TEORIA
DE LA
ARITMETICA

JOHN A. PETERSON

Profesor Asociado de Matemáticas
Universidad de Montana

JOSEPH HASHISAKI

Profesor de Matemáticas
y Jefe del Departamento
de Matemáticas,
Western Washington State College

EDITORIAL LIMUSA - WILEY, S. A.
México 1969

Título de la obra en inglés: THEORY OF ARITHMETIC

Versión autorizada en español de la segunda edición publicada en inglés por John Wiley and Sons, Inc.

Versión española de:

ING. LUCIANO SEGURAJAUREGUI GALARZA

Profesor y Coordinador de Matemáticas en los Cursos de Capacitación de la Escuela Normal Superior de México.

PROFESOR MIGUEL ROMERO PEREZ

Titular de la Materia de Aritmética en la Escuela Normal Superior de México.

Revisión de:

DOCTOR GUILLERMO TORRES

Profesor Titular de Matemáticas e Investigador del Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

DOCTOR JOSE S. FLORIO

Profesor Titular de Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional de México, Consultor de Investigación.

Primera edición: 1969.

Impreso en México.

Prólogo

Esta revisión de la *Teoría de la Aritmética* se debe a dos importantes consideraciones. La primera, surgió de la calurosa recepción y amplia adopción de la edición original. Un elevado número de matemáticos y profesores de matemáticas nos han enviado sus favorables comentarios y sugestiones constructivas. Muchas de éstas se probaron en el aula y se han incorporado al texto.

La segunda consideración fue la creciente conciencia de un acentuado cambio en los estudiantes durante la clase. El excelente trabajo de la Asociación Matemática de América y del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas, mediante la asistencia de la Fundación Nacional de Ciencias, está empezando a evidenciarse en la mejor preparación matemática de los estudiantes que ingresan a centros de estudios superiores. Como resultado de esto, los estudiantes aceptan más los nuevos conceptos de la ciencia que nos ocupa, con una visión más amplia y un juicio crítico adecuado. Esta edición está escrita para la nueva generación de futuros maestros dotados de mejor preparación y capacidad.

El objetivo principal de este libro de texto permanece inalterable. Los autores desean suministrar a los maestros de enseñanza elemental la preparación necesaria para enseñar matemáticas. El plan de estudios en este nivel no está restringido a la aritmética, sino que incluye otros temas de matemáticas. El conocimiento exacto del asunto tratado se considera como prerrequisito esencial para la buena enseñanza.

Comenzando con un breve desarrollo histórico que incluye sistemas de numeración, se hace una introducción al lenguaje de conjuntos y al concepto fundamental de relaciones. Esto último era muy nuevo para los maestros de enseñanza elemental en la época de la primera edición, pero la mejor preparación de los estudiantes actuales permite un desarrollo más formal del tema. Siguiendo sugerencias de matemáticos y profesores de matemáticas, el contenido de los capítulos 4 y 5 se ha reorganizado completamente y en parte reescrito. Estos cambios se ensayaron en clase y se logró un mejoramiento en la enseñanza del tema. El lenguaje de conjuntos y el concepto de relaciones se han usado, entonces, para desarrollar tanto las propiedades algebraicas como las de orden de los sistemas de números enteros no negativos y el cero, enteros, racionales y reales. La última parte del libro está dedicada a un tratamiento de la geometría, planeado como material básico para el maestro de enseñanza primaria; resulta particularmente apropiado por la inclusión de temas de motivación y de interés histórico.

Mediante la formulación de definiciones precisas y de la simple pero exacta presentación de las ideas fundamentales, *Teoría de la Aritmética* expone los conceptos difíciles de las matemáticas modernas haciéndolos accesibles a los futuros profesores y en ejercicio de su profesión.

Los problemas y ejemplos constituyen una característica significativa de esta edición. Un número adecuado de problemas seleccionados cuidadosamente se ensayaron en forma exhaustiva, resultando un estímulo, gran información y ayuda para los estudiantes. Los problemas se han distribuido, a propósito, a lo largo de cada capítulo para estimular a los alumnos a que verifiquen su comprensión del tema antes de estudiar nuevos conceptos. Esta presentación también es apropiada para las tareas y exámenes asignados. El orden y selección de los problemas del libro permite usarlo en gran variedad de situaciones que se producen en clase y que comprenden desde pequeños grupos controlados hasta clases teóricas numerosas. Se da atención especial a los problemas que acentúan la comprensión de los conceptos fundamentales, como también a problemas destinados a verificar la habilidad en la técnica de los cálculos.

El material del libro está presentado con suficiente detalle para que se pueda enseñar a estudiantes que tomaron el curso usual de matemáticas en la escuela preparatoria. Los capítulos del 2 al 8 incluyen las ideas fundamentales en el desarrollo de este material y deben servir como base de cualquier curso en el cual este libro se use como texto. Se ha verificado que, dentro del sistema trimestral, los primeros ocho capítulos, excepto unos cuantos temas seleccionados, son adecuados para un curso trimestral de cinco horas semanales. El tiempo asignado a los temas, incluyendo repaso y exámenes, se distribuye como sigue:

1–4 horas. Capítulos 1 y 2 dedicando la mayor parte del tiempo al lenguaje de conjuntos.

5–10 horas. Capítulo 3, con un tratamiento cuidadoso de las relaciones y sus propiedades.

11–18 horas. Capítulo 4, introducción a las operaciones y al primer desarrollo de un sistema de numeración.

19–23 horas. Capítulo 5, con énfasis sobre el desarrollo de la total comprensión del valor relativo en un sistema de numeración.

24–33 horas. Capítulo 6, extensión de los conceptos del sistema de los números naturales y el cero al conjunto de enteros, con una consideración cuidadosa de la factorización en números primos, el algoritmo de la división, el algoritmo de Euclides, y temas relacionados.

34–42 horas. Capítulo 7, con énfasis sobre la comprensión de los números racionales como elementos del sistema de números racionales, números racionales como clases de equivalencia, el concepto de densidad, y la interpretación usual de los números racionales.

43–48 horas. Capítulo 8, con especial atención a las aproximaciones decimales, los números reales como decimales infinitos, concepto de completo, la recta real, y la aproximación de raíces cuadradas.

Si se consideran cuidadosamente todos los temas de los primeros ocho capítulos, y con inclusión del capítulo 9, esto puede extenderse a dos trimestres sucesivos, de tres horas semanales. Dentro del sistema semestral, el tema es adecuado para un curso semestral de cuatro a cinco horas semanales.

De acuerdo con la distribución de los temas en el texto, cada capítulo consta de varias secciones y, a veces, subsecciones. Estas se identifican por un número seguido de un punto; después, un número o una combinación de números y una letra. El primer número señala el capítulo, y el que sigue al punto identifica la sección o subsección. Por ejemplo, el símbolo 5.7 se usa para señalar el capítulo 5, sección 7; el símbolo 5.7a identifica la primera subsección de esa sección. Las definiciones y los ejercicios están numerados en forma similar para facilitar la referencia. La definición 5.5a es la primera de la sección 5, capítulo 5. Las referencias a otro tema se mencionan brevemente en el contexto, formando una relación en orden alfabético al final de cada capítulo. Al final del libro se incluyen las respuestas a los ejercicios seleccionados.

Para terminar, agradecemos la crítica constructiva y las sugerencias recibidas de muchos matemáticos y profesores de matemáticas que han utilizado y revisado el libro. En particular, expresamos nuestro agradecimiento al profesor Roy Dubisch, de la Universidad de Washington, por su examen crítico y cuidadosa edición. Le debemos agradecimiento especial al Grupo de Autores del Comité sobre Educación Media de la Asociación Matemática de América, así como al Grupo de Autores del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas; ambos hicieron uso de la primera edición de esta obra, como libro de referencia y consulta. En esta edición se refleja, sin duda, la experiencia obtenida al participar estos grupos de escritores. Por último, expresamos también nuestro agradecimiento a los editores por su ayuda y consejos, lo mismo que a los numerosos estudiantes que en el transcurso de los años han ayudado al desarrollo del material de este libro.

Además, dejamos constancia de haber hecho el mayor esfuerzo para incorporar en esta edición las sugerencias útiles de los lectores, y nos parece que hemos logrado un libro de texto de superior calidad. Como lo hicimos en la primera edición, apreciaremos todas las sugerencias y críticas futuras; esperamos que nos llegarán igual que en el pasado.

Diciembre de 1966.

JOHN A. PETERSON
JOSEPH HASHISAKI

Contenido

Tabla de Símbolos

$\in$	es un elemento de, pertenece a, 24
$\notin$	no es un elemento de, 24
$=$	es un nombre para, 25, 28
A	$= \{x \mid x$ tiene cierta propiedad$\}$, 25
$\subseteq$	inclusión, 26, 43
$\subset$	inclusión propia, 27
$\emptyset$	conjunto vacío, conjunto nulo, 28
$\{\ \}$	conjunto vacío, 28
U	conjunto universal, 29
$\cup$	unión, 31
$\cap$	intersección, 32
A'	complemento de, 34
$\times$	producto cartesiano, 37
®	relación, 44, 48
$\mid$	divide a, 46
$\nmid$	no divide a, 46
1-1	correspondencia uno a uno, 50
$[a]$	clase de equivalencia, 49
$n(s)$	cardinal de S, 54, 62
$<$	menor que, 58, 100
$\leq$	menor o igual que, 58, 100
$\nless$	no menor que, 102
$*$	operación binaria, 77
$-n$	inverso aditivo, 129
$\lvert m \rvert$	valor absoluto, 156
f^{-1}	inverso de una relación, 62

J_{12}	los enteros, módulo, 12, 162
$\equiv$	congruencia, 49, 160
$\doteq$	equivalencia, 173
$\left[\frac{m}{n}\right]$	clase de equivalencia, 175
%	porcentaje, 202
N	conjunto de los números naturales, 70
W	conjunto de los números enteros no negativos, 93
I	conjunto de los enteros, 129
R	conjunto de los números racionales, 190
$\overrightarrow{AB}$	semirrecta, 250
$\overline{AB}$	segmento de recta, 251
$\overleftrightarrow{AB}$	recta pasante por A y B, 251
AB	longitud del segmento $\overline{AB}$, 251
$m(\overline{AB})$	medida de un segmento $\overline{AB}$, 252
$\angle BAC$	ángulo BAC, 253

CAPITULO 1

Origen de los numerales y sistemas de numeración

1.1 INTRODUCCION

Nuestro estudio empieza con un breve resumen de la historia de los símbolos numerales y los sistemas de numeración. Estos son "instrumentos de trabajo" del que calcula, y algún conocimiento de su origen conduce a un mejor entendimiento de su uso. Estamos también interesados en otros sistemas de numeración porque los algoritmos, el "cómo hacer" de los cálculos aritméticos depende mucho del sistema usado para denominar a los números. Deseamos examinar la estructura de nuestro sistema y el papel que juega para una mejor comprensión de la aritmética. Deseamos hacer amplio uso del descubrimiento y desarrollo sistemático, de las formas de pensamiento y del contenido y forma de las matemáticas que hemos heredado.

Acerca del origen del concepto de números, solamente se pueden hacer conjeturas. Parece lógico suponer que el hombre siempre tuvo alguna noción intuitiva de "más que" y "menos que". En la evolución de la civilización, los aspectos cuantitativos del medio dictaminaron el desarrollo de algunas formas de dar respuesta a la pregunta, "¿cuántos?" Esto se puede hacer sin los símbolos numéricos o numerales. Basta con algún sistema de tarjar para responder a esta pregunta. El sistema de tarjar puede incluir guijarros en un saco, haces de varas, muescas cortadas en una vara, nudos enlazados en un cordel, o marcas en la arena. Cualquiera que sea el tipo de dispositivo usado para formar el *conjunto de referencia,* el principio involucrado es el mismo; es decir, una coordinación entre los objetos que deben ser contados y el conjunto de referencia. El conjunto formado por los dedos de la mano fue, y para algunos propósitos sigue siendo, el conjunto de referencia más conveniente. A partir de esto, el hombre desarrolló un conjunto de palabras para ser usado como un conjunto de referencia más conveniente o para mantener el registro de "cuántos".

El siguiente paso consistió en pasar del lenguaje oral al escrito, después a los símbolos y, finalmente, al desarrollo del *sistema de numeración*.

1.2 SISTEMAS DE NUMERACION

Por un *sistema de numeración* entendemos un conjunto de símbolos que se usa de acuerdo con algún método para asignar numerales, o símbolos numéricos, a los números. Con objeto de entender mejor y apreciar nuestro propio sistema de numeración, debemos investigar algunos otros sistemas que han sido, o son usados actualmente. No nos interesará mucho el simbolismo particular de cada sistema, sino los principios y conceptos involucrados.

Todos los sistemas de numeración tienen ciertas características en común. El número de símbolos básicos es finito y varía desde tan pocos como dos, en algunos sistemas hasta treinta o más en otros.

Ejemplo 1

Los símbolos básicos en el sistema de numeración romano son I, V, X, L, C, D y M. Los símbolos básicos en el sistema de numeración que usamos son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9.

Puesto que el número de símbolos básicos debe ser necesariamente finito y la cantidad de números a ser simbolizados es infinita, es necesario a veces usar el mismo símbolo más de una vez en la representación de un número. Esto es cierto para todo sistema de numeración.

Todo sistema posee un símbolo para el número "uno". En algunos sistemas los números subsecuentes son escritos por el uso repetido de este símbolo (principio repetitivo) hasta que la colección no se pueda reconocer con facilidad o sea inconveniente su gran tamaño; entonces se introduce un nuevo símbolo para reemplazar la colección de *símbolos-uno*. En otros sistemas, para representar números subsiguientes consecutivos hasta un cierto número, se usan distintos símbolos constituidos por un solo carácter; entonces se introduce un símbolo de dos o más caracteres. Al número que marca el cambio se le llama generalmente la *base* del sistema. En la mayor parte de los casos, este número es diez. Esta combinación de los símbolos iniciales fue reconocida desde un principio como una forma poderosa de representar números grandes con una gran economía de símbolos.

Además, hay principios fundamentales que juegan distintos papeles en los diferentes sistemas y ciertos conceptos que aparecen en unos y no en otros. Los principios y conceptos son importantes y, una vez entendidos, nos permiten inventar nuevos símbolos y formar otros sistemas de numeración. Estos principios permiten clasificar los sistemas de numeración. Teniendo en cuenta estas reflexiones, consideraremos algunos sistemas.

Con frecuencia, los estudiantes preguntan si se espera que ellos memoricen los símbolos y sus significados en los diversos sistemas de numeración usados como ejemplos en las siguientes secciones. Esto no es necesario en absoluto. Los sistemas de numeración están seleccionados para ilustrar los conceptos y principios fundamentales.

1.3 SISTEMAS ADITIVOS DE NUMERACION

Los sistemas aditivos de numeración están caracterizados como aquellos que se basan fundamentalmente en el principio aditivo para obtener los números representados por un conjunto dado de símbolos. Tienen símbolos para el número uno, para la base y potencias de la base y, algunas veces, para múltiplos de potencias de la base. El *principio repetitivo,* esto es, uso repetido del mismo símbolo, se usa para representar números entre potencias de la base. El número representado por un conjunto particular de símbolos es sencillamente la suma de los números que cada símbolo del conjunto representa. Este es el *principio aditivo.*

Para aclarar estos principios básicos, examinemos algunos ejemplos.

1.3a El sistema de jeroglíficos egipcios

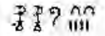
El sistema jeroglífico-egipcio data de 3000 años antes de Cristo y fue usado durante 2000 años aproximadamente. La tabla 1 es una lista parcial de los símbolos usados, con las expresiones decimales equivalentes y su significado original.

Tabla 1 Jeroglíficos egipcios

Hindú-Arábigo o decimal	Egipcio	Descripción
1	𓏺	Un bastón (raya vertical)
10	𓎆	Talón (arco)
100	𓍢	Un rollo (enroilada)
1000	𓆼	Una flor de loto
10,000	𓂭	Un dedo señalando
100,000	𓆐	Un pescado (renacuajo)
1,000,000	𓁨	Un hombre asombrado

Estos símbolos se usan para representar un número en la misma forma en que las monedas y billetes se usan para formar una suma dada de dinero. El número uno se usa repetidamente para formar los números del 1 al 9. Esencialmente, esto equivale a construir un conjunto representativo para coordinar los objetos que deben ser contados y los símbolos-uno repetidos. Los otros símbolos representan una composición de los símbolos precedentes y todo número se expresa por el uso aditivo de estos símbolos. Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

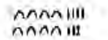


significa 1000 + 1000 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1, que es 2124 como numeral decimal.

Ejemplo 2

significa 1,000,000 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 100 + 1000 + 10, que es 1,001,116 como numeral decimal.

Ejemplo 3



significa 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, que es 87 como numeral decimal.

Obsérvese que, en un sistema aditivo de numeración tan simple como éste, el orden en el cual los símbolos aparecen no importa.

La adición y sustracción de números escritos en numerales egipcios son tan fáciles como hacer un cambio. Con este engorroso sistema la multiplicación y división deben haber sido algo difíciles, y aún más, sin disponer de lápiz y papel. Los egipcios tenían métodos (ver Swain, pág. 81). También las fracciones fueron entendidas y usadas por los egipcios (ver Eves, págs. 39-40). No presentamos aquí los detalles del cálculo en los diferentes sistemas porque nuestro interés reside principalmente en las propiedades de los sistemas de numeración en comparación con nuestro propio sistema.

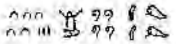
Para resumir, el sistema jeroglífico egipcio posee las siguientes propiedades. Los símbolos son jeroglíficos, y se necesitan tantos como 45 caracteres de seis símbolos diferentes para representar los números hasta el 100,000, inclusive. El principio repetitivo es usado para representar números entre uno y la base, la cual es 10, y entre potencias de la base. El principio aditivo se aplica a cualquier conjunto de símbolos para determinar el número representado.

Ejercicios 1.3a

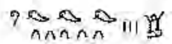
1. Exprese los números siguientes en numerales egipcios:

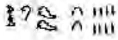
(a) 77	(b) 629	(c) 90,909
(d) 2,507,916	(f) 1,001,116	(e) 2124
(g) 808		

2. Escriba el decimal equivalente a los siguientes numerales egipcios:

(a) 

(c) 

(b) 

(d) 

3. Escriba en numerales egipcios:

(a) la suma de (a) y (b) del problema 2.
(b) la suma de (a) y (c) del problema 2.
(c) la suma de (b) y (a) del problema 2.

4. ¿Cuál de los números representados por los numerales del problema 2 es el mayor y cuál es el menor?

1.3b El sistema romano

Los numerales romanos y el sistema de numeración datan de la época de los antiguos romanos. Estos numerales fueron usados generalmente en contabilidad en los países europeos hasta el siglo XVIII, no obstante que los numerales decimales ya eran amplia y generalmente conocidos desde el año 1000. La introducción de la imprenta originó un cambio rápido en los numerales decimales, aunque los numerales romanos continuaron usándose en algunas escuelas hasta, aproximadamente 1600 y aún se usan un poco. Como ejemplos, tenemos los numerales en la carátula de un reloj, los numerales de los capítulos en los libros y numerales de las secciones en un escrito.

Mucho se ha escrito acerca de la notación romana. No es nuestro propósito examinar el sistema en detalle, sino simplemente examinar algunas de las características generales (véase Newman, págs. 447-449).

El uso actual de los numerales romanos está resumido en la tabla 2.

Tabla 2 Numerales romanos

Decimal	1	5	10	50	100	500	1000
Romano	I	V	X	L	C	D	M

El sistema romano es, además, esencialmente un sistema aditivo de numeración en el que un número designado por un conjunto de símbolos es sencillamente la suma de los números representados por cada uno de los símbolos en el conjunto.

A diferencia del sistema egipcio, donde la disposición de los símbolos no tiene un significado especial, el sistema romano usa el concepto de orden en su modelo. Como en el sistema decimal, en cualquier conjunto de símbolos que representan un número, los numerales romanos se escriben con el símbolo para el número mayor a la izquierda. Las excepciones se indicarán posteriormente.

Un símbolo con una barra encima indica que el número representado por el símbolo debe ser multiplicado por 1000. Una doble barra significa la multiplicación por un millón ó 1,000,000. Este es un ejemplo del *principio multiplicativo.*

Ejemplo 1

MDCCCLXII = 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + + 1 + 1.
= 1862 en el sistema decimal.

Con tan pocos símbolos en un sistema aditivo, se requiere una gran cantidad de repeticiones para expresar algunos números grandes. Por ejemplo, el numeral decimal 387 se escribe CCCLXXXVII. ¿Cuántos símbolos serían necesarios para designar el número que en los numerales decimales se escribe como 8888?

Actualmente, el uso del sistema romano también incluye el *principio sustractivo.* Este principio establece que si un símbolo de un número pequeño precede a un símbolo de un número mayor, los dos son considerados como un par. El número representado por el par es el número mayor menos el menor. Hoy, este principio está restringido a los numerales para cuatro y nueve, cuarenta y noventa, cuatrocientos y novecientos, etc.
La tabla 3 resume esta propiedad.

Tabla 3 Principio sustractivo en los numerales romanos

IV = IIII	XL = XXXX	CD = CCCC
IX = VIIII	XC = LXXXX	CM = DCCCC

Toda extensión de su uso a más que pares de símbolos podría conducir a resultados ambiguos; por ejemplo, IXC podría ser interpretada como 100-9, o como 100-10-1, resultando que podría designar 91 u 89, dependiendo de la interpretación. Obsérvese que el principio sustractivo depende del *orden* de los símbolos.

En resumen, el sistema romano posee las siguientes propiedades. Los símbolos son, en la actualidad, letras del alfabeto, y se requieren tantos como 20 de los diferentes símbolos, con el principio multiplicativo, para representar los números hasta 100,000 inclusive. El principio repetitivo se usa para representar números entre aquellos para los que sí se dispone de símbolos distintos. Este sistema podría ser llamado un sistema de base 10 modificado, en el cual se han introducido símbolos intermedios para el cinco, el cincuenta y el quinientos. El principio aditivo es aplicado tal como se hace con el principio sustractivo. El principio multiplicativo es usado también para representar números grandes. El ordenamiento de los símbolos es una parte esencial del modelo.

Ejercicios 1.3b

1. Exprese lo siguiente en numerales romanos:

(a) 26	(b) 39	(c) 49
(d) 342	(e) 431	(f) 449
(g) 1551	(h) 1961	(i) 2409

2. Exprese cada uno de los siguientes en numerales decimales:

(a) XXXVII	(b) XLIX	(c) XCIV
(d) CCCLXII	(e) CDLVII	(f) DCXLIV
(g) MCLI	(h) MCMXLV	(i) MMCMXMCIX

3. Establezca algunas ventajas del sistema romano sobre el sistema egipcio.
4. Para números menores que 1000, los datos de adición para el sistema romano son:

   IIIII = V   VV = X
   XXXXX = L   LL = C
   CCCCC = D   DD = M

   (a) Sume: MDCCCLXII + CXLIV
   (nota: Aquí es útil escribir CXLIV como CXXXXIIII.)
   (b) Sume: MDXII + DCVII
   (c) Reste: MCCVI − DCLXIII
5. (a) ¿Cuál es el siguiente de MCMXLIX?
   (b) ¿Cuál es el siguiente de MCM?
6. ¿Qué número es mayor, MMCMXXIX o MMDCCXXIX?
7. Duplique cada número en el ejercicio 2.

1.3c El sistema jónico-griego

El sistema numeral jónico-griego fue un sistema del tipo aditivo, pero con un esquema más complicado que incluye mucho más símbolos. Consiste de 24 letras del alfabeto griego más otros tres símbolos fuera de uso para la digamma, sampi y koppa. Inicialmente se usaron las letras mayúsculas; posteriormente, las letras minúsculas. El sistema exigía la memorización del conjunto de símbolos dados en la tabla 4.

Tabla 4 Numerales jónico-griegos

1	α	alfa	10	ι	iota	100	ρ	ro
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	50	ν	nu	400	υ	úpsilon
5	ε	épsilon	40	μ	mu	500	ϕ	fi
6	digamma, fuera de uso		60	ξ	xi	600	χ	ji
7	ζ	zeta	70	o	ómicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	teta	90	koppa, fuera de uso		900	sampi, fuera de uso	

Con este sistema, los números pueden escribirse en una forma más compacta, aunque aún es del tipo aditivo, por ejemplo,

$$\lambda\gamma = 33 \qquad \chi\xi\varepsilon = 665 \qquad \pi\eta = 88$$

Para los múltiplos de 1000, los primeros nueve símbolos fueron usados con una "prima", es decir $\alpha' = 1000$, $\beta' = 2000$, etc. Para 10,000, fue usado M, y el principio multiplicativo se aplicaba a los grandes números; por ejemplo, $\beta M = 20{,}000$; $\zeta M\beta'\upsilon\nu\beta = 72{,}452$.

Obsérvese que hay ventajas y desventajas en el sistema jónico-griego sobre los otros sistemas que han sido analizados. La principal ventaja es la economía de símbolos. Para números hasta 1000, la cantidad de símbolos necesaria para expresar un número es la misma que en el sistema de numeración decimal. Las principales desventajas son que hay muchos símbolos a memorizar y que son letras del alfabeto que pueden ser confundidas con palabras.

La caracterización de este sistema incluye los siguientes hechos. Los símbolos son letras de un alfabeto griego antiguo, 27 en total, y tantas como 6 de éstas, con el principio multiplicativo, son necesarias para representar números hasta 100,000 inclusive. Este es un sistema de base 10 y en él se aplica el principio aditivo. Es notable que el uso repetido de los símbolos no es tan acentuado en el sistema griego de numeración comparado con otros, pero tiene el inconveniente de tener muchos símbolos diferentes.

Ejercicios 1.3c

En los siguientes ejercicios, use *d* para digamma, *k* para koppa y *s* para sampi.

1. Exprese los siguientes numerales decimales en el sistema jónico-griego:

(a) 36	(b) 39	(c) 49
(d) 342	(e) 431	(f) 449
(g) 1551	(h) 1961	(i) 2409

2. Exprese los siguientes numerales jónico-griegos en notación decimal:

(a) $\mu\delta$	(b) $\pi\zeta$	(c) $\chi\nu\gamma$
(d) $\sigma\delta$	(e) $\rho o\beta$	(f) $\rho\iota\gamma$
(g) $d'\upsilon\lambda s$	(h) $\theta'\psi\kappa\varepsilon$	(i) $\varepsilon M\delta'\phi\xi\zeta$

3. Exprese algunas desventajas y ventajas, aparte de las mencionadas con anterioridad, del sistema jónico-griego comparado con los sistemas de numeración romano y egipcio.

4. ¿Qué número sigue a (a) $\omega\pi\gamma$? (b) $\phi\mu\beta$?

5. ¿Cuáles son el mayor y el menor número en el siguiente conjunto?

$$\{\chi\xi\delta, \qquad \chi\pi\eta, \qquad \chi\nu\delta\}$$

6. Duplique cada número en el ejercicio 2, (a), (d), (g) y escriba el resultado en numerales griegos.

1.4 SISTEMAS MULTIPLICATIVOS DE NUMERACION

En estos sistemas los símbolos son escogidos para uno, dos, tres, etc., hasta la base, y otro conjunto se escoge para representar potencias de la base. Estos símbolos son usados con los principios multiplicativo y aditivo para representar cualquier número.

1.4a El sistema chino-japonés

El sistema numeral tradicional chino-japonés es de este tipo. Una lista parcial de símbolos con un ejemplo aparece en esta página.

Ejercicios 1.4a

1. Exprese los siguientes decimales numerales en el sistema japonés:

(a) 42	(b) 54	(c) 36
(d) 125	(e) 246	(f) 782
(g) 2146	(h) 1984	(i) 5469

1 一	10 十	2,345
2 二	100 百	二 千 } 2000
3 三	1000 千	三 百 } 300
4 四		四 十 } 40
5 五		五 } 5
6 六		
7 七		
8 八		
9 九		

2. Exprese los siguientes numerales japoneses como numerales decimales:

(a) 三
十
六

(b) 七
十
九

(c) 二
百
八

(d) 四
千
二
百
九

(e) 二
千
五
百
三
十
五

(f) 七
千
二
百
四
十
六

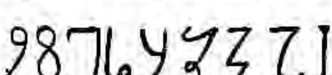
3. Haga una lista de las ventajas y desventajas del sistema japonés comparado con los sistemas estudiados anteriormente.
4. Construya las tablas de datos elementales para la adición y multiplicación en el sistema japonés de numeración.

1.5 SISTEMAS DE NUMERACION DE VALOR RELATIVO

Este es el tipo del sistema de numeración con el cual estamos más familiarizados, ya que "nuestro" sistema, el sistema decimal con los símbolos hindú-arábigo, es un sistema de valor relativo. En este tipo de sistema, se escogen símbolos para el cero, uno, dos, etc., hasta el número anterior a la base. En el sistema decimal, estos símbolos son conocidos como *dígitos*. Para un sistema de base "b" hay "b" símbolos. Entonces, cualquier número puede ser expresado en forma única como una suma de términos, cada uno de los cuales es uno de los símbolos básicos multiplicado por una *potencia* de la base. La potencia de la base por la cual se multiplica cada uno de los símbolos básicos está determinada por su lugar en relación a un punto de referencia. En el sistema decimal, éste se llama *punto decimal*.

1.5a Los símbolos hindú-arábigos

Los símbolos que usamos en la aritmética actual son designados como hindú-arábigos. Hindúes, porque probablemente fueron descubiertos por los hindúes, y arábigos porque llegaron a Europa en la lengua árabe. Los ejemplos más antiguos que se conservan de nuestros numerales actuales han sido encontrados en algunas columnas de piedra en la India que datan, aproximadamente, de 250 años antes de Jesucristo. Otros ejemplos antiguos son las inscripciones que datan aproximadamente de 100 años antes de Jesucristo, sobre las paredes de una cueva en una colina cerca de Peona, India, y en algunas inscripciones de aproximadamente 200 años después de Jesucristo esculpidas en las cuevas de Nasik, India. Estos ejemplos antiguos no contienen al cero y no emplean valor relativo. El valor relativo, sin embargo, y también el cero, deben haber sido introducidos antes del año 800 después de Jesucristo, ya que el matemático Persa al-Khowârizmî describe tal sistema, en un libro que data del 825 después de Jesucristo. La forma como los nuevos numerales fueron transmitidos a Europa no es clara históricamente. Probablemente, fue a través de comerciantes y viajeros. Los árabes invadieron la Península Ibérica en el año 711 después de Jesucristo y, sin duda, enseñaron los nuevos símbolos a los españoles. En el libro escrito en España, que data del año 976 después de Jesucristo, fue anotado el siguiente conjunto de símbolos:



Los cambios en la forma de los símbolos desde los más antiguos que se conocen hasta aquellos que están en uso en la actualidad pueden ser atribuidos principalmente a los escribas, quienes hacían trabajos de copia. A partir del advenimiento de la imprenta, alrededor de la mitad del siglo XV, los símbolos fueron bastante uniformes, solamente ligeros cambios de forma han ocurrido desde entonces.

Consideremos los símbolos en forma individual: está bastante claro que el símbolo para "uno", 1, fue una consecuencia natural de contar cosas tal como una tarja, una vara, etc. El símbolo para "dos" probablemente se indica como || ó =. El primero siguió una evolución natural de || a N ó ᒋ, el cual es el símbolo para dos usado en la actualidad en el lenguaje árabe. Similarmente, el segundo, =, puede haber cambiado de = a Z, y entonces a 2, el cual es el símbolo que nosotros usamos. El símbolo para "tres" posiblemente cambió de ||| a W a ᐳ ó ᐳ, el cual es en la actualidad el símbolo usado en el lenguaje árabe, ó de ≡ a ≋ ó 3, nuestro símbolo actual. La conjetura del origen del símbolo que usamos para "cuatro" es mucho más difícil. El símbolo árabe para el cuatro, ٤, es el único que tiene cuatro segmentos unidos. Poco se sabe o se conjetura acerca del origen de los otros símbolos. La tabla de la página 454 de Newman, Vol. I, da una interesante comparación de las formas de los símbolos hindú-arábigos desde el siglo XII hasta el advenimiento de la imprenta en el siglo XV.

1.5b Exponentes

Ya que es más fácil y más conveniente usar la notación exponencial en la discusión de los sistemas de valor relativo, haremos ahora una breve descripción del concepto de exponente.

Se recordará que la idea de exponente es una notación convencional que adoptamos por definición. Así como es más fácil escribir $5n$ en lugar de $n + n + n + n + n$, también convenimos en escribir 10^3 en lugar de $10 \cdot 10 \cdot 10$. El numeral "3" se llama *exponente* y el numeral "10" se llama la *base*. En general "b^n" significa $b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots$, hasta n factores. El índice superior "n" se denomina el *exponente* y "b" la *base*. El símbolo completo, "b^n" se le llama una *potencia* de la base b.

Por conveniencia revisaremos algunas consecuencias sencillas de la conveniencia de escribir "b^n" en lugar de $b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots$ hasta n factores. Más que probar los resultados, lo cual requiere el uso de la inducción matemática y la ley asociativa para la multiplicación, los enunciamos sin demostrarlos y citamos algunos ejemplos para hacer plausibles las afirmaciones generales (en lo que sigue $a \neq 0$.)

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Si definimos $a^0 = 1$,

y $$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

entonces 3. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Ejemplo 1

$$3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3)(3 \cdot 3 \cdot 3) = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^5$$

Ejemplo 2

$$(2^3)^2 = (2^3)(2^3) = (2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^6$$

Ejemplo 3

Caso 1. Si m es mayor que n,

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2 = a^{5-3}.$$

Caso 2. Si $m = n$,

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1 = a^{3-3} = a^0.$$

Caso 3. Si m es menor que n,

$$\frac{a^2}{a^3} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a} = a^{2-3} = a^{-1}.$$

Los casos 2 y 3 del ejemplo 3 ilustran la conveniencia de las definiciones de que para toda a diferente de cero, $a^0 = 1$ y $a^{-n} = 1/a^n$.

Ejemplo 4

¿Qué significa 10^{-1}? $\quad 10^{-1} = \dfrac{1}{10} = .1$

¿Qué significa 4^{-2}? $\quad 4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

Ejercicios 1.5b

1. Simplificar cada una de las siguientes expresiones:

(a) $10^3 \cdot 10^4$ (b) $(a^2)^3$
(c) $2^3 \cdot 2^2$ (d) $3^0 \cdot 3^2$

2. Encontrar el valor de:

(a) $10^3 \cdot 10^2$ (b) 2^{-2}
(c) 3^{-1} (d) 4^{-2}
(e) $2^{-3} \cdot 8$ (f) $10^x \cdot 10^2$

3. Encontrar el valor de:

(a) $(\frac{1}{2})^3$ (b) $(3^3)^2$
(c) $3^{(3^3)}$ (d) $(2^2)^2$
(e) $2^{(2^2)}$

1.5c El sistema decimal

El sistema decimal usa los diez símbolos hindú-arábigos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y aquí está incluido un símbolo para cero. Tiene base diez y es un sistema de valor relativo. Cualquier número puede ser expresado como una sucesión de símbolos y es interpretado como la suma de los términos que resultan de multiplicar el valor de cada símbolo por la potencia correspondiente de diez. La potencia de diez está determinada por la *posición o el lugar* que ocupa el símbolo con relación al punto decimal. Si el punto decimal se omite, como es usual en el caso de números enteros no negativos, se sobreentiende que el punto de referencia está inmediatamente a la derecha de la sucesión de los dígitos; por ejemplo, los símbolos "241' y "241." representan el mismo número.

