscisas de los puntos en los que la parábola corta al eje x. Si la curva no corta al eje x, las raíces son imaginarias.

16.3 SUMA Y PRODUCTO DE LAS RAÍCES

La suma S y el producto P de las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por $S = -b/a$ y $P = c/a$.

Por ende, en $2x^2 + 7x - 6 = 0$ se tiene que $a = 2$, $b = 7$, $c = -6$ por lo que $S = -7/2$ y $P = -6/2 = -3$.

Por consiguiente la ecuación cuadrática cuyas raíces son r_1 y r_2 están dadas por $x^2 - Sx + P = 0$ donde $S = r_1 + r_2$ y $P = r_1r_2$. Por lo tanto, la ecuación cuadrática cuyas raíces son $x = 2$ y $x = -5$ es $x^2 - (2 - 5)x + 2(-5) = 0$ o $x^2 + 3x - 10 = 0$.

16.4 NATURALEZA DE LAS RAÍCES

El carácter de las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ está determinado por el valor del discriminante $b^2 - 4ac$. Cuando las raíces involucran a la unidad imaginaria i, se dice que las raíces no son reales.

Suponiendo que a, b y c son *números reales*, entonces

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces son *reales* y *distintas*,
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, las raíces son *reales* e *iguales*,
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces *no son reales*.

Suponiendo que a, b y c son *números racionales*, entonces

1. Si $b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto $\neq 0$, las raíces son reales, racionales y distintas.
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, las raíces son reales, racionales e iguales,
3. Si $b^2 - 4ac > 0$, pero no es un cuadrado perfecto, las raíces son reales, irracionales y distintas.
4. Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces no son reales.

Por lo tanto, la ecuación $2x^2 + 7x - 6 = 0$, que tiene un discriminante discriminant $b^2 - 4ac = 7^2 - 4(2)(-6) = 97$, tiene raíces reales, irracionales y distintas.

16.5 ECUACIONES CON RADICALES

Una ecuación radical tiene una o más incógnitas bajo el signo de una raíz (radical).

Por lo tanto, $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x} = 1$ y $\sqrt[3]{x} = \sqrt{y - 4}$ son ecuaciones con radicales.

Para resolver una ecuación irracional, se despeja uno de los radicales, aislándolo en un miembro de la ecuación, y se pasan todos los demás términos al otro miembro. Elevando ambos miembros de la ecuación a una potencia igual al índice del radical, desaparecerá dicha raíz. Este proceso se continúa hasta que se hayan eliminado todos los radicales presentes.

EJEMPLO 16.7 Resuelva $\sqrt{x-3} - \sqrt{x} = 1$

Trasponiendo términos, $\sqrt{x+3} = \sqrt{x} + 1$.
Elevando al cuadrado, $x + 3 = x + 2\sqrt{x} + 1$ o $\sqrt{x} = 1$.
Por último, elevando al cuadrado los dos miembros de $\sqrt{x} = 1$ se obtiene $x = 1$.
Comprobación: $\sqrt{1+3} - \sqrt{1} ? 1$, $2 - 1 = 1$.

Es muy importante comprobar los valores obtenidos ya que al aplicar este método se introducen a menudo soluciones extrañas a la ecuación que habrá que rechazar.

16.6 ECUACIONES DE TIPO CUADRÁTICO

Una ecuación de tipo cuadrático es de la forma $az^{2n} + bz^n + c = 0$, siendo $a \neq 0$, b, c y $n \neq 0$ constantes y z una función de x. Haciendo el cambio de variable $z^n = u$, la ecuación se transforma en $au^2 + bu + c = 0$, que es una ecuación de segundo grado en la variable u. Con los valores obtenidos de u se pueden obtener los correspondientes de z y, a partir de estos, hallar los de x.

EJEMPLO 16.8 Resuelva $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$.

Haciendo el cambio de variable $u = x^2$ y sustituyendo	$u^2 - 3u - 10 = 0$
Factorizando	$(u-5)(u-2) = 0$
Despejando u	$u = 5$ o $u = -2$
Sustituyendo $x^2 = u$	$x^2 = 5$ o $x^2 = -2$
Despejando x	$x = \pm\sqrt{5}$ o $x = \pm i\sqrt{2}$

EJEMPLO 16.9 Resuelva $(2x - 1)^2 - 7(2x - 1) + 12 = 0$.

Haciendo el cambio de variable $u = 2x -$ y sustituyendo	$u^2 + 7u + 12 = 0$
Factorizando	$(u+4)(u+3) = 0$
Despejando u	$u = -4$ o $u = -3$
Sustituyendo $2x - 1 = u$	$2x - 1 = -4$ o $2x - 1 = -3$
Despejando x	$x = -3/2$ o $x = -1$

Problemas resueltos

16.1 Resuelva

a) $x^2 - 16 = 0$. Entonces $x^2 = 16$, $x = \pm 4$.

b) $4t^2 - 9 = 0$. Entonces $4t^2 = 9$, $t^2 = 9/4$, $t = \pm 3/2$.

c) $3 - x^2 = 2x^2 + 1$. Entonces $3x^2 = 2$, $x^2 = 2/3$, $x = \pm\sqrt{2/3} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

d) $4x^2 + 9 = 0$. Entonces $x^2 = -9/4$, $x = \pm\sqrt{-9/4} = \pm\frac{3}{2}i$.

e) $\dfrac{2x^2-1}{x-3} = x + 3 + \dfrac{17}{x-3}$. Entonces $2x^2 - 1 = (x+3)(x-3) + 17$, $2x^2 - 1 = x^2 - 9 + 17$, $x^2 = 9$, y $x = \pm 3$.

Comprobación: Si el valor $x = 3$ se sustituye en la ecuación original, se tiene una división entre cero, la cual no está permitida. De aquí que $x = 3$ no es una solución.

Si $x = -3$, $\dfrac{2(-3)^2 - 1}{-3-3} ? -3 + 3 + \dfrac{17}{-3-3}$ o $\dfrac{17}{-6} = \dfrac{17}{-6}$ y $x = -3$ es una solución.

16.2 Resuelva por factorización

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$, $(x+6)(x-1) = 0$, $x = -6, 1$.

b) $t^2 = 4t$, $t^2 - 4t = 0$, $t(t-4) = 0$, $t = 0, 4$.

c) $x^2 + 3x = 28$, $x^2 + 3x - 28 = 0$, $(x+7)(x-4) = 0$, $x = -7, 4$.

d) $5x - 2x^2 = 2$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$, $(2x-1)(x-2) = 0$, $x = 1/2, 2$.

e) $\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{1}{t-4}=\dfrac{5}{4}$. Multiplicando por $4(t-1)(t-4)$,

$4(t-4)+4(t-1)=5(t-1)(t-4)$, $5t^2-33t+40=0$, $(t-5)(5t-8)=0$, $t=5, 8/5$

f) $\dfrac{y}{2p}=\dfrac{3p}{6y-5p}$, $6y^2-5py-6p^2=0$, $(3y+2p)(2y-3p)=0$, $y=-2p/3, 3p/2$

16.3 ¿Qué término se debe sumar a las siguientes expresiones para transformarlas en un trinomio cuadrado perfecto?

a) x^2-2x. Sumar $\left[\frac{1}{2}(\text{coeficiente de } x)\right]^2=\left[\frac{1}{2}(-2)\right]^2=1$. *Comprobación*: $x^2-2x+1=(x-1)^2$.

b) x^2+4x. Sumar $\left[\frac{1}{2}(\text{coeficiente de } x)\right]^2=\left[\frac{1}{2}(4)\right]^2=4$. *Comprobación*: $x^2+4x+4=(x+2)^2$.

c) $u^2+\dfrac{5}{4}u$. Sumar $\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{4}\right)\right]^2=\dfrac{25}{64}$. *Comprobación*: $u^2+\dfrac{5}{4}u+\dfrac{25}{64}=\left(u+\dfrac{5}{8}\right)^2$.

d) x^4+px^2. Sumar $\left[\frac{1}{2}(p)\right]^2=p^2/4$. *Comprobación*: $x^4+px^2+p^2/4=(x^2+p/2)^2$.

16.4 Resuelva completando el cuadrado

a) $x^2-6x+8=0$. Entonces $x^2-6x=-8$, $x^2-6x+9=-8+9$, $(x-3)^2=1$.

De aquí que $x-3=\pm 1$, $x=3\pm 1$, y las raíces son $x=4$ y $x=2$.

Comprobación: Para $x=4$, $4^2-6(4)+8\,?\,0$, $0=0$. Para $x=2$, $2^2-6(2)+8\,?\,0$, $0=.0$

b) $t^2=4-3t$. Entonces $t^2+3t=4$, $t^2+3t+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=4+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$, $\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$.

De aquí que $t+\dfrac{3}{2}=\pm\dfrac{5}{2}$, $t=-\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{5}{2}$, y las raíces son $t=1, -4$.

c) $3x^2+8x+5=0$. Entonces $x^2+\dfrac{8}{3}x=-\dfrac{5}{3}$, $x^2+\dfrac{8}{3}x+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=-\dfrac{5}{3}+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$, $\left(x+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$.

De aquí que $x+\dfrac{4}{3}=\pm\dfrac{1}{3}$, $x=-\dfrac{4}{3}\pm\dfrac{1}{3}$, y las raíces son $x=-1, -5/3$.

d) $x^2+4x+1=0$. Entonces $x^2+4x=-1$, $x^2+4x+4=3$, $(x+2)^2=3$.

De aquí que $x+2=\pm\sqrt{3}$, y las raíces son $x=-2\pm\sqrt{3}$.

Comprobación: Para $x=-2+\sqrt{3}$, $(-2+\sqrt{3})^2+4(-2+\sqrt{3})+1=(4-4\sqrt{3}+3)-8+4\sqrt{3}+1=0$.

Para $x=-2-\sqrt{3}$, $(-2-\sqrt{3})^2+4(-2-\sqrt{3})+1=(4+4\sqrt{3}+3)-8-4\sqrt{3}+1=0$.

e) $5x^2-6x+5=0$. Entonces $5x^2-6x=-5$, $x^2-\dfrac{6x}{5}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=-1+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$, $\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2=-\dfrac{16}{25}$.

De aquí que $x-3/5=\pm\sqrt{-16/25}$, y las raíces son $x=\dfrac{3}{5}\pm\dfrac{4}{5}i$.

16.5 Resuelva la ecuación $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, por el método de completar un cuadrado.

SOLUCIÓN

Dividiendo los dos miembros entre a $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ o $x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$.

Sumando $\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a}\right)\right]^2=\dfrac{b^2}{4a^2}$ a los dos miembros, $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}=-\dfrac{c}{a}+\dfrac{b^2}{4a^2}=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Entonces $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$, $\quad x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\quad$ y $\quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

16.6 Resuelva aplicando la fórmula general

a) $x^2-3x+2=0$. En este caso $a=1$, $b=-3$, $c=2$. Entonces

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2(1)}=\frac{3\pm1}{2} \qquad \text{o} \qquad x=1,\ 2.$$

b) $4t^2+12t+9=0$. En este caso $a=4$, $b=12$, $c=9$. Entonces

$$t=\frac{-12\pm\sqrt{(12)^2-4(4)(9)}}{2(4)}=\frac{-12\pm0}{8}=-\frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad t=-\frac{3}{2} \text{ es una raíz doble.}$$

c) $9x^2+18x-17=0$. En este caso $a=9$, $b=18$, $c=-17$. Entonces

$$x=\frac{-18\pm\sqrt{(18)^2-4(9)(-17)}}{2(9)}=\frac{-18\pm\sqrt{936}}{18}=\frac{-18\pm6\sqrt{26}}{18}=\frac{-3\pm\sqrt{26}}{3}.$$

d) $6u(2-u)=7$. Entonces $u^2-12u+7=0$ y

$$u=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(6)(7)}}{2(6)}=\frac{12\pm\sqrt{-24}}{12}=\frac{12\pm2\sqrt{6}i}{12}=1\pm\frac{\sqrt{6}}{6}i.$$

16.7 Resuelva gráficamente: *a*) $2x^2+3x-5=0$, *b*) $4x^2-12x+9=0$, *c*) $4x^2-4x+5=0$.

SOLUCIÓN

a) $y=2x^2+3x-5$

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4	-3	-6	-5	0	9

La gráfica de $y=2x^2+3x-5$ indica cuando $y=0$, $x=1$ y -2.5
Luego las raíces de $2x^2+3x-5=0$ son $x=1$, -2.5 (consulte la figura 16-1*a*).

b) $y=4x^2-12x+9$

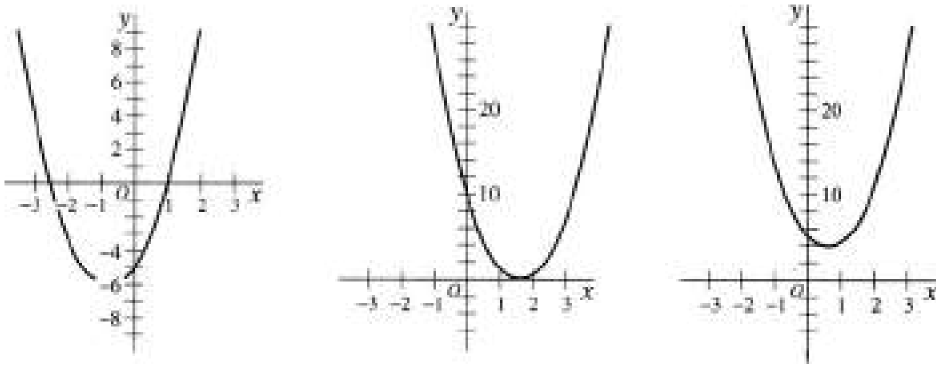
x	-1	0	1	2	3	4
y	25	9	1	1	9	25

La gráfica de $y=4x^2-12x+9$ es tangente al eje x en $x=1.5$, es decir, cuando $y=0$, $x=1.5$.
Por lo tanto, $4x^2-12x+9=0$ tiene dos raíces iguales $x=1.5$ (consulte la figura 16-1*b*).

b) $y=4x^2-12x+9$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	29	13	5	5	13	29

La gráfica de $y=4x^2-4x+5$ no corta al eje x, es decir, no hay un valor real de x para el cual $y=0$.
Luego las raíces de $4x^2-4x+5=0$ son imaginarias (consulte la figura 16-1*c*).
(Aplicando la fórmula general, las raíces son $x=\frac{1}{2}\pm i$).



Raíces reales distintas — *a*) Raíces reales iguales — *b*) Raíces no reales — *c*)

Figura 16-1

16.8 Demuestre que la suma S y el producto P de las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son $S = -b/a$ y $P = c/a$.

SOLUCIÓN

Aplicando la fórmula general, las raíces son

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

La suma de las raíces es

$$S = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

El producto de las raíces es

$$P = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

16.9 Sin resolver las ecuaciones, encontrar la suma S y el producto P de las raíces.

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$. Aquí $a = 1$, $b = -7$, $c = 6$; entonces $S = -\frac{b}{a} = 7$, $P = \frac{c}{a} = 6$.

b) $2x^2 + 6x - 3 = 0$. Aquí $a = 2$, $b = 6$, $c = -3$; entonces $S = -\frac{6}{2} = -3$, $P = \frac{-3}{2}$.

c) $x + 3x^2 + 5 = 0$. Escríbala como $3x^2 + x + 5 = 0$. Entonces $S = -\frac{1}{3}$, $P = \frac{5}{3}$.

d) $3x^2 - 5x = 0$. Aquí $a = 3$, $b = -5$, $c = 0$; entonces $S = \frac{5}{3}$, $P = 0$.

e) $2x^2 + 3 = 0$. Aquí $a = 2$, $b = 0$, $c = 3$; entonces $S = 0$, $P = \frac{3}{2}$.

f) $mnx^2 + (m^2 + n^2)x + mn = 0$. Entonces $S = -\frac{m^2+n^2}{mn}$, $P = \frac{mn}{mn} = 1$.

g) $0.3x^2 - 0.01x + 4 = 0$. Entonces $S = -\frac{-0.01}{0.3} = \frac{1}{30}$, $P = \frac{4}{0.3} = \frac{40}{3}$.

16.10 Encuentre el discriminante $b^2 - 4ac$ de las ecuaciones siguientes y determine el carácter de sus raíces.

a) $x^2 - 8x + 12 = 0.$ $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(12) = 16$; las raíces son reales, racionales, distintas.

b) $3y^2 + 2y - 4 = 0.$ $b^2 - 4ac = 52$; las raíces son reales, irracionales, distintas.

c) $2x^2 - x + 4 = 0.$ $b^2 - 4ac = -31$; las raíces son imaginarias conjugadas.

d) $4z^2 - 12z + 9 = 0.$ $b^2 - 4ac = 0$; las raíces son reales, racionales, iguales.

e) $2x - 4x^2 = 1$ o $4x^2 - 2x + 1 = 0.$ $b^2 - 4ac = -12$; las raíces son imaginarias conjugadas.

f) $\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{3}x + 4\sqrt{2} = 0.$ Los coeficientes son reales pero no racionales.
$b^2 - 4ac = 16$; las raíces son reales y distintas.

16.11 Encuentre la ecuación cuadrática de coeficientes enteros cuyas raíces son las indicadas. (S = suma de raíces, P = producto de raíces).

a) 1, 2
Método 1. $S = 1 + 2 = 3$, $P = 2$; de aquí que $x^2 - 3x + 2 = 0.$
Método 2. $(x - 1)$ y $(x - 2)$ deben ser factores de la expresión cuadrática.
Entonces $(x - 1)(x - 2) = 0$ o $x^2 - 3x + 2 = 0.$

b) 3, 2
Método 1. $S = -1$, $P = -6$; de aquí que $x^2 + x - 6 = 0.$
Método 2. $[x - (-3)]$ y $(x - 2)$ son factores de la expresión cuadrática.
Entonces $(x + 3)(x - 2) = 0$ o $x^2 + x - 6 = 0.$

c) $\frac{4}{3}, -\frac{3}{5}.$ $S = \frac{11}{15}, P = -\frac{4}{5};$ de aquí que $x^2 - \frac{11}{15}x - \frac{4}{5} = 0$ o $15x^2 - 11x - 12 = 0.$

d) $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$
Método 1. $S = 4$, $P = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2$; de aquí que $x^2 - 4x + 2 = 0.$
Método 2. $[x - (2 + \sqrt{2})]$ y $[x - (2 - \sqrt{2})]$ son factores de la expresión cuadrática.
Entonces $[x - (2 + \sqrt{2})][x - (2 - \sqrt{2})] = [(x - 2) - \sqrt{2}][(x - 2) + \sqrt{2}] = 0,$
$(x - 2)^2 - 2 = 0$ o $x^2 - 4x + 2 = 0.$
Método 3. Puesto $x = 2 \pm \sqrt{2}$, $x - 2 = \pm\sqrt{2}$. Elevando al cuadrado, $(x - 2)^2 = 2$ o $x^2 - 4x + 2 = 0.$

e) $-3 + 2i, -3 - 2i$
Método 1. $S = -6$, $P = (-3 + 2i)(-3 - 2i) = 13$; de aquí que $x^2 + 6x + 13 = 0.$
Método 2. $[x - (-3 + 2i)]$ y $[x - (-3 - 2i)$ son factores de la expresión cuadrática.
Entonces $[(x + 3) - 2i][(x + 3) + 2i] = 0$, $(x + 3)^2 + 4 = 0$ o $x^2 + 6x + 13 = 0.$

16.12 Encuentre el valor de las constante p en las ecuaciones para que se satisfaga la condición que se indica.

a) $2x^2 - px + 4 = 0$ tenga una raíz igual a -3.
Puesto que $x = -3$ es una raíz, debe satisfacer a la ecuación dada.
Entonces $2(-3)^2 - p(-3) + 4 = 0$ y $p = -22/3$:

b) $(p + 2)x^2 + 5x + 2p = 0$ el producto de sus raíces sea igual a $2/3$.
El producto de las raíces es

$$\frac{2p}{p+2}; \qquad \text{Entonces} \qquad \frac{2p}{p+2} = \frac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad p = 1.$$

c) $2px^2 + px + 2x = x^2 + 7p + 1$ la suma de sus raíces sea igual a $-4/3$:
Escribiendo la ecuación de la forma $(2p - 1)x^2 + (p + 2)x - (7p + 1) = 0.$
La suma de las raíces es

$$-\frac{p+2}{2p-1} = -\frac{4}{3} \qquad \text{y} \qquad p = 2.$$

d) $3x^2 + (p + 1) + 24 = 0$ una de las raíces sea el doble de la otra. Sean las raíces r, $2r$.

El producto de las raíces es $r(2r) = 8$; Puesto que $r^2 = 4$ y $r = \pm 2$.

La suma de las raíces es $3r = (-p + 1)/3$. Sustituyendo $r = 2$ y $r = -2$ en esta ecuación se obtiene $p = -19$ y $p = 17$ respectivamente.

a) $2x^2 - 12x + p + 2 = 0$ la diferencia entre sus raíces sea igual a 2.

Sean las raíces *r*, *s*; entonces (1) $r - s = 2$. La suma de las raíces es 6; entonces (2) $r + s = 6$. La solución del sistema formado por (1) y (2) es $r = 4$, $s = 2$.

Sustituyendo $x = 2$ o $x = 4$ en la ecuación dada y se obtiene $p = 14$.

16.13 Encuentre las raíces de las ecuaciones cuadráticas siguientes de forma que se cumpla la condición que se indica.

a) $(2k + 2)x^2 + (4 - 4k)x + k - 2 = 0$ tiene raíces que son recíprocos una de otra.

Sean r y $1/r$ las raíces, su producto será 1.

El producto de las raíces es $\dfrac{k-2}{2k+2} = 1$, de donde $k = -4$.

Se hace $k = -4$ en la ecuación dada; con lo cual $3x^2 - 10x + 3 = 0$ y las raíces son $1/3$, 3.

b) $kx^2 - (1 + k)x + 3k + 2 = 0$ la suma de sus raíces sea igual al doble de su producto.

Suma de raíces = 2(producto de raíces); se tendrá

$$\frac{1+k}{k} = 2\left(\frac{3k+2}{k}\right) \qquad \text{y} \qquad k = -\frac{3}{5}.$$

Se sustituye $k = -3/5$ en la ecuación dada; con lo cual $3x^2 + 2x - 1 = 0$ y las raíces son -1, $1/3$.

c) $(x + k)^2 = 2 - 3k$ tenga raíces iguales.

Escriba la ecuación como $x^2 + 2kx + (k^2 + 3k - 2) = 0$, donde $a = 1$, $b = 2k$, $c = k^2 + 3k - 2$.

Las raíces son iguales si el discriminante $(b^2 - 4ac) = 0$.

Entonces, a partir de $b^2 - 4ac = (2k)^2 - 4(1)(k^2 + 3k - 2) = 0$, se obtiene $k = 2/3$.

Sustituyendo $k = 2/3$ en la ecuación dada y resolviendo se obtiene la raíz doble $-2/3$.

16.14 Resuelva

a) $\sqrt{2x+1} = 3$. Elevando al cuadrado, $2x + 1 = 9$ y $x = 4$.

Comprobación. $\sqrt{2(4)+1}$? 3, 3 = 3.

b) $\sqrt{5+2x} = x + 1$. Elevando al cuadrado, $5 + 2x = x^2 + 2x + 1$, $x^2 = 4$ y $x = \pm 2$.

Comprobación. Para $x = 2$, $\sqrt{5+2(2)}$? $2 + 1$ o $3 = 3$.

Para $x = -2$, $\sqrt{5 + 2(-2)}$? $-2 + 1$ o $\sqrt{1} = -1$ que no es cierto, ya que $\sqrt{1} = 1$.

Así pues $x = 2$ es la única solución; $x = -2$ es una raíz extraña.

c) $\sqrt{3x\ \ 5} = x - 1$. Elevando al cuadrado, $3x - 5 = x^2 - 2x + 1$, $x^2 - 5x + 6 = 0$ y $x = 3, 2$.

Comprobación. Para $x = 3$, $\sqrt{3(3)\ \ 5}$ *p* ? 3 1 o 2 = 2. Para $x = 2$, $\sqrt{3(2)\ -5}$ *p* ? 2 1 o 1 = 1.

Por lo tanto ambas $x = 3$ y $x = 2$ son soluciones de la ecuación dada.

d) $\sqrt[3]{x^2 - x + 6} - 2 = 0$. Se tendrá $\sqrt[3]{x^2 - x + 6} = 2$, $x^2 - x + 6 = 8$, $x^2 - x - 2 = 0$ y $x = 2, -1$.

Comprobación. Para $x = 2$, $\sqrt[3]{2^2 - 2 + 6}$ − 2 ? 0 o 2 −2 = 0.

Para $x = -1$, $\sqrt[3]{(-1)^2 - (-1) + 6} - 2$? 0 o $2 - 2 = 0$.

16.15 Resuelva

a) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1$. Trasponiendo términos, (1) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x} + 1$.

Elevando al cuadrado ambos miembros de (1), $2x + 1 = x + 2\sqrt{x} + 1$ o (2) $x = 2\sqrt{x}$.

Elevando al cuadrado (2), $x^2 = 4x$; entonces $x(x - 4) = 0$ y $x = 0, 4$.

Comprobación. Para $x = 0$, $\sqrt{2(0)+1} - \sqrt{0}$? 1, 1 = 1. Para $x = 4$, $\sqrt{2(4)+1} - \sqrt{4}$? 1, 1 = 1.

b) $\sqrt{4x-1} + \sqrt{2x+3} = 1$. Trasponiendo términos, (1) $\sqrt{4x-1} = 1 - \sqrt{2x+3}$.

Elevando al cuadrado (1), $4x - 1 = 1 - 2\sqrt{2x+3} + 2x + 3$ o (2) $2\sqrt{2x+3} = 5 - 2x$.

Elevando al cuadrado (2), $4(2x + 3) = 25 - 20x + 4x^2$, $4x^2 - 28x + 13 = 0$ y $x = 1/2$, $13/2$.

Comprobación. Para $x = 1/2$, $\sqrt{4(1/2) - 1} + \sqrt{2(1/2) + 3}$? 1 o sea $3 = 1$ que no es válido.
Para $x = 13/2$, $\sqrt{4(13/2) - 1} + \sqrt{2(13/2) + 3}$? 1 o sea $9 = 1$ que no es válido.
De aquí que $x = 1/2$ y $x = 13/2$ son raíces extrañas; la ecuación no tiene solución.

c) $\sqrt{\sqrt{x + 16} - \sqrt{x}} = 2$. Elevando al cuadrado, $\sqrt{x + 16} - \sqrt{x} = 4$ o sea (1) $\sqrt{x + 16} = \sqrt{x} + 4$.

Elevando al cuadrado (1), $x + 16 = x + 8\sqrt{x} + 16$, $8\sqrt{x} = 0$, y $x = 0$ es una solución.

16.16 Resuelva

a) $\sqrt{x^2 + 6x} = x + \sqrt{2x}$.
Elevando al cuadrado, $x^2 + 6x = x^2 + 2x\sqrt{2x} + 2x$, $2x\sqrt{2x} = 4x$, $x(\sqrt{2x} - 2) = 0$.
Luego $x = 0$; y a partir de $\sqrt{2x} - 2 = 0$, $\sqrt{2x} = 2$, $2x = 4$, $x = 2$.
Tanto $x = 0$ y $x = 2$ satisfacen a las ecuaciones dadas.

b) $\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 1$. Multiplicando por $\sqrt{x}$ se obtiene (1) $x - 2 = \sqrt{x}$.
Elevando al cuadrado (1), $x^2 - 4x + 4 = x$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $(x - 1)(x - 4) = 0$, y $x = 1, 4$.
Solamente $x = 4$ satisface a la ecuación dada; $x = 1$ es extraña.

16.17 Resuelva la ecuación $x^2 - 6x - \sqrt{x^2 - 6x - 3} = 5$.

SOLUCIÓN Sea $x^2 - 6x = u$; entonces $u - \sqrt{u - 3} = 5$ o (1) $\sqrt{u - 3} = u - 5$.
Elevando al cuadrado (1), $u - 3 = u^2 - 10u + 25$, $u^2 - 11u + 28 = 0$, y $u = 7, 4$.
Puesto que solamente $u = 7$ satisface (1), sustituya $u = 7$ en $x^2 - 6x = u$ y obtenga

$$x^2 - 6x - 7 = 0, \qquad (x - 7)(x + 1) = 0, \qquad \text{y} \qquad x = 7, -1:$$

Tanto $x = 7$ como $x = -1$ satisfacen la ecuación original y, por lo tanto, son la solución.
Nota: Si se escribe la ecuación dada como $\sqrt{x^2 - 6x - 3} = x^2 - 6x - 5$ y se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación, la ecuación resultante de cuarto grado resulta difícil de resolver.

16.18 Resuelva la ecuación

$$\frac{4 - x}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}} = \frac{3}{5}.$$

SOLUCIÓN Elevando al cuadrado,

$$\frac{16 - 8x + x^2}{x^2 - 8x + 32} = \frac{9}{25};$$

luego, $25(16 - 8x + x^2) = 9(x^2 - 8x + 32)$, $x^2 - 8x + 7 = 0$, y $x = 7, 1$. La única solución es $x = 1$; rechazar $x = 7$, ya que es una solución extraña.

16.19 Resuelva

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. Sea $x^2 = u$; entonces $u^2 - 10u + 9 = 0$ y $u = 1, 9$.
Para $u = 1$, $x^2 = 1$ y $x = \pm 1$; Para $u = 9$, $x^2 = 9$ y $x = \pm 3$.
Las cuatro soluciones son $x = \pm 1, +3$; que satisfacen la ecuación dada.

b) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$. Sea $x^2 = u$; entonces $2u^2 + u - 1 = 0$ y $u = \frac{1}{2}, -1$.
Si $u = \frac{1}{2}$, $x^2 = \frac{1}{2}$ y $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$; si $u = -1$, $x^2 = -1$ y $x = \pm i$.
Las cuatro soluciones son $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\pm$i.

c) $\sqrt{x} = \sqrt[4]{x} - 2 = 0.$ Sea $\sqrt[4]{x} = u$; entonces $u^2 - u - 2 = 0$ y $u = 2,\ 1.$
Si $u = 2$, $\sqrt[4]{x} = 2$ y $x = 2^4 = 16$. Puesto que $\sqrt[4]{x}$ es positiva, no puede ser igual a -1.
De aquí que $x = 16$ es la única solución de la ecuación dada.

d) $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0.$

Sea $x + \frac{1}{x} = u$; entonces $2u^2 - 7u + 5 = 0$ y $u = 5/2,\ 1.$

Para $u = \frac{5}{2}$, $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$ y $x = 2,\ \frac{1}{2}$.

Para $u = 1$, $x + \frac{1}{x} = 1$, $x^2 - x + 1 = 0$ y $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$.

Las cuatro soluciones son $x = 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i.$

e) $9(x + 2)^{-4} + 17(x + 2)^{-2} - 2 = 0.$ Sea $(x + 2)^{-2} = u$; entonces $9u^2 + 17u - 2 = 0$ y $u = 1/9,\ -2.$
Si $(x + 2)^{-2} = 1/9$, $(x + 2)^2 = 9$, $(x + 2) = \pm 3$ y $x = 1,\ -5.$
Si $(x + 2)^{-2} = -2$, $(x + 2)^2 = -\frac{1}{2}$, $(x + 2) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}i$ y $x = -2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}i.$
Las cuatro soluciones son $x = 1,\ -5,\ -2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}i.$

16.20 Encuentre los valores de x que satisfacen las ecuaciones siguientes:

a) $16\left(\frac{x}{x+1}\right)^4 - 25\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 9 = 0.$

Sea $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = u$; entonces $16u^2 - 25u + 9 = 0$ y $u = 1,\ 9/16.$

Si $u = 1$, $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1$ o $\frac{x}{x+1} = \pm 1.$

La ecuación $\frac{x}{x+1} = 1$

no tiene solución; la ecuación $\frac{x}{x+1} = -1$

tiene como solución $x = -1/2.$
Si $u = 9/16$,

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad \text{o} \quad \frac{x}{x+1} = \pm\frac{3}{4} \text{ por lo que } x = 3,\ -3/7.$$

Las soluciones solicitadas son $x = -1/2,\ -3/7,\ 3.$

b) $(x^2 + 3x + 2)^2 - 8(x^2 + 3x) = 4.$ Sea $x^2 + 3x = u$; entonces $(u + 2)^2 - 8u = 4$ y $u = 0,\ 4.$
Si $u = 0$, $x^2 + 3x = 0$ y $x = 0,\ -3$; si $u = 4$, $x^2 + 3x = 4$ y $x = -4,\ 1.$
Las soluciones son $x = -4,\ -3,\ 0,\ 1.$

16.21 Encuentre dos números positivos sabiendo que uno de ellos es igual al triple del otro más 5 y que el producto de ambos es igual a 68.

SOLUCIÓN Sea x = número menor; será $3x + 5$ = número mayor.
Luego $x(3x + 5) = 68$, $3x^2 + 5x - 68 = 0$, $(3x + 17)(x - 4) = 0$, y $x = 4,\ -17/3.$
Se rechaza $-17/3$ ya que el enunciado establece que los números sean positivos.
Los números buscados son $x = 4$ y $3x + 5 = 17.$

16.22 Encuentre un número sabiendo que la suma del triple del mismo con el doble de su recíproco es igual a 5.

SOLUCIÓN Sea x = el número y $1/x$ = su recíproco.

Se tendrá que $3x + 2(1/x) = 5$, $3x^2 - 5x + 2 = 0$, $(3x - 2)(x - 1) = 0$, y $x = 1, 2/3$.

Comprobación: Para $x = 1$, $3(1) + 2(1/1) = 5$; para $x = 2/3$, $3(2/3) + 2(3/2) = 5$.

16.23 Encuentre las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es de 50 pies y su área es 150 pies cuadrados.

SOLUCIÓN Suma de los cuatro lados = 50 pies; luego suma de los dos lados adyacentes = 25 pies (consulte la figura 16-2). Sea x y $25 - x$ las longitudes de 2 lados adyacentes.

El área es $x(25 - x) = 150$: luego, $x^2 - 25x + 150 = 0$, $(x - 10)(x - 15) = 0$, y $x = 10, 15$.

Por tanto, $25 - x = 15, 10$; y las dimensiones del rectángulo son 10 pies por 15 pies.

16.24 La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a 34 pulgadas. Encuentre las longitudes de los catetos sabiendo que uno de ellos es 14 pulgadas mayor que el otro.

SOLUCIÓN Sean x y $x + 14$ las longitudes de los catetos (consulte la figura 16-3)

Se tendrá $x^2 + (x + 14)^2 = (34)^2$, $x^2 + 14x - 480 = 0$, $(x + 30)(x - 16) = 0$, y $x = -30, 16$.

Como $x = -30$ no tiene sentido físico, se tendrá que $x = 16$ pulgadas y $x + 14 = 30$ pulgadas.

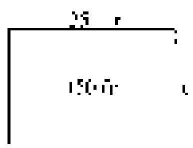


Figura 16-2

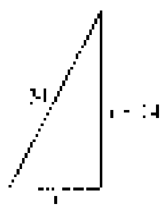


Figura 16-3

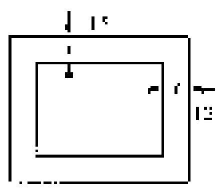


Figura 16-4

16.25 Las dimensiones exteriores de un marco de fotografía son 12 por 15 pulgadas. Sabiendo que el ancho permanece constante, encuentre su valor *a*) cuando la superficie de la fotografía es de 88 pulgadas cuadradas y *b*) cuando dicha superficie vale 100 pulgadas cuadradas.

SOLUCIÓN Sea x = anchura del cuadro; las dimensiones del cuadro son $(15 - 2x)$, $(12 - 2x)$ (consulte la figura 16-4).

a) Área del cuadro = $(15 - 2x)(12 - 2x) = 88$; luego $2x^2 - 27x + 46 = 0$, $(x - 2)(2x - 23) = 0$, y $x = 2, 11\frac{1}{2}$. Es evidente que la anchura no puede ser $11\frac{1}{2}$ pulgadas. Luego la anchura del marco es de 2 pulgadas.

Comprobación: El área de del cuadro es $(15 - 4)(12 - 4) = 88$ pulgadas cuadradas.

b) En este caso $(15 - 2x)(12 - 2x) = 100$, $2x^2 - 27x + 40 = 0$ y, aplicando la fórmula general,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{27 \pm \sqrt{409}}{4} \quad \text{o sea} \quad x = 11.8, 1.7 \text{ (aproximadamente).}$$

Se rechaza $x = 11.8$ pulgadas, ya que no puede ser la anchura. La anchura solicitada es 1.7 pulgadas.

16.26 Un piloto realiza un vuelo de 600 millas. Sabiendo que si aumenta la velocidad en 40 millas/hora podría recorrer dicha distancia empleando 30 minutos menos. Encuentre la velocidad promedio.

SOLUCIÓN Sea x = velocidad media real en millas/hora

$$\text{Tiempo en horas} = \frac{\text{distancia en millas}}{\text{velocidad en millas/hora}}.$$

Tiempo para volar 600 millas a x millas/hora − tiempo para volar 600 millas a $(x + 40)$ millas/hora = $\frac{1}{2}$ hr.

Luego
$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x+40} = \frac{1}{2}.$$

Resolviendo, se obtiene la velocidad x = 200 millas/hora.

16.27 Un comerciante compra determinado número de camisas por $180 y las vende todas menos 6 con una ganancia de $2 en cada camisa. Sabiendo que con el dinero recaudado en la venta podría haber comprado 30 camisas más que antes, calcule el precio de cada camisa.

SOLUCIÓN Sea x = costo de la camisa en dólares; $180/x$ = número de camisas que compró.

Luego
$$\left(\frac{180}{x} - 6\right)(x+2) = x\left(\frac{180}{x} + 30\right).$$

Despejando, x = $3 por camisa.

16.28 Dos operarios A y B juntos, realizan una tarea en 10 días. Trabajando por separado, A tardaría 5 días más que B. Encuentre el número de días que tardarían en hacer la tarea trabajando cada uno por sí solo.

SOLUCIÓN Sean n, $n - 5$ = número de días que tardarían A y B, respectivamente, en efectuar la tarea trabajando individualmente.

En 1 día, A realiza $1/n$ y B hace $1/(n - 5)$ de la tarea. Por lo tanto, en 10 días trabajando juntos,

$$10\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-5}\right) = 1 \text{ trabajo completo.}$$

Luego, $10(2n - 5) = n(n - 5)$, $n^2 - 25n + 50 = 0$, y

$$n = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 200}}{2} = 22.8,\ 2.2.$$

Rechazando $n = 2.2$, la solución es $n = 22.8$ días, $n - 5 = 17.8$ días.

16.29 Se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad inicial de v_0 pies/segundo y su distancia s en pies al punto de lanzamiento viene dada, en función del tiempo, t en segundos, por la fórmula $s = v_0t - 16t^2$. Suponiendo que el objeto se lanza con una velocidad inicial de 128 pies/segundo, ¿ en cuánto tiempo estará a 100 pies por arriba del punto de proyección?

SOLUCIÓN

$$s = v_0t - 16t^2, \quad 100 = 128t - 16t^2, \quad 4t^2 - 32t + 25 = 0, \quad \text{y} \quad t = \frac{32 \pm \sqrt{624}}{8} = 7.12, 0.88.$$

En $t = 0.88$ segundos, $s = 100$ pies y el objeto está ascendiendo; en $t = 7.12$ segundos, $s = 100$ pies y el objeto está descendiendo. Lo anterior se puede observar en la gráfica de s en función de t (consulte la figura 16-5).

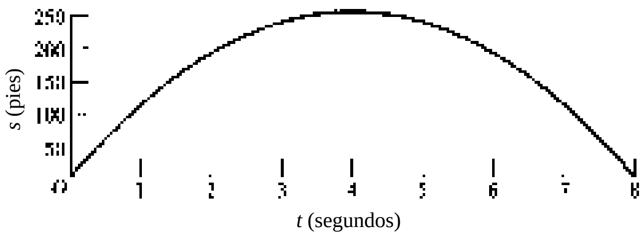


Figura 16-5

Problemas propuestos

16.30 Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $x^2 - 40 = 9$
b) $2x^2 - 400 = 0$
c) $x^2 + 36 = 9 - 2x^2$
d) $\frac{x}{16} = \frac{4}{x}$
e) $\frac{y^2}{3} = \frac{y^2}{6} + 2$
f) $\frac{1-2x}{3-x} = \frac{x-2}{3x-1}$
g) $\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{4}$
h) $x - \frac{2x}{x+1} = \frac{5}{x+1} - 1$

16.31 Resuelva las ecuaciones siguientes por el método de descomposición en factores.

a) $x^2 - 7x = -12$
b) $x^2 + x = 6$
c) $x^2 = 5x + 24$
d) $2x^2 + 2 = 5x$
e) $9x^2 = 9x - 2$
f) $4x - 5x^2 = -12$
g) $\frac{x}{2a} = \frac{4a}{x+2a}$
h) $\frac{1}{4-x} - \frac{1}{2+x} = \frac{1}{4}$
i) $\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+2}{2x-1} = \frac{10}{3}$
j) $\frac{2c-3y}{y-c} - \frac{y}{2y-c} = \frac{2}{3}$

16.32 Resuelva las ecuaciones siguientes completando el cuadrado perfecto.

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$
b) $x(x-3) = 4$
c) $2x^2 = x + 1$
d) $3x^2 - 2 = 5x$
e) $4x^2 = 12x - 7$
f) $6y^2 = 19y - 15$
g) $2x^2 + 3a^2 = 7ax$
h) $12x - 9x^2 = 5$

16.33 Resuelva las ecuaciones siguientes aplicando la fórmula general.

a) $x^2 - 5x = 6$
b) $x^2 - 6 = x$
c) $3x^2 - 2x = 8$
d) $16x^2 - 8x + 1 = 0$
e) $x(5x-4) = 2$
f) $9x^2 + 6x = -4$
g) $\frac{5x^2 - 2p^2}{x} = \frac{p}{3}$
h) $\frac{2x+3}{4x-1} = \frac{3x-2}{3x+2}$

16.34 Resuelva gráficamente las ecuaciones siguientes:

a) $2x^2 + x - 3 = 0$
b) $4x^2 - 8x + 4 = 0$
c) $x^2 - 2x = 2$
d) $2x^2 + 2 = 3x$
e) $6x^2 - 7x - 5 = 0$
f) $2x^2 + 8x + 3 = 0$

16.35 Calcule, sin resolver las ecuaciones, la suma S y el producto P de las raíces de las ecuaciones siguientes:

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$
b) $x - x^2 = 2$
c) $2x(x+3) = 1$
d) $2x^2 + 6x - 5 = 0$
e) $3x^2 - 4 = 0$
f) $4x^2 + 3x = 0$
g) $2x^2 + 5kx + 3k^2 = 0$
h) $0.2x^2 - 0\ 1x + 0.03 = 0$
i) $\sqrt{2x^2} - \sqrt{3x} + 1 = 0$

16.36 Encuentre el discriminante *b2 – 4ac* y determine el carácter de las raíces.

a) $2x^2 - 7x + 4 = 0$
b) $3x^2 = 5x - 2$
c) $3x - x^2 = 4$
d) $x(4x+3) = 5$
e) $2x^2 = 5 + 3x$
f) $4x\sqrt{3} = 4x^2 + 3$
g) $1 + 2x = 2x^2 = 0$
h) $3x + 25/3x = 10$

16.37 Encuentre una ecuación cuadrática de coeficientes enteros (si es posible) cuyas raíces sean las indicadas.

a) $2, -3$ *d*) $-2, -5$ *g*) $-1+i, -1-i$ *j*) $\sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{3}+\sqrt{2}$

b) $-3, 0$ *e*) $-1/3, 1/2$ *h*) $-2-\sqrt{6}, -2+\sqrt{6}$ *k*) $a+bi, a-bi \quad a, b$ enteros

c) $8, -4$ *f*) $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$ *i*) $2+\frac{3}{2}i, 2-\frac{3}{2}i$ *l*) $\frac{m+\sqrt{n}}{2}, \frac{m-\sqrt{n}}{2} \quad m, n$ enteros

16.38 Calcule el valor de la constante p en las ecuaciones siguientes para que se satisfaga la condición que se indica.

a) $px^2 - x + 5 - 3p = 0$ tenga una raíz igual a 2.
b) $(2p+1)x^2 + px + p = 4(px+2)$ la suma de sus raíces sea igual a su producto.
c) $3x^2 + p(x-2) + 1 = 0$ tenga raíces recíprocas.
d) $4x^2 \; -8x + 2p - 1 = 0$ una de las raíces sea igual al triple de la otra.
e) $4x^2 - 20x + p^2 - 4 = 0$ una raíz sea igual a la otra más 2.
f) $x^2 = 5x \quad 3p + 3$ la diferencia entre sus raíces sea igual a 11.

16.39 Encuentre las raíces de las ecuaciones siguientes de forma que se cumpla la condición que se indica.

a) $2px^2 - 4px + 5p = 3x^2 + x - 8$ el producto de sus raíces sea igual al doble de su suma.
b) $x^2 - 3(x-p) - 2 = 0$ una raíz sea igual al doble de la otra menos 3.
c) $p(x^2 + 3x - 9) = x - x^2$ una raíz sea igual y de signo contrario.
d) $(m+3)x^2 + 2m(x+1) + 3 = 0$ una raíz sea igual a la mitad del recíproco de la otra.
e) $(2m+1)x^2 - 4mx = 1 - 3m$ las raíces sean iguales.

16.40 Resuelva las ecuaciones.

a) $\sqrt{x^2-x+2} = 2$ *e*) $\sqrt{2x+7} = \sqrt{x+2}$ *i*) $\sqrt{x^2-\sqrt{2x+1}} = 2-x$

b) $\sqrt{2x-2} = x-1$ *f*) $\sqrt{2x^2-7} - x = 3$ *j*) $\sqrt{2x-10} + \sqrt{x+9} = 2$

c) $\sqrt{4x+1} = 3-3x$ *g*) $\sqrt{2+x} - 4 + \sqrt{10-3x} = 0$ *k*) $\sqrt{2x+8} + \sqrt{2x+5} = \sqrt{8x+25}$

d) $2 - \sqrt[3]{x^2+2x} = 0$ *h*) $2\sqrt{x} - \sqrt{4x-3} = \frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ *l*) $\sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[6]{x+1}$

16.41 Resuelva las ecuaciones.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ *e*) $(x^2-6x)^2 - 2(x^2-6x) = 35$ *h*) $\sqrt{x+2} - \sqrt[4]{x+2} = 6$

b) $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$ *f*) $x^2 + x = 7\sqrt{x^2+x+2} - 12$ *i*) $x^3 - 7x^{3/2} - 8 = 0$

c) $4x^{-4} - 17x^{-2} + 4 = 0$ *g*) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 2$ *j*) $\frac{x^2+2}{x} + \frac{8x}{x^2+2} = 6$

d) $x^{-4/3} - 5x^{-2/3} + 4 = 0$

16.42 *a*) Encuentre dos números sabiendo que la suma de sus cuadrados es 34 y que uno de ellos es igual al doble del otro menos 1.
b) Encuentre tres números consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es igual a 110.
c) Encuentre dos números positivos sabiendo que su diferencia es igual a 3 y que la suma de sus recíprocos es $1/2$.
d) Encuentre un número sabiendo que es igual al doble de su raíz cuadrada más 3.

16.43 *a*) Calcule las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su longitud es igual al triple de su altura, y que si se disminuye en 1 pie la altura y se aumenta en 3 pies la longitud, el área vale 72 pies cuadrados.
b) El perímetro de un triángulo rectángulo es 60 pulgadas y su hipotenusa vale 25 pulgadas. Encuentre las longitudes de los otros dos lados.

c) Un cuadro de 8 por 12 pulgadas se coloca en un marco de ancho constante. Encuentre dicha anchura sabiendo que el área del cuadro es igual a la del marco.

d) Para formar una caja abierta de 60 pulgadas cuadradas de base a partir de una placa rectangular de estaño de 9 × 12 pulgadas se cortan de sus esquinas unas piezas cuadradas y se doblan después las aristas. Encuentre la longitud del lado del cuadrado que se corta en cada esquina.

16.44 *a*) Encuentre el número de dos cifras sabiendo que la cifra de las decenas es igual al doble de la cifra de las unidades, y que si se multiplica dicho número por la suma de sus cifras se obtiene 63.

b) Encuentre un número de dos cifras sabiendo que la cifra de las decenas excede en 3 a la cifra de las unidades, y que el número es igual a la suma de los cuadrados de sus cifras menos 4.

16.45 *a*) Dos personas parten del mismo punto y al mismo tiempo dirigiéndose por dos caminos perpendiculares. Sabiendo que la velocidad de una de ellas es de 4 millas/hora más que la de la otra, y que al cabo de 2 horas distan 40 millas, encuentre sus velocidades.

b) Encuentre la velocidad de un motorista sabiendo que si la aumenta en 10 millas/hr recorrería 120 millas en 36 minutos.

c) La velocidad de una canoa, en aguas en reposo, es de 12 millas/hora. Sabiendo que recorre 36 millas aguas abajo y regresa al punto de partida en un tiempo de 8 horas, encuentre la velocidad de la corriente del río.

16.46 *a*) Un comerciante compra un determinado número de abrigos por un total de \$720. Encuentre el número de abrigos que compró sabiendo que al venderlas a \$40 cada una obtiene una ganancia igual al dinero que le costaron 8 de ellas.

b) Un tendero compró un determinado número de latas de maíz en \$14.40. Posteriormente, el precio de dicho artículo sufre un aumento de 2 centésimas por unidad, con lo cual, por el mismo dinero le dan 24 latas de maíz menos que la vez anterior. Encuentre el número de latas de maíz que inicialmente compró y el precio de cada una de ellas.

16.47 *a*) El operario *B* tarda 6 horas más que el *A* en efectuar el ensamblado de una máquina. Encuentre cuánto tiempo tardarían en realizarlo cada uno de ellos sabiendo que, juntos, invierten 4 horas en terminarlo.

b) Por medio de un grifo *A* se llena un depósito en 4 horas. Por medio de otro *B* se llena en 3 horas más que empleando los dos grifos *A* y *B* simultáneamente. Encuentre en cuánto tiempo se llena utilizando sólo el grifo *B*.

16.48 Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba. La distancia *s* (en pies) del punto de partida en función del tiempo *t*(segundos) viene dada por $s = 64t - 16t2$.

a) Encuentre en cuánto tiempo el objeto está a una distancia de 40 pies.

b) Determine si el objeto llega a alcanzar una altura de 80 pies.

c) Encuentre la máxima altura que alcanza.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

16.30 *a*) $x = \pm 7$ (*c*) $x = \pm 3i$ *e*) $y = \pm 2\sqrt{3}$ *g*) $x = \pm 3/2$

b) $x = \pm 10\sqrt{2}$ (*d*) $x = \pm 8$ *f*) $x = \pm 1$ *h*) $x = \pm 2$

16.31 *a*) $3, 4$ *c*) $8, -3$ *e*) $1/3, 2/3$ *g*) $2a, -4a$ *i*) $1, -7$

b) $2, -3$ *d*) $2, 1/2$ *f*) $2, -6/5$ *h*) $2, -8$ *j*) $2c/5, 4c/5$

16.32 *a*) $1, -5$ *c*) $1, -1/2$ *e*) $\dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$ *f*) $3/2, 5/3$ *h*) $\dfrac{2}{3} \pm \dfrac{i}{3}$

b) $4, -1$ *d*) $2, -1/3$ *g*) $3a, a/2$

16.33 *a*) $6, -1$ *c*) $2, -4/3$ *e*) $\dfrac{2 \pm \sqrt{14}}{5}$ *f*) $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{5}$ *g*) $\dfrac{2p}{3}, -\dfrac{3p}{5}$ *h*) $\dfrac{6 \pm \sqrt{42}}{3}$

b) $3, -2$ *d*) $1/4, 1/4$

16.34 *a*) $x = -3/2$ y $x = 1$ (consulte la figura 16-6).

b) Doble raíz de $x = 1$ (consulte la figura 16-7).

c) Raíces reales entre -1 y 0 y entre 2 y 3 (consulte la figura 16-8).

d) No hay raíces reales (consulte la figura 16-9).

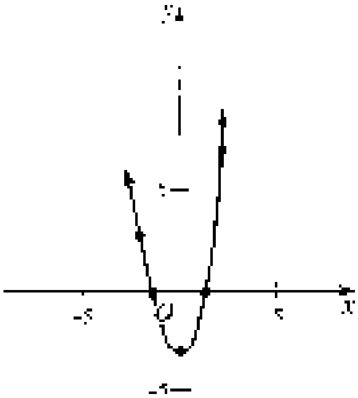


Figura 16-6

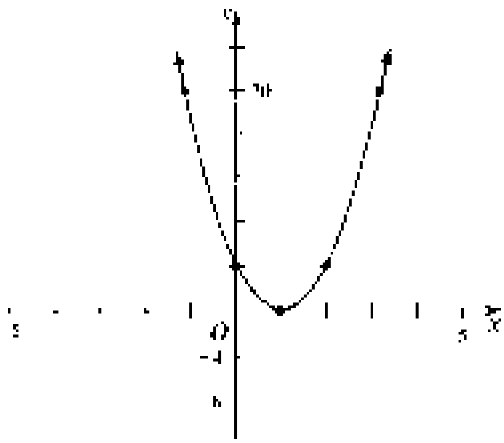


Figura 16-7

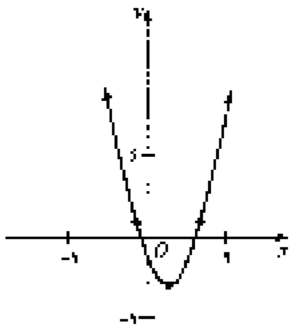


Figura 16-8

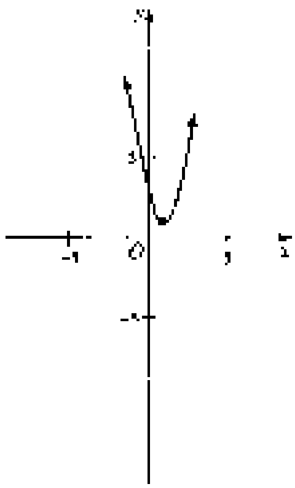


Figura 16-9

e) Raíces reales entre -1 y 0 y entre 1 y 2 (consulte figura 16-10).

f) Raíces reales entre -4 y -3 y entre -1 y 0 (consulte figura 16-11).

16.35 *a*) $S = -3/2,\ P = 1/2$ *d*) $S = -3,\ P = -5/2$ *g*) $S = -5k/2,\ P = 3k^2/2$

b) $S = 1,\ P = 2$ *e*) $S = 0,\ P = -4/3$ *h*) $S = 0.5,\ P = 0.15$

c) $S = -3,\ P = -1/2$ *f*) $S = -3/4,\ P = 0$ *i*) $S = \frac{1}{2}\sqrt{6},\ P = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

16.36 *a*) 17; reales, irracionales, distintas *e*) 49; reales, racionales, distintas

b) 1; reales, racionales, distintas *f*) 0; reales, iguales

c) -7; imaginarias *g*) -4; imaginarias

d) 89; reales, irracionales, distintas *h*) 0; reales, racionales, iguales

16.37 *a*) $x^2 + x - 6 = 0$ *e*) $6x^2 - x - 1 = 0$ *i*) $4x^2 - 16x + 25 = 0$

b) $x^2 + 3x = 0$ *f*) $x^2 - 4x + 1 = 0$ *j*) no es posible ($x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$)

c) $x^2 - 4x - 32 = 0$ *g*) $x^2 + 2x + 2 = 0$ *k*) $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$

d) $x^2 + 7x + 10 = 0$ *h*) $x^2 + 4x - 2 = 0$ *l*) $4x^2 - 4mx + m^2 - n = 0$

16.38 *a*) $p = -3$ *b*) $p = -4$ *c*) $p = -1$ *d*) $p = 2$ *e*) $p = \pm 5$ *f*) $p = -7$

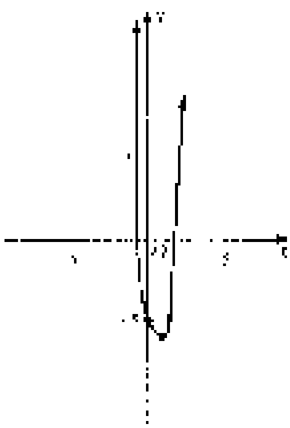


Figura 16-8

Figura 16-9

16.39 *a*) 3, 6 *b*) 1, 2 *c*) $\pm 3/2$ *d*) $1/2 \pm i/2$

e) Si $m = -1$, las raíces son 2, 2; si $m = 1/2$, las raíces son $1/2,\ 1/2$.

16.40 *a*) $2,\ -1$ *c*) $4/9$ *e*) 9, 1 *g*) ± 2 *i*) $3/2$ *k*) -2

b) 1, 3 *d*) $-4,\ 2$ *f*) $8,\ -2$ *h*) 1 *j*) no tiene solución *l*) $5/4$

16.41 *a*) $\pm 2,\ \pm 3$ *d*) $\pm 1,\ \pm 1/8$ *g*) $2 \pm \sqrt{3},\ -1/4 \pm i\sqrt{15}/4$ *j*) $1 \pm i,\ 2 \pm \sqrt{2}$

b) $\pm\sqrt{5},\ \pm i\sqrt{2}$ *e*) $7,\ 5,\ \pm 1$ *h*) 79

c) $\pm 2,\ \pm 1/2$ *f*) $1,\ -2,\ (-1 \pm \sqrt{93})/2$ *i*) 4

16.42 *a*) $5,\ 3$ o $-27/5,\ -11/5$ *b*) $5,\ 6,\ 7$ o $-7,\ -6,\ -5$ *c*) 3, 6 *d*) 9

16.43 *a*) 5, 15 pies *b*) 15, 20 pulgadas *c*) 2 pulgadas *d*) 1.3 pulgadas

16.44 *a*) 21 *b*) 85

16.45 *a*) 12, 16 millas/hora *b*) 40 millas/hora *c*) 6 millas/hora

16.46 *a*) 24 *b*) 144, 10¢

16.47 *a*) *A*, 6 horas; *B*, 12 hr *b*) 5.3 horas aproximadamente

16.48 *a*) 0.78 y 3.22 segundos después de la proyección *b*) No *c*) 64 pies

SECCIONES CÓNICAS 17

17.1 ECUACIONES GENERALES DE SEGUNDO GRADO

La forma general de una ecuación de segundo grado con dos incógnitas x y y es

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + \text{ey} + f = 0 \tag{1}$$

siendo a, b, c, d, e, f constantes dadas y a, b y c diferentes de cero.

Por ejemplo, $3x^2 + 5xy = 2$, $x^2 - xy + y^2 + 2x + 3y = 0$, $y^2 = 4x$, $xy = 4$ son ecuaciones cuadráticas en x y y.

La gráfica de la ecuación 1), si a, b, c, d, e y f son reales, depende del valor del discriminante $b^2 – 4ac$.

1. Si $b^2 - 4ac < 0$**,** la gráfica es, en general, una elipse. Sin embargo, si $b = 0$ y $a = c$ la gráfica puede ser una circunferencia, un punto o no existir.
2. Si $b^2 - 4ac$, 0, la gráfica es una parábola, dos rectas paralelas coincidentes o no existe. Las líneas paralelas o coincidentes y las situaciones no existentes se llaman casos degenerados.
3. Si $b^2 - 4ac = 0$, la gráfica es una hipérbola o dos rectas que se cortan. Este último caso se llama caso degenerado.

Estas figuras resultan al seccionar un cono recto circular por un plano, razón por la cual reciben el nombre de secciones cónicas.

EJEMPLOS 17.1 Identifique el tipo de sección cónica descrito por cada ecuación

a) $x^2 + xy = 6$
b) $x^2 + 5xy - 4y^2 = 10$
c) $2x^2 - y^2 = 7$
d) $3x^2 + 2y^2 = 14$
e) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 3y + 10 = 0$
f) $y^2 + 4x + 3y + 4 = 0$

a) $a = 1, b = 1, c = 0 \quad b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0$
Por lo que la figura es una elipse o un caso degenerado.
b) $a = 1, b = 5, c = \ 4 \quad b^2 - 4ac = 25 + 16 > 0$
Por lo que la figura es una hipérbola o un caso degenerado.
c) $a = 2, b = 0, c = \ 1 \quad b^2 - 4ac = 0 + 8 > 0$
Por lo que la figura es una hipérbola o un caso degenerado.
d) $a = 3, b = 0, c = 2 \quad b^2 - 4ac = 0 - 24 < 0$
Por lo que la figura es una elipse o un caso degenerado.
e) $a = 3, b = 0, c = 3 \quad b^2 - 4ac = 0 - 36 < 0$
Por lo que la figura es un círculo o un caso degenerado puesto que $a = c$ y $b = 0$.
f) $a = 0, b = 0, c = 1 \quad b^2 - 4ac = 0 - 0 = 0$
Por lo que la figura es una parábola o un caso degenerado.

17.2 SECCIONES CÓNICAS

Cada una de las secciones cónicas es el lugar (conjunto) geométrico de todos los puntos en un plano que cumplen con un determinado conjunto de condiciones. El conjunto de puntos puede describirse mediante una ecuación. Cuando el lugar geométrico está en el origen, la figura se llama sección cónica centrada. La ecuación general que se utiliza para describir una sección cónica se llama ecuación estándar, la cual puede tener más de una forma para una sección cónica. Las secciones cónicas son el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. Se considerarán solamente secciones cónicas en las que $b = 0$, por lo tanto, que tienen una ecuación cuadrática general de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Es necesario el uso de la trigonometría para analizar a fondo las ecuaciones cuadráticas generales en las que $b \neq 0$.

17.3 CÍRCULOS

El círculo es el lugar geométrico de todos los puntos en un plano que se encuentran a una distancia constante respecto a un punto fijo sobre el mismo plano. El punto fijo es el centro del círculo y la distancia constante es el radio del círculo.

Cuando el centro del círculo es el origen (0,0) y el radio es r, la forma estándar de la ecuación de un círculo es $x^2 + y^2 = r^2$. Si el centro del círculo es el punto (h, k) y el radio es r, la forma estándar de la ecuación del círculo es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Si $r^2 = 0$, se tiene el caso degenerado de un solo punto que a menudo se llama círculo punto. Si $r^2 < 0$, se tiene el caso degenerado no existente, que a menudo se llama círculo imaginario, ya que el radio tendría que ser un número imaginario.

La gráfica del círculo $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ tiene su centro en $(2, -3)$ y su radio es 3 (consulte la figura 17-1).

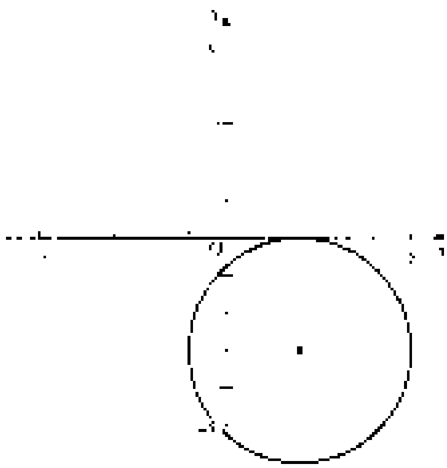


Figura 17-1

EJEMPLOS 17.2 Determine el centro y el radio para cada círculo.

a) $x^2 + y^2 = 5$ *b*) $x^2 + y^2 = 28$ *c*) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 81$

a) $C(0, 0), r = \sqrt{5}$
b) $C(0, 0), r = \sqrt{28} = \sqrt{4}\,\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$
c) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 81$ tal que $(x - (-2))^2 + (y - 4)^2 = 9^2$ $C(-2, 4), r = 9$

EJEMPLOS 17.3 Escriba la ecuación de cada círculo en la forma estándar.

a) $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 48 = 0$ *b*) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 100 = 0$

a) $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 48 = 0$
$(x^2 - 8x) + (y^2 + 12y) = 48$ ordenando los términos
$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 12y + 36) = 48 + 16 + 36$ completando el cuadrado para x y y
$(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 100$ forma estándar (1)

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 100 = 0$
$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 100$ ordenando los términos
$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 100 + 4 + 9$ completando el cuadrado para x y y
$(x - 2)^2 + (y + 3) = 87$ forma estándar (2)

Nota: En (1) $r^2 = 100$, por lo que se tiene un círculo, sin embargo, en (2) $r^2 = -87$ por lo que se tiene el caso degenerado.

EJEMPLO 17.4 Escriba la ecuación del círculo que pasa a través de los puntos $P(2, -1)$, $Q(-3, 0)$ y $R(1, 4)$.

Sustituyendo los puntos P, Q y R en la fórmula general de círculo, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, se obtiene un sistema de tres ecuaciones lineales.

para $P(2, -1)$	$2^2 + (-1)^2 + 2D - E + F = 0$	entonces (1)	$2D - E + F = -5$
para $Q(-3, 0)$	$(-3)^2 + 0^2 - 3D + 0E + F = 0$	entonces (2)	$-3D + F = -9$
para $R(1, 4)$	$1^2 + 4^2 + D + 4E + F = 0$	entonces (3)	$D + 4E + F = -17$

Eliminando F de (1) y (2) y de (1) y (3), se obtiene,

$$(4)\ 5D - E = 4 \qquad \text{y} \qquad (5)\ D - 5E = 12$$

Resolviendo (4) y (5) se obtiene $D = 1/3$ y $E = -7/3$ y sustituyendo D y E en (1) se obtiene $F = -8$.

La ecuación del círculo es $x^2 + y^2 + 1/3x - 7/3y - 8 = 0$ o $3x^2 + 3y^2 + x - 7y - 24 = 0$.

17.4 PARÁBOLAS

Una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos sobre un plano que equidistante de una línea fija llamada directriz y de un punto fijo llamado foco.

Las parábolas céntricas tienen su vértice en el origen, el foco sobre uno de los ejes y la directriz paralela al otro eje. Se denota la distancia del foco al vértice por $|p|$. La distancia de la directriz al vértice también es $|p|$. Las ecuaciones de las parábolas centrales son (1) y (2).

$$(1)\ y^2 = 4py \qquad \text{y} \qquad (2)\ x^2 = 4py$$

En (1) el foco se encuentra sobre el eje x y la directriz es paralela al otro eje. Si p es positiva, la curva abre hacia la derecha y si p es negativa, la curva abre hacia la izquierda (consulte la figura 17-2). En (2) el foco está sobre el eje y y la directriz es paralela el eje x. Si p es positiva, la curva abre hacia arriba y si p es negativa, la curva abre hacia abajo (véase la figura 17-3).

La línea que pasa a través del vértice y el foco es el eje de la parábola y la gráfica es simétrica respecto a esta línea.

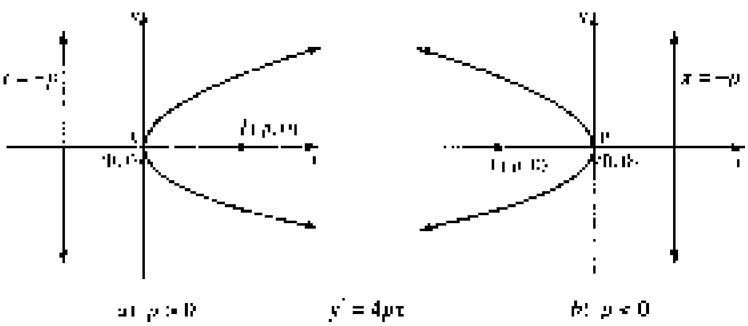


Figura 17-2

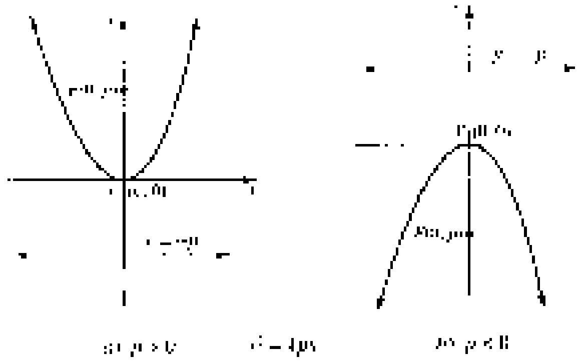


Figura 17-3

Las parábolas con vértice en el punto (h, k) y con el eje y la directriz paralela al eje x y al eje y tienen las formas estándares que se listan en (3) y (4),

$$(3)\ (y - k)^2 = 4p(x - h) \qquad \text{y} \qquad (4)\ (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

En (3) el foco es $F(h + p, k)$, la directriz es $x = h - p$, y el eje es $y = k$ (consulte la figura 17-4). Sin embargo, en (4) el foco es $F(h, k + p)$, la directriz es $y = k - p$, y el eje es $x = h$ (consulte la figura 17-5).

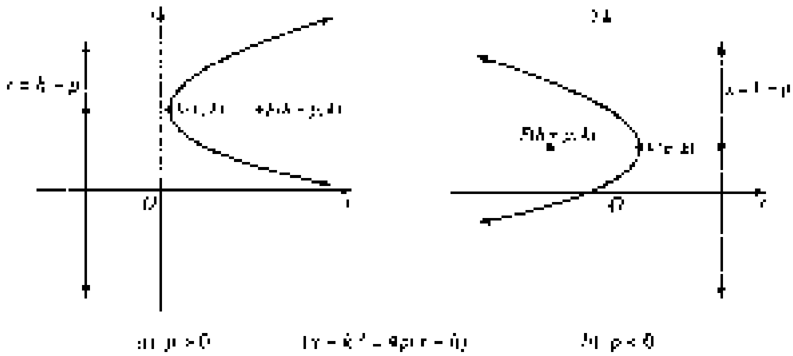


Figura 17-4

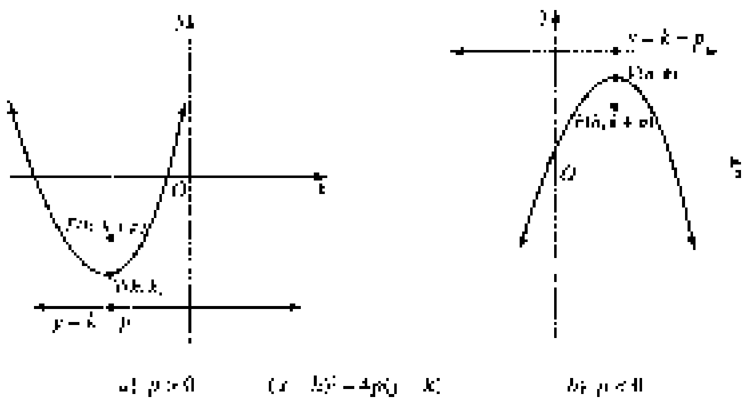


Figura 17-5

EJEMPLOS 17.5 Determine el vértice, el foco, la directriz y el eje de cada parábola.

a) $y^2 = -8x$ *b*) $x^2 = 6y$ *c*) $(y - 3)^2 = 5(x + 7)$ *d*) $(x - 1)^2 = 4(y + 4)$

a) $y^2 = -8x$: vértice $(h, k) = (0, 0)$, $4p = -8$, por lo que $p = -2$, foco $(p, 0) = (-2, 0)$, y la directriz es $x = -p$, por lo que $x = (-2) = 2$, el eje es $y = 0$
b) $x^2 = 6y$: vértice $(h, k) = (0, 0)$, $4p = 6$, por lo que $p = 3/2$, foco $(0, p) = (0, 3/2)$, y la directriz es $y = -p$, por lo que $y = 3/2$, el eje es $y = 0$
c) $(y - 3)^2 = 5(x + 7)$: vértice $(h, k) = (-7, 3)$, $4p = 5$, por lo que $p = 5/4$, foco $(h + p, k) = (-7 + 5/4, 3) = (-23/4, 3)$, y la directriz es $x = h - p$, por lo que $x = -7 - 5/4 = -33/4$, eje $y = k$, por lo que $y = 3$
d) $(x - 1)^2 = -4(y + 4)$: vértice $(h, k) = (1, -4)$, $4p = -4$, por lo que $p = -1$, foco $(h, k + p) = (1, -4 + (-1)) = (1, -5)$, y la directriz es $y = k - p$, por lo que $y = -4 - (-1) = -3$, el eje es $x = h$, por lo que $x = 1$

EJEMPLOS 17.6 Escriba la ecuación de la parábola con las características dadas.

a) vértice (4, 6) y el foco (4, 8) *b*) foco (3, 5) y la directriz $y = 3$

a) Puesto que el vértice (4, 6) y el foco (4, 8) se encuentran sobre la línea $x = 4$ (consulte la figura 17-4), se tiene una parábola de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$:

Puesto que el vértice es (4, 6), se tiene $h = 4$ y $k = 6$.

El foco es $(h, k + p)$, por lo que $k + p = 8$ y $6 + p = 8$, por lo que $p = 2$.

La ecuación de la parábola es $(x - 4)^2 = 8(y - 6)$:

b) Puesto que la directriz es $y = 3$ (consulte la figura 17-5), la parábola tiene la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

El foco (3, 5) se encuentra 2 unidades por arriba de la directriz $y = 3$, por lo que $p > 0$. La distancia del foco a la directriz es $2|p|$, por lo que $2p = 2$ y $p = 1$.

El foco es $(h, p + k)$, por lo que $h = 3$ y $k + p = 5$. Puesto que $p = 1$, $k = 4$.

La ecuación de la parábola es $(x - 3)^2 = 4(y - 4)$:

EJEMPLOS 17.7 Escriba la ecuación en forma estándar de las parábolas siguientes.

a) $x^2 - 4x - 12y - 32 = 0$ *b*) $y^2 + 3x - 6y = 0$

a) $x^2 - 4x - 12y - 32 = 0$

$x^2 - 4x = 12y + 32$	reordenando términos
$x^2 - 4x + 4 = 12y + 32 + 4$	completando el cuadrado respecto a x
$(x - 2)^2 = 12y + 36$	factorizando el lado derecho de la ecuación
$(x - 2)^2 = 12(y + 3)$	forma estándar

b) $y^2 + 3x - 6y = 0$

$y^2 - 6y = 3x$	reordenando términos
$y^2 - 6y + 9 = 3x + 9$	completando el cuadrado respecto a y
$(y - 3)^2 = 3(x - 3)$	forma estándar

17.5 ELIPSES

Una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos sobre un plano tales que la suma de las distancias respecto a dos puntos fijos, los focos, a cualquier punto del lugar geométrico es constante.

Las elipses centrales tienen su centro en el origen, sus vértices y focos se encuentran sobre uno de los ejes y los covértices se encuentran sobre el otro vértice. Se denotará la distancia desde un vértice al centro con la letra a, la distancia desde un covértice al centro con la letra b, y la distancia desde un foco al centro por la letra c. En una elipse, los valores a, b y c se relacionan mediante la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$ y $a > b$. Al segmento de línea entre los vértices, eje mayor y al segmento de línea entre los covértices, eje menor.

Las formas estándar de las elipses centrales son:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad 2)\ \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

El denominador de mayor valor es siempre a^2 para una elipse. Si el numerador para a^2 es x^2, entonces el eje mayor coincide con el eje x. En (1), los vértices tiene coordenadas $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$, los focos tienen coordenadas $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, y los covértices tienen coordenadas $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$ (véase la figura 17-6). Si el numerador de a^2 es y^2, entonces el eje mayor coincide con el eje y. En (2), los vértices se encuentran en $V(0,a)$ y $V'(0 - a)$, los focos se encuentran en $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$, y los covértices se encuentran en $B(b, 0)$ y $B'(-b, 0)$ (consulte la figura 17-7).

Si el centro de una elipse es $C(h, k)$, entonces las formas estándar de las elipses son:

$$3)\quad \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{y} \qquad 4)\quad \frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

En (3), el eje mayor es paralelo al eje x y el eje menor al y. Los focos tienen coordenadas $F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$, los vértices se encuentran en $V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k)$, y los covértices se encuentran en $B(h, k + b)$ y $B'(h, k - b)$(consulte la figura 17-8). En (4), el eje mayor es paralelo al eje y y el menor es paralelo al x.

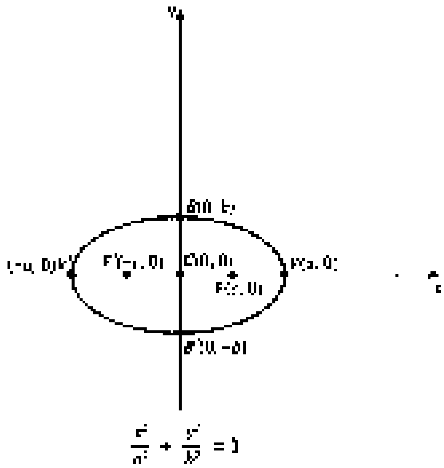


Figura 17-6

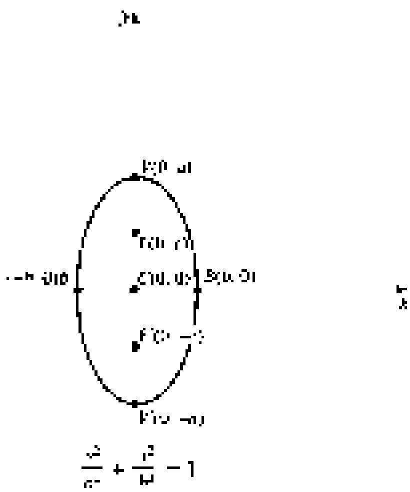


Figura 17-7

Los focos se encuentran en $F(h, k + c)$ y $F'(h, k - c)$, los vértices tienen coordenadas $V(h, k + a)$ y $V'(h, k - a)$, y los covértices se encuentran en $B(h + b, k)$ y $B'(h - b, k)$ (consulte la figura 17-9).