La tabla 5 es una tabla abreviada de valores relativos para números en el sistema decimal.

Cuando vemos el numeral 386, observamos que el 6 está en la posición de las unidades y el lugar que ocupa se convierte en la posición de referencia para determinar el valor relativo asociado a los otros dígitos. Otra forma de indicar el punto de referencia o la posición de referencia es poner un punto inmediatamente después del 6, esto es, 386., lo cual sirve para identificar la posición de las unidades. Los numerales "386" y "386." designan el mismo número. El punto, en realidad, cumple dos finalidades: la primera, como se indicó anteriormente, es la de indicar la posición de las unidades, y la otra será discutida en la sección 8.4. Este punto es llamado el *punto decimal*. Se usa en los Estados Unidos y en Inglaterra, pero los ingleses lo escriben, en la línea de impresión, más arriba que nosotros. En otros países europeos se usa una coma en lugar del punto.

Tabla 5 Valores Relativos

10^9	1,000,000,000	Millares de millón
10^8	100,000,000	Centenas de millón
10^7	10,000,000	Decenas de millón
10^6	1,000,000	Millones
10^5	100,000	Centenas de millar
10^4	10,000	Decenas de millar
10^3	1,000	Millares
10^2	100	Centenas
10^1	10	Decenas
10^0	1	Unidades
10^{-1}	.1	Décimos
10^{-2}	.01	Centésimos
10^{-3}	.001	Milésimos
etc.		

Un símbolo tal como 2145.67 se interpreta como

$$2145.67 = 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}.$$

La suma de múltiplos de potencias de la base se llama la *forma desarrollada* o *forma polinomial* del numeral.

La ventaja principal del sistema de numeración decimal es su economía de símbolos y su adaptabilidad al cálculo.

Ejercicios 1.5c

1. Escribir 1,020,304 en forma desarrollada.
2. Escribir 12 en forma desarrollada.
3. Escribir 10 en forma desarrollada.
4. Escribir 10,000 en forma desarrollada.
5. ¿Cuál es el significado del dígito 3 en el numeral

   345? 435? 453?

6. Simplificar cada una de las expresiones siguientes

   (a) $2^3 \cdot 2^6$ (b) $5^p \cdot 5^q$
   (c) $(a^2)^4$ (d) $(x^3)^2 \cdot (x^4)^3$
   (e) $\dfrac{m^7}{m^5}, m \neq 0$ (f) $b^{3x} \div b^x, b \neq 0$
   (g) $x^2 \div x^6, x \neq 0$

7. Encontrar el valor de:

   (a) $10^3 \cdot 10^2$ (b) $3^2 \cdot 2^3$
   (c) $2^3 - 2^0$ (d) $3^2 \cdot 6^{-2}$
   (e) $(5^{-4})^{-1}$ (f) $5^{2x} \cdot 5^{-2x}$
   (g) $8^{-1} \cdot 2^0$ (h) $a^{-3} \div a^0, a \neq 0$

1.5d Desarrollo y lectura de números grandes

Ejemplo 1

$$56{,}146{,}929 = 5 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

$$3{,}050{,}060{,}992 = 3 \cdot 10^9 + 0 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^7 + 0 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

El primer número en el ejemplo 1 se lee como "cincuenta y seis millones, ciento cuarenta y seis mil novecientos veinte y nueve." Las comas son usadas para indicar grupos de tres dígitos. Estos grupos de tres dígitos son llamados *períodos*. Este agrupamiento facilita la lectura de los números. Comenzando con el primer grupo de la derecha, y leyendo hacia la izquierda, tenemos unidades, millares, millones, millares de millón, billones, etc.

Los números muy pequeños y muy grandes usualmente se escriben en lo que se llama *notación científica*. En esta notación, los números son expresados por algún número mayor o igual a uno pero menor que diez, multiplicado por la potencia correspondiente de diez. Por ejemplo, 1,000,000 debe ser escrito como $1 \cdot 10^6$; 23,000,000,000 es, sencillamente $2.3 \cdot 10^{10}$. La velocidad de la luz es aproximadamente $3 \cdot 10^{10}$ cm/seg. Este número se leería "tres multiplicado por 10 a la décima potencia, centímetros por segundo".

Las siguientes expresiones son ejemplos de constantes físicas escritas en notación científica:

Velocidad de la luz	$2.99776 \cdot 10^{10}$ cm/seg
Número de Avogadro	$6.0228 \cdot 10^{23}$/mol
Velocidad del sonido	$3.3 \cdot 10^4$ cm/seg (aproximadamente)
Unidad de Angstrom	10^{-8} cm
Constante de gravitación	$6.673 \cdot 10^{-8}$ dinas
Carga electrónica	$4.803 \cdot 10^{-10}$ sistema de unidades electrostáticas
Masa del electrón	$9.107 \cdot 10^{-28}$ gramos
Masa del átomo de hidrógeno	$1.673 \cdot 10^{-24}$ gramos

Ejercicios 1.5d

1. Escribir los siguientes números en forma desarrollada:

(a) 12 (b) 121
(c) 302 (d) 10,504
(e) 10,000 (f) 9090
(g) 11 (h) 1,001,001

2. Escribir las siguientes expresiones en dos formas diferentes:
Ejemplo: $10^1 \cdot 10^2 = 10^{1+2} = 10^3$ o $10^1 \cdot 10^2 = 10 \cdot 100 = 1000$.

(a) $10^2 \cdot 10^3$ (b) $10^0 \cdot 10^0$
(c) $10^3 \cdot 10^7$ (d) $10^1 \cdot 10^1$
(e) $2^3 \cdot 2^2$ (f) $2^2 \cdot 2^2$
(g) $2^0 \cdot 2^1$ (h) $2^{10} \cdot 2^{10}$

3. Escribir los números dados en el problema 1 en

(a) el sistema de numeración romano.
(b) el sistema de numeración egipcio.
(c) el sistema de numeración jónico-griego.

4. La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 10. Si los dígitos son intercambiados, el número que se forma es 54 menos que el número original. Encontrar el número.

5. En un número de dos dígitos, el dígito de las unidades es tres veces el dígito de las decenas. Si los dígitos son intercambiados, el número aumenta en 18. Encontrar el número.

6. Efectuar los siguientes cálculos en notación científica:

(a) $(3 \cdot 10^5)(2 \cdot 10^7) = ?$
(b) $(8 \cdot 10^8) \div (2 \cdot 10^6) = ?$
(c) $(6 \cdot 10^{23})(3 \cdot 10^{-18}) = ?$
(d) Usando como valor aproximado de la velocidad de la luz $3 \cdot 10^{10}$ cm/seg. y como valor aproximado para una milla $1.6 \cdot 10^5$ cm., determinar la velocidad de la luz en millas por segundo.

7. Escribir los siguientes números usando la notación científica:

(a) 0.0000065 (b) 0.000000087
(c) ocho billones (d) 5,700,000,000,000
(e) 6,000,000,000,000 (f) veintiún trillones

8. Escribir los siguientes números en notación usual:

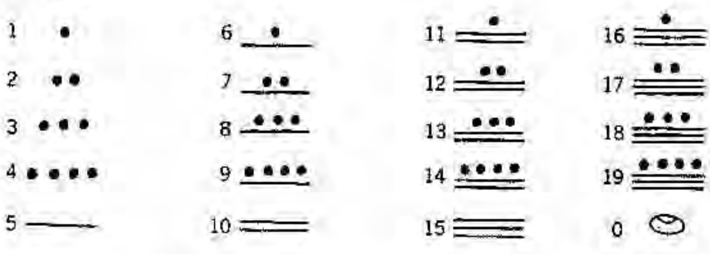
(a) $8.7 \cdot 10^9$ (b) $6.23 \cdot 10^{-6}$
(c) $8.7 \cdot 10^{-8}$ (d) $6.02 \cdot 10^{23}$
(e) $5 \cdot 10^{-9}$ (f) $1.08 \cdot 10^{-7}$

9. Hacer las multiplicaciones siguientes y expresar el producto en la notación científica y en la usual:

(a) $(10^{-3})(10^5)$ (b) $(10^{-4})(10^{-3})$
(c) $(10^{-6})(10^6)$ (b) $(3.75 \cdot 10^{-5})(2.24 \cdot 10^6)$
(e) $(7.25 \cdot 10^5)(2.16 \cdot 10^{-8})$ (f) $(6.75 \cdot 10^8)(2.42 \cdot 10^{-5})$

1.5e El sistema maya

Algunos de nosotros puede haber pensado que nuestro sistema decimal es el único sistema de valor relativo que se ha usado. Esto no es cierto. Es de interés el sistema usado por los mayas. Este era un sistema vigesimal (base veinte). La siguiente es una ilustración de su conjunto de símbolos.



[Por razones ajenas a esta discusión, en lugar de ser consecuentes con el uso de la base veinte, los mayas escribían: (18) (20), en lugar de $(20)^2$, (18) $(20)^2$ en lugar de $(20)^3$, etc.]

Los mayas, lo mismo que los chinos y japoneses, usaban la forma vertical de escritura. Un ejemplo de un numeral en su sistema es el siguiente.

Ejemplo 1

En el sistema decimal esto es

$$5[(18)(20)^2] + 18[(18)(20)] + 2(20) + 6 =$$
$$36{,}000 + 6480 + 40 + 6 = 42{,}526.$$

Ejemplo 2

En el sistema decimal esto es

$$1[(18)(20)^3] + 15[(18)(20)^2] + 12[(18)(20)] +$$
$$9(20) + 0 = 144{,}000 + 108{,}000 + 4320 +$$
$$180 = 256{,}500.$$

1.5f El sistema babilónico

Los babilonios usaban un sistema de valor relativo modificado que data de una época aún más antigua en la historia. La base de su sistema era sesenta. No era un verdadero sistema de valor relativo, porque no había símbolo para el cero, y empleaban solamente dos símbolos, un símbolo para el uno, |, y un símbolo para el diez, <. Estos símbolos fueron usados repetitivamente para representar los números hasta el 60. Debido a que no había símbolo para el cero, el sistema presentaba algunas ambigüedades. Un ejemplo de un número grande en este sistema es ||| <<|| <<<||| <<<<|||| el cual, en la notación decimal, sería escrito como

$$3(60)^3 + 22(60)^2 + 33(60)^1 + 44 = 729{,}224$$

1.6 RESUMEN

Es interesante observar que el sistema decimal es un sistema de valor relativo, pero no es el único. Es un sistema con base diez, pero no el único. Es un sistema que utiliza la propiedad aditiva, pero todos los sistemas utilizan ésta. Es un sistema que emplea exactamente diez símbolos, y esta característica, hasta donde se sabe, es única.

Ejercicios 1.7

Simplificar:

(a) $(2^5 \cdot 3^4)(2^3 \cdot 5^2) =$
(b) $(2^3 \cdot 3^{-2})(2^{-4} \cdot 3^5) =$

2. ¿Cuál es el doble de (a) 5000?, (b) 2^{20}?, (c) 10^6?

3. ¿Cuál es la mitad de (a) 2^{10}?, (b) 10^{12}?

4. ¿Qué se entiende por un *sistema de numeración*?

5. Todos los sistemas de numeración tienen ciertas características en común. Mencionar algunas.

6. Usando los símbolos I, ▱, Δ, y $\boxed{\circ}$ representar los números decimales 1, 4, 16, y 64 respectivamente, y convéngase en que símbolos O, I, L, y F representan los números decimales 0, 1, 2 y 3 respectivamente. Usar los símbolos necesarios para escribir los numerales decimales 127, 59 y 74 en
   (a) un sistema aditivo.
   (b) un sistema multiplicativo.
   (c) un sistema de valor relativo.

7. (a) En un sistema aditivo de base cinco, si 1, 5, 5^2, y 5^3 están representados por I, L, F y E, expresar los números 360, 252, 78 y 33 en este sistema.
   (b) En un sistema de valor relativo de base cinco, si 0, 1, 2, 3 y 4 están representados por O, I, L, F y E, expresar los números 360, 252, 78 y 33 en este sistema.

8. La gran pirámide de Gizeh fue edificada alrededor de 2900 años antes de Jesucristo. Para apreciar algunos de los problemas de ingeniería y matemáticas que tuvieron que ser resueltos usando los numerales jeroglíficos, escriba un comentario sobre las pirámides y, en particular incluya algún dato estadístico sobre la mayor de ellas.

1.7 LA TABLA DE CONTAR

Inicialmente el hombre conoció solamente un uso para los números, a saber, contar objetos. El desarrollo de la suma, sustracción y multiplicación fue gradual y puesto que era engorroso para trabajar con los símbolos existentes, se inventaron dispositivos especiales para facilitar los cálculos.

Los romanos usaban una tabla o mesa de contar, sobre la cual se dibujaban líneas, cada línea representaba unidades, decenas, centenas, etcétera y los espacios entre líneas representaban cinco, cincuenta, quinientos, etcétera. En ellas acomodaban pequeños discos. Por la colocación de estos discos en y entre las líneas podían expresar cualquier número, y, agregando discos adicionales y simplificando, podían resolver problemas de adición. Un diagrama esquemático de su tabla de contar podría ser parecido a la figura 1. El número representado en el diagrama esquemático sería 2837 en notación decimal.

Los comerciantes romanos exponían y vendían sus mercancías sobre estas tablas de contar. Las palabras *tabla de contar* fueron reducidas a *contador*.

Es interesante señalar que en el uso de su tabla de contar los romanos tenían esencialmente un sistema de numeración de valor relativo, pero no lo reconocieron como tal.

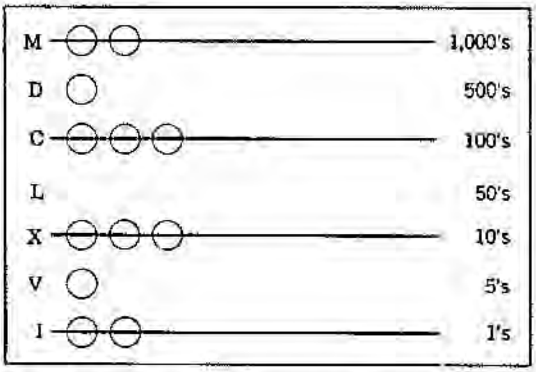


Figura 1. Tabla romana de contar.

1.8 EL ABACO

Los dispositivos inventados por diversos pueblos del mundo para facilitar los cálculos, diferían en apariencia y, hasta cierto punto, en diseño. El más popular, sin embargo, parece tener el mismo esquema básico y está clasificado como una forma del ábaco. Esencialmente, el esquema consistía en usar líneas, ranuras o barras para representar unidades y potencias de la base. Se colocaban cuentas sobre las líneas, ranuras o barras para designar cuántas de cada una de las unidades y potencias de la base debían usarse en la representación de un número. Estas cuentas no se quitaban del dispositivo. En cambio, su posición indicaba si deberían o no tomarse en cuenta en la representación de un número.

El ábaco romano era una tabla de bronce o madera. Las ranuras se cortaban en la tabla y se colocaban pequeños guijarros redondos en ellas para representar números. Estos guijarros se llamaban *calculi*, que es el plural de cálculo. Es éste el origen de la palabra *calcular* y de la palabra *cálculo* con la cual se indica una disciplina matemática.

Un diagrama esquemático del ábaco romano está indicado en la figura 2. En este diagrama, un símbolo con una barra encima indica el número representado por aquel símbolo multiplicado por 1000. La doble barra indica multiplicación por 1,000,000. Las bolitas colocadas en el extremo inferior de la ranura, hacia el operador, están en la posición neutral y no deben ser contadas. Las bolitas colocadas en el extremo superior de la ranura están en posición "activa" y deben ser contadas. El número, en nuestro sistema de numeración, indicado por la posición de las bolitas en la figura 2 debe ser

$$1000 + 500 + 200 + 50 + 20 + 3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{12} = 1773\tfrac{3}{4}.$$

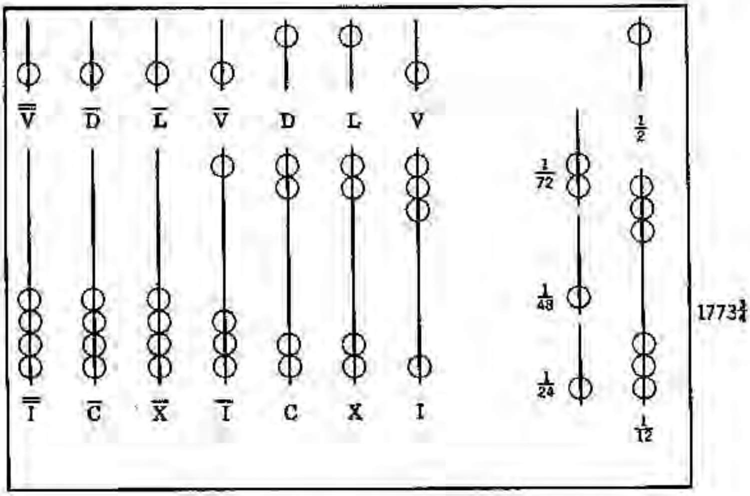


Figura 2. Abaco romano.

El ábaco inventado por los chinos, llamado *Suan pan,* era del tipo barras y cuentas. Una barra divisoria separaba conjuntos de dos y cinco bolitas en cada barra. Cada cuenta ubicada arriba de la barra divisoria tenía asociado un valor cinco veces mayor que una cuenta de

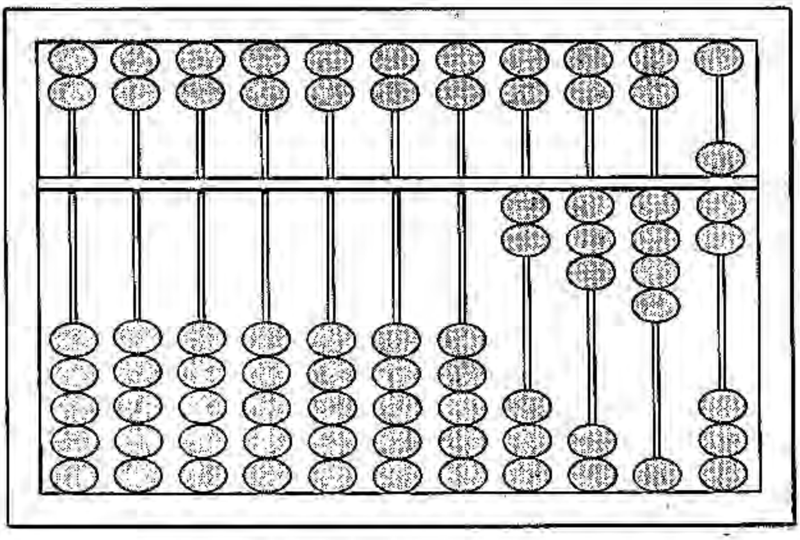


Figura 3. Abaco chino.

la misma barra, ubicada debajo de la barra divisoria. La posición activa de las cuentas era hacia la barra divisoria. Las cuentas colocadas hacia afuera estaban en posición pasiva o neutral. La figura 3 muestra una distribución típica de las cuentas del *Suan pan* con la cual se designa el número 2347. Es interesante observar que el *Suan pan* todavía se usa en general por los chinos.

El ábaco inventado por los japoneses, llamado *Soroban*, es muy similar al de los chinos, excepto que en lugar del arreglo de cinco y dos cuentas sobre cada barra, el modelo japonés tiene generalmente un arreglo de cuatro-uno o cinco-uno. La figura 4 es una distribución típica con la cual se indica el número 27,483.

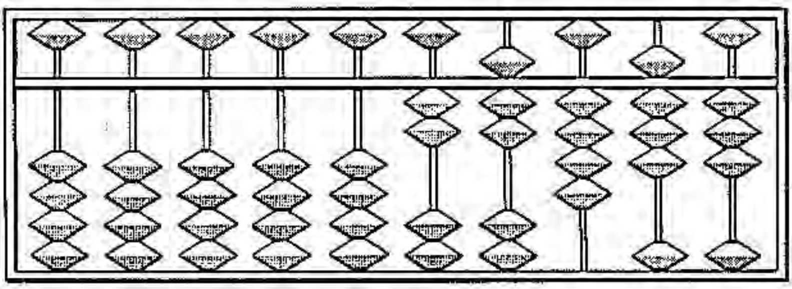


Figura 4. Abaco japonés.

La mayoría de nosotros, cuando pensamos en el ábaco, lo asociamos principalmente con el Oriente. Sin embargo, el ábaco, en una u otra forma, se usaba en toda Europa y Asia hasta que los pueblos empezaron a conocer y aceptar el sistema decimal de numeración y los métodos asociados de cálculo. Este cambio no tuvo lugar rápidamente. Hubo quienes favorecieron el uso de otros sistemas de numeración y el uso del ábaco en cálculos. Se llamaban *abacistas*. Opuestos a éstos estaban los defensores del sistema decimal con sus algoritmos o procedimientos para el cálculo. Se les llamó los *algoristas* (ver Swain, pág. 23). Tuvieron que transcurrir aproximadamente 500 años para que los algoristas lograran la aceptación general de sus técnicas de cálculo. Por el año 1600 habían logrado su objetivo y habían establecido las técnicas aritméticas que han permanecido en uso hasta nuestro tiempo.

El ábaco pasó entonces a un estado de casi retiro, pero este antiguo dispositivo está volviendo al salón de clase. Los maestros lo han encontrado útil en la enseñanza del valor relativo, de la adición y la sustracción. Con los adelantos efectuados en años recientes en el campo de las calculadoras, puede ser interesante observar que al ábaco se le puede clasificar como una de las primeras "calculadoras digitales" (ver Mueller, págs. 9-11, y Newman, págs. 456-464).

Ejercicios 1.8

1. Escribir 385 y 583 en el sistema

(a) Jeroglífico egipcio
(b) Cuneiforme babilónico
(c) Jónico griego
(d) Japonés tradicional
(e) Maya

2. ¿Cuántos símbolos diferentes se debe memorizar para escribir números menores que 1000 en el sistema

(a) ¿Jónico griego?
(b) ¿Jeroglífico egipcio?
(c) ¿Cuneiforme babilónico?

3. Los sistemas de numeración pueden ser caracterizados hasta cierto punto según que posean o no las siguientes propiedades:

(a) Aditiva
(b) Símbolo para el cero
(c) Sustractiva
(d) Multiplicativa
(e) Valor relativo
(f) Repetición

Pueden además estar caracterizados por:

(a) Número de símbolos
(b) Tipo de símbolos
(c) Base

Dar las características de los sistemas mencionados en el ejercicio 1.

4. (a) En un sistema de valor relativo de base dos, denótese con 0 el cero y con 1 el uno. Escribir los 25 primeros números en este sistema.

(b) ¿Cuáles son los numerales decimales de los números escritos como sigue en el sistema de base dos:

10101, 10001000, 1110011, 1001101?

5. De las que siguen, ¿qué razón puede Ud. dar a los padres de un joven para justificar la enseñanza de otros sistemas numéricos diferentes al nuestro?

(a) Ayuda a la comprensión de nuestro propio sistema de numeración.
(b) Un joven debe conocer cómo calcular en más de un sistema de numeración porque es requerido por la Ley.
(c) Ayuda al joven a desarrollar una apreciación de nuestro propio sistema de numeración.
(d) Le muestra al joven las ventajas de nuestro sistema de numeración.

6. ¿Por qué hemos estudiado los sistemas egipcio y griego de numeración?

REFERENCIAS

Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics,* Holt, Rinehart, y Winston, Nueva York, 1953.

Mueller, Francis J., *Arithmetic, Its Structure and Concepts,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

Newman, James R., *The World of Mathematics,* Simon y Schuster, Nueva York, 1956.

Swain, Robert L., *Understanding Arithmetic,* Holt, Rinehart, y Winston, Nueva York, 1952.

CAPÍTULO 2

Conjuntos

2.1 INTRODUCCION

Hay mucho en aritmética que es claro y conciso, sencillo y fácil de entender, interesante y seductor. Al mismo tiempo, en la forma que se enseña usualmente, hay mucho que no es comprendido con claridad por los maestros y es difícil para ellos de explicar, y, desgraciadamente, ampliamente aceptado como cosa difícil de dominar. Mucha gente confesaría con renuencia que aprendieron poco de inglés o de historia, pero admitiría fácilmente que nunca pudo con la aritmética. Esta actitud es debida fundamentalmente a la forma vaga e incorrecta en la presentación de los conceptos fundamentales. Confiamos en promover comprensión e interés, siendo razonablemente precisos en su presentación y reemplazando vaguedad por claridad. Empezamos con una noción fundamental en matemáticas, la idea de conjunto.

2.2 CONJUNTOS

En la vida diaria usamos palabras tales como colección, clase, grupo, conjunto:

una colección de estampillas o monedas
un conjunto de fichas
un grupo de muchachos
la generación del 67

Estas palabras son usadas intuitiva y libremente, sin ninguna idea de definirlas. Se usan como sinónimos, y la misma palabra puede usarse en una variedad de situaciones. Es con esta actitud que los matemáticos usan la palabra "conjunto". La palabra debe ser usada para indicar una colección de objetos que llamamos *elementos* del conjunto.

Ejemplo 1

En un conjunto de tizas, cada tiza es un *elemento* del conjunto de tizas. En un conjunto de fichas, cada ficha es un *elemento* del conjunto de fichas. En el conjunto de enteros positivos, cada entero es un *elemento* del conjunto de enteros positivos. En un conjunto de ideas, cada idea es un *elemento* de ese conjunto de ideas.

La noción de un conjunto de elementos es una creación de la mente (una idea). La mente inconscientemente organiza objetos en conjuntos. El proceso empieza a una edad muy temprana. A un niño se le enseña un cuadro de un caballo o ve un caballo y cuando al animal se le ha dado el nombre de *caballo,* todos los animales semejantes son fácilmente distinguidos e identificados como caballos. La palabra *caballos* puede ser considerada como el nombre de un conjunto muy grande. Cada *elemento* de este *conjunto* es un caballo particular. Los diferentes conjuntos con diferentes elementos vienen a la mente por palabras tales como *vacas, cerros, gente, escuelas, estudiantes,* etc. Tan pronto como las palabras son pronunciadas o leídas, vienen a la mente *elementos particulares* de cada conjunto. Se puede hablar de un hacendado en Montana, un jugador profesional de béisbol, un maestro. Cada uno de ellos es un elemento arbitrario de un conjunto, y es el elemento genérico lo que es el objeto de interés. En otras situaciones se podría hablar de *la* gente de Montana, *los* jugadores profesionales de béisbol, *los* maestros de escuela. En cada uno de estos casos, el *conjunto* es el objeto de interés.

Las personas ven los conjuntos en diferentes formas. Así, cuando un botánico pasea a través de un camino por vez primera, su mente inconscientemente verifica que las diversas plantas pertenecen a éste o aquel género (conjunto de plantas de clase particular). ¿Qué sucede cuando encuentra una planta que nunca había visto? Inmediatamente empieza a inspeccionar la planta para ver si está en éste o aquel género, es decir, está observando a este elemento particular para ver si satisface el criterio de pertenecer a un conjunto particular con el cual él podría estar familiarizado. Si no "pertenece" a ninguna de los que él conoce y si después encuentra otra planta como ésta, su mente crea un nuevo conjunto, a saber, el conjunto de plantas como la que encontró cerca del camino. Similarmente, si usted ve los números 1, 17, 26, 3, 6, 19, 9, 101, 12, 4, 15, 2, 4, 8, 16, . . . , puede clasificarlos en varias formas; algunos son números pares, otros son impares, otros son primos, etcétera.

El decidir si un elemento es miembro de un conjunto, esto es, el saber si un elemento en particular pertenece o no a un conjunto, es bastante fácil en algunos conjuntos. Para otros es mucho más difícil. Por ejemplo, supongamos que se trata del conjunto de números naturales pares (que consiste de 2, 4, 6, 8 y así sucesivamente.) Dado un número en particular, es fácil decidir si es o no un elemento del conjunto de números naturales pares. Así 16 es un elemento del conjunto y 17 no lo es; 52 es un elemento del conjunto y 113 no lo es. El conjunto de números naturales pares es del tipo para el que hay un criterio de pertenencia fácilmente aplicable y para el cual hay un procedimiento definido para determinar si un objeto dado está o no en el conjunto.

Como ejemplo del otro caso, consideremos el conjunto de la gente en Chicago que está enferma. Aun si conociéramos a toda la gente en Chicago y fuéramos médicos, podríamos tener dificultades en decidir si cierto residente en Chicago pertenece o no al conjunto considerado.

En matemáticas podemos por lo general ser bastante precisos para establecer un criterio de pertenencia cuando hablamos de conjuntos. Es bueno tener en mente, sin embargo, que hay conjuntos para los cuales decidir si un miembro pertenece o no al conjunto presenta dificultades. Si se está discutiendo acerca de un conjunto con alguien, se debe tener la seguridad de que ambos tienen el mismo criterio de pertenencia.

2.2a Notación de conjuntos

Adoptemos la convención de usar letras mayúsculas para representar conjuntos y letras minúsculas para representar elementos de un conjunto. Así podemos referirnos al conjunto X formado por los elementos que designamos por a, b, c, etc. El símbolo

$$a \in X$$

significa "el objeto a es un miembro del conjunto X," o el objeto a pertenece al conjunto X o sencillamente "a está en X." También leemos esto como "a es un elemento del conjunto X." El símbolo

$$a \notin X$$

representa la negación "a no es un elemento de X."

Un conjunto puede ser especificado haciendo una lista de sus elementos. Así, el conjunto A que se ilustra (ver figura 1) consiste de una manzana, una naranja, un lápiz y una mesa. El conjunto B ilustrado consiste de cuatro libros. Este método de especificar un conjunto se expresa con la notación usada en los siguientes ejemplos:

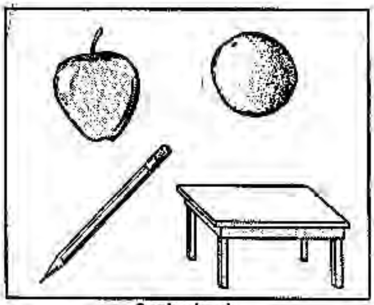
$$A = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Esto se interpreta "A es un nombre para el conjunto de los elementos 2, 4, 6, 8". Esto se lee también "el conjunto A está formado por los elementos 2, 4, 6 y 8." (Observar que el símbolo = se usa en el sentido de "es un nombre para.")

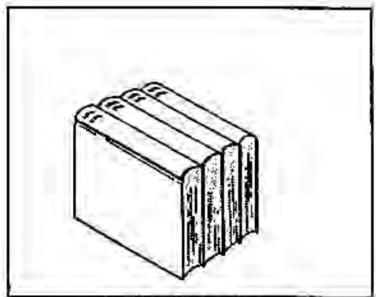
$$B = \{x, y, z\}.$$

B es un nombre para el conjunto de los elementos x, y, y z.

$$C = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}.$$



Conjunto A



Conjunto B

Figura 1

C es un nombre para el conjunto formado por los primeros 20 números naturales. Los puntos en la enumeración del conjunto C significa que la sucesión de los números naturales continúa hasta 20 inclusive.

Un conjunto también puede ser especificado dándose un criterio para la pertenencia al conjunto. Esto se hace usualmente describiendo una propiedad común de los elementos, por ejemplo: el conjunto X consiste del conjunto de toda la gente pelirroja; el conjunto Y consiste de todos los hombres pelirrojos; el conjunto Z consiste de todos los hombres pelirrojos de Montana. Observar que aumentando el número de condiciones o propiedades que un elemento debe tener para ser miembro de un conjunto se tiende a disminuir el tamaño del conjunto. El juego de "20 preguntas" opera sobre este principio. En este juego los jugadores tratan de identificar un objeto particular haciendo preguntas las cuales deben ser contestadas "Sí" o "No". Cada pregunta determina si el objeto a ser identificado posee o no una cierta propiedad. La finalidad es identificar el objeto por medio del uso de 20 o menos preguntas.

También usamos la siguiente notación que se podría denominar "generador de conjunto" para indicar conjuntos:

$$A = \{x \mid x \text{ tiene cierta propiedad}\}.$$

Que leemos: "A es el conjunto de *todas* las x tales que x tiene cierta propiedad." (Aquí hemos reducido "es un nombre para" a "es".)

Al símbolo x se le llama una *variable.* Algunos autores se refieren a él como a un *pronumeral* porque es un símbolo relacionado a un numeral en la misma forma que un pronombre está relacionado a un nombre. Se usa para indicar un elemento cualquiera de un conjunto particular. El conjunto se llama el *dominio* de la *variable*. Especificaremos el dominio a menos que el conjunto se sobreentienda fácilmente del contexto. Usamos generalmente letras de la última parte del alfabeto como variables. La afirmación "x tiene una cierta propiedad" es una *condición* para la variable x.

Ejercicios 2.2

El conjunto de los números enteros es $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$.

1. ¿Cuál es la diferencia entre 32 y $\{32\}$?
2. Clasificar cada conjunto según que sea fácil o difícil decidir pertenencia al conjunto, y tabular los elementos del conjunto si es posible.
   (a) Todos los meses del año que tienen exactamente 30 días.
   (b) Todos los meses del año que tienen exactamente 29 días.
   (c) Todos los números pares mayores que 43.
   (d) Todos los enteros que son cuadrados perfectos y menores que 61.
   (e) Todos los números cuyos cuadrados son cero.
   (f) Los cinco estudiantes que no asisten a la Universidad de Montana y que son los que aprendieron más en la escuela secundaria.
   (g) Todos los muchachos buenos.
   (h) Todas las fracciones entre cero y uno.
   (i) Todos los hombres sanos en Chicago.
3. (a) Enumerar diez elementos del siguiente conjunto:
   $$X = \{m|m = 2k \text{ y } k \text{ es un elemento de } W\}.$$
   (b) ¿Es fácil determinar la pertenencia a este conjunto?
   (c) ¿Cómo se les llama a los elementos de este conjunto?
   (d) ¿Cuál es el dominio de la variable m?
   (e) ¿Cuál es la condición para la variable m?
4. (a) Enumerar diez elementos del siguiente conjunto:
   $$Y = \{n|n = 2k + 1 \text{ y } k \text{ es un elemento de } W\}.$$
   (b) ¿Cómo se llaman los elementos de este conjunto?
   (c) ¿Cuál es el dominio de la variable n?
   (d) ¿Cuál es la condición para la variable n?

2.3 SUBCONJUNTOS

Frecuentemente encontramos elementos de un conjunto los cuales son también elementos de otro. Si todos los elementos de uno son también elementos de otro tenemos una relación especial y útil, la que definimos como sigue.

Definición 2.3a. El conjunto A es un *subconjunto* del conjunto B si cada elemento de A es un elemento de B.

Usamos el símbolo $A \subseteq B$ para indicar esto. También se puede escribir $B \supseteq A$. Esto se lee "El conjunto B contiene el subconjunto A."

Ejemplo 1

Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ entonces A es un subconjunto de B, puesto que todo elemento de A es un elemento de B.

$$\overbrace{\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6}_{A}, 7, 8, 9}^{B}$$

Ejemplo 2

Sea A el conjunto que consiste de toda la gente en los Estados Unidos y sea B el conjunto formado por todos los estudiantes de primer año en los Estados Unidos. B es un subconjunto de A. Si designamos por C el conjunto de todas las muchachas de primer año en los Estados Unidos, entonces C es un subconjunto de B. Obsérvese también que C es un subconjunto de A.

De acuerdo con nuestra definición,

(1) $A \subseteq A$ y
(2) Si $C \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $C \subseteq A$.

Definición 2.3b. El conjunto A es un *subconjunto propio* de B si cada elemento de A es un elemento de B, pero no cada elemento de B es un elemento de A.

Usamos el símbolo $A \subset B$ para indicar esto. Esto se lee "A está contenida propiamente en B," o "A está incluida propiamente en B." Esto puede también escribirse $B \supset A$ y se lee "B contiene propiamente a A" o "B incluye propiamente a A."

Ejemplo 3

Dado $A = \{a, b\}$. Los conjuntos $\{a\}$ y $\{b\}$ son subconjuntos propios de A. Observar que son también subconjuntos de A. Por otra parte, el conjunto $\{a, b\}$ es un subconjunto pero no es subconjunto propio.

La palabra *animales* se refiere a un conjunto de objetos con vida. La palabra *caballos* se refiere a otro conjunto de objetos con vida. La afirmación de que cada caballo es un animal es lo mismo que afirmar que el conjunto de caballos es un subconjunto del conjunto de animales. La figura 2 ayuda a visualizar estos conjuntos.

Observar que esto es un *acoplamiento* de los términos "animales" y "caballos" en una forma particular, es decir, el conjunto de caballos está relacionado al conjunto de animales. Decimos que el conjunto de caballos está relacionado con el conjunto de animales por inclusión, y usamos la notación

$$\{\text{caballos}\} \subset \{\text{animales}\}.$$

La inclusión es una relación entre conjuntos en la misma forma que "es pariente de" en una relación entre las personas.

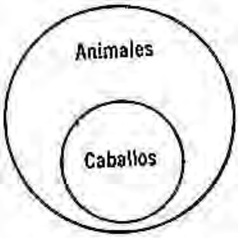


Figura 2

Ejemplo 4

$F = \{n|n$ es un elemento de W y es divisible entre $4\}$.
$R = \{y|y$ es un elemento de W e $y = 32\}$.
$S = \{x|x$ es un elemento de W, x es par, y x está entre 30 y $34\}$.

Observar que el dominio de la variable n en el conjunto F es el conjunto de los números enteros negativos. Hay dos condiciones sobre la variable en F. ¿Cuáles son? ¿Cuáles son las condiciones sobre la variable x en el conjunto S? Observar que R y S son conjuntos formados por el mismo elemento: el 32. (Esto a veces en inglés se dice "singleton 32".)

Hemos indicado dos formas de especificar conjuntos. Puede suceder que el mismo conjunto sea especificado en varias formas diferentes. Necesitamos algún criterio para determinar si un conjunto especificado en una forma es o no el mismo que un conjunto especificado en otra forma.

> **Definición 2.3c.** Dos conjuntos, A y B, son los mismos si cada elemento de A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A. Esto lo indicamos $A = B$.

También es cierto que $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

De acuerdo con este criterio, los conjuntos R y S del ejemplo 4 son los mismos: $R = S$.

Ejemplo 5

Dado $A = \{a, b, 3, 7\}$ y $B = \{3, b, a, 7\}$. Entonces $A = B$.

Ejemplo 6

Dado $C = \{a, b, a, a\}$ y $D = \{a, b\}$. Entonces $C = D$.

Observar en el ejemplo 6 que cada elemento del conjunto C está en el conjunto D y cada elemento del conjunto D está en el conjunto C; por lo tanto $C = D$. Convendremos en considerar la misma letra o el mismo número o el mismo objeto cuando aparezca más de una vez en cualquier lista de los elementos de un conjunto como solamente una letra, un número o un objeto. Por ejemplo, la letra a aparecer en la lista de los elementos del conjunto C tres veces. Para nuestro propósito, el conjunto C tiene solamente dos elementos diferentes. En algunos de los libros de texto para Kindergarten y primaria, esta práctica aparentemente no prevalece. Para simplificar el trabajo artístico, un conjunto de tres conejos o cuatro triángulos tendrá dibujos idénticos en apariencia representando los tres conejos o los cuatro triángulos. Sin embargo, es costumbre considerar los conejos, los triángulos u otros objetos como si fueran diferentes. Esto no conduce al aprendizaje de conceptos erróneos, puesto que a ese nivel los objetos son usados para contar, aparear, etc., y no para enseñar la relación de inclusión entre conjuntos. (Para una excelente discusión de *conjuntos iguales* ver el artículo del mismo nombre por el Prof. R. Roy Dubisch en el número de mayo de 1966 del "The Arithmetic Teacher").

2.3a El conjunto vacío

Será útil introducir un nuevo conjunto llamado *conjunto vacío* (o nulo) el cual se denota por $\emptyset$ o $\{\ \}$. El conjunto vacío $\emptyset$ es el conjunto que no tiene elementos. Su existencia resulta natural y conveniente si consideramos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Sean $A = \{s|s$ es un estudiante que tiene una edad menor de 21 años$\}$
y $B = \{s|s$ es un estudiante que tiene una edad mayor de 21 años$\}$.

El conjunto de elementos comunes a ambos A y B es vacío, es decir, no hay estudiantes que simultáneamente tengan una edad mayor y menor de 21 años.

Ejemplo 2

Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$.
El conjunto de elementos comunes a A y B es vacío.

Ejemplo 3

Sean $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 4, 5, 6\}$.
El conjunto de elementos comunes a ambos A y B es $\{0\}$. No es el conjunto vacío. Es el conjunto que contiene al cero.

Dos conjuntos, X e Y, que no tengan elementos en común son *disjuntos* o *ajenos* (ver definición 2.4c).

2.3b El conjunto universal

En las discusiones sobre conjuntos tendremos en mente algunas clases fijas de objetos a las cuales está limitada la discusión, y los conjuntos que mencionemos serán conjuntos de elementos de esta clase fija. Nos referiremos a la clase fija como al *conjunto universal* o *universo*. El conjunto universal no es el mismo para todos los problemas. Cuando discutimos acerca del conjunto de los números naturales, el conjunto universal puede ser el conjunto de todos los números naturales. En otros problemas el conjunto universal puede ser el conjunto de toda la gente, el conjunto de todos los estudiantes, el conjunto de todos los números reales, etc. Designamos el conjunto universal por el símbolo U.

2.3c Contado de subconjuntos

El contar no es siempre tan fácil como puede parecer. Algunos problemas que requieren el contar pueden ser difíciles porque son extremadamente grandes los números involucrados, en cambio otros problemas pueden ser difíciles porque las "cosas" que están siendo contadas, presentan dificultades para ser distinguidas.

El hombre que, en pago por un favor al rey, modestamente pidió un grano de trigo en la primera casilla del tablero de ajedrez, dos granos en la segunda, cuatro en la tercera, y cada vez duplicando la cantidad de la casilla anterior, en las 64 casillas del tablero, propuso un problema del primer tipo.

El contar subconjuntos de un conjunto dado pudiera ser un problema del segundo tipo si no se dispone de algunas sugestiones útiles. Es particularmente útil observar el siguiente principio.

Si un suceso puede ocurrir en M formas y, después de haber ocurrido en cualquiera de estas maneras, un segundo suceso puede ocurrir en N maneras, luego los dos hechos sucesivos pueden ocurrir en $M \cdot N$ maneras.

Ejemplo 1

Si hay dos rutas de la ciudad A a la ciudad B y tres rutas de la ciudad B a la ciudad C, luego hay seis rutas de A a C. Estas seis rutas identificadas por números y literales son $(1, a)$, $(1, b)$, $(1, c)$, $(2, a)$, $(2, b)$, $(2, c)$ (ver Figura 3).

Al contar subconjuntos de un conjunto con n elementos, un "evento" será "colocación de un elemento." Este evento puede ocurrir de 2 maneras: o bien colocando el elemento en un subconjunto, o bien no colocándolo en dicho subconjunto. Después que se ha colocado el primer elemento, el segundo elemento también se coloca. Esto también puede hacerse de dos maneras. Puesto que hay n elementos, hay entonces

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ factores}} = 2^n$$

maneras de formar subconjuntos de un conjunto con n elementos. Si para todos los elementos del conjunto dado se elige "no colocar",

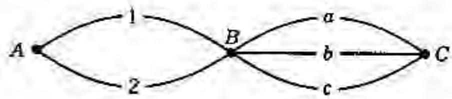


Figura 3

el conjunto resultante es el conjunto vacío. Si para todos los elementos del conjunto se elige "colocar", el conjunto resultante es el conjunto mismo. En consecuencia, cuando decimos que hay 2^n subconjuntos de un conjunto de n elementos, esto incluye al conjunto vacío y al conjunto mismo.

Ejercicios 2.3

1. Dado $P = \{2, 3, 5, 7\}$; $S = \{2\}$; $Q = \{3, 5, 7\}$; $\emptyset = \{\ \}$.
   (a) ¿Cuáles de los conjuntos son subconjuntos del conjunto P?
   (b) ¿Cuáles conjuntos son subconjuntos propios?
   (c) ¿Cuáles conjuntos son subconjuntos pero no subconjuntos propios?
   (d) ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto P?

2. ¿Es $S \in P$? Decir por qué.

3. ¿Es $S \subseteq P$? Explicar por qué.

4. ¿Es $S \in S$? Decir por qué.

5. ¿Es $S \subseteq S$? Explicar por qué.

6. Considerar el conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
   (a) Escoger un subconjunto de S de tal manera que cada número en el subconjunto sea par; id. impar.
   (b) Seleccionar un subconjunto de S que contenga todos los números que en S sean múltiplos de 3; id. de 1.
   (c) Escoger un subconjunto de S que contenga todos los números en S que sumados a 3 den 5; sumados a 3 den 2; que sumados a 3 den un número en S; que sumados a 0 den un número en S; que sumados a 4 den un número que no esté en S.

(d) Escoger un subconjunto de S de tal manera que el doble de cada número en el subconjunto no esté en S; id. en el que el triple de cada número esté en S.
(e) Encontrar un subconjunto de S de tal manera que cinco más el doble de cada número del subconjunto esté en S.

7. Si S es el conjunto de todos los números pares y T el conjunto de todos los números impares, usar la notación "generación de conjunto" para especificar los conjuntos S y T.

8. ¿Cuántos comités puede usted formar si se tienen tres personas de dónde escoger?

9. ¿Cuántos comités puede usted formar si dispone de 4 personas de dónde escoger?

10. (a) ¿Es $0 \in \emptyset$?
(b) ¿Es $\emptyset \in \emptyset$?
(c) Si A es un conjunto, ¿es $\emptyset$ subconjunto de A?
(d) ¿Es $\emptyset$ subconjunto de $\emptyset$?

11. (a) Especifique el conjunto de un solo elemento {George Washington} en tres diferentes formas.
(b) Exprese el conjunto $\{2, 4, 6, 8\}$ en dos formas diferentes.
(c) Exprese el conjunto $\{4, 2, 8, 6\}$ en dos formas diferentes.
(d) ¿Qué puede usted decir del conjunto de muchachas, las cuales son graduadas de la academia militar de West Point?
(e) Es vacío el conjunto cuyo único elemento es el conjunto vacío? Esto es, $\{\emptyset\} = \emptyset$.

12. Lea el artículo "Igualdad de Conjuntos", por Dubish (ver referencias).

2.4 CONJUNTOS DEFINIDOS A PARTIR DE OTROS

Puesto que se puede hacer con los conjuntos más que solamente describirlos, como se acaba de hacer, son de interés matemático. Veremos cómo construir nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados; de este modo definiremos *operaciones* que incluyan conjuntos.

2.4a Unión de conjuntos

Definición 2.4a. La *unión* de dos conjuntos, A y B, es el conjunto formado por todos los elementos que están en A o en B, o en ambos.

Indicamos esto $A \cup B$. (Observar que es éste el uso *inclusivo* de "o".) Un elemento pertenecerá a $A \cup B$ si el elemento pertenece a A o a B, o a ambos. En nuestra notación "generador de conjunto" tendríamos:

$$A \cup B = \{x|x \text{ es un elemento de } A \text{ o de } B \text{ o de ambos}\}.$$

Ejemplo 1

Dado $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 5, a, x, y\}$; entonces $A \cup B = \{a, b, c, 1, 5, x, y\}$.

Ejemplo 2

Dado $A = \{x|x \text{ es un estudiante en la clase de primer año}\}$, y
$B = \{x|x \text{ es un estudiante varón de primer año}\}$; entonces
$A \cup B = \{x|x \text{ es un estudiante en la clase de primer año}\} = A$.

2.4b Intersección de conjuntos

Definición 2.4b. La *intersección* de dos conjuntos, A y B, es el conjunto formado por todos los elementos que están simultáneamente en A y en B.

Lo indicamos $A \cap B$. Un elemento pertenecerá a $A \cap B$ si pertenece a ambos. En nuestra notación "generador de conjunto" tendríamos:

$$A \cap B = \{x|x \text{ es un elemento de } A \text{ y } B\}.$$

En el ejemplo 1, Sección 2.4a, $A \cap B = \{a\}$. En el ejemplo 2, $A \cap B = B$, lo cual indica que la intersección del conjunto que consiste de todos los estudiantes (hombres y mujeres) de primer año con el conjunto formado por todos los estudiantes varones de primer año es el conjunto de todos los estudiantes varones de primer año.

Definición 2.4c. Dos conjuntos, X y Y, cuya intersección es el conjunto vacío se dice que son *ajenos*. Los conjuntos X y Y son ajenos si $X \cap Y = \emptyset$.

Ejemplo 1

Dados $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, y $C = \{11, 12\}$; entonces $A \cap B = \{3, 4, 5\}$, $A \cap C = \emptyset$, y $B \cap C = \emptyset$. A y C son ajenos. B y C son ajenos.

Ejemplo 2

En los diagramas de la figura 4, sea A el conjunto de todos los puntos dentro y sobre el círculo marcado con A; B el conjunto de todos los puntos dentro y sobre el círculo marcado con B; y C el conjunto de todos los puntos dentro y sobre el círculo marcado con C.

Estos diagramas son llamados *diagramas de Venn.* Los conjuntos correspondientes a la intersección y unión de los diferentes conjuntos están sombreados.

Ejercicios 2.4

Dibujar diagramas de Venn como en la figura 4 y sombrear las áreas correspondientes a las siguientes uniones e intersecciones. Titular cada diagrama.

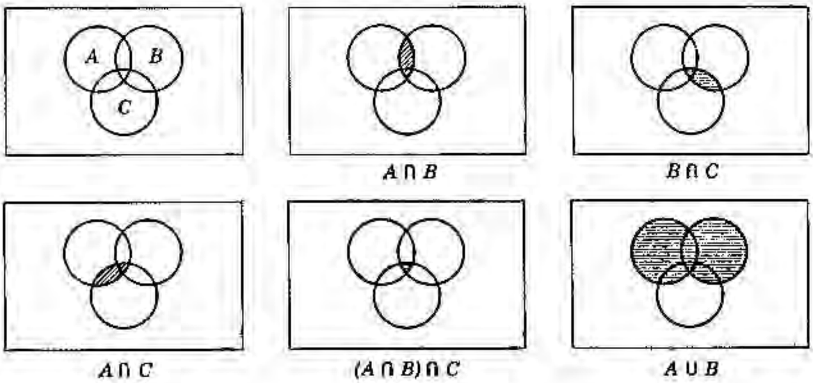
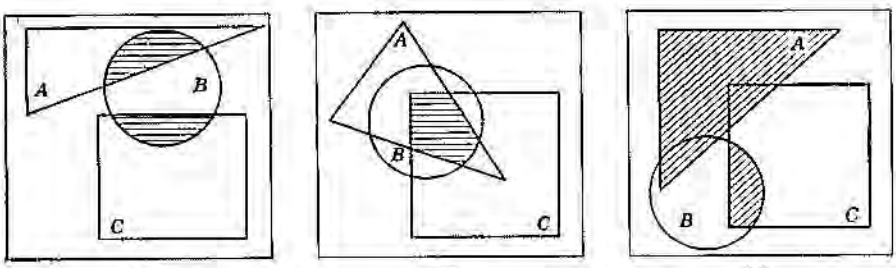


Figura 4

1. $A \cap (B \cap C)$
2. $(A \cup B) \cup C$
3. $A \cup (B \cup C)$
4. $B \cap A$
5. $C \cap A$
6. $C \cap B$
7. $(A \cup B) \cap C$
8. $A \cap (B \cup C)$
9. $A \cup (B \cap C)$
10. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
11. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
12. $(A \cap B) \cap C$

13. En cada uno de los siguientes diagramas, dar la descripción simbólica de los conjuntos indicados por el área sombreada.



(a) (b) (c)

14. Planeando una fiesta de cumpleaños para su hija, la Sra. Jones hizo una lista de los niños de acuerdo a sus preferencias, como sigue:

Helado		*Pastel*		*Manzanas*	
Tom	Ted	Ted	Tobe	Sue	Jack
Jim	Jack	Tim	Jane	Ted	John
Joan	June	John	Sono	Jill	June
Sam	Tim	Jill	Jan	Sara	Tim

No había niños que tuvieran el mismo nombre.

(a) Hacer una lista de los nombres de los muchachos a quienes les gusta helado y pastel.

(b) Hacer una lista de los nombres de los muchachos a los que les gusta helado y manzanas.

(c) Hacer una lista de los nombres de los muchachos a quienes les gusta pastel y manzanas.

(d) Hacer una lista de los nombres de los muchachos a los que les gusta todo.

2.5 EL COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Definición 2.5. Si A es un subconjunto del conjunto universal U entonces el conjunto formado por todos los elementos del universo que no están en A se llama *complemento* de A.

Usamos el símbolo A' para indicar el complemento de A.

Ejemplo 1

Si U es el conjunto de estudiantes de una universidad y M es el subconjunto formado por los hombres que ahí estudian, entonces M' es el conjunto de mujeres que estudian.

Ejemplo 2

Dados $U = \{a, b, c, d, e\}$, y
$A = \{a, e, c\}$ entonces
$A' = \{b, d\}$.

En general, si

$$A \cup B = U, \text{ y}$$

$$A \cap B = \emptyset,$$

entonces A y B son *conjuntos complementarios*, y entonces se escribe

$$A' = B, \text{ y}$$

$$B' = A.$$

En particular,

$$U' = \emptyset, \text{ y}$$

$$\emptyset = U.$$

Ejercicios 2.5

1. Expresar lo siguiente en forma verbal:

(a) $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$ y $A \cup U = U$.
(b) $A \cup B \supseteq A$ y $A \cup B \supseteq B$.
(c) Si $C \subseteq A$ y $C \subset B$ entonces $C \subset A \cup B$.
(d) $A \cup B = A$ si y solamente si $A \supseteq B$.
(e) $A \cap A = A$, $A \cap U = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$.
(f) $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$
(g) Si $C \subset A$ y $C \subset B$, entonces $C \subset A \cap B$.
(h) $A \cap B = A$ si, y solamente si, $A \subseteq B$.

2. Encontrar la unión y la intersección para cada uno de los siguientes pares de conjuntos:

(a) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$ (b) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$
(c) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ (d) $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$
(e) $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ (f) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 5\}$

3. Si U es el conjunto de números naturales $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, E el conjunto de números pares, A el conjunto de números naturales impares, y B el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Efectuar las siguientes operaciones con conjuntos, dando el resultado en dos formas: por *tabulación* (quizás incompleta) y por *descripción*.

(a) $E \cup U$ (b) $E \cup A$ (c) $A \cup B$
(d) $E \cup B$ (e) $E \cap U$ (f) $E \cap A$
(g) $A \cap B$ (h) $E \cap B$ (i) $(A \cup B) \cap E$
(j) $A \cup (B \cap E)$ (k) $(E \cap A) \cup B$ (l) $E \cap (A \cup B)$

4. Qué conjunto es $A \cap B$, si

(a) ¿A y B son ajenos? (b) ¿A y B son idénticos?
(c) ¿$A \subset B$? (d) ¿$A \supset B$?
(e) ¿A y B se traslapan? *

5. Qué conjunto es $A \cup B$, si

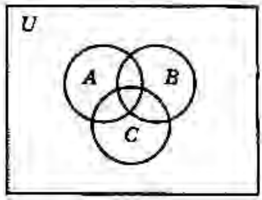
(a) ¿A y B son ajenos? (b) ¿A y B son idénticos?
(c) ¿$A \subset B$? (d) ¿$A \supset B$?
(e) ¿A y B se traslapan?

6. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 3\}$, y A y B conjuntos no vacíos. Encontrar A en cada ejercicio de los siguientes:

(a) $A \cup B = U$, $A \cap B = \emptyset$, y $B = \{1\}$.
(b) $A \subset B$ y $A \cup B = \{4, 5\}$.
(c) $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4\}$, y $B \cup C = \{1, 2, 3\}$.
(d) A y B son ajenos, B y C son ajenos, y la unión de A y B es el conjunto $\{1, 2\}$.

* Conjuntos que tienen intersección no vacía.

7. En el siguiente diagrama sea U el conjunto de todos los puntos que están dentro y sobre el rectángulo, y sean A, B y C los conjuntos de puntos dentro y sobre los círculos, como está marcado.



Use rayado inclinado para indicar el conjunto A'; use rayado inclinado en otra dirección para indicar el conjunto B'. Dibujar una figura similar y sombrear el conjunto $(A \cup B)'$. Verificar que

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (b) $(A \cup C)' = A' \cap C'$.

8. Siga las instrucciones del problema 7, y diagrame $(A \cap B)'$ y A' y B' decir ¿cómo están relacionados $(A \cap B)'$, A' y B'? ¿Cuál es $(A \cup B \cup C)'$?

9. ¿Cuántos subconjuntos puede tener un conjunto con cinco elementos? ¿Cuántos subconjuntos propios?

10. Podemos considerar una clasificación simplificada de la sangre del cuerpo humano verificada en tres pruebas, la prueba A, la prueba B y la prueba Rh, ante *cada una* de las cuales la sangre de una persona *reacciona o no reacciona*. Designemos a estas pruebas A, B y Rh, respectivamente. Sea A es el conjunto de la gente cuya sangre reacciona a la prueba A, B el conjunto de gente cuya sangre reacciona a la prueba B, y Rh el conjunto de gente cuya sangre reacciona a la prueba Rh.

(a) ¿Cuál es el significado de $\mathbf{A \cap B \cap RH'}$?
(b) ¿Cuál es el significado de $\mathbf{(A') \cap B \cap RH'}$?

En esta clasificación simplificada hay ocho clases mutuamente exclusivas en las cuales la gente está catalogada por grupos de sangre como se indica en la siguiente tabla:

Conjuntos de gente Clasificada por Grupo de Sangre	Designación Internacional de Grupos de Sangre	Conjunto de Pruebas a las cuales reaccionan las gentes	Porcentaje Aproximado de Población *
$\mathbf{A' \cap B' \cap RH}$	O Positivo	$\{Rh\}$	38
$\mathbf{A' \cap B' \cap RH'}$	O Negativo	$\{\ \}$	7
$\mathbf{A \cap B' \cap RH}$	A Positivo	$\{A, Rh\}$	31
$\mathbf{A \cap B' \cap RH'}$	A Negativo	$\{A\}$	6
$\mathbf{A' \cap B \cap RH}$	B Positivo	$\{B, Rh\}$	11
$\mathbf{A' \cap B \cap RH'}$	B Negativo	$\{B\}$	2
$\mathbf{A \cap B \cap RH}$	AB Positivo	$\{A, B, Rh\}$	4
$\mathbf{A \cap B \cap RH'}$	AB Negativo	$\{A, B\}$	1

* *Hyland Reference Manual of Immunohematology.*

Sea D es el conjunto de pruebas ante las cuales un posible donante de sangre reacciona, y sea R es el conjunto de pruebas ante las cuales reacciona un aspirante a recibir la sangre. Una de las condiciones para una transfusión segura expresada en el lenguaje de conjuntos es $D \subseteq R$.

(c) ¿Quién es un donante potencial para una persona del conjunto $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{RH}'$?
(d) ¿Quién es un donante potencial para una persona del conjunto $\mathbf{A}' \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{RH}'$?

Aunque "donador universal" y "receptor universal" son términos que no están completamente aceptados actualmente en hematología, con relación a nuestra clasificación simplificada las siguientes preguntas son importantes:

(e) ¿Un "donador universal", a qué conjunto de gente pertenece?
(f) ¿Un "donador universal" a qué conjunto de pruebas reacciona?
(g) ¿Un "receptor universal", a qué conjunto de gente pertenece?
(h) ¿Un "receptor universal", a qué conjunto de pruebas reacciona?

2.6 EL PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es completamente diferente de los conjuntos $A \cup B$ y $A \cap B$. Los elementos del producto cartesiano no son elementos de A ni elementos de B sino que más bien lo que se llama *pares ordenados*.

Los pares ordenados aparecen con bastante naturalidad. Encontramos pares ordenados cuando localizamos lugares en los mapas. Los mapas de carreteras usualmente tienen una sucesión de numerales espaciados a igual distancia a lo largo de una orilla del mapa, por ejemplo, la orilla interior, y una sucesión de letras a igual distancia una de otra a lo largo de una de las orillas verticales. Una lista de los pueblos tendrá después de cada nombre un número y una letra. Por ejemplo, en un mapa de Montana encontramos Missoula-4-D. Siguiendo a lo largo de la orilla inferior encontramos el número 4, entonces nos desplazamos a lo largo de la línea vertical y localizamos la letra D sobre la orilla vertical. En esta forma, Missoula se localiza por el par $(4, D)$. Al 4 se le llama primera componente del par ordenado y a D se le llama segunda componente. En mapas de carreteras, las letras y los números aparecen acentuando el concepto de par ordenado. Las etiquetas que están en las orillas de los mapas militares son por lo general números. Así, un cerro puede ser designado por el par ordenado (705, 600). Se entiende que la primera componente se leerá a lo largo de la orilla horizontal y la segunda componente a lo largo de la orilla vertical. En esta forma el par ordenado localiza un solo punto. Si el par (705, 600) no se interpreta como un par ordenado, podríamos considerar al par (600, 705) como una posibilidad para localizar el cerro.

Definición 2.6a. El *producto cartesiano* de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los pares ordenados (a, b) donde el primer elemento a, es un elemento de A y el segundo elemento b, es un elemento de B.

Por otra parte, para distinguir un elemento de un producto cartesiano de otro y no tener repetición, debemos establecer un criterio de "identidad". ¿Cuándo dos elementos son el mismo?

Definición 2.6b. Los pares ordenados del producto cartesiano son el mismo, y escribimos $(a, b) = (c, d)$, si solamente si $a = c$ y $b = d$.

Indicamos el producto cartesiano de los conjuntos A y B por el símbolo $A \times B$, y lo leemos como "el producto cartesiano de A y B" o sencillamente como "A por B". En nuestra notación:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \text{ está en } A \text{ y } b \text{ está en } B\}.$$

Ejemplo 1

Sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$. Algunos elementos del conjunto $A \times B$ son $(b, 2)$, $(a, 1)$, y $(b, 0)$. ¿Es el par ordenado $(1, a)$ un elemento de $A \times B$? No lo es, porque el elemento 1 que ocupa el primer lugar no está en el conjunto A, y el elemento a, que ocupa el segundo lugar, no está en el conjunto B. ¿Pertenece (a, a) a $A \times B$? No, porque el elemento que está en el segundo lugar del par ordenado no pertenece a B. ¿Puede usted escribir una lista completa de los elementos de $A \times B$?

Ejemplo 2

Sea A el conjunto de los números enteros del 1 al 9. ¿Cuáles son algunos de los elementos del producto cartesiano $A \times A$? ¿Es $(1, 1)$ un elemento de $A \times A$? Si, en efecto,

$$A \times A = \{(n, m) \mid n \text{ puede ser cualquiera de } 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \text{ y } m \text{ puede ser cualquiera de } 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

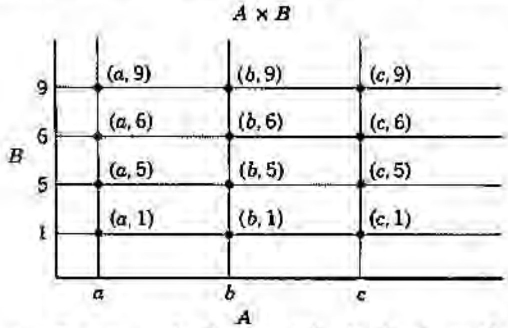
Ejemplo 3

En los exámenes aparecen preguntas del siguiente tipo. Trazar una línea de cada palabra de la columna marcada con A a una palabra que tenga significado opuesto en la columna marcada con B.

A	B
bueno	pequeño
grande	claro
oscuro	malo
	arriba
	liso

En esta pregunta, sencillamente se están especificando ciertos elementos del producto cartesiano de A y B tales como (bueno, malo), (grande, pequeño), (oscuro, claro).

El producto cartesiano de dos conjuntos cualesquiera, puede ser representado gráficamente usando líneas perpendiculares y el mismo esquema usado por los cartógrafos. A lo largo del eje horizontal señalamos puntos espaciados a igual distancia con los elementos del primer conjunto y puntos separados a igual distancia a lo largo del eje vertical con elementos del segundo conjunto. Siguiendo la convención



usual, leemos primero a lo largo del eje horizontal y después a lo largo del eje vertical. La representación gráfica del producto cartesiano de los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 5, 6, 9\}$ estaría dada por los puntos cuya posición o coordenadas son los pares ordenados de $A \times B$.

Ejercicios 2.6

1. Dados $A = \{\text{azul, verde, gris}\}$ y $B = \{31, 43, 47, 59\}$. Tabular el conjunto $A \times B$.

2. Especificar los subconjuntos del conjunto $E = \{0, 1\}$.

3. Especificar cada uno de los siguientes conjuntos en otra forma:
   (a) $X = \{n | n$ es un número entero no negativo y tiene residuo 0 cuando se divide entre $2\}$.
   (b) $Y = \{m | m$ es un número entero no negativo y no es múltiplo de $2\}$.
   (c) $Z = \{k | k$ es un número entero no negativo y tiene residuo 1 cuando se divide entre $2\}$.
   (d) $W = \{p | p = 2n$ y n es un número entero no negativo$\}$.

4. Si los conjuntos A, B, y C son los puntos dentro y sobre el círculo como en el ejemplo 2, sección 2.4b, dibujar los diagramas de Venn para los siguientes conjuntos.
   (a) $A \cap B$ (b) $A \cap B \cap C$
   (c) $A \cup (B \cap C)$ (d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. Sea $A = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuántos subconjuntos tiene $A \times A$?

6. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5\}$, y $D = \{4, 5, 6\}$. Tabular cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $A \cap B$ (b) $B \cap C$
(c) $A \cap C$ (d) $A \cap B \cap C$
(e) $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ (f) $(A \times A) \cap (B \times B)$
(g) $(A \times A) \cap (C \times C)$ (h) $(C \times C) \cap (D \times D)$

7. A qué es igual $A \cap (B \cup C)$ si:

(a) ¿A y B son ajenos? (b) ¿B es igual a C?
(c) ¿$A \subset C$? (d) ¿$A \supset B$? ($A \cap C \neq \emptyset$.)
(e) ¿C es el conjunto vacío?

8. Sean $X = \{a, b, c\}$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, $D = \{a, b\}$, $E = \{a, c\}$, $F = \{b, c\}$. Entonces $S = \{\emptyset, A, B, C, D, E, F, X\}$ es la familia de todos los subconjuntos de X. Colocar el elemento correcto de S en cada cuadro de las siguientes tablas:

$\cup$	$\emptyset$	A	B	C	D	E	F	X
$\emptyset$								
A								
B								
C								
D								
E								
F								
X								

$\cap$	$\emptyset$	A	B	C	D	E	F	X
$\emptyset$								
A								
B								
C								
D								
E								
F								
X								

9. Ilustrar mediante el uso de los diagramas de Venn $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ tal como en la figura 4.

10. En el problema 14, ejercicio 2.4, sean I el conjunto de los muchachos a quienes les gusta el helado, C el de los muchachos a quienes les gusta el pastel, y A el de aquéllos a quienes les gustan las manzanas. Describir cada uno de los siguientes conjuntos haciendo una lista de los nombres en cada conjunto.

(a) $I \cap A$ (b) $C \cap A$
(c) $C \cap I$ (d) $I \cup A$
(e) $I \cap A \cap C$ (f) $C \cup A$
(g) $I \cup A \cup C$

¿Cuántos niños asistieron a la fiesta?

11. Usted, como representante de una compañía vendedora de refrescos, está interesado en poner distribuidores de refrescos en la cooperativa de estudiantes. La compañía está interesada en saber a cuánta gente le gusta el refresco de naranja, de uva y de fresa. Emplea a un muchacho por \$50.00 para hacer una encuesta con 1000 estudiantes. Solamente debe tomar en cuenta a aquellos que manifiesten su gusto por al menos uno de estos refrescos. Usted observa que su ayudante se pasa la mayor parte del tiempo bebiendo café y holgazaneando. Después, viene a usted con los siguientes resultados de su encuesta:

Naranja	596
Uva	710
Fresa	427
Fresa y Naranja	274
Naranja y Uva	430
Fresa y Uva	309
Las tres	212

Usted tiene serias dudas acerca de cómo obtuvo él estos valores, pero está dispuesto a pagarle los $50.00 si los datos "son compatibles." ¿Le pagaría usted?

REFERENCIAS

Banks, J. Houston. *Elements of Mathematics*, Allyn y Bacon, Boston, 1956, págs. 233-246.

Christian, Robert R., *Introduction to Logic and Sets*, Ginn y Co., Nueva York, 1958, págs. 33-70.

Dubisch Roy, "Set Equality", *The Arithmetic Teacher*, Vol. 13, núm. 5, mayo de 1966.

Hafstrom, John E., *Basic Concepts in Modern Mathematics*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading Mass., 1961, Cap. 3.

Hartung, Van Engen, y Trimble, *Seeing Through Mathematics I*, Scott, Foresman and Company, Chicago, 1961.

Elementary Mathematics of Sets with Applications, Mathematical Association of America, CUPM, 1955, Cap. I.

Hyland Reference Manual of Immunohematology, 3a. edición, Hyland Laboratories, Los Angeles, California, marzo de 1955.

CAPÍTULO 3

Relaciones y sus propiedades

3.1 INTRODUCCION

En matemáticas el concepto de relación es sumamente poderoso y útil. Su poder radica en su sencillez y su utilidad se debe a su generalidad. El estudio formal de este concepto como un objeto matemático es de origen reciente, a pesar de que las relaciones matemáticas han estado sometidas a una intensa investigación por largo tiempo. En particular, el tratamiento de las relaciones como conjuntos de pares ordenados no ha sido aún universal y ni siquiera ampliamente adoptado. No obstante, no se duda de que este concepto sea básico y fundamental en la aritmética y en la matemática en general. Si hay algo que se pueda llamar "nueva matemática" en un programa de estudios elementales, el concepto de relación ciertamente debe estar incluido. El estudio de las desigualdades y la introducción del concepto de función son "nuevos", y ambos son casos especiales del concepto más general de relación.