EJEMPLOS 17.8 Determine el centro, los focos, los vértices y los covértices de las elipses siguientes:

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ *c*) $\dfrac{(x-3)^2}{225}+\dfrac{(y-4)^2}{289}=1$

b) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{10}=1$ *d*) $\dfrac{(x+1)^2}{100}+\dfrac{(y-2)^2}{64}=1$

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

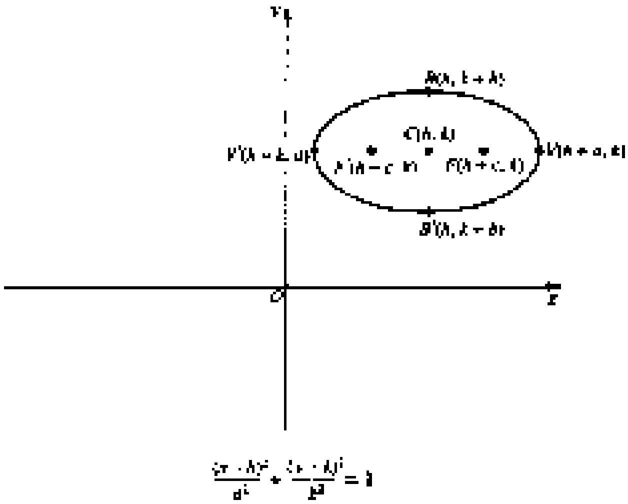


Figura 17-8

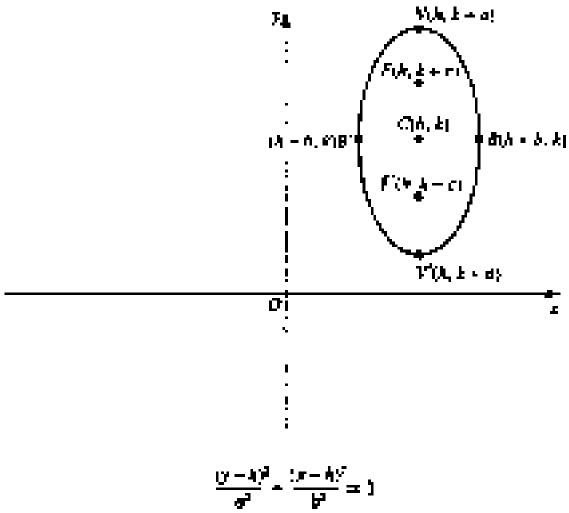


Figura 17-9

Puesto que a^2 es el denominador con mayor valor, $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$, por lo que $a = 5$ y $b = 3$. A partir de $a^2 = b^2 + c^2$, se obtiene $25 = 9 + c^2$ y $c = 4$. El centro está en (0, 0). Los vértices están en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, por lo que $V(5, 0)$ y $V'(-5, 0)$. Los focos se encuentran en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, por lo que $F(4, 0)$ y $F(-4, 0)$. Los covértices se encuentran en $(0, b)$ y $(0, -b)$, por lo que $B(0, 3)$ y $B'(0, -3)$.

b) $\dfrac{y^2}{10} + \dfrac{x^2}{3} = 1$

$a^2 = 10$ y $b^2 = 3$, por lo que $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{3}$, y puesto que $a^2 = b^2 + c^2$, $c = \sqrt{7}$.

Ya que y^2 se encuentra sobre el denominador de mayor valor, los vértices y los focos se encuentran sobre el eje y. El centro es (0,0).

vértices $(0, a)$ y $(0, -a)$ $V(0, \sqrt{10})$, $V'(0, -\sqrt{10})$
focos $(0, c)$ y $(0, -c)$ $F(0, \sqrt{7})$, $F'(0, -\sqrt{7})$
covértices $(b, 0)$ y $(-b, 0)$ $B(\sqrt{3}, 0)$, $B'(-\sqrt{3}, 0)$

c) $\dfrac{(y-4)^2}{289} + \dfrac{(x-3)^2}{225} = 1$

$a^2 = 289$ y $b^2 = 225$, por lo que $a = 17$ y $b = 15$ y a partir de $a^2 = b^2 + c^2$, $c = 8$. Puesto que $(y-4)^2$ está sobre a^2, los vértices y focos se encuentran sobre una línea paralela al eje y.

centro $(h, k) = (3, 4)$
vértices $(h, k + a)$ y $(h, k - a)$ $V(3, -1)$, $V'(3, -13)$
focos $(h, k + c)$ y $(h, k - c)$ $F(3, 12)$, $F'(3, -4)$
covértices $(h + b, k)$ y $(h - b, k)$ $B(18, 4)$, $B'(-12, 4)$

d) $\dfrac{(x+1)^2}{100} + \dfrac{(y-2)^2}{64} = 1$

$a^2 = 100$, $b^2 = 64$, por lo que $a = 10$ y $b = 8$. A partir de $a^2 = b^2 + c^2$, se obtiene $c = 6$. Puesto que $(x + 1)^2$ se encuentra sobre a^2, los vértices y los focos se encuentran sobre una línea paralela al eje x.

centro $(h, k) = (-1, 2)$
vértices $(h + a, k)$ y $(h - a, k)$ $V(9, 2)$, $V'(-11, 2)$
focos $(h + c, k)$ y $(h - c, k)$ $F(5, 2)$, $F'(-7, 2)$
covértices $(h, k + b)$ y $(h, k - b)$ $B(-1, 10)$, $B'(-1, -6)$

EJEMPLOS 17.9 Escriba la ecuación de la elipse que tiene las características que se proporcionan.

a) elipse central, focos en $(\pm 4, 0)$ y vértices en $(\pm 5, 0)$
b) centro en (0, 3), longitud del eje mayor de 12, focos en (0, 6) y (0, 0).

a) Una elipse central tiene su centro en el origen, por lo que $(h, k) = (0, 0)$. Puesto que los vértices se encuentran sobre el eje x y el centro está en (0, 0), la forma de la elipse es,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A partir del vértice en (5, 0) y el centro en (0, 0), se obtiene a = 5.
A partir de un foco en (4, 0) y el centro en (0, 0), se obtiene $c = 4$.
Puesto que $a^2 = b^2 + c^2$, $25 = b^2 + 16$, por lo que $b^2 = 9$ y $b = 3$.
La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

b) Puesto que el centro se encuentra en (0, 3), $h = 0$ y $k = 3$. Puesto que los focos se encuentran sobre el eje x, la forma de la ecuación de la elipse es,

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Los focos son $(h, k + c)$ y $(h, k - c)$, por lo que $(0, 6) = (h, k + c)$ y $3 + c = 6$ y $c = 3$.
La longitud del eje mayor es 12, por lo que se deduce que $2a = 12$ y $a = 6$.

A partir de $a^2 = b^2 + c^2$, se obtiene $36 = b^2 + 9$ y $b^2 = 27$.
La ecuación de la elipse es $\dfrac{(y-3)^2}{36} + \dfrac{x^2}{27} = 1$

EJEMPLO 17.10 Escriba la ecuación de la elipse $18x^2 + 12y^2 - 144x + 48y + 120 = 0$ en su forma estándar.

$18x^2 + 12y^2 - 144x + 48y + 120 = 0$	
$(18x^2 - 144x) + (12y^2 + 48y) = -120$	reordenando términos
$18(x^2 - 8x) + 12(y^2 + 4y) = -120$	factorizando para obtener x^2 y y^2
$18(x^2 - 8x + 16) + 12(y^2 + 4y + 4) = -120 + 18(16) + 12(4)$	completando el cuadrado en x y y
$18(x - 4)^2 + 12(y + 2)^2 = 216$	simplificando
$\dfrac{18(x-4)^2}{216} + \dfrac{12(y+2)^2}{216} = 1$	dividiendo entre 216
$\dfrac{(x-4)^2}{12} + \dfrac{(y+2)^2}{18} = 1$	forma estándar

17.6 HIPÉRBOLAS

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos sobre un plano tal que para cualquier punto en dicho lugar se cumple que la diferencia entre las distancias a dos puntos fijos, los focos, es constante.

Las hipérbolas centrales tienen su centro en el origen y sus vértices y focos sobre uno de los ejes siendo simétricas respecto al otro eje. Las formas estándar de las ecuaciones de las hipérbolas centrales son:

$$1)\ \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad 2)\ \ \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

La distancia del centro a un vértice se expresa por a y la distancia del centro a un foco se expresa por c. Para el caso de una hipérbola, $c^2 = a^2 + b^2$ y b es un número positivo. El segmento de línea entre los vértices se llama eje transversal. El denominador de la fracción positiva para la forma estándar es siempre a^2.

En (1), el eje transversal $\overline{VV'}$ coincide con el eje y, los vértices son $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$, y los focos se encuentran en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ (consulte la figura 17-10). En (2) el eje transversal $\overline{VV'}$se encuentra sobre el eje y, los vértices están en $V(0, a)$ y $V'(0, -a)$, y los focos están en $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$ (consulte la figura 17-11). Cuando las líneas se dibujan a través de los puntos R y C y los puntos S y C, se tienen las asíntotas de la hipérbola. La asíntota es una línea a la que la gráfica de la hipérbola se aproxima pero nunca alcanza.

Si el centro de la hipérbola se encuentra en (h, k), las formas estándar son (3) y (4):

$$3)\ \ \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad 4)\ \ \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

En (3) el eje transversal es paralelo al eje x, los vértices tiene coordenadas $V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k)$, los focos tienen coordenadas $F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$, y los puntos R y S tiene coordenadas $R(h + a, k + b)$ y $S(h + a, k - b)$. Las líneas que pasan por R y C y S y C son las asíntotas de la hipérbola (véase la figura 17-12). En la ecuación 4) el eje transversal es paralelo al eje y, los vértices se encuentran en $V(h, k + a)$ y $V'(h, k - a)$, los focos están en $F(h, k + c)$ y $F'(h, k - c)$ y los puntos R y S tienen las coordenadas $R(h + b, k + a)$ y $S(h - b, k + a)$ (véase la figura 17-13).

EJEMPLOS 17.11 Encuentre las coordenadas del centro, vértices y focos de las hipérbolas siguientes:

a) $\dfrac{(x-4)^2}{9} - \dfrac{(y-5)^2}{16} = 1$ *b*) $\dfrac{(y+5)^2}{25} - \dfrac{(x+9)^2}{144} = 1$ *c*) $\dfrac{(x+3)^2}{225} - \dfrac{(y-4)^2}{64} = 1$

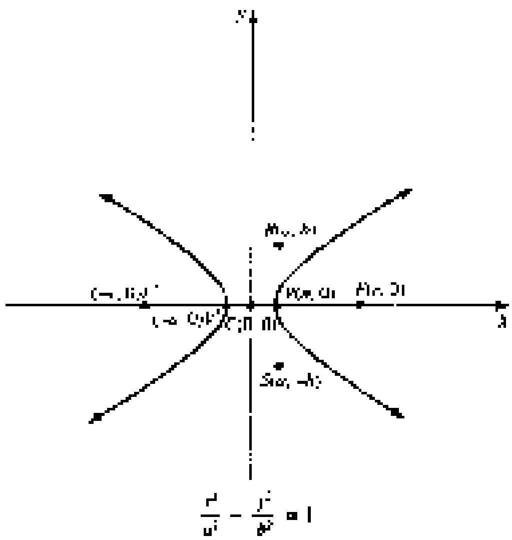


Figura 17-10

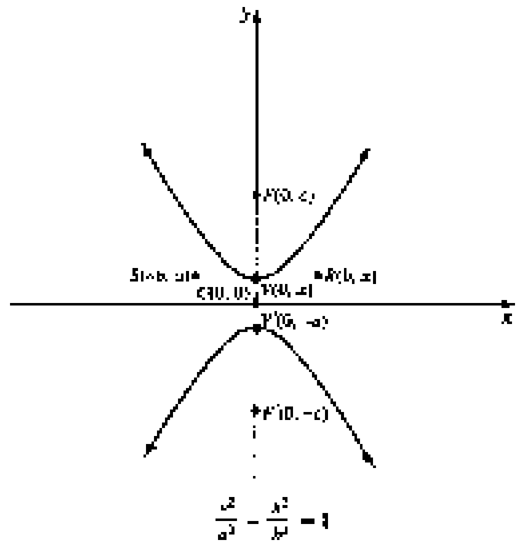


Figura 17-11

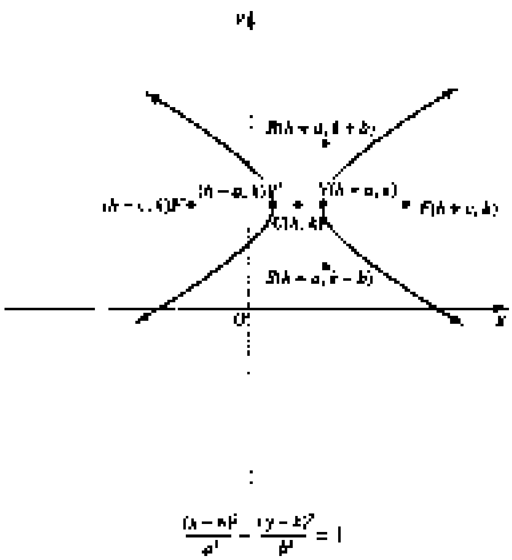


Figura 17-12

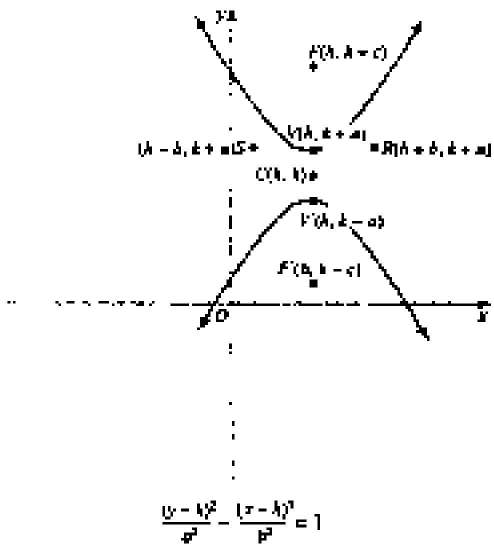


Figura 17-13

a) $\dfrac{(x-4)^2}{9} - \dfrac{(y-5)^2}{16} = 1$

Puesto que $a^2 = 9$ y $b^2 = 16$, se tiene que $a = 3$ y $b = 4$.

A partir de $c^2 = a^2 + b^2$, se obtiene $c = 5$.

El centro está en $(h, k) = (4, 5)$

Los vértices están en $V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k)$ $\quad V(7, 5)$ y $V'(1, 5)$

Los focos están en $F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$ $\quad F(9, 5)$ y $F'(-1, 5)$

b) $\dfrac{(y+5)^2}{25} - \dfrac{(x+9)^2}{144} = 1$

Puesto que $a^2 = 25$ y $b^2 = 144$, $a = 5$ y $b = 12$.

A partir de $c^2 = a^2 + b^2$, se obtiene $c = 13$.

El centro está en $C(h, k) = (-9, -5)$
Los vértices están en $V(h, k+a)$ y $V'(h, k-a)$ $\quad V(-9,0)$ y $V'(-9,-10)$
Los focos están en $F(h, k+c)$ y $F'(h, k-c)$ $\quad F(-9,8)$ y $F'(-9,-18)$

c) $\dfrac{(x+3)^2}{225} - \dfrac{(y-4)^2}{64} = 1$

Puesto que $a^2 = 225$ y $b^2 = 64$, se obtiene $a = 15$ y $b = 8$.
A partir de $c^2 = a^2 + b^2$, se obtiene $c = 17$.

El centro está en $C(h, k) = (-3,4)$
Los vértices están en $V(h+a, k)$ y $V'(h-a, k)$ $\quad V(12,4)$ y $V'(-18,4)$
Los focos están en $F(h+c, k)$ y $F'(h-c, k)$ $\quad F(14,4)$ y $F'(-20,4)$

EJEMPLOS 17.12 Escriba la de la hipérbola que tiene las características siguientes:

a) Los focos están en (2, 5) y (−4, 5) y el eje transversal tiene una longitud de 4.
b) El centro está en (1,−3), un foco en (1, 2) y el vértice en (1, 1).

a) Los focos se encuentran sobre la línea paralela al eje *x*, por lo que la forma es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

El centro se encuentra a la mitad entre los focos, por lo que $c = 3$ y el centro está en $C(-1, 5)$.
El eje transversal une los vértices, por lo que su longitud es $2a$, por lo tanto $2a = 4$ y $a = 2$.
Puesto que $c^2 = a^2 + b^2$ $c = 3$ y $a = 2$, por lo tanto, $b^2 = 5$.
La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{5} = 1$$

b) La distancia del vértice (1, 1) al centro (1, −3) es *a*, por ende, $a = 4$.
La distancia del foco (1, 2) al centro (1,−3) es *c*, por lo que $c = 5$.
Puesto que $c^2 = a^2 + b^2$, $a = 4$ y $c = 5$, $b^2 = 9$.
Ya que el centro, el vértice y el foco se encuentran sobre una línea paralela al eje *y*, la hipérbola tiene la forma

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

El centro es (1, −3), por lo que $h = 1$ y $k = -3$.
La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

EJEMPLOS 17.13 Escriba la ecuación de cada hipérbola en la forma estándar.

a) $25x^2 - 9y^2 - 100x - 72y - 269 = 0$ *b*) $4x^2 - 9y^2 - 24x - 90y - 153 = 0$

a) $25x^2 - 9y^2 - 100x - 72y - 269 = 0$
$(25x^2 - 100x) + (-9y^2 - 72y) = 269$ reordenando los términos
$25(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 8y) = 269$ factorizando para obtener x^2 y y^2
$25(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 8y + 16) = 269 + 25(4) - 9(16)$ completando el cuadrado de *x* y *y*
$25(x-2)^2 - 9(y+4)^2 = 225$ simplificando y dividiendo entre 225
$\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y+4)^2}{25} = 1$ forma estándar

b) $4x^2 - 9y^2 - 24x - 90y - 153 = 0$

$(4x^2 - 24x) + (-9y^2 - 90y) = 153$	reordenando los términos
$4(x^2 - 6x) - 9(y^2 + 10y) = 153$	factorizando para obtener x^2 y y^2
$4(x^2 - 6x + 9) - 9(y^2 + 10y + 25) = 153 + 4(9) - 9(25)$	completando el cuadrado de x y y
$4(x - 3)^2 - 9(y + 5)^2 = -36$	simplificando y dividiendo entre -36
$\dfrac{(x-3)^2}{-9} - \dfrac{(y+5)^2}{-4} = 1$	simplificando los signos
$\dfrac{(y+5)^2}{4} - \dfrac{(x-3)^2}{9} = 1$	forma estándar

17.7 GRÁFICAS DE SECCIONES CÓNICAS CON CALCULADORA

Puesto que la mayoría de las secciones cónicas no son funciones, un paso importante consiste en despejar y de la ecuación en su forma estándar. Si y es igual a una expresión en x que contenga una cantidad $\pm$, será necesario separar la expresión en dos partes: y_1 = la expresión que utiliza la cantidad $+$ y y_2 = la expresión que utiliza la cantidad $-$. De otra forma, se expresa y_1 = expresión. Grafique y_1 o y_1 y y_2 simultáneamente. Es probable que la ventana necesite ajustarse a fin de corregir la distorsión provocada por el uso de escalas diferentes en el eje x y en el y como ocurre con muchas ventanas estándar de las calculadoras gráficas. Ajustando la escala y a un valor 0.67, a menudo corrige dicha distorsión.

En el caso del círculo, la elipse y la hipérbola, a menudo es necesario fijar el centro de la ventana gráfica en el punto (h, k), el centro de la sección cónica. Sin embargo, se puede visualizar mejor la parábola si el vértice (h, k) se encuentra en un extremo de la ventana.

Problemas resueltos

17.1 Dibuje la gráfica de las ecuaciones siguientes:

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$, *b*) $4x^2 - 9y^2 = 36$, *c*) $4x + 9y^2 = 36$:

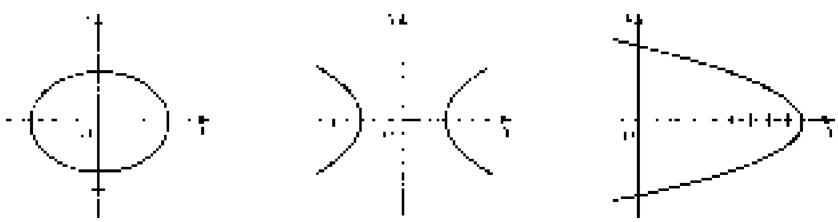
SOLUCIÓN

a) $4x^2 + 9y^2 = 36, \quad y^2 = \frac{4}{9}(9 - x^2), \quad y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}.$

Observe que y es real cuando $9 - x^2 \geq 0$, es decir, cuando $-3 \leq x \leq 3$. De aquí que los valores de x mayores a 3 o menores que -3 quedan excluidos.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	±1.49	±1.89	±2	±1.89	±1.49	0

La gráfica es una elipse con centro en el origen (vea la figura 17-14*a*).



a) Elipse *b*) Hipérbola *c*) Parábola

Figura 17-14

b) $4x^2 - 9y^2 = 36, \qquad y^2 = \frac{4}{9}(x^2 - 9), \qquad y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}.$

Si y va a tener un valor real, observe que x no puede tener un valor entre -3 y 3.

x	6	5	4	3	-3	-4	-5	-6
y	± 3.46	± 2.67	± 1.76	0	0	± 1.76	± 2.67	± 3.46

La gráfica consiste de dos ramas y se llama hipérbola (vea figura 17-14*b*).

c) $4x + 9y^2 = 36, \qquad y^2 = \frac{4}{9}(9 - x), \qquad y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x}.$

Observe que si x es mayor a 9, y es imaginario.

x	-1	0	1	5	8	9
y	± 2.11	± 2	± 1.89	± 1.33	± 0.67	0

La gráfica es una parábola (vea la figura 17-14*c*).

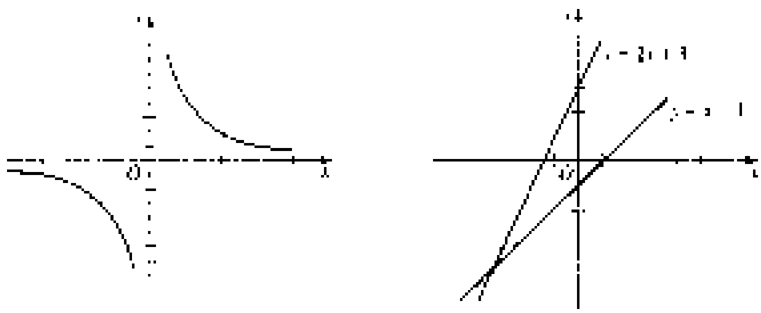
17.2 Dibuje la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $xy = 8,$ *b*) $2x^2 - 3xy + y^2 + x - 2y - 3 = 0,$ *c*) $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 25 = 0.$

SOLUCIÓN

a) $xy = 8, y = 8/x$. Observe que si x es cualquier número real excepto cero, y es real. La gráfica es una hipérbola (vea la figura 17-15*a*).

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4
y	2	4	8	16	-16	-8	-4	-2



a) Hipérbola *b*) Dos líneas que se intersectan

Figura 17-15

b) $2x^2 - 3xy + y^2 + x - 2y - 3 = 0$. Escriba como $y^2 - (3x + 2)y + (2x^2 + x - 3) = 0$ y resuelva por medio de la ecuación de segundo grado para obtener

$$y = \frac{3x + 2 \pm \sqrt{x^2 + 8x + 16}}{2} = \frac{(3x + 2) \pm (x + 4)}{2} \qquad \text{o} \qquad y = 2x + 3,\ y = x - 1$$

La ecuación dada es equivalente a las dos ecuaciones lineales, como puede uno darse cuenta escribiendo las ecuaciones dadas como $(2x - y + 3)(x - y - 1) = 0$. La gráfica consiste en dos líneas que se intersecan (vea la figura 17-15*b*).

c) Escríbala como $y^2 + 8y + (x^2 - 4x + 25) = 0$; despejando,

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{-4(x^2 - 4x + 9)}}{2}.$$

Puesto que $x^2 - 4x + 9 = x^2 - 4x + 4 + 5 = (x - 2)^2 + 5$ es siempre positiva, la cantidad dentro del signo radical es negativa. Por lo tanto, y es imaginaria para todos los valores reales de x y la gráfica no existe.

17.3 Escriba cada una de las ecuaciones de círculos siguientes en su forma estándar y determine su centro y su radio.

a) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 4 = 0$ *b*) $4x^2 + 4y^2 + 28y + 13 = 0$

SOLUCIÓN

a) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 4 = 0$
$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 4 + 16 + 25$
$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 45$ forma estándar
centro: $C(4, -5)$ radio: $r = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

b) $4x^2 + 4y^2 + 28y + 13 = 0$
$x^2 + y^2 + 7y = -13/4$
$x^2 + (y^2 + 7y + 49/4) = -13/4 + 49/4$
$x^2 + (y + 7/2)^2 = 9$ forma estándar
centro: $C(0, -7/2)$ radio: $r = 3$

17.4 Escriba la ecuación de los círculos siguientes:

a) centro en el origen y pasa por el punto (2, 6)
b) los extremos del diámetro están en $(-7, 2)$ y $(5, 4)$

SOLUCIÓN

a) La forma estándar de un círculo con centro en el origen es $x^2 + y^2 = r^2$. Puesto que el círculo pasa por (2, 6), se sustituye $x = 2$ y $y = 6$ para determinar r^2. Por lo tanto, $r^2 = 2^2 + 6^2 = 40$. La forma estándar del círculo es $x^2 + y^2 = 40$.

b) El centro de un círculo es el punto medio de su diámetro. El punto medio M del segmento de línea que tiene sus puntos extremos en (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es,

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Por lo tanto, el centro es,

$$C\left(\frac{-7 + 5}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) = C\left(\frac{-2}{2}, \frac{6}{2}\right) = C(-1, 3).$$

El radio de un círculo es la distancia desde el centro hasta el extremo del diámetro. La distancia, d, entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $d = \sqrt{(x^2 - x^1)^2 + (y^2 - y^1)^2}$. Por lo tanto, la distancia desde el centro $C(-1, 3)$ al punto (5, 4) es $r = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$.

La ecuación del círculo es $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 37$.

17.5 Escriba la ecuación del círculo que pasa a través de los puntos (3, 2), $(-1, 4)$ y (2, 3).

SOLUCIÓN

La forma general de la ecuación de un círculo es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, por lo que se deben sustituir los puntos dados en esta ecuación con el fin de obtener un sistema de ecuaciones en D, E y F.

Para (3, 2)	$3^2 + 2^2 + D(3) + E(2) + F = 0$	entonces (1)	$3D + 2E + F = -13$
Para (−1, 4)	$(-1)^2 + 4^2 + D(-1) + E(4) + F = 0$	entonces (2)	$-D + 4E + F = -17$
Para (2, 3)	$2^2 + 3^2 + D(2) + E(3) + F = 0$	entonces (3)	$2D + 3E + F = -13$

Se elimina F de (1) y (2) y de (1) y (3) y se obtiene

$$(4)\ 4D - 2E = 4 \qquad \text{y} \qquad (5)\ D - E = 0$$

Se resuelve el sistema formado por (4) y (5) obteniéndose $D = 2$ y $E = 2$ y se sustituyen en (1) con el fin de obtener $F = -23$.

La ecuación del círculo es $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$.

17.6 Escribe la ecuación de la parábola en su forma estándar y determine su vértice, foco, directriz y eje.

a) $y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$ *b*) $3x^2 + 18x + 11y + 5 = 0$:

SOLUCIÓN

a) $y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

$y^2 + 10y = 4x - 13$	ordenando términos
$y^2 + 10y + 25 = 4x + 12$	completando el cuadrado para y
$(y + 5)^2 = 4(x + 3)$	forma estándar
vértice $(h, k) = (-3, -5)$	$4p = 4$ por lo tanto $p = 1$
foco $(h + p, k) = (-3 + 1, -5) = (-2, -5)$	
directriz: $x = h - p = -4$	eje: $y = k = -5$

b) $3x^2 + 18x + 11y + 5 = 0$

$x^2 + 6x = -11/3y - 5/3$	
$x^2 + 6x + 9 = -11/3y + 22/3$	
$(x + 3)^2 = -11/3(y - 2)$	forma estándar
vértice $(h, k) = (-3;+2)$	$4p = -11/3\ p = -11/12$
foco $(h, k + p) = (-3, +2 + (-11/12)) = (-3, 13/12)$	
directriz $= k - p = +2 - (-11/12) = 35/12$	eje: $x = h = -3$

17.7 Escriba la ecuación de la parábola con las características siguientes:

a) vértice en el origen y directriz $y = 2$ *b*) vértice en $(-1,-3)$ y foco en $(-3,-3)$

SOLUCIÓN

a) Puesto que el vértice está en el origen, se tiene la forma $y^2 = 4px$ o $x^2 = 4py$. Sin embargo, puesto que la directriz es $y = 2$, la forma es $x^2 = 4py$.

El vértice es (0, 0) y la directriz es $y = k - p$. Puesto que $y = 2$ y $k = 0$, se tiene que $p = -2$.

La ecuación de la parábola es $x^2 = -8y$.

b) El vértice es $(-1,-3)$ y el foco está en $(-3,-3)$ y puesto que se encuentran sobre una línea paralela el eje x, la forma estándar es $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

A partir del vértice se obtiene $h = -1$ y $k = -3$ y puesto que el foco es $(h + p, k)$, $h + p = -3$ y $-1 + p = -3$, se obtiene $p = -2$.

Por lo tanto, la forma estándar de la parábola es $(y + 3)^2 = -8(x + 1)$.

17.8 Escriba la ecuación de la elipse en forma estándar y determine su centro, vértices, focos y covértices.

a) $64x^2 + 81y^2 = 64$ *b*) $9x^2 + 5y^2 + 36x + 10y - 4 = 0$

SOLUCIÓN

a) $64x^2 + 81y^2 = 64$

$x^2 + \frac{81y^2}{64} = 1$ dividiendo entre 64

$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\left(\frac{64}{81}\right)} = 1$ dividiendo el numerador y el denominador entre 81

forma estándar

centro en el origen (0, 0) $a^2 = 1$ y $b^2 = 64/81$, por lo que $a = 1$ y $b = 8/9$

En una elipse, $a^2 = b^2 + c^2$, por lo que $1 = 64/81 + c^2$ y $c^2 = 17/81$, lo cual da como resultado $c = \sqrt{17}/9$.

Los vértices son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, por lo que $V(1, 0)$ y $V'(-1, 0)$.
Los focos son $(c, 0)$, y $(c, 0)$, por lo que $F(\sqrt{17}/9, 0)$ y $F'(-\sqrt{17}/9, 0)$.
Los covértices son $(0, b)$ y $(0, -b)$, por lo que $B(0, 8/9)$ y $B0(0, -8/9)$.

b) $9x^2 + 5y^2 + 36x + 10y - 4 = 0$
$9(x^2 + 4x + 4) + 5(y^2 + 2y + 1) = 4 + 36 + 5$
$9(x + 2)^2 + 5(y + 1)^2 = 45$

$\frac{(x+2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ forma estándar

centro $(h, k) = (-2, -1)$ $a^2 = 9$, $b^2 = 5$, por lo que $a = 3$ y $b = \sqrt{5}$

Puesto que $a^2 = b^2 + c^2$, $c^2 = 4$ y $c = 2$.
Los vértices son $(h, k + a)$ y $(h, k - a)$, por lo que $V(-2, 2)$ y $V'(-2, -4)$.
Los focos son $(h, k + c)$ y $(h, k - c)$, por lo que $F(-2, 1)$ y $F'(-2, - 3)$.
Los covértices son $(h + b, k)$ y $(h - b, k)$ por lo que $B(-2 + \sqrt{5}, -1)$ y $B'(-2 - \sqrt{5}, -1)$.

17.9 Escriba la ecuación de la elipse que tiene estas características.

a) los focos son (1, 0) y $(-1, 0)$ y la longitud del eje menor es $\sqrt{2}$.
b) los vértices se encuentran en $(5, -1)$ y $(-3, -1)$ y $c = 3$.

SOLUCIÓN

a) El punto medio del segmento de línea entre los focos es el centro, por lo que éste es $C(0, 0)$ y se tiene una elipse centrada. La forma estándar es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Los focos son $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ por lo que $(c, 0) = (1, 0)$ y $c = 1$.
El eje menor tiene una longitud $2\sqrt{2}$, por lo que $2b = 2\sqrt{2}$ y $b^2 = 2$.
Para la elipse, $a^2 = b^2 + c^2$ y $a^2 = 1 + 2 = 3$.
Puesto que los focos se encuentran sobre el eje x, la forma estándar es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La ecuación de la elipse es,

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

b) El punto medio del segmento de línea entre los vértices es el centro, por lo que este es,

$$C\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) = (1, -1).$$

Se tiene una elipse con centro en (h, k), donde $h = 1$ y $k = -1$.

La forma estándar de la elipse es,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{o} \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

Los vértices son $(h + a, k)$ y $(h - a, k)$, por lo que $(h + a, k) = (1 + a, -1) = (5, -1)$. Por lo tanto, $1 + a = 5$ y $a = 4$.

Para la elipse, $a^2 = b^2 + c^2$, c tiene el valor de 3, y se puede deducir que el valor de a es 4. Por ende, $a^2 = 4^2 = 16$ y $c^2 = 3^2 = 9$. Por lo tanto, de $a^2 = b^2 + c^2$, se obtiene $16 = b^2 + 9$ y $b^2 = 7$.

Puesto que los vértices se encuentran sobre una línea paralela al eje x, la forma estándar es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

La ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{7}=1.$$

17.10 Escriba la ecuación en su forma estándar para cada una de las hipérbolas siguientes y determine el centro, los vértices y los focos.

a) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$ *b*) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 64y + 17 = 0$

SOLUCIÓN

a) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$

$16x^2 - 9y^2 = -144$

$\frac{x^2}{-9}-\frac{y^2}{-16}=1$

$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ forma estándar

centro $(h, k) = (0, 0)$ $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, por lo tanto $a = 4$ y $b = 3$

Puesto que $c^2 = a^2 + b^2$ para una hipérbola, $c^2 = 16 + 9 = 25$ y $c = 5$.

Los focos son $(0, c)$ y $(0, c)$, por lo que $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$.

Los vértices son $(0, a)$ y $(0, -a)$, por lo que $V(0, 4)$ y $V'(0, -4)$

b) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 64y + 17 = 0$

$9(x^2 + 10x + 25) - 16(y^2 - 4y + 4) = -17 + 225 - 64$

$9(x + 5)^2 - 16(y - 2)^2 = 144$

$\frac{(x+5)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$ forma estándar

centro $(h, k) = (-5, 2)$ $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, por lo que $a = 4$ y $b = 3$

Puesto que $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = 16 + 9 = 25$ y $c = 5$:

Los focos son $(h + c, k)$ y $(h - c, k)$, por lo que $F(0, 2)$ y $F'(-10, 2)$:

Los vértices son $(h + a, k)$ y $(h - a, k)$, por lo que $V(-1, 2)$ y $V'(-9, 2)$.

17.11 Escriba la ecuación de la hipérbola con las características que se indican.

a) los vértices son $(0, \pm 2)$ y los focos son $(0, \pm 3)$

b) los focos están en $(1, 2)$ y $(-11, 2)$ y el eje transverso tiene una longitud de 4.

SOLUCIÓN

a) Puesto que los vértices son $(0, \pm 2)$, el centro se encuentra en $(0, 0)$, y puesto que se encuentran sobre una línea vertical, la forma estándar es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Los vértices se encuentran en $(0, \pm a)$ por lo que $a = 2$ y los focos están en $(0, \pm 3)$, por lo que $c = 3$. Puesto que $c^2 = a^2 + b^2$, $9 = 4 + b^2$**,** por lo que $b^2 = 5$.
La ecuación de la hipérbola es,

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

b) Puesto que los focos están en $(1, 2)$ y $(-11, 2)$, se encuentran sobre una línea paralela al eje x, por lo que su forma es,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

El punto medio del segmento de línea entre los focos $(1, 2)$ y $(-11, 2)$ es el centro, por lo que $C(h, k) = (-5, 2)$. Los focos están en $(h + c, k)$ y $(h - c, k)$, por lo que $(h + c, k) = (1, 2)$ y $-5 + c = 1$, donde $c = 6$. El eje transversal tiene una longitud de 4 por lo que $2a = 4$ y $a = 2$. A partir de $c^2 = a^2 + b^2$, se obtiene $36 = 4 + b^2$ y $b^2 = 32$.

La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x+5)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{32} = 1$$

Problemas propuestos

17.12 Grafique cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + y^2 = 9$
b) $xy = -4$
c) $4x^2 + y^2 = 16$
d) $x^2 - 4y^2 = 36$
e) $y^2 = 4x$
f) $x^2 + 3y^2 - 1 = 0$
g) $x^2 + 3xy + y^2 = 16$
h) $x^2 + 4y = 4$
i) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$
j) $2x^2 - xy - y2 - 7x - 2y + 3 = 0$

17.13 Escriba la ecuación del círculo que tenga las características siguientes:

a) centro $(4, 1)$ y radio 3
b) centro $(5, -3)$ y radio 6
c) pasa por $(0, 0)$, $(-4, 0)$ y $(0, 6)$
d) pasa por $(2, 3)$, $(-1, 7)$ y $(1, 5)$

17.14 Escriba la ecuación del círculo en su forma estándar y establezca su centro y su radio.

a) $x^2 + y^2 + 6x - 12y - 20 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 7x + 3y - 10 = 0$
d) $2x^2 + 2y^2 - 5x - 9y + 11 = 0$

17.15 Escriba la ecuación de la parábola que tiene las características siguientes:

a) vértice $(3, -2)$ y directriz $x = -5$
b) vértice $(3, 5)$ y foco $(3, 10)$
c) pasa por $(5, 10)$, el vértice está en el origen y su eje está sobre el eje x.
d) vértice en $(5, 4)$ y foco en $(2, 4)$

17.16 Escriba la ecuación de la parábola en su forma estándar y determine su vértice, foco, directriz y eje.

a) $y^2 + 4x - 8y + 28 = 0$
b) $x^2 - 4x + 8y + 36 = 0$
c) $y^2 - 24x + 6y - 15 = 0$
d) $5x^2 + 20x - 9y + 47 = 0$

17.17 Escriba la ecuación de la elipse que tiene las características siguientes:

a) vértices $(\pm 4, 0)$, focos $(+2\sqrt{3}, 0)$
b) covértices $(\pm 3, 0)$, longitud del eje mayor 10
c) centro $(-3, 2)$, vértice $(2, 2)$, $c = 4$.
d) vértices $(3, 2)$ y $(3, -6)$, covértices $(1, -2)$ y $(5, -2)$

17.18 Escriba la ecuación de la elipse en su forma estándar y determine el centro, vértices, focos y covértices.

a) $3x^2 + 4y^2 - 30x - 8y + 67 = 0$
b) $16x^2 + 7y^2 - 64x + 28y - 20 = 0$
c) $9x^2 + 8y^2 + 54x + 80y + 209 = 0$
d) $4x^2 + 5y^2 - 24x - 10y + 21 = 0$

17.19 Escriba las ecuaciones de la hipérbola que tiene las características siguientes:

a) vértices $(\pm 3,0)$, focos $(\pm 5,0)$
b) vértices $(0, \pm 8)$, focos $(0, \pm 10)$
c) focos $(4,-1)$ y $(4,5)$, la longitud del eje transversal es 2
d) vértices $(-1,-1)$ y $(-1,5)$, $b = 5$

17.20 Escriba la ecuación de la hipérbola en su forma estándar y determine su centro, vértices y focos.

a) $4x^2 - 5y^2 - 8x - 30y - 21 = 0$
b) $5x^2 - 4y^2 - 10x - 24y - 51 = 0$
c) $3x^2 - y^2 - 18x + 10y - 10 = 0$
d) $4x^2 - y^2 + 8x + 6y + 11 = 0$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

17.12 *a*) círculo, figura 17-16
b) hipérbola, figura 17-17
c) elipse, figura 17-18
d) hipérbola, figura 17-19
e) parábola, figura 17-20
f) elipse, figura 17-21
g) hipérbola, figura 17-22
h) parábola, figura 17-23
i) un solo punto, $(1,-1)$
j) dos líneas que se intersecan, figura 17-24 ($y = x - 3$ e $y = -2x + 1$)

17.13 *a*) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$
b) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 36$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$
d) $x^2 + y^2 + 11y - y - 32 = 0$

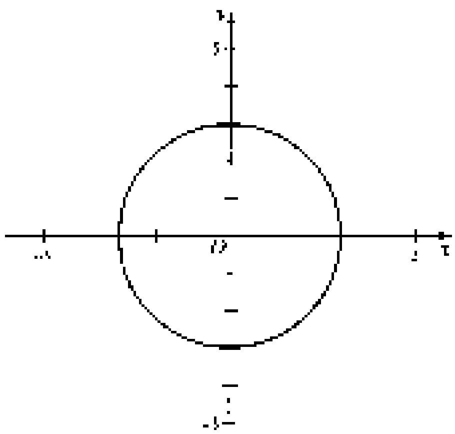


Figura 17-16

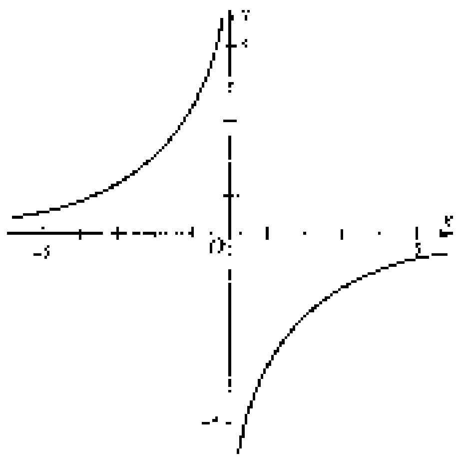


Figura 17-17

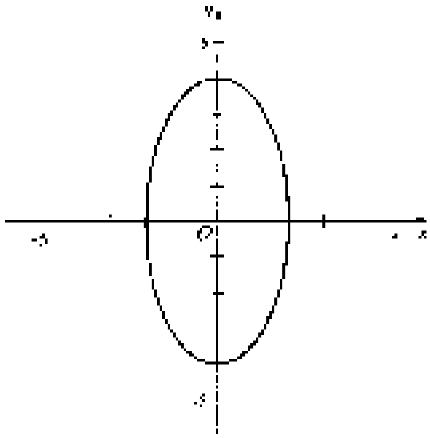


Figura 17-18

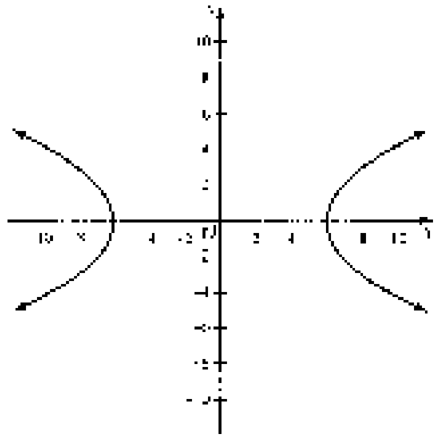


Figura 17-19

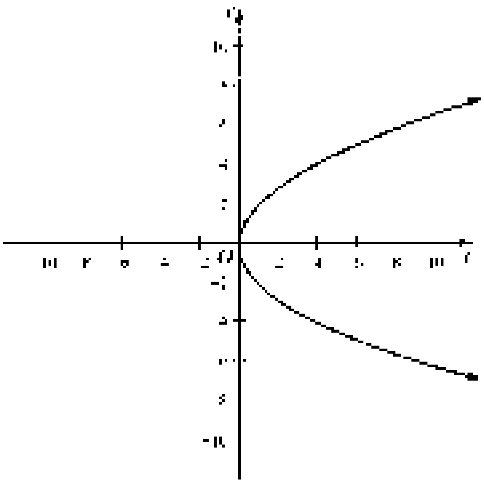


Figura 17-20

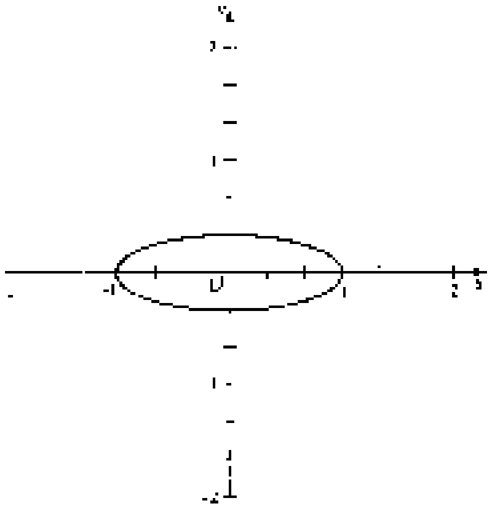


Figura 17-21

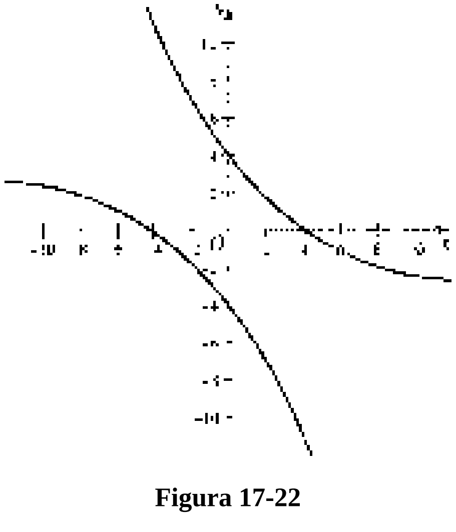


Figura 17-22

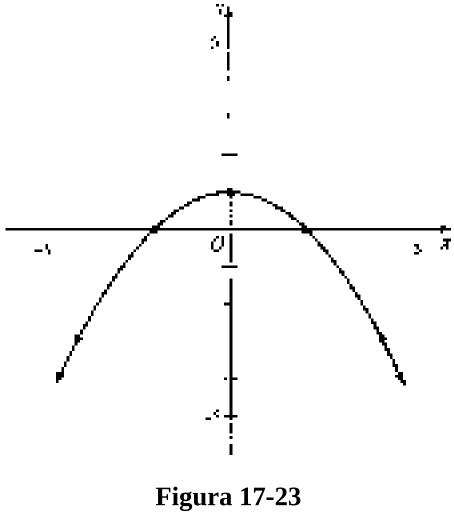


Figura 17-23

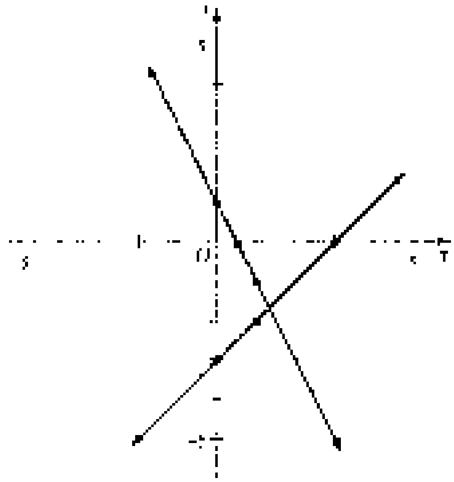


Figura 17-24

17.14 *a*) $(x+3)^2+(y-6)^2=65$, $C(-3, 6)$, $r=\sqrt{65}$
b) $(x+6)^2+(y-2)^2=45$, $C(6, 2)$, $r=3\sqrt{5}$
c) $(x+7/2)^2+(y+3/2)^2=49/2$, $C(-7/2, -3/2)$, $r=7\sqrt{2}/2$
d) $(x-5/4)^2+(y-9/4)^2=9/8$, $C(5/4, 9/4)$, $r=3\sqrt{2}/4$

17.15 *a*) $(y+2)^2=32(x-3)$ *b*) $(x-3)^2=20(y-5)$ *c*) $y^2=20x$ *d*) $(x-5)^2=-12(y-4)$

17.16 *a*) $(y-4)^2=-4(x+3)$, $V(-3, 4)$, $F(-4, 4)$, directriz: $x=-2$, ejes: $y=4$
b) $(x-2)^2=-8(y+4)$, $V(2, -4)$, $F(2, -6)$, directriz: $y=-2$, ejes: $x=2$
c) $(y+3)^2=24(x+1)$, $V(-1, -3)$, $F(5, -3)$, directriz: $x=-7$, ejes: $y=-3$
d) $(x+2)^2=9(y-3)/5$, $V(-2, 3)$, $F(-2, 69/20)$, directriz: $y=51/20$, ejes: $x=-2$

17.17 *a*) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ *c*) $\dfrac{(x+3)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$
b) $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{9}=1$ *d*) $\dfrac{(y+2)^2}{16}+\dfrac{(x-3)^2}{4}=1$

17.18 *a*) $\dfrac{(x-5)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{3}=1$, centro (5, 1), vértices (7, 1) y (3, 1); focos (6, 1) y (4, 1), covértices $(5, 1+\sqrt{3})$ y $(5, 1-\sqrt{3})$
b) $\dfrac{(y+2)^2}{16}+\dfrac{(x-2)^2}{7}=1$, centro $(2, -2)$, vértices (2, 2) y $(2, -6)$; focos (2, 1) y $(2, -5)$, covértices $(2+\sqrt{7}, -2)$ y $(2-\sqrt{7}, -2)$
c) $\dfrac{(y+5)^2}{9}+\dfrac{(x+3)^2}{8}=1$, centro $(3, -5)$, vértices $(3, -2)$ y $(3, -8)$, focos $(3, -4)$ y $(3, -6)$, covértices $(-3+2\sqrt{2}, -5)$ y $(-3-2\sqrt{2}, -5)$
d) $\dfrac{(x-3)^2}{5}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$, centro (3, 1), vértices $(3+\sqrt{5}, 1)$ y $(3-\sqrt{5}, 1)$, focos (4, 1) y (2, 1), covértices (3, 3) y $(3, -1)$

17.19 *a*) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ *c*) $\dfrac{(y-2)^2}{1}-\dfrac{(x-4)^2}{8}=1$
b) $\dfrac{y^2}{64}-\dfrac{x^2}{36}=1$ *d*) $\dfrac{(y-2)^2}{9}-\dfrac{(x+1)^2}{25}=1$

17.20 *a*) $\dfrac{(y+3)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{5} = 1$, centro $(1, -3)$, vértices $(1, -1)$ y $(1, -5)$, focos $(1, 0)$ y $(1, -8)$

b) $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{5} = 1$, centro $(1, 3)$, vértices $(-1, 3)$ y $(3, 3)$, focos $(4, 3)$ y $(-2, 3)$

c) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(y+5)^2}{12} = 1$, centro $(3, 5)$, vértices $(5, -5)$ y $(1, -5)$, focos $(7, -5)$ y $(-1, -5)$

d) $\dfrac{(y-3)^2}{16} - \dfrac{(x+1)^2}{4} = 1$, centro $(-1, 3)$, vértices $(-1, 7)$ y $(-1, -1)$, focos $(1, 3 + 2\sqrt{5}\,p)$ y $(1, 3 - 2\sqrt{5})$

SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

18

18.1 SOLUCIÓN GRÁFICA

Las soluciones reales de dos ecuaciones de segundo grado con incógnitas x y y son los valores de x y y correspondientes a los puntos de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones. Si las gráficas no se intersectan, las soluciones simultáneas son imaginarias.

18.2 SOLUCIÓN ALBEGRAICA

A. Una ecuación lineal y una de segundo grado.
Resuelva la ecuación lineal para encontrar las incógnitas y sustitúyalas en la ecuación de segundo grado.

EJEMPLO 18.1 Resuelva el sistema

(1) $x + y = 7$
(2) $x^2 + y^2 = 25$

Despejando y en 1), $y = 7 - x$. Sustituya este valor en 2) y obtenga $x^2 + (7 - x)^2 = 25$, $x^2 - 7x + 12 = 0$, $(x - 3)(x - 4) = 0$, y $x = 3, 4$. Cuando $x = 3$, $y = 7 - x = 4$; cuando $x = 4$, $y = 7 - x = 3$. Por ende, las soluciones simultáneas son (3, 4) y (4, 3).

B. Dos ecuaciones de la forma $ax^2 + by^2 = c$
Utilice los métodos de suma y resta.

EJEMPLO 18.2 Resuelva el sistema

(1) $2x^2 - y^2 = 7$
(2) $3x^2 + 2y^2 = 14$

Para eliminar y, multiplique (1) por 2 y sume el resultado con (2); por lo tanto

$$7x^2 = 28, \qquad x^2 = 4 \qquad \text{y} \qquad x = \pm 2:$$

Ahora haga $x = 2$ o $x = -2$ en 1) y obtenga $y = \pm 1$.

Las cuatro soluciones son:

$$(2, 1); \qquad (-2, 1); \qquad (2, -1); \qquad (-2, -1)$$

C. Dos ecuaciones de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$.

EJEMPLO 18.3 Resuelva el sistema

(1) $x^2 + xy = 6$
(2) $x^2 + 5xy - 4y^2 = 10$

Método 1
Elimine el término constante en ambas ecuaciones. Multiplique (1) por 5, (2) por 3 y réstelas; por ende

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, (x - 2y)(x - 3y) = 0, x = 2y \text{ y } x = 3y.$$

Ahora haga $x = 2y$ en (1) o (2) y obtenga $y^2 = 1$, $y = \pm 1$.
Cuando $y = 1$, $x = 2y = 2$; cuando $y = -1$, $x = 2y = -2$. Por lo tanto, las dos soluciones son: $x = 2$, $y = 1$; $x = -2$, $y = -1$.
Después, haga $x = 3y$ en (1) o (2) y obtenga

$$y^2 = \frac{1}{2}, \qquad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Cuando

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x = 3y = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

cuando

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Por lo tanto, las cuatro soluciones son:

$$(2, 1); \qquad (-2, -1); \qquad \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \qquad \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Método 2
Sea $y = mx$ en ambas ecuaciones.
A partir de (1): $x^2 + mx^2 = 6$, $\quad x^2 = \dfrac{6}{1+m}$.
A partir de (2): $x^2 + 5mx^2 - 4m^2x^2 = 10$, $\quad x^2 = \dfrac{10}{1+5m-4m^2}$.
Entonces,

$$\frac{6}{1+m} = \frac{10}{1+5m-4m^2}$$

a partir de la cual $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; de aquí que $y = x/2$, $y = x/3$. La solución continúa como en el caso del método 1.

D. Métodos misceláneos

1. Algunos sistemas de ecuaciones pueden resolverse reemplazándolos por sistemas equivalentes más simples (vea los problemas 18.8 a 18.10).

2. Una ecuación es simétrica respecto a x y y si al intercambiar dichas variables en la ecuación, ésta no cambia. Por lo tanto, $x^2 + y^2 - 3xy + 4x + 4y = 8$ es simétrica respecto a x y y. Los sistemas de ecuaciones simétricas a menudo pueden resolverse por las sustituciones $x = u + v$, $y = u - v$ (consulte los problemas 18.11 y 18.12).

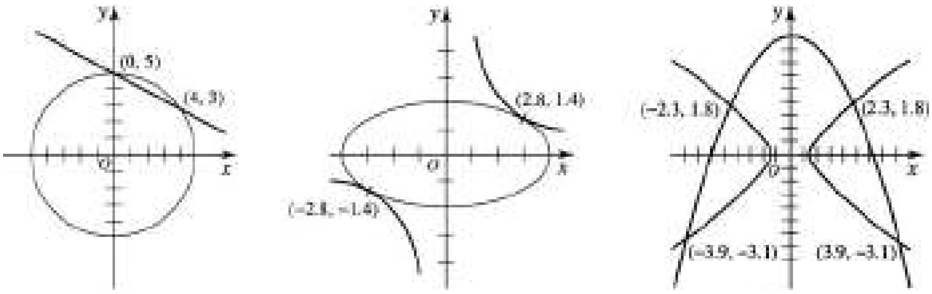
Problemas resueltos

18.1 Resuelva gráficamente los sistemas siguientes:

a) $x^2 + y^2 = 25$, $x + 2y = 10$ *b*) $x^2 + 4y^2 = 16$, $xy = 4$ *c*) $x^2 + 2y = 9$, $2x^2 - 3y^2 = 1$

SOLUCIÓN

Vea la figura 18-1.



a) $x^2 + y^2 = 25$ círculo, $x + 2y = 10$ línea   *b*) $x^2 + 4y^2 = 16$ elipse, $xy = 4$ hipérbola   *c*) $x^2 + 2y = 9$ parábola, $2x^2 - 3y^2 = 1$ hipérbola

Figura 18-1

18.2 Resuelva los sistemas siguientes:

a) $x + 2y = 4$, $y^2 - xy = 7$ *b*) $3x - 1 + 2y = 0$, $3x^2 - y^2 + 4 = 0$

SOLUCIÓN

a) Despejando x de la ecuación lineal, se obtiene $x = 4 - 2y$. Sustituyendo en la ecuación de segundo grado,

$$y^2 - y(4 - 2y) = 7,\ 3y^2 - 4y - 7 = 0,\ (y + 1)(3y - 7) = 0 \text{ y } y = 1, 7/3.$$

Si $y = -1$, $x = 4 - 2y = 6$; si $y = 7/3$, $x = 4 - 2y = -2/3$.
Las soluciones son $(6, -1)$ y $(-2/3, 7/3)$.

b) Despejando y en las ecuaciones lineales, se obtiene $y = \frac{1}{2}(1 - 3x)$. Sustituyendo la ecuación de segundo grado,

$$3x^2 - [\tfrac{1}{2}(1 - 3x)]^2 + 4 = 0, \qquad x^2 + 2x + 5 = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = -1 \pm 2i.$$

Si $x = -1 + 2i$, $y = \frac{1}{2}(1 - 3x) = \frac{1}{2}[1 - 3(-1 + 2i)] = \frac{1}{2}(4 - 6i) = 2 - 3i$.
Si $x = -1 - 2i$, $y = \frac{1}{2}(1 - 3x) = \frac{1}{2}[1 - 3(-1 - 2i)] = \frac{1}{2}(4 + 6i) = 2 + 3i$.
Las soluciones son $(-1 + 2i, 2 - 3i)$ y $(-1 - 2i, 2 + 3i)$.

18.3 Resuelva el sistema: (1) $2x^2 - 3y^2 = 6$, (2) $3x^2 + 2y^2 = 35$.

SOLUCIÓN

Para eliminar y, multiplique (1) por 2, (2) por 3 y sume; por lo tanto, $13x^2 = 117$, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$.

Ahora haga $x = 3$ o $x = -3$ en 1) y obtenga $y = \pm 2$.

La soluciones son: $(3, 2)$; $(-3, 2)$; $(3, -2)$; $(-3, -2)$.

18.4 Resuelva el sistema:

$$(1)\ \frac{8}{x^2} - \frac{3}{y^2} = 5, \qquad (2)\ \frac{5}{x^2} + \frac{2}{y^2} = 38.$$

SOLUCIÓN

Las ecuaciones son cuadráticas en $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$. Sustituyendo $u = \frac{1}{x}$ y $v = \frac{1}{y}$, se obtiene

$$8u^2 - 3v^2 = 5 \quad \text{y} \quad 5u^2 + 2v^2 = 38$$

Resolviendo simultáneamente, $u^2 = 4$, $v^2 = 9$ o $x^2 = 1/4$, $y^2 = 1/9$; entonces, $x = \pm 1/2$, $y = \pm 1/3$.

La soluciones son:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right); \qquad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \qquad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right); \qquad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right).$$

18.5 Resuelva el sistema

$$(1)\ 5x^2 + 4y^2 = 48$$
$$(2)\ x^2 + 2xy = 16$$

eliminando los términos constantes.

SOLUCIÓN

Multiplique (2) por 3 y reste el resultado de (1) a fin de obtener,

$$2x^2 - 6xy + 4y^2 = 0, \qquad x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \qquad (x - y)(x - 2y) = 0 \quad \text{y} \quad x = y, \quad x = 2y:$$

Sustituyendo $x = y$ en 1) o 2), se tiene $y^2 = \frac{16}{3}$ y $y = \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Sustituyendo $x = 2y$ en (1) o (2), se tiene $y^2 = 2$ y $y = \pm\sqrt{2}$.

Las cuatro soluciones son:

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right); \qquad \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right); \qquad (2\sqrt{2}, \sqrt{2}); \qquad (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

18.6 Resuelva el sistema

$$(1)\ 3x^2 - 4xy = 4$$
$$(2)\ x^2 - 2y^2 = 2$$

utilizando la sustitución $y = mx$.

SOLUCIÓN

Haga $y = mx$ en (1); entonces $3x^2 - 4mx^2 = 4$ y $x^2 = \dfrac{4}{3 - 4m}$.

Haga $y = mx$ en (2); entonces $x^2 - 2m^2x^2 = 2$ y $x^2 = \dfrac{2}{1 - 2m^2}$.

Por lo tanto, $\dfrac{4}{3 - 4m} = \dfrac{2}{1 - 2m^2}$, $\quad 4m^2 - 4m + 1 = 0$, $\quad (2m - 1)^2 = 0$ y $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Ahora sustituya $y = mx = \frac{1}{2}x$ en (1) o (2) y obtenga $x^2 = 4$, $x = \pm 2$.

Las soluciones son $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

18.7 Resuelva el sistema: (1) $x^2 + y^2 = 40$, (2) $xy = 12$.

SOLUCIÓN

A partir de (2), $y = 12/x$; sustituyendo en (1), obtenemos

$$x^2 + \frac{144}{x^2} = 40, \quad x^4 - 40x^2 + 144 = 0, \quad (x^2 - 36)(x^2 - 4) = 0 \quad \text{y} \quad x = \pm 6, \quad \pm 2.$$

Para $x = \pm 6$, $y = 12/x = \pm 2$; para $x = \pm 2$, $y = \pm 6$.

Las cuatro soluciones son: (6, 2); (−6, −2); (2, 6); (−2, −6).

Nota: La ecuación (2) indica que aquellas soluciones en las que el producto xy es negativo (por ejemplo, $x = 2$, $y = -6$) son extrañas.

18.8 Resuelva el sistema: (1) $x^2 + y^2 + 2x - y = 14$, (2) $x^2 + y^2 + x - 2y = 9$.

SOLUCIÓN

Reste (2) de (1): $x + y = 5$ o $y = 52\ x$.
Sustituya $y = 5 - x$ en (1) o (2): $2x^2 - 7x + 6 = 0$, $(2x - 3)(x - 2) = 0$ y $x = 3/2, 2$.
Las soluciones son $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ y (2, 3)

18.9 Resuelva el sistema: (1) $x^3 + y^3 = 35$, (2) $x + y = 5$.

SOLUCIÓN

Dividiendo (1) entre (2)

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = \frac{35}{5} \qquad \text{y} \qquad (3)\ x^2 - xy + y^2 = 7.$$

A partir de (2), $y = 5 - x$; sustituyendo en (3), se tiene

$$x^2 - x(5 - x) + (5 - x)^2 = 7, \quad x^2 - 5x + 6 = 0, \quad (x - 3)(x - 2) = 0 \quad \text{y} \quad x = 3, 2:$$

Las soluciones son (3, 2) y (2, 3)

18.10 Resuelva el sistema: (1) $x^2 + 3xy + 2y^2 = 3$, (2) $x^2 + 5xy + 6y^2 = 15$.

SOLUCIÓN

Dividiendo (1) entre (2)

$$\frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x^2 + 5xy + 6y^2} = \frac{(x + y)(x + 2y)}{(x + 3y)(x + 2y)} = \frac{x + y}{x + 3y} = \frac{1}{5}.$$

A partir de $\dfrac{x + y}{x + 3y} = \dfrac{1}{5}$, $y = -2x$. Sustituyendo $y = -2x$ en (1) o (2), $x^2 = 1$ y $x = \pm 1$.
Las soluciones son (1, −2) y (−1, 2).

18.11 Resuelva el sistema: (1) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 32$, (2) $x + y + 2xy = 22$.

SOLUCIÓN

Las ecuaciones son simétricas con respecto a x y y puesto que al intercambiar x por y se obtiene la misma ecuación. Sustituyendo $x = u + v$ y $y = u - v$ en (1) y (2), se obtiene,

$$(3)\ u^2 + v^2 + 2u = 16 \quad \text{y} \quad (4)\ u^2 - v^2 + u = 11:$$

Sumando (3) y (4), se obtiene $2u^2 + 3u - 27 = 0$, $(u - 3)(2u + 9) = 0$ y $u = 3, -9/2$.

Cuando $u = 3$, $v^2 = 1$ y $v = +1$; cuando $u = -9/2$, $v^2 = 19/4$ y $v = \pm\sqrt{19} = 2$. Por lo tanto las soluciones de (3) y (4) son: $u = 3$, $v = 1$; $u = 3$, $v = -1$; $u = -9/2$, $v = \sqrt{19}/2$; $u = -9 = 2$, $v = -\sqrt{19}/2$.

Entonces, puesto que $x = u + v$, $y = u - v$, las cuatro soluciones de (1) y (2) son:

$$(4, 2); \qquad (2, 4); \qquad \left(\frac{-9+\sqrt{19}}{2}, \frac{-9-\sqrt{19}}{2}\right); \qquad \left(\frac{-9-\sqrt{19}}{2}, \frac{-9+\sqrt{19}}{2}\right).$$

18.12 Resuelva el sistema:

(1) $x^2 + y^2 = 180$, (2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$.

SOLUCIÓN

A partir de (2) se obtiene (3) $4x + 4y - xy = 0$. Puesto que (1) y (3) son simétricas con respecto a x y y, sustituya $x = u + v$, $y = u - v$ en (1) y (3) para obtener

$$4)\ u^2 + v^2 = 90 \qquad \text{y} \qquad 5)\ 8u - u^2 + v^2 = 0:$$

Restando (5) de (4), se tiene $u^2 - 4u - 45 = 0$, $(u - 9)(u + 5) = 0$ y $u = 9, -5$.

Cuando $u = 9$, $v = +3$; cuando $u = -5$, $v = \pm\sqrt{65}$. Por lo tanto, las soluciones de (4) y (5) son: $u = 9$, $v = 3$; $u = 9$, $v = -3$; $u = -5$, $v = \sqrt{65}$; $u = -5$, $v = -\sqrt{65}$.

De aquí que las cuatro soluciones de (1) y (2) son:

$$(12, 6); \quad (6, 12); (-5 + \sqrt{65}, -5 - \sqrt{65}); \quad (-5 - \sqrt{65}, -5 + \sqrt{65}):$$

18.13 La suma de dos números es 25 y su producto 144. Encuentre los números.

SOLUCIÓN

Sean los números sean x y y. Entonces (1) $x + y = 25$ y (2) $xy = 144$.

Las soluciones simultáneas de (1) y (2) son $x = 9$, $y = 16$ y $x = 16$, $y = 9$. De aquí que los números solicitados (positivos) son 9 y 16.

18.14 La diferencia de dos números positivos es 3 y la suma de sus cuadrados es 65. Encuentre los números.

SOLUCIÓN

Sean los números p, q. Por lo tanto, (1) $p - q = 3$ y (2) $p^2 + q^2 = 65$.

Las soluciones simultáneas de (1) y (2) son $p = 7$, $q = 4$ y $p = -4$, $q = -7$. De aquí que los números solicitados (positivos) son 7 y 4.

18.15 Un rectángulo tiene un perímetro de 60 pies y un área de 216 pies cuadrados. Encuentre sus dimensiones.

SOLUCIÓN

Sean las longitudes de los lados del rectángulo x y y. Entonces (1) $2x + 2y = 60$ y (2) $xy = 216$.

Resolviendo (1) y (2) simultáneamente, los lados solicitados tienen las dimensiones de 12 y 18 pies.

18.16 La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 41 pies de longitud y el área del triángulo es de 180 pies cuadrados. Encuentre las longitudes de los dos catetos.

SOLUCIÓN

Sean los catetos de x y y pies de longitud. Por lo tanto, (1) $x^2 + y^2 = (41)^2$ y (2) $\frac{1}{2}(xy) = 180$.

Resolviendo (1) y (2) simultáneamente, se encuentra que la longitud de los catetos es de 9 y 40 pies.

Problemas propuestos

18.17 Resuelva de manera gráfica los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + y^2 = 20,\ 3x - y = 2$
b) $x^2 + 4y^2 = 25,\ x^2 - y^2 = 5$
c) $y^2 = x,\ x^2 + 2y^2 = 24$
d) $x^2 + 1 = 4y,\ 3x - 2y = 2$

18.18 Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes de manera algebraica.

a) $2x^2 - y^2 = 14,\ x - y = 1$
b) $xy + x^2 = 24,\ y - 3x + 4 = 0$
c) $3xy - 10x = y,\ 2 - y + x = 0$
d) $4x + 5y = 6,\ xy = -2$
e) $2x^2 - y^2 = 5,\ 3x^2 + 4y^2 = 57$
f) $9/x^2 + 16/y^2 = 5,\ 18/x^2 - 12/y^2 = -1$
g) $x^2 - xy = 12,\ xy - y^2 = 3$
h) $x^2 + 3xy = 18,\ x^2 - 5y^2 = 4$
i) $x^2 + 2xy = 16,\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 6$
j) $x^2 - xy + y^2 = 7,\ x^2 + y^2 = 10$
k) $x^2 - 3y^2 + 10y = 19,\ x^2 - 3y^2 + 5x = 9$
l) $x^3 - y^3 = 9,\ x - y = 3$
m) $x^3 - y^3 = 19,\ x^2y - xy^2 = 6$
n) $1/x^3 + 1/y^3 = 35,\ 1/x^2 - 1/xy + 1/y^2 = 7$

18.19 El cuadrado de un cierto número excede en 16 a dos veces al cuadrado de otro número. Encuentre los números si la suma de sus cuadrados es 208.

18.20 La diagonal de un rectángulo es de 85 pies. Si el lado corto aumenta en 11 pies y el largo disminuye en 7 pies, la longitud de la diagonal sigue siendo la misma. Encuentre las dimensiones del rectángulo original.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

18.17 *a*) $(2, 4), (-0.8, -4.4)$ Consulte la figura 18-2
b) $(3, 2), (-3, 2), (3, -2), (-3, -2)$ Consulte la figura 18-3
c) $(4, 2), (4, -2)$ Consulte la figura 18-4
d) $(1, 0.5), (5, 6.5)$ Consulte la figura 18-5

18. 18 *a*) $(3, 2), (-5, -6)$
b) $(3, 5), (-2, -10)$
c) $(2, 4), (-1/3, 5/3)$
d) $(-1, 2), (5/2, -4/5)$
e) $(\sqrt{7}, 3), (\sqrt{7}, -3), (-\sqrt{7}, 3), (\sqrt{7}, -3)$
f) $(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)$
g) $(4, 1), (-4, -1)$
h) $(3, 1), (-3, -1), \left(3i\sqrt{5}, \dfrac{-7i\sqrt{5}}{5}\right), \left(-3i\sqrt{5}, \dfrac{7i\sqrt{5}}{5}\right)$
i) $(2, 3), (-2, -3)$
j) $(1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$
k) $(-12, -5), (4, 3)$
l) $(1, -2), (2, -1)$
m) $(-2, -3), (3, 2)$
n) $(1/2, 1/3), (1/3, 1/2)$

18. 19 12, 8; −12, −8; 12, −8; −12, 8

18. 20 40 pies, 75 pies

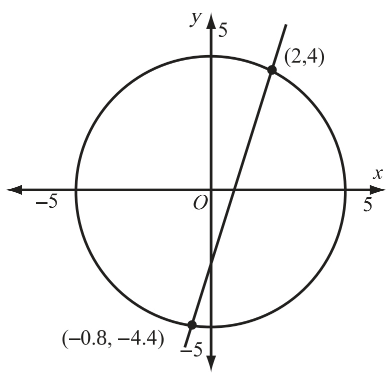


Figura 18-2

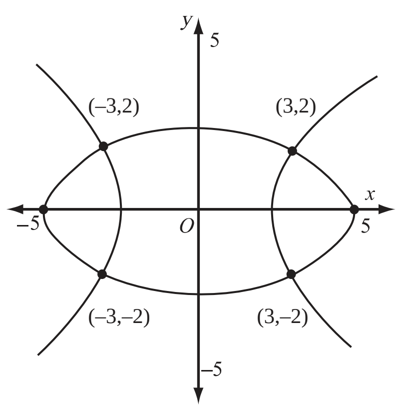


Figura 18-3

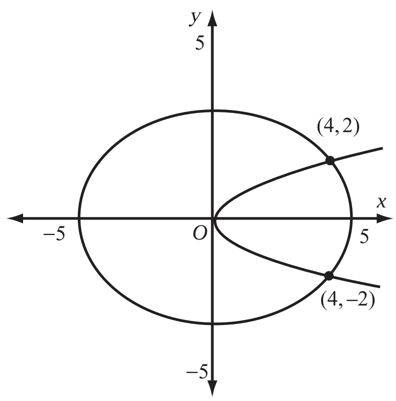


Figura 18-4

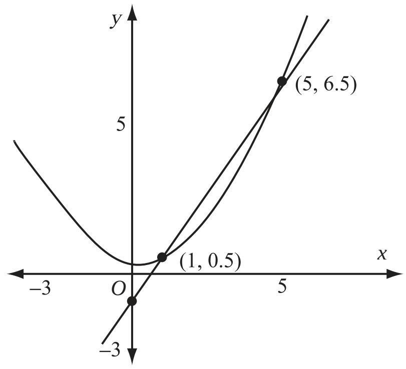


Figura 18-5

DESIGUALDADES 19

19.1 DEFINICIONES

Una *desigualdad* expresa que una cantidad real, o una expresión, es mayor o menor que otra.

A continuación se indica el significado de los signos de desigualdad.

1. $a > b$ significa que “a es mayor que b” (o $a - b$ es un número positivo).
2. $a < b$ significa que “a es menor que b” (o $a - b$ es un número negativo).
3. $a \geq b$ significa “a es mayor o igual que b”
4. $a \leq b$ significa “a es menor o igual que b”
5. $0 < a < 2$ significa “a es mayor que cero, pero menor que 2”
6. $-2 \leq x < 2$ significa “x es mayor o igual que -2 pero menor que 2”.

Una *desigualdad absoluta* es aquella que se verifica para todos los valores reales de las letras que intervienen en ella. Por ejemplo, $(a - b)^2 > -1$ es cierta para todos los valores reales de a y b, ya que el cuadrado de todo número real es un número positivo o cero.

Una *desigualdad condicional* sólo es cierta para determinados valores de las variables involucradas. Por ejemplo, $x - 5 > 3$ sólo es verdad para x mayor que 8.

Las desigualdades $a > b$ y $c > d$ tienen el *mismo sentido*. Las desigualdades $a > b$ y $x < y$ tienen *sentidos opuestos*.

19.2 TEOREMAS DE LAS DESIGUALDADES

1. El sentido de una desigualdad no se modifica si a sus dos elementos se les suma o resta un mismo número real. Por consiguiente, para pasar un término de un miembro a otro de la desigualdad no hay más que cambiarle el signo.

   Por ejemplo, si $a > b$, se tiene $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$ y $a - b > 0$.
2. El sentido de una desigualdad no se altera si sus dos miembros son multiplicados o divididos por un mismo número real.

   Por ejemplo, si $a > b$ y $k > 0$, se tiene

$$ka > kb \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{k} > \frac{b}{k}.$$

3. El sentido de una desigualdad se invierte cuando sus dos miembros son multiplicados o divididos por un mismo número negativo.

   Por ejemplo, si $a > b$ y $k < 0$, se tiene

$$ka < kb \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{k} < \frac{b}{k}.$$

4. Si $a > b$ y a, b, n son positivos, se tiene $a^n > b^n$, pero $a^{-n} < b^{-n}$.

EJEMPLOS 19.1

$$5 > 4; \text{ se tiene } 5^3 > 4^3 \quad \text{o} \quad 125 > 64, \text{ pero } 5^{-3} < 4^{-3} \quad \text{o} \quad \frac{1}{125} < \frac{1}{64}.$$

$$16 > 9; \text{ se tiene } 16^{1/2} > 9^{1/2} \quad \text{o} \quad 4 > 3, \text{ pero } 16^{-1/2} < 9^{-1/2} \quad \text{o} \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{3}.$$

5. Si $a > b$ *y* $c > d$, se tiene $(a + c) > (b + d)$.
6. Si $a > b > 0$ *y* $c > d > 0$, se tiene $ac > bd$.

19.3 DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de una cantidad representa la distancia a la que se encuentra el valor de la expresión de cero en una recta numérica. Por lo tanto, $|x - a| = b$, donde $b > 0$, significa que la cantidad $x - a$ se encuentra b unidades de 0, $x - a$ está a b unidades a la derecha de 0, o que $x - a$ está b unidades a la izquierda de 0. Cuando se dice que $|x - a| > b$, $b > 0$, entonces $x - a$ se encuentra a una distancia de 0 mayor que b. Por lo tanto, $x - a > b$ o $x - a < -b$. De manera similar, si $|x - a| < b$, $b > 0$, entonces $x - a$ se encuentra a una distancia de 0 menor que b. De aquí que, $x - a$ se encuentra entre b unidades por debajo de 0, $-b$ y b unidades por arriba de 0.

EJEMPLOS 19.2 Despeje x en las desigualdades siguientes.

a) $|x - 3| > 4$ *b*) $|x + 4| < 7$ *c*) $|x - 5| < -3$ *d*) $|x - 5| > -5$

a) $|x - 3| > 4$, por lo tanto $x - 3 > 4$ o $x - 3 < -4$. Por lo tanto, $x > 7$ o $x < -1$. El intervalo de solución es $(-\infty, -1) \cup (7, \infty)$, (donde $\cup$ representa la unión de los dos intervalos).
b) $|x + 4| < 7$, por ende $-7 < x + 4 < 7$. Por lo tanto, $-11 < x < 3$. El intervalo de solución es $(-11, 3)$.
c) $|x - 5| < -3$. Puesto que el valor absoluto de un número es siempre mayor o igual a cero, no existen valores para los que el valor absoluto sea menor a -3. Por lo tanto, no existe solución y se puede escribir $\varnothing$ como intervalo de solución.
d) $|x + 3| > -5$. Puesto que el valor absoluto de un número es siempre al menos cero y mayor que -5. Por lo tanto, la solución es todos los números los reales, que se puede escribir como el intervalo de solución $(-\infty, \infty)$.

19.4 DESIGUALDADES DE GRADO SUPERIOR

La resolución de desigualdades de orden superior es similar a la de ecuaciones de orden superior: siempre se debe igualar la expresión a cero. Si $f(x) > 0$, entonces el interés es en los valores de x que generarán un producto y/o cociente de factores positivo, mientras que si $f(x) < 0$, se deseará encontrar los valores de x que generarán un producto y/o cociente que es negativo.