El concepto de relación se introduce tempranamente porque ejemplos especiales de relaciones, tales como las relaciones de igualdad y equivalencia, ayudan a entender con claridad la abstracción llamada número, las fracciones como números racionales, así como otros aspectos de las matemáticas. El conocimiento preciso de otras relaciones, tales como las de "orden" y "desigualdad", es esencial para el desarrollo ordenado y el tratamiento matemático correcto de los números. Finalmente, el método moderno de la aritmética acentúa la estructura algebraica, así como los esquemas y propiedades asociados con las operaciones algebraicas. La importancia y el papel de las propiedades de orden de los números y las nociones que de ellas se derivan tienen un tratamiento adecuado en este libro.

3.2 RELACIONES

Raramente los objetos y las ideas son concebidos o expresados en forma aislada. Aparecen en el pensamiento y la palabra conjuntamente con otros objetos y otras ideas. Consciente o inconscientemente asociamos, comparamos, clasificamos, evaluamos y, al hacerlo, pensamos o hablamos de objetos a la luz de las relaciones que guardan con otros objetos. Es decir, gran parte de la actividad humana se ocupa del apareamiento de elementos de conjuntos de acuerdo con alguna condición, regla o fórmula. Este apareamiento de elementos de conjuntos de acuerdo con algún criterio es lo que se llama una relación.

Cuando comparamos, estamos formando parejas de cosas de acuerdo a alguna condición o criterio específico.

Juan es más alto que Susana.
Hace más frío en West Yellowstone que en Denver.
El valor medio Dow-Jones de la industria fue más bajo hoy.
El conjunto A está contenido en el conjunto B.

Cuando clasificamos, apareamos elementos de tal forma que formamos conjuntos identificables que no se traslapan.

Las rosas son rojas y las violetas son azules.
Esa no es una camelia, es un rododendro.
Aquel automóvil es como éste. Ambos son modelo T Ford 1925.

Cuando evaluamos, apareamos objetos y cosas con los elementos de un conjunto ordenado particular.

Elena es una estudiante con calificación B.
Los Yankees están en la segunda división.
Cobró 47 dólares por su trabajo.

Por distintos que estos ejemplos puedan parecer, cada uno es un ejemplo específico de una relación, un apareamiento de objetos de acuerdo con algún criterio. Estamos interesados en las relaciones así como en las cosas que están relacionadas.

3.3 PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Al tratar los conjuntos hemos mencionado una relación matemática. En la sección 2.3 mencionamos que la inclusión es una relación entre conjuntos. La afirmación "A es un subconjunto de B" aparea los conjuntos A y B en una forma particular. Observar que el par A y B es un par ordenado en el sentido de que "B es un subconjunto de A" tiene un significado diferente de "A es un subconjunto de B". A es un subconjunto de B significa que cada elemento de A es un elemento de B, mientras que B es un subconjunto de A significa que cada elemento de B es un elemento de A.

Ejemplo 1

Considérense los siguientes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $G = \{9, 3, 6, 7, 2, 5, 4, 8, 1\}$
$B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ $H = \{x | x \text{ es una letra del alfabeto}\}$
$C = \{1, 5\}$ $I = \emptyset$
$D = \{a, c, e, f, h\}$ $J = \{a, a, 1, 5, e, 5\}$
$E = \{a, e, e, a\}$ $K = \{c, h, e, a, f\}$
$F = \{1, a, 5, e\}$ $L = \{2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 4, 3, 1, 8\}$

En estos ejemplos algunos conjuntos están relacionados con otros conjuntos. Si preguntamos cuáles están relacionados, varias formas de respuesta son aceptables. Una forma puede ser la de agrupar los conjuntos en pares, tales como "C y A", o "E y D", pero esto no nos dice nada acerca de *cómo* están relacionados. Sin haber hecho ninguna convención o acuerdo sobre lo que queremos decir cuando escribimos "C y A", todo lo que podríamos saber es que estos conjuntos están relacionados en alguna forma. Sería algo como decir "jamón y huevos". Esta relación no es obvia. Si deseamos ser precisos necesitamos decir, por ejemplo, "C está contenido en A".

> **Definición 3.3a.** Un conjunto A está relacionado con un conjunto B por *inclusión* si A es un subconjunto de B.

Recordemos que un conjunto A "es un subconjunto de" un conjunto B si cada elemento de A es un elemento de B.

Simbolizamos la relación "está contenido en" o "inclusión" en la siguiente forma: $A \subseteq B$.

Ahora podemos preguntarnos cuál de los primeros seis conjuntos del ejemplo 1 están relacionados por inclusión. La respuesta debe ser $C \subseteq A$, $E \subseteq D$, $D \subseteq B$, $E \subseteq B$, $C \subseteq F$ y $E \subseteq F$. El primer conjunto de símbolos se debe leer como "C está relacionado con A por inclusión." También puede leerse como "C es un subconjunto de A" o "C está contenido en A." Esto determina una relación en la colección de los conjuntos; la relación vale entre los miembros de ciertos pares ordenados, dependiendo del criterio dado previamente. Puesto que las relaciones se refieren a pares ordenados, ellas se definen frecuentemente en términos de subconjuntos del producto Cartesiano. Esta manera de considerar la definición de relación será presentada con más detalle en la sección 3.8.

3.3a La propiedad reflexiva de las relaciones

Obsérvense los conjuntos en el ejemplo 1, sección 3.3. ¿Hay algún otro par que esté relacionado por inclusión? ¿Está relacionado C con C? Recordando la definición de subconjunto vemos que C es efectivamente un subconjunto de C. Así, C está relacionado consigo mismo por inclusión: $C \subseteq C$. El hecho de que cada conjunto esté relacionado consigo mismo es una propiedad de la relación de inclusión. Llamamos a esta propiedad la propiedad *reflexiva*, y decimos que la relación de inclusión es *reflexiva*.

Usemos símbolos tales como Ⓡ, Ⓗ, Ⓣ, para representar una relación arbitraria definida en un conjunto S.

Definición 3.3b. Decimos que la relación Ⓡ es *reflexiva* si se cumple que cada elemento x del conjunto S en el cual la relación se define está relacionado consigo mismo; es decir, Ⓡ es reflexiva si x Ⓡ x para todas las x en S.

Ejemplo 1

Definamos una relación Ⓗ en el conjunto formado por los alumnos de una clase en la forma siguiente: Un estudiante en una clase, al cual llamamos "x", tendrá esta relación con un estudiante "y" si tienen la misma estatura. Aquí podríamos encontrar alguna ambigüedad en la interpretación; es decir, ¿qué entendemos por "la misma estatura"? Para evitar tales complicaciones decimos que las estaturas estarán expresadas con una aproximación de media pulgada. Es posible simbolizar nuestra relación, x Ⓗ y. Podemos ver fácilmente de la definición de esta relación que para todo estudiante x, x Ⓗ x. La relación así definida es reflexiva, y también se dice que la relación Ⓗ posee la propiedad reflexiva.

Ejemplo 2

No todas las relaciones poseen esta propiedad; por ejemplo, sea S el conjunto de los estudiantes de una clase particular. Sea la relación "es más alto que" y Ⓣ represente esta relación. Diremos que el estudiante x está relacionado con el estudiante y si el estudiante x es más alto que el estudiante y, y escribiremos x Ⓣ y. Esta relación, Ⓣ, no es reflexiva porque no es cierto que un estudiante sea más alto que sí mismo, es decir, x Ⓣ x no es cierto.

3.3b La propiedad transitiva de las relaciones

La relación de inclusión tiene otra propiedad llamada propiedad *transitiva*. Esta propiedad está ilustrada con los conjuntos E, D y B del ejemplo 1, sección 3.3. Obsérvese que E está relacionado con D por inclusión, $E \subseteq D$, y D está relacionado con B por inclusión, $D \subseteq B$. Es fácil observar que E está también relacionado con B, $E \subseteq B$. En nuestra notación, se tiene que $E \subseteq D$, $D \subseteq B$; por lo tanto, $E \subseteq B$. Estos ejemplos ilustran la propiedad transitiva de la relación de inclusión.

Definición 3.3c. Decimos que una relación Ⓡ es transitiva si de la hipótesis de que s está relacionado con b y b está relacionado con c se concluye que a está relacionado con c; es decir, Ⓡ es transitiva si a Ⓡ b y b Ⓡ c implica que a Ⓡ c.

Esto se interpreta algunas veces en la siguiente forma: cosas relacionadas a la misma cosa están relacionadas entre sí.

Ejemplo 1

Consideremos nuevamente el ejemplo 2, sección 3.3a. ¿Es la relación Ⓣ una relación transitiva? Si decimos que x Ⓣ y e y Ⓣ z, ¿podemos decir que x Ⓣ z? Es decir, si el estudiante x es más alto que el estudiante y, y el estudiante y es más alto que el estudiante z, ¿podemos decir que el estudiante x es más alto que el estudiante z? Obviamente podemos, entonces intuitivamente concluimos que la relación Ⓣ es transitiva.

Ejemplo 2

Definimos una relación, llamada Ⓦ, en la siguiente forma. Un estudiante de una clase, al que llamamos x, tendrá esta relación con otro estudiante, y, si sus pesos difieren en menos de media libra. Simbolizamos esta relación x Ⓦ y. De la definición de esta relación podemos ver fácilmente que es una relación reflexiva. ¿Es una relación transitiva? ¿Es decir, para los estudiantes, x, y y z, *si* x Ⓦ y e y Ⓦ z, es x Ⓦ z? Un simple ejemplo numérico es suficiente para demostrar que la relación *como está definida* no es necesariamente transitiva. Supóngase que x pesa 150 lb., y pesa $150\frac{3}{8}$ lb. y z pesa $150\frac{3}{4}$ lb. La diferencia entre el peso de x y el peso de z es $\frac{3}{4}$ lb., lo cual está más allá del límite de la relación tal como ha sido definida. Por lo tanto, la relación Ⓦ no es transitiva.

3.3c La propiedad simétrica de las relaciones

Hemos indicado dos formas de especificar conjuntos. El mismo conjunto puede ser especificado en diferentes formas. Necesitamos algún criterio para determinar cuándo un conjunto especificado en una forma es el mismo o difiere de un conjunto especificado en otra forma. Distinguimos estos conjuntos definiendo una *relación* que podríamos llamar *igualdad*, pero que, por ahora, preferimos llamar *identidad*.

Definición 3.3d. Dos conjuntos A y B, están relacionados por *identidad*, o el conjunto A "es el mismo que" el conjunto B, si cada elemento de A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A (ver también la definición 2.3c).

Usaremos el símbolo "$=$" para indicar esta relación. En nuestra notación de conjuntos escribiremos:

$A = B$ si y solamente si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Ejemplo 1

Sean dados $A = \{c, a, t, 13\}$ y $B = \{a, c, t, c, a, t, 13\}$. Entonces $A = B$ significa que todo elemento de A es un elemento de B y todo elemento de B es un elemento de A (ver sección 2.3).

Obsérvese que la relación de *identidad*, $=$, es válida para cada conjunto consigo mismo, es decir, $A = A$, $B = B$, etc. .. Por la definición de la relación de identidad, podemos decir que es una relación reflexiva, o que la relación "es el mismo que" tiene la propiedad reflexiva.

¿Qué otras propiedades tiene esta relación? ¿Es transitiva esta relación? Si suponemos que $A = B$ y $B = C$, ¿podemos concluir que $A = C$? Considérense los conjuntos, A, G, y L del ejemplo 1, sección 3.3. ¿Es $A = G$?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$
$$G = \{9, 3, 6, 7, 2, 5, 4, 8, 1\}.$$

Observar que $A \subseteq G$ y $G \subseteq A$; por lo tanto $A = G$. Consideremos ahora los conjuntos G y L.

$$G = \{9, 3, 6, 7, 2, 5, 4, 8, 1\}.$$
$$L = \{2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 4, 3, 1, 4\}.$$

Nuevamente, $G \subseteq L$ y $L \subseteq G$; por lo tanto $G = L$. ¿Tenemos que comprobar que cada elemento de A pertenece a L y cada elemento de L pertenece a A? Podemos, pero debemos también usar algunas veces nuestros conocimientos sobre la relación de inclusión. Sabemos que $A \subseteq G$ y $G \subseteq L$, y por la propiedad transitiva de la relación de inclusión deducimos que $A \subseteq L$. También sabemos que $L \subseteq G$ y $G \subseteq A$; por lo tanto $L \subseteq A$. Entonces $A = L$, debido al criterio de "identidad"; esto es, la relación de identidad que simbolizamos por "$=$" tiene la propiedad *transitiva*.

Considérense nuevamente los conjuntos A y G: $A = G$ y $G = A$. Análogamente $G = L$ y $L = G$. De hecho, para cualquier par ordenado de conjuntos (X, Y) para el cual la relación de identidad vale, tenemos que si $X = Y$ entonces $Y = X$. Esta propiedad de la relación de identidad se llama propiedad de simetría.

> **Definición 3.3e.** Una relación Ⓡ definida en un conjunto S tiene la propiedad de simetría si, para cualesquiera elementos a y b de S, siempre que a Ⓡ b entonces b Ⓡ a.

Observar que la relación de inclusión no es simétrica. Del ejemplo 1, sección 3.3, $E \subseteq F$, pero $F \nsubseteq E$. Este último símbolo se lee "F no está relacionado con E por inclusión" o "F no es un subconjunto de E."

Nos hemos referido al conjunto de números naturales como el conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

> **Definición 3.3f.** La relación "divide a" en el conjunto N se define como sigue: Dos números naturales, m y n, están relacionados por la relación *divide a* si existe un número natural único k tal que $n = m \cdot k$.

El símbolo de esto es $m|n$, y se lee "m divide a n". Si m no divide a n lo simbolizamos así $m \nmid n$. Obsérvese que la relación está cuidadosamente definida y que el conjunto considerado está claramente especificado: "los números naturales". Si $m|n$ también decimos que n es un *múltiplo* de m y m es un factor de n.

Ejemplo 1

$12|24$ puesto que hay un número natural, 2, tal que $24 = 12 \cdot 2$. En este ejemplo $n = 24$, $m = 12$, y $k = 2$.

Ejemplo 2

Similarmente, $3|3$ puesto que hay un número natural, 1, tal que $3 = 3 \cdot 1$. En este ejemplo $n = 3$, $m = 3$, y $k = 1$.

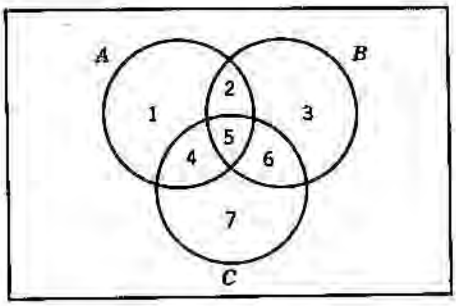
La relación "divide a" tiene la propiedad reflexiva ya que, en general, cualquier número natural m divide a sí mismo, es decir, $m|m$ puesto que $m = m \cdot 1$.

La relación "divide a" *no* es simétrica. Un ejemplo sencillo es suficiente para demostrar esto. Obsérvese que $2|6$ pero $6 \nmid 2$: "2 divide a 6 pero 6 *no divide* a 2".

La relación "divide a " es transitiva. Esto requiere más de una proposición para *probarlo.* Esta prueba implica el uso de las propiedades del *sistema de los números naturales y el cero* (o números enteros no negativos) y se deja como un ejercicio para el Capítulo 4. Depende de la propiedad de que para números a, b y c, se tiene $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. ¿Sabe Ud. cómo se llama a esta propiedad?

Ejercicios 3.3

1. Si cada uno de los conjuntos A, B, y C contiene a los puntos que están en el círculo indicado en el siguiente diagrama:



Nota: Los números están colocados en la figura por conveniencia para identificar conjuntos. Por ejemplo, A está identificado por los números 1, 2, 4 y 5, y escribimos $A = \{1, 2, 4, 5\}$, entendiendo por esto que A y $\{1, 2, 4, 5\}$ no son más que nombres diferentes para el conjunto de puntos dentro del círculo marcado con A. En esta forma podemos identificar $A \cap B$ como $\{2, 5\}$ o escribir $A \cap B = \{2, 5\}$. También, $A \cap (B \cup C) = \{2, 4, 5\}$.

Verificar que los siguientes pares de conjuntos estén relacionados por la relación de "identidad", como se indicó, haciendo la lista de elementos de cada uno y comprobando que satisfacen el criterio establecido en la definición.

(a) $A \cap B = B \cap A$
(b) $A \cup B = B \cup A$
(c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(e) Formar otra lista de conjuntos usando A, B, y C y las operaciones de unión e intersección, los cuales estén relacionados por la relación de "identidad".

2. Consideremos los siguientes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$C = \{1, 5\}$
$D = \{a, c, e, c, f, h\}$
$E = \{a, e, e, a\}$
$F = \{1, a, 5, e\}$
$G = \{9, 3, 6, 7, 2, 5, 4, 8, 1\}$
$H = \{x \mid x \text{ es una letra del alfabeto}\}$
$I = \emptyset$
$J = \{a, a, 1, 5, e, 5\}$
$K = \{c, h, e, a, f\}$
$L = \{2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 4, 3, 1, 8\}$

(a) ¿Es $J = F$? ¿$A = G$? ¿$D = K$?
(b) ¿Es $H = A$? ¿$B = H$? ¿$C = E$?
(c) Indicar otros conjuntos que están relacionados por "identidad".

3. "Es más bajo que" describa una relación que puede ser definida en el conjunto de las personas. ¿Es esta relación reflexiva? ¿Es transitiva?

4. "Tiene la misma edad que "describe una relación que pueda ser definida en el conjunto niños de escuela. ¿Es esta relación reflexiva? ¿Es transitiva?

3.4 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Hemos examinado las siguientes relaciones: la relación de inclusión, $\subseteq$, la relación de identidad, $=$, y la relación de "divide a", $|$. Estas relaciones son diferentes, y sin embargo tienen propiedades comunes. Las *propiedades* que hasta aquí hemos atribuido a las relaciones son la *reflexiva*, la *simétrica*, y la *transitiva*. Si usamos el símbolo Ⓡ para representar una relación arbitraria, y a, b, y c para representar elementos genéricos de un conjunto S, entonces:

1. Ⓡ es reflexiva si a Ⓡ a para todo a en S.
2. Ⓡ es simétrica siempre que si a Ⓡ b, entonces b Ⓡ a.
3. Ⓡ es transitiva siempre que si a Ⓡ b y b Ⓡ c, entonces a Ⓡ c.

La relación de identidad para conjuntos es reflexiva, simétrica y transitiva. Todas las relaciones ordinarias de igualdad que Ud. ha estado usando en matemáticas tienen estas tres propiedades.

En general, hay muchas otras relaciones que exhiben estas tres propiedades. Debido al papel que tales relaciones juegan en matemáticas, se les ha dado un nombre especial.

Definición 3.4a. Cualquier relación Ⓡ que es reflexiva, simétrica y transitiva se llama una *relación de equivalencia.*

Ejemplo 1

Consideremos el conjunto S formado por todos los niños de la escuela Lincoln (desde el primero al octavo grados). Defínase una relación en este conjunto en la siguiente forma:

Un estudiante x está relacionado a un estudiante y, y usaremos el lenguaje "x es un condiscípulo de y", si x y y están en el mismo grado. Se entiende que cada alumno es un condiscípulo de sí mismo, y no puede figurar en más de un grado.

La relación "es un condiscípulo de" es una relación de equivalencia. Esta relación es reflexiva porque cada estudiante es un condiscípulo de sí mismo, por definición. Si x "es un condiscípulo de" y entonces seguramente y "es un condiscípulo de" x, puesto que ambos están en el mismo grado. Así, la relación es simétrica. Finalmente, si x "es un condiscípulo de" y y y "es un condiscípulo de" z, entonces x "es un condiscípulo de" z, puesto que todos están en el mismo grado.

Esta relación divide a los alumnos en clases las cuales en este ejemplo son los grados del primero al octavo.

Toda relación de equivalencia Ⓡ definida en un conjunto S tiene el efecto de dividir al conjunto en subconjuntos o clases ajenos. Estas clases se llaman *clases de equivalencia.* En el ejemplo anterior las clases de equivalencia son los grados.

Definición 3.4b. Si Ⓡ es una relación de equivalencia en un conjunto S y a está en S, la clase de equivalencia de a se define como el conjunto de todos los elementos de S que están relacionados con a. Es decir, $[a] = \{x \in S \mid x$ Ⓡ $a\}$.

También $[a] = \{x$ en $S \mid a$ Ⓡ $x\}$ puesto que una relación de equivalencia es simétrica.

Ejemplo 2

La relación del ejemplo 1 de esta sección es una relación de equivalencia. Si Juan está en el tercer grado, [Juan] es la clase de equivalencia a la que Juan pertenece. [Juan] es el tercer grado.

Obsérvese que a está en $[a]$ ya que $a \circledR a$, puesto que una relación de equivalencia es reflexiva.

Obsérvese también que si a están en $[b]$, entonces b está en $[a]$ puesto que una relación de equivalencia es simétrica.

Finalmente, obsérvese que si c pertenece a ambos $[a]$ y $[b]$ entonces, puesto que $a \circledR c$ y $c \circledR b$, se sigue que $a \circledR b$ por la transitividad de una relación de equivalencia. Esto implica que $[a] = [b]$.

Por consiguiente, si $[a]$ y $[b]$ son clases de equivalencia, o $[a] = [b]$ o bien $[a]$ y $[b]$ son ajenas, esto es, $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Ejercicios 3.4

1. Sea la relación Ⓣ definida como sigue en el conjunto de estudiantes de una escuela. El estudiante x está relacionado con el estudiante y por la relación Ⓣ si y solamente si x es más alto que y, es decir Juan Ⓣ Tomás si y solamente si Juan es más alto que Tomás. ¿Cuál de las propiedades "R, S, T" tiene la relación Ⓣ ?

2. Sea Ⓟ la relación definida en el conjunto de números naturales como sigue: El número m está relacionado con el número n si ambos son pares o ambos son impares. Escribimos m Ⓟ n si y solamente si m y n son ambos pares o m y n son ambos impares. ¿Cuál de las propiedades "R, S, T" tiene la relación Ⓟ ?

3. Sea © la relación definida en el conjunto de habitantes de una ciudad. La persona x está relacionada a la persona y si x es hijo de y. Escribimos x © y si y solamente si x es hijo de y. ¿Cuál de las propiedades "R, S, T" tiene ©?

4. Sea la relación $\equiv$ definida en el conjunto de los números naturales y el 0 como sigue: $m \equiv n$ si m y n tienen el mismo residuo cuando se dividen entre 7. Hágase una lista de las propiedades "R, S, T" de la relación $\equiv$.

5. ¿Qué puede usted decir acerca de los números relacionados con 0 en el último problema?

6. Sea la relación $\equiv$ definida en el conjunto de los números naturales y el 0 como sigue: $m \equiv n$ si tienen el mismo residuo cuando se dividen entre 2. ¿Qué se puede decir acerca de los números relacionados con 1? ¿Y de los relacionados con 0?

Ejemplo 3

La relación en el problema 6, ejercicio 3.4, es una relación de equivalencia. Es la misma relación que está definida en el problema 2 de la misma sección. La clase a la cual pertenece 5 es [5]. La clase a la cual pertenece 4 es [4]. Observar que 5 está también en la clase [1], es decir, [1] = [5]. Hay en realidad solamente dos clases, la de los números pares, [0], y la de los números impares, [1].

Ejemplo 4

La relación en el problema 4, ejercicio 3.4, ($n \equiv m$ si m y n tienen el mismo residuo cuando se dividen entre 7) es una relación de equivalencia. Usamos este ejemplo para ilustrar el efecto de una relación de equivalencia definida en un conjunto. Escribimos los números naturales y el cero en una tabla como sigue:

0, 7, 14, 21, 28, . . .
1, 8, 15, 22, 29, . . .
2, 9, 16, 23, 30, . . .
3, 10, 17, 24, 31, . . .
4, 11, 18, 25, 32, . . .
5, 12, 19, 26, 33, . . .
6, 13, 20, 27, 34, . . .

Obsérvese que todos los números de cada renglón están relacionados unos con otros, es decir, cada renglón es una clase de equivalencia. Hay exactamente siete clases, puesto que hay sólo siete posibles residuos cuando un número natural se divide entre 7. Cada número está considerado, en vista de que cada número pertenece a alguna clase. Obsérvese también que todas las clases son ajenas por pares. Esto es lo que se llama una *partición* de un conjunto.

Así vemos, como lo establecimos anteriormente, que una relación de equivalencia tiene el efecto de dividir un conjunto en subconjuntos ajenos. La recíproca es también cierta, a saber, cualquier división de un conjunto en subconjunto ajeno determina una relación que es una relación de equivalencia. Este hecho no será aprovechado por el momento.

3.5 CORRESPONDENCIA UNO A UNO

Definición 3.5a. Se dice que dos conjuntos, A y B, están en *correspondencia uno a uno* si cada elemento de A se puede aparear con un elemento de B y cada elemento de B se puede aparear con un elemento de A en forma tal que elementos distintos de A estén apareados con elementos distintos de B y elementos distintos de B se apareen con elementos distintos de A.

Si A y B pueden ser puestos en correspondencia uno a uno en una forma, pueden ponerse en correspondencia uno a uno cuando menos en otra forma, excepto si A tiene menos de dos elementos.

Ejemplo 1

Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1, 5, 4, 2, 6\}$. Una posible correspondencia uno a uno sería: $a \leftrightarrow 1$, $b \leftrightarrow 6$, $c \leftrightarrow 2$, $d \leftrightarrow 5$, y $e \leftrightarrow 4$. Otra sería: $a \leftrightarrow 5$, $b \leftrightarrow 2$, $c \leftrightarrow 1$, $d \leftrightarrow 4$, y $e \leftrightarrow 6$.

Algunos experimentos muestran que el concepto de correspondencia uno a uno no puede ser tomado como algo evidente. En varias pruebas con niños se observó que cuando se les mostraban dos conjuntos cuyos elementos estaban dispuestos en cierto orden respondieron correctamente a las preguntas acerca de la correspondencia uno a uno. Cuando los conjuntos se les mostraron con los elementos en desorden muchos alumnos respondieron incorrectamente. También, cuando el número de elementos en los conjuntos se aumentó mucho se observaron respuestas incorrectas.

Ejercicios 3.5a

1. Indicar cómo pueden ser establecidas al menos dos correspondencias uno a uno entre los conjuntos A y B del ejemplo 1, sección 3.5.

2. ¿Cuántas correspondencias uno a uno son posibles entre los conjuntos A y B del ejemplo 1, Sección 3.5? (Sugerencia: ¿En cuántas formas puede a estar asociado a un elemento de B? Después que a ha sido asociado a algún elemento de B, ¿en cuántas formas puede b ser asociado a los elementos restantes de B?)

3. Usando la definición de "divide a", demostrar que

(a) $7|35$ (b) $8|72$ (c) $3|51$ (d) $9|9$

4. Dar un contraejemplo diferente del dado en la sección 3.3c para demostrar que la relación "divide a" no es simétrica.

5. Sean $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$ y $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots 2n, \ldots\}$. Recordar que los puntos suspensivos indican que la sucesión continúa indefinidamente. Definir una correspondencia uno a uno entre estos dos conjuntos.

6. Sea el conjunto A el formado por las letras de la palabra "anita". Describir una correspondencia uno a uno del conjunto A consigo mismo de tal forma que el conjunto resultante constituya nuevamente una palabra.

7. ¿Cuántas correspondencias uno a uno son posibles entre el conjunto del problema 6 y él mismo? (Cada una de estas correspondencias se llama una *permutación*.)

8. Si concedemos diez segundos para escribir una permutación diferente de todas las permutaciones previamente escritas de las primeras quince letras del alfabeto, ¿qué tiempo se requiere para escribir todas las posibles permutaciones de las 15 letras? (Trate de dar una estimación del tiempo requerido antes de hacer el cálculo.)

Definición 3.5b. Dos conjuntos A y B están "coordinados" * o satisfacen la relación de coordinación, si puede establecerse entre ellos una correspondencia uno a uno.

* Algunos autores usan el término "equivalentes" en lugar del término "coordinados" usada aquí. Creemos que el término "coordinados" es más adecuado.

Usaremos el símbolo "1–1" para indicar "correspondencia uno a uno".

Este proceso de coordinación es de suma importancia en matemáticas y es introducido desde el primer año de la educación escolar del niño. Ud. puede recordar dibujos que mostraban, por ejemplo, tres conejos y tres niños. Al niño se le pedía que distribuyera los conejos de modo que cada niño tuviera solamente un conejo, trazando líneas de cada conejo a cada niño. Esto es una correspondencia 1–1. La relación de coordinación es reflexiva, simétrica y transitiva. Se pide al estudiante que verifique esto.

Ejercicios 3.5b

1. Verificar que la relación de coordinación es una relación de equivalencia.

2. Sea S el conjunto de los estudiantes de la escuela Lincoln. Sea la relación "mínima edad que" y, nuevamente, debe entenderse que una persona tiene la misma edad que sí misma. También, convéngase en dar las edades por su aproximación en años enteros. Verificar que esto es una relación de equivalencia y descríbanse las clases de equivalencia.

3. Considérese el conjunto del problema 2 y sea la relación "del mismo sexo que". Verificar que es también una relación de equivalencia y describir las clases de equivalencia.

4. Sea $J = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, en donde los puntos indican que los números continúan indefinidamente en ambas direcciones. En este conjunto definimos la relación "es un múltiplo de" como sigue: Para m y n en J, m "es un múltiplo de" n si hay un elemento único k en J tal que $m = n \cdot k$. Supóngase que $0 = n \cdot 0$ para cualquier n, y $-n = n \cdot (-1)$ para cualquier n. ¿Es ésta una relación de equivalencia?

5. En el conjunto J del problema defínase una relación como sigue. Si m y n son elementos de J, m está relacionado con n si su diferencia es múltiplo de 4 (ver problema 4). Por ejemplo, 9 está relacionado con 5 porque $9 - 5 = 4$, y 4 es un múltiplo de 4. También 25 está relacionado con 41 porque su diferencia es 16, y 16 es un múltiplo de 4. ¿En esta relación una relación de equivalencia? Si lo es, describir las clases de equivalencia.

6. ¿Qué significa lo siguiente: $1 + 1 + 1 + 1 = 4$?, ¿$2 + 2 = 4$?, ¿$1 + 3 = 3 + 1$?, ¿$1 + 3 = 4$?, ¿$8/2 = 4$?, ¿$5 - 1 = 4$?

7. En lo que sigue considérese la relación, el conjunto en el cual está definida, y el símbolo que la denota; entonces:

   (a) especifique un criterio para la relación.
   (b) enumérese las propiedades que ésta posee.
   (c) si es una relación de equivalencia, describa las clases de equivalencia.

Relación	*Conjunto en el cual está definida*	*Símbolo*
Inclusión	Conjunto cuyos elementos son conjuntos	$\subseteq$
Divide a	Números naturales	$\mid$
"es el hijo de"	Gente	®
"es el mismo que"	Conjunto cuyos elementos son conjuntos	$=$
"es un condiscípulo de"	Estudiantes	©
Coordinación	Conjuntos cuyos elementos son conjuntos	1–1

3.6 NUMERO CARDINAL DE UN CONJUNTO

La correspondencia uno a uno o relación de coordinación es una relación de equivalencia. Esta divide a los conjuntos en clases de equivalencia. Los conjuntos formados por un solo elemento tienen la propiedad común de tener un solo elemento y por ello están representados por el número "uno". Los conjuntos con dos objetos tienen la propiedad común de tener dos, y por ello se les indica con el "dos". Los conjuntos con tres objetos tienen la propiedad común de estar representados por el "tres". Es decir, cada conjunto tiene un nombre asociado a él. Esto no es una noción profunda. De hecho, es la idea usada para enseñar a los niños a contar. El maestro muestra figuras con conjuntos de 3 conejos, 3 muchachos, 3 sombreros y así sucesivamente, y cada vez usa la palabra "tres", y la idea del número tres que representa al conjunto es impresa en el niño a temprana edad. No le lleva al niño mucho tiempo para aprender a decir las palabras uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez. Le lleva al niño más tiempo aprender el significado de las palabras.

Probablemente, el contar tiene sus orígenes en el registro de las pertenencias, pero esto en un tiempo era posible sin el uso de los números. Piedrecillas en un costal, muescas en una vara y nudos en una cuerda son algunos de los medios que han sido usados para "llevar la cuenta" (ver Newman). La idea fundamental era la de la correspondencia uno a uno entre el conjunto que se contaba y los objetos del conjunto representativo o conjunto de referencia. El reconocimiento del hombre de lo que 2 piedrecillas, 2 conchas, 2 muescas, 2 nudos, etc., tienen en común es la iniciación de la aritmética. Ciertas palabras en nuestro lenguaje parecen sugerir que en un tiempo el hombre no reconoció ni dio un solo nombre a la propiedad común de los conjuntos coordinados. Las palabras "yunta" (de bueyes), "juego" (de dados) "pareja", y otras que expresan la idea de "dos", son ejemplos típicos.

Cuando la abstracción de la propiedad de tener dos, tres, etc., fue concebida, esto es, cuando la misma palabra de identificación o símbolo pudo ser usada para todos los conjuntos coordinados, el siguiente paso fue asignar nombres a estas abstracciones. Las abstracciones mismas son llamadas *números*, y los nombres o símbolos que se les asignan se llaman *numerales*. Así, cuando contamos un conjunto de objetos utilizando palabras para los números, "uno, dos, tres. . . , ", estamos prácticamente haciendo lo que el hombre primitivo hizo cuando colocaba piedrecitas en el costal. Una correspondencia uno a uno se establece entre los objetos contados y las palabras asignadas a los números.

Una diferencia debe ser observada. No importaba qué piedra se ponía en o se sacaba del saco en primer lugar, en segundo lugar, etc., pero los nombres asignados deben ser usados en un orden prescrito.

Definición 3.6. Se dice que un conjunto S tiene cardinal n, o número cardinal n, si y solamente si hay una correspondencia uno a uno entre los elementos del conjunto S y el conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$. El conjunto vacío tiene el cardinal 0.

Si S es un conjunto, entonces n (S) indica el número cardinal de S, o el cardinal de S. Leemos "n de S".

Ejemplo 1

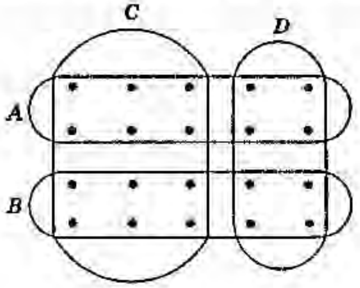
Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces $n(S) = 6$.
Si $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, entonces $n(A) = 9$.
Si $B = \{a, b, c, d\}$ y $C = \{c, d, e, f\}$, entonces $n(B \cup C) = 6$.

Podemos definir lo finito usando estas nociones. Decimos que un conjunto *es finito* si hay un número natural n tal que el conjunto pueda ser puesto en una correspondencia uno a uno con el conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$. En caso contrario se dice que el conjunto es *infinito*.

Las ideas presentadas en los últimos párrafos se discutirán con mayor amplitud en el Capítulo 4.

Ejercicios 3.6

En lo que sigue, sea A el conjunto de puntos dentro del óvalo marcado con A, sea B el conjunto de puntos dentro del óvalo marcado con B, sea C el conjunto de puntos dentro del óvalo marcado con C, y sea D el conjunto de puntos dentro del óvalo marcado con D.



1. ¿$n(A) = ?$
2. ¿$n(B) = ?$
3. ¿$n(C) = ?$
4. ¿$n(D) = ?$
5. ¿$n(A \cup B) = ?$
6. ¿$n(A \cup C) = ?$
7. ¿$n(A \cap B) = ?$
8. ¿$n(B \cap D) = ?$
9. Verificar que $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$.
10. Verificar que $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
11. Encontrar $n(A \times B)$. Comparar con $n(A) \cdot n(B)$.
12. Encontrar $n(A \times A)$. Comparar con $n(A) \cdot n(A)$.
13. Un grupo de personas fue entrevistado y se encontró que:

25 gustan de los dulces
12 gustan de la televisión
4 gustan del cine y la televisión
2 gustan de los dulces, la televisión y el cine
37 gustan del cine
9 gustan de los dulces y el cine
7 gustan de los dulces y la televisión

¿Cuántos fueron entrevistados?

14. Si un viajero puede ir de Seattle a Chicago por tres caminos diferentes y de Chicago a Nueva York por cuatro caminos diferentes, ¿cuántos caminos hay entre Seattle y Nueva York?
15. Use la idea del problema 14 para contar el número de correspondencias 1 a 1 del conjunto $\{a, b, c, d\}$ con el conjunto $\{x, y, z, w\}$.
16. Sea $A = \{a, b, c\}$. Completar:

(a) $n(A) = \ldots$ (b) $n(A \times \emptyset) = \ldots$
(c) $n(A \times \{0\}) = \ldots$

3.7 MAS SOBRE RELACIONES EN GENERAL

En nuestro estudio de relaciones en las secciones anteriores no intentamos definir *relación* rigurosamente. En lugar de eso, adoptamos un tratamiento intuitivo del concepto de relación citando muchos ejemplos de relaciones, cada uno de los cuales involucraba el apareamiento de elementos de acuerdo a algún criterio específico. Se observó que algunas relaciones tienen ciertas propiedades, otras no. Intencionalmente pusimos de relieve las propiedades que caracterizan relaciones de equivalencia. Esto fue motivado por dos objetos principales:

1. El concepto de clase de equivalencia será especialmente útil en nuestra discusión sobre el sistema de los números racionales.
2. La palabra *igual* es usada en muchos contextos diferentes y con diferentes significados. Esperamos lograr una mejor comprensión y apreciación de la relación de igualdad.

Ejercicios 3.7

1. Establecer el criterio para que la relación de igualdad sea válida en cada una de las siguientes situaciones:

(a) A y B son conjuntos. $A = B$.
(b) m y n son números, $m = n$.
(c) (a, b) y (c, d) son pares ordenados, $(a, b) = (c, d)$.

2. Explicar el significado de la palabra "igual" en el aserto "todos los hombres nacen libres e iguales".

3. El aserto "una mitad más una mitad es igual a un entero" no es necesariamente cierto. ¿Estaría Ud. dispuesto a aceptar dos mitades de una llanta de un automóvil por una llanta completa? Dar otros ejemplos donde la validez del principio dependa de la interpretación de la palabra "igual".

4. Considérense dos personas a quienes les gusta un cierto pastel y lo quieren dividir en partes iguales. Cortar el pastel en dos partes iguales es una tarea difícil. Sabiendo esto, las dos personas convienen en que un criterio razonable para dividir el pastel en partes iguales sería que cada una esté conforme con la parte que reciba. ¿Cómo dividirían el pastel equitativamente en un solo corte?

5. Refiriéndonos al problema 4, ¿en qué forma pueden cortar el pastel tres personas?

3.8 RELACIONES COMO CONJUNTOS

El relieve dado a las relaciones de equivalencia y sus propiedades reflexiva, simétrica y transitiva puede algunas veces ser engañoso. Para evitar cualquier idea de que son éstas las únicas relaciones de interés o de que no hay otras propiedades de relaciones que sean útiles, incluiremos un breve tratamiento formal de las relaciones. Este tratamiento conduce naturalmente a otros conceptos útiles, en particular al concepto de *función.*

Antes de iniciar dicho tratamiento, investiguemos algunas ideas conectadas con las relaciones en un ejercicio de aprendizaje programado.

Este ejercicio se hace en la forma de un juego simple. La efectividad de este método de aprendizaje será evidente siempre que se sigan las instrucciones cuidadosamente y el ejercicio se haga completo. Antes de empezar, recuérdese que dos pares ordenados (a, b) y (x, y) son el mismo par si y solamente si $a = x$ y $b = y$.

Se darán algunos elementos de un conjunto particular. Tan pronto como usted piense en otro elemento que pertenezca a este conjunto deberá escribirlo. En el desarrollo del juego debe usted continuar escribiendo los elementos que usted considere pertenecen a dicho conjunto.

(a) Los elementos de un primer conjunto son todos pares ordenados. He aquí algunos elementos: { (Marta, Jorge), (María, Abel), . . . }.

Antes de que siga Ud. leyendo trate de nombrar un elemento de este conjunto:

He aquí otros elementos adicionales del mismo conjunto:

(María, José)
(Juana, Pedro)

En este momento debe Ud. tener un elemento que Ud. considere pertenece a este conjunto. Trate de encontrar el *criterio de pertenencia* en la siguiente descripción de este conjunto:

$\{(x, y) \mid \ldots\ldots\ldots\}$.

Llene el espacio vacío en (Margarita,). ¿Cómo puede usted determinar si dado un par ordenado pertenece o no a este conjunto? Podemos decir que la persona cuyo nombre es la primera componente del par ordenado, es la esposa de la persona cuyo nombre es la segunda componente. Si usamos (x, y) para indicar un elemento arbitrario de este conjunto como lo hemos hecho anteriormente, x debe ser un nombre de mujer e y debe ser un nombre de hombre, y (x, y) está en el conjunto si y solamente si x "es la esposa de" y.

Hagamos la prueba con un conjunto diferente.

(*b*) Los elementos de este conjunto particular son también pares ordenados.

Aquí están algunos de sus elementos: {(Austin, Texas), (Atlanta, Georgia)}. Antes de continuar piense y escriba otro elemento de este conjunto.

Elementos adicionales son:

(Albany, New York)
(Helena, Montana)

Ahora usted debe ser capaz de nombrar un elemento que considere pertenece a este conjunto. Para estar seguros, llene los espacios en blanco que aparecen a continuación:

(......., Maine), (Sacramento, ...), (Springfield, ...).

En la notación "generador de conjunto" podemos escribir:

$\{(x, y) \mid \ldots ? \ldots ? \ldots ? \ldots\}$.

En este ejemplo, x es el nombre de una ciudad, e y es el nombre de un estado, y (x, y) pertenece a este conjunto si x "es la capital de" y.

Si queremos hablar acerca del conjunto del inciso (*a*), ya mencionado, podríamos describir el conjunto diciendo que es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) donde x es el nombre de una mujer, y es el nombre de un hombre, y (x, y) pertenece al conjunto si, y solamente si, x "es la esposa de" y. Esta descripción es adecuada pero rebuscada y, en ciertas ocasiones, redundante. No fue necesario tomar muchos pares ordenados del conjunto para saber cómo x está relacionado a y. Por otra parte, si conocemos la relación de x a y, podríamos conocer los pares ordenados de este conjunto. Siendo esto así, podemos introducir un símbolo sencillo como Ⓦ, que reemplace a "es la esposa de", y en lugar de escribir x "es la esposa de" y, simplemente escribimos x Ⓦ y. Podemos entonces escribir este conjunto como

$$\{(x, y) \mid x \text{ Ⓦ } y\}.$$

Podríamos aún preguntar cuál es este conjunto. Frecuentemente el conjunto mismo es llamado la *relación*, y podemos escribir Ⓦ $=$ $\{(x, y) \mid x \text{ Ⓦ } y\}$. Aquí Ⓦ se usa para indicar al conjunto que define la relación así como a la relación misma. Esto puede resultar algo confuso, pero es compatible con las convenciones matemáticas.

El conjunto (b) indicado anteriormente es el conjunto de pares ordenados cuya primera componente es el nombre de una ciudad y la segunda componente es el nombre de un Estado. Un par ordenado está en este conjunto si y solamente si el miembro colocado en primer lugar es la capital del miembro colocado en segundo lugar. Si usamos © en lugar de "es la capital de" podemos especificar este conjunto como

$$\{(x, y) \mid x \text{ © } y\}.$$

Siguiendo la convención del párrafo anterior, podemos llamar a este conjunto de relación "es la capital de" e indicarlo por ©. Debe observarse que, haciendo esto, podemos escribir: (Atlanta, Georgia) $\in$ ©, o Atlanta © Georgia. Ambos se deben leer, "Atlanta, es la capital de Georgia". Vale la pena recalcar el hecho de que si conocemos la relación que hay entre el primero y segundo miembros del par ordenado, entonces podemos conocer los pares ordenados y recíprocamente, si conocemos los pares ordenados, podemos conocer la relación. Este hecho ha conducido a la definición de relación como un conjunto de pares ordenados.

Definición 3.8a. Una relación es un conjunto de pares ordenados.

En la relación "es la esposa de", entendemos que los nombres que ocupan el primer lugar del par ordenado (x, y) son nombres de mujeres casadas y los nombres que ocupan el segundo lugar son nombres de hombres casados. El conjunto de mujeres casadas se llama el *dominio* de relación y el conjunto de los hombres casados se llama el *codominio* de la relación. En la relación (b) el dominio es el conjunto de las capitales y el codominio es el conjunto de Estados.

En las discusiones anteriores usamos símbolos especiales para designar a las relaciones que se presentan con la suficiente frecuencia como para que se les haya asignado un símbolo convencional. Usamos $<$ *para menor que*, $>$ *para mayor que*, $\mid$ *para divide a*, y $\leq$ *para menor o igual que*. También usamos el símbolo Ⓡ para indicar una relación arbitraria y escribimos a ® b para indicar que a está ®-*relacionada* a b. Como hemos indicado, podemos también considerar una relación ® como un conjunto, cada miembro del cual es un par ordenado. Obsérvese que escribimos indistintamente: x ® y o $(x, y) \in$ ®.

Definición 3.8b. El conjunto de todas las primeras componentes de los elementos de una relación se llama el *dominio* de la relación.

Definición 3.8c. El conjunto de todas las segundas componentes de los elementos de una relación se llama *codominio* de la relación.

En general, el dominio y el codominio de una relación son conjuntos diferentes. Si el dominio y el codominio de una relación son el mismo conjunto, se dice que la relación está *definida en el conjunto*. Una relación con dominio A y codominio B es un subconjunto de $A \times B$. Una relación en un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$.

Ejemplo 1

Considérese el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces el conjunto $A \times A$ está dado por la siguiente tabla:

$A \times A$

4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 3)	(4, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
	1	2	3	4

Del conjunto $A \times A$ considérese el subconjunto formado por $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	$\boxed{(4, 4)}$
3	(1, 3)	(2, 3)	$\boxed{(3, 3)}$	(4, 3)
2	(1, 2)	$\boxed{(2, 2)}$	(3, 2)	(4, 2)
1	$\boxed{(1, 1)}$	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
	1	2	3	4

Suponga usted que le dicen que estos pares fueron seleccionados porque la primera componente tiene una relación especial con la segunda, y que solamente estos pares ordenados del conjunto tienen esta relación. Seguramente usted concluiría que la relación descrita es la relación de *igualdad*.

Ejemplo 2

Considérese el subconjunto $\{(1, 4), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (2, 3), (3\ 4)\}$.

4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
	1	2	3	4

Este subconjunto también define una relación. Después de examinar los pares ordenados en el conjunto, usted debería verificar que describen la relación *menor que.*

Ejemplo 3

Considérese el subconjunto $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
	1	2	3	4

Este subconjunto define la relación *divide a* en el conjunto A. La relación *divide a* es un subconjunto del producto Cartesiano $A \times A$.

Obsérvese que si el subconjunto de $A \times A$ contiene a los elementos de la diagonal, es decir, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, cualesquiera que sean los elementos restantes del subconjunto se concluye que la relación definida por el subconjunto es *reflexiva.* ¿Podemos hacer afirmaciones similares con respecto a las propiedades simétrica y transitiva de las relaciones?

Repetimos: Una relación con dominio A y codominio B está definida frecuentemente como un subconjunto del producto Cartesiano $A \times B$. Una relación en un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$.

Continuando con nuestros ejercicios de aprendizaje programado, llegamos al inciso (c).

(c) Los elementos de este conjunto particular son todos pares ordenados de números. He aquí algunos elementos de este conjunto: $(7, 9)$, $(1, 3)$, y $(10, 12)$. Con tan pocos pares ordenados, la relación que se sugiere puede no ser evidente. He aquí algunos otros: $(2, 4)$, $(3, 5)$, y $(4, 6)$. ¿Puede usted llenar el vacío en (11, ———)? ¿puede usted llenar el vacío en (x, ———)? Descríbalo en la notación "generador de conjunto":

$$\{(x, y) \mid \ldots\}.$$

Un par ordenado de números pertenece a este conjunto si y solamente si el número correspondiente al segundo lugar es mayor en dos unidades que el número correspondiente al primer lugar. Entonces, si el número correspondiente al primer lugar es x, el número correspondiente al segundo lugar es $x + 2$. Escribimos

$\{(x, y) \mid y$ es 2 mayor que $x\}$ o bien
$\{(x, x + 2) \mid x$ es un número$\}$.

Puesto que estos dos conjuntos son el mismo,

$(x, y) = (x, x + 2)$ para todo x.

Pero esto es cierto si y solamente si $x = e$ y $y = x + 2$. Puesto que x es siempre igual a x, podemos decir que esta relación está definida por la ecuación:

$$y = x + 2.$$

(*d*) ¿Qué relación sugiere el siguiente conjunto?

$$\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), \ldots\}.$$

Piénselo como $\{(x, y) \mid$ (criterio para aparear x y y)$\}$. Este conjunto puede también expresarse como $\{(x, x^2) \mid x$ es un número$\}$. Puesto que estos dos conjuntos son el mismo,

$(x, y) = (x, x^2)$ para toda x.

Por lo tanto, esta relación está determinada por:

$$y = x^2.$$

Las dos últimas relaciones (*c*) y (*d*) son ejemplos de una clase especial de relación llamada función.

Las relaciones pueden ser clasificadas en términos de la forma en que aparean a los elementos. Este apareamiento es llamado en algunas ocasiones una correspondencia. Hay cuatro clases de correspondencia. Ellas son:

1. Correspondencia "uno a uno".
2. Correspondencia "muchos a uno".
3. Correspondencia "uno a muchos".
4. Correspondencia "muchos a muchos".

Estas correspondencias aparecen muy naturalmente y están ilustradas en los diagramas de la página siguiente.

La relación "uno a uno" y "muchos a uno" son de interés especial y se llaman funciones.

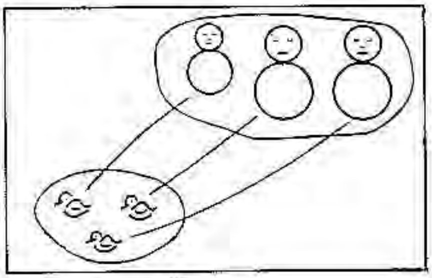
Definición 3.8d. Se dice que una relación es unívoca * si es una correspondencia "uno a uno" o "muchos a uno". Esto se expresa frecuentemente como: x Ⓡ y y x Ⓡ z implica $y = z$.

* O *univalente*. El texto inglés dice "single-valued" (N. del T.)

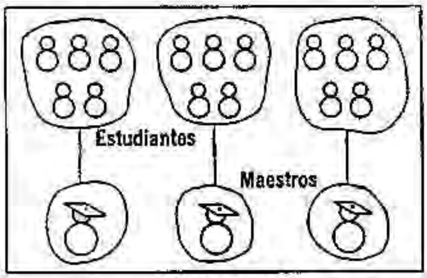
En la notación de conjuntos: $(x, y) \in \circledR$ y $(x, z) \in \circledR$ implica que $y = z$.

Definición 3.8c. Las relaciones unívocas son llamadas *funciones.*

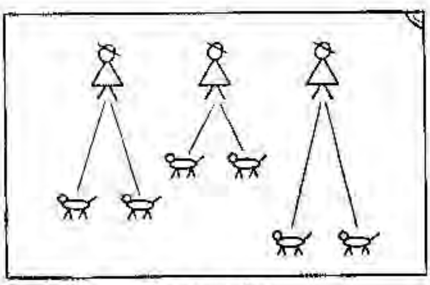
Las funciones juegan un papel central en matemáticas. Para las relaciones que son funciones se usan letras minúsculas. Al referirnos a estas relaciones hablamos de la función f, la función g, etc.



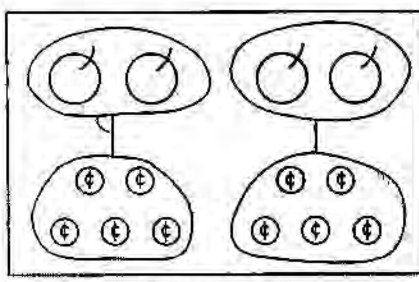
Uno a uno



Muchos a uno



Uno a muchos



Muchos a muchos

Puesto que las funciones son relaciones, una función es un conjunto de parejas ordenadas. Si el miembro del primer lugar se lo indica con x, el miembro del segundo lugar frecuentemente se lo indica con $f(x)$. Así, una función puede concebirse como: $f = \{(x, f(x)) \mid x$ está en el dominio de la función y $f(x)$ está apareado con x de acuerdo con una condición o criterio específico$\}$. Esto es,

$$(x, y) = (x, f(x)) \text{ si y solamente si } y = f(x).$$

y x está en el dominio de f. Así, la función está determinada por la ecuación

$$y = f(x).$$

Obsérvese que $y = x + 2$ y $y = x^2$ son ambos ejemplos de esta situación más general.

Cada relación tiene una inversa.

Definición 3.8f. El *inverso* de una relación $\circledR$ es el conjunto de todos los pares ordenados (y, x) para el cual (x, y) está en $\circledR$. Usamos la notación $\circledR^{-1}$ para indicar la relación inversa.

Ejemplo 4

Si $\circledR$ es la relación $<$, entonces $\circledR^{-1}$ es la relación inversa $>$.

$3 < 5$	$5 > 3$
$(3, 5) \in \circledR$	$(5, 3) \in \circledR^{-1}$

Ejemplo 5

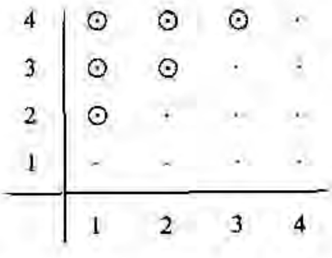
Si $\circledR$ es la relación "es un factor de" en el conjunto de números naturales, entonces $\circledR^{-1}$ es la relación "es un múltiplo de."

2 es un factor de 6, $(2, 6) \in \circledR$

6 es un múltiplo de 2, $(6, 2) \in \circledR^{-1}$

Ejemplo 6

Una variante para describir la relación del ejemplo 2, sección 3.8, se tiene usando la convención descrita en la sección 2.6, pero suprimiendo los pares ordenados.



Los puntos en el diagrama representan los pares ordenados. Aquéllos que están en un círculo son los pares que definen la relación $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. El conjunto de puntos que representa la relación es llamado la gráfica de la relación. Los elementos del dominio se dibujan a lo largo del eje horizontal. Los elementos del codominio se dibujan a lo largo del eje vertical.

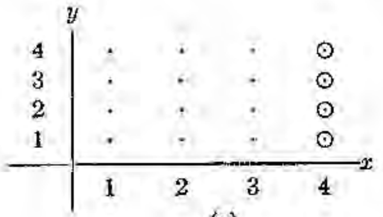
Ejercicios 3.8

1. Sean $A = \{$Boise, Helena, Olympia, Salem$\}$.
   $B = \{$Idaho, Montana, Washington, Oregón$\}$.
   (a) Construir $A \times B$.
   (b) Indicar el subconjunto definido por la relación "es la capital de."
   (c) Indicar el subconjunto definido por el inverso de la relación del ejemplo (b).

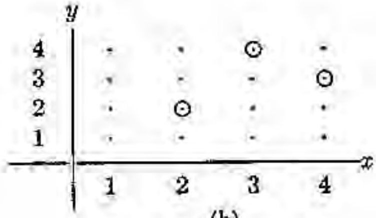
2. Si f es una función, la inversa de f es una relación. ¿Cuándo es la inversa de f una función?

3. ¿Cuál es la diferencia en significado entre los símbolos
 (a) (a, b) y (b, a)?
 (b) ¿y de (a, b) y $\{a, b\}$?

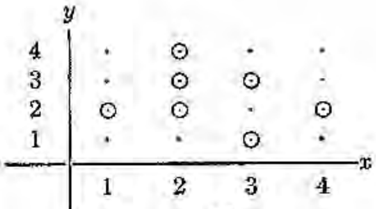
4. (a) ¿Cuál de las relaciones descritas por las siguientes gráficas son funciones? (Ver Ejemplo 6, Sección 3.8).
 (b) Establecer el dominio y codominio de cada relación que es una función.
 (c) ¿Cuáles de las relaciones tienen inversa que sea función?



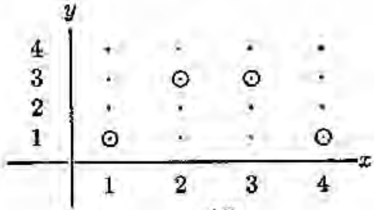
(a)



(b)



(c)



(d)

5. Definir una relación de orden en el conjunto de los alumnos de la Escuela Primaria de Garfield.

6. Si W denota el conjunto de los números enteros no negativos, $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Definir una relación Ⓡ en W por

$$Ⓡ = \{(a, b) \mid a \in W \text{ y } b \in W \text{ y } a - b \text{ es divisible por } 3\}.$$

¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa y cuál es verdadera?

Justificar cada respuesta.

(a) $(1, 13) \in$ Ⓡ (b) $(-2, 13) \in$ Ⓡ (c) 1 Ⓡ 4
(d) 5 Ⓡ 27 (e) Ⓡ es simétrica (f) Ⓡ es transitiva

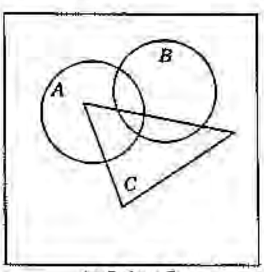
EJERCICIOS DE REPASO 1

1. Indicar la palabra o frase que reemplaza a la línea y para que cada una de las siguientes proposiciones sea verdadera. Utilice las palabras necesarias para que la proposición quede *completa.*

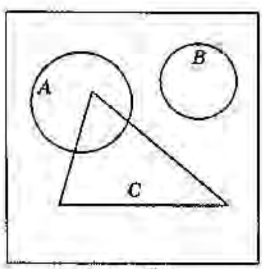
 (a) ——— es un nombre para un número.
 (b) ——— es un conjunto de símbolos y un esquema para usar estos símbolos y así dar nombres a los números.

(c) ——— es un ejemplo de un sistema aditivo de numeración.
(d) ——— es un ejemplo de un sistema multiplicativo de numeración.
(e) ——— es un ejemplo de un sistema de valor relativo de numeración.
(f) Una propiedad única del sistema decimal de numeración es ———.
(g) MCMLXVII es el numeral romano para ——— (numeral decimal).
(h) Los símbolos $a \in X$ significan ———.
(i) Para dos conjuntos, A y B, ——— si cada elemento de A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A.
(j) ——— es el conjunto que no tiene elementos.
(k) La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto ———.
(l) La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto ———.
(m) Si $A \subseteq U$, entonces el complemento de A con respecto a U es el conjunto de todos los elementos ———.
(n) Dos conjuntos, A y B son ajenos si ———.
(o) Hay ——— subconjuntos de un conjunto de n elementos.
(p) El producto Cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que ———.
(q) Una relación Ⓡ definida en un conjunto S es reflexiva si, para toda a en S, ———.
(r) Una relación Ⓡ definida en un conjunto S es simétrica si, para toda a y b en S, ———.
(s) Una relación Ⓡ definida en un conjunto S es transitiva si, para todo a, b y c en S, ———.
(t) Una relacion de equivalencia es aquella que es ———.
(u) Si el conjunto A puede ser puesto en correspondencia uno a uno con el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$, entonces se dice que n es ——— del conjunto A.
(v) Las relaciones descritas en términos de correspondencias quedan divididas en cuatro clases, que son: ———.
(w) Una relación definida por un conjunto de pares ordenados, de los cuales ninguna de sus primeras componentes es la misma, es llamada ———.
(x) Para dos conjuntos, A y B, A es un subconjunto de B si ———.
(y) Una relación definida en un conjunto A es un subconjunto de ———.
(z) Una relación (unívoca) es llamada una ———.

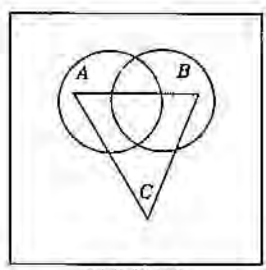
2. En cada uno de los siguientes esquemas sombrear el área indicada abajo de cada diagrama:



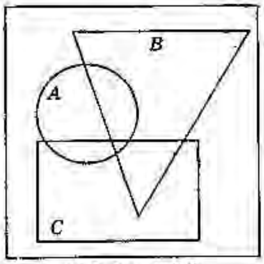
$(A \cap C) \cup B$



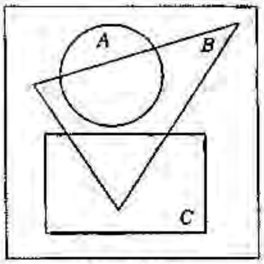
$(B \cup C) \cap A$



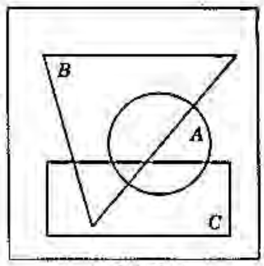
$(A \cap B) \cup C$



$(A \cap B) \cup A \cap C$

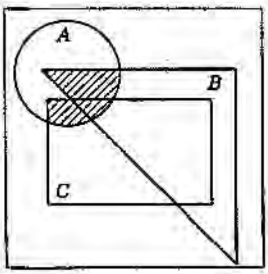


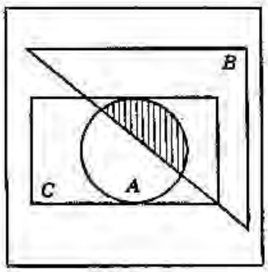
$(A \cup C) \cap B$

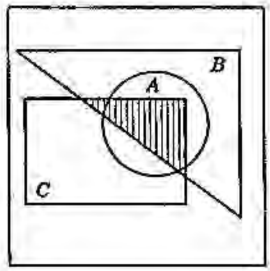


$(A \cap B) \cap C$

3. En cada uno de los siguientes esquemas escribir el conjunto de símbolos que describe el área sombreada:







4. Sea $T = \{m \mid m = 3k, k$ un número entero no negativo$\}$.

(a) ¿Es T un subconjunto de W, que es el conjunto de los números enteros no negativos?

(b) ¿Es T un subconjunto propio de W?

(c) T (tiene menos elementos que) (tiene más elementos que), (puede coordinarse con) W. Escoger una respuesta.

5. Sea W el conjunto de los números enteros no negativos, $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Definir la relación Ⓡ en W por

Ⓡ $= \{(a, b) \mid a \in W$ y $b \in W$ y $a - b$ divisible por $2\}$.

Diga si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas y dé una razón del por qué:

(a) $(13, 1) \in$ Ⓡ.
(b) $(-2, 13) \in$ Ⓡ.
(c) 4 Ⓡ 1.
(d) 27 Ⓡ 5.
(e) Ⓡ es simétrica.
(f) Ⓡ es transitiva
(g) Ⓡ es reflexiva.

6. Decir cuál es el número cardinal de cada expresión siguiente:

(a) $\emptyset$
(b) $\{\emptyset\}$
(c) $\{0\}$
(d) $\{a, b\}$

7. Simplificar, pero expresar el resultado con potencias:

(a) $(10^2)^3$

(b) $\dfrac{2^7 \cdot 3^5}{(2 \cdot 3)^3}$

(c) $\dfrac{3^3 \cdot 5^7}{15^4}$

(d) $8 \cdot 2^{-4}$

(e) $9 \cdot 3^{-4}$

8. La siguiente es una lista parcial de características y rangos distintivos de sistemas de numeración:

(a) símbolo para potencias de la base
(b) símbolo para el cero
(c) orden de símbolos importantes
(d) principio de sustracción
(e) uso repetido de un símbolo
(f) principio multiplicativo
(g) principio aditivo
(h) valor relativo
(i) un símbolo único que distingue a diez

Use las letras para indicar cuál de estos sistemas tiene esas características:

(a) el sistema Egipcio de numeración.
(b) el sistema Romano de numeración.
(c) el sistema Chino-Japonés de numeración
(d) el sistema decimal de numeración.

9. Sea dada la siguiente correspondencia de numerales decimales a símbolos representativos del mismo numeral:

Numeral Decimal	*Símbolo*
0	O
1	I
2	L
3	F
4	E
5	B
25	B^2
125	B^3
625	B^4

(a) Haga una lista de los símbolos que deben usarse en un sistema aditivo de numeración.
(b) Haga una lista de los símbolos que deben usarse en un sistema multiplicativo de numeración.
(c) Haga una lista de los símbolos que deben usarse en un sistema de numeración de valor relativo.
Complete la siguiente tabla:

	Numeral Decimal	*Sistema Aditivo*	*Sistema Multiplicativo*	*Sistema de Valor relativo*
(d)	98	———	———	———
(e)	1884	$B^4B^4B^4BIIII$	———	———
(f)	1930	———	———	*FOLIO*

10. Use símbolos para indicar que:

(a) x es un elemento del conjunto B.
(b) x no es un elemento del conjunto C.
(c) el conjunto A es un subconjunto del conjunto B.
(d) A es el conjunto que no contiene elementos.
(e) C es la unión de los conjuntos A y B.
(f) D es la intersección de los conjuntos A y B.
(g) los conjuntos A y B no tienen elementos en común.

11. Treinta estudiantes van a un paseo campestre. Doce regresaron con quemaduras del sol y picaduras de insectos. Veinte vinieron asoleados. ¿Cuántos sufrieron picaduras de insectos si sabemos que solamente tres estudiantes no sufrieron ninguna molestia?

12. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 3\}$, y A y B conjuntos no vacíos.
(a) $A \cup B = U$, $A \cap B = \emptyset$, y $B = \{1\}$. $A = \ldots$ (completar).
(b) $A \subseteq B$ y $A \cup B = \{4, 5\}$. $B = \ldots$
(c) $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4\}$ y $B \cup C = \{1, 2, 3\}$. $A = \ldots$

13. Tratemos de hacer un sistema de numeración. Puesto que el sistema de valor relativo es el más eficiente, usaremos los símbolos Δ, $-$, $\subset$, Σ, y las ideas de valor relativo como siguen:

$$n(\emptyset) = \Delta.$$
$$n(\{\Delta\}) = -.$$
$$n(\{\Delta, -\}) = \subset.$$
$$n(\{\Delta, -, \subset\}) = \Sigma.$$

(a) En este sistema, ¿cuál es el cardinal del conjunto $\{c, x, w, e, r, g\}$?
(b) ¿Qué número sigue a $\Sigma\Delta\Sigma$?
(c) ¿Qué número es cuatro veces $\Sigma \subset -$?
(d) ¿Qué número es la cuarta parte de $\Sigma \subset -$?

EJERCICIOS DE REPASO 2

1. Si O representa el cero, I representa uno, L representa dos, y a, b, c, d representan 3, 3^2, 3^3, 3^4 respectivamente, hacer una tabla como se indica y, usando los símbolos necesarios de este conjunto, representar los números decimales dados en: (*a*) un sistema aditivo de numeración, (*b*) un sistema multiplicativo de numeración, y (*c*) un sistema de valor relativo de numeración, donde los valores relativos respectivos son unidades, treses, nueves, veintisietes, ochenta y unos, y así sucesivamente.

	Aditivo	*Multiplicativo*	*Valor relativo*
9	———	———	———
25	———	———	———
109	———	———	———

2. Sea I el conjunto de toda la gente.
M indica el conjunto de todos los varones.
W indica el conjunto de todas las mujeres.
R indica el conjunto de toda la gente pelirroja.
T indica el conjunto de toda la gente de 21 o más años de edad.

Describir los siguientes subconjuntos de I con palabras. (Por ejemplo, $W \cap R$ es el conjunto de todas las mujeres pelirrojas.)

(a) $M \cap R$ (b) $R \cup T$
(c) $M \cap W$ (d) $M \cup T$

3. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$.
   (a) Hacer la tabla de $A \times B$.
   (b) Hacer la tabla de $A \times A$.
   (d) Escoger el subconjunto de $A \times A$ tal que los números de pares ordenados estén relacionados por "menos que".

4. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, obtener un conjunto coordinado con A, es decir, un conjunto que esté relacionado con A por la relación de "coordinación".

5. Dados el conjunto $M = \{1, 2, 3, 4\}$ y el $N = \{a, b, c, d\}$,
   (a) establecer una correspondencia uno a uno entre M y N.
   (b) ¿cuántas correspondencias uno a uno hay?

6. Dado $M = \{1, 2, 3\}$,
   (a) hacer una lista de todos los subconjuntos de M.
   (b) ¿cuántos subconjuntos tiene un conjunto de cinco elementos?

7. Considérese $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
   $A = \{1, 2, 3, 7\}$; $B = \{3, 4, 6, 7\}$; $C = \{4, 5\}$.
   (a) Dibuje un diagrama de Venn de los conjuntos U, A, B, y C.
   (b) Describa los siguientes conjuntos haciendo una lista de los elementos:

   (1) $A \cap B$ (2) $A \cup (B \cup C)$
   (3) $A \cup B$ (4) $A \cap (B \cap C)$
   (5) $A \cap (B \cap C)$ (6) $A \cup (B \cap C)$

8. Dar una lista de las propiedades (por ejemplo: reflexiva, simétrica, transitiva) que posea cada una de las siguientes relaciones definidas en los conjuntos especificados:

Conjunto	*Relación*
(a) Los números naturales	"es mayor que"
(b) Los números naturales	"divide a"
(c) Líneas rectas en el plano	"es paralelo a"
(d) Alumnos de la escuela Paxon	"está en el mismo grado que"
(e) Animales	"es de la misma especie que"

   (f) ¿Cuáles de las relaciones anteriores son relaciones de equivalencia?

9. Definir lo siguiente:
   (a) La unión de dos conjuntos.
   (b) La intersección de dos conjuntos.
   (c) El conjunto vacío.
   (d) El producto Cartesiano de dos conjuntos.
   (e) Subconjuntos.
   (f) Relación de equivalencia.
   (g) Función.
   (h) Relación de orden.

10. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, y $C = \{4, 5, 6, 7\}$.
   (a) Encontrar $n(A)$, $n(C)$, $n(A \cup C)$, y $n(A \cap C)$. Escribir $n(A \cup C)$ en términos de $n(A)$, $n(C)$, y $n(A \cap C)$.
   (b) Encontrar $n(A)$, $n(B)$, y $n(A \times B)$. Escribir $n(A \times B)$ en términos de $n(A)$ y $n(B)$.
   (c) Encontrar $n(C \times B)$ y escribirlo en términos de $n(C)$ y $n(B)$.
   (d) Encontrar $n[(A \cup C) \times B]$ y escribirlo en términos de $n(A)$, $n(B)$, y $n(C)$.