Si $f(x)$ es una expresión de segundo grado sólo se tienen dos factores a considerar y se puede hacer esto analizando diferentes casos con base en los signos posibles de los dos factores que producirán el signo deseado para la expresión (consulte los problemas 19.3 *c*) y 19.14). Cuando el número de factores en $f(x)$ aumenta en uno, el número de casos a considerar se duplica. Por ende, para una expresión con dos factores, existen cuatro casos, con 3 factores, 8 y con 4 factores, 16. En cada instancia, la mitad de los casos producirá una expresión positiva y la otra mitad, una negativa. Por lo tanto, este procedimiento de casos se convierte extremadamente largo muy rápidamente. Un procedimiento alterno al método del caso es el diagrama de signos.

EJEMPLO 19.3 Resuelva la desigualdad $x^2 + 15 < 8x$.

La desigualdad $x^2 + 15 < 8x$ es equivalente a $x^2 - 8x + 15 < 0$ y a $(x - 3)(x - 5) < 0$ y es verdadera cuando el producto de $x - 3$ y $x - 5$ es negativo. Los valores críticos del producto son los que hacen a estos factores 0, ya que representan dónde el producto puede cambiar de signo.

Los valores críticos de x, 3 y 5 se colocan en una recta numérica y se dividen en tres intervalos. Es necesario encontrar el signo del producto de $x - 3$ y $x - 5$ en cada uno de estos intervalos para encontrar la solución (vea la figura 19-1). Las líneas verticales se dibujan en cada valor crítico. La línea punteada indica que el valor crítico no está en la solución y una línea continua indica que el valor crítico se encuentra en la solución.

Los signos que están arriba de la recta numérica son de los factores y es posible encontrarlos seleccionando un valor arbitrario en el intervalo, como valor de prueba, y determinando si cada factor es positivo o negativo para dicho valor. Para el intervalo a la izquierda de 3, se selecciona el valor de prueba 1 y se sustituye en $x - 3$, entonces se observa que el valor es -2, por lo que se registra un signo $-$, y para $x - 5$ el valor es -4 y de nuevo se registra un signo $-$. Para el intervalo entre 3 y 5 se selecciona cualquier valor, como por ejemplo 3.5 y se determina que $x - 3$ y $x - 5$ son positivos. El signo para el problema escrito debajo de la línea para cada intervalo está determinado por los signos de los factores en ese intervalo. Si un número par de factores en un producto o cociente son negativos, el producto o cociente es positivo. Si un número impar de factores son negativos, el producto o cociente es negativo.

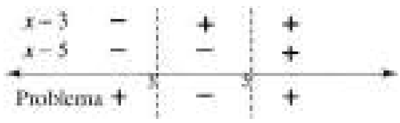


Figura 19-1

Se seleccionan los intervalos que satisfacen el problema $(x - 3)(x - 5) < 0$, por lo que se seleccionan los intervalos que sean negativos en la gráfica de signos. En el intervalo entre 3 y 5 el problema es negativo (consulte la figura 19-1), por lo que la solución es el intervalo (3, 5). Los paréntesis significan que el 3 y el 5 no están incluidos en el intervalo, y esto es de esperarse, ya que las líneas de frontera son discontinuas. Si éstas hubieran formado parte de la solución, se hubieran utilizado un corchete en lugar de paréntesis al final del intervalo junto al 3.

La solución de $x^2 + 15 < 8x$ es el intervalo (3, 5).

EJEMPLO 19.4 Resuelva la desigualdad

$$\frac{x-3}{x(x+4)} \geq 0.$$

La desigualdad se iguala a cero y tanto el numerador como el denominador se factorizan, de tal forma que se puede observar que los valores críticos del problema son la solución de $x = 0$, $x - 3 = 0$ y $x + 4 = 0$. Por lo tanto, los valores críticos son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -4$. Puesto que existen tres valores críticos, la recta numérica se divide en cuatro intervalos distintos, como se muestra en la figura 19-2.

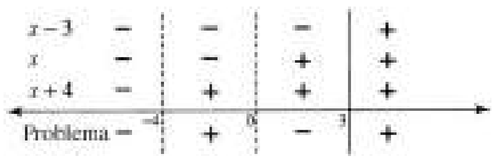


Figura 19-2

Los signos arriba de la línea son los de cada factor en cada intervalo. El signo en la parte inferior es el signo del problema y es $+$ cuando un número par de factores es negativo y $-$ cuando un número impar de factores son negativos. Puesto que el problema utiliza el signo $\geq$, los valores que hacen el numerador igual a cero son soluciones, por lo que se puede dibujar una línea continua que pase por 3. Puesto que 0 y -4 hacen que el denominador de la fracción sea igual a 0, estos valores no son soluciones y se dibujaron líneas discontinuas que pasen por 0 y -4 (consulte la figura 19-2).

Puesto que el problema

$$\frac{x-3}{x(x+4)} \geq 0$$

indica que se desea un valor positivo o cero, se quiere que aparezcan las regiones con un signo $+$ en la gráfica de signos. Por ende, las soluciones son los intervalos $(-4, 0)$ y $[3, \infty)$, y la solución se escribe $(-4, 0) \cup [3, \infty)$. La $\cup$ indica que se desea la unión de los dos intervalos. Observe que el corchete [se utiliza debido a que el valor crítico 3 se encuentra en la solución y un paréntesis) se utiliza siempre para el lado infinito ∞ de un intervalo.

19.5 DESIGUALDADES LINEALES CON DOS VARIABLES

La solución de desigualdades lineales con dos variables x y y consiste en encontrar todos los puntos (x, y) que satisfagan la desigualdad. Puesto que una ecuación lineal representa una línea, una desigualdad lineal son todos los puntos en un lado de la línea. Se incluyen los puntos sobre la línea cuando los signos $\geq$ o $\leq$ se utilizan en el enunciado de la desigualdad. Las soluciones de las desigualdades lineales se encuentran a menudo por medio de métodos gráficos.

EJEMPLO 19.5 Encuentre la solución de $2x - y - 3$.

Se grafica la línea relacionada con la desigualdad $2x - y - 3$, que es $2x - y = 3$. Puesto que se utiliza el símbolo $\leq$, la línea es parte de la solución y se utiliza una línea continua para indicar esto (véase la figura 19-3). Si la línea no es parte de la solución, se utiliza una línea discontinua para indicar ese hecho. Se sombrea la región en el lado de la línea donde los puntos son soluciones de la desigualdad. La región solución se determina seleccionando un punto de prueba que no se encuentre sobre la línea. Si el punto de prueba satisface la desigualdad, entonces todos los puntos en ese lado de la línea se encuentran en la solución. Si el punto de prueba no satisface la desigualdad, ninguno de los puntos en ese lado de la línea es la solución. De aquí que los puntos solución se encuentren en el lado opuesto de la línea respecto al punto de prueba.

El punto $P(2, 4)$ no se encuentra sobre la línea $2x - y = 3$, por lo que puede utilizarse como punto de prueba. Cuando se sustituye $(2, 4)$ en la desigualdad $2x - y \leq 3$, se obtiene $2(2) - 4 \leq 3$, lo cual es válido, ya que $0 \leq 3$. Se sombrea en el lado de la línea que contiene al punto de prueba $(2, 4)$ para indicar la región solución. Si se hubiera seleccionado $Q(5, -2)$ y sustituido este valor en $2x - y \leq 3$, se hubiera obtenido $12 \leq 3$, lo cual es falso y se hubiera sombreado el lado opuesto de la línea respecto a Q. Ésta es la misma región que se encuentra utilizando el punto de prueba P.

La solución de $2x - y \leq 3$ se muestra en la figura 19-3 y consiste de la región sombreada y la línea.

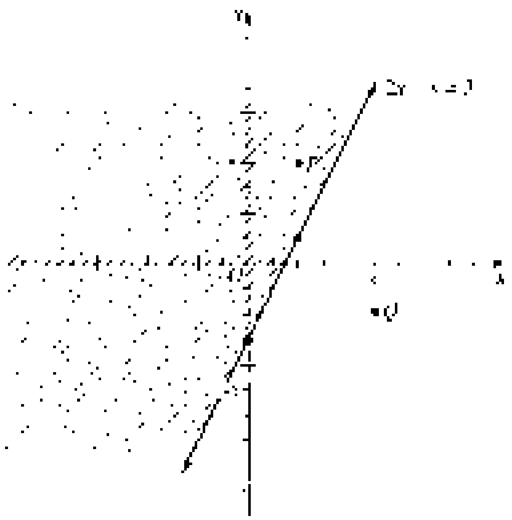


Figura 19-3

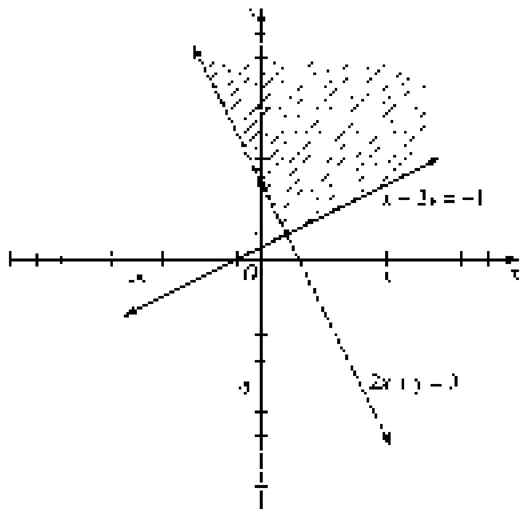


Figura 19-4

19.6 SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES

Si se tienen dos o más desigualdades lineales con dos incógnitas, se dice que existe un sistema de desigualdades lineales y que la solución del sistema es la intersección, o región común, de las regiones solución de las desigualdades.

Un sistema con dos desigualdades cuyas ecuaciones asociadas se intersecan, siempre tienen una región de solución. Si las ecuaciones relacionadas son paralelas, el sistema puede o no tener solución. Los sistemas con tres o más desigualdades pueden o no tener solución.

EJEMPLO 19.6 Resuelva el sistema de desigualdades $2x + y > 3$ y $x - 2y \leq -1$

Se grafican las ecuaciones relacionadas $2x + y = 3$ y $x - 2y = -1$ sobre el mismo conjunto de ejes. La línea $2x + y = 3$ se encuentra sombreada, puesto que no está incluida en $2x + y > 3$, sin embargo, la línea $x - 2y = -1$ es continua, puesto que está incluida en $x - 2y \leq -1$.

Ahora se selecciona un punto de prueba como, por ejemplo, (0, 5) que no esté en cualquiera de las líneas, determine qué lado de cada línea sombrear y sombree solamente la región común. Puesto que $2(0) + 5 > 3$ es válido, la región solución se encuentra a la derecha y sobre la línea $2x + y = 3$. Puesto que $0 - 2(5) \leq -1$ es válido, la región de solución se encuentra a la izquierda y sobre la línea $x - 2y = -1$.

La región solución de $2x + y > 3$ y $x - 2y \leq -1$ es la región sombreada de la figura 19-4, que incluye la parte de la línea continua que delimita la región sombreada.

19.7 PROGRAMACIÓN LINEAL

Muchos problemas prácticos relacionados con negocios involucran una función (objetivo) que será maximizada o minimizada sujeta a un conjunto de condiciones (restricciones). Si el objetivo es una función lineal y las restricciones son desigualdades lineales, los valores, si existe alguno, que maximicen o minimicen el objetivo se presentan en las esquinas de la región que está determinada por las restricciones.

EJEMPLO 19.7 La Compañía Green utiliza tres grados de papel reciclado, llamados A, B y C, que se fabrican a partir de papel de desperdicio que ésta recoge. Las compañías que producen estos tres grados de papel reciclado lo hacen como resultado de una sola operación, por lo que la proporción de cada grado de papel es fija en cada compañía. El proceso de la Compañía Ecológica genera 1 unidad de grado A, 2 unidades de grado B y 3 unidades de grado C por cada tonelada de papel procesado y cobra \$300 por el procesado. El proceso de la Compañía Medio Ambiente genera 1 unidad de grado A, 5 unidades de grado B y 1 unidad de grado C por cada tonelada de papel procesada y cobra \$500 por el procesado. La Compañía Green necesita al menos 100 unidades de papel de grado A, 260 unidades de papel grado B y 180 unidades de papel grado C. ¿Cómo deberá pedir la solicitud de material de manera que se minimicen los costos?

Si x representa el número de toneladas de papel a reciclar por parte de la Compañía Ecológica y y representa el número de toneladas de papel a procesar por parte de la Compañía Medio Ambiente, entonces la función objetivo es $C(x, y) = 300x + 500y$, y se desea minimizar $C(x, y)$.

Las restricciones enunciadas en términos de x y y son para el grado A: $1x + 1y \geq 100$; para grado B: $2x + 5y \geq 260$; y para grado C: $3x + 1y \geq 180$. Puesto que no es posible que una compañía procese un número negativo de toneladas de papel, $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Estas dos últimas restricciones se llaman restricciones naturales o implícitas, ya que estas condiciones son de hecho válidas y no es necesario que se especifiquen en el problema.

Se grafican las desigualdades determinadas a partir de las restricciones (vea la figura 19-5). Los vértices de la región son $A(0, 180)$, $B(40, 60)$, $C(80, 20)$ y $D(130, 0)$.

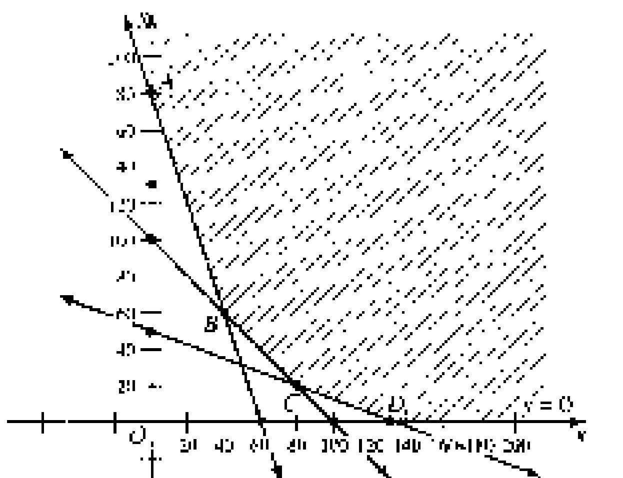


Figura 19-5

El valor mínimo de $C(x, y)$, si existe, se presentará en el punto A, B, C o D, por lo que se evalúa la función objetivo en estos puntos.

$$\begin{aligned}
C(0, 180) &= 300(0) + 500(180) = 0 + 90\,000 = 90\,000 \\
C(40, 60) &= 300(40) + 500(60) = 12\,000 + 30\,000 = 42\,000 \\
C(80, 20) &= 300(80) + 500(20) = 24\,000 + 10\,000 = 34\,000 \\
C(130, 0) &= 300(130) + 500(0) = 39\,000 + 0 = 39\,000
\end{aligned}$$

La Compañía Green puede minimizar el costo del papel reciclado a \$34 000 haciendo que la Compañía Ecológica procese 80 toneladas y la Compañía Medio Ambiente procese 20 toneladas.

Problemas resueltos

19.1 Si $a > b$ y $c > d$, demuestre que $a + c > b + d$.

SOLUCIÓN

Puesto que $(a - b)$ y $(c - d)$ son positivos, $(a - b) + (c - d)$ es positivo.
De aquí que $(a - b) + (c - d) > 0$, $(a + c) - (b + d) > 0$ y $(a + c) > (b + d)$

19.2 Encuentre el error

a)	Sea $a = 3$, $b = 5$; por lo tanto	$a < b$
b)	Multiplique por a:	$a^2 < ab$
c)	Reste b^2:	$a^2 - b^2 < ab - b^2$
d)	Factorice:	$(a + b)(a - b) < b(a - b)$
e)	Divida entre $a - b$:	$a + b < b$
f)	Sustituya $a = 3$, $b = 5$:	$8 < 5$

SOLUCIÓN

En los pasos *a*), *b*), *c*) y *d*) no existe error alguno, sin embargo en el paso *e*), la desigualdad está dividida entre $a - b$, la cual representa un número negativo, y no se invirtió el signo de la desigualdad.

19.3 Encuentre los valores de x para los que son válidas las desigualdades siguientes

a) $4x + 5 > 2x + 9$. Se tiene $4x - 2x > 9 - 5$, $2x > 4$ y $x > 2$.

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3} < \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{2}$. Multiplicando por 6 se obtiene

$$3x - 2 < 4x + 3,\ 3x - 4x < 2 + 3,\ -x < 5,\ x > -5.$$

c) $x^2 < 16$.

Método 1. $x^2 - 16 < 0$, $(x - 4)(x + 4) < 0$. El producto de los factores $(x - 4)$ y $(x + 4)$ es negativo. Son factibles dos casos.

1. $x - 4 > 0$ y $x + 4 < 0$ simultáneamente. Por lo tanto, $x > 4$ y $x < -4$. Esto es imposible, ya que x no puede ser mayor a 4 y menor a -4 al mismo tiempo.
2. $x - 4 < 0$ y $x + 4 > 0$ simultáneamente. Por lo tanto $x < 4$ y $x > 4$. Esto es posible si y sólo si $-4 < x < 4$. De aquí que $-4 < x < 4$.

Método 2. $(x^2)^{1/2} < (16)^{1/2}$. Ahora $(x^2)^{1/2} = x$ si $x \geq 0$, y $(x^2)^{1/2} = -x$ si $x \leq 0$.
Si $x \geq 0$, $(x^2)^{1/2} < (16)^{1/2}$ puede escribirse como $x < 4$. De aquí que $0 \leq x < 4$.

Si $x \leq 0$, $(x^2)^{1/2} < (16)^{1/2}$ puede escribirse como $-x < 4$ o $x > -4$. De aquí que $-4 < x \leq 0$.
Por lo tanto $0 \leq x < 4$ y $-4 < x \leq 0$, o $-4 < x < 4$.

19.4 Demuestre que $a^2 + b^2 > 2ab$ si a y b son números reales diferentes.

SOLUCIÓN

Si $a^2 + b^2 > 2ab$, entonces $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ o $(a - b)^2 > 0$. Este último enunciado es verdadero, ya que el cuadrado de cualquier número real diferente de cero es positivo.

Lo anterior constituye una clave en cuanto al método de prueba. Comenzando con $(a - b)^2 > 0$, que se sabe que es verdadera si $a \neq b$, se obtiene $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ o $a^2 + b^2 > 2ab$.

Observe que la prueba consiste, en esencia, en avanzar en sentido contrario respecto a los pasos del primer párrafo.

19.5 Demuestre que la suma de cualquier número positivo y su recíproco nunca será menor a 2.

SOLUCIÓN

Se debe demostrar que $(a + 1/a) \geq 2$ si $a > 0$.

Si $(a + 1/a) \geq 2$, entonces $a^2 + 1 \geq 2a$, $a^2 - 2a + 1 \geq 0$, y $(a - 1)^2 \geq 0$ lo cual es válido.

Para demostrar el teorema se comienza con $(a - 1)^2 \geq 0$, que se sabe que es verdad.

Entonces $a^2 - 2a + 1 \geq 0$, $a^2 + 1 \geq 2a$ y $a + 1/a \geq 2$ una vez que se ha dividido entre a.

19.6 Demuestre que $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$ para todos los valores reales de a, b y c al menos que $a = b = c$.

SOLUCIÓN

Puesto que $a^2 + b^2 > 2ab$, $b^2 + c^2 > 2bc$, $c^2 + a^2 > 2ca$ (vea el problema 19.4), se tiene por suma que

$$2(a^2 + b^2 + c^2) > 2(ab + bc + ca) \qquad \text{o} \qquad a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca.$$

(Si $a = b = c$, entonces $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.)

19.7 Si $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$, demuestre que $ac + bd < 1$.

SOLUCIÓN

$a^2 + c^2 > 2ac$ y $b^2 + d^2 > 2bd$; de aquí que por medio de la suma

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) > 2ac + 2bd \qquad \text{o} \qquad 2 > 2ac + 2bd, \text{ es decir, } 1 > ac + bd:$$

19.8 Demuestre que $x^3 + y^3 > x^2y + y^2x$, si x y y son números reales, positivos y diferentes.

SOLUCIÓN

Si $x^3 + y^3 > x^2y + y^2x$, entonces $(x + y)(x^2 - xy + y^2) > xy(x + y)$. Dividiendo entre $x + y$, el cual es positivo.

$x^2 - xy + y^2 > xy$ o $x^2 - 2xy + y^2 > 0$, es decir $(x - y)^2 > 0$ lo cual es verdadero si $x \neq y$:

Los pasos son reversibles y ofrecen la prueba. Comenzando con $(x - y)^2 > 0$, $x \neq y$, se obtiene

$x^2 - xy + y^2 > xy$:

Multiplicando ambos lados por $x + y$, se tiene $(x + y)(x^2 - xy + y^2) > xy(x + y)$ o $x^3 + y^3 > x^2y + y^2x$.

19.9 Demuestre que $a^n + b^n > a^{n-1}b + ab^{n-1}$, siempre y cuando a y b sean positivos y diferentes y $n > 1$.

SOLUCIÓN

Si $a^n + b^n > a^{n-1}b + ab^{n-1}$, entonces $(a^n - a^{n-1}b) - (ab^{n-1} - b^n) > 0$ o

$a^{n-1}(a - b) - b^{n-1}(a - b) > 0$, es decir, $(a^{n-1} - b^{n-1})(a - b) > 0$.

Lo anterior es válido puesto que los factores son ambos positivos o ambos negativos.
Invirtiendo los pasos, que son reversibles, se comprueba lo anterior.

19.10 Demuestre que

$$a^3 + \frac{1}{a^3} > a^2 + \frac{1}{a^2} \qquad \text{si} \qquad a > 0 \qquad \text{y} \qquad a \neq 1.$$

SOLUCIÓN

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por a^3 (que es positivo puesto que $a > 0$), se tiene,

$$a^6 + 1 > a^5 + a, \quad a^6 - a^5 - a + 1 > 0 \qquad \text{y} \qquad (a^5 - 1)(a - 1) > 0.$$

Si $a > 1$ ambos factores son positivos, mientras que si $0 < a < 1$ ambos factores son negativos. En cualquier caso el producto es positivo.
(Si $a = 1$ el producto es cero).
Invirtiendo los pasos se comprueba lo anterior.

19.11 Si a, b, c y d son números positivos y

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d},$$

demuestre que

$$\frac{a + c}{b + d} > \frac{c}{d}.$$

SOLUCIÓN

Método 1. Si

$$\frac{a + c}{b + d} > \frac{c}{d},$$

entonces multiplicando por $d(b + d)$ se obtiene

$$(a + c)d > c(b + d), ad + cd > bc + cd, ad > bc$$

y dividiendo entre bd,

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d};$$

que se considera válido. Invirtiendo los pasos se comprueba lo anterior.
Método 2. Puesto que

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d},$$

entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} > \frac{c}{d} + \frac{c}{b}, \qquad \frac{a + c}{b} > \frac{c(b + d)}{bd} \qquad \text{y} \qquad \frac{a + c}{b + d} > \frac{c}{d}:$$

19.12 Demuestre que

a) $x^2 - y^2 > x - y \qquad \text{si} \qquad x + y > 1 \qquad \text{y} \qquad x > y$
b) $x^2 - y^2 < x - y \qquad \text{si} \qquad x + y > 1 \qquad \text{y} \qquad x < y$

SOLUCIÓN

a) Puesto que, $x > y$, $x - y > 0$. Multiplicando ambos lados de $x + y > 1$ por el número positivo $x - y$,

$$(x + y)(x - y) > (x - y) \qquad \text{o} \qquad x^2 - y^2 > x - y.$$

b) Puesto que $x < y$, $x - y < 0$. Multiplicando ambos miembros de $x + y > 1$ por el número negativo $x - y$ se invierte el sentido de la desigualdad; por lo tanto

$$(x + y)(x - y) < (x - y) \qquad \text{o} \qquad x2 - y2 < x - y:$$

19.13 La media aritmética de dos números a y b es $(a + b)/2$, la media geométrica es $\sqrt{ab}$, y la media armónica es $2ab/(a + b)$. Demuestre que

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

si a y b son positivos y diferentes.

SOLUCIÓN

a) Si $(a + b)/2 > \sqrt{ab}$, entonces $(a + b)^2 > (2\sqrt{ab})^2$, $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$, $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ y $(a - b)^2 > 0$ lo cual es verdadero si $a \neq b$. Invirtiendo los pasos, se tiene $(a + b)/2 > \sqrt{ab}$.

b) Si

$$\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b},$$

entonces

$$ab > \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}, \qquad (a+b)^2 > 4ab \quad \text{y} \quad (a-b)^2 > 0$$

lo cual es verdadero si $a \neq b$. Invirtiendo los pasos, se tiene $\sqrt{ab} > 2ab/(a + b)$.
A partir de *a*) y de *b*).

19.14 Encuentre los valores de x para los cuales *a*) $x^2 - 7x + 12 = 0$, *b*) $x^2 - 7x + 12 > 0$, *c*) $x^2 - 7x + 12 < 0$.

SOLUCIÓN

a) $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4) = 0$ cuando $x = 3$ o 4.

b) $x^2 - 7x + 12 > 0$ o $(x - 3)(x - 4) > 0$ cuando $(x - 3) > 0$ y $(x - 4) > 0$ simultáneamente, o cuando $(x - 3) < 0$ *y* $(x - 4) < 0$ simultáneamente.
$(x - 3) > 0$ *y* $(x - 4) > 0$ simultáneamente cuando $x > 3$ y $x > 4$, es decir, cuando $x > 4$:
$(x - 3) < 0$ *y* $(x - 4) < 0$ simultáneamente cuando $x < 3$ y $x < 4$, es decir, cuando $x < 3$.
De aquí que $x^2 - 7x + 12 > 0$ se satisface cuando $x > 4$ o $x < 3$.

c) $x^2 - 7x + 12 < 0$ o $(x - 3)(x - 4) < 0$ cuando $(x - 3) > 0$ y $(x - 4) < 0$ simultáneamente, o cuando $(x - 3) < 0$ *y* $(x - 4) > 0$ simultáneamente.
$(x - 3) > 0$ *y* $(x - 4) < 0$ simultáneamente cuando $x > 3$ *y* $x < 4$, es decir, cuando $3 < x < 4$:
$(x - 3) < 0$ *y* $(x - 4) > 0$ simultáneamente cuando $x < 3$ *y* $x > 4$, lo cual es absurdo.
De aquí que $x^2 - 7x + 12 < 0$ se satisface cuando $3 < x < 4$.

19.15 Determine gráficamente el rango de valores de x definido por:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$
b) $x^2 + 2x - 3 > 0$
c) $x^2 + 2x - 3 < 0$:

SOLUCIÓN

La figura 19-6 muestra la gráfica de la función definida por $y = x^2 + 2x - 3$. A partir de la gráfica es obvio que

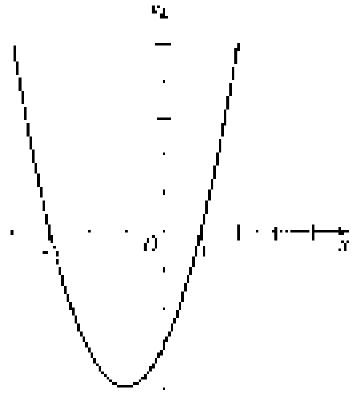


Figura 19-6

a) $y = 0$ cuando $x = 1, x = 3$
b) $y > 0$ cuando $x > 1$ o $x < \ 3$
c) $y < 0$ cuando $-3 < x < 1$.

19.16 Despeje x: *a*) $|3x - 6| + 2 .9$ *b*) $|7x - 1| - 6 < 2$.

a) $|3x - 6| + 2 > 9$

$$|3x - 6| > 7$$
$$3x - 6 .7 \quad \text{o} \quad 3x - 6 < -7$$
$$3x > 13 \quad \text{o} \quad 3x < -1$$
$$x > 13/3 \quad \text{o} \quad x < -1/3$$

La solución de $|3x - 6| + 2 > 9$ es el intervalo $(-\infty, -1/3) \cup (13/3, \infty)$.

b) $|7x - 1| - 6 < 2$

$$|7x - 1| < 8$$
$$-8 < 7x - 1 < 8$$
$$-7 < 7x < 9$$
$$-1 < x < 9/7$$

La solución de $|7x - 1| -6 < 2$ es el intervalo $(-1, 9/7)$.

19.17 Despeje *x:*

a) $\dfrac{2x-1}{x+1} \leq 1$ *b*) $\dfrac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$.

SOLUCIÓN

a) $\dfrac{2x-1}{x+1} \leq 1$

$$\frac{2x-1}{x+1} - 1 \leq 0$$
$$\frac{2x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} \leq 0$$
$$\frac{x-2}{x+1} \leq 0$$

Los valores críticos son $x = -1$ y $x = -2$. Se elabora un diagrama de signos (consulte la figura 19-7), con una línea continua que pase por $x = 2$, ya que ésta hace que la fracción sea igual a cero y cero se encuentra incluido en la solución, y con una línea punteada que pase por el punto $x = -1$, puesto que hace que la fracción sea indefinida. A continuación se determina el signo de cada factor en los tres intervalos. Por último, en los intervalos donde un número par de factores son negativos, el problema es positivo, y en aquéllos en los cuales un número impar de factores son negativos, el problema es negativo. La solución de

$$\frac{2x-1}{x+1} \leq 1$$

es el intervalo $(-1,2]$.

b) $\dfrac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$

$$\frac{(x-3)(x-7)}{(x-3)(x-2)} \leq 0$$

Los valores críticos son $x = 2$, $x = 3$ y $x = 7$. Se elabora un diagrama de signos (vea la figura 19-8) con líneas punteadas que pasan por $x = 2$ y $x = 3$ y una línea continua que pasa por $x = 7$. Puesto que $x = 3$ hace que el denominador de la fracción sea cero, se excluye a pesar que hace el numerador 0. Los signos de los factores están determinados para cada intervalo y después utilizado para determinar el signo del problema en cada intervalo. El factor $x - 3$ se utiliza un número par de veces en el problema y podría omitirse del diagrama de signos, ya que cualquier factor elevado a una potencia par es siempre positivo.

La solución de

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$$

es el intervalo $(2, 3) \cup (3, 7]$.

Nota 1: Si se hubiera eliminado el factor $x - 3$, se habría pasado por alto el hecho de que el problema no está definido cuando $x = 3$ y no puede estar en el conjunto solución.

Nota 2: Cuando aparece un factor en el problema un número par de veces, puede excluirse del diagrama de signos y, en general, se omite. Cuando aparece un factor un número impar de veces en un problema, debe incluirse el signo en el diagrama de signos un número impar de veces y, en general, se incluye exactamente una sola vez.

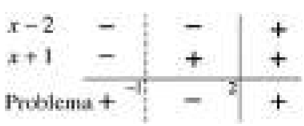


Figura 19-7

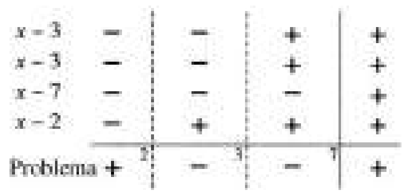


Figura 19-8

19.18 Encuentre la solución del sistema de desigualdades $-2x + y \geq 2$ y $2x - y \leq 6$.

SOLUCIÓN

Grafique las ecuaciones relacionadas $-2x + y = 2$ y $2x - y = 6$. Ambas líneas son continuas, ya que están incluidas en la solución.

Utilizando (0, 0) como punto de prueba, se obtiene $-2(0) + 0 \geq 2$, que es falso, y $2(0) - 0 \leq 6$, la cual es válida.

Puesto que el punto de prueba (0, 0) hace que $-2x + y \leq 2$ sea falsa, la solución se encuentra en el lado opuesto de la línea $-2x + y = 2$ a partir del punto (0, 0). Por lo que se sombrea arriba y a la izquierda de la línea $-2x + y = 2$.

Ya que el punto de prueba (0, 0) hace que $2x - y \leq 6$ sea válida, la solución se encuentra en el mismo lado de la línea $2x - y = 6$ que el punto (0, 0). Por lo que se sombrea arriba y a la izquierda de la línea $2x - y = 6$.

La solución común es la región de arriba y a la izquierda de $-2x + y = 2$ y es la región sombreada que se muestra en la figura 19-9.

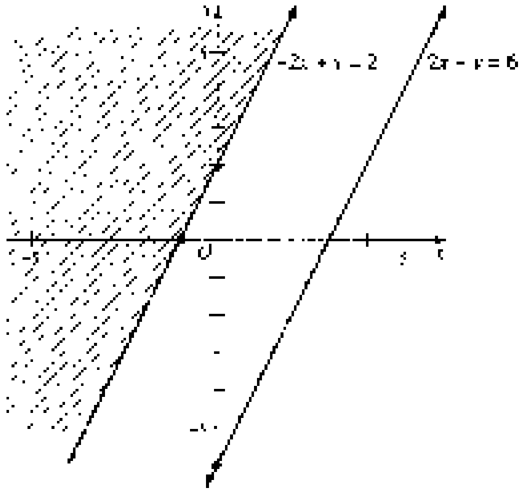


Figura 19-9

19.19 La compañía Close Shave fabrica dos tipos de máquinas de rasurar eléctricas. Una es inalámbrica, requiere de 4 horas para fabricarse y se vende en \$40. La otra tiene cable, requiere de 2 horas para fabricarse y se vende en \$30. La compañía cuenta solamente con 800 horas-hombre para fabricarlas cada día y el departamento de embarque puede empacar y enviar solamente 300 rasuradoras diariamente. ¿Cuántas rasuradoras de cada tipo debe fabricar la compañía Close Shave diariamente para maximizar las ganancias por ventas?

SOLUCIÓN

Sea x el número de rasuradoras inalámbrica fabricadas diariamente y y el número de rasuradoras con cable elaboradas diariamente.

La función objetivo es $R(x, y) = 40x + 30y$.

Las restricciones son $4x + 2y - 800$ y $x + y \leq 300$.

Las restricciones naturales son $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

De la figura 19-10, se observa que los vértices de la región formada por las restricciones son $A(0, 0)$, $B(200, 0)$, $C(100, 200)$ y $D(0, 300)$.

$$
\begin{aligned}
&R(0, 0) = 40(0) + 30(0) = 0 + 0 = 0\\
&R(200, 0) = 40(200) + 30(0) = 8\,000 + 0 = 8\,000\\
&R(100, 200) = 40(100) + 30(200) = 4\,000 + 6\,000 = 10\,000\\
&R(0, 300) = 40(0) + 30(300) = 0 + 9\,000 = 9\,000.
\end{aligned}
$$

La compañía Close Shave logra una máxima ganancia por ventas de \$10 000 diariamente fabricando 100 rasuradoras inalámbricas y 200 rasuradoras con cable diariamente.

Problemas propuestos

19.20 Si $a > b$, demuestre que $a - c > b - c$ donde c es cualquier número real.

19.21 Si $a > b$ y $k > 0$, demuestre que $ka > kb$.

19.22 Encuentre que los valores de x para los que las siguientes desigualdades son verdaderas.

a) $2(x + 3) > 3(x - 1) + 6$ *b*) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{2}{3} < \dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{6}$ *c*) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{4x} > \dfrac{7}{8}$ *d*) $x^2 > 9$

19.23 Para qué valores de a será $(a + 3) < 2(2a + 1)$?

19.24 Demuestre que $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$ para todos los valores reales de a y b, la ecuación es válida si y sólo si $a = b$.

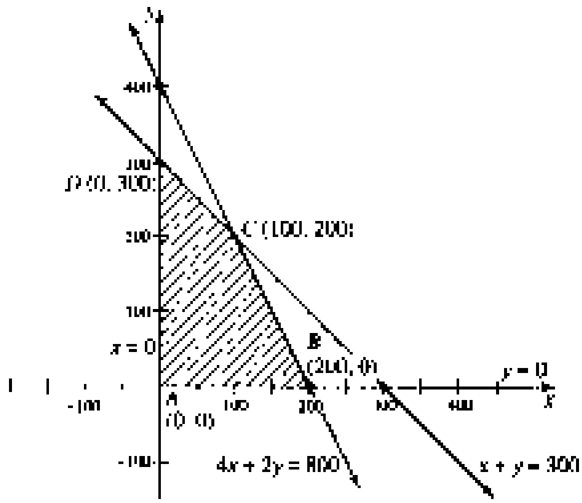


Figura 19-10

19.25 Demuestre que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{2}{x+y}$$

si x y y son positivos y $x \neq y$

19.26 Demuestre que

$$\frac{x^2 + y^2}{x+y} < x + y \qquad \text{si} \qquad x > 0, y > 0.$$

19.27 Demuestre que $xy + 1 \geq x + y$ si $x \geq 1$ **y** $y \geq 1$ o si $x \leq 1$ y $y \leq 1$.

19.28 Si $a > 0$, $a \neq 1$ y n es cualquier número entero positivo, demuestre que

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} > a^n + \frac{1}{a^n}.$$

19.29 Demuestre que $\sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

19.30 Determine los valores de x para los que las desigualdades siguientes son válidas.

a) $x^2 + 2x - 24 > 0$ *b*) $x^2 - 6 < x$ *c*) $3x^2 - 2x < 1$ *d*) $3x + \frac{1}{x} > \frac{7}{2}$

19.31 Determine gráficamente el rango de valores de x para los que *a*) $x^2 - 3x - 4 > 0$, *b*) $2x^2 - 5x + 2 < 0$.

19.32 Escriba la solución para cada desigualdad en notación de intervalo.

a) $|3x + 3| - 15 \leq -6$ *b*) $|2x - 3| < 7$

19.33 Escriba la solución de cada desigualdad en notación de intervalo.

a) $x^2 \geq 10x - 21$ *c*) $(x - 1)(x - 2)(x + 3) > 0$ *e*) $\frac{x-5}{x+1} \leq 3$

b) $\frac{(x+1)(x-1)}{x} < 0$ *d*) $\frac{x-1}{x+2} \leq 0$ *f*) $\frac{(x-6)(x-3)}{x+2} \geq 0$

19.34 Grafique cada desigualdad y sombree la región de la solución.

a) $4x - y \leq 5$ *b*) $y - 3x > 2$

19.35 Grafique cada sistema de desigualdades y sombree la región de la solución.

a) $x + 2y \leq 20$ y $3x + 10y \leq 80$
b) $3x + y \geq 4,$ $x + y \geq 2,$ $-x + y \leq 4$ y $x \leq 5$

19.36 Utilice la programación lineal para resolver cada problema.

a) Ramone construye bodegas prefabricadas y para esto utiliza 10 hojas de triplay y 15 clavos en una bodega pequeña y 15 hojas de triplay y 45 clavos en una bodega grande. Ramone tiene 60 hojas de triplay y 135 clavos. Si obtiene una ganancia de \$400 en una bodega pequeña y \$500 en una grande, ¿cuántas de cada tipo deberá fabricar para obtener la máxima ganancia?
b) Jean y Wesley fabrican campanas de viento y casas para pájaros en su taller de artesanías. Cada campana de viento requiere 3 horas de trabajo por parte de Jean y una hora por parte de Wesley. Cada caja para pájaro requiere 4 horas de trabajo de Jean y 2 de Wesley. Jean no puede trabajar más de 48 horas a la semana y Wesley no más de 20 horas a la semana. Si cada campana de viento se vende en \$12 y cada casa para pájaros en \$20, ¿cuántas piezas de cada artículo deben fabricar para maximizar su ganancia?

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

19.22 *a*) $x < 3$ *b*) $x > 2$ *c*) $0 < x < 2$ *d*) $x < -3$ o $x > 3$

19.23 $a > \frac{1}{3}$

19.30 *a*) $x > 4$ o $x < -6$ *b*) $-2 < x < 3$ *c*) $-\frac{1}{3} < x < 1$ *d*) $x > \frac{2}{3}$ o $0 < x < \frac{1}{2}$

19.31 *a*) $x > 4$ o $x < -1$ *b*) $\frac{1}{2} < x < 2$

19.32 *a*) $(-\infty, -4) \cup [2, \infty)$ *b*) $(-2, 5)$

19.33 *a*) $(-\infty, 3) \cup [7, \infty)$ *c*) $(-3, 1) \cup (2, \infty)$ *e*) $(-\infty, -4] \cup (-1, \infty)$
b) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ *d*) $(-2, 1]$ *f*) $(-2, 3) \cup [6, \infty)$

19.34 *a*) Figura 19-11 *b*) Figura 19-12

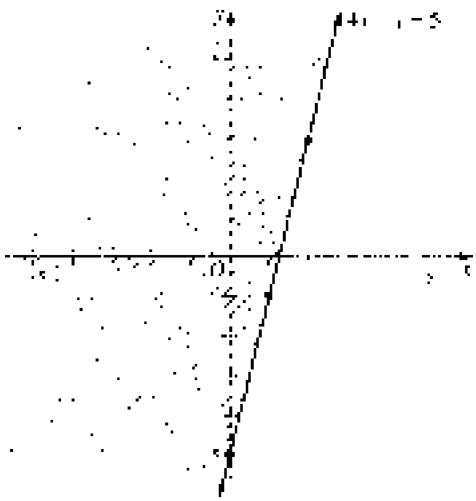


Figura 19-11

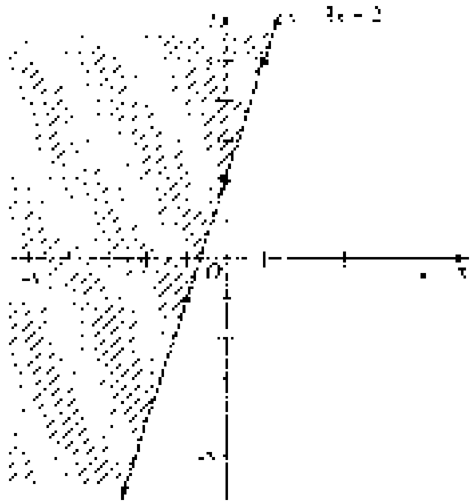


Figura 19-12

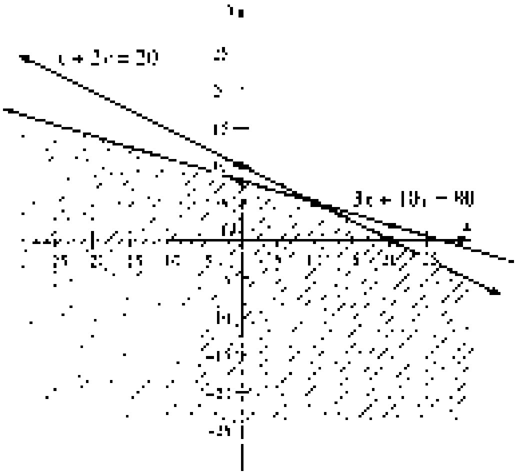


Figura 19-13

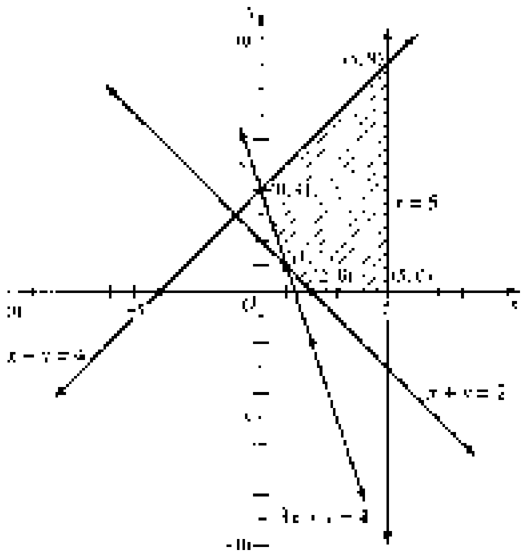


Figura 19-14

19.35 *a*) Figura 19-13 *b*) Figura 19-14

19.36 *a*) Ramone maximiza sus ganancias fabricando seis bodegas pequeñas y ningún edificio grande.
b) Jean y Wesley maximizan su ganancia fabricando 6 campanas de viento y 8 casas para pájaros.

20 FUNCIONES POLINOMIALES

20.1 ECUACIONES POLINOMIALES

Una ecuación entera racional de grado n en la variable x es de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0$$

donde n es un número entero y positivo y a_o, a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n constantes.

Por lo tanto, $4x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$, $x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{4} = 0$ y $x^4 + \sqrt{-3}x - 8 = 0$ son racionales enteras en x de grados 3, 2 y 4, respectivamente. Observe que en cada una de estas ecuaciones los exponentes de x son números enteros y positivos y los coeficientes de la variable son constantes (números reales o complejos).

El coeficiente del término de grado superior se llama coeficiente principal y a_0 se llama término constante.

Este capítulo considera solamente ecuaciones enteras racionales.

Un polinomio de grado n respecto a la variable x es una función de x que puede escribirse en la forma

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

donde n es un entero positivo, y a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n son constantes. Entonces, $P(x) = 0$ es una ecuación racional entera de grado n en x.

Si $P(x) = 3x^3 + x^2 + 5x - 6$, entonces $P(-2) = 3(-2)^3 + (-2)^2 + 5(-2) - 6 = -36$.

Si $P(x) = x^2 + 2x - 8$, entonces $P(\sqrt{5}) = 5 + 2\sqrt{5} - 8 = 2\sqrt{5} - 3$.

Todo valor de x que anule $P(x)$ recibe el nombre de raíz cuadrada de la ecuación $P(x) = 0$. Por ende, 2 es una raíz de la ecuación $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x - 6 = 0$, puesto que $P(2) = 24 - 8 - 10 - 6 = 0$.

20.2 RAÍCES DE LAS ECUACIONES POLINOMIALES

A. Teorema del residuo. Si r es una constante y se divide el polinomio $P(x)$ entre $(x - r)$, el residuo es $P(r)$.

Por ejemplo, si $P(x)$ 5 $2x^3 - 3x^2 - x + 8$ se divide entre $x + 1$, entonces $r = -1$ y el residuo $= P(-1) = -2 -3 + 1 + 8 = 4$. Esto es,

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - x + 8}{x+1} = Q(x) + \frac{4}{x+1}, \text{ donde } Q(x) \text{ es un polinomio en } x.$$

B. Teorema del factor. Si r es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$, es decir, si $P(r) = 0$, entonces $(x - r)$ es un factor de $P(x)$. De lo contrario, si $(x - r)$ es un factor de $P(x)$, entonces r es una raíz de $P(x) = 0$ o $P(r) = 0$.

Por lo tanto, $1, -2, -3$ son las tres raíces de la ecuación $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$, ya que $P(1) = P(-2) = P(-3) = 0$. Por lo tanto, $(x - 1)$, $(x + 2)$ y $(x + 3)$ son factores de $x^3 + 4x^2 + x - 6$.

C. División sintética. Es un método simplificado para dividir un polinomio $P(x)$ entre $x - r$, donde r es cualquier número que se le asigne. Por este método se determinan los valores de los coeficientes del cociente y, por lo tanto, el valor del residuo puede determinarse fácilmente.

EJEMPLO 20.1 Divida $(5x + x^4 - 14x^2)$ entre $(x + 4)$ utilizando la división sintética.

Escriba los términos del dividendo en orden descendente respecto a la potencia de la variable y complete los términos faltantes utilizando cero como coeficientes de dichos términos; escriba el divisor en la forma $x - a$.

$$(x^4 + 0x^3 - 14x^2 + 5x + 0) \div (x - (-4))$$

Escriba el término constante a del divisor a la izquierda en un $\lfloor\;\rfloor$ y escriba los coeficientes del dividendo a la derecha del símbolo

$$\underline{-4|}\quad 1 + 0 - 14 + 5 + 0$$

Escriba abajo el primer término del dividendo a la tercera fila, dejando en blanco una fila por el momento,

$$\begin{array}{r|l} \underline{-4} & 1 + 0 - 14 + 5 + 0 \\ & \\ \hline & 1 \end{array}$$

Multiplique el término en la fila del cociente (tercera fila) por el divisor y escriba el producto en la segunda fila debajo del segundo término de la primera fila, sume los números en la columna formada y escriba la suma como el segundo término en la fila del cociente.

$$\begin{array}{r|l} \underline{-4} & 1 + 0 - 14 + 5 + 0 \\ & \quad - 4 \\ \hline & 1 - 4 \end{array}$$

Multiplique el último término a la derecha de la fila del cociente por el divisor, escríbala debajo del siguiente término en la parte superior de la fila, sume y escriba el resultado en la fila del cociente. Continúe este proceso hasta que todos los términos en la parte superior de la fila tengan un número debajo.

$$\begin{array}{r|l} \underline{-4} & 1 + 0 - 14 + 5 + 0 \\ & \quad - 4 + 16 - 8 + 12 \\ \hline & 1 - 4 + \ 2 - 3 + 12 \end{array}$$

La tercera fila es la del cociente donde el último término es el residuo. El grado del polinomio que forma el cociente es un grado menor que el del dividendo ya que se está dividiendo entre un factor lineal. Los términos de la fila del cociente son los coeficientes de los términos en el polinomio del cociente. El grado del polinomio que forma el cociente es 3.

El cociente con residuo $(5x + x^4 - 14x^2) \div (x + 4)$ es

$$1x^3 - 4x^2 + 2x - 3 + \frac{12}{x + 4}$$

D. Teorema fundamental del álgebra. Toda ecuación $P(x) = 0$ con polinomios, tiene al menos una raíz real o compleja.

Por lo tanto $x^7 - 3x^5 + 2 = 0$ tiene al menos una raíz.

Sin embargo, $f(x) = \sqrt{x} + 3 = 0$ no tiene raíces, ya que no existe ningún número r tal que $f(r) = 0$. Puesto que esta ecuación no es racional, el teorema fundamental no se aplica en este caso.

E. Número de raíces de una ecuación. Toda ecuación entera racional $P(x) = 0$ de grado enésimo tiene exactamente n raíces.

Por lo tanto, $2x^3 + 5x^2 - 14x - 8 = 0$ tiene exactamente 3 raíces, llamadas 2, $-\frac{1}{2}$, -4.

Algunas de las n raíces pueden ser iguales. Por ende, la ecuación de sexto grado $(x - 2)^3(x - 5)^2(x + 4) = 0$ tiene 2 como triple raíz, 5 como doble y -4 como única; es decir, las seis raíces son 2, 2, 2, 5, 5, -4.

20.3 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POLINOMIALES

A. Raíces complejas e irracionales

1. Si un número complejo $a + bi$ es una raíz de la ecuación racional entera $P(x) = 0$ con *coeficientes reales*, entonces el número complejo conjugado $a - bi$ es también una raíz.

   Se puede deducir de lo anterior que toda ecuación racional entera de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz.
2. Si la ecuación racional entera $P(x) = 0$ con *coeficientes racionales* tiene a $a + \sqrt{b}$ como raíz, siendo a y b racionales y $\sqrt{b}$ irracional, entonces $a - \sqrt{b}$ es también una raíz.

B. Teorema de la raíz racional

Si b/c, una fracción racional con términos de grado inferior, es una raíz de la ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0$$

con coeficientes enteros, entonces b es un factor de a_0 y c es un factor de a_n.

Por lo tanto, si b/c es una raíz racional de $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 0$, los valores de b están limitados a los factores de 2, los cuales son ± 1, ± 2; y los valores de c están limitados a los factores de 6, los cuáles son ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. De aquí que las únicas raíces racionales posibles son ± 1, ± 2, $\pm 1/2$, $\pm 1/3$, $\pm 1/6$, $\pm 2/3$.

C. Teorema de la raíz entera

Se puede deducir que si una ecuación $P(x) = 0$ tiene coeficientes enteros y el coeficiente principal es 1:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

entonces, cualquier raíz racional de $P(x) = 0$ es un entero y un factor de a_0.

Por lo tanto, las raíces racionales, si existen, de $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$ están limitadas por factores enteros de 12, los cuales son, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12.

D. Teorema del valor intermedio

Si $P(x) = 0$ es una ecuación con polinomios con coeficientes reales, entonces los valores aproximados de las raíces reales de $P(x) = 0$ pueden encontrarse obteniendo la gráfica de $y = P(x)$ y determinando los valores de x en los puntos donde la gráfica interseca al eje x $(y = 0)$. Un aspecto fundamental en este procedimiento es el hecho de que si $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos opuestos, entonces $P(x) = 0$ tiene al menos una raíz entre $x = a$ y $x = b$. Este hecho se basa en la continuidad de la gráfica de $y = P(x)$ cuando $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales.

EJEMPLOS 20.2 Para cada raíz real de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 4$ aísle la raíz entre dos enteros consecutivos.

Puesto que $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 4$ es de grado 3, existen al menos 3 raíces reales. Se tratará de encontrar las raíces reales en el intervalo -5 a 5. El intervalo es arbitrario y podría ser necesario expandirlo si las raíces reales no se encuentran aquí. Mediante la división sintética, se encontrará el valor de $P(x)$ para cada entero en el intervalo seleccionado. Los residuos de la división sintética son los valores de $P(x)$ y se presentan en la tabla siguiente:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	-341	-180	-77	-20	3	4	-5	-12	-5	28	99

Observe que $P(-2) = -20$ y $P(-1) = 3$ tiene signos opuestos, por lo que a partir del Teorema del Valor Intermedio existe una raíz real entre -2 y -1. De forma similar, puesto que $P(0) = 4$ y $P(1) = -5$, existe una raíz real entre 0 y 1 y ya que $P(3) = -5$ y $P(4) = 28$, existe una raíz real entre 3 y 4. Se han aislado tres raíces reales, por lo que se han localizado todas las raíces reales de $P(x)$.

No siempre es posible localizar todas las raíces reales de esta forma debido a que podría haber más de una raíz entre dos enteros consecutivos. Cuando existe un número par de raíces entre dos enteros consecutivos, el Teorema del Valor Intermedio no lo revelará cuando se utilice solamente enteros para x. Dicho teorema no proporciona información respecto a cuántas raíces reales están en el intervalo, solamente dice que al menos una raíz real se encuentra en él.

E. Límites inferior y superior de las raíces reales

Se le llama número a a un *límite superior* o *frontera superior* para las raíces reales de $P(x) = 0$ si ninguna raíz es mayor a a. Se le llama número b a un *límite inferior* o *frontera inferior* para las raíces reales de $P(x) = 0$ si ninguna raíz es menor a b. El teorema siguiente es útil en la determinación de los límites superior e inferior.

Sea $P(x) = a_nx^n + a_n + a_{n-1}x^{n-1} + a_n\,2x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son reales y $a_n > 0$. Entonces:

1. Si después de realizar la división sintética de $P(x)$ entre $x - a$, donde $a \geq 0$, todos los números obtenidos en la tercera fila son positivos o cero, entonces a es un límite superior para todas las raíces reales de $P(x) = 0$.
2. Si después de realizar la división sintética de $P(x)$ entre $x - b$, donde $b \leq 0$, todos los números obtenidos en la tercera fila son positivos y negativos alternadamente (o cero), entonces b es un límite inferior para todas las raíces reales de $P(x) = 0$.

EJEMPLOS 20.3 Encuentre un intervalo que contenga todas las raíces reales de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$.

Se tratará de encontrar el entero b que sea al menos el límite superior de las raíces reales de $P(x)$ y el entero, a, que sea el límite inferior de las raíces reales de $P(x)$. Todas las raíces reales estarán en el intervalo $[a, b]$. Para encontrar a y b se utiliza la división sintética en la ecuación $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{1} & 2 - 5 + 0 + 6 \\
 & \quad + 2 - 3 - 3 \\
\hline
 & 2 - 3 - 3 + 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\underline{2} & 2 - 5 + 0 + 6 \\
 & \quad + 4 - 2 - 4 \\
\hline
 & 2 - 1 - 2 + 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\underline{3} & 2 - 5 + 0 + 6 \\
 & \quad + 6 + 3 + 9 \\
\hline
 & 2 + 1 + 3 + 15
\end{array}
$$

Cuando de divide utilizando 3, toda fila del cociente es positiva, por lo que 3 es el entero más pequeño que es límite superior de las raíces reales de $P(x)$. Por lo tanto, $b = 3$.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-1} & 2 - 5 + 0 + 6 \\
 & \quad - 2 + 7 - 7 \\
\hline
 & 2 - 7 + 7 - 1
\end{array}
$$

Cuando se divida utilizando -1, los valores de la fila del cociente tienen signos alternados, por lo que -1 es el entero mayor que es un límite inferior de las raíces reales de $P(x)$. Por lo tanto, $a = -1$.

Las raíces reales de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$ se encuentran en el intervalo $(-1,3)$ o $-1 < x < 3$. Puesto que $P(-1) \neq 0$ y $P(3) \neq 0$, se utiliza la notación de intervalo que indica que ninguno de los puntos extremos es una raíz.

F. Regla de los Signos de Descartes

Si los términos de un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales se disponen en orden descendiente de acuerdo con su potencia de x, se presenta una *variación de signo* cuando dos términos consecutivos difieren en signo. Por ejemplo, $x^3 - 2x^2 + 3x - 12$ tiene 3 variaciones de signo y $2x^7 - 6x^5 - 4x^4 + x^2 - 2x + 4$ tiene 4.

La Regla de los Signos de Descartes establece que el número de raíces positivas de $P(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo de $P(x)$ o menor que ese número por un entero par. El número de raíces negativas de $P(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo de $P(-x)$ o menor que ese número por un entero par.

Por lo tanto, en $P(x) = x^9 - 2x^5 + 2x^2 - 3x + 12 = 0$ existen 4 variaciones de signo de $P(x)$; de aquí que el número de raíces positivas de $P(x) = 0$ es 4, $(4 - 2)$ o $(4 - 4)$. Puesto que $P(-x) = (-x)^9 - 2(-x)^5 + 2(-x)^2 - 3(-x) + 12 = -x^9 + 2x^5 + 2x^2 + 3x + 12 = 0$ tiene una variación de signo, entonces $P(x) = 0$ tiene exactamente una raíz negativa. De aquí que existen 4, 2 o 0 raíces positivas, 1 raíz negativa y al menos $9 - (4 + 1) = 4$ raíces imaginarias. (Hay 4, 6 u 8 raíces imaginarias. ¿Por qué?)

20.4 APROXIMACIÓN DE RAÍCES REALES

En la resolución de una ecuación con polinomios $P(x) = 0$, no siempre es posible encontrar todos las raíces utilizando los métodos anteriores. Ha sido posible determinar las raíces irracionales e imaginarias cuando se pudieron encontrar los factores cuadráticos que se resolvieron utilizando la fórmula de segundo grado. Si no se pudieran encontrar los factores cuadráticos de $P(x) = 0$, no se podrían encontrar las raíces imaginarias, sin embargo, se puede encontrar una aproximación para algunas de las raíces reales.

Para aproximar una raíz real de $P(x) = 0$, se debe primero encontrar un intervalo que contenga una raíz real de $P(x) = 0$. Se puede hacer los anterior utilizando el Teorema del Valor Intermedio con el fin de ubicar los números a y b tales que $P(a)$ y $P(b)$ tengan signos opuestos. Se seguirá utilizando el Teorema del Valor Intermedio hasta que se haya aislado la raíz real en un intervalo lo suficientemente pequeño que tenga el grado de precisión deseado.

EJEMPLO 20.4 Encuentre una raíz real de $x^3 + 3x + 8 = 0$ corregida a dos décimas.

Por la Regla de los Signos de Descartes, $P(x) = x^3 + 3x + 8$ no tiene raíces reales positivas y una raíz real negativa.

Utilizando la división sintética, se encuentra que $P(-2) = -6$ y $P(-1) = 4$, por lo que el Teorema del Valor Intermedio $P(x) = x^3 + 3x + 8$ tiene una raíz real entre -2 y -1.

A continuación se utiliza la división sintética y el Teorema del Valor Intermedio para determinar las décimas de intervalo que contienen la raíz. Los resultados se muestran en la tabla siguiente:

x	-1.0	-1.1	-1.2	-1.3	-1.4	-1.5	-1.6	-1.7	-1.8	-1.9	-2.0
$P(x)$	4	3.37	2.67	1.90	1.06	0.13	-0.90	-2.01	-3.23	-4.56	-6

Es posible observar que $P(-1.5)$ es positivo y $P(-1.6)$ es negativo por lo que la raíz se encuentra entre -1.6 y -1.5.

Ahora se verifica el dígito de las centésimas utilizando la división sintética en el intervalo entre -1.6 y -1.5. No es necesario encontrar todos los valores de las centésimas, solamente el cambio de signo entre dos valores consecutivos.

x	-1.50	-1.51	-1.52
$P(x)$	0.13	0.03	-0.07

Se puede observar que $P(-1.51)$ es positivo y $P(-1.52)$ es negativo, por lo que por el Teorema del Valor Intermedio, existe una raíz real entre -1.51 y -1.52.

Puesto que la raíz real está ubicada entre -1.51 y -1.52, sólo es necesario determinar si se redondea a -1.51 o a -1.52. Para hacer esto, se busca el punto $P(-1.515)$, que es aproximadamente -0.02. Este valor de $P(-1.515)$ es negativo y $P(-1.51)$ es positivo, por lo que se conoce que la raíz se encuentra entre -1.515 y -1.510 y todos los números es este intervalo redondeados a dos centésimas son -1.51.

Por lo tanto, redondeado a dos centésimas, la única raíz real de $x^3 + 3x + 8 = 0$ es -1.51.

Utilizando una calculadora gráfica para aproximar las raíces reales de un polinomio, se grafica la función y se utiliza las características de trazado (*trace*) y acercamiento (*zoom*) de la calculadora. Después de graficar la función, se utiliza la característica de trazado para ubicar un intervalo que contenga una raíz real utilizando el Teorema del Valor Intermedio. Luego, se utiliza la característica de acercamiento para enfocar este intervalo. Se continúan utilizando estas dos características hasta que se encuentren dos valores de x que se aproximen con mayor grado de precisión al valor deseado y que sean de signos opuestos.

Problemas resueltos

20.1 Demuestre el teorema del residuo: Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $(x - r)$, el residuo es $P(r)$.

SOLUCIÓN En la división de $P(x)$ entre $(x - r)$, sea $Q(x)$ el cociente y R, una constante, el residuo. Por definición, $P(x) = (x - r)Q(x) + R$, la cual es una identidad para todos los valores de x. Sea $x = r$, $P(r) = R$.

20.2 Determine el residuo R después de cada una de las divisiones siguientes:

a) $(2x^3 + 3x^2 - 18x - 4) \div (x - 2)$. $\quad R = P(2) = 2(2^3) + 3(2^2) - 18(2) - 4 = -12$

b) $(x^4 - 3x^3 + 5x + 8) \div (x + 1)$. $\quad R = P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 5(-1) + 8$
$= 1 + 3 - 5 + 8 = 7$

c) $(4x^3 + 5x^2 - 1) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$. $\quad R = P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4}$

d) $(x^3 - 2x^2 + x - 4) \div x$. $\quad R = P(0) = -4$

e) $\left(\frac{8}{27}x^3 - \frac{4}{9}x^2 + x - \frac{3}{2}\right) \div (2x - 3)$. $\quad R = P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{27}\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$

f) $(x^8 - x^5 - x^3 + 1) \div (x + \sqrt{-1})$. $\quad R = P(-i) = (-i)^8 - (-i)^5 - (-i)^3 + 1$
$= i^8 + i^5 + i^3 + 1 = 1 + i - i + 1 = 2$

20.3 Demuestre el teorema del factor: Si r es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$, entonces $(x - r)$ es un factor de $P(x)$; y, de lo contrario, si $(x - r)$ es un factor de $P(x)$, entonces r es una raíz de $P(x) = 0$.

SOLUCIÓN En la división de $P(x)$ entre $(x - r)$, sea $Q(x)$ el cociente y R, una constante, el residuo. Entonces, $P(x) = (x - r)Q(x) + R$ o $P(x) = (x - r)Q(x) + P(r)$ por el teorema del residuo.

Si r es una raíz de $P(x) = 0$, entonces $P(r) = 0$. De aquí que $P(x) = (x - r)Q(x)$ o $(x - r)$ es un factor de $P(x)$.

De otra forma, si $(x - r)$ es un factor de $P(x)$, entonces el residuo de la división de $P(x)$ entre $(x - r)$ es cero. De aquí que $P(r) =0$, es decir, r es una raíz de $P(x) = 0$.

20.4 Demuestre que $(x - 3)$ es un factor del polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$.

SOLUCIÓN $P(3) = 81 - 108 - 63 + 66 + 24 = 0$. De aquí que $(x - 3)$ es una factor de $P(x)$, 3 es una raíz del polinomio $P(x)$ y 3 es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$.

20.5 *a*) Es -1 una raíz de la ecuación $P(x) = x^3 - 7x - 6 = 0$?

b) Es 2 una raíz de la ecuación $P(y) = y^4 - 2y^2 - y + 7 = 0$?

c) Es $2i$ una raíz de la ecuación $P(z) = 2z^3 + 3z^2 + 8z + 12 = 0$?

SOLUCIÓN

a) $P(-1) = -1 + 7 \ -6 = 0$. De aquí que -1 es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$, y $[x - (-1)] = x + 1$ es un factor del polinomio $P(x)$.

b) $P(2) = 16 - 8 - 2 + 7 = 13$. De aquí que 2 no es raíz de $P(y) = 0$, y $(y - 2)$ no es factor de $y^4 - 2y^2 - y + 7$.

c) $P(2i) = 2(2i)^3 + 3(2i)^2 + 8(2i) + 12 = -16i - 12 + 16i + 12 = 0$. De aquí que $2i$ es una raíz de $P(z) = 0$, y $(z - 2i)$ es un factor del polinomio $P(z)$.

20.6 Demuestre que $x - a$ es un factor de $x^n - a^n$, si n es cualquier entero positivo.

SOLUCIÓN

$P(x) = x^n - a^n$; por lo tanto $P(a) = a^n - a^n = 0$. Puesto que $P(a) = 0$, $x - a$ es un factor de $x^n - a^n$.

20.7 *a*) Demuestre que $x^5 + a^5$ es divisible exactamente entre $x + a$.

b) ¿Cuál es el residuo de $y^6 + a^6$ dividido entre $y + a$?

SOLUCIÓN

a) $P(x) = x^5 + a^5$; entonces $P(-a) = (-a)^5 + a^5 = -a^5 + a^5 = 0$. Puesto que $P(-a) = 0$, $x^5 + a^5$ es divisible exactamente entre $x + a$.

b) $P(y) = y^6 + a^6$. Residuo $= P(-a) = (-a)^6 + a^6 = a^6 + a^6 = 2a^6$.

20.8 Demuestre que $x + a$ es un factor de $x^n - a^n$ cuando n es un entero positivo par, sin embargo, no es un factor cuando n es un entero positivo impar. Suponga que $a \neq 0$.

SOLUCIÓN

$$P(x) = x^n - a^n.$$

Cuando n es par, $P(-a) = (-a)^n - a^n = a^n - a^n = 0$. Puesto que $P(-a) = 0$, $x + a$ es un factor de $x^n - a^n$ cuando n es par.

Cuando n es impar, $P(-a) = (-a)^n - a^n = a^n - a^n = -2a^n$. Puesto que $P(-a) \neq 0$, $x^n - a^n$ no es divisible exactamente entre $x + a$ cuando n es impar (siendo el residuo $-2a^n$).

20.9 Encuentre los valores de p para los que:

a) $2x^3 - px^2 + 6x - 3p$ es exactamente divisible entre $x + 2$,

b) $(x^4 - p^2x + 3 - p) \div (x - 3)$ tiene un residuo 4.

SOLUCIÓN

a) El residuo es $2(-2)^3 - p(-2)^2 + 6(-2) - 3p = -16 - 4p - 12 - 3p = -28 - 7p = 0$. Por lo tanto $p = -4$.

b) El residuo es $3^4 - p^2(3) + 3 - p = 84 - 3p^2 - p = 4$. Por lo tanto, $3p^2 + p - 80 = 0$, $(p - 5)(3p + 16) = 0$ y $p = 5, -16/3$.

20.10 Por división sintética, determine el cociente y el residuo de lo siguiente:

$$(3x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 8x + 25) \div (x - 2)$$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 3 & -4 & -5 & +0 & -8 & +25 \\ & & 6 & +4 & -2 & -4 & -24 \\ \hline & 3 & +2 & -1 & -2 & -12 & +1 \end{array}$$

Cociente: $3x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 12$
Residuo: 1

La fila superior de números proporciona los coeficientes del dividendo, siendo cero el coeficiente de las potencias de x que faltan $(0x^2)$. El 2 en el extremo izquierdo es el segundo término del divisor con el signo cambiado (ya que el coeficiente de x en el divisor es 1).

El primer coeficiente en la columna superior, 3, está escrito primero en la tercera fila y después multiplicado por el 2 del divisor. El producto 6 está colocado en primer término en la segunda fila y sumado al -4 de arriba de él para dar como resultado 2, el cual es el siguiente número en la tercera fila. Este 2 se multiplica posteriormente por el 2 del divisor. El producto 4 se coloca en la segunda fila y se suma al -5 de arriba para proporcionar el -1 en la tercera fila: etc. El último número de la tercera fila es el Residuo, mientras que todos los números a su izquierda constituyen los coeficientes del Cociente.

Puesto que el dividendo es de 5º grado y el divisor de 1º, el cociente es de 4º grado.

La respuesta puede escribirse como:

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 12 + \frac{1}{x-2}.$$

20.11 $(x^4 - 2x^3 - 24x^2 + 15x + 50) \div (x + 4)$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|l} -4 & 1 - 2 - 24 + 15 + 50 \\ & \quad - 4 + 24 - \ \ 0 - 60 \\ \hline & 1 - 6 + \ \ 0 + 15 - 10 \end{array}$$

Respuesta: $x^3 - 6x^2 + 15 - \dfrac{10}{x+4}$

20.12 $(2x^4 - 17x^2 - 4) \div (x + 3)$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|l} -3 & 2 + 0 - 17 + 0 - 4 \\ & \quad - 6 + 18 - 3 + 9 \\ \hline & 2 - 6 + \ \ 1 - 3 + 5 \end{array}$$

Respuesta: $2x^3 - 6x^2 + x - 3 + \dfrac{5}{x+3}$

20.13 $(4x^3 - 10x^2 + x - 1) \div (x - 1/2)$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|l} 1/2 & 4 - 10 + 1 - \quad 1 \\ & \quad + \ \ 2 - 4 - 3/2 \\ \hline & 4 - \ \ 8 - 3 - 5/2 \end{array}$$

Respuesta: $4x^2 - 8x - 3 - \dfrac{5}{2x-1}$

20.14 Dado $P(x) = x^3 - 6x^2 - 2x + 40$, calcule *a*) $P(-5)$ y *b*) $P(4)$ utilizando la división sintética.

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{array}{r|l} -5 & 1 - \ \ 6 - \ \ 2 + \ \ 40 \\ & \quad - \ \ 5 + 55 - 265 \\ \hline & 1 - 11 + 53 - 225 \end{array}$$
$P(-5) = -225$

b)
$$\begin{array}{r|l} 4 & 1 - 6 - \ \ 2 + 40 \\ & \quad + 4 - \ \ 8 - 40 \\ \hline & 1 - 2 - \ 10 + \ \ 0 \end{array}$$
$P(4) = 0$

20.15 Dado que una raíz de $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$ es 5, resuelva la ecuación.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|l} 5 & 1 + 2 - 23 - 60 \\ & \quad + 5 + 35 + 60 \\ \hline & 1 + 7 + 12 + \ \ 0 \end{array}$$

Divida $x^3 + 2x^2 - 23x - 60$ entre $x - 5$.

La ecuación descomprimida es $x^2 + 7x + 12 = 0$, cuyas raíces son -3, -4. Las tres raíces son 5, -3, -4.

20.16 Dos raíces de $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$ son -1 y 2. Resuelva la ecuación.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|l} -1 & 1 + 0 - 2 - 3 - 2 \\ & \quad - 1 + 1 + 1 + 2 \\ \hline & 1 - 1 - 1 - 2 + 0 \end{array}$$

Divida $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$ entre $x + 1$.

La primera ecuación descomprimida es $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ & & +2 & +2 & +2 \\ \hline & 1 & +1 & +1 & +0 \end{array} \qquad \text{Divida } x^3 - x^2 - x - 2 \text{ entre } x - 2.$$

La segunda ecuación descomprimida es $x^2 + x + 1 = 0$, cuyas raíces son $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3}$.

Las cuatro raíces son -1, 2, $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3}$.

20.17 Determine las raíces de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 1)^2(x + 2)(x + 4) = 0$. Respuesta. 1 como doble raíz, -2, -4

b) $(2x + 1)(3x - 2)^3(2x - 5) = 0$. $-1/2$, $2/3$ como triple raíz, $5/2$

c) $x^3(x^2 - 2x - 15) = 0$. 0 como raíces triples, 5, -3

d) $(x + 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3})(x - 6) = 0$. $(-1 - \sqrt{3})$, $(-1 + \sqrt{3})$, 6

e) $[(x - i)(x + i)]^3(x + 1)^2 = 0$. $\pm i$ como triple raíz, -1 como doble raíz

f) $3(x + m)^4(5x - n)^2 = 0$. $-m$ como cuádruple raíz, $n/5$ como doble raíz

20.18 Escriba la ecuación que tenga solamente las raíces siguientes:

a) 5, 1, -3; *b*) 2, $-1/4$, $-1/2$; *c*) ± 2, $2 \pm \sqrt{3}$; *d*) 0, $1 \pm 5i$.

SOLUCIÓN

a) $(x - 5)(x - 1)(x + 3) = 0$ o $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

b) $(x - 2)\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ o $x^3 - \frac{5x^2}{4} - \frac{11x}{8} - \frac{1}{4} = 0$ o $8x^3 - 10x^2 - 11x - 2 = 0$.

por la cual tiene coeficientes enteros

c) $(x - 2)(x + 2)[x - (2 - \sqrt{3})][x - (2 + \sqrt{3})] = (x^2 - 4)[(x - 2) + \sqrt{3}][(x - 2) - \sqrt{3}]$

$= (x^2 - 4)[(x - 2)^2 - 3] = (x^2 - 4)(x^2 - 4x + 1) = 0$, o $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 16x - 4 = 0$.

d) $x[x - (1 + 5i)][x - (1 - 5i)] = x[(x - 1) - 5i][(x - 1) + 5i] = x[(x - 1)^2 + 25]$

$= x(x^2 - 2x + 26) = 0$, o $x^3 - 2x^2 + 26x = 0$.

20.19 Construya la ecuación con coeficientes enteros que tengan solamente las raíces siguientes:

a) $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$; *b*) $0, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, -1$; *c*) $\pm 3i, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$; *d*) 2 como triple raíz, -1.

SOLUCIÓN

a) $(x - 1)(2x - 1)(3x + 1) = 0$ o $6x^3 - 7x^2 + 1 = 0$

b) $x(4x - 3)(3x - 2)(x + 1) = 0$ o $12x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 6x = 0$

c) $(x - 3i)(x + 3i)\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = (x^2 + 9)\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$, $(x^2 + 9)(2x^2 - 1) = 0$,

o $2x^4 + 17x^2 - 9 = 0$

d) $(x - 2)^3(x + 1) = 0$ o $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$

20.20 Cada uno de los números dados es una raíz de una ecuación con polinomios con *coeficientes reales*. ¿Qué otro número es también una raíz? *a*) $2i$, *b*) $-3 + 2i$, *c*) $-3 - i\sqrt{2}$.

SOLUCIÓN

a) $-2i$, *b*) $-3 - 2i$, *c*) $-3 + i\sqrt{2}$

20.21 Cada uno de los números proporcionados a continuación es una raíz de un polinomio con *coeficientes racionales.* ¿Qué otro número es una raíz? *a*) $\sqrt{7}$, *b*) $-4 + 2\sqrt{3}$, *c*) $5 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

SOLUCIÓN

a) $\sqrt{7}$, *b*) $-4 - 2\sqrt{3}$, *c*) $5 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

20.22 Evalúe la validez de cada una de las conclusiones siguientes:

a) $x^3 + 7x - 6i = 0$ tiene $x = i$ como raíz; de aquí que $x = -i$ es una raíz.
b) $x^3 + (1 - 2\sqrt{3})x^2 + (5 - 2\sqrt{3})x + 5 = 0$ tiene $\sqrt{3} - i\sqrt{2}$ como raíz; de aquí que $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$ es una raíz.
c) $x^4 + (1 - 2\sqrt{2})x^3 + (4 - 2\sqrt{2})x^2 + (3 - 4\sqrt{2})x + 1 = 0$ tiene $x = -1 + \sqrt{2}$ como raíz; de aquí que $x = -1 - \sqrt{2}$ es una raíz.

SOLUCIÓN

a) $x = -i$ no es necesariamente una raíz, ya que no todos los coeficientes de la ecuación son reales. De hecho, por sustitución se puede ver que $x = -i$ no es una raíz.
b) La conclusión es válida, ya que la ecuación proporcionada tiene coeficientes reales.
c) $x = -1 - 2\sqrt{2}$ no es necesariamente una raíz, ya que no todos los coeficientes de la ecuación son *racionales*. Por sustitución, se puede observar que $x = -1 - \sqrt{2}$ no es una raíz.

20.23 Escriba la ecuación con polinomios de menor grado con coeficientes reales que tengan a 2 y $1 - 3i$ como sus dos raíces.

SOLUCIÓN

$$(x-2)[x-(1-3i)][x-(1+3i)] = (x-2)(x^2-2x+10) = 0 \quad \text{o} \quad x^3 - 4x^2 + 14x - 20 = 0$$

20.24 Construya la ecuación polinomial de menor grado con coeficientes racionales que tengan $-1 + \sqrt{5}$ y -6 como dos de sus raíces.

SOLUCIÓN

$$[x-(-1+\sqrt{5})][x-(-1-\sqrt{5})](x+6) = (x^2+2x-4)(x+6) = 0 \quad \text{o} \quad x^3 + 8x^2 + 8x - 24 = 0$$

20.25 Construya la ecuación polinomial de cuarto grado con coeficientes racionales que tengan como dos de sus raíces

a) $-5i$ y $6\sqrt{6}$, *b*) $2 + i$ y $1 - \sqrt{3}$.

SOLUCIÓN

a) $(x+5i)(x-5i)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) = (x^2+25)(x^2-6) = 0$ o $x^4 + 19x^2 - 150 = 0$
b) $[x-(2+i)][x-(2-i)][x-(1-\sqrt{3})][x-(1+\sqrt{3})] = (x^2-4x+5)(x^2-2x-2) = 0$
o $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 2x - 10 = 0$

20.26 Encuentre las cuatro raíces de $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$.

SOLUCIÓN

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2 = [(x+i)(x-i)]^2 = 0.$$ Las raíces son $i, i, -i, -i$.