REFERENCIAS

Banks, J. Houston, *Elements of Mathematics*, Allyn and Bacon, Boston, 1964, Ch. VI.

Hafstrom, John E., *Basic Concepts in Modern Mathematics*, Adison-Wesley Publishing Co., Reading, Mas., 1961, Ch. VI.

Hamilton, Norman T. and Joseph Landin, *Set Theory, the Structure of Arithmetic*, Allyn and Bacon, Boston 1961, pp. 46-73.

Kelley, John L., *An Introduction to Modern Algebra*, D. Van Nostrand and Co., Princeton, New Jersey, 1960.

Newman, James R., *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, Nueva York, 1956.

Schaaf, William L., *Basic Concepts of Elementary Mathematics*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1960, pp. 22-23 and Ch. IX.

CAPITULO 4

El sistema de los números enteros no negativos

4.1 INTRODUCCION

Enseñar a un niño a contar es más que enseñarle a repetir las palabras uno, dos, tres, etc. Enseñar a un niño a contar es, en realidad, enseñarle a reconocer la propiedad común de conjuntos que están en correspondencia unívoca y a designar correctamente esta abstracción, así como enseñar a un niño los distintos colores implica el distinguirlos y designarlos correctamente. La "falta de percepción numérica", a diferencia de "el daltonismo", todavía no está considerada como una falta fisiológica. El proceso de poner en correspondencia biunívoca o "coordinar" distingue a los conjuntos con una precisión que no puede alcanzar la vista al distinguir los colores. El concepto de número debería ser fácil de enseñar e interesante de aprender.

En los capítulos anteriores introdujimos las nociones de conjuntos, relaciones y las propiedades de éstas últimas, y examinamos algunos ejemplos de relaciones definidas en los conjuntos. Vimos que varias relaciones tenían propiedades comunes. Las relaciones que son reflexivas, simétricas y transitivas aparecen tan frecuentemente en matemáticas y son tan importantes que se les ha dado un nombre especial: *relaciones de equivalencia.* El efecto de una relación de equivalencia en el conjunto en el que está definida es el de *partir el conjunto* en subconjuntos, que llamaremos *clases de equivalencia.* La relación biunívoca o de coordinación definida en los conjuntos en términos del concepto fundamental de *correspondencia "uno a uno"* es una relación de equivalencia, y la propiedad común de los conjuntos de una clase de equivalencia definida por esta *relación de coordinación* se llama *número cardinal.*

Los nombres y símbolos dados a estas abstracciones se llaman *numerales.* Así, el símbolo "1" representa el número que es el rasgo distintivo de la clase de equivalencia de todos los conjuntos que tienen la propiedad de "estar formados por uno". Cuando escribimos el símbolo "1", podemos formar un conjunto cuyo único elemento es este símbolo. Denotamos a este conjunto con $\{1\}$. El símbolo "2" representa el número que es el rasgo distintivo de la clase de equivalencia de todos los conjuntos con la propiedad de "estar formados por dos". Un conjunto representativo de esta clase es el conjunto $\{1, 2\}$. De la misma forma podemos formar los conjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}, \ldots,$ $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$, y $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$. En el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$, los puntos suspensivos indican que la sucesión de números continúa indefinidamente. Este conjunto se llama el conjunto de *los números naturales.* Usaremos la letra mayúscula N para designar este conjunto:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

4.2 CONJUNTOS PARA CONTAR

Los conjuntos $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}, \ldots,$ son conjuntos que representan respectivamente a sus clases de equivalencia definidas por la relación de correspondencia biunívoca. Estos conjuntos se llaman también *conjuntos para contar.* Obsérvese que están *ordenados.* Es decir, el número 1 es siempre el primero de cada conjunto, el número 2 siempre sigue al número 1.

Observación: Algunos autores usan la convención de remplazar las llaves por paréntesis circulares cuando indican *conjuntos ordenados.* Así, escriben $(1, 2, 3, 4)$ como lo hicimos con las parejas ordenadas. Esta es una convención matemática aceptada, pero no usaremos conjuntos ordenados en lo sucesivo excepto en el caso de parejas ordenadas.

Para introducir el *sistema de los números enteros no negativos* con el orden natural al que nos referimos anteriormente, modificaremos el proceso convencional con el fin de obtener mayor claridad.

4.3 LOS NUMEROS ENTEROS NO NEGATIVOS

El número cero se define como el cardinal del conjunto vacío:

$$0 = n(\emptyset).$$

Entonces, el número 1 queda definido como el cardinal del conjunto que únicamente contiene al elemento 0:

$$1 = n(\{0\}).$$

El número 1 se llama sucesor de 0. El número 2 se define como el cardinal del conjunto formado por los elementos 0 y 1:

$$2 = n(\{0, 1\}).$$

El número 2 se llama *sucesor* de 1. Análogamente se define el número tres, etc.:

$$3 = n(\{0, 1, 2\}).$$
$$4 = n(\{0, 1, 2, 3\}).$$
$$5 = n(\{0, 1, 2, 3, 4\}).$$

.
.
.
etc.

El número 3 es el sucesor del 2, el número 4 es el sucesor del 3, etc. El sucesor del número K se denota por $K + 1$. Continuando indefinidamente obtenemos el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$. Este conjunto, que denotaremos por W, se llama *el conjunto de los números enteros no negativos.*

(El nombre escogido para este conjunto es cosa de preferencia personal. Algunos autores llaman a este conjunto el conjunto de los números naturales. Nosotros usamos la expresión *natural* para el conjunto que empieza con el número 1 y no incluye al 0).

La idea de sucesor de un número sirve para distinguir el orden natural de los números enteros no negativos como opuestos a otro tipo de orden que se discutirá después en detalle. Debe señalarse que este orden natural es el que los niños deben aprender cuando por primera vez estudian los números.

Ejemplo 1

Hay diferencia entre las proposiciones "4 es el sucesor de 3" y "4 es mayor que 3."

Los conjuntos para contar empiezan con el número 1. Contar es simplemente el proceso de establecer una correspondencia "uno a uno" entre el conjunto que se está contando y el conjunto apropiado para contar provisto de este orden natural. El *último número* en el conjunto para contar es el número cardinal del conjunto que se está contando.

Cualquier número en el conjunto de los números enteros positivos es el cardinal de algún conjunto finito. Un conjunto que pueda ponerse en correspondencia "uno-a-uno" con algún conjunto para contar que tenga último elemento, es *finito.* El conjunto vacío tiene número cardinal cero. Un conjunto es *infinito numerable* si existe una correspondencia "uno-a-uno" entre los elementos del conjunto y el conjunto de *todos* los números naturales. Por lo tanto, el conjunto de los números naturales es él mismo infinito numerable.

Los conjuntos infinitos pueden ser caracterizados en otras formas. Un conjunto puede también definirse como infinito si admite una correspondencia "uno-a-uno" entre el conjunto total y un subconjunto propio de él mismo.

4.4 USO ORDINAL Y CARDINAL DE LOS NUMEROS

A pesar de que hay una diferencia técnica entre los números ordinales y cardinales, no haremos dicha distinción en este libro; más bien acentuaremos el uso ordinal y cardinal que se da a los números.

Cuando usamos un número para responder a la pregunta "¿cuántos?", estamos haciendo *uso cardinal* del número. Esto es, cuando un número se usa para designar el 'tamaño" de un conjunto, se lo está usando cardinalmente.

Por otra parte, si el uso de estos números depende del orden prescrito, se tiene el *uso ordinal* del número. El número representado por el numeral que aparece en la parte superior o inferior de una página de un libro es un ejemplo del uso ordinal del número. Es la 82a. página. Cuando un número es usado para designar una posición numerada, está siendo usado ordinalmente. Por ejemplo, en el aserto "el equipo está en 3er. lugar en las posiciones de la liga". Cuando usamos un número para responder a la pregunta "¿cuál?", estamos haciendo uso ordinal del número.

Ejemplo 1

A una persona que entra a una pista de boliche se le da una hoja de papel con el numeral 9. Esto significa que es la 9a. persona que está esperando turno para jugar. Este es el uso ordinal del número. Hay 8 personas antes que él en la lista de espera. Este es el uso cardinal del número 8.

Ejercicios 4.4

1. En la liga menor de béisbol 19 muchachos resultan electos para formar un equipo. De ellos, 11 llevan camisa de béisbol y 14 pantalón de béisbol. Cada uno lleva parte del uniforme y, por supuesto, algunos lo llevan completo. Sea S el conjunto de niños que llevan camisa de béisbol y P el conjunto de niños que llevan pantalón de béisbol.
   (a) ¿A qué es igual $n(S)$?
   (b) ¿A qué es igual $n(P)$?
   (c) ¿A qué es igual $n(S \cup P)$?
   (d) ¿A qué es igual $n(S \cap P)$?
   (e) Habiendo encontrado el cardinal de los conjuntos S y P, ¿cuántos niños se contaron 2 veces?
   (f) ¿Cómo están relacionados los números de los incisos (*a*), (*b*), (*c*) y (*d*)?

2. Un grupo de 30 estudiantes se va a un campamento. De ellos, 12 regresan quemados por el sol y con picaduras de insectos, y 20 regresan

quemados por el sol. ¿Cuántos sufrieron picaduras de insectos, si sabemos que sólo a 3 de ellos no les pasó nada?

3. Si el cardinal del conjunto A es 132, el cardinal del conjunto B es 97, y el cardinal del conjunto $A \cap B$ es 43, ¿cuál es el cardinal del conjunto $A \cup B$?

4. Sea $T = \{m \mid m = 3k, k \in W$, donde W es el conjunto de los elementos no negativos.
   (a) ¿Cuál elemento de T corresponde al primer elemento de W?
   (b) ¿Cuál elemento de T corresponde al tercer elemento de W?
   (c) ¿Es T subconjunto propio de W?
   (d) ¿Cómo está relacionado el cardinal de T con el cardinal de W?

5. Sea $Q = \{n \mid n = 2k - 1, k \in N\}$.
   (a) ¿Cuál elemento de Q corresponde al primer elemento en N?
   (b) ¿Qué otro nombre recibe el conjunto Q?
   (c) Si $R = \{j \mid j = 2i + 1, i \in W\}$, ¿qué relación hay entre R y Q?

6. Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{d, e, n, m, k\}$, ¿cuál es el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos?
   (a) $n(A \cup B) = \ldots$ (completar).
   (b) $n(A \cap B) = \ldots$
   (c) $n(A \times B) = \ldots$

7. Sea $A = \{a, a, b, c, c\}$. ¿Cuál es el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos?
   (a) $n(A \cup \emptyset)$
   (b) $n(A \cap \emptyset)$
   (c) $n(A \times \emptyset)$

8. (a) ¿Qué significa que un conjunto sea finito?
   (b) ¿Qué significa que un conjunto sea infinito numerable?

9. Distinguir el uso cardinal y ordinal de los números naturales, citando ejemplos en los que aparezcan los mismos números.

10. (a) Verifique que "el mismo color que" es una relación de equivalencia en el conjunto de las frutas.
    (b) Una de las clases de equivalencia bajo esta relación contiene un elemento que tiene el mismo nombre que su clase de equivalencia. ¿Cuál es?

11. Definamos la relación "$\equiv$" en el conjunto $W = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ como sigue: dados los números cualesquiera m y n del conjunto, $m \equiv n$ si al dividirlos entre 12 ambos tienen el mismo residuo; por ejemplo: $14 \equiv 38$, $17 \equiv 5$, etc. Verifique que ésta es una relación de equivalencia y describa las clases de equivalencia, haciendo una lista representativa de cada una de las clases de equivalencia.

Problema especial (el "Scientific American")

Se presenta el problema de cruzar un desierto de 800 millas de largo. Se tiene un vehículo con capacidad para cargar la gasolina necesaria para recorrer 500 millas, incluyendo la reserva que pueda llevarse. ¿Cuál es el mínimo número de viajes requerido para atravesar el desierto?

4.5 SISTEMAS DE NUMERACION Y SISTEMAS NUMERICOS

Un número como concepto para contar es una noción. Un número como elemento de un sistema numérico es algo muy diferente. La integración armónica de estas dos ideas abarca los fundamentos de la aritmética. Para este propósito, es útil reiterar lo que queremos decir con un sistema de numeración y al mismo tiempo dar una definición primitiva e intuitiva de un sistema numérico.

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y un esquema para usar estos símbolos y así dar nombre a todos los números. Hemos examinado algunos de los muchos sistemas de numeración que el hombre ha desarrollado para satisfacer sus necesidades particulares. Estos deben recordarse y los símbolos y esquemas deben reexaminarse ampliamente.

El sistema que ofrece las mayores ventajas desde el punto de vista de la sencillez, de la economía de símbolos para expresar números de cualquier magnitud, y del cálculo es el sistema de numeración con *valores relativos*. Los sistemas de este tipo, con bases distintas, se examinarán con detalle en el capítulo 5.

Por un *sistema numérico* entendemos, desde un punto de vista intuitivo, un *conjunto* de números, *operaciones* definidas en los números del conjunto, y *reglas* que rigen dichas operaciones. Sin operaciones prescritas y reglas específicas que determinan el comportamiento de los elementos bajo estas operaciones, los números no tendrían más interés que el que pueda tener una bolsa de canicas o un puñado de *fichas*. Es en términos del conjunto, las operaciones y las reglas que la estructura del sistema numérico tiene sentido. Si cambiamos el conjunto de números, cambiamos la estructura del sistema. Si cambiamos las reglas o las aumentamos, cambiamos la estructura del sistema numérico. Es con referencia a estas ideas, que examinaremos en detalle los siguientes sistemas numéricos:

El sistema de los números enteros no negativos
El sistema de los enteros
El sistema de los números racionales
El sistema de los números reales.

Vamos a enfocar cada sistema intuitivamente, usando la formación del lector, definiciones precisas, y una cierta cantidad de trabajo por parte del lector para así aumentar la comprensión de la estructura de cada sistema. Pero antes debemos ver cuidadosamente el concepto de "igualdad".

Ejercicios 4.5

1. ¿Qué se entiende por un sistema aditivo de numeración?

2. Discutir el sistema Egipcio de numeración, poniendo de relieve el esquema correspondiente.

3. ¿En qué difiere el sistema Romano del Egipcio?

4. ¿En qué difiere el sistema Griego de numeración del Romano y del Egipcio?

5. En un sistema numérico de valor relativo y de base tres, sea

$0 = n(\emptyset)$.
$1 = n(\{0\})$,
$2 = n(\{0, 1\})$.

(a) ¿Qué número sigue al 20_{tres}?
(b) ¿Qué número sigue al 22_{tres}?
(c) ¿Qué número sigue al 12_{tres}?
(d) ¿Qué número precede al 100_{tres}?
(e) ¿Qué número precede al 20_{tres}?

6. ¿Cuál número es mayor?

(a) $2^{(2^2)}$ ó $(2^2)^2$
(b) $3^{(3^3)}$ ó $(3^3)^3$
(c) $10^{(10^{10})}$ ó $(10^{10})^{10}$

7. (a) ¿En qué se parece el fútbol americano y el soccer?
(b) ¿En qué difieren?
(c) ¿Difieren en su estructura?

8. Al diferenciar entre el juego de damas y el juego de ajedrez, ¿se encuentra una diferencia en su estructura?

4.6 LA RELACION DE IGUALDAD

Una de las fuentes de dificultades al aprender matemáticas es el uso de los símbolos. En realidad, lo opuesto debería ser lo cierto ya que los símbolos son simplemente herramientas lingüísticas usadas para comunicar ideas y técnicas. Más a menudo la dificultad estriba en olvidar el significado que habíamos acordado dar a los símbolos. Otras veces resulta alguna confusión al usar un mismo símbolo en diversas situaciones aparentemente diferentes. La relación de igualdad y el símbolo para la igualdad ha sido anteriormente un ejemplo de esta situación. A menudo "=" es usado en el mismo sentido que si a denota un objeto, concreto o conceptual, y si b también denota un objeto, entonces $a = b$ (se lee "a igual a b") significa que el objeto denotado por a es idéntico al denotado por b. Para los no iniciados, y en particular, en aritmética, la dificultad aparece en el criterio que se tenga para definir *idéntico*.

Definición 4.6. Decimos que dos números, a y b, son iguales y escribimos $a = b$ si y sólo si a y b, son nombres para el mismo número.

Ejemplo 1

Los símbolos $2 + 3$ y 5 son numerales diferentes para el mismo número; por lo tanto, escribimos $2 + 3 = 5$.

Nótese que en la definición anterior hemos definido *igualdad* para *números*. Previamente definimos *igualdad* para *conjuntos* e *igualdad* para *parejas ordenadas*. En cada caso podríamos usar indistintamente el sentido usual de "$=$" o la definición "son nombres para el mismo objeto". Hemos definido la relación de igualdad en cada una de las diferentes situaciones porque en cada caso quisimos recalcar lo que era necesario para determinar si los "objetos" eran o no idénticos. Esto es, quisimos reforzar el criterio de validez de la relación.

Es inmediato para el lector que $2 + 3 = 5$, pero no es inmediato que $2483 \times 17{,}986 = 44{,}659{,}238$. El símbolo "$=$" se usará en otras circunstancias, y en cada caso el significado "son nombres para el mismo objeto" bastará. Sin embargo, usualmente se incluirá un criterio específico para acentuar qué es lo que se debe hacer para determinar si la relación vale o no vale. Prescindiendo del sentido explícito en el que se esté usando el término, la relación de "igualdad" ($=$) es una relación de equivalencia. Esto es:

1. Para toda a, $a = a$ (propiedad reflexiva).
2. Si $a = b$, entonces $b = a$ (propiedad simétrica).
3. Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$ (propiedad transitiva).

Donde definamos explícitamente la relación, pediremos usualmente al estudiante que use ejemplos numéricos para ilustrar estas propiedades. Es muy fácil verificarlas, pero los detalles de la demostración no siempre son evidentes.

Ejercicios 4.6

1. Dar un criterio específico para que "$=$" valga en los siguientes ejemplos:
   (a) A y B son conjuntos: $A = B$.
   (b) (a, b) y (c, d) son parejas ordenadas: $(a, b) = (c, d)$.

2. Sean $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ y $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
   (a) Dar algunos elementos de $W \times N$.
   (b) Definir "$\doteq$" para los elementos de $W \times N$ como sigue:

   $(a, b) \doteq (c, d)$ si y sólo si $ad = bc$.

   Ilustrar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de esta relación por medio de ejemplos numéricos.

3. Definir "$\equiv$" para los elementos de $W \times W$ como sigue:

   $(n, m) \equiv (r, s)$ si y sólo si $n + s = m + r$.

   Ilustrar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de esta relación por medio de ejemplos numéricos.

4. Discutir el significado de la palabra "igual" en la expresión, "Todos los hombres nacen libres e iguales."

5. Hay muchas situaciones en las cuales un nombre en particular es más adecuado que otro para el mismo número. Por ejemplo, al comprar materiales por yardas, $17\frac{1}{3}$ es más apropiado que $52/3$. ¿Puede Ud. pensar en otras circunstancias para las cuales es cierto lo anterior?

4.7 OPERACIONES BINARIAS

La adición de números es una *operación binaria*. La multiplicación de números es también una *operación binaria*. La operación de adición, que indicamos por $+$, asigna a cada *pareja ordenada* de números, digamos $(2, 3)$, un tercer número, $2 + 3$.

$$\underset{\text{pareja ordenada}}{(2, 3)} \quad \underset{\text{operación}}{\xrightarrow{(+)}} \quad \underset{\text{número asignado}}{2 + 3}$$

La multiplicación denotada por $\cdot$, asigna a cada pareja de números, por ejemplo, $(2, 3)$, un tercer número $2 \cdot 3$.

$$\underset{\text{pareja ordenada}}{(2, 3)} \quad \underset{\text{operación}}{\xrightarrow{(\cdot)}} \quad \underset{\text{número asignado}}{2 \cdot 3}$$

El término *binario* se refiere a los *dos* números de la *pareja ordenada*. El término *pareja ordenada* se usa porque no es obvio para un principiante que la suma asigne a $(9, 4)$ el mismo número que a la pareja ordenada $(4, 9)$. En las aplicaciones, sumar 4 al número 9 no siempre es igual que sumar 9 al número 4. (¡Pregunte a un alumno de primer año!)

Regresando al número asignado, debemos notar que ha habido y todavía hay la tendencia a ver a $29 + 33$ como algo que hacer, en vez de considerarlo como un número. Es de hecho un número. Lo mismo es $29 \cdot 33$. Calcular es simplemente encontrar otros nombres para estos números. (Se admite que los símbolos son numerales, pero no vamos a dar demasiada importancia a la distinción entre números y numerales, excepto cuando por razones de claridad sea esencial). Pese a que el lector sabe sumar, multiplicar, restar y dividir, revisaremos las operaciones básicas adición y multiplicación en términos de conjuntos, de tal manera que se le dé sentido a muchas de las ideas previamente aprendidas en aritmética mecánicamente. En otras palabras, las operaciones binarias en sí se convierten en objetos de estudio.

Definición 4.7 Una *operación binaria* denotada por $*$, y definida en un conjunto S, asigna a cada *pareja ordenada* (m, n) elementos de S un elemento *único* que denotaremos por $m * n$.

El que el elemento $m * n$ sea único quiere decir que la operación binaria $*$ asigna a cada pareja ordenada de elementos (m, n) *uno* y *sólo un* elemento. El elemento $m * n$ puede tener otros nombres. Una de las tareas de la aritmética es descubrir procedimientos sistemáticos para encontrar otros nombres de los resultados cuando se trata de operaciones binarias de adición o multiplicación. Esto es, ni más ni menos, el cálculo aritmético.

En algunos pasos involucrados en estos cálculos puede ser más conveniente usar nombres diferentes para el mismo número; por ejemplo, podemos usar $3 + 4$ en vez de 7, ó $5 \cdot 1$ en vez de 5. Esta es una propiedad de la relación de "igualdad", llamada *propiedad de sustitución* de la igualdad. Esta propiedad está implícita en nuestra afirmación de que lo resultante de una operación binaria queda determinado en forma única. Esto se establece en general como sigue:

1. Un número puede ser sustituido por otro igual a él en cualquier expresión.

Como consecuencia de la *propiedad de sustitución* se sigue que:

2. Si números iguales se suman a números iguales, sus sumas son iguales; esto es, si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

3. Si números iguales son multiplicados por números iguales, sus productos son iguales; esto es, si $a = b$ y $c = d$, entonces $ac = bd$.

A menudo vamos a usar esta propiedad en lo sucesivo y nos referiremos a ella diciendo indistintamente "productos o sumas únicas" o bien "la propiedad de sustitución".

El *proceso* de encontrar otros nombres para el resultado de la operación binaria de adición se llama también adición. Análogamente, el proceso de encontrar otro nombre para el resultado de la operación binaria de multiplicación se llama también multiplicación. Esto es, los términos adición y multiplicación se usan tanto para designar el proceso como la operación.* Discutiremos las propiedades que tienen la adición y multiplicación como operaciones, y entonces veremos cómo se usan para dar sentido a la adición y multiplicación como procesos.

4.8 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES BINARIAS

4.8a La propiedad de clausura **

Usaremos el símbolo $\oplus$ para designar a una operación binaria arbitraria definida en un conjunto S. Las letras a, b, c, etc., denotarán elementos de S. La operación específica puede ser la adición o la multiplicación, o alguna otra operación binaria que pueda servirnos como ejemplo. El elemento asignado $(a \oplus b)$ puede o no estar en el conjunto

* Creemos que esta distinción es innecesaria. Las *operaciones* $+$ y $\oplus$ son los "*procesos*" *de asignar* (N. del T.)

** También se dice "*cerradura*".

S. Si el elemento asignado $(a \oplus b)$ es un elemento único del conjunto S para toda pareja ordenada de elementos de S, decimos que la operación binaria $\oplus$ tiene la *propiedad de clausura*. Otra forma de decir esto es diciendo que el conjunto S es cerrado respecto a la operación binaria.

Obsérvese que la propiedad de cerradura depende tanto de la operación binaria como del conjunto. También se debe notar que $(a \oplus b)$ se considera como un elemento y no como algo para hacer.

Ejemplo 1

El conjunto de los números impares no es cerrado bajo la adición pero sí es cerrado bajo la multiplicación.

El conjunto de los números pares es cerrado tanto bajo la adición como bajo la multiplicación.

4.8b La propiedad conmutativa

Decimos que la operación binaria $\oplus$ tiene la *propiedad conmutativa* si asigna a las parejas ordenadas (a, b) y (b, a) el mismo elemento del conjunto S.
Indicamos esto escribiendo

$$a \oplus b = b \oplus a.$$

para toda a y b en S.

Generalmente (a, b) es diferente de (b, a), pero si la operación binaria $\oplus$ es conmutativa, entonces $(a \oplus b)$ y $(b \oplus a)$ son nombres diferentes para el mismo elemento de S.

Divagando momentáneamente, recordemos el significado común asociado a la palabra "conmutador". Una persona que viaja de su casa al trabajo y del trabajo a su casa es un conmutador ya que "cambia de lugar". Cuando dos elementos conmutan con respecto a la operación binaria, "cambian de lugar".

Es muy común hablar de sumar el número 2 al número 9. Anteriormente indicamos que en un sentido concreto esto es diferente a sumar el número 9 al número 2. La propiedad conmutativa para la adición nos dice que es indistinto si sumamos el número 2 al 9 o si sumamos el número 9 al 2; la suma será la misma. Esto es, el orden para sumar números es indiferente.

4.8c La propiedad asociativa

Decimos que la operación binaria $\oplus$ tiene la propiedad asociativa si, dados a, b y c en S, es

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$$

El paréntesis de la expresión inicial $(a \oplus b) \oplus c$ indica que debemos determinar primero el elemento $(a \oplus b)$ y después encontrar $(a \oplus b) \oplus c$.

$$(a, b) \longrightarrow \oplus \longrightarrow (a \oplus b)$$
$$((a \oplus b), c) \longrightarrow \oplus \longrightarrow (a \oplus b) \oplus c.$$

En la expresión $a \oplus (b \oplus c)$, el paréntesis indica que primero debemos encontrar el elemento $(b \oplus c)$ y después $a \oplus (b \oplus c)$.

$$(b, c) \longrightarrow \oplus \longrightarrow (b \oplus c)$$
$$(a, (b \oplus c)) \longrightarrow \oplus \longrightarrow a \oplus (b \oplus c).$$

La propiedad asociativa de la operación binaria $\oplus$ nos permite agrupar los elementos como mejor convenga. De hecho, también nos permite poner o quitar paréntesis:

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c.$$

Estamos interesados en la propiedad asociativa porque hay sistemas asociativos y sistemas no-asociativos en matemáticas y situaciones asociativas o no-asociativas en física.

4.8d La existencia de un elemento idéntico

Decimos que el conjunto S tiene un elemento *idéntico* o *identidad* con respecto a la operación binaria $\oplus$ si existe un elemento del conjunto S, que denotamos por i, tal que para todo elemento a de S, se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$a \oplus i = a \quad \text{y} \quad i \oplus a = a.$$

Los idénticos más familiares son el idéntico con respecto a la suma y el idéntico con respecto a la multiplicación. También se usa el término *elemento unitario* y frecuentemente el idéntico para la multiplicación se llama *unidad*. Sin embargo esto no es cierto para el idéntico con respecto a la adición.

4.8e Inversos

Decimos que un elemento a del conjunto S tiene un *inverso* con respecto a la operación binaria $\oplus$ si existe un elemento en S, que denotamos por a^{-1} tal que la operación binaria le asocia a la pareja a y a^{-1} el elemento idéntico. Esto es, a^{-1} es el inverso de a con respecto a la operación binaria $\oplus$ si

$$a \oplus a^{-1} = i \quad \text{y} \quad a^{-1} \oplus a = i.$$

El inverso con respecto a la multiplicación de números es a veces llamado *recíproco*. El inverso con respecto a la suma de números se llama *negativo* y a veces *opuesto*.

Ejercicios 4.8

En los ejercicios subsiguientes W representa el conjunto de los números enteros no negativos.

1. Sea S el subconjunto de W formado por los elementos de W que pueden escribirse en la forma $2k$, donde k es elemento de W; es decir,

$$S = \{m \mid m = 2k, \text{ y } k \in W\}.$$

(a) ¿Tiene el conjunto S elemento idéntico con respecto a la suma ordinaria?
(b) ¿Tiene la operación binaria de suma la propiedad de cerradura? Ilustre por medio de ejemplos numéricos la respuesta.
(c) ¿Tiene el conjunto S inversos con respecto a la operación binaria suma? Ilustre por medio de ejemplos numéricos la respuesta.
(d) ¿Cumple la operación binaria de suma con la propiedad de conmutatividad?, ¿y de asociatividad? Dé ejemplos numéricos para completar sus respuestas.

2. Sea S el mismo conjunto del ejercicio 1, y la operación binaria sea la multiplicación ordinaria.

(a) ¿Tiene el conjunto S elemento idéntico con respecto a la operación binaria multiplicación?
(b) ¿Cumple la operación binaria de multiplicación con la propiedad de cerradura?
(c) ¿Tiene el conjunto S inversos respecto a la operación binaria de multiplicación?
(d) ¿Tiene la operación binaria de multiplicación la propiedad conmutativa?, ¿y la propiedad asociativa? Ilustre con ejemplos numéricos.

3. Sea Q el subconjunto de W formado por los números que pueden escribirse en la forma $2k + 1$, donde k es elemento de W.

$$Q = \{m \mid m = 2k + 1, \text{ y } k \in W\}.$$

Responder a las mismas preguntas que aparecen en los problemas 1 y 2.

4. Sea T el subconjunto de W que puede escribirse en la forma $5k$, donde k es un elemento de W. Esto es:

$$T = \{m \mid m = 5k, \text{ y } k \in W\}.$$

Responda a las mismas preguntas que aparecen en los problemas 1 y 2.

5. Definamos la operación binaria $\oplus$ en el conjunto W en la siguiente forma. Dados m, n en W, con alguno de ellos distinto de cero, definimos $m \oplus n$ como el número que se obtiene al elevar m a la potencia n. Esto es:

$$m \oplus n = m^n.$$

(a) ¿Qué es $5 \oplus 3$?
(b) ¿Cumple la operación binaria así definida con la propiedad de cerradura?
(c) ¿Qué es $(2 \oplus 3) \oplus 2$?
(d) ¿Qué es $2 \oplus (3 \oplus 2)$?
(e) ¿Qué es $3 \oplus (3 \oplus 3)$?
(f) ¿Qué es $(3 \oplus 3) \oplus 3$?
(g) ¿Qué es $10^{10^{10}}$?
(h) ¿Existe un elemento idéntico con respecto a esta operación binaria?
(i) ¿Cumple la operación binaria con la propiedad conmutativa? Dé un ejemplo numérico para justificar su respuesta.
(j) ¿Cumple la operación binaria $\oplus$ con la propiedad asociativa? Dé un ejemplo numérico para justificar su respuesta.

6. Definamos la operación binaria en el conjunto W como sigue: dados m y n en W, la operación binaria $\ominus$ le asigna a la pareja ordenada (m, n) el elemento que aparece como primera componente. Esto es,

$$m \ominus n = m.$$

(a) ¿Qué es $3 \ominus 7$?
(b) ¿Tiene la operación binaria $\ominus$ la propiedad de cerradura?
(c) ¿Tiene la operación binaria $\ominus$ la propiedad conmutativa? Dé un ejemplo numérico para justificar su respuesta.
(d) La operación binaria $\ominus$ tiene la propiedad asociativa. Dé un ejemplo numérico para justificar su respuesta.

7. Definamos la operación binaria $\asymp$ en el conjunto W de la manera siguiente: dados m y n en W, sea $m \asymp n$ un elemento de W que divida tanto a m como a n. (El número a de W divide al número b de W si existe un número c en W tal que $b = a \cdot c$).

(a) ¿Cumple la operación $\asymp$ con la propiedad de cerradura?
(b) ¿Es $12 \asymp 18$ único?
(c) ¿Satisface esta operación la definición 4.7?

8. Sea $U = \{a, b, c, d\}$ y sea S el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de U. Recuérdese que hay 16 subconjuntos de U incluyendo al conjunto vacío $\emptyset$ y al conjunto universal U. Sea la operación binaria $\cup$ definida en el conjunto S la operación que asigna a una pareja ordenada de conjuntos la unión de ellos. Responder a las siguientes preguntas.

(a) ¿Tiene la operación binaria $\cup$ la propiedad de cerradura? Complete su respuesta con subconjuntos específicos.
(b) ¿Tiene la operación binaria la propiedad conmutativa? Complete su respuesta con subconjuntos específicos.
(c) ¿Tiene la operación binaria la propiedad asociativa? Dé ejemplos que completen su respuesta.
(d) ¿Tiene el conjunto S un elemento idéntico con respecto a la operación de unión?

9. Usando los conjuntos U y S del problema anterior, defina la operación binaria $\cap$ asignando a una pareja ordenada de conjuntos su intersección.

(a) Diga si la operación binaria $\cap$ cumple con las siguientes propiedades y dé ejemplos específicos para completar su respuesta:

i) de cerradura
ii) conmutativa
iii) asociativa

(b) Diga si el conjunto S tiene un elemento idéntico con respecto a la operación binaria de intersección.

4.9 ADICION Y MULTIPLICACION DE LOS NUMEROS ENTEROS NO NEGATIVOS

Definimos adición y multiplicación de los números enteros no negativos de tal manera que las propiedades de cada una como operación binaria sean más naturales.

Una vez establecidas, las llamaremos *leyes*, porque nos guían en cuanto a lo que podemos y lo que no podemos hacer en aritmética y, claro está, en matemáticas. Veremos cómo éstas leyes nos permiten ahorrar trabajo en los cálculos, cómo nos ayudan a encontrar y a entender procedimientos abreviados, así como a dar sentido a muchas de las cosas que antes aprendimos mecánicamente.

4.10 ADICION EN W

Definimos para los números enteros no negativos, y *solamente para ellos*, la *adición* como sigue: Los números enteros no negativos fueron definidos como el cardinal de un conjunto. Así, si a y b son números enteros no negativos, a es el cardinal del conjunto A, y b es el cardinal del conjunto B. Si A y B son ajenos, $a+b$ es el cardinal del conjunto $A \cup B$.

Definición 4.10a. Si $a = n(A)$ y $b = n(B)$, son números enteros no negativos, y $A \cap B = \emptyset$, la operación binaria de adición $(+)$ asigna a la pareja ordenada (a, b) el número $a + b$ que es el cardinal del conjunto $A \cup B$. Escribimos esto así:

$$\text{si } a = n(A), b = n(b), \quad \text{y} \quad A \cap B = \emptyset, \text{ entonces}$$
$$a + b = n(A \cup B).$$

Ejemplo 1

Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{x, y, z, w\}$. Entonces $3 = n(A)$, $4 = n(B)$, y $A \cap B = \emptyset$, $3 + 4 = n(A \cup B) = n(\{a, b, c, x, y, z, w\}) = 7$.