20.27 Resuelva $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36 = 0$, dado que una de sus raíces es un número imaginario puro de la forma bi, donde b es real.

SOLUCIÓN

Sustituyendo bi por x, $b^4 + 3b^3i - 5b^2 - 27bi - 36 = 0$.

Igualando las partes real e imaginaria a cero

$$b^4 - 5b^2 - 36 = 0,\ (b^2 - 9)(b^2 + 4) = 0 \text{ y } b = \pm 3 \text{ puesto que } b \text{ es real;}$$
$$3b^3 - 27b = 0,\ 3b(b^2 - 9) = 0 \text{ y } b = 0, \pm 3:$$

La solución común es $b = \pm 3$; de aquí que las dos raíces sean $\pm 3i$ y $(x - 3i)(x + 3i) = x^2 + 9$ es un factor de $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36$. Por división el otro factor es $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$, y las otras dos raíces son 4, -1.

Las cuatro raíces son $\pm 3i$, 4, -1.

20.28 Construya la ecuación con polinomios de menor grado con *coeficientes racionales* que tiene como raíces *a*) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, *b*) $\sqrt{2} + \sqrt{-1}$.

SOLUCIÓN

a) Sea $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Elevando al cuadrado ambos elementos se tiene $x^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$ y $x^2 - 5 = -2\sqrt{6}$.

Elevando al cuadrado de nuevo, $x^4 - 10x^2 + 25 = 24$ y $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

b) Sea $x = \sqrt{2} + \sqrt{-1}$.

Elevando al cuadrado ambos elementos se tiene $x^2 = 2 + 2\sqrt{-2} - 1 = 1 + 2\sqrt{-2}$ y $x^2 - 1 = 2\sqrt{-2}$.

Elevando al cuadrado de nuevo, $x^4 - 2x^2 + 1 = -8$ y $x^4 - 2x^2 + 9 = 0$.

20.29 *a*) Escriba la ecuación con polinomios de menor grado con coeficientes *constantes* (reales o complejos) que tenga como raíces 2 y $1 - 3i$. Compárela con la ecuación del problema 20.23.

b) Escriba la ecuación con polinomios de menor grado con coeficientes *reales* que tenga como raíces -6 y $-1 + \sqrt{5}$. Compárela con la ecuación del problema 20.24.

SOLUCIÓN

a) $(x - 2)[x - (1 - 3i)] = 0$ o $x^2 - 3(1 - i)x + 2 - 6i = 0$

b) $(x + 6)[x - (-1 + \sqrt{5})] = 0$ o $x^2 + (7 - \sqrt{5})x - 6(\sqrt{5} - 1) = 0$

20.30 Obtenga las raíces racionales, si existen, de cada una de las ecuaciones con polinomios siguientes:

a) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$

Las raíces racionales se limitan a factores enteros de 2, los cuáles son ± 1, ± 2.

Probando mediante la división sintética o por sustitución estos valores de x en el orden $+1, -1, +2, -2$, se observa que las únicas raíces racionales son -1 y 2.

b) $x^3 - x - 6 = 0$

Las raíces racionales se limitan a los factores enteros de 6, los cuáles son ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

Probando estos valores de x en el orden, $+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$, se observa que la única raíz racional es 2.

c) $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$

Si b/c (en términos de menor grado) es una raíz racional, los únicos valores posibles de b son ± 1, ± 2, ± 3, ± 6; y los únicos valores posibles de c son ± 1, ± 2. De aquí que las raíces racionales posibles están limitadas a los números siguientes: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 1/2, \pm 3/2$.

Probando estos valores de x, se obtienen como raíces racionales $-1, 2, -3/2$.

d) $2x^4 + x^2 + 2x - 4 = 0$

Si b/c es una raíz racional, los valores de b están limitados a ± 1, ± 2, ± 4; y los valores de c están limitados a ± 1, ± 2. De aquí que las raíces racionales posibles están limitadas a los números ±1, ±2, ±4, $\pm 1/2$.

Probando estos valores de x, se deduce que no existen raíces racionales.

20.31 Resuelva la ecuación polinomial $x^3 - 2x^2 - 31x + 20 = 0$.

SOLUCIÓN Cualquier raíz racional de esta ecuación es un factor integral de 20. Por lo tanto, las posibles raíces racionales son: ±1, ±2, ±4, ±5, ±10, ±20.

Probando estos valores de x con la ayuda de la división sintética, se deduce que -5 es una raíz.

$$\begin{array}{r|l} -5 & 1 - 2 - 31 + 20 \\ & \quad\;\; - 5 + 35 - 20 \\ \hline & 1 - 7 + \;\; 4 + \;\; 0 \end{array}$$

La ecuación descomprimida $x^2 - 7x + 4 = 0$ tiene raíces irracionales $7/2 \pm \sqrt{33}/2$.
De aquí que las tres raíces de la ecuación dada son -5, $7/2 \pm \sqrt{33}/2$.

20.32 Resuelva la ecuación con polinomios $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 8x + 6 = 0$.

SOLUCIÓN Si b/c es una raíz racional, los únicos valores posibles de b son ± 1, ± 2, ± 3, ± 6; y los únicos valores posibles de c son ± 1, ± 2. De aquí que las posibles raíces racionales son ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, $\pm 1/2$, $\pm 3/2$.

Probando estos valores de x mediante la división sintética se encuentra que 3 es una raíz.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 - 3 - 7 - 8 + 6 \\ & \quad + 6 + 9 + 6 - 6 \\ \hline & 2 + 3 + 2 - 2 + 0 \end{array}$$

Se prueba la primera ecuación descomprimida $2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$ y se obtiene $1/2$ como una raíz.

$$\begin{array}{r|l} 1/2 & 2 + 3 + 2 - 2 \\ & \quad + 1 + 2 + 2 \\ \hline & 2 + 4 + 4 + 0 \end{array}$$

La segunda ecuación descomprimida $2x^2 + 4x + 4 = 0$ o $x^2 + 2x + 2 = 0$ tiene las raíces no reales $-1, \pm\, i$.
Las cuatro raíces son 3, $1/2$, $-1 \pm i$.

20.33 Demuestre que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ es un número irracional.

SOLUCIÓN Sea $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$; por ende, $x^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$ y $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$.

Elevando al cuadrado de nuevo, $x^4 - 10x^2 + 25 = 24$ o $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Las únicas raíces racionales posibles de esta ecuación son ± 1. Probando estos valores, se encuentra que no es una raíz racional. De aquí que $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ es irracional.

20.34 Grafique $P(x) = x^3 + x - 3$. A partir de la gráfica determine el número de raíces positivas, negativas y no reales de $x^3 + x - 3 = 0$.

SOLUCIÓN

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(x)$	-33	-13	-5	-3	-1	7	27	65

A partir de la gráfica se puede observar que existe una raíz real positiva y no negativa (consulte la figura $20-1$). De aquí que existen dos raíces conjugadas no reales.

20.35 Encuentre los límites superior e inferior de las raíces reales de *a*) $x^3 - 3x^2 + 5x + 4 = 0$, *b*) $x^3 + x^2 - 6 = 0$.

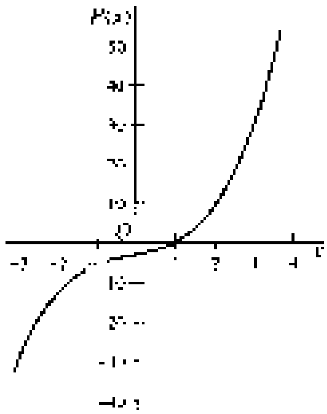


Figura 20-1

SOLUCIÓN

a) Las raíces racionales posibles son ±1, ±2, ±4.

Probando el límite superior.

$$\begin{array}{r|l} \underline{1} & 1 - 3 + 5 + 4 \\ & + 1 - 2 + 3 \\ \hline & 1 - 2 + 3 + 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \underline{2} & 1 - 3 + 5 + 4 \\ & + 2 - 2 + 6 \\ \hline & 1 - 1 + 3 + 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \underline{3} & 1 - 3 + 5 + 4 \\ & + 3 + 0 + 15 \\ \hline & 1 + 0 + 5 + 19 \end{array}$$

Puesto que todos los números en la tercera fila de la división sintética de $P(x)$ entre $x - 3$ son positivos (o cero), el límite superior de las raíces es 3, es decir, no existe ninguna raíz mayor a 3.

Probando el límite inferior

$$\begin{array}{r|l} \underline{-1} & 1 - 3 + 5 + 4 \\ & - 1 + 4 - 9 \\ \hline & 1 - 4 + 9 - 5 \end{array}$$

Puesto que los números de la tercera fila son alternadamente positivos y negativos, -1 es un límite inferior de las raíces, es decir, ninguna raíz es menor a -1.

b) Las raíces racionales posibles son ±1, ±2, ±3, ±6.

Probando el límite superior

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{1} & 1+1+0-6 \\
 & \quad +1+2+2 \\
\hline
 & 1+2+2-4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\underline{2} & 1+1+0-\ \ 6 \\
 & \quad +2+6+12 \\
\hline
 & 1+3+6+\ \ 6
\end{array}
$$

De aquí que 2 es el límite superior de las raíces.

Probando el límite inferior

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-1} & 1+1+0-6 \\
 & \quad -1-0+0 \\
\hline
 & 1+0+0-6
\end{array}
$$

Puesto que todos los números de la tercera fila son alternadamente positivos y negativos (o cero), un límite inferior de las raíces es -1.

20.36 Determine las raíces racionales de $4x^3 + 15x - 36 = 0$ y resuelva la ecuación completamente.

SOLUCIÓN Las raíces racionales posibles son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 9, ± 12, ± 18, ± 36, $\pm 1/2$, $\pm 3/2$, $\pm 9/2$, $\pm 1/4$, $\pm 3/4$, $\pm 9/4$. Con el fin de evitar la comprobación de todas estas posibilidades, encuentre los límites superior e inferior de las raíces.

Probando el límite superior.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{1} & 4+0+15-36 \\
 & \quad +4+\ \ 4+19 \\
\hline
 & 4+4+19-17
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\underline{2} & 4+0+15-36 \\
 & \quad +8+16+62 \\
\hline
 & 4+8+31+26
\end{array}
$$

De aquí que ninguna raíz (real) es mayor o igual a 2.

Probando el límite inferior.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-1} & 4+0+15-36 \\
 & \quad -4+\ \ 4-19 \\
\hline
 & 4-4+19-55
\end{array}
$$

De aquí que ninguna raíz real es menor o igual a -1.

Las únicas raíces racionales posibles mayores a -1 y menores a 2 son ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 3/2$, $\pm 1/4$, $\pm 3/4$. Probando estas raíces se puede deducir que 3/2 es la única raíz racional.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{3/2} & 4+0+15-36 \\
 & \quad +6+\ \ 9+36 \\
\hline
 & 4+6+24+\ \ 0
\end{array}
$$

Las demás raíces son soluciones de $4x^2 + 6x + 24 = 0$ o $2x^2 + 3x + 12 = 0$, es decir, $x = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{87}}{4}i$.

20.37 Utilizando la Regla de los Signos de Descartes, ¿qué puede inferirse respecto al número de raíces positivas, negativas y distintas a cero de las ecuaciones siguientes?

a) $2x^3 + 3x^2 - 13x + 6 = 0$ *d*) $2x^4 + 7x^2 + 6 = 0$ *g*) $x^6 + x^3 - 1 = 0$
b) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$ *e*) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ *h*) $x^6 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$
c) $x^2 - 2x + 7 = 0$ *f*) $x^3 + 3x - 14 = 0$

SOLUCIÓN

a) Existen dos variaciones de signo en $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 13x + 6$. Hay una variación de signo en $P(-x) = 2x^3 + 3x^2 + 13x + 6$. De aquí que existen como máximo, 2 raíces positivas y 1 raíz negativa.
Las raíces pueden ser: (1) 2 positivas, 1 negativa y 0 imaginarias; o (2) 0 positivas, 1 negativa y 2 no reales. (Las raíces imaginarias se presentan en pares conjugados).

b) Existe 1 variación de signo en $P(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$, y 3 variaciones de signo en $P(-x) = x^4 - 2x^2 + 3x -2$. De aquí que existen como máximo 1 raíz positiva y 3 negativas.
Las raíces pueden ser: (1) 1 positiva, 3 negativas, 0 imaginarias; o (2) 1 positiva, 1 negativa y 2 imaginarias.

c) Existen 2 variaciones de signo en $P(x) = x^2 - 2x + 7$ y no hay variación de signo en $P(-x) = x^2 + 2x + 7$.
De aquí que las raíces pueden ser: (1) 2 positivas, 0 negativas, 0 imaginarias; (2) 0 positivas, 0 negativas, 2 imaginarias.

d) Ni $P(x) = 2x^4 + 7x^2 + 6$ ni $P(-x) = 2x^4 + 7x^2 + 6$ tiene una variación de signo. De aquí que las cuatro raíces son imaginarias, ya que $P(0) \neq 0$.

e) Existe 1 variación de signo en $P(x) = x^4 = 3x^2 - 4 = 0$, y 1 variación en $P(-x) = x^4 - 3x^2 - 4$.
De aquí que las raíces son: 1 positiva, 1 negativa y 2 imaginarias.

f) Existe 1 variación de signo en $P(x) = x^3 + 3x - 14$, y no hay variación alguna en $P(-x) = -x^3 - 3x - 14$.
De aquí que las raíces son: 1 positiva y 2 imaginarias.

g) Existe 1 variación de signo en $P(x) = x^6 + x^3 - 1$ y 1 variación en $P(-x) = x^6 - x^3 - 1$.
De aquí que las raíces son: 1 positiva, 1 negativa y 4 imaginarias.

h) Existen 2 variaciones de signo en $P(x) = x^6 - 3x^2 - 4x + 1$ y 2 en $P(-x) = x^6 - 3x^2 + 4x + 1$.
De aquí que las raíces pueden ser:

(1) 2 positivas, 2 negativas, 2 imaginarias; (3) 0 positivas, 2 negativas, 4 imaginarias
(2) 2 positivas, 0 negativas, 4 imaginarias; (4) 0 positivas, 0 negativas, 6 imaginarias

20.38 Determine la naturaleza de las raíces de $x^n - 1 = 0$ cuando n es en entero positivo y *a*) n es par, *b*) n es impar.

SOLUCIÓN

a) $P(x) = x^n - 1$ tiene una variación de signo y $P(-x) = x^n - 1$ tiene una también. De aquí que las raíces son: 1 positiva, 1 negativa, $(n - 2)$ imaginaria.

b) $P(x) = x^n - 1$ tiene una variación de signo, y $P(-x) = -x^n - 1$ no la tiene. De aquí que las raíces son: 1 positiva, 0 negativa, $(n - 1)$ imaginaria.

20.39 Obtenga las raíces imaginarias, si existen, de cada ecuación mediante el uso de la Regla de los Signos de Descartes.

a) $x^3 - x^2 + 3x - 27 = 0$, *c*) $2x^5 + x - 66 = 0$,
b) $x^3 + 2x + 12 = 0$, *d*) $3x^4 + 7x^2 + 6 = 0$.

SOLUCIÓN

a) Por medio de la Regla de los Signos de Descartes, la ecuación tiene 3 o 1 raíz positiva y ninguna negativa. De aquí que las raíces racionales están limitadas a factores enteros positivos de 27, los cuales son 1, 3, 9 y 27.
Probando estos valores para x, la única raíz racional que se obtiene es 3,

b) Mediante la regla de los signos, la ecuación no tiene raíces positivas sólo una negativa. De aquí que las raíces racionales están limitadas a los factores enteros negativos de 12, es decir, -1, -2, -3, -4, -6 y -12.
Probando estos valores para x, la única raíz racional es -2.

c) Por medio de la regla de los signos, la ecuación tiene 1 raíz positiva y ninguna negativa. Por consiguiente, las raíces racionales se encuentran limitadas a números racionales positivos de la forma b/c estando b limitada por los factores enteros de 66 y c por factores enteros de 2. Las raíces racionales posibles son, por lo tanto, 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66, 1/2 3/2 11/2, 33/2.

Probando estos valores para x, se obtiene 2 como la única raíz racional posible.

d) La ecuación no tiene raíces reales, puesto que ni $P(x) = 3x^4 + 7x^2 + 6$ ni $P(-x) = 3x^4 + 7x^2 + 6$ tiene una variación de signo y $P(0) \neq 0$.

De aquí que sus cuatro raíces son imaginarias.

20.40 Utilizando e Teorema del Valor Intermedio, aísle cada una de las raíces reales de *P(x)* que se encuentren entre dos enteros consecutivos.

a) $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - 8x + 8$ *b*) $P(x) = 5x^3 - 4x^2 - 10x + 8$

SOLUCIÓN

a) En $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - 8x + 8$, se calculan los límites superior e inferior de las raíces reales.

$$\begin{array}{r|rrrr} 0 & 3 & -8 & -8 & +8 \\ & & +0 & +0 & +0 \\ \hline & 3 & -8 & -8 & +8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -8 & -8 & +8 \\ & & +3 & -5 & -13 \\ \hline & 3 & -5 & -13 & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & -8 & +8 \\ & & +6 & -4 & -24 \\ \hline & 3 & -2 & -12 & -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 3 & -8 & -8 & +8 \\ & & +9 & +3 & -15 \\ \hline & 3 & +1 & -5 & -7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 4 & 3 & -8 & -8 & +8 \\ & & +12 & +16 & +32 \\ \hline & 3 & +4 & +8 & +40 \end{array}$$

Puesto que la fila del cociente es positiva totalmente cuando la división sintética se realiza con 4, el límite superior de las raíces reales de $P(x)$ es 4.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -8 & -8 & +8 \\ & & -3 & +11 & -3 \\ \hline & 3 & -11 & +3 & +5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & -8 & -8 & +8 \\ & & -6 & +28 & -40 \\ \hline & 3 & -14 & +14 & -32 \end{array}$$

Puesto que la fila del cociente está alternada en signos cuando la división sintética se hace con -2, el límite inferior de las raíces reales de $P(x)$ es -2.

Ahora se analiza el intervalo de -2 a 4 para aislar las raíces reales de $P(x)$ entre enteros consecutivos.

Puesto que $P(0) = 8$ y $P(1) = -5$, existe una raíz real entre 0 y 1. Debido a que $P(3) = -7$ y $P(4) = 40$, existe una raíz real entre 3 y 4. Ya que $P(-1) = 5$ y $P(-2) = -32$, existe una raíz real entre -2 y -1.

Las raíces reales de $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - 8x + 8$ están entre -2 y -1, 0 y 1, y 3 y 4.

b) En $P(x) = 5x^3 - 4x^2 - 10x + 8$, se calculan los límites superior e inferior de las raíces reales.

$$\begin{array}{r|rrrr} 0 & 5 & -4 & -10 & +8 \\ & & +0 & +0 & +0 \\ \hline & 5 & -4 & -10 & +8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 1 & 5 & -4 & -10 & +8 \\ & & +5 & +1 & -9 \\ \hline & 5 & +1 & -9 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & -4 & -10 & +8 \\ & & +10 & +12 & +4 \\ \hline & 5 & +6 & +2 & +12 \end{array}$$

El límite superior de las raíces de $P(x)$ es 2.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 5 & -4 & -10 & +8 \\ & & -5 & +9 & +1 \\ \hline & 5 & -9 & -1 & +9 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} -2 & 5 & -4 & -10 & +8 \\ & & -10 & +28 & -36 \\ \hline & 5 & -14 & +18 & -28 \end{array}$$

El límite inferior de las raíces reales de $P(x)$ es -2.

A continuación se analiza el intervalo entre -2 y 2 para aislar las raíces reales de $P(x)$. Puesto que $P(0) = 8$ y $P(1) = -1$, existe una raíz real entre 0 y 1. Puesto que $P(1) = -1$ y $P(2) = 12$, existe una raíz real entre 1 y 2. Puesto que $P(-1) = 9$ y $P(-2) = -28$, existe una raíz real entre -2 y -1.

Por lo tanto, las raíces reales de $P(x) = 5x^3 - 4x^2 - 10x + 8$ se ubican entre -2 y -1, 0 y 1 y 1 y 2.

20.41 Aproxime la raíz real de $P(x) = x^3 - x - 5$ hasta centésimas.

SOLUCIÓN Mediante la Regla de los Signos de Descartes, $P(x) = x^3 - x - 5$ tiene 1 raíz real positiva y 2 o 0 raíces reales negativas.

Ahora, se determina el límite superior de las raíces reales de $P(x)$.

$$\begin{array}{r|l} \underline{0} & 1+0-1-5 \\ & \quad +0+0+0 \\ \hline & 1+0-1-5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \underline{1} & 1+0-1-5 \\ & \quad +1+1+0 \\ \hline & 1+1+0-5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \underline{2} & 1+0-1-5 \\ & \quad +2+4+6 \\ \hline & 1+2+3+1 \end{array}$$

El límite superior de las raíces reales de $P(x)$ es 2.

Puesto que $P(1) = -5$ y $P(2) = 1$, la raíz real positiva está entre 1 y 2.

Ahora se determina el intervalo de décimas de la raíz. Utilizando la división sintética, se determina los valores de las décimas hasta encontrar dos valores con signos diferentes. Puesto que $P(2) = 1$ está más cerca de 0 que $P(1) = -5$, se comienza con $x = 1.9$. Puesto que $P(1.9) = -0.041$ y $P(2.0) = 1$, la raíz real está entre 1.9 y 2.0.

Puesto que $P(1.90) = -0.41$ está más cerca de 0 que $P(2.0) = 1$, se busca el intervalo de las centésimas comenzando por x = 1.91, $P(1.91) = 0.579$. Puesto que $P(1.90)=-0.041$ y $P(1.91) = 0.058$, existe una raíz real entre 1.90 y 1.91.

Ahora se determina $P(1.905)$ para decidir si la raíz se redondea a 1.90 o a 1.91. $P(1.905) = 0.008$. Puesto que $P(1.900)$ es negativo y $P(1.905)$ es positivo, la raíz se encuentra entre 1.900 y 1.905. Cuando se redondea a centésimas, todos los números en este intervalo se redondean a 1.90.

Por lo tanto, redondeado a centésimas, 1.90 es una raíz real de $P(x) = x^3 - x - 5$ es 1.90.

20.42 Aproxime $\sqrt[3]{3}$ a milésimas.

SOLUCIÓN Sea $x = \sqrt[3]{3}$, por lo que $x^3 = 3$ y $P(x) = x^3 - 3 = 0$.

Por medio de la Regla de los Signos de Descartes, $P(x)$ tiene una raíz real positiva y raíces reales no negativas.

Puesto que $P(1) = -2$ y $P(2) = 5$, la raíz está entre 1 y 2.

Puesto que $P(1)$ está más cerca de 0 que de $P(2)$, ubique el intervalo de las décimas evaluando $P(x)$ de $x = 1$ a $x = 2$ comenzando con $x = 1.1$. Una vez que se presente un cambio de signo en $P(x)$, se detiene el proceso.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$P(x)$	-2	-1.669	-1.272	-0.803	-0.256	0.375

Puesto que $P(1.4)$ es negativo y $P(1.5)$ es positivo, la raíz real se encuentra entre 1.4 y 1.5.

Ahora determine el intervalo de las centésimas explorando los valores de P(x) en el intervalo de $x = 1.40$ a $x = 1.50$.

x	1.40	1.41	1.42	1.43	1.44	1.45
$P(x)$	-0.256	-0.197	-0.137	-0.076	-0.014	0.049

Puesto que $P(1,4)$ es negativa y $P(1.5)$ es positiva, la raíz se encuentra entre 1.4 y 1.5.

El paso siguiente consiste en determinar el intervalo de las milésimas de la raíz explorando los valores de $P(x)$ en el intervalo entre $x = 1.440$ y $x = 1.450$.

x	1.440	1.441	1.442	1.443
$P(x)$	-0.014	-0.008	-0.002	0.005

Puesto que $P(1.442)$ es negativo y $P(1.443)$ es positivo, la raíz se encuentra entre 1.442 y 1.443.

Puesto que $P(1.4425) = 0.002$, la raíz real se encuentra entre 1.4420 y 1.4425. Todos los valores en el intervalo entre 1.4420 y 1.4425 se redondean a 1.442 hasta las milésimas.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{3} = 1.442$ redondeado hasta las milésimas.

Problemas propuestos

20.43 Si $P(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$, encuentre *a*) $P(0)$, *b*) $P(2)$, *c*) $P(-1)$, *d*) $P(-\frac{1}{2})$, *e*) $P(\sqrt{2})$.

20.44 Determine el residuo de cada una de las ecuaciones siguientes

a) $(2x^5 - 7) \div (x + 1)$
b) $(x^3 + 3x^2 - 4x + 2) \div (x - 2)$
c) $(3x^3 + 4x - 4) \div (x - \frac{1}{2})$
d) $(4y^3 + y + 27) \div (2y + 3)$
e) $(x^{12} + x^6 + 1) \div (x - \sqrt{-1})$
f) $(2x^{33} + 35) \div (x + 1)$

20.45 Demuestre que $x + 3$ es un factor de $x^3 + 7x^2 + 10x - 6$ y que $x = -3$ es una raíz de la ecuación $x^3 + 7x^2 + 10x - 6 = 0$.

20.46 Determine cuáles de los siguientes números son raíces de la ecuación $y^4 + 3y^3 + 12y - 16 = 0$:

a) 2, *b*) -4, *c*) 3, *d*) 1, *e*) $2i$.

20.47 Encuentre los valores de k para los cuales

a) $4x^3 + 3x^2 - kx + 6k$ es divisible entre $x + 3$ exactamente
b) $x^5 + 4kx - 4k^2 = 0$ tiene como raíz $x = 2$

20.48 Por división sintética determine el cociente y el residuo de cada una de las expresiones siguientes.

a) $(2x^3 + 3x^2 - 4x - 2) \div (x + 1)$
b) $(3x^5 + x^3 - 4) \div (x - 2)$
c) $(y^6 - 3y^5 + 4y - 5) \div (y + 2)$
d) $(4x^3 + 6x^2 - 2x + 3) \div (2x + 1)$

20.49 Si $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x - 4$, calcule $P(2)$ y $P(-3)$ utilizando la división sintética.

20.50 Dado que una raíz de $x^3 - 7x - 6 = 0$ es -1, encuentre las otras dos raíces.

20.51 Demuestre que $2x^4 - x^3 - 3x^2 - 31x - 15 = 0$ tiene como raíces 3, $-\frac{1}{2}$. Encuentre las demás raíces.

20.52 Encuentre las raíces de las ecuaciones siguientes.

a) $(x + 3)^2(x - 2)^3(x + 1) = 0$
b) $4x^4(x + 2)^4(x - 1) = 0$
c) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 4x + 5) = 0$
d) $(y^2 + 4)^2(y + 1)^2 = 0$

20.53 Construya las ecuaciones con coeficientes enteros que tengan solamente las raíces siguientes

a) $2, -3, -\frac{1}{2}$ *b*) $0, -4, 2/3, 1$ *c*) $\pm 3i$, doble raíz 2 *d*) $-1 \pm 2i, 2 \pm i$

20.54 Construya una ecuación cuyas raíces sean $1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm i\sqrt{3}$.

20.55 Escriba la ecuación de menor grado posible con coeficientes enteros que tengan las raíces dadas.

a) $1, 0, i$ *b*) $2 + i$ *c*) $-1 \pm \sqrt{3}, 1/3$ *d*) $-2, i\sqrt{3}$ *e*) $\sqrt{2}, i$ *f*) $i/2, 6/5$

20.56 En la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + a = 0$, a y b son números reales. Si $x = 2 + i$ es una raíz de la ecuación, encuentre a y b.

20.57 Escriba una ecuación de menor grado con coeficientes enteros que tenga $\sqrt{2} - 1$ como doble raíz.

20.58 Escriba una ecuación de menor grado con coeficientes enteros que tenga $\sqrt{3}, + 2i$ como raíz.

20.59 Resuelva cada ecuación, dada la raíz indicada.

a) $x^4 + x^3 - 12x^2 + 32x - 40 = 0$; $1 - i\sqrt{3}$

b) $6x^4 - 11x^3 + x^2 + 33x - 45 = 0$; $1 + i\sqrt{2}$

c) $x^3 - 5x^2 + 6 = 0$; $3 - \sqrt{3}$

d) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 16x + 8 = 0$; $2i$

20.60 Obtenga las raíces racionales, si existen, de cada una de las ecuaciones

a) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

b) $4x^3 - 3x + 1 = 0$

c) $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$

d) $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 0$

20.61 Resuelva cada ecuación

a) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

b) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

c) $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$

d) $4x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$

e) $5x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 6x - 4 = 0$

f) $3x^5 + 2x^4 - 15x^3 - 10x^2 + 12x + 8 = 0$

20.62 Demuestre que *a*) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ y *b*) $\sqrt[5]{2}$ son números irracionales.

20. 63 Si $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x - 16$, determine el número de raíces positivas, negativas e imaginarias.

20.64 Ubique entre dos enteros sucesivos las raíces reales de $x^4 - 3x^2 - 6x - 2 - 0$. Encuentre la raíz menos positiva de la ecuación redondeada a centésimas.

20.65 Encuentre los límites superior e inferior de las raíces reales de cada ecuación.

a) $x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = 0$

b) $2x^4 + 5x^2 - 6x - 14 = 0$

20.66 Encuentre las raíces racionales de $2x^3 - 5x^2 + 4x + 24 = 0$ y así resuelva la ecuación totalmente.

20.67 Utilizando la Regla de los Signos de Descartes, ¿qué puede inferirse respecto al número de raíces positivas, negativas e imaginarias de las ecuaciones siguientes?

a) $2x^3 + 3x^2 + 7 = 0$

b) $3x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

c) $x^5 + 4x^3 - 3x^2 - x + 12 = 0$

d) $x^5 - 3x - 2 = 0$

20.68 Dada la ecuación $3x^4 - x^3 + x^2 - 5 = 0$, determine *a*) el número máximo de raíces positivas, *b*) el número mínimo de raíces positivas, *c*) el número exacto de raíces negativas, y *d*) el número máximo de raíces imaginarias.

20.69 Dada la ecuación $5x^3 + 2x - 4 = 0$, ¿cuántas raíces son *a*) negativas, *b*) reales?

20.70 ¿La ecuación $x^6 + 4x^4 + 3x^2 + 16 = 0$ tiene *a*) 4 raíces imaginarias y 2 reales, *b)* 4 reales y 2 imaginarias, *c*) 6 imaginarias o *d*) 6 reales?

20.71 *a*) ¿Cuántas raíces positivas tiene la ecuación $x^6 - 7x^2 - 11 = 0$?

b) ¿Cuántas raíces complejas tiene la ecuación $x^7 + x^4 - x^2 - 3 = 0$?

c) Demuestre que $x^6 + 2x^3 + 3x - 4 = 0$ tiene exactamente 4 raíces imaginarias.

d) Demuestre que $x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$ tiene solamente una raíz negativa.

20.72 Resuelva totalmente cada ecuación.

a) $8x^3 - 20x^2 + 14x - 3 = 0$

b) $8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 2 = 0$

c) $4x^3 + 5x^2 + 2x - 6 = 0$

d) $2x^4 - x^3 - 23x^2 + 18x + 18 = 0$

20.73 Aproxime la raíz indicada de cada ecuación con la precisión especificada.

a) $2x^3 + 3x^2 - 9x - 7 = 0$; raíz positiva, a la décima más cercana.

b) $x^3 + 9x^2 + 27x - 50 = 0$; raíz positiva, a la centésima más cercana.

c) $x^3 - 3x^2 - 3x + 18 = 0$; raíz negativa, a la décima más cercana.

d) $x^3 + 6x^2 + 9x + 17 = 0$; raíz negativa, a la décima más cercana.

e) $x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 + 50x + 162 = 0$; raíz entre 5 y 6, a la centésima más cercana.

f) $x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 12 = 0$; raíz entre 1 y 2, a la centésima más cercana.

20.74 Para encontrar la deflexión máxima de un rayo de una longitud determinada cargado de cierta manera, es necesario resolver la ecuación $4x^3 - 150x^2 + 1\,500x - 2\,871 = 0$. Encuentre la raíz de la ecuación que está entre 2 y 3 redondeada a la décima más cercana.

20.75 La longitud de una caja rectangular de dos veces su ancho y su profundidad es un pie mayor que su ancho. Si su volumen es de 64 pies cúbicos, encuentre su ancho redondeado a la décima más cercana de un pie.

20.76 Encuentre $\sqrt[3]{20}$ redondeado a la centésima más cercana.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

20.43 *a*) 2 *b*) 12 *c*) 0 *d*) $3/2$ *e*) $3\sqrt{2}$

20.44 *a*) -9 *b*) 14 *c*) $-13/8$ *d*) 12 *e*) 1 *f*) 33

20.46 -4, 1 y $2i$ son raíces

20.47 *a*) $k = 9$ *b*) $k = 4, -2$

20.48 *a*) $2x^2 + x - 5 + \dfrac{3}{x+1}$ *c*) $y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 20y^2 + 40y - 76 + \dfrac{147}{y+2}$

b) $3x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 26x + 52 + \dfrac{100}{x-2}$ *d*) $2x^2 + 2x - 2 + \dfrac{5}{2x+1}$

20.49 12, 227

20.50 3, -2

20.51 $-1 \pm 2i$

20.52 *a*) raíz doble 3, raíz triple 2, -1 *c*) $-1, -2, 2 \pm i$

b) raíz cuádruple 0, raíz cuádruple -2, 1 *d*) raíces dobles $+2i$, raíz doble -1

20.53 *a*) $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 0$ *c*) $x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 36x + 36 = 0$

b) $3x^4 + 7x^3 - 18x^2 + 8x = 0$ *d*) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 10x + 25 = 0$

20.54 *a*) $x^4 - x^2 - 10x - 4 = 0$

20.55 *a*) $x^4 - x^3 + x^2 - x = 0$ *d*) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$

b) $x^2 - 4x + 5 = 0$ *e*) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

c) $3x^3 + 5x^2 - 8x + 2 = 0$ *f*) $20x^3 - 24x^2 + 5x - 6 = 0$

20.56 $a = 5$, $b = 9$

20.57 $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$

20.58 $x^4 + 2x^2 + 49 = 0$

20.59 *a*) $1 \pm i\sqrt{3}, -5, 2$ *b*) $1 \pm i\sqrt{2}, -5/3, 3/2$ *c*) $3 \pm \sqrt{3}, -1$ *d*) $\pm 2i, 2 \pm \sqrt{2}$

20.60 *a*) $-3, 2$ *b*) $1/2, 1/2, -1$ *c*) no es raíz racional *d*) $-1/3, \pm 2$

20.61 *a*) $1, \pm 3$ *d*) $\pm \frac{1}{2}, -1 \pm \sqrt{2}$
b) $3, -2, 1/2$ *e*) $-1, 2/5, \pm \sqrt{2}i$
c) $1/3, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ *f*) $\pm 1, \pm 2, -2/3$

20.63 1 raíz positiva, 0 raíces negativas, 2 raíces imaginarias

20.64 Raíz positiva entre 2 y 3; raíz negativa entre -1 y 0; raíz positiva $= 2.41$ aprox.

20.65 *a*) Límite superior 3, límite inferior -1 *b*) Límite superior 2, límite inferior -2

20.66 $3/2, 2 \pm 2i$

20.67 *a*) 1 negativo, 2 imaginarios
b) 3 positivos o 1 positivo, 2 imaginarios
c) 1 negativo, 2 positivos, 2 imaginarios o 1 negativo, 4 imaginarios
d) 1 positivo, 2 negativos, 2 imaginarios o 1 positivo, 4 imaginarios

20.68 *a*) 3 *b*) 1 *c*) 1 *d*) 2

20.69 *a*) ninguna *b*) una

20.70 *c*)

20.71 *a*) una *b*) cuatro o seis

20.72 *a*) $1/2, 1/2, 3/2$ *b*) $2, -1, 1/4, 1/2$ *c*) $3/4, -1 \pm i$ *d*) $3, 3/2, -2 \pm \sqrt{2}$

20.73 *a*) 1.9 *b*) 1.25 *c*) -2.2 *d*) -4.9 *e*) 5.77 *f*) 1.38

20.74 2.5

20.75 2.9 pies

20.76 2.71

FUNCIONES RACIONALES

21

21.1 FUNCIONES RACIONALES

Una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, entonces una función de la forma $R(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional donde $Q(x) \neq 0$.

El dominio de $R(x)$ es la intersección de los dominios de $P(x)$ y $Q(x)$.

21.2 ASÍNTOTAS VERTICALES

Si $R(x) = P(x)/Q(x)$, entonces los valores de x que hacen $Q(x) = 0$ producen asíntotas verticales si $P(x) \neq 0$. Sin embargo, si para algún valor de $x = a$, $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$, entonces $P(x)$ y $Q(x)$ tiene como factor común a $x - a$. Si $R(x)$ se reduce a los términos de menor grado, la gráfica de $R(x)$ tiene un agujero donde $x = a$.

Una asíntota vertical de $R(x)$ es una línea vertical $x = k$, siendo k una constante, a la que la gráfica de $R(x)$ se aproxima, sin embargo, nunca toca. $R(k)$ no está definida ya que $Q(k) = 0$ y $P(k) \neq 0$. El dominio de $R(x)$ está separado en intervalos diferentes por la asíntota vertical de $R(x)$.

EJEMPLO 21.1 ¿Cuáles son las asíntotas verticales de

$$R(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}?$$

Puesto que

$$R(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$$

no está definida cuando $x^2 - 4 = 0$, $x = 2$ y $x = -2$ podrían dar como resultado asíntotas verticales. Cuando $x = 2$, $2x - 3 \neq 0$ y cuando $x = -2$, $2x - 3 \neq 0$. Por lo tanto, la gráfica de $R(x)$ tiene como asíntotas verticales $x = 2$ y $x = -2$.

21.3 ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Una función racional $R(x) = P(x)/Q(x)$ tiene una asíntota horizontal $y = a$ si, a medida que $|x|$ aumenta ilimitadamente, $R(x)$ se aproxima a a. $R(x)$ tiene como máximo una asíntota. La asíntota horizontal de $R(x)$ puede encontrarse a partir de una comparación de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$.

1. Si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$, entonces $R(x)$ tiene una asíntota horizontal de $y = 0$.
2. Si el grado de $P(x)$ es igual al de $Q(x)$, entonces $R(x)$ tiene una asíntota horizontal de $y = a_n/b_n$, donde a_n es el coeficiente superior (coeficiente del término de mayor grado) de $P(x)$ y b_n es el coeficiente superior de $Q(x)$.
3. Si el grado de $P(x)$ es mayor que el de $Q(x)$, entonces $R(x)$ no tiene una asíntota horizontal.

La gráfica de $R(x)$ puede cruzar una asíntota horizontal en el interior de su dominio. Lo anterior es posible ya que sólo interesa la forma como $R(x)$ se comporta a medida que $|x|$ aumenta sin límites en la determinación de la asíntota horizontal.

EJEMPLO 21.2 ¿Cuáles son las asíntotas horizontales de cada función racional $R(x)$?

a) $R(x) = \dfrac{3x^3}{x^2 - 1}$ *b*) $R(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ *c*) $R(x) = \dfrac{2x + 1}{3 + 5x}$

a) Para

$$R(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 1},$$

el grado del numerador $3x^3$ es 3 y el del denominador es 2. Puesto que el numerador es mayor al grado del denominador, $R(x)$ no tiene asíntota horizontal.

b) El grado del numerador de

$$R(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

es 1 y el grado del denominador es 2, por lo que $R(x)$ tiene la asíntota horizontal $y = 0$.

c) El numerador y denominador de

$$R(x) = \frac{2x + 1}{3 + 5x}$$

tienen como grado 1. Puesto que el coeficiente superior del numerador es 2 y el del denominador es 5, $R(x)$ tiene como asíntota horizontal $y = \frac{2}{5}$.

21.4 GRÁFICA DE FUNCIONES RACIONALES

Para graficar una función racional $R(x) = P(x)/Q(x)$, primero se determinan los agujeros: los valores de x para los que $P(x)$ y $Q(x)$ son cero. Después de que se han localizado los agujeros, se reduce $R(x)$ a sus términos de menor grado. El valor de la forma reducida de $R(x)$ para una x que de un agujero es la coordenada y del punto que corresponda al agujero.

Una vez que $R(x)$ se expresa en sus términos de menor grado, se determinan las asíntotas, la simetría, las raíces y la intersección con y si existen. Se grafican las asíntotas como líneas sombreadas, las raíces y la intersección con el eje y y algunos otros puntos para determinar cómo la gráfica se aproxima a las asíntotas. Por último, se bosqueja la gráfica a través de los puntos dibujados y se llega a obtener las asíntotas.

EJEMPLO 21.3 Bosqueje una gráfica para cada función racional $R(x)$.

a) $R(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$ *b*) $R(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

a)

$$R(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$

tiene asíntotas verticales en $x = 1$ y en $x = -1$, una asíntota horizontal de $y = 0$ y no tiene agujeros.

Puesto que el numerador de $R(x)$ es una constante, no tiene ninguna raíz. Debido a que $R(0) = -3$, $R(x)$ tiene una intersección con el eje y en $(0, -3)$.

Dibuje la intersección con el eje y y grafique las asíntotas como líneas sombreadas. Se determinan algunos valores de $R(x)$ en cada intervalo del dominio $(-\infty, -1)$ y $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. $R(-x) = R(x)$, por lo que $R(x)$ es simétrica respecto al eje y.

$$R(2) = R(-2) = \frac{3}{2^2 - 1} = 1, \qquad R(0.5) = R(-0.5) = \frac{3}{(0.5)^2 - 1} = -4$$

Dibuje (2, 1), $(-2, 1)$, $(0.5, -4)$ y $(-0.5, -4)$. Utilizando las asíntotas como una frontera, se dibuja la gráfica. La gráfica de

$$R(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$

se muestra en la figura 21-1.

b)
$$R(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

tiene asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = -2$, una asíntota horizontal en $y = -1$ y no tiene agujeros.

Las raíces de $R(x)$ son para $x = 0$. Puesto que cuando $x = 0$, $R(0) = 0$ y (0, 0) es la raíz y la intersección con y.

Dibuje el punto (0, 0) y las asíntotas verticales y horizontales.

Se determinan algunos valores de $R(x)$ en cada intervalo de su dominio $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$. Puesto que $R(-x) = R(x)$, la gráfica es simétrica respecto al eje y.

$$R(3) = R(-3) = \frac{3^2}{4 - 3^2} = \frac{9}{-5} = \frac{-9}{5}; \qquad R(1) = R(-1) = \frac{1^2}{4 - 1^2} = \frac{1}{3}$$

Dibuje $(3, -9/5)$, $(-3, -9/5)$, $(1, 1/3)$, y $(1, -1/3)$.

Utilizando las asíntotas como líneas fronterizas, dibuje la gráfica de $R(x)$.

La gráfica de

$$R(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

se muestra en la figura 21-2.

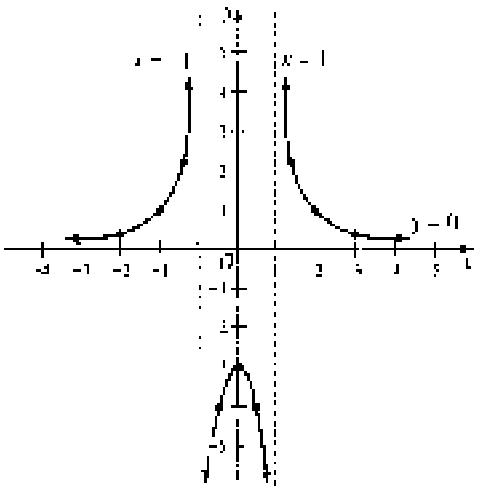


Figura 21-1

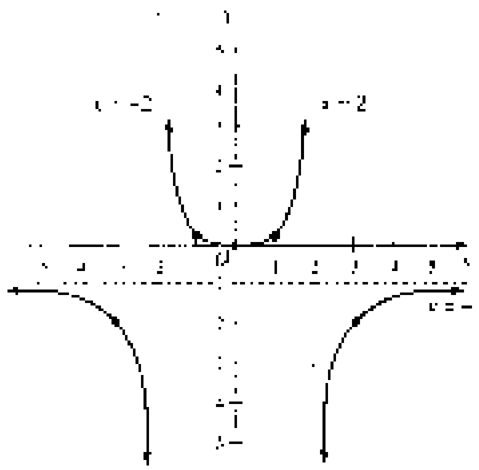


Figura 21-2

21.5 CÓMO HACER LA GRÁFICA DE FUNCIONES RACIONALES MEDIANTE EL USO DE LA CALCULADORA GRÁFICA

Las facilidades de una calculadora gráfica permiten la graficación de funciones racionales. Sin embargo, a menos que la calculadora gráfica específicamente dibuje los valores de x de las asíntotas, conecta las diferentes ramas de la función racional. Sólo es necesario determinar las asíntotas verticales y después fijar la escala del eje x de la ventana de graficación con el fin de que se utilicen los valores de las asíntotas verticales.

Las asíntotas horizontales deben leerse a partir de la misma gráfica, ya que éstas no se encuentran dibujadas o etiquetadas y solamente aparecen como una característica de la gráfica en la ventana de despliegue de la calculadora.

Los agujeros están basados en factores que pueden eliminarse en la función racional. Éstos son difíciles de localizar en la pantalla de una calculadora gráfica.

En general, cuando se utiliza una calculadora gráfica para ayudar en la generación de una gráfica en papel, es una buena práctica no depender de la calculadora gráfica para determinar las asíntotas verticales, horizontales u agujeros de una función racional. Determine estos valores por usted mismo y colóquelos en la gráfica que está construyendo. Utilice la pantalla de la calculadora gráfica para indicar la ubicación y la forma de la gráfica y como guía de su bosquejo de la gráfica.

Problemas resueltos

21.1 Establezca el dominio de cada función racional $R(x)$.

a) $R(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ *b*) $R(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x}$ *c*) $R(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

SOLUCIÓN

a) Para $R(x) = 3x/(x + 2)$, establezca $x + 2 = 0$ y observe que $R(x)$ no está definida para $x = -2$. El dominio de $R(x)$ es {todos los números reales excepto -2} o dominio $= (-\infty, -2) \cup (-2, 1)$.

b) Para $R(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x)/x$, se puede observar que $R(x)$ no está definida para $x = 0$. Por lo tanto, el dominio de $R(x)$ es {todos los números reales excepto 0} o dominio $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

c) Para $R(x) = (3x^2 - 1)/(x^3 - x)$, establezca $x^3 - x = 0$ y determine que para $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$, $R(x)$ no está definida. El dominio de $R(x)$ es {todos los números reales excepto $-1, 0, 1$} o el dominio $= (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

21.2 Determine las asíntotas verticales, horizontales y agujeros de cada función racional $R(x)$.

a) $R(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ *b*) $R(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x}$ *c*) $R(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

SOLUCIÓN

a) Los valores que hacen que el denominador sea igual a cero, pero que no así con el numerador dan como resultado asíntotas. En $R(x) = 3x/(x + 2)$, $x = -2$ hace que el denominador sea $x + 2 = 0$, sin embargo, no hace que el numerador sea $3x = 0$. Por ende, $x = -2$ es una asíntota vertical.

Puesto que el grado del numerador $3x$ es 1 y el grado del denominador $x + 2$ sea 1, $R(x)$ tiene una asíntota horizontal de $y = 3/1 = 3$, donde 3 es el coeficiente superior del numerador y 1 es el correspondiente del denominador.

Debido a que $x = 0$ es el único valor que hace que el numerador igual a 0 y $x = 0$ no hace el denominador igual a 0, $R(x)$ no tiene agujeros en su gráfica.

b) Solamente $x = 0$ hace que el denominador de $R(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x)/x$ sea cero. Ya que $x = 0$ también hace el numerador igual a cero, $R(x)$ no tiene asíntotas verticales.

Puesto que el grado del numerador de $R(x)$ es 3 y el del denominador 1, el grado del numerador excede al del denominador y, por lo tanto, no existe asíntota horizontal.

Puesto que $x = 0$ hace el numerador y el denominador de $R(x)$ cero, existe un agujero en la gráfica de $R(x)$ cuando $x = 0$. Se reduce $R(x)$ a sus términos de menor grado y se obtiene $R(x) = x^2 - 2x - 3$ cuando $x \neq 0$. La gráfica de esta forma reducida tendría el valor de -3 si x fuera 0, por lo que la gráfica de $R(x)$ tiene un agujero en $(0, -3)$.

c) Puesto que $x^3 - x = 0$ tiene soluciones de $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$, las asíntotas verticales de $R(x) = (3x^2 - 1)/(x^3 - x)$ son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$.

El grado del numerador de $R(x)$ es menos que el del denominador, por lo que $y = 0$ es la asíntota horizontal de $R(x)$.

El numerador es diferente de cero para cualquiera de los valores $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, que hacen el denominador cero, por lo que la gráfica de $R(x)$ no tiene ningún agujero.

21.3 ¿Cuáles son las raíces y las intersecciones con el eje y de cada función racional $R(x)$?

a) $R(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ *b*) $R(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x}$ *c*) $R(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

SOLUCIÓN

a) Para $R(x) = 3x/(x + 2)$, el numerador $3x$ es cero si $x = 0$. Puesto que $x = 0$ no hace que el denominador cero, existe una raíz cuando $x = 0$. Por ende, $(0, 0)$ es la raíz de $R(x)$. La intersección con el eje y es el valor de y cuando $x = 0$. Por lo tanto, $(0, 0)$ es el punto de intersección con el eje y.

b) Para $R(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x)/x$, el numerador $x^3 - 2x^2 - 3x$ es cero cuando $x = 0$, $x = -1$ y $x = 3$. Sin embargo, $x = 0$ hace el denominador igual a cero, por lo que no generará una raíz de $R(x)$. Las raíces de $R(x)$ son $(3, 0)$ y $(-1, 0)$.

Del problema 21.1 *b*) se sabe que $x = 0$ no se encuentra en el dominio de $R(x)$. Por lo tanto, $R(x)$ no intercepta al eje de las y.

c) Para $R(x) = (3x^2 - 1)/(x^3 - x)$, el numerador $3x^2 - 1 = 0$ tiene como soluciones $x = \sqrt{3}/3$ y $x = -\sqrt{3}/3$. Por lo tanto, las raíces de $R(x)$ son $(\sqrt{3}/3, 0)$ y $(-\sqrt{3}/3, 0)$.

Del problema 21.1 *c*), se sabe que el dominio de $R(x)$ no contiene a $x = 0$, por lo que $R(x)$ no intercepta al eje y.

21.4 Bosqueje una gráfica de cada función racional $R(x)$.

a) $R(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ *b*) $R(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x}$ *c*) $R(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

SOLUCIÓN

A partir de los problemas 21.1, 21.2 y 21.3 se conocen los dominios, asíntotas verticales, asíntotas horizontales, agujeros, raíces e intercepciones con el eje y de estas tres funciones racionales. Se utilizará esta información para graficar cada una de estas funciones racionales.

a) $R(x) = 3x/(x + 2)$ tiene una asíntota vertical en $x = -2$, una horizontal en $y = 3$ y $(0, 0)$ es el punto de la raíz y de la intersección con el eje y. Se dibujan líneas punteadas para las asíntotas y se gráfica $(0, 0)$. Se seleccionan algunos valores de x y se determinan los puntos, después se grafican. Para $x = -4, -3, -1$ y 2, se obtienen los puntos $(-4, 6)$, $(-3, 9)$, $(-1, -3)$ y $(2, 1.5)$. A continuación se bosqueja la gráfica de $R(x)$ que pasa por los puntos graficados y que se aproximan a las asíntotas. Puesto que el dominio de $R(x)$ está separado en dos partes, se tendrán dos partes de la gráfica de $R(x)$. Consulte la figura 21-3.

b) $R(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x)/x = x^2 - 2x - 3$ cuando $x \neq 0$ y existe un agujero en $(0, -3)$. No hay asíntotas en la gráfica de $R(x)$, no hay intercepciones con el eje y, sin embargo, existen raíces en $(3, 0)$ y $(-1, 0)$. Se grafican las raíces y se coloca una círculo abierto O alrededor del punto $(0, -3)$ para indicar el agujero en la gráfica. Ahora se seleccionan los valores de x, se determinan los puntos correspondientes, y se grafican. Para $x = -2$, 1, 2 y 4, se obtienen los puntos $(-2, 5)$, $(1, -4)$, $(2, 3)$ y $(4, 5)$. Puesto que el dominio de $R(x)$ está separado en dos partes por el valor x para el agujero en $R(x)$, la gráfica de $R(x)$ está separada en dos partes por el agujero en $(0, -3)$. Consulte la figura 21-4.

c) $R(x) = (3x^2 - 1)/x^3 - x)$ tiene asíntotas verticales en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, una asíntota horizontal en $y = 0$ y raíces en $(\sqrt{3}/3, 0)$ y $(-\sqrt{3}/3, 0)$. Se aproximan las raíces a $(0.6, 0)$ y $(-0.6, 0)$ y se grafican estos puntos y las asíntotas. Para asegurarse que se grafican todas las partes de $R(x)$, se seleccionan valores de x de cada intervalo en el dominio. Para $x = -2, -1.5, -0.75, -0.25, 0.25, 0.75, 1.5$ y 2, se obtienen los puntos

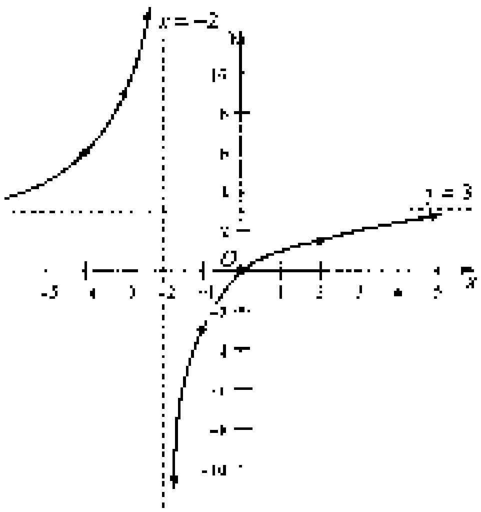


Figura 21-3

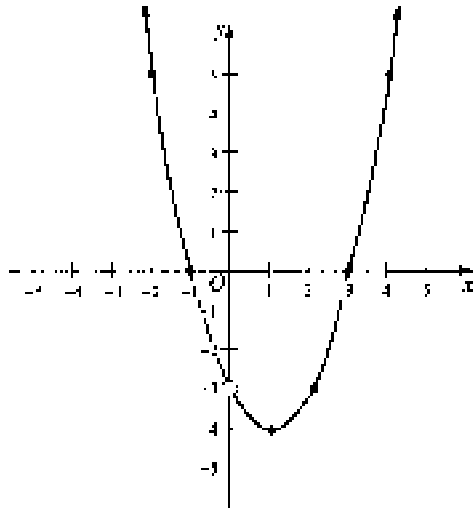


Figura 21-4

$(-2, -1.8)$, $(-1.5, -3.1)$, $(-0.75, 2.1)$, $(-0.25, -3.5)$, $(0.25, 3.5)$, $(0.75, -2.1)$, $(1.5, 3.1)$, *y* $(2, 1.8)$. Puesto que el dominio de $R(x)$ está separado en cuatro partes, la gráfica de $R(x)$ también lo está. Vea la figura 21-5.

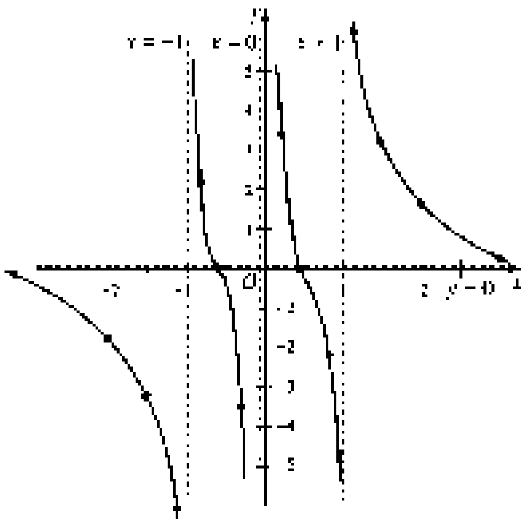


Figura 21-5

Problemas propuestos

21.5 Establezca el dominio de cada función racional.

a) $R(x) = \dfrac{4}{x+2}$ *d*) $R(x) = \dfrac{4}{x^2+x-2}$ *g*) $R(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2}$

b) $R(x) = -\dfrac{1}{x-2}$ *e*) $R(x) = \dfrac{6-x}{x+3}$ *h*) $R(x) = \dfrac{x^2+4}{27x^3-3x}$

c) $R(x) = -\dfrac{x}{x^2-4}$ *f*) $R(x) = \dfrac{2x-5}{x+4}$ *i*) $R(x) = \dfrac{-x^2+x}{x^2-5x+6}$

21.6 Determine las asíntotas de cada función racional.

a) $R(x) = \dfrac{4}{x-3}$

b) $R(x) = \dfrac{x}{x^2-16}$

c) $R(x) = \dfrac{3x+6}{x-1}$

d) $R(x) = \dfrac{x^2-6x+9}{x}$

e) $R(x) = \dfrac{2x^2-5}{x+2}$

f) $R(x) = \dfrac{-x^2+2x}{x+3}$

g) $R(x) = -\dfrac{3}{x+4}$

h) $R(x) = \dfrac{2}{x^2-7x+10}$

i) $R(x) = \dfrac{x+5}{5-x}$

21.7 Determine las raíces y la intersección con el eje *y* de cada función racional.

a) $R(x) = \dfrac{3}{x+2}$

b) $R(x) = -\dfrac{x}{x^2-4}$

c) $R(x) = \dfrac{2x+8}{x+3}$

d) $R(x) = \dfrac{x^3-27}{x^2}$

e) $R(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$

f) $R(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

g) $R(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+6x+9}$

h) $R(x) = \dfrac{x^3-1}{x}$

i) $R(x) = \dfrac{x+3}{x^2+2x+1}$

21.8 Grafique cada función racional.

a) $R(x) = \dfrac{2}{x}$

b) $R(x) = \dfrac{3}{x-2}$

c) $R(x) = -\dfrac{1}{x^2-1}$

d) $R(x) = \dfrac{2x-6}{x+1}$

e) $R(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

f) $R(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$

g) $R(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2-9}$

h) $R(x) = -\dfrac{x}{x^2-4}$

i) $R(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2+7x+6}$

21.9 Grafique cada función racional.

a) $R(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$

b) $R(x) = \dfrac{3x}{x^2-2x}$

21.10 Grafique cada función racional.

a) $R(x) = \dfrac{2}{x^2+4}$

b) $R(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3-x}$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

21.5

a) $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

b) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

c) $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

d) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$

e) $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

f) $(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$

g) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

h) $(-\infty, -1/3) \cup (-1/3, 0) \cup (0, 1/3) \cup (1/3, \infty)$

i) $(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$

21.6

	Asíntotas verticales	Asíntotas horizontales
a)	$x = 3$	$y = 0$
b)	$x = 4, x = -4$	$y = 0$
c)	$x = 1$	$y = 3$
d)	$x = 0$	ninguna
e)	$x = -2$	ninguna
f)	$x = -3$	ninguna
g)	$x = -4$	$y = 0$
h)	$x = 5, x = 2$	$y = 0$
i)	$x = 5$	$y = -1$

21.7

	Raíces	Intersección con el eje y
a)	ninguna	(0, 3/2)
b)	(0, 0)	(0, 0)
c)	(−4, 0)	(0, 8/3)
d)	(3, 0)	ninguna
e)	(0, 0)	(0, 0)
f)	(2, 0), (−2, 0)	(0, 4)
g)	(3, 0), (2, 0)	(0, 2/3)
h)	(1, 0)	ninguna
i)	(−3, 0)	(0, 3)

21.8 *a*) Figura 21-6 *b*) Figura 21-7 *c*) Figura 21-8 *d*) Figura 21-9 *e*) Figura 21-10 *f*) Figura 21-11 *g*) Figura 21-12 *h*) Figura 21-13 *i*) Figura 21-14

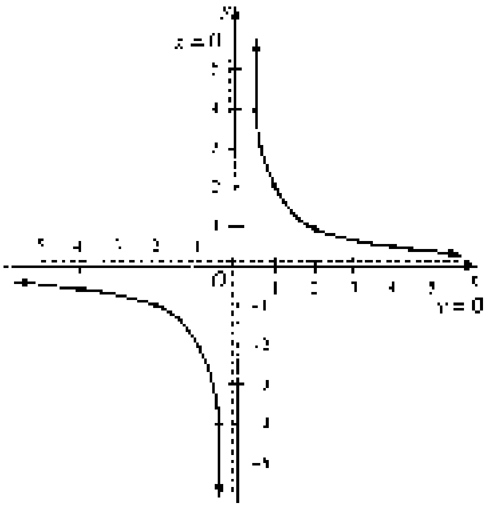


Figura 21-6

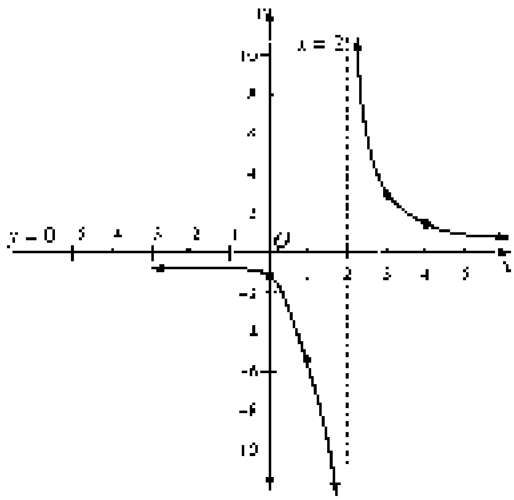


Figura 21-7

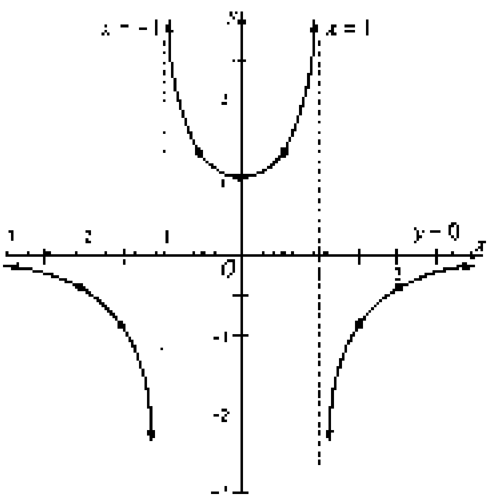


Figura 21-8

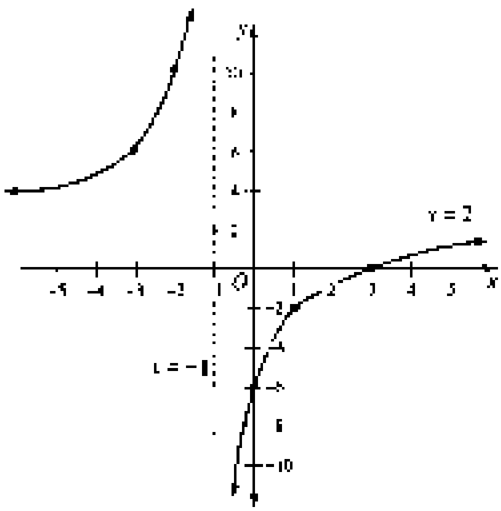


Figura 21-9

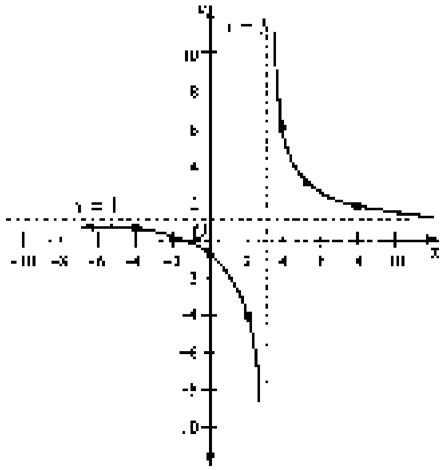


Figura 21-10

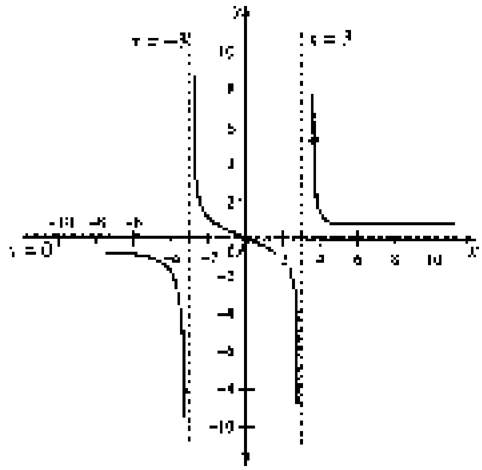


Figura 21-11

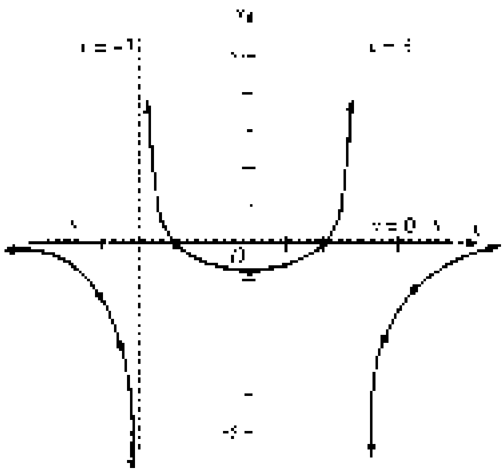


Figura 21-12

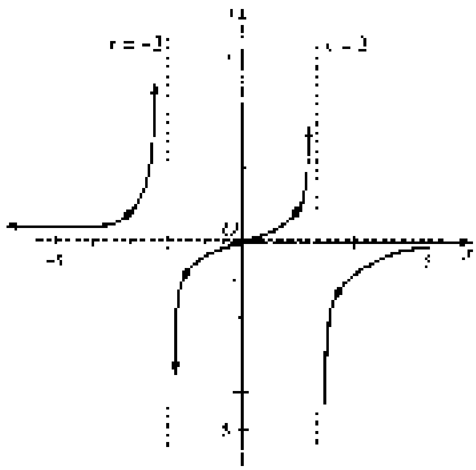


Figura 21-13

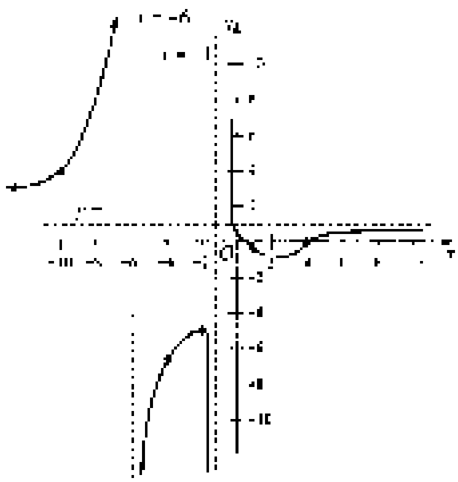


Figura 21-14

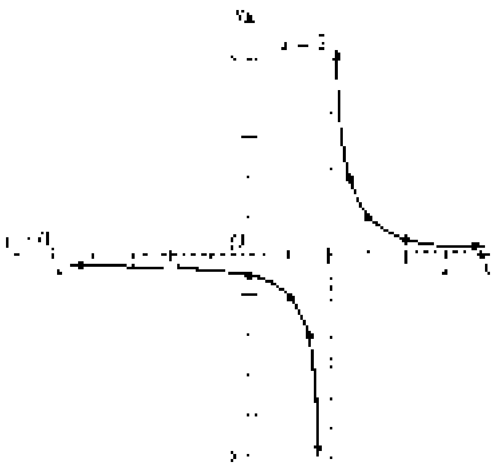


Figura 21-15

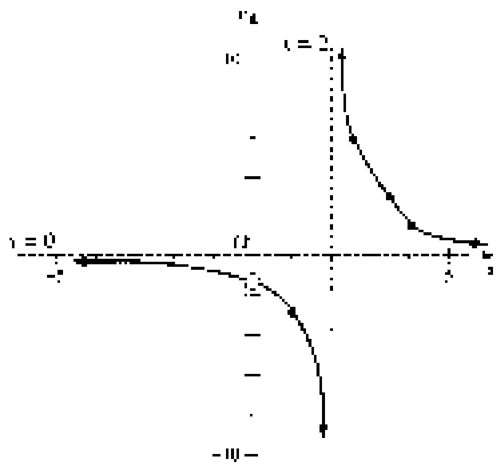


Figura 21-16

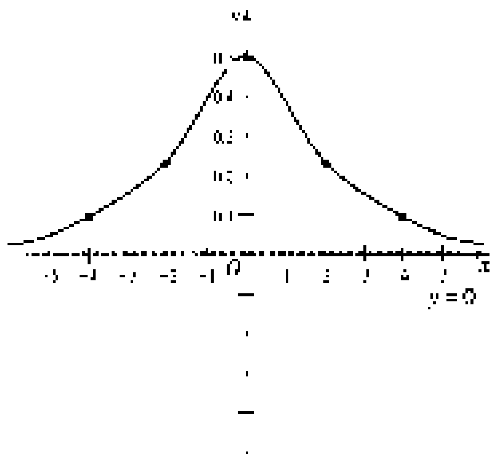


Figura 21-17

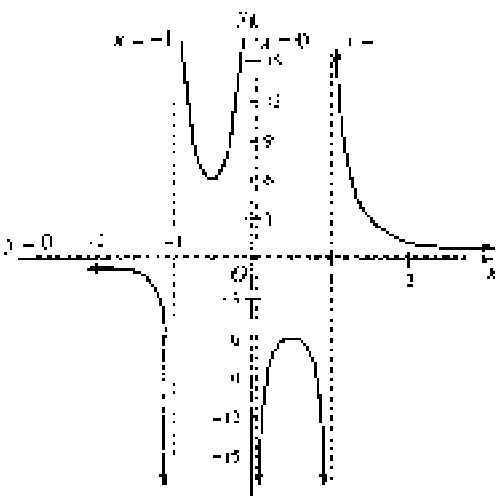


Figura 21-18

21.9 *a*) Reducida al término de menor grado, $R(x) = 1/(x - 2)$ cuando $x \neq -2$. La gráfica se encuentra en la figura 21-15.

b) Reducida al términos de menor grado, $R(x) = 3/(x - 2)$ cuando $x \neq 0$. La gráfica se encuentra en la figura 21-16.

21.10 *a*) Figura 21-17 *b*) Figura 21-18

PROGRESIONES Y SERIES 22

22.1 PROGRESIONES

Una progresión de números es una función definida en el conjunto de números enteros positivos. Los números en la progresión se llaman *términos*. Una serie es la suma de los términos de una progresión.

22.2 PROGRESIÓN ARITMÉTICA

A. *Una progresión aritmética* es una secuencia de números cada uno de los cuales, a excepción del primero, se obtiene sumando al número anterior un número constante llamado *razón de la progresión.*

Por ejemplo, 3, 7, 11, 15, 19, … es una progresión aritmética, ya que cada término se obtiene sumando 4 unidades al anterior. En la progresión aritmética 50, 45, 40, … la razón es $45 - 50 = 40 - 45 = -5$.

B. *Fórmulas de las progresiones aritméticas*

1. El término n-ésimo o el último: $l = a + (n - 1)d$
2. La suma de los n primeros términos: $S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

donde a = primer término; d = razón;
n = número de términos; l = término n-ésimo o último término;
S = suma de los n primeros términos.

EJEMPLO 22.1 Considere la progresión aritmética 3, 7, 11, …, donde $a = 3$ y $d = 7 - 3 = 11 - 7 = 4$. El sexto término es $l = a + (n - 1)d = 3 + (6 - 1)4 = 23$.

La suma de los seis primeros términos es

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{6}{2}(3 + 23) = 78 \quad \text{o} \quad S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{6}{2}[2(3) + (6 - 1)4] = 78.$$

22.3 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

A. *Una progresión geométrica* es una secuencia de números cada uno de los cuales, después del primero, se obtiene multiplicando al número anterior por una constante llamada *razón de la proporción.*

Por ejemplo, 5, 10, 20, 40, 80, … es una progresión geométrica ya que cada término se obtiene multiplicando por 2 el anterior. En la progresión geométrica 9, -3, 1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, … la razón es

$$\frac{-3}{9} = \frac{1}{-3} = \frac{-1/3}{1} = \frac{1/9}{-1/3} = -\frac{1}{3}.$$

B. *Fórmulas de las progresiones geométricas*.

1. El término n-ésimo o último término: $l = ar^{n-1}$
2. La suma de los n primeros términos: $S = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{rl - a}{r - 1}$, $r \neq 1$

donde a = primer término; r = razón; n = número de términos;
l = término n-ésimo o último término; S = suma de los n primeros términos.

EJEMPLO 22.2 Considere la progresión geométrica 5, 10, 20, … siendo $a = 5$ y

$$r = \frac{10}{5} = \frac{20}{10} = 2$$

El séptimo término es $l = ar^{n-1} = 5(2^{7-1}) = 5(2^6) = 320$.
La suma de los siete primeros términos es

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{5(2^7 - 1)}{2 - 1} = 635.$$

22.4 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS INDEFINIDAS

La suma (S_∞) de los términos de una progresión geométrica indefinida de razón r, en valor absoluto menor que la unidad, está dada por

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}, \qquad \text{donde } |r| < 1.$$

EJEMPLO 22.3 Considere la progresión geométrica indefinida,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

donde $a = 1$ y $r = -\frac{1}{2}$. Su suma hasta el infinito es

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

22.5 PROGRESIONES ARMÓNICAS

Una *progresión armónica* es una sucesión de números cuyos recíprocos forman una progresión aritmética.
Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$$

es una progresión armónica, ya que 2, 4, 6, 8, 10, … forman una progresión aritmética.

22.6 MEDIAS

Los términos de una progresión comprendidos entre dos dados recibe el nombre de *medias* de aquellos *dos* términos.

Por ejemplo, en la progresión aritmética, 3, 5, 7, 9, 11, … la media aritmética entre 3 y 7 es 5 y *cuatro* medias entre 3 y 13 son 5, 7, 9, 11.

En la progresión geométrica 2, −4, 8, −16, … *dos* medias entre 2 y −16 son −4, 8.

En la progresión armónica,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

la media armónica entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{3}$, y *tres* medias entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{6}$ son $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.

Problemas resueltos

22.1 Determine cuáles de las siguientes ecuaciones son progresiones aritméticas.

a) 1, 6, 11, 16, … Sí, ya que $6 - 1 = 11 - 6 = 16 - 11 = 5$. $(d = 5)$

b) $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$ Sí, ya que $1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$. $(d = \frac{2}{3})$

c) 4, −1, −6, −11, … Sí, ya que $-1 - 4 = -6 - (-1) = -11 - (-6) = -5$. $(d = -5)$

d) 9, 12, 16, … No, ya que $12 - 9 \neq 16 - 12$.

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ No, ya que $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$.

f) $7, 9 + 3p, 11 + 6p, \ldots$ Sí, con $d = 2 + 3p$.

22.2 Demuestre la fórmula $S = (n/2)(a + l)$ para la suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética.

SOLUCIÓN La suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética se puede escribir:

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + l \qquad (n \text{ términos})$$

o

$$S = l + (l - d) + (l - 2d) + \cdots + a \qquad (n \text{ términos})$$

donde la suma está escrita en orden inverso.

Sumando, $2S = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \cdots + (a + l)$ para n términos.

De aquí que $2S = n(a + l)$ y $S = \frac{n}{2}(a + l)$.

22.3 Encuentre el decimosexto término de la progresión aritmética: 4, 7, 10, …

SOLUCIÓN

Se tiene $a = 4$, $n = 16$, $d = 7 - 4 = 10 - 7 = 3$, y $l = a + (n - 1)d = 4 + (16 - 1)3 = 49$.

22.4 Determine la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética: 3, 8, 13,…

SOLUCIÓN

Se tiene $a = 3$, $d = 8 - 3 = 13 - 8 = 5$, $n = 12$, y

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{12}{2}[2(3) + (12 - 1)5] = 366$$

De otra forma: $l = a + (n - 1)d = 3 + (12 - 1)5 = 58$ y

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{12}{2}(3 + 58) = 366.$$

22.5 Encuentre el cuadragésimo término de la suma de los 40 primeros términos de la progresión aritmética: 10, 8, 6, …

SOLUCIÓN

Se tiene que $d = 8 - 10 = 6 - 8 = -2$, $a = 10$, $n = 40$.

Luego $$l = a + (n - 1)d = 10 + (40 - 1)(-2) = -68 \quad \text{y}$$

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{40}{2}(10 - 68) = -1\,160.$$

22.6 ¿Qué término de la progresión 5, 14, 23, … es 239?

SOLUCIÓN

$$l = a + (n - 1)d, \qquad 239 = 5 + (n - 1)9, \qquad 9n = 243 \qquad \text{el término requerido es } n = 27.$$

22.7 Calcule la suma de los primeros 100 enteros positivos múltiplos de 7.

SOLUCIÓN La sucesión es 7, 14, 21, … una progresión aritmética en la cual $a = 7$, $d = 7$, $n = 100$.

De aquí que $$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{100}{2}[2(7) + (100 - 1)7] = 35\,350.$$

22.8 Calcule cuántos enteros consecutivos a partir de 10 se deben tomar para que su suma valga 2 035.

SOLUCIÓN La sucesión es 10, 11, 12, …, una progresión aritmética en la cual $a = 10$, $d = 1$, $S = 2\,035$.

Aplicando $$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d],$$

se obtiene $$2\,035 = \frac{n}{2}[20 + (n - 1)1], \quad 2\,035 = \frac{n}{2}(n + 19), \quad n^2 + 19n - 4\,070 = 0,$$

$$(n - 55)(n + 74) = 0, \quad n = 55, \ -74.$$

De aquí que hay que tomar 55 enteros.

22.9 Encuentre el tiempo que se empleará en saldar una deuda de \$880 pagando \$25 el primer mes, \$27 el segundo, \$29 el tercero, etc.

SOLUCIÓN

De $$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d],$$

se obtiene $$880 = \frac{n}{2}[2(25) + (n - 1)2], \quad 880 = 24n + n^2, \quad n^2 + 24n - 880 = 0,$$

$$(n - 20)(n + 44) = 0, \ n = 20, \ -44.$$

La deuda se saldará en 20 meses.

22.10 ¿Cuántos términos de la progresión aritmética 24, 22, 20, … se necesitan para que la suma sea 150? Escribir los términos.

SOLUCIÓN

$$150 = \frac{n}{2}[48 + (n - 1)(-2)], \quad n^2 - 25n + 150 = 0, \quad (n - 10)(n - 15) = 0, \quad n = 10, \ 15.$$

Para $n = 10$: 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6.
Para $n = 15$: 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4.

22.11 Determine la progresión aritmética cuya suma de los n primeros términos sea $n^2 + 2n$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\text{Término } n\text{-ésimo} &= \text{suma de } n \text{ términos} - \text{suma de } n - 1 \text{ términos}\\ &= n^2 + 2n - [(n-1)^2 + 2(n-1)] = 2n - 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la progresión aritmética es 3, 5, 7, 9, …

22.12 Demuestre que la suma de n enteros impares consecutivos a partir de 1 es igual a n^2.

SOLUCIÓN Se tiene que encontrar la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética 1, 3, 5,…

Por lo tanto, $a = 1$, $d = 2$, $n = n$ y $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2(1) + (n-1)2] = n^2$.

22.13 Encuentre los tres números de la progresión aritmética sabiendo que la suma del primero y el tercero es 12, y que el producto del primero por el segundo es 24.

SOLUCIÓN Sean los números en la progresión geométrica $(a - d)$, a, $(a + d)$. Luego $(a - d) + (a + d) = 12$ o $a = 6$.

Puesto que $(a - d)\,a = 24$, $(6 - d)6 = 24$ o $d = 2$. De aquí que los números son 4, 6, 8.

22.14 Encuentre los números en la progresión geométrica cuya suma es 21 y cuyo producto es 280.

SOLUCIÓN Sean los números $(a - d)$, a, $(a + d)$. Se tendrá que $(a - d) + a + (a + d) = 21$ o sea $a = 7$.
Puesto que $(a - d)(a)(a + d) = 280$, $a(a^2 - d^2) = 7(49 - d^2) = 280$ y $d = \pm 3$.
Los números son 4, 7, 10 o 10, 7, 4.

22.15 Tres números están en relación 2 : 5 : 7. Encuentre dichos números, sabiendo que si se resta 7 del segundo los números forman una progresión geométrica.

SOLUCIÓN Sean los números $2x$, $5x$, $7x$. Los números que forman una progresión aritmética son $2x$, $(5x - 7)$, $7x$.
Por lo tanto, $(5x - 7) - 2x = 7x - (5x - 7)$ o $x = 14$. Luego los números son 28, 70, 98.

22.16 Calcule la suma de todos los enteros comprendidos entre 100 y 800 que sean múltiplos de 3.

SOLUCIÓN La progresión aritmética es 102, 105, 108, …, 798. Por lo tanto, $l = a + (n - 1)d$, $798 = 102 + (n - 1)3$, $n = 233$, y

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{233}{2}(102 + 798) = 104\,850.$$

22.17 Sobre una superficie horizontal se levanta una rampa de pendiente uniforme por medio de 10 soportes igualmente espaciados. Las alturas de los soportes mayor y menor son 42.5 y 2 pies, respectivamente. Encuentre la altura de cada uno de los soportes.

SOLUCIÓN A partir de $l = a + (n - 1)\,d$, se tiene $42\tfrac{1}{2} = 2 + (10 - 1)\,d$ y $d = 4\tfrac{1}{2}$ pies.
Luego, las alturas son 2, $6\tfrac{1}{2}$, 11, $15\tfrac{1}{2}$, 20, $24\tfrac{1}{2}$, 29, $33\tfrac{1}{2}$, 38, $42\tfrac{1}{2}$ pies, respectivamente.

22.18 Un cuerpo cae libremente, partiendo del reposo, y recorre 16 pies durante el primer segundo, 48 pies en el segundo, 80 pies en el tercero, etc. Encuentre la distancia que recorre durante el decimoquinto segundo y la distancia total que recorre en 15 segundos, partiendo del reposo.

SOLUCIÓN Se tiene que $d = 48 - 16 = 80 - 48 = 32$.

Durante el decimoquinto segundo recorre una distancia $l = a + (n - 1)\,d = 16 + (15 - 1)\,32 = 464$ pies.

La distancia total recorrida en 15 segundos es $S = \dfrac{n}{2}(a + l) = \dfrac{15}{2}(16 + 464) = 3\,600$ pies.

22.19 Se colocan 8 bolas en línea recta, separadas entre sí una distancia de 6 pies. A 6 pies de la primera, al otro lado de las bolas, está situada una persona con una cesta que va andando por la fila recogiéndolas de una en una e introduciéndolas en la misma. Sabiendo que empieza a recogerlas partiendo de la posición en que inicialmente se encuentra, calcule la distancia total que recorrerá hasta que termine la operación.

SOLUCIÓN Se tiene que $a = 2 \cdot 6 = 12$ pies y $l = 2(6 \cdot 8) = 96$ pies. Por lo tanto,

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{8}{2}(12 + 96) = 432 \text{ pies.}$$

22.20 Demuestre que si los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética, su razón es 3 : 4 : 5.

SOLUCIÓN Sean los lados $(a - d)$, a, $(a + d)$, siendo la hipotenusa $(a + d)$.

Se tendrá que $(a + d)^2 = a^2 + (a - d)^2$ o $a = 4d$. De aquí que $(a - d) : a : (a + d) = 3d : 4d : 5d = 3 : 4 : 5$.

22.21 Deduzca la fórmula de la media aritmética (x) entre dos números p y q.

SOLUCIÓN Como p, x, q están en progresión aritmética, se tiene que $x - p = q - x$ o $x = \frac{1}{2}(p + q)$.

22.22 Encuentre la media aritmética entre cada par de los números siguientes:

a) 4 y 56. Media aritmética $= \dfrac{4 + 56}{2} = 30$.

b) $3\sqrt{2}$ y $-6\sqrt{2}$. Media aritmética $= \dfrac{3\sqrt{2} + (-6\sqrt{2})}{2} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

c) $a + 5d$ y $a - 3d$. Media aritmética $= \dfrac{(a + 5d) + (a - 3d)}{2} = a + d$.

22.23 Sitúe 5 medias aritméticas entre 8 y 26.

SOLUCIÓN Se tiene que encontrar una progresión aritmética de la forma 8, —, —, —, —, —, 26; por tanto $a = 8$, $l = 26$ y $n = 7$.

Luego, $l = a + (n - 1)\,d$, $26 = 8 + (7 - 1)\,d$, $d = 3$.

Las cinco medias aritméticas son 11, 14, 17, 20, 23.

22.24 Sitúe un número de medias aritméticas entre 1 y 36, de tal forma que la suma de la progresión aritmética resultante sea 148.

SOLUCIÓN

$$S = \tfrac{1}{2}n(a + l), \quad 148 = \tfrac{1}{2}n(1 + 36), \quad 37n = 296 \quad \text{y} \quad n = 8.$$
$$l = a + (n - 1)\,d, \quad 36 = 1 + (8 - 1)\,d, \quad 7d = 35 \quad \text{y} \quad d = 5.$$

La progresión aritmética completa es 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.

22.25 Determine cuáles de las sucesiones siguientes son progresiones aritméticas:

a) 3, 6, 12, … Sí, puesto que $\dfrac{6}{3} = \dfrac{12}{6} = 2.$ $(r = 2)$

b) 16, 12, 9, … Sí, puesto que $\dfrac{12}{6} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}.$ $\left(r = \dfrac{3}{4}\right)$

c) $-1, 3, -9, \ldots$ Sí, puesto que $\dfrac{3}{-1} = \dfrac{-9}{3} = -3.$ $(r = -3)$

d) 1, 4, 9, … No, puesto que $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{9}{4}.$

e) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}, \ldots$ Sí, puesto que $\dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2/9}{1/3} = \dfrac{2}{3}.$ $\left(r = \dfrac{2}{3}\right)$

f) $2h, \dfrac{1}{h}, \dfrac{1}{2h^3}, \ldots$ Sí, puesto que $\dfrac{1/h}{2h} = \dfrac{1/2h^3}{1/h} = \dfrac{1}{2h^2}.$ $\left(r = \dfrac{1}{2h^2}\right)$

2.26 Deduzca la fórmula

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

para la suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica.

SOLUCIÓN La suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica se puede escribir:

$$(1) \quad S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-l} \qquad (n \text{ términos})$$

Multiplicando (1) por r, se obtiene

$$(2) \quad rS = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad (n \text{ términos})$$

Restando (1) de (2),

$$rS - S = ar^n - a, \quad (r - 1)S = a(r^n - 1) \qquad \text{y} \qquad S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}.$$

22.27 Encuentre el octavo término y la suma de los ocho primeros términos de la progresión 4, 8, 16, …

SOLUCIÓN Se tiene que $a = 4$, $r = 8/4 = 16/8 = 2$, $n = 8$.
El octavo término es $l = ar^{n-1} = 4(2)^{8-1} = 4(2^7) = 4(128) = 512$.
La suma de los ocho primeros términos es

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{4(2^8 - 1)}{2 - 1} = \frac{4(256 - 1)}{1} = 1\,020.$$

22.28 Encuentre el séptimo término y la suma de los siete primeros términos de la progresión 9, −6, 4,…

SOLUCIÓN

Se tiene que $a = 9$, $\quad r = \dfrac{-6}{9} = \dfrac{4}{-6} = -\dfrac{2}{3}$.

Luego el séptimo término es $l = ar^{n-1} = 9\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{7-1} = \dfrac{64}{81}$.

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{9[1 - (-2/3)^7]}{1 - (-2/3)} = \frac{9[1 - (-128/2\,187)]}{5/3} = \frac{463}{81}$$

22.29 El segundo término de una progresión geométrica es 3 y el quinto término es 81/8. Encuentre el octavo término.

SOLUCIÓN

Quinto término $= ar^4 = \dfrac{81}{8}$, segundo término $= ar = 3$. Por lo tanto $\dfrac{ar^4}{ar} = \dfrac{81/8}{3}$, $\quad r^3 = \dfrac{27}{8}$ y $r = \dfrac{3}{2}$.

De aquí que el octavo término $= ar^7 = (ar^4)\, r^3 = \dfrac{81}{8}\left(\dfrac{27}{8}\right) = \dfrac{2\,187}{64}$.

22.30 Encuentre tres números en progresión geométrica cuya suma sea 26 y su producto 216.

SOLUCIÓN Sean los números en progresión geométrica $a/r, a, ar$. Se tiene $(a/r)(a)(ar) = 216$, $a^3 = 216$ y $a = 6$.
Asimismo $a/r + a + ar = 26$, $6/r + 6 + 6r = 26$, $6r^2 - 20r + 6 = 0$ y $r = 1/3, 3$.
Para $r = 1/3$, los números son 18, 6, 2; para $r = 3$, los números son 2, 6, 18.

22.31 El primer término de una progresión geométrica es 375 y el cuarto es 192. Encuentre la razón y la suma de los cuatro primeros términos.

SOLUCIÓN Primer término $= a = 375$, cuarto término $= ar^3 = 192$. Luego $375r^3 = 192$, $r^3 = 64/125$ de donde $r = 4/5$.

La suma de los cuatro primeros términos es

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{375[1 - (4/5)^4]}{1 - 4/5} = 1\,107.$$

22.32 El primer término de una progresión geométrica es 160 y la razón es 3/2. ¿Cuántos términos consecutivos deben tomarse para que su suma sea 2 110?

SOLUCIÓN

$$S = \frac{a\,(r^n - 1)}{1 - r}, \qquad 2\,110 = \frac{160[(3/2)^n - 1]}{3/2 - 1}, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = \frac{211}{32}, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{243}{32} = \left(\frac{3}{2}\right)^5, \qquad n = 5.$$

Los cinco términos consecutivos son 160, 240, 360, 540, 810.

22.33 Una progresión geométrica de razón positiva consta de cuatro términos. Sabiendo que la suma de los dos primeros es 8 y que la correspondiente de los dos últimos es 72, determine dicha progresión.

SOLUCIÓN Los cuatros términos son a, ar, ar^2, ar^3. Por lo tanto $a + ar = 8$ y $ar^2 + ar^3 = 72$.

$$\text{De aquí que } \frac{ar^2 + ar^3}{a + ar} = \frac{ar^2(1 + r)}{a(1 + r)} = r^2 = \frac{72}{8} = 9, \qquad \text{por lo que } r = 3.$$

Puesto que $a + ar = 8$, $a = 2$ y la secuencia es 2, 6, 18, 54.

22.34 Demuestre que x, $x + 3$, $x + 6$ no pueden formar una progresión geométrica.

SOLUCIÓN Si x, $x+ 3$, $x + 6$ es una progresión geométrica, entonces

$$r = \frac{x + 3}{x} = \frac{x + 6}{x + 3}, \qquad x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x \qquad \text{o} \qquad 9 = 0.$$

Como esta igualdad nunca puede ser cierta, x, $x + 3$, $x + 6$ no pueden estar en progresión geométrica.

22.35 Un muchacho gana un centavo el primer día, dos centavos el segundo, cuatro centavos el tercero, ocho el cuarto, etc. ¿Qué cantidad de dinero recibirá al final de 12 días?

SOLUCIÓN Se tiene que $a = 1$, $r = 2$, $n = 12$.

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 2^{12} - 1 = 4\,096 - 1 = 4\,095¢ = \$40.95.$$

22.36 Se estima que la población de una cierta ciudad se incrementará en 10% anual durante cuatro años. ¿En qué tanto por ciento aumentará la población después de los cuatro años?

SOLUCIÓN Sea p la población inicial. Después de un año la población es $1.10p$; después de dos años, $(1.10)^2p$; después de tres años, $(1.10)^3p$; y después de cuatro años, $(1.10)^4p = 1.46p$. Por lo tanto, la población aumentará en 46%.

22.37 De un depósito que contiene 240 galones de alcohol, se extraen 60 galones y se sustituyen por agua. A continuación se extraen 60 galones de la mezcla y se les reemplaza por agua, etc. Encuentre el número de galones de alcohol que habrá en el depósito después de haber efectuado 5 extracciones de 60 galones.

SOLUCIÓN Después de la primera extracción quedan en el depósito $240 - 60 = 180$ galones de alcohol.
Después de la segunda quedan,

$$180\left(\frac{240 - 60}{240}\right) = 180\left(\frac{3}{4}\right) \text{ gal}$$

galones de alcohol, etc.

El número de galones de alcohol que quedan en el depósito después de cada extracción forma una progresión geométrica,

$$180,\ 180\left(\frac{3}{4}\right),\ 180\left(\frac{3}{4}\right)^2, \ldots \ \text{ donde } a = 180,\ r = \frac{3}{4}.$$

Después de la quinta extracción ($n = 5$) quedan:

$$l = ar^{n-1} = 180\left(\frac{3}{4}\right)^4 = 57 \text{ gal}$$

galones de alcohol.

22.38 Se invierten $400 a una tasa de 6% anual. Calcule el capital que se habrá formado al cabo de cinco años si el interés es *a*) anual, *b*) semestral y *c*) trimestral.

SOLUCIÓN Sea P = capital inicial, i = rédito en tanto por ciento, por periodo de tiempo, S = capital acumulado al cabo de n periodos.

Al final del primer periodo: interés $= Pi$, nuevo capital $= P + Pi = P(1 + i)$.

Al final del segundo periodo: interés $= P(1 + i)i$, nuevo capital $= P(1 + i) + P(1 + i)i = \mathrm{P}(1 + i)^2$.

El capital acumulado al cabo de n periodos será, $S = P(1 + i)^n$.

a) Como se cobran los intereses una vez por año, $n = 5$ e $i = 0.06$.

$$S = P(1 + i)^n = 400(1 + 0.06)^5 = 400(1.3382) = \$535.28$$

b) Como se cobran los intereses dos veces por año, $n = 2(5) = 10$ e $i = \frac{1}{2}(0.06) = 0.03$.

$$S = P(1 + i)^n = 400(1 + 0.03)^{10} = 400(1.3439) = \$537.56.$$

c) Como se cobran los intereses cuatro veces por año, $n = 4(5) = 20$ e $i = \frac{1}{4}(0.06) = 0.015$.

$$S = P(1 + i)^n = 400(1 + 0.015)^{20} = 400(1.3469) = \$538.76.$$

22.39 Encuentre el capital (P) que se debe invertir a 4% de interés compuesto semestral para que al cabo de 3.5 años se transforme en un capital (S) de $500.

SOLUCIÓN Como se cobran intereses dos veces por año, $n = 2(3\frac{1}{2}) = 7$(periodos) y el rédito, en tanto por ciento y por periodo es $i = \frac{1}{2}(0.04) = 0.02$.

Por lo tanto $S = P(1 + i)^n$ de donde $P = S(1 + i)^{-n} = 500(1 + 0.02)^{-7} = 500(0.870\ 56) = \$435.28$.

22.40 Deduzca la fórmula de la media geométrica, G, entre dos números p y q.

SOLUCIÓN Como p, G, q están en progresión geométrica, se tiene $G/p = q/G$, $G^2 = pq$ y $G = \pm\sqrt{pq}$.

Se suele tomar $\quad G = \sqrt{pq}$ si p y q son positivos.

y $\quad G = -\sqrt{pq}$ si p y q son negativos.

22.41 Encuentre la media geométrica de los pares de números siguientes:

a) 4 y 9. $\qquad G = \sqrt{4(9)} = 6$

b) -2 y -8. $\qquad G = -\sqrt{(-2)(-8)} = -4$

c) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ y $\sqrt{7} - \sqrt{3}$. $\qquad G = \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} = \sqrt{7 - 3} = 2$

22.42 Demuestre que la media aritmética A de los números positivos p y q es mayor que o igual a su media geométrica G.

SOLUCIÓN La media aritmética de p y q es $A = \frac{1}{2}(p + q)$. La media geométrica de p y q es $G\sqrt{pq}$.
Luego $A - G = \frac{1}{2}(p + q) - \sqrt{pq} = \frac{1}{2}(p - 2\sqrt{pq} + q) = \frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$.
Ahora bien, $\frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{p})^2$ es siempre positivo o cero; luego $A \geq G$. ($A = G$ si y sólo si $p = q$).

22.43 Sitúe dos medias geométricas entre 686 y 2.

SOLUCIÓN Se requiere una progresión geométrica de la forma 686, —, —, 2 donde $a = 686$, $l = 2$, $n = 4$.

Entonces $l = ar^{n-1}$, $2 = 686r^3$, $r^3 = 1/343$ y $r = 1/7$.

Por lo tanto, la progresión geométrica es 686, 98, 14, 2 y las medias son 98, 14.

Nota: En realidad, $r^3 = 1/343$ se satisface para tres valores diferentes de r, uno de ellos real y los otros dos complejos. Aquí prescindimos de las progresiones geométricas con términos complejos.

22.44 Situar cinco medias geométricas entre 9 y 576.

SOLUCIÓN Se tiene que formar la progresión geométrica 9, —, —, —, —, —, 576 siendo $a = 9$, $l = 576$, $n = 7$. Como $l = ar^{n-1}$, $576 = 9r^6$, $r^6 = 64$, $r^3 = \pm 8$ y $r = \pm 2$.

Luego las progresiones son 9, 18, 36, 72, 144, 288, 576 y 9, -18, 36, -72, 144, -288, 576; y las medias correspondientes son 18, 36, 72, 144, 288 y -18, 36, -72, 144, -288.

22.45 Encuentre la suma de las series geométricas siguientes:

a) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \qquad S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-1/2} = 4$

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \cdots \qquad S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1/3}{1-(-2/3)} = \frac{1}{5}$

c) $1 + \frac{1}{1.04} + \frac{1}{(1.04)^2} + \cdots \qquad S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-1/1.04} = \frac{1.04}{1.04-1} = \frac{104}{4} = 26$

22.46 Exprese los números periódicos siguientes por medio de una fracción racional.

a) 0.444 … *b*) 0.4272727 … *c*) 6.305305 … *d*) 0.78367836 …

SOLUCIÓN

a) 0.444… = 0.4 + 0.04 + 0.004 + …, donde $a = 0.4$, $r = 0.1$.

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0.4}{1-0.1} = \frac{0.4}{0.9} = \frac{4}{9}$$

b) 0.4272727… = 0.4 + 0.0272727…
0.0272727… = 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + …, donde $a = 0.027$, $r = 0.01$.

$$S_\infty = 0.4 + \frac{a}{1-r} = 0.4 + \frac{0.027}{1-0.01} = 0.4 + \frac{27}{990} = \frac{4}{10} + \frac{3}{110} = \frac{47}{110}$$

c) 6.305305… = 6 + 0.305305…
0.305305… = 0.305 + 0.000305 + . . . , donde $a = 0.305$, $r = 0.001$.

$$S_\infty = 6 + \frac{a}{1-r} = 6 + \frac{0.305}{1-0.001} = 6 + \frac{305}{999} = 6\frac{305}{999}$$

d) $0.78367836\ldots = 0.7836 + 0.00007836 + \ldots$, donde $a = 0.7836$, $r = 0.0001$.

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0.7836}{1-0.0001} = \frac{7\,836}{9\,999} = \frac{2\,612}{3\,333}$$

22.47 Las distancias recorridas por cierto reloj de péndulo al oscilar sucesivamente forman una progresión geométrica, 16, 12, 9, …pulgadas respectivamente. Calcule la distancia total recorrida por la esferilla del péndulo hasta alcanzar el reposo.

SOLUCIÓN

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{16}{1-3/4} = \frac{16}{1/4} = 64 \text{ pulgadas}$$

22.48 Encuentre el menor número de términos que se deben tomar de la serie $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots$ para que su suma difiera de la suma correspondiente a los infinitos términos en menos de 1/1 000.

SOLUCIÓN Sea S_∞ = suma de la progresión, S_n = suma de n términos. Luego,

$$S_\infty - S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{ar^n}{1-r}.$$

Se desea que

$$\frac{ar^n}{1-r} < \frac{1}{1\,000}, \quad \text{donde } a = 1/3,\ r = 1/2.$$

Luego

$$\frac{(1/3)(1/2)^n}{1-1/2} < \frac{1}{1\,000}, \quad \frac{1}{3(2^n)} < \frac{1}{2\,000}, \quad 3(2^n) > 2\,000, \quad 2^n > 666\frac{2}{3}.$$

Cuando $n = 9$, $2^n < 666\,\frac{2}{3}$; cuando $n = 10$, $2^n > 666\,\frac{2}{3}$. Por lo tanto, se deben tomar por los menos 10 términos.

22.49 Determine cuáles de las sucesiones siguientes son progresiones armónicas

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ es una progresión armónica puesto que $3, 5, 7, \ldots$ es una progresión aritmética.

b) $2, 4, 6, \ldots$ no es una progresión armónica puesto que $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ no es una progresión aritmética.

c) $\frac{1}{12}, \frac{2}{15}, \frac{1}{3}, \ldots$ es una secuencia armónica ya que $12, \frac{15}{2}, 3, \ldots$ es una progresión aritmética.

22.50 Calcule el término número 15 de la progresión armónica $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \ldots$

SOLUCIÓN La progresión aritmética correspondiente es 4, 7, 10, …; su decimoquinto término es $l = a + (n-1)d = 4 + (15-1)3 = 46$.

De aquí que el término número 15 de la progresión armónica sea $\frac{1}{46}$.

22.51 Deduzca la fórmula de la media armónica, H, entre dos números p y q.

SOLUCIÓN Como p, H, q forman una progresión armónica, $\frac{1}{p}, \frac{1}{H}, \frac{1}{q}$ es una progresión aritmética.

Luego $\dfrac{1}{H}-\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{H}, \quad \dfrac{2}{H}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{p+q}{pq}$ y $H=\dfrac{2pq}{p+q}$.

Otro método:

Media armónica entre p y q = recíproco de la media aritmética entre $\dfrac{1}{p}$ y $\dfrac{1}{q}$.

Media aritmética entre $\dfrac{1}{p}$ y $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\right)=\dfrac{p+q}{2pq}$.

De aquí que la media armónica entre p y q sea $=\dfrac{2pq}{p+q}$.

22.52 Encuentre la media armónica entre 3/8 y 4

SOLUCIÓN Media armónica entre $\dfrac{8}{3}$ y $\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{35}{24}$.

Luego la media armónica entre $\dfrac{3}{8}$ y $4 = 24/35$.

O también, mediante la fórmula, media armónica $=\dfrac{2pq}{p+q}=\dfrac{2(3/8)(4)}{3/8+4}=\dfrac{24}{35}$.

22.53 Situar cuatro medias armónicas entre 1/4 y 1/64.

SOLUCIÓN Para insertar cuatro medias en la progresión armónica entre 4 y 64: $l=a+(n-1)d$, $64=4+(6-1)d$, $d=12$.

Por lo tanto, las cuatro medias en la progresión aritmética entre 4 y 64 son 16, 28, 40, 52.

De aquí que las cuatro medias en la progresión armónica entre $\dfrac{1}{4}$ y $\dfrac{1}{64}$ are $\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{28}, \dfrac{1}{40}, \dfrac{1}{52}$.

22.54 Encuentre tres medias armónicas entre 10 y 20.

SOLUCIÓN Para encontrar tres medias armónicas entre $\dfrac{1}{10}$ y $\dfrac{1}{20}$.

$$l=a+(n-1)d, \qquad \frac{1}{20}=\frac{1}{10}+(5-1)d, \qquad d=-\frac{1}{80}.$$

Por lo tanto, las tres medias aritméticas entre $\dfrac{1}{10}$ y $\dfrac{1}{20}$ son $\dfrac{7}{80}, \dfrac{6}{80}, \dfrac{5}{80}$.

De aquí que las tres medias armónicas entre 10 y 20 son $\dfrac{80}{7}, \dfrac{40}{3}$, 16.

22.55 Determine si la sucesión $-1, -4, 2$ es una progresión aritmética, geométrica o armónica.

SOLUCIÓN Como $-4-(-1)\neq 2-(-4)$, no es una progresión aritmética.

Como $\dfrac{-4}{-1}\neq\dfrac{2}{-4}$, no es una progresión geométrica.

Como $\dfrac{1}{-1}, \dfrac{1}{-4}, \dfrac{1}{2}$ es una progresión aritmética, es decir, $\dfrac{1}{-4}-(-1)=\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{-4}\right)$, la sucesión dada es una progresión armónica.

Problemas propuestos

22.56 Encuentre el valor n-ésimo y la suma de los n primeros términos de las progresiones aritméticas siguientes para el valor de n que se indica:

a) $1, 7, 13, \ldots\ n = 100$ *c*) $-26, -24, -22, \ldots\ n = 40$ *e*) $3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots\ n = 37$

b) $2, 5\frac{1}{2}, 9, \ldots\ n = 23$ *d*) $2, 6, 10, \ldots\ n = 16$ *f*) $x - y, x, x + y, \ldots\ n = 30$

22.57 Encuentre la suma de los n primeros términos de las progresiones aritméticas siguientes:

a) $1, 2, 3, \ldots$ *b*) $2, 8, 14, \ldots$ *c*) $1\frac{1}{2}, 5, 8\frac{1}{2}, \ldots$

22.58 El primer término de una progresión aritmética es 4 y el último 34. Sabiendo que la suma de sus términos es 247. Encuentre el número de términos y la razón.

22.59 El último término de una progresión aritmética, que consta de 49 términos es 28. Sabiendo que la razón es 1/2, encuentre el primer término y la suma de todos ellos.

22.60 Encuentre la suma de todos los enteros pares comprendidos entre 17 y 99.

22.61 Encuentre la suma de todos los enteros comprendidos entre 84 y 719 que sean múltiplos de 5.

22.62 Encuentre el número de términos que se deben tomar de la progresión aritmética 3, 7, 11,…, para que su suma sea 1 275.

22.63 Encuentre tres números en progresión aritmética cuya suma sea 48 y la correspondiente a sus cuadrados 800.

22.64 Una pelota rueda por un plano inclinado, partiendo del reposo, de forma que en el primer segundo recorre 3 pulgadas, en el segundo 5 pulgadas, en el tercero 7 pulgadas, etc. Encuentre el tiempo que tardará en recorrer 120 pulgadas.

22.65 Un muchacho cobra \$1 el primer día, \$2 el segundo, \$3 el tercero, etc. Encuentre el dinero que percibirá al cabo de 365 días.

22.66 Encuentre el término n-ésimo de una progresión aritmética sabiendo que la suma de los 40 primeros es 430 y que la suma de los 60 primeros es 945.

22.67 Encuentre una progresión aritmética sabiendo que la suma de sus n primeros términos es igual a $2n^2 + 3n$.

22.68 Encuentre la media aritmética entre *a*) 15 y 41, *b*) -16 y 23, *c*) $2 - \sqrt{3}$ y $4 + 3\sqrt{3}$, *d*) $x - 3y$ y $5x + 2y$.

22.69 *a*) Calcule 4 medias aritméticas entre 9 y 24.
b) Calcule 2 medias entre -1 y 11.
c) Calcule 3 medias entre $x + 2y$ y $x + 10y$.
d) Entre los términos 5 y 26 de una progresión aritmética, encuentre un número de medias tal que la suma de la progresión aritmética resultante sea de 124.

22.70 Encuentre el término n-ésimo y las suma de los n primeros términos de las sucesiones siguientes y para el valor de n que se indica.

a) $2, 3, 9/2, \ldots\ n = 5$ *d*) $1, 3, 9, \ldots\ n = 8$
b) $6, -12, 24, \ldots\ n = 9$ *e*) $8, 4, 2, \ldots\ n = 12$
c) $1, 1/2, 1/4, \ldots\ n = 10$ *f*) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots\ n = 8$

22.71 Calcule la suma de los n primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:

a) $1, 1/3, 1/9, \ldots$ *b*) $4/3, 2, 3, \ldots$ *c*) $1, -2, 4, \ldots$

22.72 El primer término de una progresión geométrica es 3 y el último 48. Sabiendo que cada término es el doble del anterior, encuentre el número de términos y la suma de todos ellos.

22.73 Demuestre que la suma S de los términos de una progresión geométrica cuyo primer término es a, el último es l y la razón r, viene dado por

$$S = \frac{rl - a}{r - 1}.$$

22.74 En una progresión geométrica, el segundo término excede al primero en 4 unidades y la suma del segundo y el tercero es 24. Demuestre que es posible encontrar dos progresiones geométricas que satisfagan estas condiciones y encuentre la suma de los cinco primeros términos de cada una de ellas.

22.75 Determine una progresión geométrica de cuatro términos sabiendo que la razón es positiva, que la suma de los dos primeros términos es 10 y que la suma de los dos últimos es 22 1/2.

22.76 Los dos primeros términos de una progresión geométrica son $b/(1 + c)$ y $b/(1 + c)^2$. Demuestre que la suma de los n primeros términos de esta progresión viene dada por la expresión

$$S = b\left(\frac{1 - (1 + c)^{-n}}{c}\right)$$

22.77 Encuentre la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica: $a - 2b, ab^2 - 2b^3, ab^4 - 2b^5, \ldots$

22.78 El tercer término de una progresión geométrica es 6 y el quinto es 81 veces mayor que el primero. Escriba los cinco primeros términos de la progresión suponiendo que los términos son positivos.

22.79 Encuentre tres números en una progresión geométrica sabiendo que su suma es 42 y su producto 512.

22.80 El tercer término de una progresión geométrica es 144 y el sexto 486. Encuentre la suma de los cinco primeros términos de la progresión.

22.81 Un depósito contiene una solución de sal en agua siendo la masa de sal disuelta igual a 972 libras. Se extrae un tercio de la solución y se reemplaza por agua pura. Una vez agitada la mezcla hasta conseguir su uniformidad, se extrae un tercio de la solución y se reemplaza de nuevo por agua. Encuentre la cantidad de sal que queda en la solución después de la cuarta extracción.

22.82 La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es 26 y la suma de los seis primeros términos 728. Encuentre el término n-ésimo de dicha progresión.

22.83 La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es 14. Sabiendo que si se incrementan los dos primeros en una unidad y se disminuye en la misma cantidad el tercero, los números que resultan forman una progresión aritmética. Establezca la progresión geométrica.

22.84 Determine la media geométrica entre:

a) 2 y 18, *b*) 4 y 6, *c*) 24 y 216, *d*) $a + b$ y $4a + 4b$.

22.85 *a*) Encuentre dos medias geométricas entre 3 y 192.
b) Encuentre cuatro medias geométricas entre $\sqrt{2}$ y 8.
c) La media geométrica de dos números es 8. Si uno de los números es 6, encuentre el otro.

22.86 El primer término de una progresión aritmética es 2, y el primero, tercero y undécimo son también los primeros tres términos de una progresión geométrica. Encuentre la suma de los primeros once términos de la progresión aritmética.

22.87 Encuentre el número de términos que se deben sumar de la progresión aritmética 9, 11, 13,…para que la suma sea igual a la de los nueve primeros términos de la progresión geométrica 3, -6, 12, -24,…

22.88 Calcule cuatro números sabiendo que los tres primeros están en progresión geométrica y los tres últimos en progresión aritmética de razón 6, siendo el primer número igual al cuatro.

22.89 Encuentre dos números cuya diferencia es 32 y cuya media aritmética excede a la geométrica en 4.

22.90 Encuentre la suma de las series geométricas indefinidas siguientes:

a) $3 + 1 + 1/3 + \cdots$ *c*) $1 + 1/2^2 + 1/2^4 + \cdots$ *e*) $4 - 8/3 + 16/9 - \cdots$
b) $4 + 2 + 1 + \cdots$ *d*) $6 - 2 + 2/3 - \cdots$ *f*) $1 + 0.1 + 0.01 + \cdots$

22.91 La suma de los dos primeros términos de una progresión geométrica decreciente es $5/4$ y la suma a infinito es 9/4. Escriba los tres primeros términos de la progresión.

22.92 La suma de términos infinitos de una progresión geométrica decreciente es 3 y las de sus cuadrados es también 3. Escriba los tres primeros términos de la progresión.

22.93 Las distancias sucesivas (en pulgadas) que experimenta un el péndulo de un reloj son 36, 24, 16,… Encuentre la distancia que recorrerá la esferilla hasta alcanzar el reposo.

22.94 Exprese los números periódicos siguientes mediante una fracción racional.

a) $0.121212\cdots$ *c*) $0.270270\cdots$ *e*) $0.1363636\cdots$
b) $0.090909\cdots$ *d*) $1.424242\cdots$ *f*) $0.428571428571428\cdots$

22.95 *a*) Encuentre el octavo término de la progresión armónica 2/3, 1/2, 2/5,….
b) Encuentre el décimo término de la progresión armónica 5,30/7,15/4,…..
c) Encuentre el término *n*-ésimo de la progresión armónica 10/3, 2, 10/7,….

22.96 Calcule la media armónica entre los pares de números siguientes:

a) 3 y 6 *b*) $1/2$ y $1/3$ *c*) $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ *d*) $a + b$ y $a - b$

22.97 *a*) Calcule dos medias en una progresión armónica entre 5 y 10.
b) Calcule cuatro medias en una progresión armónica entre $3/2$ y $3/7$.

22.98 Un móvil se desplaza a velocidad constante *a* entre los puntos *A* y *B* y, acto seguido, va desde *B* hasta *A* a la velocidad constante *b*. Demuestre que la velocidad media del recorrido total viene dada por $2ab/(a + b)$, media armónica entre *a* y *b*. Calcule la velocidad promedio en el supuesto de que $a = 30$ y $b = 60$ pies/segundo.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

22.56 *a*) $l = 595$, $S = 29\,800$ *c*) $l = 52$, $S = 520$ *e*) $l = 57$, $S = 1\,110$
b) $l = 19$, $S = 931\frac{1}{2}$ *d*) $l = 62$, $S = 512$ *f*) $l = x + 28y$, $S = 30x + 405y$

22.57 *a*) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *b*) $n(3n - 1)$ *c*) $\dfrac{n(7n-1)}{4}$

22.58 $n = 13$, $d = 5/2$

22.59 $a = 4$, $S = 784$

22.60 2 378

22.61 50 800

22.62 25

22.63 12, 16, 20

22.64 10 segundos

22.65 \$ 667.95

22.66 $\dfrac{n+1}{2}$

22.67 5, 9, 13, 17, … n-ésimo término $= 4n + 1$

22.68 *a*) 28, *b*) $7/2$, c) $3 + \sqrt{3}$, *d*) $3x - y/2$

22.69 *a*) 12, 15, 18, 21 *c*) $x + 4y, x + 6y, x + 8y$
b) 3, 7 *d*) La progresión geométrica es 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26

22.70 *a*) $l = 81/8, S = 211/8$ *c*) $l = 1/512, S = 1\,023/512$ *e*) $l = 1/256$, S $= 4\,095/256$
b) $l = 1\,536, S = 1\,026$ *d*) $l = 2\,187, S = 3\,280$ *f*) $l = 81, S = 120 + 40\sqrt{3}$

22.71 *a*) $\dfrac{3}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$ *b*) $\dfrac{8}{3}\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1\right]$ *c*) $\dfrac{1-(-2)^n}{3}$

22.72 $n = 5, S = 93$

22.74 2, 6, 18,… y $S = 242$; 4, 8, 16,… y $S = 124$

22.75 4, 6, 9, $27/2$

22.77 $\dfrac{(a-2b)+(b^{2n}-1)}{b^2-1}$

22.78 $2/3$, 2, 6, 18, 54

22.79 2, 8, 32

22.80 844

22.81 192 libras

22.82 $2 \cdot 3^{n-1}$

22.83 2, 4, 8

22.84 *a*) 6 *b*) $2\sqrt{6}$ *c*) -8 *d*) $2a + 2b$

22.85 *a*) 12, 48 *b*) $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}$ *c*) $32/3$

22.86 187 o 22

22.87 19

22.88 8, -4, 2, 8

22.89 18, 50

22.90 *a*) $9/2$ *b*) 8 *c*) $4/3$ *d*) $9/2$ *e*) $12/5$ *f*) $10/9$

22.91 $3/4, 1/2, 1/3$

22.92 $3/2, 3/4, 3/8$

22.93 108 pulgadas

22.94 *a*) $4/33$ *b*) $1/11$ *c*) $10/37$ *d*) $47/33$ *e*) $3/22$ *f*) $3/7$

22.95 *a*) $1/5$ *b*) 2 *c*) $\dfrac{10}{2n+1}$

22.96 *a*) 4 *b*) $2/5$ *c*) $6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$ *d*) $\dfrac{a^2 - b^2}{a}$

22.97 *a*) $6,\ 15/2$ *b*) $1,\ 3/4,\ 3/5,\ 1/2$

22.98 40 pies/ segundo

LOGARITMOS 23

23.1 DEFINICIÓN DEL LOGARITMO

Si $b^x = N$, siendo N un número positivo y b un número positivo diferente de 1, entonces el exponente x es el logaritmo de N en la base b y se escribe $x = \log_b N$.

EJEMPLO 23.1 Escriba $3^2 = 9$ utilizando notación con logaritmos.

Puesto que $3^2 = 9$, entonces 2 es el logaritmo de 9 en base 3, es decir, $2 = \log_3 9$.

EJEMPLO 23.2 Evalúe $\log_2 8$.

$\log_2 8$ es el número x al que se debe elevar la base 2 a fin de obtener 8, es decir, $2^x = 8$, $x = 3$. De aquí que $\log_2 8 = 3$.

Tanto $b^x = N$ como $x = \log_b N$ son relaciones equivalentes; $b^x = N$ se llama la *forma exponencial* y $x = \log_b N$ la *forma logarítmica* de la relación. Como consecuencia, a cada *ley de los exponentes* corresponde una *ley de los logaritmos.*

23.2 LEYES DE LOS LOGARITMOS

I. El logaritmo del producto de dos números positivos M y N es igual a la suma de los logaritmos de los números, es decir,

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N.$$

II. El logaritmo del cociente de dos números positivos M y N es igual a la diferencia de los logaritmos de los números, es decir,

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N.$$

III. El logaritmo de la *p-ésima* potencia de un número positivo M es igual a p multiplicado por el logaritmo del número, es decir,

$$\log_b M^p = p \log_b M.$$

EJEMPLOS 23.3 Aplique las leyes de los logaritmos a cada expresión.

a) $\log_2 3(5)$ *b*) $\log_{10} \frac{17}{24}$ *c*) $\log_7 5^3$ *d*) $\log_{10} \sqrt[3]{2}$

a) $\log_2 3(5) = \log_2 3 + \log_2 5$

b) $\log_{10} \frac{17}{24} = \log_{10} 17 - \log_{10} 24$

c) $\log_7 5^3 = 3 \log_7 5$

d) $\log_{10} \sqrt[3]{2} = \log_{10} 2^{1/3} = \frac{1}{3} \log_{10} 2$

23.3 LOGARITMOS DECIMALES

El sistema de logaritmos cuya base es 10 recibe el nombre de sistema logarítmico común. Cuando no se escriba la base, se sobreentiende que ésta es igual a 10. Por ejemplo, $\log 25 = \log_{10} 25$.

Número N	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1 000	10 000
Forma exponencial N	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}
$\log N$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Es evidente que $10^{1,5377}$ será un número mayor que 10 (que es 10^1), pero menor que 100 (que es 10^2). En realidad, $10^{1,5377} = 34.49$; de aquí que $\log 34.49 = 1.5377$.

El dígito antes del punto decimal es la *característica* del logaritmo y la parte decimal *mantisa*. En el ejemplo anterior, la característica del logaritmo es 1 y la mantisa es .5377.

La mantisa del logaritmo de un número se encuentra en tablas en donde aparece sin la coma decimal. Ha de entenderse, sin embargo, que dicha mantisa es la parte decimal, siempre positiva, de un número cuya parte entera (característica) no figura en las tablas.

La característica se determina por inspección a partir del mismo número de acuerdo con las reglas siguientes.

1. Si el número es mayor que 1, la característica es positiva y uno *menos* que el número de dígitos antes del punto decimal. Por ejemplo,

Número	5 297	348	900	34.8	60	5.764	3
Característica	3	2	2	1	1	0	0

2. Si el número es menor que 1, la característica es negativa y es uno *más* que el número que ceros de haya inmediatamente después del punto decimal. El signo negativo de la característica se puede escribir de dos maneras: *a*) encima de la característica, por ejemplo, $\overline{1}$, $\overline{2}$, etc.; *b*) en la forma 9 – 10, 8 – 10, etc. Más concretamente, la característica del logaritmo del número 0.3485 es $\overline{1}$, o bien 9 – 10; la correspondiente a 0.0513 es $\overline{2}$, o bien 8 – 10; y la de 0.0024 es $\overline{3}$, o bien 7 – 10.

23.4 UTILIZACIÓN DE LA TABLA DE LOGARITMOS DECIMALES

Para encontrar el logaritmo decimal de un número positivo se emplea la tabla de logaritmos decimales que se encuentra en el apéndice A.

Suponga que se necesita conocer el logaritmo del número 728. Se busca en la tabla de logaritmos el número 72 en la columna N y siguiendo la horizontal, debajo de la columna 8, aparece el número 8 621, que es la mantisa del logaritmo en cuestión. Como la característica es 2, se podrá escribir $\log 728 = 2.8621$. (Quiere decir que $720 = 10^{2.8621}$).

La mantisa de log 72.8, log 7.28, log 0.728, los 0.0728, etc., es 0.8621, sin embargo, sus características son diferentes. Por lo tanto,

$$\begin{array}{ll} \log 728 = 2.8621 & \log 0.728 = \overline{1}.8621 \text{ o } 9.8621 - 10 \\ \log 72.8 = 1.8621 & \log 0.0728 = \overline{2}.8621 \text{ o } 8.8621 - 10 \\ \log 7.28 = 0.8621 & \log 0.007\,28 = \overline{3}.8621 \text{ o } 7.8621 - 10 \end{array}$$

Si el número tiene cuatro cifras, la mantisa se obtiene interpolando por el método de las partes proporcionales.

EJEMPLO 23.4 Encuentre el valor de log 4.638.

La característica es 0. La mantisa se encuentra como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Mantisa de } \log 4\,640 &= .6665 \\ \text{Mantisa de } \log 4\,630 &= .6656 \\ \hline \text{Diferencia tabular} &= .0009 \end{aligned}$$

$.8 \times$ diferencia tabular $= .000\,72$ o $.0007$ con cuatro cifras decimales.
Mantisa de log 4 638 $= 0.6656 + .0007 = .6663$ a cuatro dígitos
De aquí que log 4.638 $= 0.6663$.

La mantisa de log 4638, log 463.8, log 46.38, etc., es 6663, pero las características son diferentes. Por lo tanto,

$$\begin{array}{llll}
\log 4\,638 = 3.6663 & \log 0.4638 & = \bar{1}.6663 & \text{o } 9.6663 - 10 \\
\log 463.8 = 2.6663 & \log 0.046\,38 & = \bar{2}.6663 & \text{o } 8.6663 - 10 \\
\log 46.38 = 1.6663 & \log 0.004\,638 & = \bar{3}.6663 & \text{o } 7.6663 - 10 \\
\log 4.638 = 0.6663 & \log 0.000\,463\,8 & = \bar{4}.6663 & \text{o } 6.6663 - 10
\end{array}$$

El antilogaritmo es el número correspondiente a un logaritmo dado. “El antilogaritmo de 3” significa “el número cuyo logaritmo es 3”; en este caso, es fácil deducir que se trata del número 1 000.

EJEMPLOS 23.5 Encuentre el valor de N.

a) $\log N = 1.9058$ *b*) $\log N = 7.8657 - 10$ *c*) $\log N = 9.3842 - 10$.

a) En la tabla, la mantisa .9058 corresponde al número 805. Como la característica de log N es 1, el número tendrá dos cifras enteras; por lo tanto, $N = 80.5$ (o antilog $1.9058 = 80.5$).
b) En la tabla, la mantisa .8657 corresponde al número 734. Como la característica es 7 – 10, el número tendrá dos ceros inmediatamente después de la coma; por lo tanto, $N = 0.00734$ (es decir, antilog $7.8657 - 10 = 0.00734$).
c) Como la mantisa .3842 no aparece en las tablas, se debe utilizar la interpolación.

$$\begin{array}{rl@{\qquad}rl}
\text{Mantisa de log } 2\,430 & = .3856 & \text{Mantisa dada} & = .3842 \\
\text{Mantisa de log } 2\,420 & = \underline{.3838} & \text{Mantisa más próxima menor} & = \underline{.3838} \\
\text{Diferencia tabular} & = .0018 & \text{Diferencia} & = .0004
\end{array}$$

Luego, $2\,420 + \frac{4}{18}(2\,430 - 2\,420) = 2\,422$ con cuatro dígitos y $N = 0.2422$.

23.5 LOGARITMOS NATURALES

El sistema de logaritmos cuya base es la constante e se llama sistema de logaritmos naturales. Cuando se desea indicar que la base de un logaritmo es e, se escribe ln. Por lo tanto, $\ln 25 = \log_e 25$.

La forma exponencial de $\ln a = b$ es $e^b = a$. El número e es un irracional y puede expandirse como e = 2.718 281 828 450 45……

23.6 UTILIZACIÓN DE LA TABLA DE LOGARITMOS NATURALES

Para encontrar el logaritmo natural de un número positivo se utiliza la tabla de logaritmos del apéndice B.

Para encontrar el logaritmo natural de un número que se encuentra comprendido en el rango del 1 al 10, por ejemplo, el 5.26, se busca en la columna N el valor en cuestión, después hacia la derecha hasta la columna cuyo encabezado es .06 para obtener el valor 1.6601. Por lo tanto, $\ln 5.26 = 1.6601$. Esto significa que $5.26 = e^{1.6601}$.

Si se quisiera encontrar el logaritmo natural de un número mayor que 10 y menor que 1, se escribe el número en notación científica, se aplican las leyes de los logaritmos y se utiliza la tabla de logaritmos naturales y el hecho de que $\ln 10 = 2.3026$.

EJEMPLOS 23.6 Encuentre el logaritmo natural de cada número.

a) 346 *b*) 0.0217

a)
$$\begin{aligned}
\ln 346 &= \ln(3.46 \times 10^2) \\
&= \ln 3.46 + \ln 10^2 \\
&= \ln 3.46 + 2\ln 10 \\
&= 1.2413 + 2(2.3026) \\
&= 1.2413 + 4.6052 \\
\ln 346 &= 5.8465
\end{aligned}$$

b) $\ln 0.0217 = \ln(2.17 \times 10^{-2})$
$= \ln 2.17 + \ln 10^{-2}$
$= \ln 2.17 - 2\ \ln 10$
$= 0.7747 - 2(2.3026)$
$= 0.7747 - 4.6052$
$\ln 0.0217 = -3.8305$

El valor de ln 4.638 no puede encontrarse directamente a partir de la tabla de logaritmos naturales, ya que tiene cuatro cifras significativas, sin embargo, puede utilizarse la interpolación con el objetivo de encontrarlo.

$$\begin{aligned} \ln 4.640 &= 1.5347 \\ \ln 4.630 &= \underline{1.5326} \\ \text{Diferencia tabular} &= 0.0021 \end{aligned}$$

$0.8 \times$ diferencia tabular $= = 0.8 \times 0.0021 = 0.001\ 68$ o 0.0017 con cuatro cifras decimales.

Por lo tanto, $4.638 = \ln 4.630 + 0.0017 = 1.5326 + 0.0017 = 1.5343$.

El antilogaritmo de un logaritmo natural es el número que tiene como logaritmo el número dado. El procedimiento para encontrar el antilogaritmo de un número natural menor que 0 o mayor que 2.3026, requiere de la suma o resta de múltiplos de $\ln 10 = 2.3026$ con el fin de trasladar el logaritmo natural en el rango de 0 a 2.3026 el cual puede encontrarse en la tabla del apéndice B.

EJEMPLOS 23.7 Encuentre el valor de N.

a) $\ln N = 2.1564$ *b*) $\ln N = -4.9705$ *c*) $\ln N = 1.8869$

a) $\ln N = 2.1564$ se encuentra entre 0 y 2.3026, por lo que se busca en la tabla de logaritmos naturales el valor 2.1564. Está en la tabla, por lo que se obtiene N a partir de la suma de los números que encabezan la fila y la columna correspondientes al 1.1564. Por lo tanto, $N =$ antilogaritmo de $2.1564 = 8.64$.

b) Puesto que $\ln N =$ -4.9705 es menor a 0, se debe escribir como un número entre 0 y 2.3026 menos un múltiplo de $2.3026 = \ln 10$. Puesto que si se suma 3 veces 2.3026 a -4.9705 se obtiene un número positivo entre 0 y 2.3026, se puede reescribir -4.9705 como $1.9373 - 3(2.3026)$.

$$\begin{aligned} \ln N &= -4.9705 \\ &= 1.9373 - 3(2.3026) \\ &= \ln 6.94 - 3 \ln 10 \qquad \text{Nota: } \ln 6.94 = 1.9373 \text{ y } \ln 10 = 2.3026 \\ &= \ln 6.94 + \ln 10^{2\ 3} \\ &= \ln(6.94 \times 10^{-3}) \\ \ln N &= \ln 0.006\ 94 \\ N &= 0.006\ 94 \end{aligned}$$

c) Puesto que $\ln N = 1.8869$ se encuentra entre 0 y 2.3026, se busca el valor 1.8869 en la tabla de logaritmos naturales, sin embargo, no aparece en dicha tabla. Se tendrá que proceder a interpolar a fin de encontrar N.

$$\begin{aligned} \ln 6.600 &= 1.8871 & \ln N &= 1.8869 \\ \ln 6.590 &= \underline{1.8856} & \ln 6.590 &= \underline{1.8856} \\ \text{Diferencia tabular } &= 0.0015 & \text{diferencia } &= 0.0013 \end{aligned}$$

$$N = 6.590 + \frac{13}{15}(6.600 - 6.590) = 6.590 + 0.009 = 6.599$$

23.7 BÚSQUEDA DE LOGARITMOS MEDIANTE LA CALCULADORA

Si el número del que se desea encontrar el logaritmo tiene cuatro o más dígitos significativos, se puede redondear el número a cuatro cifras significativas y utilizar las tablas de logaritmos y la interpolación o bien se puede utilizar una calculadora gráfica o científica con el fin de encontrar el logaritmo del número dado. El uso de la calculadora arrojará un resultado más preciso.

Una calculadora científica puede utilizarse para encontrar logaritmos y antilogaritmos con base 10 o base e. Las calculadoras científicas tienen teclas para las funciones log e ln y las funciones inversas de éstas producen los antilogaritmos.

Gran parte del cálculo que alguna vez se hacía utilizando logaritmos, puede hacerse de forma directa utilizando una calculadora científica. Las ventajas de resolver un problema en la calculadora son que los números rara vez tienen que ser redondeados y que éste puede resolverse de una manera rápida y precisa.

Problemas resueltos

23.1 Exprese cada una de las formas exponenciales siguientes en forma logarítmica:

a) $p^q = r$, *b*) $2^3 = 8$, *c*) $4^2 = 16$, *d*) $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$, *e*) $8^{-2/3} = \dfrac{1}{4}$.

SOLUCIÓN

a) $q = \log_p r$, *b*) $3 = \log_2 8$, *c*) $2 = \log_4 16$, *d*) $-2 = \log_3 \dfrac{1}{9}$. *e*) $-\dfrac{2}{3} = \log_8 \dfrac{1}{4}$

23.2 Exprese cada una de las formas logarítmicas siguientes en forma exponencial:

a) $\log_5 25 = 2$, *b*) $\log_2 64 = 6$, *c*) $\log_{1/4} \dfrac{1}{16} = 2$, *d*) $\log_a a^3 = 3$, *e*) $\log_r 1 = 0$.

SOLUCIÓN

a) $5^2 = 25$, *b*) $2^6 = 64$, *c*) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$, *d*) $a^3 = a^3$, *e*) $r^0 = 1$

23.3 Determine el valor de las expresiones siguientes:

a) $\log_4 64$. Sea $\log_4 64 = x$; por lo tanto $4^x = 64 = 4^3$ y $x = 3$.
b) $\log_3 81$. Sea $\log_3 81 = x$; por lo tanto $3^x = 81 = 3^4$ y $x = 4$.
c) $\log_{1/2} 8$. Sea $\log_{1/2} 8 = x$; por lo tanto $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$, $(2^{-1})^x = 2^3$, $2^{-x} = 2^3$ y $x = -3$.
d) $\log \sqrt[3]{10} = x$, $10^x = \sqrt[3]{10} = 10^{1/3}$, $x = 1/3$
e) $\log_5 125\sqrt{5} = x$, $5^x = 125\sqrt{5} = 5^3 \cdot 5^{1/2} = 5^{7/2}$, $x = 7/2$

23.4 Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $\log_3 x = 2$, $3^2 = x$, $x = 9$
b) $\log_4 y = -\dfrac{3}{2}$, $4^{-3/2} = y$, $y = \dfrac{1}{8}$
c) $\log_x 25 = 2$, $x^2 = 25$, $x = \pm 5$. Puesto que las bases son positivas, la solución es $x = 5$.
d) $\log_y \dfrac{9}{4} = -\dfrac{2}{3}$, $y^{-2/3} = \dfrac{9}{4}$, $y^{2/3} = \dfrac{4}{9}$, $y = \left(\dfrac{4}{9}\right)^{3/2} = \dfrac{8}{27}$ es la solución requerida.
e) $\log(3x^2 + 2x - 4) = 0$, $10^0 = 3x^2 + 2x - 4$, $3x^2 + 2x - 5 = 0$, $x = 1, -5/3$.

23.5 Demuestre las leyes de los logaritmos.

SOLUCIÓN

Sea $M = b^x$ y $N = b^y$; por lo tanto $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$.

I. Puesto que $MN = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$, por lo tanto $\log_b MN = x + y = \log_b M + \log_b N$.

II. Puesto que $\dfrac{M}{N} = \dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$, por lo tanto $\log_b \dfrac{M}{N} = x - y = \log_b M - \log_b N$.

III. Puesto que $M^p = (b^x)^p = b^{px}$, por lo tanto $\log_b M^p = px = p \log_b M$.

23.6 Exprese cada una de las expresiones siguientes como una suma algebraica de logaritmos, utilizando las leyes I, II y III.

a) $\log_b UVW = \log_b (UV)W = \log_b UV + \log_b W = \log_b U + \log_b V + \log_b W$

b) $\log_b \dfrac{UV}{W} = \log_b UV - \log_b W = \log_b U + \log_b V - \log_b W$

c) $\log \dfrac{XYZ}{PQ} = \log XYZ - \log PQ = \log X + \log Y + \log Z - (\log P + \log Q)$

$= \log X + \log Y + \log Z - \log P - \log Q$

d) $\log \dfrac{U^2}{V^3} = \log U^2 - \log V^3 = 2 \log U - 3 \log V$

e) $\log \dfrac{U^2 V^3}{W^4} - = \log U^2 V^3 - \log W^4 = \log U^2 + \log V^3 - \log W^4$

$= 2 \log U + 3 \log V - 4 \log W$

f) $\log \dfrac{U^{1/2}}{V^{2/3}} = \log U^{1/2} - \log V^{2/3} = \dfrac{1}{2} \log U - \dfrac{2}{3} \log V$

g) $\log_e \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{y^3}} = \log_e \dfrac{x^{3/2}}{y^{3/4}} = \log_e x^{3/2} - \log_e y^{3/4} = \dfrac{3}{2} \log_e x - \dfrac{3}{4} \log_e y$

h) $\log \sqrt[4]{a^2 b^{-3/4} c^{1/3}} = \dfrac{1}{4} \left\{ 2 \log a - \dfrac{3}{4} \log b + \dfrac{1}{3} \log c \right\}$

$= \dfrac{1}{2} \log a - \dfrac{3}{16} \log b + \dfrac{1}{12} \log c$

23.7 Dado que $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 5 = 0.6990$, $\log 7 = 0.8451$ (todos con base 10) calculados con cuatro cifras decimales, evalúe las expresiones siguientes:

a) $\log 105 = \log (3 \cdot 5 \cdot 7) = \log 3 + \log 5 + \log 7 = 0.4771 + 0.6990 + 0.8451 = 2.0212$

b) $\log 108 = \log (2^2 \cdot 3^3) = 2 \log 2 + 3 \log 3 = 2(0.3010) + 3(0.4771) = 2.0333$

c) $\log \sqrt[3]{72} = \log \sqrt[3]{3^2 \cdot 2^3} = \log (3^{2/3} \cdot 2) = \dfrac{2}{3} \log 3 + \log 2 = 0.6191$

d) $\log 2.4 = \log \dfrac{24}{10} = \log \dfrac{3 \cdot 2^3}{10} = \log 3 + 3 \log 2 - \log 10$

$= 0.4771 + 3(0.3010) - 1 = 0.3801$

e) $\log 0.0081 = \log \dfrac{81}{10^4} = \log 81 - \log 10^4 = \log 3^4 - \log 10^4$

$= 4 \log 3 - 4 \log 10 = 4(0.4771) - 4 = -2.0916$ o $7.9084 - 10$

Nota: En forma exponencial, esto significa $10^{-2.0916} = 0.0081$.

23.8 Exprese las operaciones siguientes como un solo logaritmo (la base es 10 a menos que se especifique otra cosa).

a) $\log 2 - \log 3 + \log 5 = \log \dfrac{2}{3} + \log 5 = \log \dfrac{2}{3}(5) = \log \dfrac{10}{3}$

b) $3 \log 2 - 4 \log 3 = \log 2^3 - \log 3^4 = \log \dfrac{2^3}{3^4} = \log \dfrac{8}{81}$

c) $\dfrac{1}{2} \log 25 - \dfrac{1}{3} \log 64 + \dfrac{2}{3} \log 27 = \log 25^{1/2} - \log 64^{1/3} + \log 27^{2/3}$

$= \log 5 - \log 4 + \log 9 = \log \dfrac{5}{4} + \log 9 = \log \dfrac{5}{4}(9) = \log \dfrac{45}{4}$

d) $\log 5 - 1 = \log 5 - \log 10 = \log \dfrac{5}{10} = \log \dfrac{1}{2}$

e) $2\log 3 + 4\log 2 - 3 = \log 3^2 + \log 2^4 - 3\log 10 = \log 9 + \log 16 - \log 10^3$

$$= \log(9 \cdot 16) - \log 10^3 = \log\frac{9 \cdot 16}{10^3} = \log 0{:}144$$

f) $3\log_a b - \frac{1}{2}\log_a c = \log_a b^3 + \log_a c^{-1/2} = \log_a(b^3c^{-1/2})$

23.9 En cada una de las ecuaciones siguientes, exprese la incógnita indicada en términos de las otras cantidades.

a) $\log_2 x = y + c : x.$ $\quad x = 2^{y+c}$

b) $\log_a = 2\log b : a.$ $\quad \log a = \log b^2,\ a = b^2$

c) $\log_e I = \log_e I_0 - t : I.$ $\quad \log_e I = \log_e I_0 - t\log_e e = \log_e I_0 + \log_e e^{-t}$

$$= \log_e I_0 e^{-t},\ I = I_0 e^{-t}$$

d) $2\log x + 3\log y = 4\log z - 2 : y.$

Despejando $\log\ y$, $3\log y = 4\log z - 2 - 2\log x$ y

$$\log y = \frac{4}{3}\log z - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\log x = \log z^{4/3} + \log 10^{-2/3} + \log x^{-2/3} = \log z^{4/3}10^{-2/3}x^{-2/3}.$$

De aquí que $y = 10^{-2/3}x^{-2/3}z^{4/3}$.

e) $\log(x+3) = \log x + \log 3 : x.$ $\quad \log(x+3) = \log 3x, \quad x + 3 = 3x, \quad x = 3/2$

23.10 Determine la característica del logaritmo común de cada uno de los números siguientes:

a) 57	*c*) 5.63	*e*) 982.5	*g*) 186 000	*i*) 0.7314	*k*) 0.0071
b) 57.4	*d*) 35.63	*f*) 7 824	*h*) 0.71	*j*) 0.0325	*l*) 0.0003

SOLUCIÓN

a) 1	*c*) 0	*e*) 2	*g*) 5	*i*) 9 − 10	*k*) 7 − 10
b) 1	*d*) 1	*f*) 3	*h*) 9 − 10	*j*) 8 − 10	*l*) 6 − 10

23.11 Verifique cada uno de los logaritmos comunes siguientes:

a) log 87.2 = 1.9405		*h*) log 6.753 = 0.8295 (8 293 + 2)	
b) log 37 300 = 4.5717		*i*) log 183.2 = 2.2630 (2 625 + 5)	
c) log 753 = 2.8768		*j*) log 43.15 = 1.6350 (6 345 + 5)	
d) log 9.21 = 0.9643		*k*) log 876 400 = 5.9427 (9 425 + 2)	
e) log 0.382 = 9.5821 − 10		*l*) log 0.2548 = 9.4062 − 10 (4 048 + 14)	
f) log 0.00 159 = 7.2014 − 10		*m*) log 0.043 72 = 8.6407 − 10 (6 405 + 2)	
g) log 0.0256 = 8.4082 − 10		*n*) log 0.009 848 = 7.9933 − 10 (9 930 + 3)	

23.12 Verifique cada una de las expresiones siguientes:

a) Antilog 3.8531 = 7 130	*h*) Antilog 2.6715 = 469.3 (3/9 × 10 = 3 aprox.)
b) Antilog 1.4997 = 31.6	*i*) Antilog 4.1853 = 15 320 (6/28 × 10 = 2 aprox.)
c) Antilog 9.8267 − 10 = 0.671	*j*) Antilog 0.9245 = 8.404 (2/5 × 10 = 4)
d) Antilog 7.7443 − 10 = 0.005 55	*k*) Antilog $\bar{1}$:6089 = 0.4064 (4/11 × 10 = 4 aprox.)
e) Antilog 0.1875 = 1.54	*l*) Antilog 8.8907 − 10 = 0.077 75 (3/6 × 10 = 5)
f) Antilog $\bar{2}$:3927 = 0.0247	*m*) Antilog 1.2000 = 15.85 (13/27 × 10 = 5 aprox.)
g) Antilog 4.9360 = 86 300	*n*) Antilog 7.2409 − 10 = 0.001742 (4/25 × 10 = 2 aprox.)

23.13 Escriba cada uno de los números siguientes como una potencia de 10: *a*) 893, *b*) 0.358.

SOLUCIÓN

a) Se requiere un valor de x tal que $10^x = 893$. Entonces $x = \log 893 = 2.9509$ y $893 = 10^{2.9509}$.

b) Se requiere un valor de x tal que $10^x = 0.358$.
Entonces $x = \log 0.358 = 9.5539 - 10 = -0.4461$ y $0.358 = 10^{-0.4461}$.

Calcule cada una de las operaciones siguientes mediante el uso de logaritmos.

23.14 $P = 3.81 \times 43.4$

SOLUCIÓN

$$\log P = \log 3.81 + \log 43.4$$

$$\begin{array}{rl} \log 3.81 &= 0.5809 \\ (+) \quad \log 43.4 &= \underline{1.6375} \\ \log P &= 2.2184 \end{array}$$

De aquí que $P = \text{antilog } 2.2184 = 165.3$.
Observe el significado de los exponentes en el cálculo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 3.81 \times 43.4 &= 10^{0.5809} \times 10^{1.6375} \\ &= 10^{0.5809+1.6375} = 10^{2.2184} = 165.3 \end{aligned}$$

23.15 $P = 73.42 \times 0.004\,62 \times 0.5143$

SOLUCIÓN

$$\log P = \log 73.\ 42 + \log 0.004\,62 + \log 0.5143$$

$$\begin{array}{rl} \log 73.\ 42 &= 1.8658 \\ (+) \log 0.004\,62 &= 7.6646 - 10 \\ (+) \log 0.5143 &= \underline{9.7112 - 10} \end{array}$$

$$\log P = 19.2416 - 20 = 9.2416 - 10.$$

De aquí que $P = 0.1744$.

23.16 $P = \dfrac{784.6 \times 0.0431}{28.23}$

SOLUCIÓN

$$\log P = \log 784.6 + \log 0.0431 - \log 28.23$$

$$\begin{array}{rl} \log 784.6 &= 2.8947 \\ (+) \ \log 0.0431 &= \underline{8.6345 - 10} \\ & \quad 11.5292 - 10 \\ (-) \ \log 28.23 &= \underline{\quad 1.4507 \quad} \\ \log P &= 10.0785 - 10 = 0.0785 \\ P &= 1.198 \end{array}$$

23.17 $P = (7.284)^5$

SOLUCIÓN

$$\log P = 5 \log 7.284 = 5(0.8623) = 4{:}3115 \quad \text{y} \quad P = 20\ 490{:}$$

32.18 $P = \sqrt[3]{0{:}8532}$

SOLUCIÓN

$$\log P = \frac{1}{5}\log 0.8532 = \frac{1}{5}(9.9310 - 10) = \frac{1}{5}(49.9310 - 50) = 9.9862 - 10 \quad \text{y} \quad P = 0.9687.$$

32.19 $P = \dfrac{(78.41)^3\sqrt{142.3}}{\sqrt[4]{0.1562}}$

SOLUCIÓN

$$\log P = 3\log 78.41 + \frac{1}{2}\log 142.3 - \frac{1}{4}\log 0.1562.$$

$$\begin{array}{rlcrl}
 & \text{Numerador } N & & & \text{Denominador } D \\
3\log 78.41 & = 3(1.8944) = 5.6832 & & \frac{1}{4}\log 0.1562 & = \frac{1}{4}(9.1937 - 10) \\
(+)\frac{1}{2}\log 142.3 & = \frac{1}{2}(2.1532) = \underline{1.0766} & & & = \frac{1}{4}(39.1937 - 40) \\
\log N & = 6.7598 = 16.7598 - 10 & & \log D & = 9.7984 - 10 \\
(-)\log D & = \underline{9.7984 - 10} & & & \\
\log P & = 6.9614 & & &
\end{array}$$

$$P = 9\ 150\ 000 \qquad \text{o} \qquad 9.15 \times 10^6$$

32.20 El periodo T de una péndulo simple de longitud l está dado por la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Encuentre T (en segundos) si $l = 281.3$ cm y $g = 981.0$ cm/seg^2.

SOLUCIÓN

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 6.283\sqrt{\frac{281.3}{981.0}}$$

$$\begin{aligned}
\log T &= \log 6.283 + \tfrac{1}{2}(\log 281.3 - \log 981.0) \\
\log 6.283 &= \qquad\qquad\quad 0.7982 \\
(+)\tfrac{1}{2}\log 281.3 &= \tfrac{1}{2}(2.4492) = \underline{1.2246} \\
&\qquad\qquad\qquad\ 2.0228 \\
(-)\tfrac{1}{2}\log 981.0 &= \tfrac{1}{2}(2.9917) = \underline{1.4959} \\
\log T &= 0.5269 \\
T &= 3.365 \text{ segundos}
\end{aligned}$$

32.21 Despeje x: $5^{2x+2} = 3^{5x-1}$.

SOLUCIÓN

Expresando con logaritmos, $(2x + 2)\log 5 = (5x - 1)\log 3$.

Por lo tanto $2x\log 5 - 5x\log 3 = -\log 3 - 2\log 5$,

$x(2\log 5 - 5\log 3) = -\log 3 - 2\log 5$,

y $x = \dfrac{\log 3 + 2\log 5}{5\log 3 - 2\log 5} = \dfrac{0.4771 + 2(0.6990)}{5(0.4771) - 2(0.6990)} = \dfrac{1.8751}{0.9875}$.

$$\begin{aligned}
\log 1.875 &= 10.2730 - 10 \\
(-)\log 0.9875 &= \underline{9.9946 - 10} \\
\log \quad x &= 0.2784 \\
x &= 1.898
\end{aligned}$$

23.22 Encuentre el valor de cada uno de los logaritmos naturales siguientes:

a) ln 5.78 *c*) ln 3.456 *e*) ln 190 *g*) ln 2839
b) ln 8.62 *d*) ln 4.643 *f*) ln 0.0084 *h*) ln 0.014 85

SOLUCIÓN

a) $\ln 5.78 = 1.7544$ de la tabla de logaritmos naturales

b) $\ln 8.62 = 2.1541$ de la tabla de logaritmos naturales

c)
$$\begin{aligned}\ln 3.456 &= \ln 3.45 + 0.6(\ln 3.46 - \ln 3.45)\\ &= 1.2384 + 0.6(1.2413 - 1.2384)\\ &= 1.2384 + 0.6(0.0029)\\ &= 1.2384 + 0.0017\\ \ln 3.456 &= 1.2401\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\ln 4.643 &= \ln 4.64 + 0.3(\ln 4.65 - \ln 4.64)\\ &= 1.5347 + 0.3(1.5369 - 1.5347)\\ &= 1.5347 + 0.3(0.0022)\\ &= 1.5347 + 0.0007\\ \ln 4.643 &= 1.5354\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}\ln 190 &= \ln(1.90 \times 10^2)\\ &= \ln 1.90 + \ln 10^2\\ &= \ln 1.90 + 2\ln 10\\ &= 0.6419 + 2(2.3026)\\ &= 0.6419 + 4.6052\\ \ln 190 &= 5.2471\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}\ln 0.0084 &= \ln(8.40 \times 10^{-3})\\ &= \ln 8.40 + \ln 10^{-3}\\ &= \ln 8.40 - 3\ln 10\\ &= 2.1282 - 3(2.3026)\\ &= 2.1282 - 6.9078\\ \ln 0.0084 &= -4.7796\end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned}\ln 2839 &= \ln(2.839 \times 10^3)\\ &= \ln 2.839 + \ln 10^3\\ &= [\ln 2.83 + 0.9(\ln 2.84 - \ln 2.83)] + 3\ln 10\\ &= [1.0403 + 0.9(1.0438 - 1.0403)] + 3(2.3026)\\ &= [1.0403 + 0.9(0.0035)] + 6.9078\\ &= [1.0403 + 0.0032] + 6.9078\\ &= 1.0435 + 6.9078\\ \ln 2839 &= 7.9513\end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned}\ln 0.014\,85 &= \ln(1.485 \times 10^{-2})\\ &= \ln 1.485 + \ln 10^{-2}\\ &= [\ln 1.48 + 0.5(\ln 1.49 - \ln 1.48)] - 2\ln 10\\ &= [0.3920 + 0.5(0.3988 - 0.3920)] - 2\,(2.3026)\\ &= [0.3920 + 0.5(0.0068)] - 4.6052\\ &= [0.3920 + 0.0034] - 4.6052\\ &= 0.3954 - 4.6052\\ \ln 0.014\,85 &= -4.2098\end{aligned}$$

23.23 Encuentre el valor de N.

a) $\ln N = 2.4146$ *b*) $\ln N = 0.9847$ *c*) $\ln N = -1.7654$

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned}
\ln N &= 2.4146\\
&= 0.1120 + 2.3026\\
&= \ln\left(1.11 + \frac{0.1120 - 0.1044}{0.1133 - 0.1044}(1.12 - 1.11)\right) + \ln 10\\
&= \ln\left(1.11 + \frac{0.0076}{0.0089}(0.01)\right) + \ln 10\\
&= \ln(1.11 + 0.009) + \ln 10\\
&= \ln 1.119 + \ln 10\\
&= \ln(1.119 \times 10)\\
\ln N &= \ln 11.19\\
N &= 11.19
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\ln N &= 0.9847\\
&= \ln\left(2.67 + \frac{0.9847 - 0.9821}{0.9858 - 0.9821}(2.68 - 2.67)\right)\\
&= \ln\left(2.67 + \frac{0.0026}{0.0037}(0.01)\right)\\
&= \ln(2.67 + 0.007)\\
\ln N &= \ln 2.677\\
N &= 2.677
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\ln N &= -1.7654\\
&= 0.5372 - 2.3026\\
&= \ln\left(1.71 + \frac{0.5372 - 0.5365}{0.5423 - 0.5365}(1.72 - 1.71)\right) - \ln 10\\
&= \ln\left(1.71 + \frac{0.0007}{0.0058}(0.01)\right) + \ln 10^{-1}\\
&= \ln(1.71 + 0.001) + \ln 10^{-1}\\
&= \ln 1.711 + \ln 10^{-1}\\
&= \ln(1.711 \times 10^{-1})\\
\ln N &= \ln 0.1711\\
N &= 0.1711
\end{aligned}$$

Problemas propuestos

23.24 Evalúe: *a*) $\log_2 32$, *b*) $\log \sqrt[4]{10}$, *c*) $\log_3 1/9$, *d*) $\log_{1/4} 16$, *e*) $\log_e e^x$, *f*) $\log_8 4$.