Esta no es una forma práctica de sumar, pero su definición se presta para establecer las propiedades de la operación binaria de suma. Por ejemplo, si A es el conjunto de automóviles autorizados en el Estado de Nueva York en 1966 y B es el conjunto de automóviles autorizados en el Estado de California en el mismo año, no vamos a encontrar $a + b$ contando los elementos de $A \cup B$. Sin embargo, es ésta la forma en la que enseñamos a los niños a sumar números enteros no negativos.

Sin profundizar en los detalles de la demostración, afirmamos que dos conjuntos que pueden ponerse en correspondencia biunívoca tienen el mismo cardinal. En particular, dos conjuntos iguales tienen obviamente el mismo cardinal. Esto es especialmente fácil de probar en conjuntos finitos, que son los que nos interesan. De esto se sigue que la operación binaria de adición, como la hemos definido, tiene la propiedad de cerradura.

Para cualesquiera conjuntos A, B y C tenemos

$$A \cup B = B \cup A.$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$
$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A.$$

En las secciones 4.10 y 4.11, a es el cardinal del conjunto A, b es el cardinal del conjunto B, c es el cardinal del conjunto C, y A, B, C son mutuamente ajenos (ajenos por parejas).

4.10a La ley de cerradura para la suma en los números enteros no negativos

Dados dos elementos a y b del conjunto W, la suma $a + b$ es un elemento único definido en W.

Como se indicó antes, esto solamente expresa que la suma de dos elementos de W es un elemento de W. Usaremos este hecho en una forma interesante cuando comparemos a los números.

4.10b La ley conmutativa para la suma de números enteros no negativos

Para cualesquiera dos elementos a y b en W es siempre cierto que

$$a + b = b + a.$$

Para probar esto escribimos:

$$a + b = n(A) + n(B) = n(A \cup B),$$
$$b + a = n(B) + n(A) = n(B \cup A) = n(A \cup B).$$

Por la propiedad transitiva de la igualdad, resulta que

$$a + b = b + a.$$

Esto es, la adición de números enteros no negativos es conmutativa.

4.10c La ley asociativa para la adición de números enteros no negativos

Dados tres elementos arbitrarios a, b, y c en W,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Para probar esto escribimos

$$(a + b) + c = n(A \cup B) + n(C) = n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup B \cup C).$$
$$a + (b + c) = n(A) + n(B \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) = n(A \cup B \cup C).$$

Por la propiedad transitiva de la igualdad, resulta que

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Esto es, la adición de números enteros no negativos es asociativa.

Aplicando repetidamente las leyes conmutativa y asociativa podemos rearreglar y reagrupar los términos de una suma sin cambiarla. Esto es, con la ley conmutativa podemos cambiar el orden de los números en una suma, y por la ley asociativa podemos agrupar los números de cualquier manera que haga la adición como *proceso* más sencilla, sin por esto cambiar el resultado final.

4.10d La identidad para la adición en los números enteros no negativos

Existe un elemento único en W, el 0, tal que para cualquier elemento a en W es

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Para probar esto escribimos

$$a + 0 = n(A) + n(\emptyset) = n(A \cup \emptyset) = n(A) = a.$$

Entonces, por la propiedad transitiva de la igualdad, tenemos que para todo número a en W es

$$a + 0 = a.$$

Esto es, *cero* es la identidad aditiva.

Históricamente, el símbolo 0 tenía el papel de guardar el lugar en los sistemas primitivos de numeración de valor relativo. En nuestra discusión fue introducido como el cardinal del conjunto vacío. Como elemento del conjunto W, es la identidad para la operación binaria de suma. Es aquel elemento del sistema numérico que al sumarlo a cualquier otro número da una suma que es idéntica a dicho elemento. Así, $7 + 0 = 7$. A todos les resulta familiar este hecho. Sin embargo, no todos están familiarizados con la forma de usar este hecho, en beneficio de la aritmética y las matemáticas. Algunos ejemplos se presentarán después.

Ejercicios 4.10d

En los siguientes ejercicios se está haciendo uso de las leyes conmutativa y asociativa. Diga cuál de ellas está siendo usada en cada ejemplo.

1. $2 + 3 = 3 + 2$
2. $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$
3. $a + b = b + a$
4. $x + (y + z) = (x + y) + z$
5. $(a + b) + c = (b + a) + c$
6. $2 + 3 + 5 + 7 = (2 + 3) + (5 + 7)$
7. $2 + (a + 3) + b = (2 + a) + (3 + b)$
8. Agrupe los números 2, 3, 5, y 8 como una suma en diferentes formas, efectúe la suma y compare resultados.
9. Diga la diferencia entre el uso cardinal del número 0 y el 0 como elemento de un sistema numérico.
10. Use la definición de identidad aditiva para probar que existe un solo elemento en W que es identidad aditiva, que es precisamente el 0.
11. Sean $A = \{u, v, w\}$, $B = \{a, a, b, b, c\}$, y $C = \{e, i, o, k\}$. Verifique las siguientes igualdades:

    (a) $A \cup B = B \cup A$
    (b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
    (c) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

4.11 MULTIPLICACION EN W

Muchos de nosotros hemos aprendido la multiplicación de los números enteros no negativos como una suma repetida. Este es un enfoque válido y probado. Por ejemplo

$$4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20.$$

Este enfoque es consistente con una ortodoxa convención matemática. Es común escribir en lugar de la expresión $a + a + a + a$ la expresión simplificada $4 \cdot a$, o simplemente $4a$. En el caso especial en que a sea un número, esto no es ni más ni menos que multiplicar.

Definición 4.11a. Si a y b son números enteros no negativos, la operación binaria de multiplicación asigna a la pareja ordenada (a, b) el número entero $a \cdot b$, o simplemente ab, que es otro nombre para la suma $b + b + b + \ldots$ hasta tener a términos de b. O sea,

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + b + \ldots + b}_{\text{(a términos)}}.$$

Por otra parte, guardando el enfoque de teoría de conjuntos para la aritmética, podemos definir multiplicación de números enteros no negativos con el lenguaje de conjuntos, como lo hicimos con la adición.

Ejemplo 1

Sean $A = \{1, 3, 9\}$ y $B = \{J, K, M, P\}$. Entonces,

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (1, J), (1, K), (1, M), (1, P) \\ (3, J), (3, K), (3, M), (3, P) \\ (9, J), (9, K), (9, M), (9, P) \end{Bmatrix}$$

$n(A) = 3$,
$n(B) = 4$,
$3 \cdot 4 = n(A) \cdot n(B) = n(A \times B) = 12$.

Definición 4.11b. Si a y b son números enteros no negativos, la operación binaria de multiplicación asigna a la pareja ordenada (a, b) el entero no negativo $a \cdot b$ (o simplemente ab), que es otro nombre para el cardinal del conjunto $A \times B$, donde

$a = n(A)$ y $b = n(B)$. Esto es, para todo a y b en W,

$$a \cdot b = n(A) \cdot n(B) = n(A \times B).$$

Ninguno de los dos enfoques (adición repetida y producto cartesiano) es universalmente aceptado. Sin duda, no sería razonable esperar que se multiplicara 789×987 formando una suma de 789 términos de 987, al igual que no se espera que alguien cuente los elementos del conjunto $A \times B$ donde $789 = n(A)$ y $987 = n(B)$. Argumentos justos pueden ser propuestos por los defensores de cada procedimiento para la definición de multiplicación de números enteros no negativos. Ningún enfoque queda completamente exento de críticas severas por parte de algunas fuentes autorizadas. Con el objeto de proporcionar la más amplia información posible al futuro maestro, discutiremos ambos enfoques con detalle. Puesto que no hay manera de saber a cuál enfoque se le dará mayor importancia en el programa de estudios de una escuela en particular, la familiaridad con ambos es deseable y será de gran ayuda.

A los niños se les puede llevar a descubrir que 3×6 es lo mismo que 6×3, $4 \times 7 = 7 \times 4$, y así sucesivamente. Aún se les puede llevar a generalizar. Esto es, pueden ser guiados a concluir que, en general, cuando dos números se multiplican es indiferente si se multiplica el primero por el segundo o bien el segundo por el primero. Esto es, que para todo a y b en W es

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

No debe esperarse que el niño pueda probar este hecho o aún entender una demostración. Este hecho y otros deben plantearse en forma razonable y accesible. Las dos definiciones de multiplicación de números enteros no negativos presentadas ofrecen dos formas de hacer accesibles las propiedades de multiplicación.

4.11a El enfoque de la adición repetida

La definición de adición repetida para la multiplicación de números naturales tiene la ventaja histórica de ser más familiar para el profesor común, lo que es un factor importante para la efectividad de su enseñanza. Además, esta definición requiere menos información y es menos elaborada. Finalmente, es el método al cual se recurre con mayor frecuencia cuando se aprenden los hechos elementales de la multiplicación. Esto será sobrepasado cuando trabajemos con aritméticas que tienen otras bases. (Véase el capítulo 5).

4.11b El enfoque del producto cartesiano

Este enfoque tiene la ventaja de que una vez que se han establecido ciertos hechos sobre productos Cartesianos las propiedades de multiplicación se deducen fácil y razonablemente. Esto no implica que este enfoque sea más simple que el de adición repetida. Simplemente, las dificultades lógicas ocurren en diferentes formas y lugar.

Las siguientes propiedades de los productos Cartesianos pueden verificarse fácilmente para conjuntos finitos A, B y C que tengan pocos elementos. También son ciertas para cualesquiera conjuntos A, B y C.

1. Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $A \times B$ y $B \times A$. Entonces,

$$n(A \times B) = n(B \times A).$$

2. Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $(A \times B) \times C$ y los de $A \times (B \times C)$. Es decir,

$$n[(A \times B) \times C] = n[A \times (B \times C)].$$

3. Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\{a\} \times A$ y A. Entonces,

$$n(\{a\} \times A) = n(A).$$

4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
5. $\emptyset \times A = \emptyset$ para cualquier conjunto A.

Ejercicios 4.11b

Sean $A = \{x, y, z\}$, $B = \{0, 3\}$ y $C = \{i, j, k\}$.

1. Exhiba una correspondencia "uno a uno" entre los conjuntos $A \times B$ y $B \times A$.

2. Exhiba una correspondencia "1-a-1" entre los conjuntos $(A \times B) \times C$ y $A \times (B \times C)$.

3. Exhiba una correspondencia "1-a-1" entre el conjunto A y el conjunto $\{e\} \times A$.

4. Demuestre que la relación $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ es válida para los conjuntos A, B y C.

5. Demuestre que $\emptyset \times A = \emptyset$.

4.11c La ley de clausura

El hecho de que el producto de dos números enteros no negativos sea un elemento único de W es consecuencia inmediata de la definición.

4.11d La ley conmutativa para la multiplicación

Si a y b son números enteros no negativos, entonces es siempre cierto que

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Esto es consecuencia de la proposición 1 sobre productos Cartesianos.

$$a \cdot b = n(A) \cdot n(B) = n(A \times B) = n(B \times A) = b \cdot a.$$

4.11e La ley asociativa para la multiplicación

Ya hemos usado paréntesis para indicar parejas ordenadas y, en general, conjuntos ordenados. Los peréntesis también se usan para indicar números tales como $(2 \cdot 4)$ y $(4 + 9)$. Si tales expresiones aparecen con otras operaciones o con otros paréntesis, se entiende que las operaciones que están en los paréntesis interiores deben efectuarse primero.

Ejemplos

$$3 \cdot (5 + 6) = 3 \cdot 11 = 33.$$

$$2 + (3 \cdot 4) = 2 + 12 = 14.$$

$$5[3 + 2(3 + 4)] = 5(3 + 2 \cdot 7) = 5(3 + 14) = 5 \cdot 17 = 85.$$

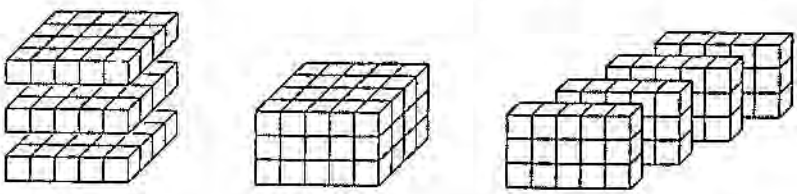
$$(2 \cdot 4) + (2 \cdot 6) = 8 + 12 = 20.$$

Si a, b, y c denotan números enteros no negativos, siempre es cierto que

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

La propiedad asociativa para la multiplicación de números enteros no negativos es consecuencia del aserto 2 acerca de productos cartesianos.

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= n(A) \cdot n(B \times C) = n[A \times (B \times C)] \\ &= n[(A \times B) \times C] = n(A \times B) \cdot n(C) = (a \cdot b) \cdot c. \end{aligned}$$



3·(5·4) 3·5·4 (3·5)·4

Figura 1

El que la multiplicación de los enteros no negativos satisfaga la ley asociativa significa que en un producto de más de dos factores es indistinto dónde se coloquen los paréntesis. En el producto los paréntesis pueden quitarse o insertarse. Esto es simplemente otra forma de decir que indistintamente de cómo se *agrupen* los factores de un producto el resultado es el mismo.

Ejemplo 1

Sean x, y, y z números arbitrarios. Entonces,

$$(2x) \cdot (y \cdot 3z) = 2xy3z = (2xy) \cdot (3z) = (2x)(y3) \cdot z.$$

Una combinación de las leyes asociativa y conmutativa para la multiplicación nos permite efectuar las siguientes transformaciones: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$. En particular, podemos escribir $= a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (c \cdot b) = (a \cdot c) \cdot b = (c \cdot a) \cdot b$, etc., y tiene sentido aunque la operación de multiplicación sea una operación *binaria*.

Ejercicios 4.11e

1. En los siguientes ejemplos se aplican o bien la ley conmutativa o bien la ley asociativa para la multiplicación. Indicar cuál ley se ejemplifica en cada caso.

(a) $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$. (b) $(5 \cdot 4) \cdot 8 = 5 \cdot (4 \cdot 8)$
(c) $(5 \cdot 4) \cdot 8 = 8 \cdot (5 \cdot 4)$ (d) $a \cdot b = b \cdot a$
(e) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (f) $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 = (3 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 4)$

2. Agrupe los números 3, 5, 7, y 4 como producto en varias formas diferentes; efectúe la multiplicación y compare resultados.

3. En los siguientes ejemplos se aplica alguna de las leyes para la multiplicación o la adición. Identifíquela en cada caso:

(a) $5 \cdot (3 + 7) = 5 \cdot (7 + 3)$
(b) $5 \cdot 3 + 2 = 3 \cdot 5 + 2$
(c) $5 \cdot (3 + 2) = (3 + 2) \cdot 5$
(d) $a \cdot b + a \cdot c = b \cdot a + c \cdot a$
(e) $a \cdot (b \cdot c) = (b \cdot c) \cdot a$
(f) $(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot (d + c)$
(g) $3 \cdot (4 + 5 + 6) = 3 \cdot (4 + (5 + 6))$
(h) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$

4.11f El elemento idéntico multiplicativo

El número 1 juega un papel especial como miembro de un sistema numérico. Es aquel elemento del sistema que multiplicado por cualquier número da un resultado que es idéntico con dicho número. Se le llama *elemento idéntico multiplicativo*. Esto es, para todo entero no negativo a,

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

No sólo tenemos que $1 \cdot a = a$ ó $a \cdot 1 = a$, sino que por la propiedad de simetría de la igualdad tenemos también que $a = 1 \cdot a$ ó $a = a \cdot 1$. Este hecho importante se pasa por alto a veces y es la fuente de algunos errores que se cometen comúnmente en aritmética y álgebra.

Para probar que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ usamos el aserto 3 sobre productos cartesianos. Así,

$$1 \cdot a = n(\{e\}) \cdot n(A) = n(\{e\} \times A) = n(A) = a.$$

4.11g La ley distributiva

En lo que llevamos expuesto hasta ahora hemos considerado dos operaciones binarias, adición y multiplicación, definidas en el conjunto W. La ley distributiva se refiere al comportamiento de estas dos operaciones cuando aparecen combinadas en una operación aritmética. Para ilustrar esto, considérese el siguiente cuadro de elementos X:

X X X	X X X X X
X X X	X X X X X
X X X	X X X X X

Si deseamos expresar el número total de X podemos hacerlo en dos formas distintas. Tenemos 3 X en cada una de las $(3 + 5)$ columnas, es decir $3\ (3 + 5)\ X$, lo que es igual a 24 X. También tenemos 3 renglones de 3 X y 3 renglones de 5 X, es decir $(3 \cdot 3 + 3 \cdot 5)\ X$. Pero esto también es igual a 24 X. Esto nos dice que:

$$3(3 + 5) = (3 \cdot 3) + (3 \cdot 5).$$

Efectuando primero las operaciones dentro del paréntesis en la expresión $3(3 + 5)$, estamos sumando y después multiplicando. En la expresión $(3 \cdot 3) + (3 \cdot 5)$ primero multiplicamos y después sumamos. Puesto que en nuestro ejemplo el resultado es el mismo en cada caso, es indiferente si sumamos primero y después multiplicamos o bien si primero multiplicamos y después sumamos.

En general, si a, b, y c son elementos de W, siempre es cierto que

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Esta es la *ley distributiva*, y decimos que la multiplicación es distributiva con respecto a la adición en W.

Esta ley puede fundamentarse haciendo uso de la proposición 4 referente a productos cartesianos. Dados A, B y C,

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

En el caso que B y C sean ajenos tenemos que

$$n[A \times (B \cup C)] = n[(A \times B) \cup (A \times C)].$$

Si $a = n(A), b = n(B)$, y $c = n(C)$, tenemos en el lado izquierdo de la igualdad anterior:

$$n[A \times (B \cup C)] = n(A) \cdot [n(B \cup C)] = n(A)[n(B) +$$
$$n(C)] = a(b + c);$$

y en el derecho:

$$n[(A \times B) \cup (A \times C)] = n(A \times B) + n(A \times C) =$$
$$n(A) \cdot n(B) + n(A) \cdot n(C).$$

Esto es,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ o}$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

Ejemplo 1

1. $2(3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$
2. $2(3 + x) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot x = 6 + 2x.$
3. $a(1 + b) = a \cdot 1 + a \cdot b = a + ab.$

Recordando que la relación de igualdad tiene la propiedad de ser simétrica, tenemos como consecuencia que la ley distributiva puede escribirse como sigue:

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c).$$

Esta forma nos recuerda que mucho de la factorización en álgebra es simplemente una aplicación de la ley distributiva. Así, por ejemplo,

$$2 \cdot x + a \cdot x = (2 + a)x.$$

4.11h Propiedades del cero en la multiplicación

El papel especial que tiene el cero como número es particularmente molesto para muchos maestros. Hay todavía muchas personas que no consideran al cero como un número. Aun cuando no tienen problemas con el 0 en las situaciones que implican una adición o sustracción, el pedirles que multipliquen por 0 ó que dividan entre cero da lugar a toda clase de respuestas insensatas.

Para cualquier número a,

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0.$$

Conceptualmente, $3 \cdot 0$ tiene más sentido que $0 \cdot 3$. En términos del aserto 5 sobre productos cartesianos, esta propiedad del cero se demuestra fácilmente. Tenemos que

$$0 \cdot a = n(\emptyset) \cdot n(A) = n(\emptyset \times A) = n(\emptyset) = 0.$$

En el caso particular en que $a = 0$ tenemos

$$0 \cdot 0 = 0.$$

Ejercicios 4.11h

Aplique la ley distributiva para dar otros nombres a los siguientes números:

1. $a(b + 2)$
2. $2a + ac$
3. $23(2 + 1)$
4. $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2$
5. $30 \cdot 10 + 2 \cdot 10$
6. $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$
7. $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d$
8. $(a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b$
9. $x(y + 2)$
10. $2x + bx$
11. $2ax + 3x$
12. $2ax + 5a$
13. $3 \cdot (10 \cdot 10) + 2 \cdot 10$
14. $10 \cdot 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10$
15. $2xab + a$
16. $(20 + 3)2$

Suponga que las operaciones simbolizadas por Δ y $\oplus$ están definidas en un conjunto S, y usando a, b y c como elementos de S, simbolice lo siguiente:

17. Δ es conmutativa
18. $\oplus$ es conmutativa
19. Δ es asociativa
20. $\oplus$ es asociativa
21. Δ es distributiva con respecto a $\oplus$.

4.12 EL SISTEMA DE LOS NUMEROS ENTEROS NO NEGATIVOS

Resumamos nuestras proposiciones anteriores en una definición formal.

Definición 4.12. Al hablar del sistema de los enteros no negativos nos referimos al conjunto

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

a las operaciones binarias, adición $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$, y además a las siguientes leyes: dados m, n, y k en W tenemos que valen:

Leyes de clausura

1. Hay un elemento único en W que resulta de sumar $m + n$.
2. Hay un elemento único en W que resulta de multiplicar $m \cdot n$.

Leyes asociativas

3. $m + (n + k) = (m + n) + k$.
4. $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$.

Leyes conmutativas

5. $m + n = n + m$.
6. $m \cdot n = n \cdot m$.

Ley distributiva

7. $m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k$.

Identidades

8. Hay un elemento 0 único, tal que para toda m en W es $m + 0 = 0 + m = m$.
9. Hay un elemento 1 único, tal que para toda m en W es $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$.

Ejercicios 4.12

1. Demuestre que el elemento idéntico multiplicativo es único. (Sugerencia: suponga que Ī es cualquier otro idéntico multiplicativo).

2. Si suponemos que $m \cdot 0 = 0$, demuestre que $(m + 1) \cdot 0 = 0$. Establezca la ley usada en cada paso.

3. $1 \cdot 5 = 5$ porque 1 es el idéntico multiplicativo. Hay ocasiones en las que también escribimos $5 = 1 \cdot 5$. Dé un ejemplo de una situación en la cual convenga usar $1 \cdot 5$ en vez de 5. (Sugerencias: escribe $5 + 10m$ como múltiplo de 5.)

4. (a) ¿Se puede escribir el 4 como un múltiplo de 0?
   (b) ¿Se puede escribir el 0 como múltiplo de 4?
   Explique el por qué de su respuesta.

5. (a) ¿Es cierto que 5 "divide" a 0? Explicar.
   (b) ¿Es cierto que 0 "divide" a 5? Explicar.

6. Distinga entre el 0 y el 1 como números cardinales y como elementos de un sistema numérico.

7. Demuestre que $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$, y justifique cada paso.

8. Demuestre que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y justifique cada paso.

9. ¿Qué número es mayor?
   (a) $(2^3)^0$ ó $2^{(3^0)}$
   (b) $(2^0)^3$ ó $2^{(0^3)}$

4.13 HECHOS ELEMENTALES DE LA ADICION

A continuación se verá cómo combinar dos (o más) cualesquiera números enteros no negativos usando las propiedades elementales del

Tabla 1. Propiedades elementales de la adición

		Segundo elemento de par ordenado									
	+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Primer	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
elemento	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
del	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
par	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ordenado	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

sistema numérico y las propiedades elementales de la adición. Los hechos elementales involucran solamente aquellas sumas cuyas componentes son números desde 0 hasta 9. Recuerde cómo se construyen tablas para el producto cartesiano. Podemos seguir un patrón similar en la construcción de una tabla de las propiedades elementales de la adición.

Por supuesto, hay familiaridad con esta combinación. La presentación de esta tabla sirve simplemente para dar un ejemplo de tales tablas.

El símbolo + que aparece en la esquina superior izquierda indica que estamos tratando con la operación de adición. La columna de la izquierda designa al primer elemento de la pareja ordenada, y el primer renglón designa al segundo elemento del par ordenado. Por ejemplo, para encontrar otro nombre para el número $(6 + 2)$ que la adición asigna al par ordenado $(6, 2)$, encuéntrese el renglón que empieza con "6" y la columna encabezada por "2". En el cuadrado donde se encuentran este renglón con esta columna encontramos el número 8. Esta tabla nos dice que:

$(6, 2)$	$\xrightarrow{+}$	$(6 + 2)$	$=$	8
al par ordenado $(6, 2)$	La operación "adición"	le asigna el número $(6 + 2)$		el cual tiene otro nombre más usual que es "8"

Más adelante, cuando trabajemos con sistemas con los cuales no estamos familiarizados, veremos que estas tablas son indispensables. Trabajaremos con dichos sistemas para que el lector aprecie la importancia que tienen estos hechos en la enseñanza de la aritmética.

4.14 HECHOS ELEMENTALES DE LA MULTIPLICACION

Las propiedades elementales de la multiplicación involucran solamente aquellos productos en los que las componentes del par ordenado son números desde el 1 hasta el 9. Recuérdese como construimos la tabla de propiedades elementales de la adición. Podemos seguir un proceso similar para la multiplicación.

Presentamos la Tabla 2 como una ayuda para señalar algunas propiedades importantes de la multiplicación.

El símbolo · que aparece en la esquina superior izquierda indica que estamos tratando con la operación de multiplicación. La columna de la izquierda designa al primer elemento de los pares ordenados. El renglón que aparece arriba designa al segundo elemento de los pares

Tabla 2. Propiedades elementales de la multiplicación

	·	Segundo elemento del par ordenado								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Primer	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
elemento	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
del	5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
par	6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
ordenado	7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
	8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
	9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

ordenados. Para encontrar el "nombre típico" de los números que se asignan a los pares ordenados a través de la operación multiplicación se procede de igual manera que en la tabla de adición. Al par ordenado (3, 5) la operación · le asigna el número (3 · 5), que al examinar la tabla vemos que es el número 15.

(3, 5)	$\xrightarrow{\cdot}$	(3 · 5)	=	15
al par ordenado (3, 5)	la operación "multiplicación"	le asigna el número (3 · 5)		el cual tiene el nombre estándar "15"

4.15 LOS ALGORITMOS

Un algoritmo es simplemente un procedimiento para efectuar una operación tal como la adición o la multiplicación. Siempre que efectuemos operaciones con dígitos debemos recordar los datos necesarios o usar una tabla de propiedades elementales. Sin embargo, cuando efectuamos cálculos que incluyen numerales de varios dígitos usamos un algoritmo. Los algoritmos nos permiten realizar cálculos complicados usando las propiedades elementales y conociendo el procedimiento. El sistema de valor relativo o de posición exponencial de numeración y el hecho de que los números son elementos de un sistema numérico hacen posible el algoritmo. Los algoritmos que usamos actualmente no son los únicos posibles. Los algoritmos de la aritmética han cambiado y posiblemente seguirán cambiando. El mejoramiento de los algoritmos llevará a un uso más eficiente del sistema.

Observaremos que los algoritmos presentados son procedimientos para nombrar los números determinados por las operaciones binarias del sistema de números enteros no negativos, y no dependen de la base del sistema sino simplemente del hecho de que se trata de un sistema de valor relativo. Esto implica que los procedimientos usados servirán tanto en base cinco como en base doce o dos, así como en base diez o sistema decimal.

4.15a El algoritmo de la adición

Primero, usando las propiedades de nuestro sistema de números enteros no negativos y la tabla de propiedades elementales demostraremos que $23 + 46 = 69$. Compararemos entonces nuestro algoritmo completo con nuestro procedimiento usual.

(a) $23 + 46 = (2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) + (4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0)$ por nuestro sistema de numeración.

(b) $(2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) + (4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) = 2 \cdot 10^1 + (3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1) + 6 \cdot 10^0$ por la ley asociativa de la adición.

(c) $2 \cdot 10^1 + (3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1) + 6 \cdot 10^0 = 2 \cdot 10^1 + (4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^0)$ por la ley conmutativa de la adición.

(d) $2 \cdot 10^1 + (4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) + 6 \cdot 10^0 = (2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^1) + (3 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^0)$ por la ley asociativa de la adición.

(e) $(2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^1) + (3 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^0) = (2 + 4)10^1 + (3 + 6)10^0$ por la ley distributiva.

(f) $(2 + 4)10^1 + (3 + 6)10^0 = 6 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$ por la tabla de hechos elementales.

(g) $6 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 = 69$ por nuestro sistema de numeración.

(h) $23 + 46 = 69$ por la propiedad transitiva de la igualdad.

En el procedimiento usual el problema se escribe en la forma

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{46} \end{array}$$

Lo pasos (a), (b), (c), (d) y (e) del algoritmo completo muestran que está justificado el método de trabajo en el cual efectuamos la adición por columnas.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{46} \\ 69 \end{array}$$

Los pasos (f), (g) y (h) indican la ejecución de la adición.

Veamos otro ejemplo que incluya el "llevamos tantos" y cómo esto aparece en el algoritmo completo. Consideremos el problema $46 + 38$.

(a)	$46 + 38 = (4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) + (3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0)$	Sistema de numeración.
(b)	$= 4 \cdot 10^1 + (6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1) + 8 \cdot 10^0$	ley asociativa de la adición.
(c)	$= 4 \cdot 10^1 + (3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) + 8 \cdot 10^0$	ley conmutativa de la adición.
(d)	$= (4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^1) + (6 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^0)$	ley asociativa de la adición.
(e)	$= (4 + 3)10^1 + (6 + 8)10^0$	ley distributiva de la adición.
(f)	$= 7 \cdot 10^1 + 14 \cdot 10^0$	Tabla de propiedades elementales.
(g)	$= 7 \cdot 10^1 + (1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0)10^0$	Sistema de numeración.
(h)	$= 7 \cdot 10^1 + (1 \cdot 10^1)10^0 + (4 \cdot 10^0)10^0$	Ley distributiva.
(i)	$= 7 \cdot 10^1 + 1(10^1 \cdot 10^0) + 4(10^0 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación.
(j)	$= 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$	ley de exponentes.
(k)	$= (7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1) + 4 \cdot 10^0$	ley asociativa de la adición.
(l)	$= (7 + 1)10^1 + 4 \cdot 10^0$	ley distributiva.
(m)	$= 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$	Tabla de propiedades elementales.
(n)	$= 84$	Sistema de numeración.
(o)	$46 + 38 = 84$	Propiedad transitiva de la igualdad.

En este algoritmo los cinco primeros pasos justifican la disposición en columna del problema para la adición, es decir, la adición en columna puede justificarse diciendo que se han acomodado las potencias de la base diez de tal forma que podamos aplicar la ley distributiva. El paso (f) es una adición indicada, y si esto se escribe como adición en columna debe aparecer como sigue:

$$\begin{array}{r} 46 \\ \underline{38} \\ 14 \\ 70 \end{array}$$

Los pasos (g) hasta el (k) justifican el "llevamos tanto", y esto usualmente se escribe como

$$\begin{array}{lr} \text{llevamos} & 1 \\ & 46 \\ & \underline{38} \\ & 4 \end{array}$$

Los pasos (e) hasta (o) completan el cálculo y justifican nuestra forma de escribir la suma en columna con el "llevamos" apropiado.

El algoritmo de la adición se aplica a sumas de más de dos números. Para escribir los algoritmos completos en estos problemas sencillamente extendemos las ideas usadas en problemas simples.

Deseamos destacar el hecho de que el algoritmo de la adición está basado en las propiedades elementales y en las propiedades de nuestro sistema de números enteros no negativos. Cada paso que damos para efectuar un cálculo puede ser justificado en función de uno o más de los conceptos fundamentales.

4.15b El algoritmo de la multiplicación

Usando las tablas de propiedades elementales y las propiedades de nuestro sistema de números enteros no negativos demostraremos que $(28)(3) = 84$.

(a)	$(28)(3) = (2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0)(3 \cdot 10^0)$	Sistema de numeración.
(b)	$= (2 \cdot 10^1)(3 \cdot 10^0) + (8 \cdot 10^0)(3 \cdot 10^0)$	Ley distributiva.
(c)	$= 2(10^1 \cdot 3)10^0 + 8(10^0 \cdot 3)10^0$	Ley asociativa de la multiplicación.
(d)	$= 2(3 \cdot 10^1)10^0 + 8(3 \cdot 10^0)10^0$	Ley conmutativa de la multiplicación.
(e)	$= (2 \cdot 3)(10^1 \cdot 10^0) + (8 \cdot 3)(10^0 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación.
(f)	$= (2 \cdot 3)10^1 + (8 \cdot 3)10^0$	Ley de exponentes.
(g)	$= 6 \cdot 10^1 + 24 \cdot 10^0$	Tabla (multiplicación).
(h)	$= 6 \cdot 10^1 + (2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0)10^0$	Sistema de numeración.
(i)	$= 6 \cdot 10^1 + (2 \cdot 10^1)10^0 + 4(10^0 \cdot 10^0)$	Ley distributiva.
(j)	$= 6 \cdot 10^1 + 2(10^1 \cdot 10^0) + 4(10^0 \cdot 10)^0$	Ley asociativa de la multiplicación.
(k)	$= 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$	Ley de exponentes.
(l)	$= (6 + 2)10^1 + 4 \cdot 10^0$	Ley distributiva.
(m)	$= 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$	Tabla (adición).
(n)	$= 84$	Sistema de numeración.

(o) $(28)(3) = 84$ — Propiedad transitiva de la igualdad.

El paso (a) se abrevia así:

$$(20 + 8)3.$$

La ley distributiva (paso b) nos permite multiplicar primero 20 por 3 y 8 por 3 y después sumar:

$$20 \cdot 3 + 8 \cdot 3.$$

Los pasos (f) hasta (l) muestran por qué multiplicamos 2 por 3 primero y después aumentamos el 2 que llevábamos de la multiplicación anterior. Esto podríamos escribirlo en la forma siguiente, la cual es sugestiva de lo que realmente se hace:

$$\begin{array}{r} 28 \\ \underline{3} \\ 24 \\ \underline{60} \\ 84 \end{array}$$

La práctica usual para encontrar productos es un procedimiento más abreviado, como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Lo que en realidad hacemos al multiplicar 834 por 326 es sumar los siguientes productos:

(a) $(800 + 30 + 4)6 +$
(b) $(800 + 30 + 4)20 +$
(c) $(800 + 30 + 4)300$

Esto se obtiene al aplicar varias de las leyes básicas. Si efectuáramos la adición indicada como adición en columna, se tendría lo que aparece en I más abajo. II y III indican los pasos que se omiten en el procedimiento usual.

	I	II	III
	834	834	834
	326	326	326
(a)	24		
	180		
	4800	5004	5004
(b)	80		
	600		
	16000	16680	1668
(c)	1200		
	9000		
	240000	250200	2502
	271884	271884	271884

Obsérvese que en III se deja un "espacio" a la derecha de 1668 porque estamos multiplicando por 20, no por 2. Se dejan dos espacios a la derecha de 2502 porque estamos multiplicando por 300, no por 3.

4.16 RELACIONES DE ORDEN PARA LOS NUMEROS ENTEROS NO NEGATIVOS NATURALES Y EL CERO

En gran parte de la aritmética y, de hecho, en gran parte de nuestra vida diaria nos interesamos por conceptos como más grande, más pequeño, más costoso, más útil, y así sucesivamente. En los ejemplos sencillos estas comparaciones son fáciles de hacer, pero encontramos situaciones donde se necesita razonar un poco antes de que podamos llegar a una conclusión.

Ejemplo 1

El símbolo π indica el número que expresa la proporción entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. En los cálculos que se hacen con este símbolo se usa 22/7 en algunos casos y en otros 3.1416. ¿Cómo comparamos estos dos números? ¿Son iguales? Si no, ¿cuál es el mayor y cuál es el menor?

No intentamos responder a estas preguntas en este momento. Es nuestra intención precisar ciertos conceptos que permitan posteriormente al lector contestar estas preguntas y suministrar razones fundamentadas para justificar sus respuestas. Empezaremos por precisar el significado de "menor que" para números enteros no negativos.