23.25 Despeje la incógnita en cada ecuación.

a) $\log_2 x = 3$ *c*) $\log_x 8 = -3$ *e*) $\log_4 x^3 = 3/2$
b) $\log y = -2$ *d*) $\log_3(2x + 1) = 1$ *f*) $\log_{(x-1)}(4x - 4) = 2$

23.26 Exprese como una suma algebraica de logaritmos.

a) $\log \dfrac{U^3V^2}{W^5}$ *b*) $\log \sqrt{\dfrac{2x^3y}{z^7}}$ *c*) $\ln \sqrt[3]{x^{1/2}y^{-1/2}}$ *d*) $\log \dfrac{xy^{-3/2}z^3}{a^2b^{-4}}$

23.27 Despeje la incógnita que se indica expresándola en términos de las otras cantidades.

a) $2\log x = \log 16$; x *c*) $\log_3 F = \log_3 4 - 2\log_3 x$; F
b) $3\log y + 2\log 2 = \log 32$; y *d*) $\ln(30 - U) = \ln 30 - 2t$; U

23.28 Demuestre que si a y b son positivas y $\neq 1$, $(\log_a b)(\log_b a) = 1$.

23.29 Demuestre que $10^{\log N} = N$, donde $N > 0$.

23.30 Determine la característica del logaritmo común de cada uno de los números siguientes:

a) 248 *d*) 0.162 *g*) 1.06 *j*) 40.60 *m*) 7 000 000
b) 2.48 *e*) 0.0006 *h*) 6000 *k*) 237.63 *n*) 0.000 007
c) 0.024 *f*) 18.36 *i*) 4 *l*) 146.203

23.31 Encuentre el logaritmo común de cada uno de los números siguientes:

a) 237 *d*) 0.263 *g*) 10 400 *j*) 6 000 000 *m*) 1
b) 28.7 *e*) 0.086 *h*) 0.00 607 *k*) 23.70 *n*) 1 000
c) 1.26 *f*) 0.007 *i*) 0.000 000 728 *l*) 6.03

23.32 Encuentre el antilogaritmo de cada una de los números siguientes:

a) 2.8802 *c*) 0.6946 *e*) 8.3160 − 10 *g*) 4.6618 *i*) $\bar{1}.9484$
b) 1.6590 *d*) $\bar{2}.9042$ *f*) 7.8549 − 10 *h*) 0.4216 *j*) 9.8344 − 10

23.33 Calcule el logaritmo común de cada número mediante interpolación.

a) 1 463 *c*) 86.27 *e*) 0.6041 *g*) 1.006 *i*) 460.3
b) 810.6 *d*) 8.106 *f*) 0.046 22 *h*) 300.6 *j*) 0.003 001

23.34 Calcule el antilogaritmo de cada número mediante interpolación.

a) 2.9060 *c*) 1.6600 *e*) 3.7045 *g*) 2.2500 *i*) $\bar{1}.4700$
b) $\bar{1}.4860$ *d*) $\bar{1}.9840$ *f*) 8.9266 − 10 *h*) 0.8003 *j*) 1.2925

23.35 Escriba cada número como una potencia de 10: *a*) 45.4 *b*) 0.005 278.

23.36 Evalúe:

a) $(42.8)(3.26)(8.10)$

b) $\dfrac{(0.148)(47.6)}{284}$

c) $\dfrac{(1.86)(86.7)}{(2.87)(1.88)}$

d) $\dfrac{2\,453}{(67.2)(8.55)}$

e) $\dfrac{5\,608}{(0.4536)(11\,000)}$

f) $\dfrac{(3.92)^3(72.16)}{\sqrt[4]{654}}$

g) $3.14\sqrt{11.65/32}$

h) $\sqrt{\dfrac{906}{(3.142)(14.6)}}$

i) $\sqrt{\dfrac{(1\,600)(3\,10.6)^2}{(7\,290)}}$

j) $\sqrt[3]{\dfrac{(5.52)(2\,610)}{(7.36)(3.142)}}$

23.37 Resuelva la ecuación de hidráulica siguiente:

$$\frac{20.0}{14.7} = \left(\frac{0.0613}{x}\right)^{1.32}.$$

23.38 Despeje x:

a) $3^x = 243$ *c*) $2^{x+2} = 64$ *e*) $x^{-3/4} = 8$ *g*) $7x^{-1/2} = 4$ *i*) $5^{x-2} = 1$
b) $5^x = 1/125$ *d*) $x^{-2} = 16$ *f*) $x^{-2/3} = 1/9$ *h*) $3^x = 1$ *j*) $2^{2x+3} = 1$

23.39 Resuelva las ecuaciones exponenciales siguientes: *a*) $4^{2x-1} = 5^{x+2}$, *b*) $3^{x-1} = 4 \cdot 5^{1-3}x$.

23.40 Encuentre los logaritmos naturales siguientes:

a) ln 2.367 *b*) ln 8.532 *c*) ln 4 875 *d*) ln 0.000 189 4

23.41 Encuentre N, el antilogaritmo del número dado

a) $\ln N = 0.7642$ *b*) $\ln N = 1.8540$ *c*) $\ln N = 8.4731$ *d*) $\ln N = 26.2691$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

23.24 *a*) 5 *b*) $1/4$ *c*) -2 *d*) -2 *e*) x *f*) $2/3$

23.25 *a*) 8 *b*) 0.01 *c*) $1/2$ *d*) 1 *e*) 2 *f*) 5

23.26 *a*) $3\log U + 2\log V - 5\log W$ *c*) $\frac{1}{6}\ln x - \frac{1}{6}\ln y$

b) $\frac{1}{2}\log 2 + \frac{3}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y - \frac{7}{2}\log z$ *d*) $\log x - \frac{3}{2}\log y + 3\log z - 2\log a + 4\log b$

23.27 *a*) 4 *b*) 2 *c*) $F = 4/x^2$ *d*) $U = 30(1 - e^{-2t})$

23.30 *a*) 2 *c*) $\bar{2}$ *e*) $\bar{4}$ *g*) 0 *i*) 0 *k*) 2 *m*) 6
b) 0 *d*) $\bar{1}$ *f*) 1 *h*) 3 *j*) 1 *l*) 2 *n*) $\bar{6}$

23.31 *a*) 2.3747 *d*) $\bar{1}.4200$ *g*) 4.0170 *j*) 6.7782 *m*) 0.0000
b) 1.4579 *e*) $\bar{2}.9345$ *h*) $\bar{3}.7832$ *k*) 1.3747 *n*) 3.0000
c) 0.1004 *f*) $7.8451 - 10$ *i*) $\bar{7}.8621$ *l*) 0.7803

23.32 *a*) 759 *c*) 4.95 *e*) 0.0207 *g*) 45 900 *i*) 0.888
b) 45.6 *d*) 0.0802 *f*) 0.007 16 *h*) 2.64 *j*) 0.683

23.33 *a*) 3.1653 *c*) 1.9359 *e*) $\bar{1}.7811$ *g*) 0.0026 *i*) 2.6631
b) 2.9088 *d*) 0.9088 *f*) $8.6648 - 10$ *h*) 2.4780 *j*) $7.4773 - 10$

23.34 *a*) 805.4 *c*) 45.71 *e*) 5064 *g*) 177.8 *i*) 0.2951
b) 0.3062 *d*) 0.9638 *f*) 0.084 45 *h*) 6.314 *j*) 19.61

23.35 *a*) $10^{1.6571}$ *b*) $10^{-2.2776}$

23.36 *a*) 1 130 *c*) 29.9 *e*) 1.124 *g*) 1.90 *i*) 145.5
b) 0.0248 *d*) 4.27 *f*) 860 *h*) 4.44 *j*) 8.54

23.37 0.0486

23.38 *a*) 5 *c*) 4 *e*) $1/16$ *g*) $49/16$ *i*) 2
b) -3 *d*) $\pm 1/4$ *f*) ± 27 *h*) 0 *j*) $-3/2$

23.39 *a*) 3.958 (*b*) 0.6907

23.40 *a*) 0.8616 *b*) 2.1438 *c*) 8.4919 *d*) -8.5717

23.41 *a*) 2.147 *b*) 6.385 *c*) 4784 *d*) 0.001 894

24 APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS Y EXPONENTES

24.1 INTRODUCCIÓN

Los logaritmos se utilizan principalmente en la resolución de ecuaciones exponenciales y en las que las variables se encuentran relacionadas logarítmicamente. Para resolver ecuaciones en las que la variable se encuentra en el exponente, en general se comienza cambiando la expresión de la forma exponencial a la logarítmica.

24.2 INTERÉS SIMPLE

El interés es el dinero que se paga por el uso de una cantidad de dinero llamada capital. El interés usualmente se paga al final de intervalos de tiempo especificados, por ejemplo, mensual, trimestral semestral o anualmente. La suma del capital y el interés recibe el nombre de capital final.

El interés simple, I, del capital, P, por un periodo de tiempo en años, a una tasa de interés por año r, está dado por la fórmula $I = Prt$, y el capital final A, está dado por $A = P + Prt$ o $A = P(1 + rt)$.

EJEMPLO 24.1 Si una persona pide prestados $800 a 8% anual por un periodo de dos años y medio, ¿qué cantidad de interés deberá pagar por dicho préstamo?

$$I = Prt$$
$$I = \$800(0.08)(2.5)$$
$$I = \$160$$

EJEMPLO 24.2 Si una persona invierte $3 000 a 6% anual por un periodo de cinco años, ¿qué cantidad de dinero rendirá dicha inversión al final de cinco años?

$$A = P + Prt$$
$$A = \$3\,000 + \$3\,000(0.06)(5)$$
$$A = \$3\,000 + \$900$$
$$A = \$3\,900$$

24.3 INTERÉS COMPUESTO

El interés compuesto significa que se paga de manera periódica durante el plazo del préstamo, lo cual resulta en un nuevo capital al final de cada lapso.

Si el capital P se invierte por un periodo de t años a un interés anual r, recalculado n veces por año, entonces el capital final A, o balance final, viene dado por:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

EJEMPLO 24.3 Encuentre la cantidad final de una inversión si se invierten \$20 000 a 6% de interés compuesto mensual por un periodo de tres años.

$$\begin{aligned}
A &= P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \\
A &= 20\,000\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12(3)} \\
A &= 20\,000(1 + 0.005)^{36} \\
A &= 20\,000(1.005)^{36} \\
\log A &= \log\ 20\,000(1.005)^{36} \\
\log A &= \log\ 20\,000 + 36 \log 1.005 \\
\log A &= 4.3010 + 36(0.002\,15) \\
\log A &= 4.3010 + 0.0774 \\
\log A &= 4.3784 \\
A &= \text{antilog}\ 4.3784 \\
A &= 2.39 \times 10^4 \qquad \log 2.39 = 0.3784 \text{ y } \log 10^4 = 4 \\
A &= \$23\,900
\end{aligned}$$

Cuando el interés se comprime con más y más frecuencia, se llega a una situación de interés compuesto continuo. Si un capital P, se invierte por un periodo de t años a una tasa de interés anual r, compuesto continuamente, entonces el capital final A, o balance final, está dado por,

$$A = Pe^{rt}$$

EJEMPLO 24.4 Encuentre el capital final de una inversión si se invierten \$20 000 a 6% compuesto continuamente por un periodo de tres años.

$$\begin{aligned}
A &= Pe^{rt} \\
A &= 20\,000e^{0.06(3)} \\
A &= 20\,000e^{0.18} \\
\ln A &= \ln 20\,000e^{0.18} \\
\ln A &= \ln 20\,000 + \ln e^{0.18} \\
\ln A &= \ln(2.00 \times 10^4) + 0.18 \ln e \\
\ln A &= \ln 2.00 + 4\ \ln 10 + 0.18(1) \qquad \ln e = 1 \\
\ln A &= 0.6931 + 4(2.3026) + 0.18 \qquad \ln 2.00 = 0.6931 \text{ y } \ln 10 = 2.3026 \\
\ln A &= 10.0835 \\
\ln A &= 0.8731 + 4(2.3026)
\end{aligned}$$

$$\ln A = \ln\left(2.39 + \frac{0.8731 - 0.8713}{0.8755 - 0.8713}(2.40 - 2.39)\right) + 4\ln 10$$

$$\ln A = \ln\left(2.39 + \frac{0.0018}{0.0042}(0.01)\right) + \ln 10^4$$

$$\ln A = \ln(2.39 + 0.004) + \ln 10^4$$

$$\ln A = \ln 2.394 + \ln 10^4$$

$$\ln A = \ln(2.394 \times 10^4)$$

$$\ln A = \ln 23\,940$$

$$A = \$23\,940$$

Resolviendo los ejemplos 24.3 y 24.4 se observa que las respuestas tienen cuatro cifras significativas. Sin embargo, el uso de las tablas de logaritmos y la interpolación generan un margen de error. Asimismo, se pueden tener problemas si el interés es compuesto diariamente, ya que cuando se divide r entre n, el resultado puede ser cero si se redondea a tres cifras. Para resolver este problema y obtener una mejor precisión, se pueden utilizar tablas de logaritmos de cinco cifras, calculadoras o computadoras. En general, los bancos y otros negocios utilizan las computadoras y calculadoras con el fin de obtener el grado de precisión que deseen.

EJEMPLO 24.5 Utilice la calculadora científica o gráfica para encontrar el capital final de una inversión si se invierten \$20 000 a 6% de interés compuesto mensual por un periodo de tres años.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = \$20\,000\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12(3)}$$

$$A = \$20\,000(1.005)^{36} \qquad \text{utilice la tecla de exponenciación para calcular } (1.005)^{36}$$

$$A = \$23\,933.61$$

Aproximando a centavos, el capital final se ha incrementado \$33.61 respecto al capital final que se calculó en el ejemplo 24.3. Es posible calcular la respuesta redondeada a centavos, a la vez que se pudo calcular el resultado redondeado a diez dólares en el ejemplo 24.3

EJEMPLO 24.6 Utilice la calculadora científica o gráfica para encontrar el capital final de una inversión si se invierten \$20 000 a 6% de interés compuesto continuo por un periodo de 3 años.

$$A = Pe^{rt}$$

$$A = \$20\ 000e^{0.06(3)}$$

$$A = \$20\ 000e^{0.18} \qquad \text{utilice la función inversa de } \ln x \text{ para calcular } e^{0.18}$$

$$A = \$23\ 944.35$$

Aproximando a centavos, el capital final se ha incrementado \$4.35 respecto al capital final que se calculó en el ejemplo 24.4. Este alto grado de precisión se logró gracias a que la calculadora realiza los cálculos con más cifras decimales en cada operación y después redondea la respuesta. En estos ejemplos, se redondea a dos cifras decimales, ya que las centésimas son las unidades más pequeñas de dinero que poseen una utilidad práctica. La mayoría de las calculadoras calculan con 8, 10 y 12 cifras significativas al realizar las operaciones.

24.4 APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS

El volumen, L, de un sonido (en decibeles) que percibe el oído humano depende del cociente de la intensidad, I, de dicho sonido entre el umbral, I_0, de escucha del oído humano promedio.

$$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

EJEMPLO 24.7 Encuentre el volumen de un sonido que posee una intensidad 10 000 veces el umbral de escucha del oído humano promedio.

$$
\begin{aligned}
L &= 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \\
L &= 10 \log\left(\frac{10\,000 I_0}{I_0}\right) \\
L &= 10 \log 10\ 000 \\
L &= 10\ (4) \\
L &= 40 \text{ decibeles}
\end{aligned}
$$

Los químicos utilizan el potencial hidrógeno, pH, de una solución para medir si grado de alcalinidad o de basicidad. El pH del agua destilada tiene un valor aproximado de 7 y se le llama ácido, sin embargo si su pH baja de 7 se le llama base. Si $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno en mols por litro, el pH está dado por la fórmula:

$$\text{pH} = -\log\,[H^+]$$

EJEMPLO 24.8 Encuentre el pH de la solución cuya concentración de iones de hidrógeno es 5.32×10^{-5} moles por litro.

$$
\begin{aligned}
\text{pH} &= -\log[H^+] \\
\text{pH} &= -\log(5.32 \times 10^{-5}) \\
\text{pH} &= -[\log 5.32 + \log 10^{-5}] \\
\text{pH} &= -\log 5.32 - (-5)\log 10 \qquad \log 10 = 1 \\
\text{pH} &= -\log 5.32 + 5(1) \\
\text{pH} &= -0.7259 + 5 \\
\text{pH} &= 4.2741 \\
\text{pH} &= 4.3
\end{aligned}
$$

Los sismólogos utilizan la escala de Richter para medir y reportar la magnitud de los terremotos. La magnitud o número de Richter de un terremoto depende del cociente de la intensidad, I, de un terremoto entre la intensidad de referencia, Io, que es el movimiento más pequeño de la tierra que puede registrarse en un sismógrafo. Los números de Richter a menudo se redondean a la cifra de las décimas o las centésimas y está dado por la fórmula:

$$R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

EJEMPLO 24.9 Si se determina que la intensidad de un terremoto es 50 000 veces la intensidad de referencia, ¿cuál es su lectura en la escala de Richter?

$$
\begin{aligned}
R &= \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \\
R &= \log\left(\frac{50\,000 I_0}{I_0}\right) \\
R &= \log 50\,000 \\
R &= 4.6990 \\
R &= 4.70
\end{aligned}
$$

24.5 APLICACIONES DE LOS EXPONENTES

El número e está implícito en muchas funciones que se presentan en la naturaleza. La curva de crecimiento de muchos materiales puede describirse por medio de la ecuación de crecimiento exponencial:

$$A = A_0 e^{rt}$$

donde A_0 es la cantidad inicial del material, r es la tasa de crecimiento anual, t es el tiempo en años y A es la cantidad de material al final del tiempo.

EJEMPLO 24.10 La población de un país fue de 2 400 000 habitantes en 1990 y tiene un crecimiento anual de 3%. Si el crecimiento es exponencial, ¿cuál será su población en el año 2000?

$$\begin{aligned}
A &= A_0 e^{rt} \\
A &= 2\,400\,000 e^{(0.03)(10)} \\
A &= 2\,400\,000 e^{0.3} & N &= e^{0.3} \\
A &= 2\,400\,000(1.350) & \ln N &= 0.3 \ln e \\
A &= 3\,240\,000 & \ln N &= 0.3 \\
& & N &= 1.350
\end{aligned}$$

La ecuación de decaimiento o en declive es parecida a la del crecimiento excepto que el exponente es negativo.

$$A = A_0 e^{-rt}$$

donde A_0 es la cantidad inicial, r es la tasa anual de decaimiento, t es el tiempo en años y A es la cantidad al final.

EJEMPLO 24.11 Se sabe que cierto trozo de madera contiene 100 gramos de carbono 14 cuando se corta de un árbol. Si la tasa de decaimiento del carbono 14 es 0.0124 % anual, ¿cuánto carbono 14 quedará en la madera después de 200 años?

$$\begin{aligned}
A &= A_0 e^{-rt} \\
A &= 100 e^{-0.000\,124\,(200)} & N &= e^{-0.0248} \\
A &= 100 e^{-0.0248} & \ln N &= -0.0248 \\
A &= 100(0.9755) & \ln N &= \ln 2.2778 - 2.3026 \\
A &= 97.55 \text{ gramos} & \ln N &= \ln 9.755 - \ln 10 \\
& & \ln N &= \ln (9.755 \times 10^{-1}) \\
& & \ln N &= \ln 0.9755 \\
& & N &= 0.9755
\end{aligned}$$

Problemas resueltos

24.1 Una persona pide un préstamo de \$400 para pagar en 2 años a un interés simple de 3%. Encuentre el capital final que se requiere para pagar el préstamo al cabo de los 2 años.

SOLUCIÓN

Interés $I = Prt = 400(0.03)(2) = \$24$. Cantidad $A =$ capital $P +$ interés $I = \$424$.

24.2 Encuentre el interés I y al capital final A de los casos siguientes:

a) \$600 durante 8 meses (2/3 del año) a 4%.
b) \$1 562.60 durante 3 años, 4 meses (10/3 del año) a 3.5%.

SOLUCIÓN

a) $I = Prt = 600(0.04)(2/3) = \$16.$ $A = P + I = \$616.$
b) $I = Prt = 1\,562.60(0.035)(10/3) = \$182.30.$ $A = P + I = \$1\,744.90.$

24.3 ¿Qué capital invertido a 4% por un periodo de 5 años dará como rendimiento una cantidad de $1 200?

SOLUCIÓN

$$A = P(1 + rt) \quad \text{o} \quad P = \frac{A}{1 + rt} = \frac{1\,200}{1 + (0.04)(5)} = \frac{1\,200}{1.2} = \$1\,000.$$

El capital de $1 000 se llama el valor presente de $1 200. Dicho de otra manera, devolver $1 200 dentro de 5 *años* a 4% de interés simple equivale a pagar $1 000 *hoy*.

24.4 ¿Cuál es la tasa de interés que generará $1 000 de ganancia sobre un capital de $800 en 5 años?

SOLUCIÓN

$$A = P(1 + rt) \quad \text{o} \quad r = \frac{A - P}{Pt} = \frac{1\,000 - 800}{800(5)} = 0.05 \text{ o } 5\%.$$

24.5 Una persona solicita un préstamo de $200. Para ello se dirige al banco y le informan que la tasa de interés es de 5%, pero que tiene que pagar los intereses por anticipado y al cabo de un año tiene que devolver los $200. ¿Qué tasa de interés está pagando esta persona en realidad?

SOLUCIÓN

El interés simple de $200 en 1 año a 5% es $I = 200(0.05)(1) = \$10$. Por lo tanto, recibe $\$200 - \$10 = \$190$. Como debe devolver $200 después de un año, $P = \$190$, $A = \$200$, $t = 1$ año. Por lo tanto,

$$r = \frac{A - P}{Pt} = \frac{200 - 190}{190(1)} = 0.0526,$$

Es decir, la tasa de interés efectiva es de 5.26%.

24.6 Un comerciante pide un préstamo de $4 000 con la condición de que al final de cada trimestre pague $200 sobre el capital más el interés simple de 6% del capital que adeuda en cada momento. Encuentre la cantidad total que tiene que devolver.

SOLUCIÓN

Puesto que $4 000 es la cantidad que tendrá que pagar (sin incluir los intereses) a una tasa de $200 cada trimestre, le tomará $4\,000/200(4) = 5$ años, es decir, tendrá que efectuar 20 pagos.

Interés que paga en la 1a. entrega (por lo 3 primeros meses)	$= 4\,000(0.06)(\frac{1}{4}) = \$60.00.$
Interés que paga en la 2a. entrega	$= 3\,800(0.06)(\frac{1}{4}) = \$57.00.$
Interés que paga en al 3a. entrega	$= 3\,600(0.06)(\frac{1}{4}) = \$54.00.$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$
Interés que paga en el 20a. entrega	$= 200(0.06)(\frac{1}{4}) = \$3.00.$

El interés total es $60 + 57 + 54 + \cdots + 9 + 6 + 3$, que representa la suma de los términos de una progresión aritmética cuyo valor es $S = (n/2)(a + l)$, donde a = primer término, l = último término y n = número de términos.

Por lo tanto, $S = (20/2)(60 + 3) = \$630$ con lo que la cantidad total que ha de devolver es $4 630.

24.7 ¿Cuál será el capital que se formará al cabo de 2 años sobre una cantidad de $500 depositados en el banco a un interés compuesto de 2% acumulándose los intereses al capital cada seis meses?

SOLUCIÓN

Método 1. Sin aplicar la fórmula.

Interés al final del 1er. medio año $= 500(0.02)(\tfrac{1}{2}) = \$5.00$.
Interés al final del 2do. medio año $= 505(0.02)(\tfrac{1}{2}) = \$5.05$.
Interés al final del 3er. medio año $= 510.05(0.02)(\tfrac{1}{2}) = \$5.10$.
Interés al final del 4to. medio año $= 515.15(0.02)(\tfrac{1}{2}) = \$5.15$.
Interés total $= \$20.30$. Capital final $= \$520.30$.

Método 2. Aplicando al fórmula.

$P = \$500$, $i =$ tasa por periodo $= 0.02/2 = 0.01$. $n =$ número de periodos $= 4$.

$$A = P(1 + \mathrm{i})n = 500(1.01)4 = 500(1.0406) = \$520.30.$$

Nota: $(1.01)^4$ puede evaluarse mediante la fórmula del binomio, logaritmos o tablas.

24.8 Encuentre el interés compuesto y el capital final que generan \$2 800 en 8 años a 5% trimestral.

SOLUCIÓN

$A = P(1 + \mathrm{i})n = 2\,800(1 + 0.05/4)32 = 2\,800(1.0125)32 = 2\,800(1.4881) = \$4\,166.68$.
Interés $= A \quad P = \$4\,166.68 - \$2\,800 = \$1\,366.68$.

24.9 ¿Qué tasa de interés compuesto al año es lo mismo que la tasa de interés de 6% compuesto al semestre?

SOLUCIÓN

Cantidad del capital P en un año a una tasa de $r = P(1 + r)$.
Cantidad del capital P en un año a una tasa de 6% compuesto semestralmente $= P(1 + 0.03)^2$.
Las cantidades son iguales si $P(1 + r) = P(1.03)^2$, $1 + r = (1.03)^2$, $r = 0.0609$ o 6.09%.
La tasa de interés i por año cuando los intereses se acumulan un número de veces por año recibe el nombre de *tasa nominal*. La tasa de interés r cuando los intereses se acumulan una vez al año y que dé lugar a los mismos intereses que en el caso anterior, recibe el nombre de *tasa efectiva*. En este ejemplo, el 6% que se acumula semestralmente es el interés nominal y el 6.09% es la tasa efectiva.

24.10 Deduzca la fórmula que expresa al valor de la tasa efectiva en función de la tasa nominal.

SOLUCIÓN

Sea $r =$ tasa efectiva de interés
$i =$ tasa de interés anual acumulada k veces al año, es decir, la tasa nominal.

Cantidad formada a partir de una capital P en 1 año a una tasa $r = P(1 + r)$.
Cantidad formada a partir de una capital P a una tasa i, acumulándose los intereses k veces al año $= P(1 + i/k)^k$.
Las cantidades son iguales si $P(1 + r) = P(1 + i/k)^k$.
De aquí que $r = (1 + i/k)^k - 1$.

24.11 La población de un país crece a una tasa de 4% anual compuesto. A esta tasa, ¿en cuánto tiempo se duplicará la población?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
A &= P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \\
2P &= P(1+0.04)^{t} \qquad\qquad n = 1 \\
2 &= (1.04)^{t} \\
\log 2 &= t\log(1.04) \\
t &= \frac{\log 2}{\log 1.04} \\
t &= \frac{0.3010}{0.0170} \\
t &= 17.7 \text{ años}
\end{aligned}$$

24.12 Si \$1 000 se invierten a 10% de interés compuesto acumulable, ¿en cuánto tiempo se triplicará la inversión?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
A &= Pe^{rt} \\
3\,000 &= 1\,000e^{0.10t} \\
3 &= e^{0.10t} \\
\ln 3 &= 0.10t \qquad\qquad \ln e = 1 \\
t &= \frac{\ln 3}{0.10} \\
t &= \frac{1.0986}{0.10} \\
t &= 10.986 \\
t &= 11.0
\end{aligned}$$

24.13 Encuentre el pH de la sangre si la concentración de iones de hidrógeno es 3.98×10^{-8}.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\text{pH} &= -\log[\text{H}^{+}] \\
\text{pH} &= -\log(3.98 \times 10^{-8}) \\
\text{pH} &= -\log 3.98 - (-8)\log 10 \\
\text{pH} &= -0.5999 + 8 \\
\text{pH} &= 7.4001 \\
\text{pH} &= 7.40
\end{aligned}$$

24.14 En 1989, en San Francisco, se un terremoto con una magnitud de 6.90. ¿De qué forma se compara la intensidad de dicho terremoto con la intensidad de referencia?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
R &= \log\frac{I}{I_0} \\
6.90 &= \log\frac{I}{I_0} \\
\log\frac{I}{I_0} &= 6.90
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \text{antilog } 6.90 & \text{antilog } 0.9000 &= 7.94 + \frac{0.9000 - 0.8998}{0.9004 - 0.8998}(0.01) \\ I &= (\text{antilog } 6.90)I_0 & &= 7.94 + \frac{0.0002}{0.0006}(0.01) \\ I &= (7.943 \times 10^6)I_0 & &= 7.94 + 0.003 \\ I &= 7\,943\,000 I_0 & \text{antilog } 0.9000 &= 7.943 \\ & & \text{antilog } 6.9000 &= 7.943 \times 10^6 \end{aligned}$$

24.15 La población mundial se incrementó de 2.5 miles de millones en 1950 a 5 miles de millones en 1987. Si el crecimiento fue exponencial, ¿cuál fue la tasa de crecimiento anual?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} A &= A_0 e^{rt} \\ 5.0 &= 2.5e^{r(37)} \\ 2 &= e^{37r} \\ \ln 2 &= 37r \ \ln e \\ 0.6931 &= 37r(1) \\ 0.6931 &= 37r \\ 0.01873 &= r \\ r &= 0.0187 \\ r &= 1.87\% \end{aligned}$$

24.16 En Nigeria, la tasa de deforestación es de 5.25% anual. Si la disminución de los bosques en Nigeria es exponencial, ¿cuánto tiempo tendrá que pasar antes de que solamente quede 25% de los bosques que actualmente existen?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} A &= A_0 e^{-rt} \\ 0.25A_0 &= A_0 e^{-0.0525t} \\ 0.25 &= e^{-0.0525t} \\ \ln 0.25 &= -0.0525t \ln e \\ \ln(2.5 \times 10^{-1}) &= -0.0525t(1) \\ \ln 2.5 - \ln 10 &= -0.0525t \\ 0.9163 - 2.3026 &= -0.0525t \\ -1.3863 &= -0.0525t \\ 26.405 &= t \\ t &= 26.41 \text{ años} \end{aligned}$$

Problemas propuestos

24.17 Si se obtiene una ganancia de \$5.13 en dos años por concepto de intereses por un depósito de \$95, entonces ¿cuál es la tasa de interés simple anual?

24.18 Si se pide un préstamo por \$500 por un periodo de un mes y se deben pagar \$525 al final de éste, ¿cuál es el interés simple anual?

24.19 Si se invierten \$4 000 en un banco que paga trimestralmente 8% de interés compuesto, ¿cuál será la ganancia de dicha inversión en un periodo de 6 años?

24.20 Si se invierten \$8 000 en una cuenta que paga mensualmente 12% de interés compuesto, ¿cuál será la ganancia de dicha inversión en un periodo de 10 años?

24.21 Con el objeto de atraer inversiones cuantiosas y a largo plazo, un banco paga 9.75% de interés compuesto si se invierten al menos \$30 000 por un periodo de por lo menos 5 años. Si se invirtieran \$30 000 por 5 años en dicho banco, ¿cuál será la ganancia de dicha inversión al final del lapso?

24.22 ¿Qué interés ganarán semestralmente \$8 000 invertidos a 4 años a 10% de interés compuesto?

24.23 ¿Qué interés ganarán trimestralmente \$3 500 invertidos a 5 años a 8% de interés compuesto continuo?

24.24 ¿Qué interés ganarán \$4 000 invertidos a 6 años a 8% de interés compuesto continuo?

24.25 Encuentre la ganancia que se obtendrá al invertir \$9 000 a 2 años a 12% de interés compuesto continuo.

24.26 Encuentre la ganancia que se obtendrá al invertir \$9 000 a 2 años a 12% de interés compuesto continuo.

24.27 Irán sufrió de un terremoto en 1990 de una intensidad 6 veces mayor al de San Francisco en 1989, el cual registró 6.90 en la escala de Richter. ¿Cuál es el valor del terremoto de Irán en la misma escala?

24.28 Encuentre el número de Richter de un terremoto si su intensidad es 3 160 000 veces mayor que la intensidad de referencia.

24.29 Un terremoto en Alaska en 1964 registro un valor de 8.50 en la escala de Richter. ¿Cuál fue la intensidad de este terremoto comparada con la intensidad de referencia?

24.30 Encuentre la intensidad del terremoto en San Francisco en 1906 comparada con la intensidad de referencia si éste registro un valor de 8.25 en la escala de Richter.

24.31 Encuentre el número de Richter de un terremoto con una intensidad 20 000 veces mayor que la intensidad de referencia.

24.32 Encuentre el pH de cada una de las sustancias que tienen la concentración de iones de hidrógeno que se indican.

a) cerveza: $[H^+] = 6.31 \times 10^{-5}$
b) jugo de naranja: $[H^+] = 1.99 \times 10^{-4}$
c) vinagre: $[H^+] = 6.3 \times 10^{-3}$
d) jugo de tomate: $[H^+] = 7.94 \times 10^{-5}$

24.33 Encuentre la concentración aproximada de iones de hidrógeno, $[H^+]$ de las sustancias que tienen el pH que se indica.

a) manzanas: pH $= 3.0$
b) huevos: pH $= 7.8$

24.34 Si los jugos gástricos en su estómago tienen una concentración de iones de hidrógeno de 1.01×10^{-1} moles por litro, ¿cuál es el pH de los jugos gástricos?

24.35 Una habitación relativamente tranquila tiene un nivel de ruido de fondo de 32 decibeles. ¿Cuántas veces la intensidad de umbral del oído es mayor que la de dicha habitación?

24.36 Si la intensidad de un argumento es de aproximadamente 3 980 000 veces la intensidad del umbral del oído, ¿cuál es el nivel en decibeles del argumento?

24.37 La población del mundo crece de manera continua. Si en 1987 la tasa de crecimiento fue de 1.63% anual y la población inicial de 5 mil millones de personas, ¿cuál será la población mundial en el año 2000?

24.38 Durante la invasión de la Plaga Negra, la población mundial disminuyo aproximadamente en 1 millón de personas, de 4.7 a 3.7 millones durante un periodo de tiempo de 50 años, de 1 350 a 1 400. Si el decremento de la población mundial fue exponencial, ¿cuál fue la tasa de decremento anual?

24.39 Si la población mundial creció exponencialmente de 1.6 mil millones en 1900 a 5 mil millones en 1987, ¿cuál fue la tasa de crecimiento anual de la población?

24.40 Si la deforestación de El Salvador continúa a la tasa de crecimiento actual por un periodo de 20 años, solamente quedará 53% de los bosques actuales. Si la deforestación es exponencial, ¿cuál es la tasa anual de deforestación en El Salvador?

24.41 Se ha observado que el hueso de un animal muerto contiene 40% de carbono-14 en relación con la que contenía cuando estaba vivo. Si el decaimiento del carbono-14 es exponencial a una tasa anual de 0.0124%, ¿hace cuánto tiempo que falleció este animal?

24.42 Se utiliza estroncio-90 radiactivo en reactores nucleares y éste decae exponencialmente a una tasa anual de 2.48%. ¿Cuánto estroncio-90 quedará después de 100 años a partir de 50 gramos?

24.43 ¿Cuánto tiempo llevará a 12 gramos de carbono-14 decaer a 10 gramos cuando dicho decaimiento es exponencial a una tasa anual de 0.0124%?

24.44 ¿Cuánto tiempo le tomará a 10 gramos de estroncio-90 decaer a 8 gramos si el decaimiento es exponencial con una tasa anual de 2.48%?

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Nota: Las tablas de los apéndices A y B se utilizaron en el cálculo de estas respuestas. Si se utiliza una calculadora, sus respuestas podrían variar.

24.17 2.7%

24.18 60%

24.19 $6 437

24.20 $26 250

24.21 $ 48 850

24.22 $3 820

24.23 $1 701

24.24 $2 464

24.25 $11 410

24.26 $11 440

24.27 7.68

24.28 6.50

24.29 316 200 000 I_0

24.30 177 800 00 I_0

24.31 4.30

24.32 *a*) pH= 4.2 *b*) pH= 3.7 *c*) pH= 2.2 *d*) pH= 4.1

24.33 *a*) $[H^+] = 0.001$ o 1.00×10^{-3} *b*) $[H^+] = 1.585 \times 10^8$

24.34 1.0

24.35 1585 I_0

24.36 66 decibeles

24.37 6.18 miles de millones

24.38 0.48% anual

24.39 1.31% anual

24.40 3.17% al año

24.41 7 390 años

24.42 4.2 gramos

24.43 1 471 años

24.44 8.998 años

25 PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

25.1 PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

Si un suceso puede tener lugar de m maneras distintas y cuando ocurre una de ellas se puede realizar otro suceso independiente de n formas diferentes, ambos sucesos, de manera sucesiva, pueden tener lugar de mn maneras distintas.

Por ejemplo, si existen 3 candidatos para la presidencia y 5 para la vicepresidencia, existen $3 \cdot 5 = 15$ parejas distintas de presidente y vicepresidente.

En general, si a_1 puede suceder de x_1 maneras, a_2 puede suceder de x_2 maneras, a_3 puede suceder de x_3 maneras, …, y a_n puede suceder de x_n maneras, entonces el evento $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ puede suceder en $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n$ formas.

EJEMPLO 25.1 Una persona tiene 3 chamarras, 10 camisas y 5 pares de pantalones. Si una combinación consiste de una chamarra, una camisa y unos pantalones, ¿cuántas combinaciones diferentes se puede formar dicha persona?

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 3 \cdot 10 \cdot 5 = 150 \text{ combinaciones}$$

25.2 PERMUTACIONES

Una permutación es un arreglo de todos o parte de una determinada cantidad de cosas en un orden específico.

Por ejemplo, las permutaciones de tres literales a, b, c tomadas todas al mismo tiempo son abc, acb, bca, bac, cba, cab.

Las permutaciones de tres literales a, b, c tomadas de dos en dos son: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Para un número natural n, n factorial, expresado como $n!$, es el producto de los n primeros números naturales. Es decir, $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$. Asimismo, $n! = n \cdot (n - 1)!$

Cero factorial se define como: 1:$0! = 1$.

EJEMPLO 25.2 Evalúe cada factorial.

a) 7! *b*) 5! *c*) 1! *d*) 2! *e*) 4!

a) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$
b) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
c) $1! = 1$
d) $2! = 2 \cdot 1 = 2$
e) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

El símbolo ${}_nP_r$ representa el número de permutaciones (arreglos, orden) de n objetos tomados r a la vez.

Por ende, ${}_8P_3$ representa el número de permutaciones de 8 objetos tomados de 3 a la vez y ${}_5P_5$ representa el número de permutaciones de 5 objetos tomados 5 a la vez.

Nota: El símbolo $P(n, r)$, que tiene el mismo significado que ${}_nP_r$, se utiliza a menudo.

A. Permutaciones de n objetos diferentes tomados r a la vez se expresa como:

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} $$

Cuando $r = n$, ${}_nP_r = {}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.

EJEMPLOS 25.3

$$ {}_5P_1 = 5,\ {}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20,\ {}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60,\ {}_5P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120,\ {}_5P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120, $$
$$ {}_{10}P_7 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604\,800. $$

El número de formas en las que 4 personas pueden entrar en un taxi que cuenta con 6 asientos es ${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

B. Permutaciones con objetos similares, tomados todos a la vez.

El número de permutaciones P de n objetos tomados todos a la vez, de los cuáles una cantidad n_1 son similares, otra cantidad n_2 son similares, otra cantidad n_3 son similares, etc. es,

$$ P = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots} \qquad \text{donde } n_1 + n_2 + n_3 + \cdots = n. $$

Por ejemplo, el número de formas como 3 monedas de 10 centavos y 7 de 25 centavos pueden distribuirse entre 10 niños, cada uno recibiendo una moneda, es

$$ \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120. $$

C. Permutaciones circulares

El número de formas de ordenar n diferentes objetos alrededor de un círculo es $(n-1)!$

Por lo tanto, 10 personas pueden sentarse en una mesa redonda de $(10-1)! = 9!$ formas.

25.3 COMBINACIONES

Una combinación es un agrupamiento o selección de todos o parte de un determinado número de objetos sin importar el orden de los objetos seleccionados.

Por lo tanto, las combinaciones de las tres literales a, b, c tomadas 2 a la vez son ab, ac, bc. Observe que ab y ba son 1 combinación, sin embargo, son 2 permutaciones de las literales a y b.

El símbolo ${}_nC_r$ representa el número de combinaciones (selecciones, grupos) de n objetos tomados r a la vez.

Por lo tanto, ${}_9C_4$ representa el número de combinaciones de 9 objetos tomados 4 a la vez.

Nota: A menudo se utiliza el símbolo $C(n, r)$ en lugar de ${}_nC_r$.

A. Combinaciones de n objetos diferentes tomados r a la vez.

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} $$

Por ejemplo, el número de saludos que pueden intercambiarse entre 12 estudiantes en una fiesta si cada uno de ellos saluda una vez a los demás, es

$$ {}_{12}C_2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66. $$

La fórmula siguiente es muy útil en la simplificación de los cálculos:

$$ {}_nC_r = {}_nC_{n-r}. $$

Esta fórmula indica que el número de combinaciones de n objetos tomados de r en r es igual al de combinaciones de n objetos tomados de $n - r$ en $n - r$.

EJEMPLOS 25.4

$$ {}_5C_1 = \frac{5}{1} = 5, \qquad {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10, \qquad {}_5C_5 = \frac{5!}{5!} = 1 $$

$$ {}_9C_7 = {}_9C_{9-7} = {}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36, \qquad {}_{25}C_{22} = {}_{25}C_3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2\,300 $$

Observe que en cada caso el numerador y el denominador tienen la misma cantidad de factores.

B. Combinaciones de objetos diferentes tomados de cualquier número a la vez
El número total C de combinaciones de n objetos distintos tomados de 1, 2, 3, .., n, viene dado por,

$$ C = 2^n - 1. $$

Por ejemplo, una persona tiene en su bolsillo una moneda de 25 centavos, una de 10, una de 5 y 1 de 1 centavo. El número total de formas como puede sacar de su bolsillo cantidades de dinero diferentes es $24 - 1 = 15$.

25.4 UTILIZACIÓN DE LA CALCULADORA

Las calculadoras gráficas y científicas cuentan con teclas para calcular factoriales, $n!$, permutaciones, ${}_nP_r$ y combinaciones, ${}_nC_r$. A medida que los factoriales se hacen grandes, los resultados se despliegan mediante el uso de notación científica. Muchas calculadoras solamente cuentan con dos dígitos para expresar el exponente, lo cual limita el tamaño del factorial que puede desplegarse. Por lo tanto, 69! puede mostrarse en la pantalla mientras que 70! no se puede, ya que 70! necesita más de dos dígitos en el exponente para poderse expresar mediante notación científica. Cuando la calculadora pueda realizar una llevar a cabo una operación, sin embargo, no puede desplegar el resultado en la pantalla, aparecerá un mensaje de error en lugar de la respuesta.

Los valores de ${}_nP_r$ y ${}_nC_r$ a menudo pueden calcularse aunque $n!$ no se pueda desplegar. Lo anterior puede hacerse debido a que el procedimiento interno no requiere que se despliegue el resultado, solamente lo utiliza.

Problemas resueltos

25.1 Evalúe ${}_{20}P_2$, ${}_8P_5$, ${}_7P_5$, ${}_7P_7$.

SOLUCIÓN

${}_{20}P_2 = 20 \cdot 19 = 380$ ${}_7P_5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2\,520$

${}_8P_5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$ ${}_7P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$

25.2 Encuentre n si $a)$ $7 \cdot {}_nP_3 = 6 \cdot {}_{n+1}P_3$, $b)$ $3 \cdot {}_nP_4 = {}_{n-1}P_5$.

SOLUCIÓN

a) $7n(n-1)(n-2) = 6(n+1)(n)(n-1)$.
Puesto que $n \neq 0, 1$ se puede dividir entre $n(n-1)$ a fin de obtener $7(n-2) = 6(n+1)$, $n = 20$.

b) $3n(n-1)(n-2)(n-3) = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$.
Puesto que $n \neq 1, 2, 3$ se puede dividir entre $(n-1)(n-2)(n-3)$ a fin de obtener

$$3n = (n-4)(n-5), \quad n^2 - 12n + 20 = 0, \quad (n-10)(n-2) = 0.$$

Por lo tanto $n = 10$.

25.3 Un estudiante tiene que elegir un idioma y una asignatura entre 5 idiomas y 4 asignaturas. Encuentre el número de formas distintas como puede hacerlo.

SOLUCIÓN

Puede elegir un idioma de 5 maneras y, por cada una de ellas, hay 4 formas de elegir la asignatura.
Por lo tanto, puede hacerlo de $5 \cdot 4 = 20$ maneras.

25.4 ¿De cuántas formas se pueden repartir dos premios entre 10 personas sabiendo que ambos premios, *a*) no se pueden conceder a una misma persona, *b*) se pueden conceder a la misma persona?

SOLUCIÓN

a) El primer premio se puede repartir de 10 formas diferentes y, una vez concedido, el segundo se puede repartir de 9 formas, ya que ambos no se pueden conceder a la misma persona.
Por lo tanto, se puede hacer de $10 \cdot 9 = 90$ formas distintas.

b) El primer premio se puede repartir de 10 formas diferentes y el segundo de otras 10, ya que ambos se pueden conceder a la misma persona.
Por lo tanto, se puede hacer de $10 \cdot 10 = 100$ formas distintas.

25.5 ¿De cuántas maneras se pueden introducir 5 cartas en 3 buzones?

SOLUCIÓN

Cada una de las 5 cartas se puede introducir en cualquiera de los tres buzones.
En consecuencia, se pueden introducir de $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ maneras.

25.6 Hay 4 candidatos para presidente de un club, 6 para vicepresidente y 2 para secretario. ¿De cuántas maneras se pueden ocupar estos tres puestos?

SOLUCIÓN

Un presidente se puede elegir de 4, un vicepresidente de 6 y un secretario de 2 formas distintas. De aquí que se podrán ocupar de $4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$ formas distintas.

25.7 ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar 5 personas en una fila?

SOLUCIÓN

La primera persona puede ocupar uno de los 5 puestos y, una vez que se ha situado en uno de ellos, la segunda puede ocupar uno de los 4 restantes, etc. Por lo tanto, se podrán colocar de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ maneras distintas.

Otro método: Número de formas = número de permutaciones de 5 personas
$= {}_5P_5 = 5! = 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 120$ maneras.

25.8 ¿De cuántas maneras se pueden colocar 7 libros sobre una estantería?

SOLUCIÓN

Número de formas $=$ número de permutaciones de 7 libros
$= {}_7P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$ maneras.

25.9 Encuentre el número de formas como se pueden colocar en fila 4 cuadros de una colección que se compone de 12 pinturas.

SOLUCIÓN

El primer lugar lo puede ocupar uno cualquiera de los 12 cuadros, el segundo uno cualquiera de los 11, el tercero uno cualquiera de los 10 y el cuarto uno cualquiera de los 9 restantes.

Por lo tanto, el número de formas es $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$.

Otro método: Número de formas $=$ número de variaciones de 12 elementos tomados de 4 en 4
$= {}_{12}P_4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$.

25.10 ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una fila 5 hombres y 4 mujeres de forma que éstas ocupen los lugares pares?

SOLUCIÓN

Los hombres se pueden situar de ${}_5P_5$ maneras y las mujeres de ${}_4P_4$. Cada una de las colocaciones de los hombres se puede asociar con una de las mujeres.

De aquí que se podrá efectuar de $= {}_5P_5 \cdot {}_4P_4 = 5!\,4! = 120 \cdot 24 = 2\,880$ maneras.

25.11 ¿De cuántas maneras se pueden colocar 7 cuadros diferentes en una fila sabiendo que uno de ellos debe de estar *a*) en el centro, *b*) en uno de los extremos?

SOLUCIÓN

a) Como el cuadro en cuestión debe situarse en el centro, sólo quedan 6 cuadros para colocarlos en la fila. Por lo tanto, se puede hacer de $= {}_6P_6 = 6! = 720$ maneras.

b) Una vez colocado el cuadro en uno de los extremos, los otros 6 pueden disponer de ${}_6P_6$ maneras.
De aquí que se puede hacer de $= 2 \cdot {}_6P_6 = 1\,440$ maneras.

25.12 ¿De cuántas maneras se pueden colocar 9 libros diferentes sobre una estantería de forma que, *a*) 3 de ellos estén siempre juntos, *b*) 3 de ellos no estén nunca juntos?

SOLUCIÓN

a) Los 3 libros en cuestión se pueden colocar, entre ellos, de ${}_3P_3$ formas. Como estos libros han de estar siempre juntos, se pueden considerar como uno solo. Así pues, es como si tuviéramos 7 libros, el anterior más los 6 restantes, y éstos se pueden colocar de ${}_7P_7$ formas.

Por lo tanto, se puede hacer de $= {}_3P_3 \cdot {}_7P_7 = 3!7! = 6 \cdot 5\,040 = 30\,240$ formas.

b) El número de maneras como se pueden colocar 9 libros de modo que 3 de ellos sin restricciones $= 9! = 362\,880$ formas.

El número de formas como se pueden colocar 9 libros de modo que 3 libros específicos estén juntos (a partir del inciso a anterior) $= 3!7! = 30\,240$ formas.

De aquí que el número de formas en las que se pueden colocar 9 libros en una estantería de modo que 3 libros específicos nunca estén juntos es $= 362\,880 - 30\,240 = 332\,640$ formas.

25.13 ¿De cuántas maneras se pueden disponer en una fila *n* mujeres con la condición de que 2 de ellas en particular no ocupen posiciones contiguas?

SOLUCIÓN

Sin restricción alguna, el número de maneras como se pueden colocar *n* mujeres en una fila es ${}_nP_n$. Si 2 de las *n* mujeres deben ocupar siempre posiciones contiguas, el número de formas será $= 2!({}_{n-1}P_{n-1})$.

De aquí que, el número de maneras como se pueden colocar n mujeres en la fila, con la condición de que 2 de ellas en particular no estén juntas es $= {}_nP_n - 2({}_{n-1}P_{n-1}) = n! - 2(n - 1)! = n(n - 1)! - 2(n - 1)! = (n - 2) \cdot (n - 1)!$

25.14 Sobre una estantería se tienen que colocar 6 libros distintos de biología, 5 de química y 2 de física, de forma que los de cada materia estén juntos. Encuentre el número de formas diferentes en las que esto se puede hacer.

SOLUCIÓN

Los libros de biología se pueden disponer entre sí de 6! maneras, los de química de 5!, los de física de 21 y los de tres grupos de 3! maneras.

Por lo tanto, el número de arreglos es $= 6!5!2!3! = 1\ 036\ 800$.

25.15 Determine el número de palabras diferentes de 5 letras que se pueden formar con las letras de la palabra *chromate* *a*) si cada letra no se emplea más de una vez, *b*) si cada letra se puede repetir. (Estas palabras necesitan tener significado).

SOLUCIÓN

a) Número de palabras = variaciones de 8 letras tomadas de 5 en 5 $= {}_8P_5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\ 720$ palabras.

b) Número de palabras $= 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 85 = 32\ 768$ palabras.

25.16 Encuentre los números que se pueden formar con 4 de los 5 dígitos 1, 2, 3, 4, 5 *a*) si estos no se pueden repetir en cada número, *b*) si pueden repetirse. Si los dígitos no pueden repetirse, ¿qué cantidad de números de 4 dígitos *c*) comienzan con 2, *d*) terminan en 25?

SOLUCIÓN

a) Números formados $= {}_5P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ números.

b) Números formados $= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ números.

c) Como la primera cifra de cada número es una en específico, quedan 4 dígitos para colocar en 3 lugares.
Números formados: $= {}_4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ números.

d) Como las dos últimas cifras de cada número son dos en específico, quedan 3 dígitos para colocar en dos lugares.
Números formados $= {}_3P_2 = 3 \cdot 2 = 6$ números.

25.17 Encuentre cuántos números de 4 cifras se pueden formar con los 10 dígitos, 0, 1, 2, 3, … 9, *a*) si cada uno solo se emplea una vez en cada número. *b*) ¿Cuántos de esos números son impares?

SOLUCIÓN

a) La primera cifra puede ser ocupada por uno cualquiera de los 10 dígitos, excepto el o, es decir, por uno cualquiera de 9 dígitos. Los 9 dígitos restantes, se pueden colocar en los otros 3 lugares de ${}_9P_3$ maneras.
Números formados $= 9 \cdot {}_9P_3 = 9(9 \cdot 8 \cdot 7) = 4\ 536$ números.

b) La última cifra puede ser ocupada por uno cualquiera de los 5 dígitos impares, 1, 3, 5, 7, 9. La primera cifra puede ser uno cualquiera de los 8 dígitos, es decir, los 4 dígitos impares restantes y los dígitos pares 2, 4, 6, 8. Los 8 dígitos restantes se pueden colocar en las 2 posiciones centrales de ${}_8P_2$ maneras.
Números formados $= 5 \cdot 8 \cdot {}_8P_2 = 5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2\ 240$ números impares.

25.18 *a*) Encuentre los números de 5 cifras que se pueden formar con los 10 dígitos, 0, 1, 2, 3, …, 9, pudiendo éstos repetirse. ¿Cuántos de estos números *b*) empiezan en 40, *c*) son pares, *d*) son divisibles entre 5?

SOLUCIÓN

a) La primera cifra puede ser uno cualquiera de 9 dígitos (todos, excepto 0). Cada una de las otras cifras puede ser uno cualquiera de los 10 dígitos.
Números formados $= 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4 = 90\,000$ números.
b) Las dos primeras cifras están formadas por el número 40. Las otras tres pueden ser cualquiera de los 10 dígitos.
Números formados $= 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1\,000$ números.
c) La primera cifra puede ser uno cualquiera de 9 dígitos y la última uno de los 5 números (0, 2, 4, 6, 8). Cada una de las otras tres cifras puede ser cualquiera de los 10 dígitos.
Números pares $= 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45\,000$ números.
d) La primera cifra puede ser uno cualquiera de 9 dígitos, y la última pueden ser 2 números (0, 5) y las otras 3 cifras uno cualquiera de los 10 dígitos.
Números divisibles entre $5 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18\,000$ números.

25.19 Cuántos números comprendidos entre 3 000 y 5 000 se pueden formar con los 7 dígitos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, si cada uno no se puede repetir en cada número?

SOLUCIÓN

Como los números están comprendidos entre 3 000 y 5 000 éstos constarán de 4 cifras. La primera puede ser el 3 o el 4. Los seis dígitos restantes se pueden colocar en los otros tres lugares de ${}_6P_3$ maneras.
Números formados: $= 2 \cdot {}_6P_3 = 2(6 \cdot 5 \cdot 4) = 240$ números.

25.20 Entre 11 novelas y 3 diccionarios se seleccionan 4 novelas y 1 diccionario y se colocan en una estantería de forma que el diccionario esté en medio. Encuentre el número de formas como esto se puede llevar a cabo.

SOLUCIÓN

Las posibilidades de seleccionar un diccionario son 3 y el número de variaciones de 11 novelas tomadas de 4 en 4 es ${}_{11}P_4$.
Por lo tanto, se puede hacer de $= 3 \cdot {}_{11}P_4 = 3(11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8) = 23\,760$.

25.21 ¿Cuántas señales se pueden hacer con 5 banderolas diferentes sacando un número cualquiera de ellas a la vez?

SOLUCIÓN

Las señales se pueden hacer sacando las banderolas 1, 2, 3, 4 y 5 al mismo tiempo. Luego, el número total de señales es,

$${}_5P_1 + {}_5P_2 + {}_5P_3 + {}_5P_4 + {}_5P_5 = 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325 \text{ señales.}$$

25.22 Calcule la suma de los números de 4 cifras que se pueden formar con los cuatro dígitos 2, 5, 3 y 8, sabiendo que cada dígito no puede figurar más de una vez en cada número.

SOLUCIÓN

Los números que se pueden formar son ${}_4P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
La suma de los dígitos $= 2 + 5 + 3 + 8 = 18$ y cada uno de ellos estará $24/4 = 6$ veces ocupando el lugar de las unidades, decenas, centenas y millares. En consecuencia, la suma de los números formados es,

$$1(6 \cdot 18) + 10(6 \cdot 18) + 100(6 \cdot 18) + 1\,000(6 \cdot 18) = 119\,988.$$

25.23 *a*) Encuentre el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra *cooperator* tomadas a la vez. ¿Cuántas de estas palabras, *b*) tienen juntas las tres "*o*", *c*) comienzan por las dos "*r*"?

SOLUCIÓN

a) La palabra *cooperator* consta de 10 letras: 3 "*o*", 2 "*r*" y 5 letras diferentes.

$$\text{Número de palabras} = \frac{10!}{3!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 2)} = 302\,400.$$

b) Considere las 3 "*o*" como una sola letra. Por lo tanto, se tendrán 8 letras de las cuales dos son "*r*".

$$\text{Número de palabras} = \frac{8!}{2!} = 20\,160.$$

c) El número de palabras que se pueden formar con las 8 letras restantes, de las cuales hay tres "*o*", es $= 8!=3! = 6\,720$.

25.24 Se dispone de 3 ejemplares de 4 libros diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una estantería?

SOLUCIÓN

Hay $3 \cdot 4 = 12$ libros, de los cuales cada uno está repetido 3 veces.

$$\text{Número de formas} = \frac{(3 \cdot 4)!}{3!3!3!3!} = \frac{12!}{(3!|^4} = 369\,600.$$

25.25 *a*) ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa redonda?
b) ¿De cuántas maneras se pueden sentar 8 personas alrededor de una mesa redonda de forma que dos de ellas estén siempre juntas?

SOLUCIÓN

a) Supóngase que una de ellas se sienta en un lugar cualquiera. Las 4 personas restantes se pueden sentar de 4! Formas. Por lo tanto, hay $4! = 24$ maneras de disponer a 5 personas alrededor de una mesa circular.
b) Considérese a las dos personas en particular como una sola. Como hay 2! maneras de disponer a 2 personas entre sí y 6! formas de colocar a 7 personas alrededor de una mesa circular, el número pedido será $= 2!6! = 2 \cdot 720 = 1\,440$ formas.

25.26 ¿De cuántas maneras se pueden colocar 4 hombres y 4 mujeres alrededor de una mesa redonda de manera que cada mujer esté entre dos hombres?

SOLUCIÓN

Se supone, en primer lugar, que se sientan los hombres. Éstos se pueden colocar de 3! maneras distintas y las mujeres de 4! formas.

Por lo tanto, el número solicitado es $= 3!4! = 144$.

25.27 ¿Cuántas pulseras se pueden hacer ensartando en un hilo 9 cuentas de colores diferentes?

SOLUCIÓN

El número de formas como se pueden disponer las cuentas en la pulsera es igual a 8!; sin embargo, la mitad se deduce de la otra mitad girando la pulsera.

Por lo tanto, se pueden formar $\frac{1}{2}(8!) = 20\,160$ pulseras diferentes.

25.28 En cada caso, encontrar el valor de n: *a*) ${}_nC_{n-2} = 10$, *b*) ${}_nC_{15} = {}_nC_{11}$, *c*) ${}_nP_4 = 30 \cdot {}_nC_5$.

SOLUCIÓN

a) ${}_nC_{n-2} = {}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2!} = \dfrac{n^2 - n}{2} = 10, \qquad n^2 - n - 20 = 0, \qquad n = 5$

b) ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$, ${}_nC_{15} = {}_nC_{n-11}$, $15 = n - 11$, $n = 26$

c) $30 \cdot {}_nC_5 = 30\left(\dfrac{{}_nP_5}{5!}\right) = \dfrac{30 \cdot {}_nP_4 \cdot (n-4)}{5!}$

Por lo tanto ${}_nP_4 = \dfrac{30 \cdot {}_nP_4 \cdot (n-4)}{5!}$, $1 = \dfrac{30(n-4)}{120}$, $n = 8$.

25.29 Dado que ${}_nP_r = 3\,024$ y ${}_nC_r = 126$, encuentre r.

SOLUCIÓN

$${}_nP_r = r!({}_nC_r), \qquad r! = \frac{{}_nP_r}{{}_nC_r} = \frac{3\,024}{126} = 24, \qquad r = 4$$

25.30 ¿Cuántos grupos de 4 alumnos se pueden formar con 17 alumnos aventajados para representar a un colegio en un concurso de preguntas de matemáticas?

SOLUCIÓN

Número de formas = número de combinaciones de 17 alumnos tomados de 4 en 4.

$$= {}_{17}C_4 = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2\,380 \text{ grupos de 4 alumnos.}$$

25.31 ¿De cuántas maneras se pueden elegir 5 idiomas entre 8?

SOLUCIÓN

Número de formas = número de combinaciones de 8 idiomas tomados de 5 en 5

$$= {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56 \text{ formas.}$$

25.32 ¿De cuántas formas se pueden repartir 12 libros entre dos personas, *A* y *B*, de manera que a uno le toquen 9 y al otro 3?

SOLUCIÓN

En cada una de las divisiones de los 12 libros de 9 y 3, *A* recibe 9 y *B* recibe 3, o bien *A* recibe 3 y *B* recibe 9.

Por lo tanto, el número de formas es $= 2 \cdot {}_{12}C_9 = 2 \cdot {}_{12}C_3 = 2\left(\dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) = 440$ formas.

25.33 Determine el número de triángulos diferentes que se pueden formar uniendo los seis vértices de un hexágono.

Número de triángulos = número de combinaciones de 6 puntos tomados de 3 en 3.

$$= {}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \text{ triángulos.}$$

25.34 ¿Cuántos ángulos menores de 180º forman 12 semirrectas que se cortan en un punto sabiendo que ninguna de ellas puede estar en prolongación de cualquiera de las otras?

SOLUCIÓN

Número de ángulos = número de combinaciones de 12 elementos tomados de 2 en 2.

$$= {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66 \text{ ángulos.}$$

25.35 ¿Cuántas diagonales tiene un octágono?

SOLUCIÓN

Número de rectas = número de combinaciones de 8 puntos tomados de 2 en 2 = ${}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

Como 8 de estas 28 rectas son los lados del octágono, el número de diagonales = 20.

25.36 ¿Cuántos paralelogramos se pueden formar al cortar un sistema de 7 rectas paralelas por otro sistema de 4 rectas paralelas?

SOLUCIÓN

Cada una de las combinaciones de 4 rectas tomadas de 2 en 2 forman un paralelogramo al cortar a cada una de las combinaciones de 7 rectas tomadas de 2 en 2.

Número de paralelogramos = ${}_4C_2 \cdot {}_7C_2 = 6 \cdot 21 = 126$ paralelogramos.

25.37 En un plano están situados 10 puntos de forma que 4 de ellos están sobre una recta y entre los restantes no hay tres en prolongación. Encuentre el número de rectas que se pueden formar uniendo los 10 puntos.

SOLUCIÓN

Número de rectas suponiendo que de los 10 puntos no hay tres colineales = ${}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Número de rectas formadas por 4 puntos de los que no hay 3 colineales = ${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Desde los 4 puntos son colineales, forman una línea entre 6 líneas.
Número requerido de líneas = $45 - 6 + 1 = 40$ líneas.

25.38 ¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 mujeres de entre un grupo de 15?

a) una de ellas debe figurar en cada grupo seleccionado.
b) dos de ellas no deben figurar en cada grupo seleccionado.
c) uno de ellos debe, y otros 2 no deben, figurar en cada grupo.

SOLUCIÓN

a) Puesto que uno debe figurar siempre, se tendrá que elegir 2 de entre 14.

$$\text{El número de formas en que se puede hacer es} = {}_{14}C_2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91 \text{ formas.}$$

b) Puesto que hay 2 que no deben figurar, se tendrá que elegir 3 de entre 13.

$$\text{El número de formas es} = {}_{13}C_3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = 286 \text{ formas.}$$

c) Número de formas = ${}_{15-1-2}C_{3-1} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ formas.

25.39 Un equipo científico consta de 25 miembros, de los cuales 4 son doctores. Encuentre el número de grupos de 3 miembros que se pueden formar, de manera que en cada grupo haya por lo menos un doctor.

SOLUCIÓN

Número total de grupos de 3 que se pueden formar con 25 miembros 25 $= {}_{25}C_3$.

Número de grupos de 3 que se pueden formar de manera que no figure en ellos un doctor $= {}_{25-4}C_3 = {}_{21}C_3$.

Por lo tanto, el número de grupos de 3 miembros que se pueden formar de manera que en ellos exista por lo menos un doctor

$$ {}_{25}C_3 - {}_{21}C_3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} - \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3!} = 970 \text{ grupos.} $$

25.40 ¿Cuántos grupos de 7 miembros se pueden formar con 6 químicos y 5 biólogos de manera que en cada uno se encuentren 4 químicos?

SOLUCIÓN

Cada grupo de 4 químicos de los 6 se puede asociar con cada uno de 3 biólogos de los 5.

Por lo tanto, el número de grupos es $= {}_6C_4 \cdot {}_5C_3 = {}_6C_2 \cdot {}_5C_2 = 15 \cdot 10 = 150$

25.41 ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar con 8 consonantes y 4 vocales, de manera que cada una conste de 3 consonantes diferentes y 2 vocales distintas?

SOLUCIÓN

Las 3 consonantes distintas se pueden elegir de ${}_8C_3$ maneras, las 2 vocales de ${}_4C_2$ formas y las 5 letras distintas (3 consonantes y 2 vocales) se pueden disponer entre ellas de ${}_5P_5 = 5!$ formas.

Por lo tanto, el número de palabras es $= {}_8C_3 \cdot {}_4C_2 \cdot 5! = 56 \cdot 6 \cdot 120 = 40\,320$.

25.42 ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con 7 mayúsculas, 3 vocales y 5 consonantes, de manera que cada una empiece por una mayúscula y tenga al menos una vocal, siendo todas las letras de cada palabra diferentes?

SOLUCIÓN

La primera letra, o letra mayúscula, se puede elegir de 7 formas.

Las letras restantes pueden ser:

a) 1 vocal y 2 consonantes, que se pueden tomar de ${}_3C_1 \cdot {}_5C_2$ maneras.
b) 2 vocales y 1 consonante, que se pueden tomar de ${}_3C_2 \cdot {}_5C_1$ maneras.
c) 3 vocales, que se pueden tomar de ${}_3C_3 = 1$ forma.

Cada una de las 3 letras de estos grupos se pueden disponer entre sí de ${}_3P_3 = 3!$ maneras.

$$ \begin{aligned} \text{Por lo tanto, el número de palabras } &= 7 \cdot 3!({}_3C_1 \cdot {}_5C_2 + {}_3C_2 \cdot {}_5C_1 + 1) \\ &= 7 \cdot 6(3 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 1) = 1\,932 \text{ palabras.} \end{aligned} $$

25.43 Un niño *A* tiene 3 mapas y otro *B* tiene 9. ¿De cuántas maneras se los pueden intercambiar si cada uno tiene siempre el número inicial de cromos?

SOLUCIÓN

A puede cambiar 1 mapa con *B* de ${}_3C_1 \cdot {}_9C_1 = 3 \cdot 9 = 27$ maneras.
A puede cambiar 2 mapas con *B* de ${}_3C_2 \cdot {}_9C_2 = 3 \cdot 36 = 108$ maneras.
A puede cambiar 3 mapas con *B* de ${}_3C_3 \cdot {}_9C_3 = 1 \cdot 84 = 84$ maneras.
Número total $= 27 + 108 + 84 = 219$ maneras.

Otro método: Considere que *A* y *B* juntan sus mapas. El problema se reduce a encontrar de cuántas maneras *A* puede elegir 3 mapas, de entre los 12, excluyendo sus tres mapas originales.

$$ \text{Este número viene dado por, } {}_{12}C_3 - 1 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1 = 219 \text{ maneras.} $$

25.44 *a*) ¿De cuántas maneras se pueden repartir 12 libros entre 3 alumnos de forma que cada uno reciba 4 libros?

b) ¿De cuántas maneras se pueden dividir 12 libros en 3 grupos de 4 libros cada uno?

SOLUCIÓN

a) El primer alumno puede elegir 4 libros, de entre los 12, de ${}_{12}C_4$ maneras.
El segundo puede elegir 4 libros, de entre los 8 restantes, de ${}_{8}C_4$ maneras.
El tercer alumno puede elegir 4 libros de entre los 4 restantes, de 1 forma.

$$\text{Número pedido} = {}_{12}C_4 \cdot {}_{8}C_4 \cdot 1 = 495 \cdot 70 \cdot 1 = 34\,650 \text{ maneras.}$$

b) Los 3 grupos se pueden distribuir entre los alumnos de $3! = 6$ maneras.

$$\text{Por lo tanto, el número pedido} = 34\,650/3! = 5\,775 \text{ grupos.}$$

25.45 Se dispone de 4 aparatos eléctricos. ¿De cuántas maneras se puede escoger uno o más de dichos artículos?

SOLUCIÓN

Cada aparato se puede considerar de dos formas, que se seleccione o que no se seleccione. Ahora bien, cada una de estas dos formas se puede asociar con las dos correspondientes a cada uno de los otros artículos; por lo tanto, el número de formas relativo a los 4 artículos es $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$. Pero en 2^4 está incluido el caso en que no se elija ninguno de los objetos.

En consecuencia, el número pedido es $= 2^4 - 1 = 1^6 - 1 = 15$ maneras.

Otro método: Los objetos que se pueden elegir son uno, dos, etc. Luego, el número pedido es $= {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ maneras.

25.46 ¿Cuántas sumas de dinero distintas se pueden sacar de una caja que contiene cinco billetes de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 dólares?

SOLUCIÓN

$$\text{Número de sumas} = 2^6 - 1 = 63.$$

25.47 ¿De cuántas maneras se pueden elegir dos o más corbatas de entre una colección de 8?

SOLUCIÓN

Una o más corbatas se pueden elegir de $(2^8 - 1)$ formas. Pero como hay que elegir dos o más, el número pedido es $= 2^8 - 1 - 8 = 247$.

Otro método: 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8 corbatas se pueden seleccionar de

$$\begin{aligned} {}_8C_2 + {}_8C_3 + {}_8C_4 + {}_8C_5 + {}_8C_6 + {}_8C_7 + {}_8C_8 &= {}_8C_2 + {}_8C_3 + {}_8C_4 + {}_8C_3 + {}_8C_2 + {}_8C_1 + 1 \\ &= 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 247 \text{ formas.} \end{aligned}$$

25.48 Se dispone de telas de 5 tonos diferentes de color verde, 4 tonos diferentes de color azul y 3 tonos diferentes de color rojo. Encuentre el número de selecciones de tonos que se pueden efectuar con la condición de tomar siempre un tono verde y un tono azul.

SOLUCIÓN

Los tonos verdes se pueden elegir de $(2^5 - 1)$ formas, los azules de $(2^4 - 1)$ formas y los rojos de 2^3 formas.

$$\text{Número de selecciones} = (2^5 - 1)(2^4 - 1)(2^3) = 31 \cdot 15 \cdot 8 = 3\,720 \text{ selecciones.}$$

Problemas propuestos

25.49 Evalúe: ${}_{16}P_3$, ${}_{7}P_4$, ${}_{5}P_5$, ${}_{12}P_1$.

25.50 Encuentre n si *a*) $10 \cdot {}_{n}P_2 = {}_{n+1}P_4$, *b*) $3 \cdot {}_{2n+4}P_3 = 2 \cdot {}_{n+4}P_4$.

25.51 ¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas en un banco?

25.52 Encuentre el número de señales distintas que se pueden hacer con cuatro banderas de colores diferentes desplegando dos banderas una encima de la otra.

25.53 Encuentre el número de señales distintas que se pueden realizar con seis banderas de colores diferentes desplegando tres banderas una encima de la otra.

25.54 ¿De cuántas maneras se puede elegir un presidente, un secretario y un tesorero en un club formado por 12 miembros?

25.55 ¿De cuántas maneras se pueden colocar 2 libros distintos encuadernados en rojo, 3 distintos en verde y 4 distintos en azul sobre una estantería de manera que todos los libros de un mismo color estén juntos?

25.56 En una pared está clavadas cuatro perchas. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colgar de ellas 3 chaquetas, una en cada percha?

25.57 Calcule cuántos números de dos cifras distintas se pueden formar con los dígitos 0, 3, 5, 7 sin que se repita cualquiera de los números.

25.58 Calcule cuántos números pares de dos cifras distintas se pueden formar con los dígitos 3, 4, 5, 6, 8.

25.59 Calcule cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5 sin que se repita alguno de los dígitos.

25.60 Calcule cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, …, 9 si que se repita alguno de los dígitos.

25.61 Calcule cuántos números de tres cifras, iguales o distintas, se pueden formar con los dígitos 3, 4, 5, 6, 7 si se permite que éstos se repitan.

25.62 Calcule cuántos números impares de tres cifras, dos iguales y otra distinta, se pueden formar con los dígitos *a*) 1, 2, 3, 4, *b*) 1, 2, 4, 6, 8.

25.63 Calcule cuántos números pares diferentes de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 3, 5, 6, 7, 9.

25.64 Calcule cuántos números diferentes de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 3, 5, 7, 9, sin que algún dígito se repita.

25.65 Calcule cuántos números enteros comprendidos entre 100 y 1 000 tienen todas sus cifras distintas.

25.66 Calcule cuántos números enteros mayores de 300 y menores de 1 000, con todas sus cifras distintas, se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5.

25.67 Calcule cuántos números comprendidos entre 100 y 1 000, con todas sus cifras distintas, se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4.

25.68 Calcule cuántos números de cuatro cifras mayores que 2 000 se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 de manera que las cifras, *a*) no se puedan repetir, *b*) se puedan repetir.

25.69 ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de *logarithm* de manera que empiecen con una vocal y terminen con una consonante? (Las palabras no necesitan tener significado).

25.70 En cierto sistema telefónico se utilizan cuatro letras diferentes P, R, S, T y los cuatro dígitos 3, 5, 7, 8 para designar a los abonados. Encuentre el máximo de "números telefónicos" de que puede constar dicho sistema, sabiendo que cada uno está formado por una letra seguida de un número de cuatro cifras distintas.

25.71 ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una fila 3 niñas y 3 niños de manera que no haya ni dos niñas ni dos niños ocupando lugares contiguos?

25.72 ¿Cuántos caracteres telegráficos se pueden formar con 3 puntos y 2 rayas en cada uno de ellos?

25.73 ¿Cuántas jugadas distintas se pueden presentar al lanzar tres dados?

25.74 ¿Cuántas palabras de tres letras distintas se pueden formar con las letras del alfabeto griego?

25.75 ¿Cuántas señales se pueden realizar con 8 banderas de las cuales 2 son rojas, 3 blancas y 3 azules, sabiendo que se izan de una vez en un asta vertical?

25.76 ¿De cuántas maneras se pueden sentar 4 hombres y 4 mujeres alrededor de una mesa redonda de madera para que no haya dos hombres juntos?

25.77 ¿De cuántas maneras distintas se pueden disponer los factores del producto a $a^2b^4c^5$?

25.78 ¿De cuántas maneras se pueden repartir 9 premios diferentes entre 2 estudiantes de manera que uno reciba 3 y el otro 6?

25.79 ¿Cuántas estaciones de radio se pueden denominar con 3 letras diferentes del alfabeto? ¿Cuántas se pueden denominar con 4 letras diferentes del alfabeto ocupando la *W* en el primer lugar?

25.80 En cada caso encontrar n: *a*) $4 \cdot {}_nC_2 = {}_{n+2}C_3$, *b*) ${}_{n+2}C_n = 45$, *c*) ${}_nC_{12} = {}_nC_8$.

25.81 Si $5 \cdot {}_nP_3 = 24 \cdot {}_nC_4$, encuentre n.

25.82 Evalúe *a*) ${}_7C_7$, *b*) ${}_5C_3$, *c*) ${}_7C_2$, *d*) ${}_7C_5$, *e*) ${}_7C_6$, *f*) ${}_8C_7$, *g*) ${}_8C_5$, *h*) ${}_{100}C_{98}$.

25.83 ¿Cuántas rectas determinan *a*) 6 puntos, *b*) n puntos, sabiendo que no hay tres colineales?

25.84 ¿Cuántas cuerdas determinan siete puntos de una circunferencia?

25.85 Un alumno tiene que escoger 5 preguntas de entre 9. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

25.86 ¿Cuántas sumas diferentes de dinero se pueden formar tomando dos monedas de entre las siguientes: un centavo, 5 centavos, 10 centavos, 25 centavos y 50 centavos de dólar?

25.87 ¿Cuántas sumas diferentes de dinero se pueden formar con las monedas del problema 25.86?

25.88 En un torneo de beisbol intervienen 6 equipos. Encuentre el número de partidos que se han de jugar sabiendo que cada equipo tiene que enfrentarse con los demás, *a*) dos veces, *b*) tres veces.

25.89 ¿Cuántos grupos diferentes de dos hombres y una mujer se pueden formar con *a*) 7 hombres y 4 mujeres, *b*) 5 hombres y 3 mujeres?

25.90 ¿De cuántas maneras se pueden elegir 5 colores de entre 8 diferentes, 3 de los cuales son el rojo, el azul y el verde, sabiendo que:

a) el azul y el verde se elijan siempre,
b) no se elija el rojo,
c) el rojo y el azul se elijan siempre y no se elija el verde?

25.91 ¿Cuántos grupos de investigación de 6 miembros se pueden formar con 5 físicos, 4 químicos y 3 matemáticos, de manera que en cada grupo haya 3 físicos, 2 químicos y 1 matemático?

25.92 Con los datos del problema 25.91, encuentre el número de grupos de 6 miembros que se pueden elegir de forma que,

a) 2 miembros sean matemáticos,
b) por lo menos 3 miembros sean físicos.

25.93 ¿Cuántas palabras de 2 vocales y 3 consonantes se pueden formar con las letras de *a*) *stenographic*, *b*) *facetious*?

25.94 ¿De cuántas maneras se puede colorear un cuadro con 7 colores diferentes?

25.95 ¿Cuántos grupos se pueden formar con 8 mujeres sabiendo que en cada uno de ellos debe haber por lo menos 3?

25.96 Una caja contiene 7 tarjetas rojas, 6 blancas y 4 azules. ¿De cuántas maneras se pueden elegir tres tarjetas de forma que *a*) todas sean rojas, *b*) ninguna sea roja?

25.97 ¿Cuántos equipos de 9 jugadores cada uno pueden elegirse de 13 candidatos si *A*, *B*, *C* y *D* son los únicos candidatos para ocupar dos posiciones y no pueden ocupar otra posición?

25.98 ¿Cuántos grupos de 3 demócratas y 2 republicanos se pueden formar con 8 republicanos y 10 demócratas?

25.99 En una reunión, después de que cada uno de los asistentes saludó una sola vez a cada uno de los restantes, se realizaron 45 salutaciones. Encuentre el número de personas que asistieron a la reunión.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

25.49 3 360, 840, 120, 12

25.50 *a*) 4, *b*) 6

25.51 720

25.52 12

25.53 120

25.54 1 320

25.55 1 728

25.56 24

25.57 9

25.58 12

25.59 60

25.60 504

25.61 125

25.62 *a*) 12, *b*) 12

25.63 24

25.64 120

25.65 648

25.66 36

25.67 48

25.68 *a*) 18, *b*) 192

25.69 90 720

25.70 1 024

25.71 72

25.72 10

25.73 216

25.74 12, 144

25.75 560

25.76 144

25.77 6930

25.78 168

25.79 15 600; 13 800

25.80 *a*) 2, 7, *b*) 8, *c*) 20

25.81 8

25.82 *a*) 1, *b*) 10, *c*) 21, *d*) 21, *e*) 7, *f*) 8, *g*) 56, *h*) 4 950

25.83 *a*) 15, *b*) $\frac{n(n-1)}{2}$

25.84 21

25.85 126

25.86 10

25.87 31

25.88 *a*) 30, *b*) 45

25.89 *a*) 84, *b*) 30

25.90 *a*) 20, *b*) 21, *c*) 10

25.91 180

25.92 *a*) 378, *b*) 462

25.93 *a*) 40 320, *b*) 4 800

25.94 127

25.95 219

25.96 *a*) 35, *b*) 120

25.97 216

25.98 3 360

25.99 10

TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON 26

26.1 NOTACIÓN COMBINATORIA

El número de combinaciones de n objetos seleccionados de r en r, ${}_nC_r$, puede expresarse en la forma,

$$\binom{n}{r}$$

la cual se llama notación combinatoria.

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r};$$

donde n y r son enteros y $r \leq n$.

EJEMPLOS 26.1 Evalúe cada expresión:

a) $\binom{7}{3}$ *b*) $\binom{8}{7}$ *c*) $\binom{9}{9}$ *d*) $\binom{5}{0}$

a) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35$

b) $\binom{8}{7} = \frac{8!}{(8-7)!7!} = \frac{8!}{1!7!} = \frac{8 \cdot 7!}{1 \cdot 17!} = 8$

c) $\binom{9}{9} = \frac{9!}{(9-9)!9!} = \frac{9!}{0!9!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

d) $\binom{5}{0} = \frac{5!}{(5-0)!0!} = \frac{5!}{5!0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

26.2 EXPANSIÓN DE $(a + x)^n$

Si n es un entero positivo, se puede expandir $(a + x)^n$ como se muestra a continuación:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^n$$

A esta ecuación se le conoce como el teorema del binomio de Newton o fórmula binomial.

Existen otras formas del teorema del binomio de Newton y algunas de ellas utilizan combinaciones para expresar los coeficientes. La relación entre los coeficientes y las combinaciones se muestran a continuación:

$$\frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \binom{5}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{(n-3)!3!} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \binom{n}{3}$$

Por lo tanto,

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n!}{(n-1)!1!}a^{n-1}x + \frac{n!}{(n-2)!2!}a^{n-2}x^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-[r-1])!(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^n$$

y
$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \cdots + \binom{n}{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^n$$

El término r del desarrollo de $(a+x)^n$ es

$$\text{término } r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}.$$

El término r de la fórmula del desarrollo de $(a+x)^n$ puede expresarse en términos de combinaciones.

$$\text{término } r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)\cdots 2 \cdot 1}{(n-r+1)(n-r)\cdots 2 \cdot 1(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$
$$\text{término } r = \frac{n!}{(n-[r-1])!(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$
$$\text{término } r = \binom{n}{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

Problemas resueltos

26.1 Evalúe cada una de las expresiones siguientes:

a) $\binom{10}{2}$ *b*) $\binom{10}{8}$ *c*) $\binom{12}{10}$ *d*) $\binom{170}{170}$

SOLUCIÓN

a) $\binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2 \cdot 1} = 45$

b) $\binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)!8!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 1 \cdot 8!} = 45$

c) $\binom{12}{10} = \frac{12!}{(12-10)!10!} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 1 \cdot 10!} = 66$

c) $\binom{170}{170} = \frac{170}{(170-170)!170!} = \frac{170!}{0! \cdot 170!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

Desarrolle mediante la fórmula del binomio

26.2 $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}ax^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

26.3 $(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}a^2x^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}ax^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

26.4 $(a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}a^3x^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}a^2x^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^2x^4 + x^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5$

Observe que en el desarrollo de $(a+x)^n$:

1. El exponente de $a +$ el exponente de $x = n$ (es decir, el grado de cada término es n).
2. El número de términos es $n + 1$, cuando n es un número entero y positivo.
3. Hay dos términos medios cuando n es un número entero, impar y positivo.
4. Hay solamente *un* término medio cuando n es un número entero, par y positivo.
5. Los coeficientes de los términos que equidistan de los extremos son iguales. Dichos coeficientes se pueden disponer de la forma siguiente:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
(a+x)^0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(a+x)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
(a+x)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(a+x)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(a+x)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(a+x)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
(a+x)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\text{etc.} & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Esta disposición de números recibe el nombre de *Triángulo de Pascal*. El primero y el último término son iguales a 1 y los demás se obtienen sumando los dos números a su derecha e izquierda de la fila anterior.

26.5 $(x-y^2)^6 = x^6 + 6x^5(-y^2) + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^4(-y^2)^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot}x^3(-y^2)^3 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^2(-y^2)^4$

$+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x(-y^2)^5 + (-y^2)^6$

$= x^6 - 6x^5y^2 + 15x^4y^4 - 20x^3y^6 + 15x^2y^8 - 6xy^{10} + y^{12}$

En el desarrollo de un binomio de la forma $(a - b)^n$, siendo n un número entero y positivo, los términos son positivos y negativos alternadamente.

26.6 $(3a^3 - 2b)^4 = (3a^3)^4 + 4(3a^3)^3(-2b) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(3a^3)^2(-2b)^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}(3a^3)(-2b)^3 + (-2b)^4$

$= 81a^{12} - 216a^9b + 216a^6b^2 - 96a^3b^3 + 16b^4$

26.7 $(x-1)^7 = x^7 + 7x^6(-1) + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}x^5(-1)^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}x^4(-1)^3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^3(-1)^4$

$+\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^2(-1)^5 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x(-1)^6 + (-1)^7$

$= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$

26.8 $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{y}\right)^4=\left(\dfrac{x}{3}\right)^4+4\left(\dfrac{x}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{y}\right)+\dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\dfrac{x}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{y}\right)^2+\dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\dfrac{x}{3}\right)\left(\dfrac{2}{y}\right)^3+\left(\dfrac{2}{y}\right)^4$

$$=\frac{x^4}{81}+\frac{8x^3}{27y}+\frac{8x^2}{3y^2}+\frac{32x}{3y^3}+\frac{16}{y^4}$$

26.9 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^6=(x^{1/2})^6+6(x^{1/2})^5(y^{1/2})+\dfrac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(x^{1/2})^4(x^{1/2})^2\,\dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}(x^{1/2})^3(y^{1/2})^3$

$$+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(x^{1/2})^2(y^{1/2})^4+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(x^{1/2})(y^{1/2})^5+(y^{1/2})^6$$

$$=x^3+6x^{5/2}y^{1/2}+15x^2y+20x^{3/2}y^{3/2}+15xy^2+6x^{1/2}y^{5/2}+y^3$$

26.10 $(a^{-2}+b^{3/2})^4=(a^{-2})^4+4(a^{-2})^3(b^{3/2})+\dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(a^{-2})^2(b^{3/2})^2+\dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}(a^{-2})(b^{3/2})^3+(b^{3/2})^4$

$$=a^{-8}+4a^{-6}b^{3/2}+6a^{-4}b^3+4a^{-2}b^{9/2}+b^6$$

26.11 $(e^x-e^{-x})^7=(e^x)^7+7(e^x)^6(-e^{-x})+\dfrac{7\cdot 6}{1\cdot 2}(e^x)^5(-e^{-x})^2+\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}(e^x)^4(-e^{-x})^3$

$$+\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(e^x)^3(-e^{-x})^4+\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(e^x)^2(-e^{-x})^5$$

$$+\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(e^x)(-e^{-x})^6+(-e^{-x})^7$$

$$=e^{7x}-7e^{5x}+21e^{3x}-35e^x+35e^{-x}-21e^{-3x}+7e^{-5x}-e^{-7x}$$

26.12 $(a+b-c)^3=[(a+b)-c]^3=(a+b)^3+3(a+b)^2(-c)+\dfrac{3\cdot 2}{1\cdot 2}(a+b)(-c)^2+(-c)^3$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2c-6abc-3b^2c+3ac^2+3bc^2-c^3$$

26.13 $(x^2+x-3)^3=[x^2+(x-3)]^3=(x^2)^3+3(x^2)^2(x-3)+\dfrac{3\cdot 2}{1\cdot 2}(x^2)(x-3)^2+(x-3)^3$

$$=x^6+(3x^5-9x^4)+(3x^4-18x^3+27x^2)+(x^3-9x^2+27x-27)$$

$$=x^6+3x^5-6x^4-17x^3+18x^2+27x-27$$

En los problemas 26.14-26.18, escriba el término indicado de cada desarrollo aplicando la fórmula

$$\text{término } r\ (a+x)^n=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}.$$

26.14 Sexto término de $(x+y)^{15}$

SOLUCIÓN

$$n=15,\ r=6,\ n-r+2=11,\ r-1=5,\ n-r+1=10$$

$$\text{6o. término}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{10}y^5=3003x^{10}y^5$$

26.15 Quinto término de $(a-\sqrt{b})9$.

SOLUCIÓN

$$n = 9,\ r = 5,\ n - r + 2 = 6,\ r - 1 = 4,\ n - r + 1 = 5$$

$$\text{5o. término} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^5(-\sqrt{b})^4 = 126a^5b^2$$

26.16 Cuarto término de $(x^2 - y^2)11$.

SOLUCIÓN

$$n = 11,\ r = 4,\ n - r + 2 = 9,\ r - 1 = 3,\ n - r + 1 = 8$$

$$\text{4o. término} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x^2)^8(-y^2)^3 = -165x^{16}y^6$$

26.17 Noveno término de $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^{12}$.

SOLUCIÓN

$$n = 12,\ r = 9,\ n - r + 2 = 5,\ r - 1 = 8,\ n - r + 1 = 4$$

$$\text{9o. término} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right)^8 = \frac{495}{16x^4}$$

26.18 Decimoctavo término de $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{20}$.

SOLUCIÓN

$$n = 20,\ r = 18,\ n - r + 2 = 4,\ r - 1 = 17,\ n - r + 1 = 3$$

$$\text{18o. término} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdots 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 17}\left(-\frac{1}{x}\right)^{17} = -\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3x^{17}} = -\frac{1140}{x^{17}}$$

26.19 Encuentre el término en x^2 del desarrollo de

$$\left(x^3 + \frac{a}{x}\right)^{10}.$$

SOLUCIÓN

A partir de $(x^3)^{10-r+1}(x^{-1})r^{-1} = x^2$ se obtiene $3(10 - r + 1) - 1(r - 1) = 2$ o $r = 8$.
Para el 8o. término: $n = 10$, $r = 8$, $n - r + 2 = 4$, $r - 1 = 7$, $n - r + 1 = 3$.

$$\text{8o. término} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}(x^3)^3\left(\frac{a}{x}\right)^7 = 120a^7x^2$$

26.20 Encuentre el término independiente de x en el desarrollo de:

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9.$$

SOLUCIÓN

A partir de $(x^2)^{9-r+1}(x^{-1})^{r-1} = x^0$ se obtiene $2(9 - r + 1) - 1(r - 1) = 0$ o $r = 7$.

Para el 7o. término: $n = 9$, $r = 7$, $n - r + 2 = 4$, $r - 1 = 6$, $n - r + 1 = 3$.

$$7\text{o. término} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}(x^2)^3(-x^{-1})^6 = 84$$

26.21 Evalúe $(1.03)^{10}$ con cinco cifras significativas.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(1.03)^{10} = (1 + 0.03)^{10} &= 1 + 10(0.03) + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}(0.03)^2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}(0.03)^3 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(0.03)^4 + \cdots \\ &= 1 + 0.3 + 0.0405 + 0.003\,24 + 0.000\,17 + \cdots = 1.3439\end{aligned}$$

Observe que los 11 términos de la expansión de $(0.03 + 1)^{10}$ serán necesarios para evaluar $(1.03)^{10}$.

26.22 Evalúe $(0.99)^{15}$ con cuatro cifras decimales.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(0.99)^{15} = (1 - 0.01)^{15} &= 1 + 15(-0.01) + \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2}(-0.01)^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-0.01)^3 \\ &\quad + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + (-0.01)^4 + \cdots \\ &= 1 - 0.15 + 0.0105 - 0.000\,455 + 0.000\,014 - \cdots = 0.8601\end{aligned}$$

26.23 Encuentre la suma de los coeficientes del desarrollo de *a*) $(1 + x)^{10}$, *b*) $(1 - x)^{10}$.

SOLUCIÓN

a) Si, 1, c_1, c_2, …, c_{10} son los coeficientes, se tiene la identidad

$$(1 + x)^{10} = 1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{10}x^{10}. \text{ Sea } x = 1.$$

Por lo tanto $(1 + 1)10 = 1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{10}$ = suma de los coeficientes $= 2^{10} = 1\,024$

b) Sea x = l. Entonces $(1 - x)^{10} = (1 - 1)^{10} = 0$ = suma de los coeficientes.

Problemas propuestos

26.24 Desarrolle mediante la fórmula del binomio.

a) $(x + \frac{1}{2})^6$ *c*) $(y + 3)^4$ *e*) $(x^2 - y^3)^4$ *g*) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{y}\right)^4$

b) $(x - 2)^5$ *d*) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5$ *f*) $(a - 2b)^6$ *h*) $(y^{1/2} + y^{-1/2})^6$

26.25 Escriba el término indicado en los desarrollos siguientes:

a) Quinto término de $(a - b)^7$

b) Término medio de $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$

c) Decimosexto término de $\left(y - \frac{1}{y}\right)^8$

d) Séptimo término de $\left(a - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{10}$

e) Séptimo término de $(2 - 1/x)^{18}$

f) Sexto término de $x^2 - 2y)^{11}$

26.26 Calcule el término independiente de x del desarrollo de:

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3x^2}\right)^{10}.$$

26.27 Calcule el término en x^3 del desarrollo de:

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}.$$

26.28 Evalúe $(0.98)^6$ con cinco cifras decimales.

26.29 Evalúe $(1.1)^{10}$ aproximado a centésimas.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

26.24 *a*) $x^6+3x^5+\frac{15}{4}x^4+\frac{5}{2}x^3+\frac{15}{16}x^2+\frac{3}{16}x+\frac{1}{64}$

b) $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

c) $y^4+12y^3+54y^2+108y+81$

d) $x^5+5x^3+10x+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}$

e) $x^8-4x^6y^3+6x^4y^6-4x^2y^9+y^{12}$

f) $a^6-12a^5b+60a^4b^2-160a^3b^3+240a^2b^4-192ab^5+64b^6$

g) $\frac{x^4}{16}+\frac{3x^3}{2y}+\frac{27x^2}{2y^2}+\frac{54x}{y^3}+\frac{81}{y^4}$

h) $y^3+6y^2+15y+20+15y^{-1}+6y^{-2}+y^{-3}$

26.25 *a*) $35a^3b^4$ *c*) 70 *e*) $-\frac{6\,528}{x^{15}}$

b) 84 *d*) $210a$ *f*) $-14\,784x^{12}y^5$

26.26 5

26.27 $792\,x^3$

26.28 0.885 84

26.29 2.59

27 PROBABILIDAD

27.1 PROBABILIDAD SIMPLE

Suponga que un suceso se puede realizar de h maneras y que no ocurre de f formas, teniendo el conjunto de las $h + f$ maneras la misma probabilidad de ocurrencia. Entonces, la probabilidad de ocurrencia del evento (o éxito) es,

$$p = \frac{h}{h+f} = \frac{h}{n},$$

y la probabilidad de que no ocurra (o falla) es,

$$q = \frac{f}{h+f} = \frac{f}{n},$$

donde $n = h + f$.

Se puede deducir que $p + q = 1$, $p = 1 - q$ y $q = 1 - p$.

Las posibilidades en favor de la ocurrencia del suceso son $h{:}f$ o h/f, y las posibilidades en contra son $f{:}h$ o f/h.

Llamando p a la probabilidad de que se produzca un suceso, las posibilidades en favor de que ocurra son $p{:}q = p(1 - p)$ o bien, $p/(1 - p)$, y las posibilidades en contra son, $q{:}p = (1 - p){:}p$ o $(1 - p)/p$.

27.2 PROBABILIDAD COMPUESTA

Dos o más sucesos son independientes si la realización, o no realización, de uno cualquiera de ellos no afecta a la probabilidad de que ocurran, o no, cualquiera de los restantes.

Por ejemplo, si se lanza una moneda al aire cuatro veces y se obtiene cara en todas ellas, al lanzarla la quinta vez puede salir cara o cruz, con independencia del resultado de los intentos anteriores.

La probabilidad de que se produzcan dos o más sucesos independientes es igual al producto de las probabilidades que tienen cada uno de ellos.

Por ejemplo, la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda la quinta y sexta vez, en los dos lanzamientos, es $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Se dice que dos o más lanzamientos son dependientes si la ocurrencia o no ocurrencia de uno de los eventos afecta las probabilidades de ocurrencia de uno cualquiera de los restantes.

Considere dos o más sucesos dependientes. Sea p_1 la probabilidad del primer suceso, p_2 la probabilidad del segundo después de ocurrir el primero, p_3 la probabilidad de que se produzca el tercero después de haberse presentado el primero y el segundo, etc.; la probabilidad de que se produzcan todos los sucesos en el orden citado, es igual al producto $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots$.

Por ejemplo, una caja contiene 3 bolas blancas y 2 negras. Si se extrae una bola al azar, la probabilidad de que sea negra es $\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$. Si esta bola no se vuelve a introducir en la caja y se extrae una segunda, la probabilidad de que esta última sea también negra es $\frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, la probabilidad de que ambas sean negras es $\frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{10}$.

Dos o más sucesos se excluyen mutuamente si la realización de uno de ellos implica la no realización de los otros.

La probabilidad de que se produzca uno de entre dos o más sucesos que se excluyen mutuamente es la *suma* de las probabilidades de los mismos.

EJEMPLO 27.1 Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 5 o un 6? La obtención de un 5 o un 6 son sucesos mutuamente excluyentes, por lo que,

$$P(5 \text{ o } 6) = P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Se dice que dos eventos están traslapados si dichos eventos tienen al menos un resultado en común, de aquí que puedan pasar al mismo tiempo.

La probabilidad de ocurrencia de uno o dos eventos traslapados es la suma de las probabilidades de los dos eventos individuales menos la probabilidad de sus resultados comunes.

EJEMPLO 27.2 Si se lanza un dado al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número menor a 4 o un número par?

Los números menores a 4 en una moneda son 1, 2 y 3. Los números pares de un dado son 2, 4 y 6. Puesto que estos dos eventos tienen una salida en común, 2, son eventos traslapados.

$$\begin{aligned} P(\text{menor a 4 o par}) &= P(\text{menor a 4}) + P(\text{par}) - P(\text{menor a 4 o par}) \\ &= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

27.3 ESPERANZA MATEMÁTICA

Sea p la probabilidad de que una persona reciba una cantidad de dinero m; el valor de su esperanza es $p \cdot m$.

Por ejemplo, si la probabilidad de conseguir un premio de \$10 es $1/5$, la esperanza matemática es $\frac{1}{5}$ (\$10) = \$2.

27.4 PROBABILIDAD BINOMIAL

Sea p la probabilidad de que se produzca un suceso en un intento y $q = 1 - p$ la probabilidad contraria; la probabilidad de que suceda exactamente r veces en n intentos es ${}_nC_r\, p^r q^{n-r}$. (Véanse los problemas 27.22 y 27.23.)

La probabilidad de que un suceso se produzca por lo menos r veces en n intentos es

$$p^n + {}_nC_1 p^{n-1} q + {}_nC_2 p^{n-2} q^2 + \cdots + {}_nC_r p^r q^{n-r}.$$

Esta expresión es la suma de los $n - r + 1$ primeros términos del desarrollo del binomio $(p + q)^n$. (Véanse los problemas 27.24-27.26.)

27.5 PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad de que un segundo evento ocurra dado que el primero ha ocurrido se llama probabilidad condicional. Para encontrar la probabilidad de que el segundo evento ocurra dado que el primero ocurrió, divida la probabilidad de que ambos eventos ocurran entre la probabilidad del primer evento. La probabilidad de que ocurra el evento B dado que el evento A haya ocurrido se representa mediante la expresión $P(B|A)$.

EJEMPLO 27.3 Una caja contiene circuitos integrados negros y rojos. Una persona saca dos circuitos sin reemplazarlos. Si la probabilidad de sacar un circuito negro y uno rojo es de $15/56$ y la probabilidad de sacar uno negro en el primer intento es de $3/4$, ¿cuál es la probabilidad de sacar uno rojo en el segundo intento, si se sabe que el primer circuito que se sacó fue negro?

Si se expresa como B el evento de sacar un circuito negro y R como el de sacar un circuito rojo, entonces $P(R|B)$ es la probabilidad de sacar un circuito rojo en el segundo intento dado que se sacó un circuito negro en el primer intento.

$$\begin{aligned} P(R|B) &= \frac{P(R \text{ y } B)}{P(B)} \\ &= \frac{15/56}{3/4} \\ &= \frac{15}{56}\cdot\frac{4}{3} \\ &= \frac{5}{14} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de sacar un circuito rojo en el segundo intento dado que en el primero se sacó uno negro es de $5/14$.

Problemas resueltos

27.1 De una caja que contiene 3 bolas rojas, 2 blancas y 4 azules se extrae una bola al azar. Encuentre la probabilidad p de que *a*) sea roja, *b*) no sea roja, *c*) sea blanca, *d*) sea roja o azul.

SOLUCIÓN

a) $p = \dfrac{\text{formas de sacar 1 de 3 bolas rojas}}{\text{formas de sacar 1 de } (3+2+4) \text{ bolas}} = \dfrac{3}{3+2+4} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

b) $p = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ *c*) $p = \dfrac{2}{9}$ *d*) $p = \dfrac{3+4}{9} = \dfrac{7}{9}$

27.2 Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 2 negras; otra bolsa contiene 3 bolas blancas y 5 negras. Se extrae una bola de cada bolsa. Determine la probabilidad p de que *a*) las dos sean blancas, *b*) las dos sean negras, *c*) una sea blanca y la otra negra.

SOLUCIÓN

a) $p = \left(\dfrac{4}{4+2}\right)\left(\dfrac{3}{3+5}\right) = \dfrac{1}{4}$ *b*) $p = \left(\dfrac{2}{4+2}\right)\left(\dfrac{5}{3+5}\right) = \dfrac{5}{24}$

c) Probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra $= \dfrac{4}{6}\left(\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{5}{12}$.

Probabilidad de que la primera bola sea negra y la segunda blanca $= \dfrac{2}{6}\left(\dfrac{3}{8}\right) = \dfrac{1}{8}$.

Son eventos mutuamente excluyentes; de aquí que la probabilidad solicitada es $p = \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{13}{24}$.

Otro método $p = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{24} = \dfrac{13}{24}$.

27.3 Encuentre la probabilidad de obtener 8 puntos tirando 2 dados al aire una sola vez sabiendo que las caras de éstos van numerados del 1 al 6.

SOLUCIÓN

Cada una de las caras de un dado se puede asociar con una cualquiera del otro; luego el total de casos posibles $= 6 \cdot 6 = 36$ casos.

Hay 5 posibilidades de obtener 8 puntos: 2, 6; 3, 5; 4, 4; 5, 3; 6, 2.

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{5}{36}.$$

27.4 ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos 1 tirando dos veces un dado al aire?

SOLUCIÓN

La probabilidad de no obtener un 1 en la tirada es $1 - 1/6 = 5/6$.

La probabilidad de no obtener un 1 en dos tiradas es $(5/6)(5/6) = 25/36$.

Luego, la probabilidad de sacar por lo menos un 1 en dos tiradas es $1 - 25/36 = 11/36$.

27.5 La probabilidad que tiene A de ganar a B una partida de ajedrez es igual a $1/3$. ¿Cuál es la probabilidad que tiene A de ganar por lo menos una de las tres partidas?

SOLUCIÓN

La probabilidad de A de perder una partida es $1 - 1/3 = 2/3$, y la probabilidad de que pierda las tres partidas es $(2/3)^3 = 8/27$.

Luego, la probabilidad de que por lo menos gane una partida es $1 - 8/27 = 19/27$.

27.6 De una baraja de 52 cartas se sacan 3 naipes de uno en uno y se vuelven a introducir en el mazo después de cada extracción. Encuentre la probabilidad p de que todos sean *a*) espadas, *b*) ases, *c*) cartas rojas.

SOLUCIÓN

En una baraja de 52 cartas hay 13 espadas, 4 ases y 26 cartas rojas.

$$a)\quad p = \left(\frac{13}{52}\right)^3 = \frac{1}{64} \qquad b)\quad p = \left(\frac{4}{52}\right)^3 = \frac{1}{2\,197} \qquad c)\quad p = \left(\frac{26}{52}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

27.7 Las posibilidades que tiene una persona de que le toque un premio de \$500 son de 23 contra 2. ¿Cuál es el valor de la esperanza matemática?

SOLUCIÓN

$$\text{Esperanza} = \text{probabilidad de que le toque} \times \text{valor del premio} = \left(\frac{2}{23+2}\right)(\$500) = \$40:$$

27.8 En una caja hay 9 boletos numerados del 1 al 9. Si se extraen dos al azar, determine la probabilidad p de que *a*) ambos boletos sean impares, *b*) ambos sean pares, *c*) uno sea impar y el otro par, *d*) sean los números 2 y 5.

SOLUCIÓN

Hay 5 boletos impares y 4 pares.

$$a)\quad p = \frac{\text{número de selecciones en las que 2 de 5 sean boletos impares}}{\text{número de selecciones de 2 de 9 boletos}} = \frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{5}{18}$$

$$b)\quad p = \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{6} \qquad c)\quad p = \frac{{}_5C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_9C_2} = \frac{5 \cdot 4}{36} = \frac{5}{9} \qquad d)\quad p = \frac{{}_2C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{36}$$

27.9 Una bolsa contiene 6 bolas rojas y 8 azules. Si se extraen 3 bolas al azar, encuentre la probabilidad p de sacar, *a*) tres rojas, *b*) tres azules, *c*) dos blancas y una roja, *d*) por lo menos una roja, *e*) una de cada color, *f*) una roja, una blanca y una azul en este orden.

SOLUCIÓN

a) $p = \dfrac{\text{número de selecciones de 3 bolas rojas de 6}}{\text{número de selecciones de 3 de 18 bolas}} = \dfrac{{}_6C_3}{{}_{18}C_3} = \dfrac{5}{204}$

b) $p = \dfrac{{}_8C_3}{{}_{18}C_3} = \dfrac{7}{102}$

c) $p = \dfrac{{}_4C_2 \cdot {}_6C_1}{{}_{18}C_3} = \dfrac{3}{68}$

d) Probabilidad de que ninguna sea roja $= \dfrac{(4+8)C_3}{{}_{18}C_3} = \dfrac{{}_{12}C_3}{{}_{18}C_3} = \dfrac{55}{204}$.

De aquí que la probabilidad de que por lo menos una sea roja $= 1 - \dfrac{55}{204} = \dfrac{149}{204}$.

e) $p = \dfrac{6 \cdot 4 \cdot 8}{{}_{18}C_3} = \dfrac{6 \cdot 4 \cdot 8}{18 \cdot 17 \cdot 16/6} = \dfrac{4}{17}$

f) $p = \dfrac{4}{17} \cdot \dfrac{1}{3!} = \dfrac{4}{17} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{51}$ o $p = \dfrac{6 \cdot 4 \cdot 8}{{}_{18}P_3} = \dfrac{6 \cdot 4 \cdot 8}{18 \cdot 17 \cdot 16} = \dfrac{2}{51}$

27.10 De una baraja de 52 cartas se sacan tres naipes. Determine la probabilidad p de que *a*) sean todas ases, *b*) sean el as de tréboles, el de corazones y el de picas, en este orden, *c*) sean todos de tréboles, *d*) sean todos del mismo palo, *e*) no haya dos del mismo palo.

SOLUCIÓN

a) Hay ${}_{52}C_3$ formas de sacar 3 cartas del mazo de 52, y ${}_4C_3$ de sacar 3 ases de entre los 4.

Luego, $p = \dfrac{{}_4C_3}{{}_{52}C_3} = \dfrac{{}_4C_1}{{}_{52}C_3} = \dfrac{1}{5\,525}$.

b) Hay ${}_{52}P_3$ formas de sacar 3 naipes del mazo de 52, teniendo en cuenta el orden establecido, y sólo existe un caso favorable.

Luego, $p = \dfrac{1}{{}_{52}P_3} = \dfrac{1}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \dfrac{1}{132\,600}$.

c) Hay ${}_{13}C_3$ formas de sacar 3 tréboles de entre 13.

Luego, $p = \dfrac{{}_{13}C_3}{{}_{52}C_3} = \dfrac{11}{850}$.

d) Hay 4 palos cada uno formado por 13 naipes. De aquí que hay 4 formas de que el naipe sea uno de ellos y ${}_{13}C_3$ maneras de obtener 3 naipes de un palo dado.

Luego, $p = \dfrac{4 \cdot {}_{13}C_3}{{}_{52}C_3} = \dfrac{22}{425}$.

e) Hay ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$ formas de sacar 3 de los cuatro palos y $13 \cdot 13 \cdot 13$ maneras de seleccionar un naipe de cada uno de los 3 palos dados.

Luego, $p = \dfrac{4 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13}{{}_{52}C_3} = \dfrac{169}{425}$.

27.11 ¿Cuál es la probabilidad de que dos naipes, distintos y cualesquiera, de una baraja de 52 estén juntos sin tener en cuenta el palo?

SOLUCIÓN

Considere, por ejemplo, la probabilidad de que un as y un rey estén juntos. En la baraja hay 4 ases y 4 reyes. Por lo tanto, un as se puede escoger de 4 formas y, una vez realizado, se puede elegir un rey de otras 4 maneras. Luego, un as y después un rey se puede obtener de $4 \cdot 4 = 16$ maneras. Análogamente, un rey y luego un as se puede obtener de 16 maneras. Un as y un rey pueden estar juntos de $2 \cdot 16 = 32$ maneras.

Por cada una de las combinaciones (as y rey), el resto de los 50 naipes y la propia combinación se pueden permutar de 51! formas. El número de casos posibles es, pues, 32(51!). Como el número total de posiciones de todos los naipes en la baraja es 52!, la probabilidad pedida es

$$\frac{32(51!)}{52!} = \frac{32}{52} = \frac{8}{13}.$$

27.12 El número total de boletos de una rifa es 20. Sabiendo que hay 2 premios, encuentre la probabilidad que tiene un individuo que adquiere 2 boletos de que le toque *a*) los dos premios, *b*) ninguno de ellos, *c*) uno de ellos.

SOLUCIÓN

a) El número de casos posibles es ${}_{20}C_2$.
Luego la probabilidad de que le toquen los dos premios es $\dfrac{1}{{}_{20}C_2} = \dfrac{1}{190}$.

Otro método: La probabilidad de que le toque el primer premio es $2/20 = 1/10$. Después de haber salido el primer premio (él tiene un boleto y hay 19 entre los que debe salir el segundo) la probabilidad de que le toque el segundo premio es $1/9$.

Luego, la probabilidad de que le toquen los dos premios es $\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{19}\right) = \dfrac{1}{190}$.

b) Hay 20 boletos de los cuales 18 no tienen premio.

Luego, la probabilidad de que no le toque premio es $\dfrac{{}_{18}C_2}{{}_{20}C_2} = \dfrac{153}{190}$.

Otro método: La probabilidad de que no le toque el primer premio es $1 - 2/20 = 9/10$. Si no le toca el primero (él tiene 2 boletos), la probabilidad de que no le toque el segundo premio es $1 - 2/19 = 17/19$.

Luego, la probabilidad de que no le toque premio es $\dfrac{9}{10}\left(\dfrac{17}{19}\right) = \dfrac{153}{190}$.

c) Probabilidad de que le toque uno de los dos premios

$$= 1 - \text{ probabilidad de que no le toque premio } - \text{ probabilidad de que le toquen los dos premios}$$

$$= 1 - \frac{153}{190} - \frac{1}{190} = \frac{36}{190} = \frac{18}{95}.$$

Otro método:

$$\text{Probabilidad de que le toque el primer premio, pero no el segundo } = \frac{2}{20}\left(\frac{18}{19}\right) = \frac{9}{95}.$$

$$\text{Probabilidad de que no le toque el primer premio, pero sí el segundo } = \frac{18}{20}\left(\frac{2}{19}\right) = \frac{9}{95}.$$

$$\text{Luego, la probabilidad de que le toque uno de los dos } = \frac{9}{95} + \frac{9}{95} = \frac{18}{95}.$$

27.13 Una caja contiene 7 boletos numerados del 1 al 7. Si se extraen, sucesivamente 3 boletos, determine la probabilidad de que sean alternadamente impar, par, impar o par, impar, par.

SOLUCIÓN

La probabilidad de que la primera sea impar es $(4/7)$, de que la segunda sea par $(3/6)$ y de que la tercera sea impar $(3/5)$; en consecuencia, la probabilidad en el primer caso es $\frac{4}{7}\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{35}$.

La probabilidad de que la primera sea par es $(3/7)$, de que la segunda sea impar $(4/6)$ y de que la tercera sea par $(2/5)$; luego, la probabilidad en el segundo caso es $\frac{3}{7}\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{35}$.

Por lo tanto, la probabilidad para los dos casos es $\frac{6}{35} + \frac{4}{35} = \frac{2}{7}$.

Otro método. Variaciones de 7 elementos tomados de 3 en 3 $= {}_7P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.
Número de ellas de la forma impar, par, impar $= 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.
Número de ellas de la forma par, impar, par $= 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$.

Probabilidad pedida $= \frac{36 + 24}{210} = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$.

27.14 Las probabilidades que tienen A, B y C de resolver el mismo problema son $4/5$, $2/3$ y $3/7$, respectivamente. Si intentan hacerlo los tres, determine la probabilidad de que se resuelva el problema.

SOLUCIÓN

Las probabilidades que tienen A, B y C de no resolverlo son $1 - 4/5 = 1/5$, $1 - 2/3 = 1/3$, $1 - 3/7 = 4/7$, respectivamente.

Luego la probabilidad de que lo resuelvan entre los tres es $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{7}\right)$.

De aquí que la probabilidad de que los 3 tengan éxito, es decir, de que al menos uno lo resuelva, es

$$1 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = 1 - \frac{4}{105} = \frac{101}{105}.$$

27.15 La probabilidad de que cierto hombre viva de aquí a 25 años es $3/7$ y la probabilidad de que su esposa viva de aquí a 25 años es $4/5$. Determine la probabilidad de que, de aquí a 25 años, *a*) ambos estén vivos, *b*) el menos uno de ellos esté vivo, *c*) viva solamente el esposo.

SOLUCIÓN

a) La probabilidad de que vivan los dos es $\frac{3}{7}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{35}$.

b) La probabilidad de que hayan muerto los dos es $\left(1 - \frac{3}{7}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{7}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{35}$.

Luego, la probabilidad de que viva por lo menos uno de ellos es $1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$.

c) La probabilidad de que viva el marido es $3/7$ y la de que no viva su esposa es $1 - 4/5 = 1/5$.

Luego, la probabilidad de que viva solamente el marido es $\frac{3}{7}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{35}$.

27.16 Para ocupar cierta vacante se presentan 3 candidatos, A, B y C. Las posibilidades de A son de 7 contra 5 y las de B de 1 contra 3. *a*) Encuentre la probabilidad de que A o B ocupen el puesto, *b*) ¿cuáles son las posibilidades a favor de C?

SOLUCIÓN

a) La probabilidad de que A gane: $\frac{7}{7 + 5} = \frac{7}{12}$, que B gane: $\dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$.

De aquí que la probabilidad de que A o B ganen $= \dfrac{7}{12} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{6}$.

b) La probabilidad de que C gane es: $1 - \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{6}$.

Luego, las posibilidades a favor de C son de 1 contra 5.

27.17 Una bolsa contiene 5 monedas de 10 centavos y 2 de 25 centavos y una segunda bolsa contiene 1 moneda de 10 centavos y 3 de 25 centavos. Si se saca una moneda de una de ellas al azar, encuentre la probabilidad de que sea de 25 centavos.

SOLUCIÓN

La probabilidad de sacar la moneda de la primera bolsa es $(1/2)$ y la de sacar de ella una moneda de 25 centavos es $(2/7)$; por lo tanto, la probabilidad será $(1/2)(2/7) = 1/7$.

La probabilidad de sacar una moneda de la segunda bolsa es $(1/2)$ y la de sacar de ella una moneda de 25 centavos es $(3/4)$; por lo tanto, la probabilidad será $(1/2)(3/4) = 3/8$.

La probabilidad que se pide es $= \dfrac{1}{7} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{29}{56}$.

27.18 Una bolsa contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Cuatro personas, A, B, C y D, en este orden, sacan una sola bola y la dejan fuera de la bolsa. La que primero saque una bola blanca tiene un premio de \$10. Calcule la esperanza matemática de cada persona.

SOLUCIÓN

La probabilidad que tiene A de ganar es $\dfrac{2}{5}$, y su esperanza matemática es $\dfrac{2}{5}(\$10) = \$4$.

Para encontrar la esperanza de B: La probabilidad que tiene A de no acertar es $1 - 2/5 = 3/5$. Si A no acierta, la bolsa contiene 2 bolas blancas y 2 negras. Entonces, la probabilidad que tiene B, si A falla, es $2/4 = 1/2$. Luego, la probabilidad de ganar de B es $= (3/5)(1/2) = 3/10$ y su esperanza matemática de \$3.

Para encontrar la esperanza de C: La probabilidad que tiene A de fallar es $3/5$ y la correspondiente de B es $1 - 1/2 = 1/2$. Si A y B fallan, la bolsa contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra. Entonces, la probabilidad de C, si A y B fallan, es $2/3$. Luego, la probabilidad de ganar de C es $\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{5}$, y su esperanza matemática de \$2.

Si A, B y C fallan, solamente quedan en la bolsa bolas blancas y D acertará siempre. Luego, la probabilidad de ganar de D es $\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{1}{10}$, y la esperanza matemática de \$1.

Comprobación: $\$4 + \$3 + \$2 + \$1 = \$10$ y $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} = 1$.

27.19 Once libros, de los cuales 5 son de ingeniería, 4 de matemáticas y 2 de química, se colocan al azar en una estantería. Encuentre la probabilidad p de que los libros de cada materia están todos juntos.

SOLUCIÓN

Cuando los libros de cada materia están juntos, los libros de ingeniería pueden disponerse en 5! formas, los de matemáticas en 4!, los de química en 2!, y los tres grupos en 3! formas.

$$p = \frac{\text{formas en las que los libros de cada tipo pueden estar juntos}}{\text{número total de formas de disponer 11 libros}} = \frac{5!4!2!3!}{11!} = \frac{1}{1\,155}.$$

27.20 Cinco bolas rojas y 4 blancas se colocan al azar en una fila. Encuentre la probabilidad p de que las bolas de los extremos sean rojas.

SOLUCIÓN

Número de formas en que se puedan colocar 5 bolas rojas y 4 blancas $= \dfrac{(5+4)!}{5!4!} = \dfrac{9!}{5!4!} = 126$.

Arreglos donde las bolas de los extremos sean rojas $= \dfrac{(9-2)!}{(5-2)!4!} = \dfrac{7!}{3!4!} = 35.$

De aquí que la probabilidad pedida sea $p = \dfrac{35}{126} = \dfrac{5}{18}.$

27.21 Una bolsa contiene 6 monedas de cobre y 1 de plata; una segunda bolsa contiene 4 monedas de cobre. Se sacan 5 monedas de la primera y se introducen en la segunda y, a continuación, se sacan 2 monedas de la segunda y se introducen en la primera. Encuentre la probabilidad de que la moneda de plata esté *a*) en la segunda bolsa, *b*) en la primera bolsa.

SOLUCIÓN

Inicialmente, la primera bolsa contiene 7 monedas. Al sacar de ella 5 e introducirlas en la segunda, la probabilidad de que la moneda de plata sea una de las introducidas es $5/7$ y la probabilidad de que continúe en la primera bolsa es $2/7$.

La segunda bolsa contiene ahora $5 + 4 = 9$ monedas. Al final, después de que 2 de estas monedas se hayan pasado a la primera bolsa, la probabilidad de que la moneda de plata esté en la segunda es $\dfrac{5}{7}\left(\dfrac{7}{9}\right) = \dfrac{5}{9}$, y la probabilidad de que esté en la primera es $\dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{7}\left(\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{4}{9}\left(\text{o } 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}\right).$

27.22 Calcule la probabilidad de sacar dos "unos" al tirar simultáneamente 9 dados.

SOLUCIÓN

La probabilidad de que dos de los 9 dados den lugar a dos "unos" es $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{6}\right) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^2$. La probabilidad de que los otros 7 dados den lugar a "unos" es $\left(1 - \dfrac{1}{6}\right)^7 = \left(\dfrac{5}{6}\right)^7$. Como se pueden formar ${}_9C_2$ pares diferentes con 9 dados, la probabilidad de obtener exactamente 1 par de "unos" es ${}_9C_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^7 = \dfrac{78\,125}{279\,936}.$

Aplicando al fórmula: Probabilidad $= {}_nC_r\, p^r q^{n-r} = {}_9C_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^7 = \dfrac{78\,125}{279\,936}.$

27.23 Encuentre la probabilidad de obtener una sola vez 9 puntos con dos dados tirándolos simultáneamente 3 veces.

SOLUCIÓN

Un 9 se puede obtener de 4 maneras: 3, 6; 4, 5; 5, 4; 6, 3.

En una tirada, la probabilidad de obtener 9 con los dos dados es $9 = 4/(6 \cdot 6) = \dfrac{1}{9}$, y la probabilidad de no obtener 9 es $1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$. La probabilidad de obtener un 9 en una tirada y de no conseguirlo en las otras dos es $= \left(\dfrac{1}{9}\right)\left(\dfrac{8}{9}\right)^2$. Como hay ${}_3C_1 = 3$ maneras distintas en las cuales una tirada es un 9 y las otras dos no, la probabilidad de conseguir una sola vez 9 puntos en tres tiradas es $= {}_3C_1\left(\dfrac{1}{9}\right)\left(\dfrac{8}{9}\right)^2 = \dfrac{64}{243}.$

Aplicando la fórmula: Probabilidad $= {}_nC_r\, p^r q^{n-r} = {}_3C_1\left(\dfrac{1}{9}\right)\left(\dfrac{8}{9}\right)^2 = \dfrac{64}{243}.$

27.24 Si la probabilidad media que tiene un alumno que comienza sus estudios de no terminar los cuatro años de carrera es $1/3$, encuentre la probabilidad p de que de 4 alumnos que empiezan, al menos 3 de ellos adquieran el título.

SOLUCIÓN

Probabilidad de que acaben 3 y 1 no $= {}_4C_3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right) = {}_4C_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right).$

Probabilidad de que acaben los 4 $= \left(\frac{2}{3}\right)^4$. De aquí que $p = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$.

Aplicando la fórmula: $p = 2\ (n - r + 1 = 4 - 3 + 1)$ primeros términos del desarrollo $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^4$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{81} + \frac{32}{81} = \frac{16}{27}.$$

27.25 Se lanza una moneda al aire 6 veces. ¿Cuál es la probabilidad p de obtener al menos tres caras? ¿Cuáles son las posibilidades de obtener por lo menos 3 caras?

SOLUCIÓN

La probabilidad de obtener cara, en una tirada, es igual a la probabilidad de obtener cruz, esto es, $1/2$.

La probabilidad de obtener 3 caras en 6 tiradas es $(1/2)^3$. La probabilidad de que no salga cara en las otras tres tiradas es $(1/2)^3$. Como se pueden formar ${}_6C_3$ grupos de 3 con las 6 tiradas, la probabilidad de obtener exactamente 3 caras es,

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

De manera similar: la probabilidad de obtener 4 caras $= {}_6C_4(1/2)^6 = {}_6C_2(1/2)^6$,
la probabilidad de obtener 5 caras $= {}_6C_5(1/2)^6 = {}_6C_1(1/2)^6$,
la probabilidad de obtener 6 caras $= (1/2)^6$.

De aquí que

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6(1 + {}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^6(1 + 6 + 15 + 20) = \frac{21}{32}.$$

Las posibilidades a favor de obtener por lo menos 3 caras es de 21:11 o $21/11$.
Aplicando la fórmula: $p = 4\ (n - r + 1 = 6 - 3 + 1)$ primeros términos del desarrollo $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^6$, esto es,

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{21}{32}.$$

27.26 Determine la probabilidad p de que de los 5 hijos de una familia haya por lo menos 2 niños y 1 niña. Se supone que la probabilidad de nacer niño o niña es $1/2$.

SOLUCIÓN

Los tres casos favorables son: 2 niños, 3 niñas; 3 niños, 2 niñas; 4 niños, 1 niña.

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^5({}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4) = \frac{1}{32}(10 + 10 + 5) = \frac{25}{32}.$$

27.27 La probabilidad de que un alumno tome la materia de química y esté en el cuadro de honor es de 0.042. La probabilidad de que un alumno esté en el cuadro de honor es de 0.21. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante esté tomando la materia de química, dado que está en el cuadro de honor?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} P(\text{esté tomando química}|\text{esté en el cuadro de honor}) &= \frac{P(\text{tome química y esté en el cuadro de honor})}{P(\text{esté en el cuadro de honor})} \\ &= \frac{0.042}{0.21} \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

27.28 En el Club Pine Valley Country, 32% de los socios juegan golf y son mujeres. Asimismo, 80% de los socios juegan golf. Si se selecciona un socio del club de manera aleatoria, encuentre la probabilidad de que dicho socio sea mujer dado que juega golf.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} P(\text{mujer}|\text{golfista}) &= \frac{P(\text{mujer y golfista})}{P(\text{golfista})} \\ &= \frac{0.32}{0.8} \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

Problemas propuestos

27.29 Determine la probabilidad de que al escoger al azar un dígito entre 1, 2, 3, …, 9, sea *a*) impar, *b*) par, *c*) múltiplo de 3.

27.30 Se lanza una moneda al aire 3 veces y sea H = cara y T = cruz. Encuentre la probabilidad de que se obtenga *a*) HTH, *b*) THH, *c*) HHH?

27.31 Se lanzan tres monedas al aire. Encuentre la probabilidad de obtener, *a*) tres caras, *b*) dos caras y una cruz.

27.32 Encuentre la probabilidad de obtener 7 puntos lanzando, una sola vez, dos dados al aire.

27.33 Encuentre la probabilidad de obtener 8 u 11 puntos lanzando, una sola vez, dos dados al aire.

27.34 Se lanza un dado al aire dos veces. Encuentre la probabilidad de obtener un 4 o un 5 en la primera y un 2 o un 3 en la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener un 1 en las dos tiradas?

27.35 Se lanza una moneda al aire seis veces. Encuentre la probabilidad de obtener por lo menos una cara.

27.36 Una bolsa contiene 5 discos numerados con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5. Encuentre la probabilidad de que al sacar tres bolas al azar, su suma sea mayor a 10.

27.37 Una caja contiene 5 bolas rojas, 8 blancas y 4 negras. Se sacan tres bolas al azar y se pide, *a*) probabilidad de que las tres sean blancas, *b*) probabilidad de que dos sean negras y una roja, *c*) probabilidad de que sean una de cada color.

27.38 De una baraja de 52 naipes se extraen 4. Encuentre la probabilidad de que *a*) sean todos reyes, *b*) sean dos reyes y dos ases, *c*) todos sean del mismo palo, *d*) todos sean tréboles.

27.39 Una mujer ganará $3.20 si lanzando 5 veces una moneda al aire se consigue sacar HTHTH, o bien THTHT, siendo H = cara y T = cruz. Encuentre la esperanza matemática.

27.40 Se reportó que en un accidente aéreo, tres de un total de veinte pasajeros resultaron lesionados. Entre los pasajeros se encontraban tres periodistas. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres pasajeros lesionados hayan sido periodistas?

27.41 Entre 5 hombres y 4 mujeres se tiene que formar un grupo de tres miembros. Si la selección se realiza al azar, encuentre la probabilidad de que *a*) las tres sean mujeres, *b*) dos sean hombres.

27.42 Seis personas se sientan alrededor de una mesa redonda. Encuentre la posibilidad de que dos personas determinadas ocupen lugares contiguos.

27.43 Dos personas, *A* y *B*, lanzan alternadamente una moneda al aire. El primero que saque cara es el que gana. Sabiendo que cada uno no puede tirar más de cinco veces en cada juego, encuentre la probabilidad de que la persona que lance en primer lugar sea la que gane la partida. ¿Cuáles son las posibilidades en contra de *A* si es él quien empieza a tirar?

27.44 Se colocan al azar en una fila seis bolas rojas y 4 blancas. Encuentre la probabilidad de que las dos bolas centrales sean del mismo color.

27.45 Se lanza 8 veces una moneda al aire. Encuentre la probabilidad de que se obtenga, *a*) exactamente 4 caras, *b*) por lo menos 2 cruces, *c*) como máximo 5 caras, *d*) exactamente 3 cruces.

27.46 Se hacen dos tiradas con dos dados a la vez. Determine la probabilidad de obtener *a*) exactamente 11 puntos en una sola vez, *b*) 10 puntos en dos veces.

27.47 ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos 11 puntos en tres tiradas con dos dados?

27.48 Se lanza una moneda al aire 10 veces. Encuentre la probabilidad de que el número de caras que se obtengan sea igual o mayor que 3 e igual o menor que 6.

27.49 La probabilidad de que sea robado un automóvil y encontrado en un lapso de tiempo de una semana es 0.0006. La probabilidad de que un automóvil sea robado es 0.0015. ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil robado sea encontrado en una semana?

27.50 En una pizzería, 95% de los clientes ordenan pizza. Si 65% de los clientes que ordenaron pizza también ordenan banderillas, encuentre la probabilidad de que un cliente que haya ordenado pizza también haya ordenado banderillas.

27.51 En una plaza comercial de gran tamaño, una agencia de mercadotecnia llevó a cabo una encuesta en 100 personas respecto a la prohibición de fumar en las instalaciones. De los 60 no fumadores encuestados, 48 optaron por que se prohibiera fumar. De los 40 fumadores encuestados, 32 optaron por que se prohibiera fumar. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar del grupo encuestado haya preferido que se prohibiera fumar dado que la persona sea no fumadora?

27.52 En una zona residencial, 35% de las casas tienen estancia familiar y chimenea, mientras que 70% tienen estancia familiar. ¿Cuál es la probabilidad de que una casa seleccionada al azar en esa zona residencial, tenga chimenea dado que tiene estancia familiar?

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

27.29 *a*) $5/9$ *b*) $4/9$ *c*) $1/3$

27.30 *a*) $1/8$ *b*) $1/8$ *c*) $1/8$

27.31 *a*) $1/8$ *b*) $3/8$

27.32 $1/6$

27.33 $7/36$

27.34 $1/9$, $25/36$

27.35 $63/64$

27.36 $1/5$

27.37 *a*) $\frac{1}{170}$ *b*) $\frac{7}{34}$ *c*) $\frac{4}{17}$

27.38 *a*) $\dfrac{1}{270\,725}$ *b*) $\dfrac{36}{270\,725}$ *c*) $\dfrac{44}{4\,165}$ *d*) $\dfrac{11}{4\,165}$

27.39 20 centavos

27.40 $1/1\,140$

27.41 *a*) $1/21$ *b*) $10/21$

27.42 $2/5$

27.43 $\dfrac{21}{32}$, 21:11

27.44 $\dfrac{7}{15}$

27.45 *a*) $\dfrac{35}{128}$ *b*) $\dfrac{247}{256}$ *c*) $\dfrac{219}{256}$ *d*) $\dfrac{7}{32}$

27.46 *a*) $\dfrac{17}{162}$ *b*) $\dfrac{1}{144}$

27.47 $\dfrac{919}{5\,832}$

27.48 $\dfrac{99}{128}$

27.49 0.4

27.50 $\dfrac{13}{19}$ (aproximadamente 68%)

27.51 0.8

27.52 0.5

28 DETERMINANTES

28.1 DETERMINANTES DE SEGUNDO ORDEN

El símbolo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

formado por los cuatro números a_1, b_1, a_2, b_2, ordenados en una matriz de dos renglones y dos columnas representa un *determinante de segundo orden* o *determinante de orden dos*. Los cuatro números anteriores se denominan *elementos* de la matriz o del determinante. Por definición,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$$

Por ejemplo, $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2) - (3)(-1) = -4 + 3 = -1.$$

Los elementos 2 y 3 constituyen la primera fila y los -1 y -2 la segunda fila. Los elementos 2 y -1 forman la primera columna y los elementos 3 y -2 la segunda columna. Un determinante de primer orden es un solo número.

28.2 LA REGLA DE CRAMER

Los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se pueden resolver empleando el concepto de determinante de una matriz de segundo orden. Dado el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{1}$$

aplicando uno de los métodos del capítulo 15, se obtiene la solución

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \qquad (a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0).$$

Estos valores de x e y se pueden expresar en función de determinantes de segundo orden como sigue:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{2}$$

La forma de los determinantes es fácil de recordar si uno tiene en mente lo siguiente:

a) Los denominadores de (2) están dados por el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

en el que sus elementos son los coeficientes de x e y dispuestos como en las ecuaciones dadas (1). Este determinante, que se suele representar por la letra D, recibe el nombre de *determinante de los coeficientes.*

b) El numerador de la solución de cualquiera de las incógnitas es la misma que el determinante de los coeficientes D con la excepción de que la columna de coeficientes de la incógnita a determinar es reemplazada por la columna de constantes del lado derecho de las ecuaciones (1). Cuando la columna de coeficientes de la variable x en el determinante D se reemplaza con la columna de constantes, el nuevo determinante se expresa como D_x. Cuando la columna de los coeficientes y del determinante D se reemplaza por la columna de constantes, el nuevo determinante se expresa como D_y.

EJEMPLO 28.1. Resuelva el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = -3. \end{cases}$

El denominador de x e y es $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 3(1) = -7.$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8(-2) - 3(-3) = -7, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3) - 8(1) = -14$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

Por lo tanto, la solución del sistema es (1, 2).

El método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante determinantes se llama *Regla de Cramer.* Si el determinante $D = 0$, entonces no se puede utilizar la Regla de Cramer para resolver el sistema.

28.3 DETERMINANTES DE TERCER ORDEN

El símbolo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

formado por nueve números ordenados en una matriz de tres renglones y tres columnas representa el *determinante de una matriz de tercer orden.* Por definición, el valor de este determinante viene dado por el polinomio,

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

que se llama desarrollo del determinante.

Con el objeto de recordar esta definición, se ofrece el esquema siguiente. Reescriba las dos primeras columnas a la derecha del determinante de la manera siguiente:

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

a) Forme los productos de los elementos en cada una de las 3 diagonales mostradas que van de izquierda a derecha y anteponga a cada uno de estos 3 términos el signo positivo.

b) Forme los productos de los elementos en cada una de las 3 diagonales mostradas que van de derecha a izquierda y anteponga a cada uno de estos 3 términos el signo negativo.

c) La suma algebraica de los seis productos de (1) y (2) es el desarrollo del determinante.

EJEMPLO 28.2.

Evalúe
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Reescribiendo,

$$\begin{array}{|ccc|cc} 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -2 & -3 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

El valor del determinante es,

$$(3)(1)(2) + (-2)(-1)(-2) + (2)(6)(-3) - (2)(1)(-2) - (3)(-1)(-3) - (-2)(6)(2) = -15.$$

La Regla de Cramer se aplica también en la resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas x, y, z

$$\begin{cases} a_1x \quad b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{3}$$

por determinantes. Es una extensión de la Regla de Cramer para la resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolviendo el sistema de ecuaciones (3) por uno de los métodos del capítulo 12, se obtiene,

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + c_1d_2b_3 + b_1c_2d_3 - c_1b_2d_3 - b_1d_2c_3 - d_1c_2b_3}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1d_2c_3 - a_1c_2b_3}$$

$$y = \frac{a_1d_2c_3 + c_1a_2d_3 + d_1c_2a_3 - c_1d_2a_3 - d_1a_2c_3 - a_1c_2d_3}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1d_2c_3 - a_1c_2b_3}$$

$$z = \frac{a_1b_2d_3 + d_1a_2b_3 + b_1d_2a_3 - d_1b_2a_3 - b_1a_2d_3 - a_1d_2b_3}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3}$$

Esta solución se puede expresar por medio de determinantes como sigue:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad z = \frac{D_z}{D} \tag{4}$$

D es el determinante de los coeficientes de x, y, z de las ecuaciones (3) y se supone que son diferentes a cero. Si D es cero, la Regla de Cramer no puede utilizarse para resolver el sistema de ecuaciones.

El método que involucra determinantes es fácil de recordar si uno toma en cuenta lo siguiente:

a) Los denominadores de (4) son el determinante D cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas x, y, z dispuestos como en las ecuaciones dadas (3).

b) El numerador correspondiente a cada una de las incógnitas se forma a partir del determinante de los coeficientes, D, sustituyendo la columna de los coeficientes de la incógnita que se despeja por la columna de términos independientes del sistema (3), pasados al segundo miembro.

c) La solución del sistema es (x, y, z) donde $x = \dfrac{D_x}{D}$, $\quad y = \dfrac{D_y}{D}$ $\quad$ y $\quad z = \dfrac{D_z}{D}$.

EJEMPLO 28.3. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = 6. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 3 + 1 + 1 - 12 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 12 + 4 + 6 - 3 - 16 = -3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 - 18 + 4 - 6 + 18 = 3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 8 + 9 + 3 + 4 - 36 = -6$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-3} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{3}{-3} = -1, \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-3} = 2$$

La solución del sistema es $(1, -1, 2)$.

28.4 DETERMINANTES DE ORDEN *n*

Un determinante de orden n se escribe como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Con esta notación, cada elemento se caracteriza por dos subíndices, el primero indica el *renglón* y el segundo la *columna* a las que pertenece o en donde se encuentra. Así, pues, a_{23} es el elemento del segundo renglón y tercera columna; a_{32} es el que corresponde al tercer renglón y la segunda columna.

La *diagonal principal* de un determinante está formada por los elementos de la matriz situados sobre la recta que une el primer elemento del primer renglón con el último del último renglón.

28.5 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

I. Si se intercambian los renglones por las columnas en un determinante, su valor no se modifica. Por consiguiente, todo teorema que se demuestre para los renglones, se verificará también para las columnas y viceversa.

EJEMPLO 28.4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

II. Si todos los elementos de un renglón (o columna) son nulos, el determinante vale cero.

EJEMPLO 28.5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

III. Si se permutan dos renglones (o columnas), el determinante cambia de signo.

EJEMPLO 28.6.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

IV. Si dos renglones (o columnas) de un determinante son idénticos, el valor del determinante es cero.

EJEMPLO 28.7.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = 0$$

V. Si todos los elementos de un renglón (o columna) de un determinante se multiplican por un mismo número p, el valor del determinante queda multiplicado por p.

EJEMPLO 28.8.

$$\begin{vmatrix} pa_{11} & a_{12} & a_{13} \\ pa_{21} & a_{22} & a_{23} \\ pa_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = p\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

VI. Si todos los elementos de un renglón (o columna) de un determinante son suma de dos (o más) términos, el determinante es igual a la suma de dos (o más) determinantes.

EJEMPLO 28.9.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

VII. Si todos los elementos de un renglón (o columna) de un determinante se suman con los elementos correspondientes de otra multiplicados por un número m, el valor del determinante no cambia.

EJEMPLO 28.10.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ma_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ma_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ma_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Estas propiedades se pueden demostrar en los casos particulares de los determinantes de segundo y tercer orden aplicando, simplemente, los desarrollos presentados en las secciones 28.2 y 28.3. En los problemas, se pueden ver las demostraciones de los casos generales.

28.6 MENORES

El menor de un elemento de un determinante de orden n es el determinante de orden $n - 1$ obtenido al suprimir el renglón y la columna a las que pertenece el elemento en cuestión.

Por ejemplo, el menor de a_{32} en el determinante de cuarto orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

se obtiene suprimiendo el renglón y la columna a las que pertenece a_{32}, resultando el determinante de tercer orden,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

El menor de un elemento se representa por una letra mayúscula. Por ejemplo, el menor correspondiente al elemento a_{32} se representa por A_{32}.

28.7 VALOR DE UN DETERMINANTE DE ORDEN *n*

El valor de un determinante puede obtenerse en términos de menores como sigue:

1. Se elige cualquier renglón (o columna).
2. Se multiplica cada elemento del renglón (o columna) por si menor correspondiente precedido por $(-1)^{i+j}$ donde $i + j$ es la suma del número del renglón i y el número de columna j. El menor de un elemento con el signo asociado se llama el *cofactor* del elemento.
3. Se suman algebraicamente los productos obtenidos en (2).

Por ejemplo, se desarrollará el determinante siguiente,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

por los elementos del tercer renglón. Los menores de a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34} son A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, respectivamente. El signo correspondiente al elemento a_{31} es $+$, ya que $(-1)^{3+1} = (-1)^4 = +1$. De manera similar, los signos asociados con los elementos a_{32}, a_{33}, a_{34} son $-$, $+$, $-$ respectivamente. Por lo tanto, el valor del determinante es,

$$a_{31}A_{31} - a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} - a_{34}A_{34}.$$

La propiedad VII resulta de gran utilidad para obtener ceros en un renglón o columna determinados. Esta propiedad, aunada al desarrollo de términos por medio de menores, facilita el cálculo del valor de un determinante.

28.8 REGLA DE CRAMER APLICADA A DETERMINANTES DE ORDEN *n*

La Regla de Cramer para la resolución de un sistema de n ecuaciones lineales simultáneas con n incógnitas es totalmente análoga a la proporcionada en la sección 28.2 para el caso de que $n = 2$ y en la sección 28.3 para el caso de que $n = 3$.

Sea el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = r_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = r_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = r_n. \end{array} \tag{1}$$

Sea D el determinante de los coeficientes de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Representando por D_k el determinante D en el que la columna k (que corresponde a los coeficientes de la incógnita x_k) se ha reemplazado por la columna de los coeficientes del miembro derecho de (1). Por lo tanto,

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}, \ldots \qquad \text{con tal que } D \neq 0:$$

Si $D \neq 0$, existe una y sólo una solución.

Si $D = 0$, el sistema de ecuaciones puede o no tener solución.

Las ecuaciones que no tiene solución simultánea se llaman *inconsistentes*; en caso contrario son consistentes.

Si $D = 0$ y al menos uno de los determinantes $D_1, D_2, \ldots, D_n \neq 0$, el sistema dado es inconsistente.

Si $D = D_1 = D_2 = \ldots = D_n = 0$, el sistema puede o no ser consistente.

Los sistemas de ecuaciones que tienen un número infinito de soluciones reciben el nombre de *indeterminados*. Si un sistema de ecuaciones es indeterminado, $D = 0$ y todos los determinantes $D_1, D_2, \ldots, D_n = 0$. Lo inverso, sin embargo, no siempre es cierto.

28.9 ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS

Si todos los términos independientes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de las ecuaciones (1) son cero, se dice que el sistema es *homogéneo*. En este caso, $D_1 = D_2 = D_3 = \ldots = D_n = 0$ y es válido el teorema siguiente.

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas tenga solución distinta de la trivial (donde todas las incógnitas son iguales a cero) es que el determinante de los coeficientes sea nulo, es decir, $D = 0$.

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas puede o no tener solución.

1. Si $m > n$, se puede obtener el valor de n de las incógnitas dadas. Si estos valores satisfacen a las $m - n$ ecuaciones restantes, el sistema es consistente, y en caso contrario es inconsistente.
2. Si $m < n$, se pueden determinar m de las incógnitas en función de las $m - n$ restantes.

Problemas resueltos

28.1 Evalúe los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (3)(4) - (2)(1) = 12 - 2 = 10$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (-1)(6) = -6 + 6 = 0$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (0)(-5) - (3)(2) = 0 - 6 = -6$

d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ y & y^2 \end{vmatrix} = xy^2 - x^2y$

e) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+5 \\ 3x-1 & x-3 \end{vmatrix} = (x+2)(x-3) - (2x+5)(3x-1) = -5x^2 - 14x - 1$

28.2 *a*) Demuestre que si en un determinante de segundo orden se intercambian los renglones por los columnas, el valor del determinante no varía.

b) Demuestre que si los elementos de un renglón (o columna) son proporcionales a los elementos correspondientes del renglón (o columna), el determinante es nulo.

SOLUCIÓN

a) Sea el determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

Si se intercambian los renglones por las columnas, el nuevo determinante es, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

b) El determinante cuyos elementos de un renglón son proporcionales a los de los otros es,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{vmatrix} = a_1kb_1 - b_1ka_1 = 0.$$

28.3 Encuentre los valores de x para los que $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = 0$.

SOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = (2x-1)(4x+2) - (2x+1)(x+1) = 6x^2 - 3x - 3 = 0.$$

Como $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1) = 0$ se obtiene $x = 1, -1/2$.

28.4 Despeje las incógnitas en cada uno de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$

SOLUCIÓN

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -22, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -22, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-22}{-22} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{-22} = \frac{1}{2}$$

La solución del sistema es $(1, 1/2)$.

b) $\begin{cases} 3u + 2v = 18 \\ -5u - v = 12 \end{cases}$

SOLUCIÓN

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = +7, \qquad D_u = \begin{vmatrix} 18 & 2 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} = -42, \qquad D_v = \begin{vmatrix} 3 & 18 \\ -5 & 12 \end{vmatrix} = 126$$

$$u = \frac{D_u}{D} = \frac{-42}{7} = -6, \qquad v = \frac{D_v}{D} = \frac{126}{7} = 18$$

La solución del sistema es $(-6, 18)$.

c) $\begin{cases} 5x - 2y - 14 = 0 \\ 2x + 3y + \ \ 3 = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN

Reescriba como $\begin{cases} 5x - 2y = 14 \\ 2x + 3y = -3. \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 19, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 36, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 5 & 14 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -43$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{36}{19}, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-43}{19}$$

La solución del sistema es $(36/19, -43/19)$.

28.5 Despeje x e y

a) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{5} + \dfrac{7y+1}{10} = 10 & (1) \quad \text{Multiplique (1) por 10: } 6x + 7y = 103. \\[2ex] \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{2y-5}{3} = 3 & (2) \quad \text{Multiplique (2) por 6: } 3x - 4y = -1. \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -45, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 103 & 7 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -405, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 6 & 103 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -315$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-405}{-45} = 9, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-315}{-45} = 7$$

La solución del sistema es

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{y+1} - \dfrac{3}{x+1} = 0 \quad (1) & \text{Multiplique (1) por } (x+1)(y+1)\text{: } 2x - 3y = 1. \\[2ex] \dfrac{2}{x-7} + \dfrac{3}{2y-3} = 0 \quad (2) & \text{Multiplique (2) por } (x-7)(2y-3)\text{: } 3x + 4y = 27. \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 27 & 4 \end{vmatrix} = 85, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 27 \end{vmatrix} = 51$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{85}{17} = 5, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{51}{17} = 3$$

La solución del sistema es $(5, 3)$.

28.6 Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes

a) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{6}{y} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Son ecuaciones lineales en $\dfrac{1}{x}$ y $\dfrac{1}{y}$.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 21, \qquad D_{1/x} = \begin{vmatrix} 1/6 & -6 \\ 1/2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{7}{2}, \qquad D_{1/y} = \begin{vmatrix} 3 & 1/6 \\ 2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{D_{1/x}}{D} = \frac{7/2}{21} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{y} = \frac{D_{1/y}}{D} = \frac{7/6}{21} = \frac{1}{18}$$

$$x = \frac{1}{1/x} = \frac{1}{1/6} = 6, \qquad y = \frac{1}{1/y} = \frac{1}{1/18} = 18$$

La solución del sistema es (6, 18).

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x} - \dfrac{8}{5y} = 3 \\ \dfrac{4}{3y} - \dfrac{1}{x} = 1 \end{cases}$ puede expresarse como $\begin{cases} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{8}{5}\left(\dfrac{1}{y}\right) = 3 \\ -\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1. \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3/2 & 8/5 \\ -1 & 4/3 \end{vmatrix} = \frac{18}{5}, \qquad D_{1/x} = \begin{vmatrix} 3 & 8/5 \\ 1 & 4/3 \end{vmatrix} = \frac{12}{5}, \qquad D_{1/y} = \begin{vmatrix} 3/2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{D_{1/x}}{D} = \frac{12/5}{18/5} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{y} = \frac{D_{1/y}}{D} = \frac{9/2}{18/5} = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{1}{1/x} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}, \qquad y = \frac{1}{1/y} = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$$

La solución del sistema es (3/2, 4/5).

28.7 Calcule los determinantes siguientes

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Repita las primeras dos columnas

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right.$$

$(3)(4)(2) + (-2)(5)(6) + (2)(1)(-1) - (2)(4)(6) - (3)(5)(-1) - (-2)(1)(2) = -67$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 29$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -15$

d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

e) $\begin{vmatrix} (x-2) & (y+3) & (z-2) \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 11x + 6y + z - 6$

28.8 *a*) Demuestre que si dos renglones (o dos columnas) de un determinante de tercer orden son proporcionales, el valor del determinante es cero.

b) Demuestre que si los elementos de cualquier renglón (o columna) se multiplican por cualquier constante y se suman los resultados con los elementos correspondientes de cualquier otro renglón (o columna), el valor del determinante no varía.

SOLUCIÓN

a) Se tiene que demostrar que,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

donde los elementos de los primero y segundo renglones son proporcionales. Lo anterior se demuestra mediante la expansión del determinante.

b) Sea el determinante,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Se tiene que demostrar que si k es una constante,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + ka_2 & b_3 + kb_2 & c_3 + kc_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

habiendo multiplicado cada elemento del segundo renglón del determinante dado por k y sumado a estos productos los elementos del tercer renglón. El resultado se demuestra desarrollando ambos determinantes y observando que son iguales.

28.9 Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = -3 \\ x - 3y - 3z = -2 \end{cases}$

Se tiene $$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 42 \qquad \text{y}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 42, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 84, \quad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -42$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{42}{42} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{84}{42} = 2, \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-42}{42} = -1$$

La solución del sistema es $(1, 2, -1)$.

b) $\begin{cases} x + 2z = 7 \\ 3x + y = 5 \\ 2y - 3z = -5 \end{cases}$

Se puede escribir como $\begin{cases} x + 0y + 2z = 7 \\ 3x + y + 0z = 5 \\ 0x + 2y - 3z = -5. \end{cases}$

Por lo tanto $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9$ y

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 18, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 27$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{18}{9} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{27}{9} = 3$$

La solución del sistema es (1, 2, 3).

28.10 Las ecuaciones para encontrar las intensidades de corriente i_1, i_2 e i_3 en una red eléctrica determinada son,

$$\begin{cases} 3i_1 - 2i_2 + 4i_3 = 2 \\ i_1 + 3i_2 - 6i_3 = 8 \\ 2i_1 - i_2 - 2i_3 = 0. \end{cases}$$

Encuentre i_3.

SOLUCIÓN

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-22}{-44} = \frac{1}{2}$$

28.11 Escriba el desarrollo del determinante mediante el uso de menores en el primer renglón.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN

El desarrollo es $a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$

$a_{11}(+1)(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-1)(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(+1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$

$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$

El desarrollo que se requiere es $a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$

28.12 Demuestre la propiedad III: Si se intercambian dos renglones (o columnas), se modifica el signo del determinante.

SOLUCIÓN

En el caso de los determinantes de tercer orden, se debe demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= +\ a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= +\ a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \\
-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} &= -\left(a_{31}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}\right) \\
&= -(+a_{31}(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}) - a_{32}(a_{21}a_{13} - a_{23}a_{11}) + a_{33}(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})) \\
&= -a_{31}a_{22}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{32}a_{21}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} + a_{33}a_{11}a_{22} \\
&= +\ a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

La expansión de los dos miembros de la ecuación da como resultado la misma expresión. Por lo tanto, la propiedad es válida para determinantes de tercer orden. Los métodos de prueba son válidos para el caso general.

28.13 Demuestre la propiedad IV: Si dos renglones (o columnas) son idénticas, el determinante vale cero.

SOLUCIÓN

Sea D el valor del determinante. Mediante la propiedad III, el intercambio de dos renglones idénticos deberá modificar el valor a $-D$. Puesto que los determinantes son los mismos, $D = -D$ o $D = 0$.

28.14 Demuestre la propiedad V: Si se multiplican los elementos de un renglón (o columna) por un mismo número p, el valor del determinante queda multiplicado por p.

SOLUCIÓN

Cada término del desarrollo contiene un solo elemento del renglón que se ha multiplicado por p y, por lo tanto, en cada término figurará el factor p. Al ser este factor común a todos los términos, el determinante queda multiplicado por p.

28.15 Demuestre la propiedad VI: Si cada elemento de un renglón (o columna) de un determinante son suma de dos (o más) términos, el determinante es igual a la suma de dos (o más) determinantes.

SOLUCIÓN

En el caso de determinantes de tercer orden, se tendrá que demostrar que,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se desarrollará cada determinante por menores utilizando la primera columna.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} + a'_{11})A_{11} - (a_{21} + a'_{21})A_{21} + (a_{31} + a'_{31})A_{31}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a'_{11}A_{11} - a'_{21}A_{21} + a'_{31}A_{31}$$

$$= (a_{11} + a'_{11})A_{11} - (a_{21} + a'_{21})A_{21} + (a_{31} + a'_{31})A_{31}.$$

La expansión de ambos miembros es idéntica. Por lo tanto, la propiedad es válida para los determinantes de tercer orden. El método de prueba es válido en el caso general.

28.16 Demuestre la propiedad VII: Si todos los elementos de un renglón (o columna) de un determinante se suman con los elementos correspondientes de otro multiplicados por un número m, el valor del determinante no varía.

SOLUCIÓN

En el caso de un determinante de tercer orden, se tendrá que demostrar que,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ma_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ma_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ma_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

De acuerdo con la propiedad VI, el miembro izquierdo de la ecuación puede escribirse como:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ma_{12} & a_{12} & a_{13} \\ ma_{22} & a_{22} & a_{23} \\ ma_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Este último determinante se puede escribir como,

$$m\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

que es igual a cero, según la propiedad IV.

28.17 Demuestre que,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & -2 \\ 9 & -3 & 6 & -5 \\ 12 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

SOLUCIÓN

El número 3 se puede sacar como factor común de los elementos de la primera columna, y el 2 de los elementos de la tercera columna, a partir de lo cual se obtiene:

$$(3)(2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

que es igual a cero, ya que la primera y tercera columnas son iguales.

28.18 Aplicando la propiedad IV, transforme el determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

en otro de igual valor que tenga nulos los elementos de la segunda y tercera columnas pertenecientes al primer renglón.

SOLUCIÓN

Multiplicando por 2 los elementos de la primera columna y sumándoles los correspondientes de la segunda columna se obtiene,

$$\begin{vmatrix} 1 & (2)(1)-2 & 3 \\ 2 & (2)(2)-1 & 4 \\ -2 & (2)(-2)+3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando por -3 los elementos de la primera columna del nuevo determinante y sumándoles los correspondientes de la tercera columna se obtiene,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & (-3)(1)+3 \\ 2 & 3 & (-3)(2)+4 \\ -2 & -1 & (-3)(-2)+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

El resultado se podría haber obtenido directamente, escribiendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & (2)(1)-2 & (-3)(1)+3 \\ 2 & (2)(2)-1 & (-3)(2)+4 \\ -2 & (2)(-2)+3 & (-3)(-2)+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Se han elegido los números 2 y -3 para obtener los ceros en los lugares deseados.

28.19 Aplicando la propiedad VII, transforme el determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

en otro de igual valor que tenga tres ceros en el cuarto renglón.

SOLUCIÓN

Multiplicando cada elemento de la primera columna (la columna *base*) por -3, -4, $+2$ y sumándoles, respectivamente, los correspondientes de las segunda, tercera y cuarta columnas, se obtiene,

$$\begin{vmatrix} 3 & (-3)(3)+6 & (-4)(3)+2 & (2)(3)+3 \\ -2 & (-3)(-2)+1 & (-4)(-2)-2 & (2)(-2)+2 \\ 4 & (-3)(4)-5 & (-4)(4)+1 & (2)(4)+4 \\ 1 & (-3)(1)+3 & (-4)(1)+4 & (2)(1)-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -10 & 9 \\ -2 & 7 & 6 & -2 \\ 4 & -17 & -15 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Observe que es más conveniente elegir una línea base que contenga el elemento 1.

28.20 Obtenga 4 ceros en una línea o columna del determinante de quinto orden:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN

Se elige como línea base el renglón sombreado y los ceros en la segunda columna. Multiplicando los elementos de este renglón por -5, -3, 3, -2 y sumándoles, respectivamente, los elementos correspondientes del primero, segundo, cuarto y quinto, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} -17 & 0 & -11 & 16 & 17 \\ -14 & 0 & -7 & 9 & 13 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 18 & 0 & 11 & -2 & -6 \\ -6 & 0 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

28.21 Obtenga tres ceros en un renglón o columna del determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

sin que se modifique su valor.

SOLUCIÓN

Es conveniente utilizar la propiedad VII para obtener un elemento igual a 1 en un renglón o columna. Por ejemplo, multiplicando cada elemento de la columna 2 por -1 y sumándoles los correspondientes de la columna 3, se obtiene

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & -7 & -2 \end{vmatrix}.$$

Tomando la tercera columna como base y multiplicando sus elementos por 2, -2, 2, sumándoles, respectivamente, los de la primera, segunda y cuarta columnas, se obtiene,

$$\begin{vmatrix} -1 & 8 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 14 & -15 & 6 & 16 \\ -10 & 19 & -7 & -16 \end{vmatrix}$$

que es igual al determinante dado.

28.22 Escriba el menor correspondiente y el cofactor del elemento del segundo renglón y tercera columna del determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Suprimiendo el renglón y columna que contienen al elemento, el menor complementario es

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Como el elemento pertenece al segundo renglón y tercera columna, y $2 + 3 = 5$ es un número impar, el signo asociado a él será menos. El cofactor es, por lo tanto,

$$-\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

28.23 Escriba los menores complementarios y cofactores de los elementos del cuarto renglón del determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Los elementos del cuarto renglón son $-3, -2, -4, 1$.

$$\text{Menor del elemento } -3 = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{Cofactor} = -\text{Menor}$$

$$\text{Menor del elemento } -2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{Cofactor} = +\text{ Menor}$$

$$\text{Menor del elemento } -4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{Cofactor} = -\text{Menor}$$

$$\text{Menor del elemento } 1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{Cofactor} = +\text{ Menor}$$

28.24 Exprese el valor del determinante del problema 28.23 en términos de los menores o cofactores.

SOLUCIÓN

Valor de determinante = suma de los elementos multiplicados por el cofactor asociado

$$= (-3)\left\{-\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right\} + (-2)\left\{+\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+ (-4)\left\{-\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}\right\} + (1)\left\{+\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

Después de desarrollar cada uno de los determinantes de tercer orden, el resultado obtenido es -53.

El método de cálculo aquí indicado es largo. Se puede, sin embargo, simplificar mucho transformando previamente el determinante dado en otro equivalente que tenga ceros en un renglón o columna aplicando la propiedad VII, como se hace en el problema siguiente:

28.25 Evalúe el determinante del problema 28.16 mediante la transformación en uno que tenga tres ceros en un renglón o columna y, después, expandiéndolo por menores.

SOLUCIÓN

Seleccionando la columna base indicada,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{vmatrix},$$

Multiplicando sus elementos por -2, -5, 3 y sumándoles, respectivamente, a las correspondientes de la primera, tercera y cuarta columnas, se obtiene

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 14 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 5 & -27 & 17 \\ 1 & -2 & 6 & -5 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando de acuerdo con los cofactores de los elementos en el segundo renglón se obtiene,

$$(0)(\text{su cofactor}) + (1)(\text{su cofactor}) + (0)(\text{su cofactor}) + (0)(\text{su cofactor})$$

$$= (1)(\text{su cofactor}) = 1\left\{+\begin{vmatrix} 7 & 14 & -4 \\ -9 & -27 & 17 \\ 1 & 6 & -5 \end{vmatrix}\right\}.$$

Desarrollando este determinante, resulta el valor -53, que coincide con el valor obtenido en el problema 28.23.

Observe que por este método se puede desarrollar un determinante de tercer orden en función de determinantes de segundo orden.

28.26 Encuentre el resultado de los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

Multiplicando los elementos de la base indicada por -2, 1, -3 y sumándoles, respectivamente, los correspondientes del segundo, tercero y cuarto renglones, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ -9 & 0 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 7 \\ 10 & 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 1\left\{-\begin{vmatrix} -9 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 7 \\ -10 & 3 & -7 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= -\begin{vmatrix} -9 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 7 \\ -10 & 3 & -7 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando los elementos de la base indicada por -7 y sumándoles los correspondientes de la primera y tercera columnas, se obtiene

$$-\begin{vmatrix} -44 & 5 & -37 \\ 0 & 1 & 0 \\ -31 & 3 & -28 \end{vmatrix} = -(1)\left\{+\begin{vmatrix} -44 & -37 \\ -31 & -28 \end{vmatrix}\right\} = -85.$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Multiplicando los elementos de la columna base indicada por 3, 2, 1, -4, respectivamente, y sumándoles los correspondientes de la primera, tercera, cuarta y quinta columnas, se obtiene

$$\begin{vmatrix} -8 & -3 & -4 & -6 & 13 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & -3 & 1 & 11 \\ -3 & -2 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\left\{-\begin{vmatrix} -8 & -4 & -6 & 13 \\ 5 & 5 & 4 & -11 \\ -7 & -3 & 1 & 11 \\ -3 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}\right\} = -\begin{vmatrix} -8 & -4 & -6 & 13 \\ 5 & 5 & 4 & -11 \\ -7 & -3 & 1 & 11 \\ -3 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando en el último determinante los elementos del renglón base indicado por 6, -4 y sumándoles, respectivamente, los elementos del primero y segundo renglones, se obtiene

$$-\begin{vmatrix} -50 & -22 & 0 & 79 \\ 33 & 17 & 0 & -55 \\ -7 & -3 & 1 & 11 \\ -3 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -(1)\left\{+\begin{vmatrix} -50 & -22 & 79 \\ 33 & 17 & -55 \\ -3 & -8 & 9 \end{vmatrix}\right\} = -\begin{vmatrix} -50 & -22 & 79 \\ 33 & 17 & -55 \\ -3 & -8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando por 2 los elementos del renglón indicado del último determinante y sumándoles, respectivamente, los del segundo renglón, se obtiene:

$$-\begin{vmatrix} -50 & -22 & 79 \\ 27 & 1 & -37 \\ -3 & -8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando los elementos del renglón indicado del último determinante por 22 y 8 y sumándoles, respectivamente, los correspondientes del primero y tercer renglones, se obtiene:

$$-\begin{vmatrix} 544 & 0 & -735 \\ 27 & 1 & -37 \\ 213 & 0 & -287 \end{vmatrix} = -(1)\left\{+\begin{vmatrix} 544 & -735 \\ 213 & -287 \end{vmatrix}\right\} = -427.$$

28.27 Descomponga en factores el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x^2 & y^2 & 1 \\ x^3 & y^3 & 1 \end{vmatrix} = xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \\ x^2 & y^2 & 1 \end{vmatrix}$$

Sacando del determinante los factores x e y de la primera y segunda columnas, respectivamente,

$$= xy\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-1 & y-1 & 1 \\ x^2-1 & y^2-1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sumando los elementos de la tercera columna multiplicados por -1 con los correspondientes de la primera y segunda columnas,

$$= xy\begin{vmatrix} x-1 & y-1 \\ x^2-1 & y^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= xy(x-1)(y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+1 & y+1 \end{vmatrix}$$

Sacando del determinante los factores $(x-1)$ e $(y-1)$ de la primera y segunda columnas, respectivamente,

$$= xy(x-1)(y-1)(y-x).$$

28.28 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y - z + w &= -4 \\ x + 2y + 2z - 3w &= 6 \\ 3x - y - z + 2w &= 0 \\ 2x + 3y + z + 4w &= -5. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 86$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 86 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -172$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 258 \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -86$$

Luego $$x = \frac{D_1}{D} = 1, \qquad y = \frac{D_2}{D} = -2, \qquad z = \frac{D_3}{D} = 3, \qquad w = \frac{D_4}{D} = -1.$$

28.29 Las intensidades, en amperios, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 se pueden determinar a partir del siguiente conjunto de ecuaciones. Encuentre i_3.

$$\begin{aligned} i_1 - 2i_2 + i_3 &= 3 \\ i_2 + 3i_4 - i_5 &= -5 \\ i_1 + i_2 + i_3 - i_5 &= 1 \\ 2i_2 + i_3 - 2i_4 - 2i_5 &= 0 \\ i_1 + i_3 + 2i_4 + i_5 &= 3 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 38, \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 19, \qquad i_3 = \frac{D_3}{D} = 2 \text{ amp.}$$

28.30 Determine si el sistema

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 4 \\ 2x + y - 3z &= -2 \\ 4x - 5y + z &= 5 \end{aligned}$$

es consistente.

SOLUCIÓN

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sin embargo,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Como por lo menos uno de los determinantes D_1, D_2, $D_3 \neq 0$, el sistema es inconsistente.

Esto se puede comprobar multiplicando la primera ecuación por 2 y sumándola a la segunda, con lo que se obtiene $4x - 5y + z = 6$ que es consistente con la última ecuación.

28.31 Determine si el sistema

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 6z &= 8 \\ 2x - y + 3z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

es consistente.

SOLUCIÓN

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Con los resultados obtenidos hasta ahora, nada se puede decir sobre la compatibilidad del sistema; sin embargo, observando el sistema con más detenimiento, se deduce que las dos últimas ecuaciones son inconsistentes. Por lo tanto, el sistema es inconsistente.

28.32 Determine si el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 4 \\ x - 2y + z &= -2 \\ 5x - 5y + z &= -2 \end{aligned}$$

es consistente.

SOLUCIÓN

$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Nada se puede decir, por el momento, de la compatibilidad del sistema.

Despejando x e y (en función de z) en las dos primeras ecuaciones, $x = \frac{3}{5}(z + 2)$, $y = \frac{4}{5}(z + 2)$. Estos valores, sustituidos en la tercera ecuación, la satisfacen. (Si no fuera así, el sistema sería inconsistente.)

Por lo tanto, los valores $x = \frac{3}{5}(z + 2)$, $y = \frac{4}{5}(z + 2)$ satisfacen al sistema, con lo que existen infinitas soluciones, obtenidas todas ellas dando valores a z. Por ejemplo, si $z = 3$, se tiene $x = 3$, $y = 4$; si $z = -2$, resultan $x = 0$, $y = 0$; etcétera.

En este caso, las ecuaciones dadas son *dependientes*. Se puede comprobar multiplicando la segunda ecuación por 3 y sumándola a la primera; se obtiene $5x - 5y + z = -2$, que es la tercera ecuación.

28.33 Determine si el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \\ 3x + 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

tiene soluciones distintas de la trivial $x = y = z = 0$.

SOLUCIÓN

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = +7 \qquad D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

Como $D \neq 0$ y $D_1 = D_2 = D_3 = 0$, el sistema solamente tiene la solución trivial.

28.34 Encuentre soluciones no triviales del sistema

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x - 4y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

si existen.

SOLUCIÓN

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

De aquí que existen soluciones no triviales.

Para encontrar las soluciones despejamos x e y, entre las dos últimas ecuaciones, en función de z (esto no siempre es posible) y se obtiene $x = z/2$, $y = z/2$. Estos valores satisfacen la tercera ecuación, con lo cual, hay infinitas soluciones que resultan al dar valores a z. Por ejemplo, si $z = 6$, entonces, $x = 3$ e $y = 3$; si $z = -4$, entonces $x = -2$, $y = -2$; etcétera.

28.35 Encontrar los valores de k para los cuales el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + kz &= 0 \\ 2x + ky + 2z &= 0 \\ 3x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

tiene soluciones distintas a la trivial.

SOLUCIÓN

Las soluciones no triviales se tienen cuando,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & k & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De aquí que $D = -3k^2 + 3k + 6 = 0$ o $k = -1, 2$.

Problemas propuestos

28.36 Calcule los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ *c*) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ *e*) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a & -b \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$ *d*) $\begin{vmatrix} -2x & -3y \\ 4x & -y \end{vmatrix}$ *f*) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-2 \end{vmatrix}$

28.37 Demuestre que si los elementos de un renglón (o columna) de un determinante de segundo orden se multiplican por un mismo número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

28.38 Encuentre el valor de las incógnitas en los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} 28 + 4x + 5y = 0 \\ -3x + 4y + 10 = 0 \end{cases}$ *e*) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{3} + \dfrac{y+4}{5} = 7 \\ \dfrac{x+2}{7} - \dfrac{y-6}{2} = -3 \end{cases}$ *g*) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y} = -\dfrac{1}{12} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3r - 5s = -6 \\ 4r + 2s = 5 \end{cases}$ *d*) $\begin{cases} 5x - 4y = 16 \\ 2x + 3y = -10 \end{cases}$ *f*) $\begin{cases} \dfrac{3x+2y+1}{x+y} = 4 \\ \dfrac{5x+6y-7}{x+y} = 2 \end{cases}$ *h*) $\begin{cases} \dfrac{4}{3u} - \dfrac{3}{5v} = 1 \\ \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$

28.39 Calcule los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ *c*) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ *e*) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ *d*) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

28.40 Encuentre el valor de k para que

$$\begin{vmatrix} k+3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -k & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0?$$

28.41 Demuestre que si los elementos de un renglón (o columna) de un determinante de tercer orden se multiplican por un mismo número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

28.42 Resuelva los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ x - 2y + 2z = -10 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} u + 2v - 3w = -7 \\ 2u - v + w = 5 \\ 3u - v + 2w = 8 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 5y - 2z = 4 \\ 3z + 4x = -7 \end{cases}$

28.43 Despeje la incógnita indicada

a) $\begin{cases} 3i_1 + i_2 - 2i_3 = 0 \\ i_1 + 2i_2 - 3i_3 = 5 \\ 2i_1 - i_2 + i_3 = -1 \end{cases}$ para i_2 *b*) $\begin{cases} 1/x + 2/y + 1/z = 1/2 \\ 4/x + 2/y - 3/z = 2/3 \\ 3/x - 4/y + 4/z = 1/3 \end{cases}$ para x

28.44 *a*) Demuestre la propiedad I: Si se intercambian los renglones por las columnas en un determinante, su valor no se modifica.

b) Demuestre la propiedad II: Si todos los elementos de un renglón (o columna) son nulos, el determinante vale cero.

28.45 Demuestre que el determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 12 & 2 \\ 4 & 16 & 24 & 1 \end{vmatrix}$$

es igual a cero.

28.46 Transforme el determinante,

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

en otro equivalente que tenga tres ceros en la tercera columna.

28.47 Sin modificar el valor del determinante,

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

en otro equivalente que tenga cuatro ceros en la cuarta columna.

28.48 Dado el determinante,

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

a) escriba los menores complementarios y los cofactores de los elementos del tercer renglón.
b) exprese el valor del determinante en términos de los menores o cofactores.
c) encuentre el valor del determinante.

28.49 Transforme el determinante

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

en otro equivalente que tenga tres ceros en un renglón y a continuación encuentre su valor, desarrollándolo por los elementos de dicho renglón.

28.50 Calcule el valor de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ *c*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ *d*) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

28.51 Descomponer en factores los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ *b*) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$

28.52 Resuelva los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x - 2y + z - 3w = 4 \\ 2x + 3y - z - 2w = -4 \\ 3x - 4y + 2z - 4w = 12 \\ 2x - y - 3z + 2w = -2 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ 3y + 4z + w = 5 \\ 2z - w - 4x = 0 \\ w + 3x - y = 4 \end{cases}$

28.53 Encuentre i_1 e i_4 en el sistema:

$$\begin{cases} 2i_1 - 3i_3 - i_4 = -4 \\ 3i_1 + i_2 - 2i_3 + 2i_4 + 2i_5 = 0 \\ -i_1 - 3i_2 + 2i_4 + 3i_5 = 2 \\ i_1 + 2i_3 - i_5 = 9 \\ 2i_1 + i_2 = 5 \end{cases}$$

28.54 Determine si los sistemas siguientes son consistentes.

a) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = 1 \\ x - 4y + 6z = 3 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - y - z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 3 \end{cases}$ *d*) $\begin{cases} 2u + v - 3w = 1 \\ u - 2v - w = 2 \\ u + 3v - 2w = -2 \end{cases}$

28.55 Encuentre las soluciones no triviales, si existen, del sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

28.56 Encuentre los valores de k para los cuales el sistema

$$\begin{cases} 2x + ky + z + w = 0 \\ 3x + (k - 1)y - 2z - w = 0 \\ x - 2y + 4z + 2w = 0 \\ 2x + y + z + 2w = 0 \end{cases}$$

tiene soluciones distintas a la trivial.

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

28.36 *a*) 5 *b*) -2 *c*) 4 *d*) $14xy$ *e*) $-a^2 - b^2$ *f*) $x^2 - 8x$

28.38 *a*) $x = 2, y = -3$; $(2, -3)$
b) $r = 1/2, s = 3/2$; $(1/2, 3/2)$
c) $x = -2, y = -4$; $(-2, -4)$
d) $x = 8/23, y = -82/23$; $(8/23, -82/23)$
e) $x = 12, y = 16$; $(12, 16)$
f) $x = 5, y = -2$; $(5, -2)$
g) $x = 12, y = 15$; $(12, 15)$
h) $u = 2/3, v = 3/5$; $(2/3, 3/5)$

28.39 *a*) 43 *b*) 19 *c*) 0 *d*) $5x + 8y - 14z$ *e*) $bc^2 - cb^2 + a^2c - ac^2 + ab^2 - ba^2$

28.40 Para todos los valores de k.

28.42 *a*) $x = -2, y = 1, z = -3$; $(-2, 1, -3)$
b) $u = 1, v = -1, w = 2$; $(1, -1, 2)$
c) $x = -4, y = 2, z = 3$; $(-4, 2, 3)$

28.43 *a*) $i_2 = 0.8$ *b*) $x = 6$

28.48 *c*) -38

28.49 28

28.50 *a*) 38 *b*) -143 *c*) -108 *d*) 88

28.51 *a*) $abc(a - b)(b - c)(c - a)$ *b*) $(x - 1)(y - 1)(z - 1)(x - y)(y - z)(z - x)$

28.52 *a*) $x = 2, y = -1, z = 3, w = 1$ *b*) $x = 1, y = -1, z = 2, w = 0$

28.53 $i_1 = 3, i_4 = -2$

28.54 *a*) consistente *b*) dependiente *c*) inconsistente *d*) inconsistente

28.55 Solamente la solución trivial $x = y = z = 0$.

28.56 $k = -1$

MATRICES 29

29.1 DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una matriz es un arreglo rectangular de números, a los que se les conoce como elementos de la matriz. A continuación se muestran ejemplos de matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 8 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Las matrices se clasifican en función del número de renglones y columnas. Las matrices que se mostraron anteriormente son de 2×2, 3×2, 3×1 y 2×3, siendo el primer número una indicación del número de renglones y el segundo, el número de columnas. Cuando la matriz tiene el mismo número de renglones y de columnas, se trata de una matriz cuadrada.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La matriz **A** es una de $m \times n$. Los elementos de una matriz **A** tienen sufijo doble, donde el primer número indica el renglón y el segundo número la columna en los que se encuentra el elemento. La forma genérica para expresar un elemento en una matriz es a_{ij}. La matriz **A** puede expresarse como $[a_{ij}]$.

29.2 OPERACIONES CON MATRICES

Si una matriz **A** y otra **B** son del mismo tamaño, es decir, tienen el mismo número de renglones que de columnas, y sus elementos son de las formas a_{ij} y b_{ij} respectivamente, entonces la suma $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}] = \mathbf{C}$ para toda i y j.

EJEMPLO 29.1 Encuentre la suma de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 3+3 & 4+(-2) \\ 6+(-1) & 0+1 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A la matriz $-\mathbf{A}$ se llama la opuesta de $\mathbf{A}$ y cada elemento de la matriz $-\mathbf{A}$ es el opuesto del elemento correspondiente de la matriz $\mathbf{A}$.

Por lo tanto, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad -\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

La multiplicación de una matriz por un escalar (número real) da como resultado otra matriz en la que cada elemento aparece multiplicado por el escalar.

EJEMPLO 29.2 Multiplique la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ por -2.

$$-2\mathbf{A} = -2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -8 \\ -12 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El producto $\mathbf{AB}$ donde $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times p$ y $\mathbf{B}$ es una matriz $p \times n$ es $\mathbf{C}$, la cual es una matriz de $m \times n$. Los elementos c_{ij} de una matriz $\mathbf{C}$ se calculan por medio de la fórmula $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$.

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}} \times \underset{\mathbf{B}}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{C}}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}}$$

EJEMPLO 29.3 Encuentre el producto $\mathbf{AB}$ cuando $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2(3) + 4(-1) + 1(4) & 2(0) + 4(3) + 1(0) & 2(1) + 4(1) + 1(3) & 2(-1) + 4(2) + 1(-2) \\ 0(3) + 1(-1) + (-2)(4) & 0(0) + 1(3) + (-2)(0) & 0(1) + 1(1) + (-2)(3) & 0(-1) + 1(2) + (-2)(-2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 6 - 4 + 4 & 0 + 12 + 0 & 2 + 4 + 3 & -2 + 8 - 2 \\ 0 - 1 - 8 & 0 + 3 + 0 & 0 + 1 - 6 & 0 + 2 + 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 9 & 4 \\ -9 & 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 29.4 Encuentre los productos $\mathbf{CD}$ y $\mathbf{DC}$ cuando $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{CD} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1) + 2(0) + 3(4) & 1(-3) + 2(2) + 3(-2) \\ -1(1) + 0(0) + 4(4) & -1(-3) + 0(2) + 4(-2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CD} = \begin{bmatrix} 1+0+12 & -3+4-6 \\ -1+0+16 & 3+0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ 15 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+(-3)(-1) & 1(2)+(-3)(0) & 1(3)+(-3)(4) \\ 0(1)+2(-1) & 0(2)+2(0) & 0(3)+2(4) \\ 4(1)+(-2)(-1) & 4(2)+(-2)(0) & 4(3)+(-2)(4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+0 & 3-12 \\ 0-2 & 0+0 & 0+\ 8 \\ 4+2 & 8+0 & 12-\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 8 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 29.4, observe que a pesar de que tanto el producto **CD** como el **DC** existen, $\mathbf{CD} \neq \mathbf{DC}$. Por lo tanto, la multiplicación de las matrices no es conmutativa.

La matriz identidad es una de $n \times n$ cuyos elementos son 1 cuando los números de renglón y columna son iguales y son 0 en cualquier otro lado. Una matriz identidad de $n \times n$ se expresa como $\mathbf{I}_n$.

Por ejemplo,

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si **A** es una matriz cuadrada e **I** es la matriz identidad del mismo tamaño que **A**, entonces $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$.

Para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, se utiliza $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{AI} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

e $\mathbf{IA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$:

29.3 OPERACIONES ELEMENTALES CON RENGLONES

Se dice que dos matrices son equivalentes en cuanto a sus renglones si una puede obtenerse a partir de la otra mediante una secuencia de operaciones de renglón elementales.

Operaciones de renglón elementales

1. Intercambio de dos renglones.
2. Multiplicación de un renglón por una constante diferente de cero.
3. Suma de un múltiplo de un renglón con otro renglón.

Se dice que una matriz está en forma reducida en escalón si posee las propiedades siguientes:

1. Todos los renglones que estén formados totalmente por ceros están en la parte inferior de la matriz.
2. El primer número diferente de cero en cualquier renglón, cuyos elementos no todos son cero, es 1, al cual se le llama 1 delantero.
3. En dos renglones sucesivos diferentes de cero, el 1 delantero que está en el renglón superior se encuentra más a la izquierda que el 1 delantero en el renglón inferior.
4. Las columnas que tengan un 1 delantero, tendrán ceros en posiciones alternadas en la columna.

EJEMPLO 29.5 Utilice las operaciones elementales de renglón para colocar la matriz **A** en forma reducida en escalón cuando,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

$\sim$ es el símbolo que se utiliza entre dos matrices para indicar que son equivalentes en cuanto a sus renglones.

El símbolo R_2 al frente de una matriz significa que el renglón que sigue fue el renglón 2 en la matriz anterior.

$R_3 - 3R_1$ al frente de una matriz significa que el renglón siguiente se obtuvo a partir de la matriz anterior restándole 3 veces el renglón 1 del 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} R_2 \\ R_1 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \frac{1}{5}R_2 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{r} R_1 - 3R_2 \\ \\ R_3 + 10R_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma reducida en escalón de la matriz **A** es $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

29.4 INVERSA DE UNA MATRIZ

Una matriz cuadrada **A** tiene una inversa si existe una matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Para encontrar la matriz inversa, si ésta existe, de una matriz cuadrada **A**, se lleva a cabo el procedimiento siguiente:

1. Forme la matriz particionada $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$, donde **A** es la matriz dada $n \times n$ e **I** es la matriz identidad de $n \times n$.
2. Efectúe las operaciones elementales de renglón en $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ hasta que la matriz particionada tenga la forma $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$, esto es, hasta que la matriz **A** de la izquierda se transforme en la matriz identidad. Si **A** no puede transformarse en la matriz identidad, la matriz **A** no tiene matriz inversa.
3. La matriz **B** es $\mathbf{A}^{-1}$, la inversa de la matriz **A**.

EJEMPLO 29.6 Encuentre la inversa de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} R_2 \\ R_1 \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ -\frac{1}{3}R_2 \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} R_1 - 4R_2 \\ \\ R_3 + 7R_2 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -7/3 & 11/3 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ \\ -3R_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -11 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{matrix} R_1 - (1/3)R_3 \\ R_2 - (2/3)R_3 \\ \ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -11 & -3 \end{array}\right] = [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 8 & 2 \\ 7 & -11 & -3 \end{bmatrix}$$

Si la matriz **A** es equivalente en cuanto a renglones a la matriz **I**, entonces la matriz **A** tiene una matriz inversa y se dice que es invertible. La matriz **A** no tiene matriz inversa si no es equivalente a **I** en cuanto a renglones.

EJEMPLO 29.7 Encuentre la inversa, si existe, de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} \ \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{matrix} R_1 - 3R_2 \\ \ \\ R_3 - R_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz **A** es equivalente en cuanto a renglones a la matriz a la izquierda. Puesto que la matriz a la izquierda tiene un renglón con ceros, es equivalente a la matriz **I** en cuanto a renglones. Por lo tanto, la matriz **A** no tiene inversa.

Otra forma para determinar si la inversa de una matriz **A** existe, es que el determinante asociado con una matriz invertible es diferente de cero, esto es, det $\mathbf{A} \neq 0$ si $\mathbf{A}^{-1}$ existe.

En las matrices de 2×2, la inversa puede encontrarse mediante un procedimiento especial:

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{entonces} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \text{ donde det } \mathbf{A} \neq 0.$$

1. Encuentre el valor de det **A**. Si det $\mathbf{A} \neq 0$, entonces la inversa existe.
2. Intercambie los elementos de la diagonal principal, intercambie las posiciones de a_{11} y a_{22}.
3. Modifique los signos de los elementos de la diagonal secundaria, es decir, reemplace a_{21} por $-a_{21}$ y a_{12} por $-a_{12}$.
4. Multiplique la nueva matriz por $1/\det \mathbf{A}$. El producto es $\mathbf{A}^{-1}$.

29.5 ECUACIONES CON MATRICES

La ecuación con matrices, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ tiene una solución si y sólo si la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ existe y la solución es $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

EJEMPLO 29.8 Resuelva la ecuación con matrices $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$.

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{entonces} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/11 & -5/11 \\ 2/11 & -7/11 \end{bmatrix} \qquad \text{o} \qquad \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-1}{11}\begin{bmatrix}-3 & 5\\-2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -5\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{-1}{11}\begin{bmatrix}-3 & 5\\-2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\6\end{bmatrix}$$

$$\frac{-1}{11}\begin{bmatrix}-11 & 0\\0 & -11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{-1}{11}\begin{bmatrix}-6\\18\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{-1}{11}\begin{bmatrix}-6\\18\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6/11\\-18/11\end{bmatrix}$$

29.6 MATRIZ SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Para resolver un sistema de ecuaciones utilizando matrices, se escribe una matriz particionada, la cual es la matriz de los coeficientes a la izquierda aumentada por la matriz de constantes a la derecha.

La matriz aumentada asociada con el sistema $\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 6\\ x \qquad\;\; - z &= 0\\ x - y - z &= -4\end{aligned}$ es

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & 3 & 6\\1 & 0 & -1 & 0\\1 & -1 & -1 & -4\end{array}\right]$$

EJEMPLO 29.9 Utilice las matrices para resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3\\ x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 2\\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= -2\\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 &= -19\end{aligned}$$

Escriba la matriz aumentada para el sistema.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r}0 & 1 & 1 & -2 & -3\\1 & 2 & -1 & 0 & 0\\2 & 4 & 1 & -3 & -2\\1 & -4 & -7 & -1 & -19\end{array}\right]$$

Exprese la matriz de la izquierda en su forma reducida de escalón.

$$\begin{array}{r}R_2\\ \sim R_1\\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrr|r}1 & 2 & -1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & -2 & -3\\2 & 4 & 1 & -3 & -2\\1 & -4 & -7 & -1 & -19\end{array}\right]\sim\begin{array}{r}\\ \\ R_3-2R_1\\ R_4-R_1\end{array}\left[\begin{array}{rrrr|r}1 & 2 & -1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & -2 & -3\\0 & 0 & 3 & -3 & -6\\0 & -6 & -6 & -1 & -21\end{array}\right]$$

$$\sim\begin{array}{l}R_1-2R_2\\ \\ (1/3)R_3\\ R_4+6R_2\end{array}\left[\begin{array}{rrrr|r}1 & 0 & -3 & 4 & 8\\0 & 1 & 1 & -2 & -3\\0 & 0 & 1 & -1 & -2\\0 & 0 & 0 & -13 & -39\end{array}\right]\sim\begin{array}{l}R_1+3R_3\\ R_2-R_3\\ \\ (-1/3)R_4\end{array}\left[\begin{array}{rrrr|r}1 & 0 & 0 & 1 & 2\\0 & 1 & 0 & -1 & -1\\0 & 0 & 1 & -1 & -2\\0 & 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

$$\sim\begin{array}{l}R_1-R_4\\ R_2+R_4\\ R_3+R_4\\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrrr|r}1 & 0 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

A partir de la forma reducida de escalón de la matriz aumentada, se pueden escribir las ecuaciones:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1 \text{ y } x_4 = 3.$$

Por lo tanto, la solución del sistema es $(-1, 2, 1, 3)$.

EJEMPLO 29.10 Resuelva el sistema de ecuaciones: $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 \quad &= 1 \end{aligned}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim R_2 - 3R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim -R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim R_1 - 2R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

$x_1 + 5x_3 = 2$ y $x_2 - 3x_3 = -1$ Por lo tanto, $x_1 = 2 - 5x_3$ y $x_2 = -1 + 3x_3$.

El sistema tiene un número infinito de soluciones de la forma $(2 - 5x_3, -1 + 3x_3, x_3)$, donde x_3 es un número real.

Problemas resueltos

29.1 Encuentre *a*) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, *b*), $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, *c*) $3\mathbf{A}$ y *d*) $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ cuando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

a) $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & 1+(-3) & 1+4 \\ -1+(-3) & -1+1 & 4+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) $$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 1-(-3) & 1-4 \\ -1-(-3) & -1-1 & 4-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

c) $$3\mathbf{A} = 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2) & 3(1) & 3(1) \\ 3(-1) & 3(-1) & 3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

d) $$5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = 5\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5(2)-2(2) & 5(1)-2(-3) & 5(1)-2(4) \\ 5(-1)-2(-3) & 5(-1)-2(1) & 5(4)-2(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 11 & -3 \\ 1 & -7 & 24 \end{bmatrix}$$

29.2 Encuentre, si existe, *a*) **AB**, *b*) **BA** y *c*) $\mathbf{A}^2$ cuando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

a) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [3(2) + 2(3) + 1(0)] = [12]$

b) $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(3) & 2(2) & 2(1) \\ 3(3) & 3(2) & 3(1) \\ 0(3) & 0(2) & 0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A}^2 = [3 \quad 2 \quad 1][3 \quad 2 \quad 1]$; no es posible. $\mathbf{A}^n$, $n > 1$, existe solamente en matrices cuadradas.

29.3 Encuentre **AB**, si es posible

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$; no es posible.

A es una matriz de 3×2 y **B** es de 3×3. Puesto que **A** tiene solamente dos columnas, sólo puede multiplicarse por matrices que tengan dos renglones, es decir, matrices de $2 \times k$.

b) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(1) + 3(0) & -1(2) + 3(7) \\ 4(1) + (-5)(0) & 4(2) + (-5)(7) \\ 0(1) + 2(0) & 0(2) + 2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 19 \\ 4 & -27 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$

29.4 Escriba las matrices siguientes en forma reducida de escalón

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ R_3 - 2R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} R_1 - 3R_2 \\ \\ R_3 + R_2 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} (1/2)R_1 \\ \\ (-1/3)R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} R_1 - 4R_3 \\ R_2 + 3R_3 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma reducida de escalón de $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 + R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} R_1 + 2R_2 \\ \\ R_3 - R_2 \\ R_4 + R_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma reducida de escalón de $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

29.5 Encuentre el inverso, si existe, de cada matriz.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$ *b*) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *c*) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ *d*) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a) det $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 3 = -17$; det $\mathbf{A} \neq 0$ por lo que $\mathbf{A}^{-1}$ existe.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7/17 & 3/17 \\ 1/17 & -2/17 \end{bmatrix}$$

A menudo se utiliza la primera forma de la matriz ya que ésta reduce el número de cálculos con fracciones necesarios. Asimismo, facilita el trabajo con matrices en una calculadora gráfica.

b) det $\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$. Puesto que det $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{B}^{-1}$ no existe.

c) $$[\mathbf{C}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] = [\mathbf{I}|\mathbf{C}^{-1}]$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $$[\mathbf{D}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

Puesto que la matriz que queda en la última forma no es equivalente en cuanto a renglones a la matriz identidad **I**, **D** no tiene inversa.

29.6 Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$, resuelva cada ecuación para **X**.

a) $2\mathbf{X} + 3\mathbf{A} = \mathbf{B}$ *b*) $3\mathbf{A} + 6\mathbf{B} = -3\mathbf{X}$

SOLUCIÓN

a) $2\mathbf{X} + 3\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Por lo que $2\mathbf{X} = -3\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $\mathbf{X} = -\frac{3}{2}\mathrm{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}$.

$$\mathbf{X} = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 & (3/2)+(3/2) \\ (-3/2)+1 & 0+0 \\ (-9/2)-2 & 6+(-1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1/2 & 0 \\ -13/2 & 11/2 \end{bmatrix}$$

b) $3\mathbf{A} + 6\mathbf{B} = -3\mathbf{X}$. Por lo que $-3\mathbf{X} = 3\mathbf{A} + 6\mathbf{B}$ y $\mathbf{X} = -\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$.

$$\mathbf{X} = -\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 1-6 \\ -1-4 & 0+0 \\ -3+8 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

29.7 Escriba la ecuación con matrices $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ y utilícela para resolver el sistema $\begin{matrix} -x + y = 4 \\ -2x + y = 0 \end{matrix}$.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{por lo que} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es (4, 8).

29.8 Resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes utilizando matrices.

a) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 3x + y &= 4 \\ 2x - y + z &= 2 \end{aligned}$

SOLUCIÓN

a) $$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

A partir de la forma reducida de escalón de la matriz, se pueden escribir las ecuaciones:

$$x = 1, y = -1 \text{ y } z = 2.$$

El sistema tiene como solución $(1, -1, 2)$.

b) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Puesto que el último renglón es producto de la ecuación $0z = 1$, la cual no tiene solución, el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Problemas propuestos

29.9 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix}$

Efectúe las operaciones indicadas:

a) $\mathbf{B} + \mathbf{C}$
b) $5\mathbf{A}$
c) $2\mathbf{C} - 6\mathbf{B}$
d) $-6\mathbf{B}$
e) $3\mathbf{B} + 2\mathbf{C}$
f) $\mathbf{DA}$
g) $\mathbf{AD}$
h) $\mathbf{C} - \mathbf{B}$
i) $\mathbf{C} - 5\mathbf{A}$
j) $\mathbf{BC}$
k) $(\mathbf{DA})\mathbf{B}$
l) $\mathbf{A}^2$
m) $\mathbf{B}^2$
n) $\mathbf{D}(\mathbf{AB})$
o) $\mathbf{A}^3$
p) $\mathbf{DB} + \mathbf{DC}$

29.10 Encuentre el producto **AB**:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \end{bmatrix}$

29.11 Resuelva los sistemas de ecuaciones utilizando una ecuación con matrices de la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

a) $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 5x - 3y &= 10 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 5x - 4y &= -23 \end{aligned}$ *c*) $\begin{aligned} 1.5x + 0.8y &= 2.3 \\ 0.3x - 0.2y &= 0.1 \end{aligned}$ *d*) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 40 \\ 3x - 2y &= 8 \end{aligned}$

29.12 Escriba cada una de las matrices en su forma reducida de escalón.

d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *d*) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 9 \\ 5 & -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ *d*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *d*) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

29.13 Encuentre la inversa de cada una de las matrices si existe.

a) $\begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

29.14 Resuelva utilizando matrices los sistemas siguientes:

a) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -1 \\ -x + 3y \quad &= 10 \\ 2x - 5y + 5z &= -7 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ 2x - y - 2z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= -1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x + y - 3z &= -1 \\ y - z &= 0 \\ -x + 2y \quad &= 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 4x - y + 5z &= 11 \\ x + 2y - z &= 5 \\ 5x - 8y + 13z &= 7 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x_1 + \quad x_3 &= 1 \\ 5x_2 + 3x_2 \quad &= 4 \\ 3x_2 - 4x_3 &= 4 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 17x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 22x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 &= 0 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad - x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= -4 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 &= -3 \end{aligned}$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

29.9 *a*) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 10 & -25 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -14 & -8 & -30 \\ -6 & 10 & -24 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -18 & -3 & -30 \\ -6 & 6 & -18 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 13 & -7/2 & 15 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 14 & -14 \end{bmatrix}$

g) no es posible

h) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

i) no es posible

j) no es posible

k) $\begin{bmatrix} 28 & 21 & 28 \end{bmatrix}$

l) $\begin{bmatrix} 4 & -45 \\ 0 & 49 \end{bmatrix}$

m) no es posible

n) $\begin{bmatrix} 28 & 21 & 28 \end{bmatrix}$

o) $\begin{bmatrix} 8 & -335 \\ 0 & 343 \end{bmatrix}$

p) $\begin{bmatrix} 38 & -11 & 35 \end{bmatrix}$

29.10 *a*) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 10 & 16 \\ 26 & 46 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 6 & -21 & 15 \\ 8 & -23 & 19 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ *c*) $\begin{bmatrix} 11 & 2 & 14 \\ 21 & 20 & 24 \\ 1 & -26 & 2 \end{bmatrix}$ *d*) $\begin{bmatrix} 60 & 72 \\ -20 & -24 \\ 10 & 12 \\ 60 & 72 \end{bmatrix}$

29.11 *a*) (5, 5) *b*) (−3, 2) *c*) (1, 1) *d*) (8, 8)

29.12 *a*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *d*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *f*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -12/5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

29.13 *a*) $\begin{bmatrix} 3 & -13 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ *e*) $\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 7 \\ 53 & 2 & -37 \\ -26 & 1 & 19 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *f*) $\frac{1}{33}\begin{bmatrix} 13 & -4 & 7 \\ 2 & 7 & -4 \\ -16 & 10 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 7 & 6 & -5 & 1 \\ 5 & 12 & -19 & 11 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 12 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ *g*) $\frac{-1}{19}\begin{bmatrix} 21 & -16 & 18 \\ -16 & 14 & -11 \\ -19 & 19 & -19 \end{bmatrix}$

d) $\frac{1}{28}\begin{bmatrix} -13 & 7 & 11 \\ -1 & 7 & 3 \\ -22 & 14 & 10 \end{bmatrix}$ *h*) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 21 & 9 & -4 & 7 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 2 & -2 \\ -9 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

29.14 *a*) (−1, 3, 2)
b) no tiene solución
c) $(2z - 1, z, z)$ donde z es un número real
d) $(-z + 3, z + 1, z)$ donde z es un número real
e) (−4, 8, 5)
f) (0, 0, 0)
g) (1, 0, 3, 2)
h) no tiene solución

30 INDUCCIÓN MATEMÁTICA

30.1 PRINCIPIO MATEMÁTICO DE INDUCCIÓN COMPLETA

Algunos enunciados están definidos sobre un conjunto de enteros positivos. Con la finalidad de establecer la validez de dicho enunciado, podría demostrarse para cada uno de los números enteros positivos de interés de manera independiente. Sin embargo, puesto que existe una infinidad de números de este tipo, mediante este procedimiento caso por caso, nunca se podrá demostrar que el enunciado es siempre válido. Es posible utilizar un procedimiento llamado inducción matemática para establecer la validez del estado de todos los enteros positivos.

Principio de inducción de matemática

Sea $P(n)$ un enunciado que pueda ser verdadero o falso para cada entero positivo n. Si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. $P(1)$ es verdadero, y
2. Siempre que $n = k$, $P(k)$ sea verdadera implica que $P(k + 1)$ es verdadera.

Por lo tanto, $P(n)$ es verdadero para todos los números n enteros positivos.

30.2 DEMOSTRACIÓN DEL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA

La demostración de un teorema o fórmula mediante el principio de inducción completa implica dos pasos:

1. La comprobación, por simple sustitución, que el teorema propuesto o fórmula se verifica para los primeros valores de n, enteros y positivos, por ejemplo, $n = 1$, $n = 2$, etcétera.
2. La suposición de que el teorema o fórmula, es cierto para $n = k$ y, a continuación, se demuestra que también se verifica para el siguiente $n = k + 1$.

Una vez que se hayan efectuado los pasos 1 y 2, entonces se podrá concluir que el teorema o fórmula es válido para todos los enteros positivos mayores o iguales a a, el entero positivo del paso 1.

Problemas resueltos

30.1 Demuestre por inducción matemática que, para todos los enteros positivos n,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

SOLUCIÓN

Paso 1. La fórmula se verifica para $n = 1$, ya que

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Paso 2. Se supone que la fórmula es válida para $n = k$. Entonces, sumando $(k+1)$ a ambos miembros de la ecuación,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

que es el valor de $n(n+1)/2$ cuando se sustituye n por $(k+1)$.

De aquí que, si la fórmula es cierta para $n = k$, se ha demostrado que también se verifica para el siguiente, $n = k + 1$. Como la fórmula se verifica para $n = 1$, también se verificará para $n = 1 + 1 = 2$ y, por la misma razón, para $n = 2 + 1 = 3$, y así sucesivamente. Es decir, se verifica para todos los valores de n, entero y positivo.

30.2 Demuestre, por el principio de inducción completa, que la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética $a, a+d, a+2d, \cdots$ es $\left(\frac{n}{2}\right)[2a + (n-1)d]$, es decir,

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d].$$

SOLUCIÓN

Paso 1. La fórmula se verifica para $n = 1$, ya que $a = \frac{1}{2}[2a + (1-1)d] = a$.

Paso 2. Supóngase que es válida para $n = k$. Entonces,

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a + (k-1)d] = \frac{k}{2}[2a + (k-1)d].$$

Sumando a los dos miembros de la última ecuación el término que ocupa el lugar $(k+1)$, que es igual a $(a + kd)$, se tiene

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a + (k-1)d] + (a+kd) = \frac{k}{2}[2a + (k-1)d] + (a+kd).$$

El segundo miembro de esta ecuación es $= ka + \frac{k^2d}{2} - \frac{kd}{2} + a + kd = \frac{k^2d + kd + 2ka + 2a}{2}$

$$= \frac{kd(k+1) + 2a(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}(2a + kd)$$

que es el valor de $(n/2)[2a + (n-1)d]$ cuando se sustituye n por $(k+1)$.

Por lo tanto, si la fórmula es cierta para $n = k$, se ha demostrado que también se verifica para $n = k + 1$. Como la fórmula se verifica para $n = 1$, también se verificará para $n = 1 + 1 = 2$ y, por la misma razón, para $n = 2 + 1 = 3$, y así sucesivamente. Es decir, se verifica para todos los valores de n, entero y positivo.

30.3 Demuestre, por el principio de inducción completa, que para todos los valores de n, entero y positivo, se verifica

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

SOLUCIÓN

Paso 1. La fórmula es válida para $n = 1$, puesto que

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1.$$

Paso 2. Supóngase que es cierta para $n = k$. Entonces,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Sumando a ambos miembros de esta ecuación el término que ocupa el lugar $(k + 1)$, que es igual a $(k + 1)^2$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

El segundo miembro de esta ecuación es $= \dfrac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$

$$= \frac{(k+1)[(2k^2+k) + (6k+6)]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

que es valor de $n(n + 1)(2n + 1)/6$ cuando se sustituye n por $(k + 1)$.

Por lo tanto, si la fórmula es cierta para $n = k$, se ha demostrado que también se verifica para $n = k + 1$. Como la fórmula se verifica para $n = 1$, también se verificará para $n = 1 + 1 = 2$ y, por la misma razón, para $n = 2 + 1 = 3$, y así sucesivamente. Es decir, se verifica para todos los valores de n, entero y positivo.

30.4 Demuestre, por el principio de inducción completa, que para todos los valores de n, entero y positivo, se verifica

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

SOLUCIÓN

Paso 1. La fórmula se verifica para $n = 1$, ya que

$$\frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Paso 2. Supóngase que la fórmula es válida para $n = k$. Entonces,

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}.$$

Sumando a los dos miembros de la ecuación anterior el término que ocupa el lugar $(k + 1)$, que es igual a

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}.$$

El segundo miembro de esta ecuación es

$$\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3},$$

que es el valor de $n/(2n + 1)$ cuando n se sustituye por $(k + 1)$.

Por lo tanto, si la fórmula es cierta para $n = k$, se ha demostrado que también se verifica para $n = k + 1$. Como la fórmula se verifica para $n = 1$, también se verificará para $n = 1 + 1 = 2$ y, por la misma razón, para $n = 2 + 1 = 3$, y así sucesivamente. Es decir, se verifica para todos los valores de n, entero y positivo.

30.5 Demuestre, por el principio de inducción completa, que $a^{2n} - b^{2n}$ es divisible entre $a + b$, siendo n un número cualquiera entero y positivo.

SOLUCIÓN

Paso 1. El teorema se cumple para $n = 1$, ya que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
Paso 2. Supóngase que el teorema es cierto para $n = k$. Entonces,

$$a^{2k} - b^{2k} \text{ es divisible entre } a + b.$$

El objetivo es demostrar que $a^{2k+2} - b^{2k+2}$ es divisible entre $a + b$. A partir de la identidad,

$$a^{2k+2} - b^{2k+2} = a^2(a^{2k} - b^{2k}) + b^{2k}(a^2 - b^2)$$

se deduce que $a^{2k+2} - b^{2k+2}$ es divisible entre $a + b$ si lo es $a^{2k} - b^{2k}$.

Por lo tanto, si la fórmula es cierta para $n = k$, se ha demostrado que también se verifica para $n = k + 1$. Como la fórmula se verifica para $n = 1$, también se verificará para $n = 1 + 1 = 2$ y, por la misma razón, para $n = 2 + 1 = 3$, y así sucesivamente. Es decir, se verifica para todos los valores de n, entero y positivo.

30.6 Demuestre la fórmula del binomio,

$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^n$$

para todos los valores de n entero y positivo.

SOLUCIÓN

Paso 1. La fórmula se verifica para $n = 1$.

Paso 2. Supóngase que es cierta para $n = k$. Entonces,

$$(a + x)^k = a^k + na^{k-1}x + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^k$$

Multiplique ambos miembros por $a + x$. La multiplicación del segundo miembro puede escribirse como:

$$\begin{aligned} &a^{k+1} + ka^kx + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-1}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+2}x^{r-1} + \cdots + ax^k \\ &\quad + a^kx + ka^{k-1}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-2)!}a^{k-r+2}x^{r-1} + \cdots + x^{k+1}. \end{aligned}$$

Puesto que,

$$\begin{aligned} &\frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+2}x^{r-1} + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-2)!}a^{k-r+2}x^{r-1} \\ &= \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-2)!}a^{k-r+2}x^{r-1}\left\{\frac{k-r+2}{r-1} + 1\right\} \\ &= \frac{(k+1)\,k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}a^{k-r+2}x^{r-1}, \end{aligned}$$

el producto puede escribirse como,

$$(a + x)^{k+1} = a^{k+1} + (k+1)a^kx + \cdots + \frac{(k+1)\,k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}a^{k-r+2}x^{r-1} + \cdots + x^{k+1}$$

que es la fórmula del binomio cuando se sustituye n por $k + 1$.

Por lo tanto, si la fórmula es cierta para $n = k$, se ha demostrado que también se verifica para $n = k + 1$. Como la fórmula se verifica para $n = 1$, también se verificará para $n = 1 + 1 = 2$ y así sucesivamente. Es decir, se verifica para todos los valores de n, entero y positivo.

30.7 Demuestre mediante el principio de inducción matemática que la suma de los ángulos internos, $S(n)$, de un polígono convexo es $S(n) = (n - 2)180°$, donde n es el número de lados del polígono.

SOLUCIÓN

Paso 1. Puesto que el polígono tiene al menos 3 lados, se comienza con $n = 3$. Para $n = 3$, $S(3) = (3 - 2)180° = (1)180° = 180°$. Lo anterior es válido ya que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Paso 2. Suponga que para $n = k$, la fórmula es válida. Entonces, $S(k) = (k - 2)180°$ es válida. Ahora considere un polígono convexo de lados $k + 1$. Se puede dibujar una línea diagonal que forme un triángulo con dos de los lados del polígono. La diagonal también forma un polígono de k lados con los demás lados del polígono original.

La suma de los ángulos internos del polígono de $(k + 1)$ lados, $S(k + 1)$, es igual a la suma de los ángulos internos del triángulo, $S(3)$, y a la suma de los ángulos internos del polígono de k lados, $S(k)$.

$$S(k + 1) = S(3) + S(k) = 180° + (k - 2)180° = [1 + (k - 2)]180° = [(k + 1) - 2]180°.$$

De aquí que, si la fórmula es válida para $n = k$, es también válida para $n = k + 1$.

Puesto que la fórmula es válida para $n = 3$, y que siempre que sea válida para $n = k$, lo será para $n = k + 1$, se puede deducir que será válida para todos los enteros positivos $n \geq 3$.

30.8 Demuestre mediante inducción matemática que $n^3 + 1 \geq n^2 + n$ para todos los números enteros positivos.

SOLUCIÓN

Paso 1. Para $n = 1$, $n^3 + 1 = 1^3 + 1 = 1 + 1 = 2$ y $n^2 + n = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$. Por lo tanto, $n^3 + 1 \geq n^2 + n$ es válida cuando $n = 1$.

Paso 2. Suponga que el enunciado es válido para $n = k$. Por lo tanto, $k^3 + 1 \geq k^2 + k$ es válida.

$$\begin{aligned} \text{Para } n = k + 1,\ (k + 1)^3 + 1 &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 1 = k^3 + 3k^2 + 3k + 2 \\ &= k^3 + 2k^2 + k^2 + 3k + 2 = (k^3 + 2k^2) + (k + 1)(k + 2) \\ &= (k^3 + 2k^2) + (k + 1)[(k + 1) + 1] \\ &= (k^3 + 2k^2) + [(k + 1)^2 + (k + 1)] \end{aligned}$$

Se sabe que $n \geq 1$, por lo que $k \geq 1$ y $k^3 + 2k^2 \geq 3$. Por lo tanto, $(k + 1)^3 + 1 \geq (k + 1)^2 + (k + 1)$. De aquí que, cuando el enunciado es válido para $n = k$, es también válido para $n = k + 1$.

Puesto que el enunciado es verdadero para $n = 1$ y siempre que sea válido para $n = k$ lo es también para $n = k + 1$, el enunciado es válido para todos los números n enteros positivos.

Problemas propuestos

Demuestre mediante el principio de inducción completa que se verifican las expresiones siguientes, siendo n un número entero positivo.

30.9 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

30.10 $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$

30.11 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n + 1)^2}{4}$

30.12 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad r \neq 1$

30.13 $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$

30.14 $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n = \dfrac{(2n - 1)3^{n+1} + 3}{4}$

30.15 $\dfrac{1}{2 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \dfrac{1}{(3n - 1)(3n + 2)} = \dfrac{n}{6n + 4}$

30.16 $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)(n + 2)} = \dfrac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$

30.17 $a^n - b^n$ es divisible entre $a - b$, para $n =$ entero positivo.

30.18 $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ es divisible entre $a + b$, para $n =$ entero positivo

30.19 $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

30.20 $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

30.21 $(ab)^n = a^n b^n$, para $n = a$ entero positivo

30.22 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, para $n = a$ entero positivo

30.23 $n^2 + n$ es par

30.24 $n^3 + 5n$ es divisible entre 3

30.25 $5^n - 1$ es divisible entre 4

30.26 $4^n - 1$ es divisible entre 3

30.27 $n(n+1)(n+2)$ es divisible entre 6

30.28 $n(n+1)(n+2)(n+3)$ es divisible entre 24

30.29 $n^2 + 1 > n$

30.30 $2n \geq n + 1$

31 FRACCIONES PARCIALES

31.1 FRACCIONES RACIONALES

Una fracción racional en x es el cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de dos polinomios en x.

Por lo tanto, $\dfrac{3x^2 - 1}{x^3 + 7x^2 - 4}$ es una fracción racional.

31.2 FRACCIONES PROPIAS

Una fracción propia es aquella en la que el grado del polinomio numerador es inferior al correspondiente del polinomio denominador.

Por lo tanto: $\dfrac{2x - 3}{x^2 + 5x + 4}$ y $\dfrac{4x^2 + 1}{x^4 - 3x}$ son fracciones propias.

Una fracción impropia es aquella en la que el grado del polinomio numerador es igual o superior al correspondiente del denominador

Por ejemplo, $\dfrac{2x^3 + 6x^2 - 9}{x^2 - 3x + 2}$ es una fracción impropia.

Efectuando la división, toda fracción impropia puede expresarse siempre como la suma de un polinomio y una fracción propia.

Por ejemplo, $\dfrac{2x^3 + 6x^2 - 9}{x^2 - 3x + 2} = 2x + 12 + \dfrac{32x - 33}{x^2 - 3x + 2}$.

31.3 FRACCIONES PARCIALES

Toda fracción propia a menudo se puede expresar como la suma de otras fracciones (denominadas fracciones parciales), cuyos polinomios denominadores sean de grado inferior al del denominador de la fracción dada.

EJEMPLO 31.1.

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{3x - 5}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x - 2}.$$

31.4 POLINOMIOS IDÉNTICOS

Si dos polinomios de grado n en la variable x son iguales en más de n valores de x, los coeficientes de potencias similares de x son iguales y los dos polinomios son idénticos. Si falta un término en cualquiera de los dos polinomios, éste se puede escribir con un coeficiente igual a 0.

31.5 TEOREMA FUNDAMENTAL

Una fracción propia puede escribirse como la suma de fracciones parciales siempre que se cumplan las reglas.

1. Divisores lineales distintos.

   A cada divisor lineal del polinomio denominador de la fracción dada del tipo $ax + b$, le corresponde una fracción parcial de la forma $A/(ax + b)$, siendo A una constante diferente de cero.

   EJEMPLO 31.2.

$$\frac{x+4}{(x+7)(2x-1)} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{2x-1}$$

2. Divisores lineales múltiples.

   A cada divisor múltiple del polinomio denominador de la fracción dada del tipo $ax + b$ elevado a la potencia p, le corresponden p fracciones parciales de la forma,

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(ax+b)^p}$$

   siendo $A_1, A_2, \ldots, A_p$ constantes y $A_p \neq 0$.

   EJEMPLOS 31.3.

   a) $\dfrac{3x-1}{(x+4)^2} = \dfrac{A}{x+4} + \dfrac{B}{(x+4)^2}$

   b) $\dfrac{5x^2-2}{x^3(x+1)^2} = \dfrac{A}{x^3} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x} + \dfrac{D}{(x+1)^2} + \dfrac{E}{x+1}$

3. Divisores cuadráticos distintos.

   A cada divisor simple del polinomio denominador de la fracción dada del tipo $ax^2 + bx + c$, le corresponde una fracción simple de la forma,

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

   siendo A y B constantes que no son nulas simultáneamente.

   Nota: Se supone que $ax^2 + bx + c$ no se puede descomponer en producto de dos factores lineales reales de coeficientes enteros.

   EJEMPLOS 31.4.

   a) $\dfrac{x^2-3}{(x-2)(x^2+4)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4}$

   b) $\dfrac{2x^3-6}{x(2x^2+3x+8)(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{2x^2+3x+8} + \dfrac{Dx+E}{x^2+x+1}$

4. Divisores cuadráticos múltiples.

A cada divisor del polinomio denominador de la fracción dada del tipo $ax^2 + bx + c$ elevado a la potencia p, le corresponden p fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + ac} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_px + B_p}{(ax^2 + bx + c)^p}$$

siendo $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_p, B_p$ constantes y A_p, B_p diferentes de cero.

EJEMPLOS 31.5.

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + x + 1}$$

31.6 DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Una vez que se ha determinado la forma para descomponer en fracciones parciales, el paso siguiente es encontrar el sistema de ecuaciones que se tendrá que resolver para obtener los valores de las constantes necesarias en la descomposición en fracciones parciales. La solución del sistema de ecuaciones puede auxiliarse mediante el uso de la calculadora gráfica, especialmente cuando se utilizan los métodos matriciales que se estudiaron en el capítulo 29.

A pesar de que el sistema de ecuaciones esté formado por más de tres ecuaciones, a menudo es muy sencillo determinar el valor de una o más variables o relaciones entre las variables que permitan al sistema reducirse a un tamaño lo suficientemente pequeño que pueda resolverse por cualquier método sin ningún problema. Los métodos estudiados en los capítulos 15 y 28 representan los procedimientos básicos utilizados.

EJEMPLO 31.6 Efectúe la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{3x^2 + 3x + 7}{(x - 2)^2(x^2 + 1)}$.

Mediante al utilización de las reglas 2 y 3 de la sección 31.5, el tipo de descomposición es:

$$\frac{3x^2 + 3x + 7}{(x - 2)^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

$$\frac{3x^2 + 3x + 7}{(x - 2)^2(x^2 + 1)} = \frac{A(x - 2)(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 2)^2}{(x - 2)^2(x^2 + 1)}$$

$$3x^2 + 3x + 7 = Ax^3 - 2Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 + B + Cx^3 - 4Cx^2 + Dx^2 + 4Cx - 4Dx + 4D$$

$$3x^2 + 3x + 7 = (A + C)x^3 + (-2A + B - 4C + D)x^2 + (A + 4C - 4D)x + (-2A + B + 4D)$$

Igualando los coeficientes con los términos correspondientes de los dos polinomios y fijando el valor de los demás a 0, se obtiene el sistema de ecuaciones a resolver.

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -2A + B - 4C + D &= 3 \\ A + 4C - 4D &= 3 \\ -2A + B + 4D &= 7 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, se obtienen los valores, $A = -1$, $B = 5$, $C = 1$ y $D = 0$.

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{3x^2 + 3x + 7}{(x - 2)^2(x^2 + 1)} = \frac{-1}{x - 2} + \frac{5}{(x - 2)^2} + \frac{x}{x^2 + 1}$$

Problemas resueltos

31.1 Descomponga en fracciones parciales

$$\frac{x+2}{2x^2-7x-15} \qquad \text{o} \qquad \frac{x+2}{(2x+3)(x-5)}.$$

SOLUCIÓN

Sea $$\frac{x+2}{(2x+3)(x-5)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(2x+3)}{(2x+3)(x-5)} = \frac{(A+2B)x+3B-5A}{(2x+3)(x-5)}.$$

Hay que determinar las constantes A y B de forma que

$$\frac{x+2}{(2x+3)(x-5)} = \frac{(A+2B)x+3B-5A}{(2x+3)(x-5)} \text{ idénticamente}$$

o $$x+2 = (A+2B)x+3B-5A.$$

Igualando los coeficientes de las potencias de x, se obtiene $1 = A+2B$ y $2 = 3B-5A$, las cuales, cuando se resuelven simultáneamente, dan como resultados $A = -1/13$, $B = 7/13$.

De aquí que, $$\frac{x+2}{2x^2-7x-15} = \frac{-1/13}{2x+3} + \frac{7/13}{x-5} = \frac{-1}{13(2x+3)} + \frac{7}{13(x-5)}.$$

Otro método: $x+2 = A(x-5)+B(2x+3)$

Para encontrar B, se hace que $x = 5$: $5+2 = A(0)+B(10+3)$, $7 = 13B$, $B = 7/13$.

Para encontrar A, se hace que $x = -3/2$: $-3/2+2 = A(-3/2-5)+B(0)$, $1/2 = -13A/2$, $A = -1/13$.

31.2 $$\frac{2x^2+10x-3}{(x+1)(x^2-9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-3}$$

SOLUCIÓN

$$2x^2+10x-3 = A(x^2-9)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x+3)$$

Para encontrar A, sea $x = -1$: $2-10-3 = A(1-9)$, $A = 11/8$.

Para encontrar B, sea $x = -3$: $18-30-3 = B(-3+1)(-3-3)$, $B = -5/4$.

Para encontrar C, sea $x = 3$: $18+30-3 = C(3+1)(3+3)$, $C = 15/8$.

De aquí que $$\frac{2x^2+10x-3}{(x+1)(x^2-9)} = \frac{11}{8(x+1)} - \frac{5}{4(x+3)} + \frac{15}{8(x-3)}.$$

31.3 $$\frac{2x^2+7x+23}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+3}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 2x^2+7x+23 &= A(x+3)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+3) \\ &= A(x^2+6x+9)+B(x-1)+C(x^2+2x-3) \\ &= Ax^2+6Ax+9A+Bx-B+Cx^2+2Cx-3C \\ &= (A+C)x^2+(6A+B+2C)x+9A-B-3C \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de potencias similares de x, $A + C = 2$, $6A + B + 2C = 7$ y $9A - B - 3C = 23$. Resolviendo el sistema, se obtiene $A = 2$, $B = -5$, $C = 0$.

De aquí que: $$\frac{2x^2 + 7x + 23}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{2}{x-1} - \frac{5}{(x+3)^2}.$$

Otro método: $2x^2 + 7x + 23 = A(x + 3)^2 + B(x - 1) + C(x - 1)(x + 3)$

Para encontrar A, se hace $x = 1$: $2 + 7 + 23 = A(1 + 3)^2$, $A = 2$.
Para encontrar B, se hace $x = -3$: $18 - 21 + 23 = B(-3 - 1)$, $B = -5$.
Para encontrar C, se hace $x = 0$: $23 = 2(3)^2 - 5(-1) + C(-1)(3)$, $C = 0$.

31.4 $$\frac{x^2 - 6x + 2}{x^2(x-2)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x-2}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 2 &= A(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + Cx^2 + Dx^2(x-2) \\ &= A(x^2 - 4x + 4) + Bx(x^2 - 4x + 4) + Cx^2 + Dx^2(x-2) \\ &= (B + D)x^3 + (A - 4B + C - 2D)x^2 + (-4A + 4B)x + 4A \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de potencias similares de x, $B + D = 0$, $A - 4B + C - 2D = 1$, $-4A + 4B = -6$, $4A = 2$. La solución simultánea de estas cuatro ecuaciones es $A = 1/2$, $B = -1$, $C = -3/2$, $D = 1$.

De aquí que: $$\frac{x^2 - 6x + 2}{x^2(x-2)^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \frac{3}{2(x-2)^2} + \frac{1}{x-2}$$

Otro método: $x^2 - 6x + 2 = A(x - 2)^2 + Bx(x - 2)^2 + Cx^2 + Dx^2(x - 2)$

Para encontrar A, se hace $x = 0$: $2 = 4A$, $A = 1/2$. Para encontrar C, se hace $x = 2$: $4 - 12 + 2 = 4C$, $C = 23/2$.

Para encontrar B y D, se hace $x =$ cualquier valor excepto 0 y 2 (por ejemplo, sea $x = 1$, $x = -1$).

Sea $x = 1$: $1 - 6 + 2 = A(1 - 2)^2 + B(1 - 2)^2 + C + D(1 - 2)$ y (1) $B - D = -2$.
Sea $x = -1$: $1 + 6 + 2 = A(-1 - 2)^2 - B(-1 - 2)^2 + C + D(-1 - 2)$ y (2) $9B + 3D = -6$.

La solución simultánea de las ecuaciones (1) y (2) es $B = -1$, $D = 1$.

31.5 $\dfrac{x^2 - 4x - 15}{(x+2)^3}$. Sea $y = x + 2$; entonces $x = y - 2$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4x - 15}{(x+2)^3} &= \frac{(y-2)^2 - 4(y-2) - 15}{y^3} = \frac{y^2 - 8y - 3}{y^3} \\ &= \frac{1}{y} - \frac{8}{y^2} - \frac{3}{y^3} = \frac{1}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2} - \frac{3}{(x+2)^3} \end{aligned}$$

31.6 $\dfrac{7x^2 - 25x + 6}{(x^2 - 2x - 1)(3x - 2)} = \dfrac{Ax + B}{x^2 - 2x - 1} + \dfrac{C}{3x - 2}$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 7x^2 - 25x + 6 &= (Ax + B)(3x - 2) + C(x^2 - 2x - 1) \\ &= (3Ax^2 + 3Bx - 2Ax - 2B) + Cx^2 - 2Cx - C \\ &= (3A + C)x^2 + (3B - 2A - 2C)x + (-2B - C) \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de potencia similares de x, $3A + C = 7$, $3B - 2A - 2C = -25$, $-2B - C = 6$. La solución simultánea de estas tres ecuaciones es $A = 1$, $B = -5$, $C = 4$.

De aquí que: $$\frac{7x^2 - 25x + 6}{(x^2 - 2x - 1)(3x - 2)} = \frac{x - 5}{x^2 - 2x - 1} + \frac{4}{3x - 2}.$$

31.7 $\dfrac{4x^2 - 28}{x^4 + x^2 - 6} = \dfrac{4x^2 - 28}{(x^2 + 3)(x^2 - 2)} = \dfrac{Ax + B}{x^2 + 3} + \dfrac{Cx + D}{x^2 - 2}$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 4x^2 - 28 &= (Ax + B)(x^2 - 2) + (Cx + D)(x^2 + 3) \\ &= (Ax^3 + Bx^2 - 2Ax - 2B) + (Cx^3 + Dx^2 + 3Cx + 3D) \\ &= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (3C - 2A)x - 2B + 3D \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de potencia similares de x,

$$A + C = 0,\ B + D = 4,\ 3C - 2A = 0,\ -2B + 3D = -28.$$

Resolviendo las ecuaciones en forma simultánea, $A = 0$, $B = 8$, $C = 0$, $D = -4$.

De aquí que $$\frac{4x^2 - 28}{x^4 + x^2 - 6} = \frac{8}{x^2 + 3} - \frac{4}{x^2 - 2}.$$

Problemas propuestos

Efectúe la descomposición en fracciones parciales de cada fracción racional.

31.8 $\dfrac{x + 2}{x^2 - 7x + 12}$

31.9 $\dfrac{12x + 11}{x^2 + x - 6}$

31.10 $\dfrac{8 - x}{2x^2 + 3x - 2}$

31.11 $\dfrac{5x + 4}{x^2 + 2x}$

31.12 $\dfrac{x}{x^2 - 3x - 18}$

31.13 $\dfrac{10x^2 + 9x - 7}{(x + 2)(x^2 - 1)}$

31.14 $\dfrac{x^2 - 9x - 6}{x^3 + x^2 - 6x}$

31.15 $\dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

31.16 $\dfrac{3x^2 - 8x + 9}{(x - 2)^3}$

31.17 $\dfrac{3x^3 + 10x^2 + 27x + 27}{x^2(x + 3)^2}$

31.18 $\dfrac{5x^2 + 8x + 21}{(x^2 + x + 6)(x + 1)}$

31.19 $\dfrac{5x^3 + 4x^2 + 7x + 3}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - x - 1)}$

31.20 $\dfrac{3x}{x^3 - 1}$

31.21 $\dfrac{7x^3 + 16x^2 + 20x + 5}{(x^2 + 2x + 2)^2}$

31.22 $\dfrac{7x - 9}{(x + 1)(x - 3)}$

31.23 $\dfrac{x+10}{x(x-2)(x+2)}$

31.24 $\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

31.25 $\dfrac{7x-2}{x^3-x^2-2x}$

31.26 $\dfrac{5x^2+3x+1}{(x+2)(x^2+1)}$

31.27 $\dfrac{-2x+9}{(2x+1)(4x^2+9)}$

31.28 $\dfrac{2x^3-x+3}{(x^2+4)(x^2+1)}$

31.29 $\dfrac{x^3}{(x^2+4)^2}$

31.30 $\dfrac{x^4+3x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)^2}$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

31.8 $\dfrac{6}{x-4}-\dfrac{5}{x-3}$

31.9 $\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{5}{x+3}$

31.10 $\dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{2}{x+2}$

31.11 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x+2}$

31.12 $\dfrac{2/3}{x-6}+\dfrac{1/3}{x+3}$

31.13 $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{5}{x+2}$

31.14 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{2}{x+3}$

31.15 $x+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{2}{x+2}$

31.16 $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{(x-2)^2}+\dfrac{5}{(x-2)^3}$

31.17 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{5}{(x+3)^2}$

31.18 $\dfrac{2x+3}{x^2+x+6}+\dfrac{3}{x+1}$

31.19 $\dfrac{2x-1}{x^2+2x+2}+\dfrac{3x+1}{x^2-x-1}$

31.20 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-x+1}{x^2+x+1}$

31.21 $\dfrac{7x+2}{x^2+2x+2}+\dfrac{2x+1}{(x^2+2x+2)^2}$

31.22 $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{3}{x-3}$

31.23 $\dfrac{-5/2}{x}+\dfrac{3/2}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}$

31.24 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}$

31.25 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{-3}{x+1}$

31.26 $\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

31.27 $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{-2x}{4x^2+9}$

31.28 $\dfrac{3x-1}{x^2+4}+\dfrac{-x+1}{x^2+1}$

31.29 $\dfrac{x}{x^2+4}+\dfrac{-4x}{(x^2+4)^2}$

31.30 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

APÉNDICE A

TABLA DE LOGARITMOS COMUNES

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

APÉNDICE B

TABLA DE LOGARITMOS NATURALES

N	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.0000	0.0100	0.0198	0.0296	0.0392	0.0488	0.0583	0.0677	0.0770	0.0862
1.1	0.0953	0.1044	0.1133	0.1222	0.1310	0.1398	0.1484	0.1570	0.1655	0.1740
1.2	0.1823	0.1906	0.1989	0.2070	0.2151	0.2231	0.2311	0.2390	0.2469	0.2546
1.3	0.2624	0.2700	0.2776	0.2852	0.2927	0.3001	0.3075	0.3148	0.3221	0.3293
1.4	0.3365	0.3436	0.3507	0.3577	0.3646	0.3716	0.3784	0.3853	0.3920	0.3988
1.5	0.4055	0.4121	0.4187	0.4253	0.4318	0.4383	0.4447	0.4511	0.4574	0.4637
1.6	0.4700	0.4762	0.4824	0.4886	0.4947	0.5008	0.5068	0.5128	0.5188	0.5247
1.7	0.5306	0.5365	0.5423	0.5481	0.5539	0.5596	0.5653	0.5710	0.5766	0.5822
1.8	0.5878	0.5933	0.5988	0.6043	0.6098	0.6152	0.6206	0.6259	0.6313	0.6366
1.9	0.6419	0.6471	0.6523	0.6575	0.6627	0.6678	0.6729	0.6780	0.6831	0.6881
2.0	0.6931	0.6981	0.7031	0.7080	0.7130	0.7178	0.7227	0.7275	0.7324	0.7372
2.1	0.7419	0.7467	0.7514	0.7561	0.7608	0.7655	0.7701	0.7747	0.7793	0.7839
2.2	0.7885	0.7930	0.7975	0.8020	0.8065	0.8109	0.8154	0.8198	0.8242	0.8286
2.3	0.8329	0.8372	0.8416	0.8459	0.8502	0.8544	0.8587	0.8629	0.8671	0.8713
2.4	0.8755	0.8796	0.8838	0.8879	0.8920	0.8961	0.9002	0.9042	0.9083	0.9123
2.5	0.9163	0.9203	0.9243	0.9282	0.9322	0.9361	0.9400	0.9439	0.9478	0.9517
2.6	0.9555	0.9594	0.9632	0.9670	0.9708	0.9746	0.9783	0.9821	0.9858	0.9895
2.7	0.9933	0.9969	1.0006	1.0043	1.0080	1.0116	1.0152	1.0188	1.0225	1.0260
2.8	1.0296	1.0332	1.0367	1.0403	1.0438	1.0473	1.0508	1.0543	1.0578	1.0613
2.9	1.0647	1.0682	1.0716	1.0750	1.0784	1.0818	1.0852	1.0886	1.0919	1.0953
3.0	1.0986	1.1019	1.1053	1.1086	1.1119	1.1151	1.1184	1.1217	1.1249	1.1282
3.1	1.1314	1.1346	1.1378	1.1410	1.1442	1.1474	1.1506	1.1537	1.1569	1.1600
3.2	1.1632	1.1663	1.1694	1.1725	1.1756	1.1787	1.1817	1.1848	1.1878	1.1909
3.3	1.1939	1.1970	1.2000	1.2030	1.2060	1.2090	1.2119	1.2149	1.2179	1.2208
3.4	1.2238	1.2267	1.2296	1.2326	1.2355	1.2384	1.2413	1.2442	1.2470	1.2499
N	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

N	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	1.2528	1.2556	1.2585	1.2613	1.2641	1.2669	1.2698	1.2726	1.2754	1.2782
3.6	1.2809	1.2837	1.2865	1.2892	1.2920	1.2947	1.2975	1.3002	1.3029	1.3056
3.7	1.3083	1.3110	1.3137	1.3164	1.3191	1.3218	1.3244	1.3271	1.3297	1.3324
3.8	1.3350	1.3376	1.3403	1.3429	1.3455	1.3481	1.3507	1.3533	1.3558	1.3584
3.9	1.3610	1.3635	1.3661	1.3686	1.3712	1.3737	1.3762	1.3788	1.3813	1.3838
4.0	1.3863	1.3888	1.3913	1.3938	1.3962	1.3987	1.4012	1.4036	1.4061	1.4085
4.1	1.4110	1.4134	1.4159	1.4183	1.4207	1.4231	1.4255	1.4279	1.4303	1.4327
4.2	1.4351	1.4375	1.4398	1.4422	1.4446	1.4469	1.4493	1.4516	1.4540	1.4563
4.3	1.4586	1.4609	1.4633	1.4656	1.4679	1.4702	1.4725	1.4748	1.4770	1.4793
4.4	1.4816	1.4839	1.4861	1.4884	1.4907	1.4929	1.4952	1.4974	1.4996	1.5019
4.5	1.5041	1.5063	1.5085	1.5107	1.5129	1.5151	1.5173	1.5195	1.5217	1.5239
4.6	1.5261	1.5282	1.5304	1.5326	1.5347	1.5369	1.5390	1.5412	1.5433	1.5454
4.7	1.5476	1.5497	1.5518	1.5539	1.5560	1.5581	1.5602	1.5623	1.5644	1.5665
4.8	1.5686	1.5707	1.5728	1.5748	1.5769	1.5790	1.5810	1.5831	1.5851	1.5872
4.9	1.5892	1.5913	1.5933	1.5953	1.5974	1.5994	1.6014	1.6034	1.6054	1.6074
5.0	1.6094	1.6114	1.6134	1.6154	1.6174	1.6194	1.6214	1.6233	1.6253	1.6273
5.1	1.6292	1.6312	1.6332	1.6351	1.6371	1.6390	1.6409	1.6429	1.6448	1.6467
5.2	1.6487	1.6506	1.6525	1.6544	1.6563	1.6582	1.6601	1.6620	1.6639	1.6658
5.3	1.6677	1.6696	1.6715	1.6734	1.6752	1.6771	1.6790	1.6808	1.6827	1.6845
5.4	1.6864	1.6882	1.6901	1.6919	1.6938	1.6956	1.6974	1.6993	1.7011	1.7029
5.5	1.7047	1.7066	1.7084	1.7102	1.7120	1.7138	1.7156	1.7174	1.7192	1.7210
5.6	1.7228	1.7246	1.7263	1.7281	1.7299	1.7317	1.7334	1.7352	1.7370	1.7387
5.7	1.7405	1.7422	1.7440	1.7457	1.7475	1.7492	1.7509	1.7527	1.7544	1.7561
5.8	1.7579	1.7596	1.7613	1.7630	1.7647	1.7664	1.7682	1.7699	1.7716	1.7733
5.9	1.7750	1.7766	1.7783	1.7800	1.7817	1.7834	1.7851	1.7867	1.7884	1.7901
6.0	1.7918	1.7934	1.7951	1.7967	1.7984	1.8001	1.8017	1.8034	1.8050	1.8066
6.1	1.8083	1.8099	1.8116	1.8132	1.8148	1.8165	1.8181	1.8197	1.8213	1.8229
6.2	1.8245	1.8262	1.8278	1.8294	1.8310	1.8326	1.8342	1.8358	1.8374	1.8390
6.3	1.8406	1.8421	1.8437	1.8453	1.8469	1.8485	1.8500	1.8516	1.8532	1.8547
6.4	1.8563	1.8579	1.8594	1.8610	1.8625	1.8641	1.8656	1.8672	1.8687	1.8703
6.5	1.8718	1.8733	1.8749	1.8764	1.8779	1.8795	1.8810	1.8825	1.8840	1.8856
6.6	1.8871	1.8886	1.8901	1.8916	1.8931	1.8946	1.8961	1.8976	1.8991	1.9006
6.7	1.9021	1.9036	1.9051	1.9066	1.9081	1.9095	1.9110	1.9125	1.9140	1.9155
6.8	1.9169	1.9184	1.9199	1.9213	1.9228	1.9242	1.9257	1.9272	1.9286	1.9301
6.9	1.9315	1.9330	1.9344	1.9359	1.9373	1.9387	1.9402	1.9416	1.9430	1.9445
7.0	1.9459	1.9473	1.9488	1.9502	1.9516	1.9530	1.9544	1.9559	1.9573	1.9587
7.1	1.9601	1.9615	1.9629	1.9643	1.9657	1.9671	1.9685	1.9699	1.9713	1.9727
7.2	1.9741	1.9755	1.9769	1.9782	1.9796	1.9810	1.9824	1.9838	1.9851	1.9865
7.3	1.9879	1.9892	1.9906	1.9920	1.9933	1.9947	1.9961	1.9974	1.9988	2.0001
7.4	2.0015	2.0028	2.0042	2.0055	2.0069	2.0082	2.0096	2.0109	2.0122	2.0136
7.5	2.0149	2.0162	2.0176	2.0189	2.0202	2.0215	2.0229	2.0242	2.0255	2.0268
7.6	2.0282	2.0295	2.0308	2.0321	2.0334	2.0347	2.0360	2.0373	2.0386	2.0399
7.7	2.0412	2.0425	2.0438	2.0451	2.0464	2.0477	2.0490	2.0503	2.0516	2.0528
7.8	2.0541	2.0554	2.0567	2.0580	2.0592	2.0605	2.0618	2.0631	2.0643	2.0665
7.9	2.0669	2.0681	2.0694	2.0707	2.0719	2.0732	2.0744	2.0757	2.0769	2.0782

N	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
N	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
8.0	2.0794	2.0807	2.0819	2.0832	2.0844	2.0857	2.0869	2.0882	2.0894	2.0906
8.1	2.0919	2.0931	2.0943	2.0956	2.0968	2.0980	2.0992	2.1005	2.1017	2.1029
8.2	2.1041	2.1054	2.1066	2.1078	2.1090	2.1102	2.1114	2.1126	2.1138	2.1150
8.3	2.1163	2.1175	2.1187	2.1199	2.1211	2.1223	2.1235	2.1247	2.1258	2.1270
8.4	2.1282	2.1294	2.1306	2.1318	2.1330	2.1342	2.1353	2.1365	2.1377	2.1389
8.5	2.1401	2.1412	2.1424	2.1436	2.1448	2.1459	2.1471	2.1483	2.1494	2.1506
8.6	2.1518	2.1529	2.1541	2.1552	2.1564	2.1576	2.1587	2.1599	2.1610	2.1622
8.7	2.1633	2.1645	2.1656	2.1668	2.1679	2.1691	2.1702	2.1713	2.1725	2.1736
8.8	2.1748	2.1759	2.1770	2.1782	2.1793	2.1804	2.1815	2.1827	2.1838	2.1849
8.9	2.1861	2.1872	2.1883	2.1894	2.1905	2.1917	2.1928	2.1939	2.1950	2.1961
9.0	2.1972	2.1983	2.1994	2.2006	2.2017	2.2028	2.2039	2.2050	2.2061	2.2072
9.1	2.2083	2.2094	2.2105	2.2116	2.2127	2.2138	2.2148	2.2159	2.2170	2.2181
9.2	2.2192	2.2203	2.2214	2.2225	2.2235	2.2246	2.2257	2.2268	2.2279	2.2289
9.3	2.2300	2.2311	2.2322	2.2332	2.2343	2.2354	2.2364	2.2375	2.2386	2.2396
9.4	2.2407	2.2418	2.2428	2.2439	2.2450	2.2460	2.2471	2.2481	2.2492	2.2502
9.5	2.2513	2.2523	2.2534	2.2544	2.2555	2.2565	2.2576	2.2586	2.2597	2.2607
9.6	2.2618	2.2628	2.2638	2.2649	2.2659	2.2670	2.2680	2.2690	2.2701	2.2711
9.7	2.2721	2.2732	2.2742	2.2752	2.2762	2.2773	2.2783	2.2793	2.2803	2.2814
9.8	2.2824	2.2834	2.2844	2.2854	2.2865	2.2875	2.2885	2.2895	2.2905	2.2915
9.9	2.2925	2.2935	2.2946	2.2956	2.2966	2.2976	2.2986	2.2996	2.3006	2.3016
N	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

Si $N \geq 10$, ln 10 $=$ 2.3026 y escribimos N en notación científica; entonces se usa $\ln N = \ln[k \cdot (10^m)] = \ln k + m \ln 10 = \ln k + m\,(2.3026)$, donde $1 \leq k < 10$ y m es un entero.

ÍNDICE