Definimos la relación "menor que" (indicada por $<$) en términos de correspondencia "uno a uno" para conjuntos. Hicimos notar que los conceptos "más que" y "menos que" pueden haber tenido significado en las civilizaciones antiguas, aún en ausencia de sistemas para contar. Los niños, aún antes de entrar a la escuela, comprenden estos conceptos en función, por ejemplo, de pedazos de dulces. Su idea de repartir en forma equitativa aparece cuando dicen "uno para ti y uno para mí", pero esto es la relación de coordinación o correspondencia "uno a uno". Si el "uno para ti y uno para mí" termina mientras "alguien" todavía tiene dulces sin repartir, el concepto "menor que" tiene un significado dramático para el otro.

Definición 4.16. Si A y B son conjuntos finitos y A puede ser coordinado con un subconjunto *propio* de B en una correspondecia "uno a uno", decimos que el número cardinal $n(A)$ del conjunto A es *menor que* el número cardinal $n(B)$ del conjunto B.

Escribimos esto así:

$$n(A) < n(B).$$

También podemos leer esto como "$n(B)$ es mayor que $n(A)$". Lo escribimos así:

$$n(B) > n(A).$$

Ejemplo 2

El número cardinal del conjunto $\{a, b, c\}$ es 3. El número cardinal del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ es 5. El conjunto $\{a, b, c\}$ puede ser coordinado con un subconjunto propio del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y por lo tanto $3 < 5$. El número cardinal del conjunto vacío es 0. El número cardinal del conjunto $\{1\}$ es 1. Puesto que el conjunto vacío es un subconjunto de $\{1\}$, tenemos $0 < 1$.

Es trivial que la relación "menor que" en el conjunto de los números enteros no negativos es una relación transitiva. A una relación transitiva se le llama un *orden*. No es suficiente que una relación de orden sea transitiva para hacer comparaciones. Debe también ser lineal. Una relación de orden es lineal si satisface la *ley de la tricotomía*.

4.16a La ley de la tricotomía

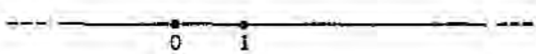
Definición 4.16a. La ley de la tricotomía. Si m y n son dos números enteros no negativos, una y solamente una de las siguientes relaciones se cumple:

1. $m = n$.
2. $m < n$.
3. $m > n$.

La palabra "tricotomía" sugiere que hay tres posibilidades. La palabra "lineal" sugiere el concepto de una "línea numérica".

Aunque el concepto de línea o recta numérica nos es familiar, lo repasaremos brevemente.

Sobre una línea recta horizontal, que indicamos por L, escogemos un punto arbitrario y lo marcamos con 0. Entonces escogemos otro punto sobre la línea L a la derecha, con respecto al lector, del punto marcado 0 y marcamos el punto 1.



Usando el segmento de recta del punto marcado con 0 al punto marcado con 1, señalamos puntos consecutivos a la derecha y marcamos estos puntos con los números naturales consecutivamente. Cada número natural corresponde exactamente a uno de estos puntos, y cada punto corresponde sólo a un número. Olvidaremos por el momento el punto marcado con 0 y consideraremos el resto. Hay una correspondencia "uno a uno" entre los números naturales y los puntos obtenidos en esta forma.

En adelante no haremos distinción entre estos puntos y sus correspondientes nombres. Esto nos permite, por ejemplo, hablar de los números que están entre 5 y 17, con el concepto de "entre" sugerido por la recta numérica.

Dados dos puntos cualesquiera sobre una línea horizontal, o bien uno está a la derecha del otro o está a la izquierda, o son idénticos, dependiendo de la relación que tengan por su tamaño. Intuitivamente, un número x es "menor que" otro número y si el número x está a la izquierda del número y sobre la recta numérica. La recta numérica es un artificio útil para representar las muy importantes y útiles pro-

piedades de orden de los números. Sumar, multiplicar, restar, dividir y, en general, calcular con números es de igual importancia que comparar números.

Es importante observar que la ley de tricotomía asegura que para dos números cualesquiera uno y solamente uno de los tres asertos es cierto. Esto implica que si sabemos que uno de los asertos no es cierto, entonces uno de los dos restantes debe ser cierto.

Ejemplo 1

Sea $A = \{n \mid n$ es un número natural $n > 5\}$. Piénsese en un entero no negativo que no esté en el conjunto A. El número considerado no debe ser mayor que 5, esto es, debe ser igual a 5 o menor que 5. Esto lo indicamos como sigue. Dado k, entonces k es un número del conjunto

$$\{m \mid m \text{ es un número entero no negativo y } m \leqq 5\}.$$

"No es mayor que", que escribimos $>$, es equivalente a "menor o igual que", que se escribe $\leqq$.

"No es menor que", que escribimos $\nless$, es equivalente a "mayor o igual que", que se escribe $\geqq$.

Decir que dos números m y n son distintos significa que $m < n$ o $m > n$. Si $a < n$ y $n < b$, abreviamos y escribimos
$a < n < b$.

Ejercicios 4.16a

1. Sea $A = \{n \in W \mid n > 7\}$. Usar el símbolo A' para indicar a los elementos de W que no estén en A. Escriba el conjunto A' en dos formas distintas e indique los conjuntos A y A' sobre la recta numérica.

2. Dado $X = \{x \in W \mid 2x + 3 \geqq 11\}$, escriba el conjunto X' en dos formas distintas e indique los conjuntos X y X' sobre la recta numérica.

3. Dados $Y = \{n \in W | 3 < n \leqq 9\}$ y $Z = \{n \in W | 2n > 12\}$, haga una lista de los elementos de $Y \cap Z$. Haga una lista de los elementos de $Y \cap Z'$.

4. Si $3 < 5$, ¿cómo es $3 + n$ en relación a $5 + n$, para cualquier número n entero no negativo?

5. Si $3 < 7$, ¿cómo es $3 \cdot n$ en relación a $7 \cdot n$ donde n es un número entero no negativo?

6. Dado $S = \{n \in W \mid 5 < n \leqq 10\}$, escribir S' usando la notación "generador del conjunto".

4.16b Cotas de los conjuntos

Podemos introducir ahora la idea de cota de un conjunto de número.

Definición 4.16b. Sea S el conjunto de números enteros no negativos. Decimos que c es una *cota superior* del conjunto S si $a \leqq c$ para todo a en S. Análogamente, decimos que b es una cota inferior para el conjunto S si $b \leqq a$ para todo a en S.

Ejemplo 3

Dado $A = \{2, 3, 19\}$. Una cota superior de A es 20 y una cota inferior de A es 1. También, 100 es una cota superior. Obsérvese que 19 también es cota superior y que 2 es cota inferior. Además, 19 es cota superior y es menor que cualquier otra cota superior.

Definición 4.16c. (1) Si c es una cota superior del conjunto A, (2) si d es cualquier otra cota superior, y (3) $c \leqq d$, entonces llamamos a c el *supremo* del conjunto A; es decir, c es *la más pequeña* de todas las cotas superiores.

Definición 4.16d. (1) Si b es una cota inferior del conjunto A, (2) si e es cualquier otra cota inferior, y (3) $e \leqq b$, entonces llamamos a b el *ínfimo* del conjunto A; es decir, b es *la mayor* de las cotas inferiores.

Un conjunto de números enteros no negativos puede tener muchas cotas superiores pero solamente tiene un supremo; puede tener también muchas cotas inferiores pero solamente tiene un ínfimo.

Es de interés destacar el hecho de que no hay un *número* que sea el mayor entre todos los números menores que 10. Después diremos más acerca de esto. Por ahora es suficiente observar que sí hay un *número entero* que es el mayor entre todos los enteros menores que 10. Es el número 9.

Ejercicios 4.16b

En los ejercicios subsecuentes, considerar $n \in W$, y recordar que la expresión $a < n < b$ significa que $n > a$ y $n < b$.

1. (a) Sea $A = \{n \mid 3 < n < 12\}$.

   Hacer una lista de los elementos del conjunto A. Escribir una cota superior y una inferior del conjunto A.

   (b) Sea $B = \{n \mid 0 < n < 4\}$.
   Hacer una lista de los elementos del conjunto B. Dar dos cotas superiores del conjunto B.

2. Si $C = \{n \mid 3 < n\}$ y $D = \{n \mid n < 12\}$, ¿es entonces $C \cap D = ?$

3. Hacer una lista de los elementos en el conjunto $A \cap B$ para los conjuntos A y B del problema 1.

4. Hacer una lista de los elementos en el conjunto $A \times B$ para los conjuntos A y B del problema1.

5. Sea $C = \{n \mid 6 \leqq n \leqq 12\}$.
Hacer una lista de los elementos de C. ¿Cuál es el supremo de C? Hacer una lista de los elementos de $B \cup C$ (ver B del problema 1).

6. Hacer una lista de los elementos en el conjunto $B \cap C$ (conjunto B del problema 1 y conjunto C del problema 5).

7. Describir los conjuntos de números enteros no negativos que satisfacen las siguientes desigualdades:

   (a) $3 + n < 10$.
   (b) $n + 2 < 6$.
   (c) $3 + n < 9$ y $2 + n < 6$.

8. Si a, b, y c son enteros no negativos, demuestre que si $a = b$, resulta $a + c = b + c$. ¿Es la inversa cierta?

9. Si a, b, y c son enteros no negativos, demostrar que si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$. ¿Es cierta la inversa?

10. Establecer con palabras los principios enunciados en los problemas 8 y 9.

Demostrar que las siguientes igualdades tienen validez, empezando por el lado izquierdo y usando las propiedades fundamentales del sistema de los números enteros no negativos, y transformarlo de tal manera que quede idéntico a la expresión del lado derecho. Suponga que las letras representan números enteros no negativos, por ejemplo,

demostrar que $5 + 6 + a = 6 + a + 5$.

$$\begin{aligned} 5 + 6 + a &= 5 + (6 + a), && \text{por la ley asociativa de adición.} \\ &= (6 + a) + 5, && \text{por la ley conmutativa de adición.} \\ &= 6 + a + 5, && \text{por la ley asociativa de adición.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la propiedad transitiva de la igualdad, tiene validez la igualdad propuesta.

11. $x + 2 = 2 + x$

12. $(x + 3) + (y + 2) = (2 + 3) + (x + y)$

13. $3xy = x(3y)$

14. $(3b)^2 = 9b^2$

15. $3(x + 2y) = 6y + 3x$

16. $3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^0 = 7 \cdot 10^0$

17. $2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^2 = 1 \cdot 10^3$

18. $13 \cdot 10^2 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2$

19. $(3 + 2)(4 + 1) = 25$ (dos formas)

20 $(3 + x)(2 + y) = 6 + 3y + 2x + xy$

21. $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

EJERCICIOS DE REPASO

1. ¿Qué queremos decir con la afirmación "87 es el cardinal (o número cardinal) del conjunto B"?

2. Use la notación "generador de conjunto" y en la forma en que usted pueda especifique el conjunto vacío $\emptyset$.

3. El número 0 es un número único en muchos aspectos. Indique algunos de ellos.

4. Demostrar que 0 es único como un elemento del sistema de números enteros no negativos (es decir, demostrar que hay uno y solamente un elemento idéntico aditivo en el sistema de los números enteros no negativos).

5. Demostrar que $3 \cdot 0 = 0$, y justificar cada paso.

6. Si $A = \{2, 3, 5, 16\}$, ¿cuál es el supremo de A?

7. En la multiplicación indicada,

$$\begin{array}{r} 372 \\ 39 \\ \hline 3348 \\ 1116 \\ \hline 14508 \end{array}$$

explicar por qué en el cuarto renglón de dígitos se ha dejado en blanco un lugar a la derecha de dicho número antes de efectuar la adición.

Dar definiciones precisas en cada caso:

8. La relación de orden "$<$" para los números enteros no negativos.

9. La relación de orden "$\leqq$" para los números enteros no negativos.

10. El subconjunto de un conjunto.

11. La unión de dos conjuntos.

12. El conjunto vacío.

13. El producto cartesiano de dos conjuntos.

14. La igualdad de pares ordenados.

15. Relación: *a*) intuitivamente, *b*) en términos de conjuntos.

16. Rango de una relación.

17. La relación de "igualdad" para números.

18. El cardinal de un conjunto.

Dar ejemplos de relaciones que tengan las siguientes propiedades:

19. Reflexiva y transitiva, pero no simétrica.

20. Transitiva, pero no reflexiva ni simétrica.

21. Valor único o unívoca.

REFERENCIAS

Banks, J. Houston, *Elements of Mathematics*, Allyn and Bacon, Boston, 1964, Ch. II.

Hafstrom, John E., *Basic Concepts in Modern Mathematics*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. 1961, Ch. II.

Halmos, Paul R., *Naive Set Theory*, D. Van Nostrand and Co., Princeton, Nueva Jersey, 1960.

Hamilton, Norman T. y Joseph Landin, *Set Theory, the Structure of Arithmetic*, Allyn and Bacon, Boston, 1961, Ch. II.

Jones, Burton W., *Elementary Concepts of Mathematics*, The Macmillan Co., Nueva York, 1947, Ch. II.

Kelley, John L., *An Introduction to Modern Algebra*, D. Van Nostrand and Co., Princeton, Nueva Jersey, 1960.

Mueller, Francis J., *Arithmetic, Its Structure and Concepts*, Second Edition, Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, Nueva Jersey, 1964, units 8 and 10.

Schaaf, William L., *Basic Concepts of Elementary Mathematics*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1960, pp. 97-117.

Swain, Robert L., *Understanding Arithmetic*, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1952, Ch. III.

Uspensky, J. V. y M. A. Heaslet, *Elementary Number Theory*, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1939.

CAPITULO 5

El contar y el calcular en sistemas con bases distintas de diez

5.1 INTRODUCCION

La elección del número diez como base para los sistemas de numeración probablemente tiene, como antes mencionamos, un fundamento anatómico ya que el hombre tiene diez dedos. Algunos historiadores, al referirse a la elección del diez como base, hablan de un "accidente fisiológico". Pero, hay otras bases igualmente plausibles apoyadas en los mismos principios, tales como la base cinco (los dedos de una mano) o base veinte (los dedos de las manos y de los pies). Una vez que se conoce el sistema posicional exponencial, las otras bases no presentan problemas. De hecho, las otras bases han sido y siguen siendo usadas.

Vamos a ver cómo y por qué pueden usarse otras bases en la misma forma que la base diez. Nos interesa esto por la sencilla razón de que la investigación de los sistemas de valor relativo con base diferente de diez conduce a una mejor comprensión de los conceptos básicos involucrados.

Después de años de experiencia se está tan familiarizado con el contar y el calcular en el sistema de numeración decimal (sistema de base diez), que se pueden llegar a olvidar las dificultades que un alumno experimenta en sus primeros intentos de contar y calcular.

Vamos a suponer que Ud. es un principiante, para que así pueda entender mejor los problemas del aprendizaje. Puesto que Ud. no es un "principiante" en el sistema decimal de numeración, trabajaremos en algún otro sistema. Es más, podría ser provechoso ver varios sistemas. Se entiende que Ud. no está completamente en la posición de un principiante ya que tiene la ventaja de tener algún conocimiento general acerca de los sistemas de numeración. En particular, no le resultan extrañas las ideas de valor relativo, los símbolos en sí y el significado de estos últimos. Sin embargo, a pesar de esta ventaja, Ud. tendrá que superar algunas de las dificultades inherentes al aprendizaje de contar y calcular.

5.2 CONTAR CON LOS DEDOS

Para introducir otros métodos de contar, describiremos un procedimiento que llamamos "contar con los dedos". Considérese la mano derecha con los dedos extendidos como una descripción del cero — No hemos empezado a contar. Cuando doblamos los dedos, empezamos con el dedo meñique. Contamos "uno", "dos", "tres", "cuatro" y ya no nos queda ningún dedo. Podríamos doblar el pulgar y cerrar el puño para indicar cinco, pero entonces ya no tendríamos "dígitos" en la mano para conservar nuestra cuenta. En lugar de eso, usamos la mano izquierda para llevar la cuenta de los "puños". Ahora tenemos un dedo doblado en nuestra mano izquierda para indicar un "puño" (cinco) y podemos abrir nuestra mano derecha para continuar contando. Ahora, en lugar de decir "seis, siete, ocho", etc., que son nombres decimales para los números, decimos "un puño y uno", "un puño y dos", "un puño y tres", "un puño y cuatro", y aquí debemos detenernos a pensar nuevamente. Si doblamos el pulgar derecho tenemos realmente "un puño y un puño" o "dos puños". Podemos llevar esta cuenta doblando un segundo dedo de la mano izquierda y abriendo la mano derecha. Lo que sigue en nuestra cuenta es "dos puños", "dos puños y dos", "dos puños y tres", etc. Continuando en esta forma, pronto llegaremos a "cuatro puños y cuatro" y después a "cuatro puños y un puño", o sea un puñado de puños, y tenemos necesidad de buscar otro lugar para llevar la cuenta de "puñados de puños". Podríamos fijarnos en los dedos de los pies como un nuevo *lugar* para llevar esta cuenta, pero es difícil controlar los dedos de los pies tan bien como los de la mano.

En cualquier caso, hemos ido lo suficientemente lejos en nuestra discusión como para que Ud. reconozca que lo que estamos haciendo es contar en un sistema de numeración con base *cinco*. Vemos que si usamos las propiedades de un sistema de valor relativo y si tomamos prestados los símbolos del sistema decimal, un numeral tal como 12 debe significar "un puño y dos", o "un *cinco* y dos", o $1 \cdot 5 + 2$ ó $1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$. (Observar que $5^0 = 1$). Esta es la forma desarrollada del numeral 12 usando *base cinco*.

Comparemos ahora el contar en un sistema de base cinco con el de contar en base diez o sistema decimal.

Base diez		*Base cinco*	
1	uno	1	uno
2	dos	2	dos
3	tres	3	tres
4	cuatro	4	cuatro
5	cinco	10	un cinco y cero
6	seis	11	un cinco y uno
7	siete	12	un cinco y dos
8	ocho	13	un cinco y tres
9	nueve	14	un cinco y cuatro
10	diez	20	dos cincos y cero
11	once	21	dos cincos y uno
12	doce	22	dos cincos y dos
	.		.
	.		.
	.		.
23	veinte y tres	43	cuatro cincos y tres
24	veinte y cuatro	44	cuatro cincos y cuatro
25	veinte y cinco	100	un cinco-cincos, cero cincos y cero
	.		.
	.		.
	.		.
33	treinta y tres	113	un cinco-cincos, un cinco y tres ó $1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0$
	.		.
	.		.
	.		.

Puesto que estamos tomando prestados los símbolos del sistema decimal de numeración, nos inclinamos a tomar algunos nombres también, pero hay una limitación. El número 12 no es "doce" en el sistema quinario (base cinco); leeríamos esto como "un cinco y dos", o "uno-dos, base cinco," y lo simbolizaríamos por 12_{cinco} para distinguirlo del numeral decimal 12. Similarmente, 21_{cinco} es "dos cincos y uno" o "dos-uno, base cinco", *no* "veintiuno".

Deberíamos hacer ver que en nuestro sistema quinario de ninguna manera es necesario usar los símbolos decimales. Nuestra familiaridad con su significado nos lleva a tomarlos prestados. Podemos, por ejemplo, tomar cinco letras arbitrarias tales como *O, E, T, F, M* y darles, respectivamente, el significado que asociamos con cero, uno, dos, tres y cuatro. Entonces, los numerales para representar los primeros quince números (lenguaje decimal) serían:

Decimal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
Quinario: *E, T, F, M, EO, EE, ET, EF, EM, TO, TE, TT, TF, TM, FO*

A pesar de las confusiones ocasionales, tales como equivocar 12_{cinco} por "12", es más fácil trabajar con los símbolos familiares, 0, 1, 2, 3, 4, y continuaremos haciéndolo así.

5.3 SISTEMAS DE VALOR RELATIVO CON BASES DIFERENTES DE DIEZ

En un sistema quinario el primer lugar a la izquierda del punto de referencia (¿es éste un punto decimal?) es la posición para las unidades. Esto es cierto para todos los sistemas posicionales —exponenciales. Asociamos a 5^0 ($5^0 = 1$) con este lugar como su "valor relativo". El siguiente lugar a la izquierda representa el número de cincos ($5^1 = 5$); el siguiente lugar el número de cinco-cincos, o veinticinco ($5^2 = 25$); el siguiente lugar el número de cinco (cinco-cincos), o ciento veinticinco ($5^3 = 125$); el siguiente, el número de seiscientos veinticinco ($5^4 = 625$); y así sucesivamente. Simbolizamos estos valores relativos por las potencias de cinco, usando los símbolos del lenguaje decimal: 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, etc.

El primer lugar a la derecha del punto de referencia está asociado con 5^{-1} ($5^{-1} = 1/5$), y un dígito en este lugar representa el número de quintas partes. El siguiente lugar a la derecha está asociado con 5^{-2} ($5^{-2} = 1/5^2 = 1/25$), y un dígito en este lugar representa el número de veinticincoavas partes, etc.

Ejemplo 1

Consideremos 18_{diez} el símbolo para el número llamado dieciocho en nuestro lenguaje decimal. Expresar esto en un sistema de numeración de base cinco es esencialmente reagrupar un conjunto representativo S donde $n(S) = 18$.

$$\begin{array}{cc}
\text{conjunto } S & \text{conjunto } S \\
[xxxxxxxxxx][xxxxxxxx] & \begin{bmatrix}(xxxxx)\\(xxxxx)\\(xxxxx)\end{bmatrix}[xxx] \\
1\cdot 10^1 + 8\cdot 10^0 & 3\cdot 5^1 + 3\cdot 5^0
\end{array}$$

Para llevar a cabo esto sin el mecanismo de reagrupamiento, y usando nuestro conocimiento del cálculo decimal, preguntamos "¿Cuál es la potencia más alta de cinco que es menor que dieciocho, y cuál es el mayor múltiplo de esta potencia que es menor que dieciocho?" Por supuesto, las respuestas son 5^1 y $3 \cdot 5^1$. Esto significa que en nuestra numeración quinaria podemos usar un "3" en el lugar de 5^1. Esto, sin embargo, no es suficiente ya que hemos tomado en cuenta solamente quince de los dieciocho. Esto significa que necesitamos tres más, de tal forma que podemos usar un "3" en el lugar de 5^0, o sea en el lugar de las unidades. Ahora nuestro numeral quinario será: 33_{cinco}. Concluimos que $18_{\text{diez}} = 33_{\text{cinco}}$.

Ejemplo 2

Análogamente, para 333_{diez} vemos que

$$\left.\begin{aligned} 333_{\text{diez}} &= 250 + 83 \\ &= 2 \cdot 5^3 + 75 + 8 \\ &= 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 5 + 3 \\ &= 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 3 \\ &= 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 \\ &= 2313_{\text{cinco}} \end{aligned}\right\} \text{Reagrupamiento}$$

Ejemplo 3

$$\begin{aligned} 2341_{\text{cinco}} &= 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 \\ &= 250 + 75 + 20 + 1 \\ &= 346_{\text{diez}} \end{aligned}$$

Forma desarrollada con numerales decimales

Ejemplo 4

$$\begin{aligned} 42.321_{\text{cinco}} &= 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^{-2} + 1 \cdot 5^{-3} \\ &= 20 + 2 + 3/5 + 2/25 + 1/125 \\ &= 20 + 2 + 6/10 + 8/100 + 8/1000 \\ &= 22{,}688_{\text{diez}} \end{aligned}$$

Esta noción de contar en sistemas con bases diferentes de diez puede extenderse a cualquier base que se escoja. La tabla 1 da la representación de los números en base diez (decimal), base cinco (quinaria), base dos (binaria), y base doce (duodecimal).

Nótese que en el último renglón de la tabla 1 tenemos: "un diez y seis unidades", "tres cincos y una unidad", "un dieciséis, cero ochos, cero cuatros, cero dos, y cero unidades", y "una docena de cuatro unidades", todas ellas representando al mismo número. ¿Es esto posible? Esto es como si llamáramos a John Arthur Palmer, "John", "John Arthur", "Art" o "Palmer". Cada uno es sencillamente un nombre diferente para la misma persona.

$$16_{\text{diez}} = 31_{\text{cinco}} = 10000_{\text{dos}} = 14_{\text{doce}}.$$

Tabla 1.

Símbolos Base diez: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Base cinco: 0, 1, 2, 3, 4
Base dos: 0, 1
Base doce: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *T*, *E*

Base diez (decimal)	Base cinco (quinario)	Base dos (binario)	Base doce (duodecimal)
1	1	1	1
2	2	10	2
3	3	11	3
4	4	100	4
5	10	101	5
6	11	110	6
7	12	111	7
8	13	1000	8
9	14	1001	9
10	20	1010	*T*
11	21	1011	*E*
12	22	1100	10
13	23	1101	11
14	24	1110	12
15	30	1111	13
16	31	10000	14

Ejercicios 5.3

1. Escribir el siguiente número en la base indicada:
$2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$ En "base cinco" y "base diez".

2. Escribir los primeros cincuenta (lenguaje decimal) numerales como numerales quinarios tomando los símbolos del sistema de numeración decimal.

3. Escribir cada uno de los siguientes números en forma desarrollada y encontrar su equivalente decimal (base diez):

(a) 320_{cinco} (b) 121_{cinco} (c) 203_{cinco}
(d) 21.1_{cinco} (e) 1.11_{cinco}

4. Reescribir como numerales del sistema quinario los siguientes numerales del sistema decimal (por ejemplo, $27_{\text{diez}} = 102_{\text{cinco}}$):

(a) 14_{diez} (b) 140_{diez} (c) 327_{diez}

5. La siguiente línea es la línea numérica en un sistema de base *cuatro*. Los dos primeros puntos han sido marcados.

(a) Acabar de marcar los puntos usando los numerales en base cuatro.

(b) Trazar en la línea los siguientes numerales en base cuatro: 1.2; 2.3; 2.12; 10.1; y 20.2.

6. Un grupo de cuatro personas que desea dividir equitativamente 2331.332_{cuatro} onzas de semillas de petunia. ¿Cuánto recibe cada una?

7. Usted viaja hacia un país que tiene un sistema monetario formado por las siguientes monedas:

Nombre de la moneda	Símbolo de la moneda	Equivalencia en los Estados Unidos
Sens	Ⓢ	1 ¢
Fens	Ⓕ	5 ¢
Qens	Ⓠ	25 ¢
Dens	Ⓓ	$1.25
Mens	Ⓜ	$6.25
Nens	Ⓝ	$31.25

Usted desea convertir moneda de Estados Unidos a la de este nuevo país de tal forma que lleve el menor número de monedas. Convertir las siguientes cantidades:

(a) $3.56 (b) $13.500

(c) $29.32 (d) $76.19

Por ejemplo, $5.36 sería cuatro dens, 1 quens, dos fens, y un sens.

ⓓ ⓓ ⓓ ⓓ ⓠ ⓕ ⓕ ⓢ

8. ¿Qué sigue a *EE* en base 12?

9. ¿Qué viene después de *TT* en base 12?

10. ¿Qué número sigue de 99 en base 12?

11. ¿En la base doce, el número 4*E* es par o impar? Explicar por qué.

12. ¿En la base doce, el número 7*T* es par o impar? Explicar por qué.

13. ¿Qué número en base 12 es el mayor en cuánto?

(a) ¿9*T* o *T*9?

(b) ¿*ET* o *EE*?

(c) ¿9*E* o *E*1?

14. ¿Qué número en base cinco sigue a 44?

15. ¿Qué número en base cinco sigue a 4?

5.4 CALCULO EN BASE CINCO

Primero consideraremos algunos cálculos en un sistema de numeración de base cinco. Usted recordará que después de que aprendió a contar en el sistema decimal, el siguiente paso en el proceso del aprendizaje fue el concerniente a las propiedades elementales de la adición y la multiplicación, así como las combinaciones de adiciones y las tablas de multiplicar. Evitaremos la necesidad de memorizar estos hechos presentando las siguientes tablas de propiedades elementales como sigue:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

Leemos estas tablas lo mismo que aquéllas concernientes a los pares ordenados de números naturales del capítulo 4. Por ejemplo, para encontrar $2 + 4$ empezamos en la columna de la izquierda bajando hasta encontrar el numeral 2, entonces recorremos este renglón hasta llegar a la columna encabezada con 4, donde encontramos el numeral 11. Esto significa que en la aritmética de base cinco es $2 + 4 = 11$. Leemos esto: "Dos más cuatro es uno-uno, base cinco". Sería incorrecto decir "Dos más cuatro es 'once' ". "Once" es una palabra del sistema decimal, y, en cambio, estamos trabajando en base cinco o base quinaria.

La tabla de multiplicación se usa en forma similar. Consideremos el producto $3 \cdot 4$. Empezamos en la columna de la izquierda y al recorrerla hacia abajo encontramos el numeral 3, entonces recorremos este renglón hasta llegar a la columna encabezada con 4, donde encontramos el numeral 22. Esto significa que en aritmética quinaria $3 \cdot 4 = 22$. Leemos esto "tres veces cuatro es dos-dos, base cinco".

Con el uso de estas tablas, un poco de intuición y la comprensión del sistema de numeración de valor relativo, podemos efectuar cálculos en base cinco. Hagámoslo con algunos problemas sencillos.

Ejemplo 1

Sumar 234_{cinco} y 432_{cinco}

	Procedimiento
11	
234	1a. columna: De la tabla, $4 + 2 = 11$. Escribimos 1 y
432	llevamos 1 como en la aritmética decimal.
1221	2a. columna: De la tabla, $3 + 3 = 11$. $11 + 1$ (lo que llevamos) $= 12$. Escribimos 2, llevamos 1.

3a. columna: De la tabla, $2 + 4 = 11$. $11 + 1$ (lo que llevamos) $= 12$. Escribimos 12.

Podemos fácilmente verificar nuestro resultado convirtiendo los numerales en base cinco a numerales decimales y calcular en la aritmética decimal.

$$\begin{aligned} 234_{\text{cinco}} &= 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 \\ &= 50 + 15 + 4 \\ &= 69_{\text{diez}} \end{aligned}$$

Forma desarrollada con numerales decimales.

Análogamente, $432_{\text{cinco}} = 117_{\text{diez}}$,

$$69 + 117 = 186.$$

$$\begin{aligned} 1221_{\text{cinco}} &= 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0. \\ &= 125 + 50 + 10 + 1. \\ &= 186_{\text{diez}}. \end{aligned}$$

Aritmética decimal, forma desarrollada con numerales decimales

Esto implica que nuestra aritmética quinaria es correcta. Obtuvimos la misma suma en ambos sistemas, y nos sentimos bastante seguros de que la aritmética decimal es correcta.

Ejemplo 2

Sumar 323_{cinco}, 413_{cinco} y 343_{cinco}

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11} \\ 323 \\ 413 \\ 343 \\ \hline 2134 \end{array}$$

Procedimiento

1a. columna: De la tabla $3 + 3 = 11$; después $11 + 3 = 14$. Escribimos 4, llevamos 1.

2a. columna: $4 + 1 = 10$, $10 + 2 = 12$, $12 + 1 = 13$. Escribimos 3, llevamos 1.

3a. columna: $3 + 4 = 12$, $12 + 3 = 20$, $20 + 1 = 21$. Escribimos 21.

Obsérvese que en el procedimiento usado en este problema algunas de las adiciones efectuadas al encontrar la suma de una columna son en sí mismas problemas. Las respuestas no se obtienen directamente de la tabla. Por ejemplo, $12 + 3 = 20$.

Se deja al estudiante verificar este ejemplo convirtiendo a la aritmética de base diez como en el ejemplo 1.

Ejemplo 3

Multiplicar 342_{cinco} por 23_{cinco}:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ {\scriptstyle 21} \\ 342 \\ 23 \\ \hline 2131 \\ 1234 \\ \hline 20021 \end{array}$$

Procedimiento

Multiplicando por 3: $3 \cdot 2 = 11$. Escribimos 1, llevamos 1. $3 \cdot 4 = 22$, $22 + 1$ (lo que llevamos) $= 23$. Escribimos 3, llevamos 2.

$3 \cdot 3 = 14$, $14 + 2$ (lo que llevamos) $= 21$. Escribimos 21.

Multiplicando por 2: Lo mismo que para 3 excepto que 2 está en el segundo lugar, y debemos poner los productos parciales un lugar a la izquierda como en la aritmética decimal.

La verificación convirtiendo a base de diez es:

$$\begin{aligned}
342_{\text{cinco}} &= 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 75 + 20 + 2 = 97_{\text{diez}}.\\
23_{\text{cinco}} &= 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 10 + 3 = 13_{\text{diez}}.\\
20021_{\text{cinco}} &= 2 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 1250 +\\
&\quad 10 + 1 = 1261_{\text{diez}}.\\
13 \cdot 97 &= 1261 \qquad \text{Aritmética decimal.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aritmética quinaria es correcta.

La sustracción y división pueden también efectuarse con el uso de las tablas de adición y multiplicación. Las tablas de adición contestan a la pregunta $a + b = ?$ para a y b dígitos quinarios, pero también puede responderse a la pregunta $a + ? = c$. Por ejemplo, para encontrar $11 - 3$ en aritmética quinaria, consideramos el problema $3 + ? = 11$. Encontramos la respuesta fijándonos en la columna izquierda hasta encontrar el numeral 3, entonces recorriendo la hilera encontramos el numeral 11. El numeral que nombra al número que debe ser sumado a 3 para obtener 11 está en la parte superior de esta columna. Por lo tanto, $11 - 3 = 3$. Análogamente, $12 - 4 = 3$, $10 - 2 = 3$, $11 - 2 = 4$, etc.

Ejemplo 4

Restar 2341 de 4332 en aritmética quinaria:

$$\begin{array}{r}
{}^{3}\,{}^{1}{}^{2}\,{}_{1}\\
\cancel{4}\,\cancel{3}\,3\,2\\
2\,3\,4\,1\\
\hline
1\,4\,4\,1
\end{array}$$

Procedimiento

1a. columna: $1 + ? = 2$, $1 + 1 = 2$. Escribimos 1.
2a. columna: Pedimos 1, entonces $4 + ? = 13$, $4 + 4 = 13$. Escribimos 4.
3a. columna: Pedimos 1, entonces $3 + ? = 12$, $3 + 4 = 12$. Escribimos 4.
4a. columna: $2 + ? = 3$, $2 + 1 = 3$. Escribimos 1.

Podemos usar nuestra tabla de multiplicación para la división en el sentido de que la pregunta $a \div b = ?$ puede ser interpretada como $b \cdot ? = a$.

Ejemplo 5

Dividir 33011 entre 4 en aritmética quinaria:

$$\begin{array}{r}
4224\\
4\overline{)33011}\\
\underline{31}\\
20\\
\underline{13}\\
21\\
\underline{13}\\
31\\
\underline{\underline{31}}
\end{array}$$

Procedimiento

El mismo que para la aritmética decimal, usando la tabla de multiplicación en base cinco para encontrar cocientes parciales.

Por ejemplo, $33 \div 4 = ?$; $4 \cdot ? = 33$; $4 \cdot 4 = 31$, que es el que más se acerca a 33. Por lo tanto, 4 es el primer cociente que aparece. Multiplicando y restando, encontramos abajo el dígito del dividendo. Entonces continuamos en la misma forma.

Hemos presentado el enfoque tradicional para el problema de la división. Es bueno señalar que el enfoque moderno recurre a un viejo formato o arreglo del trabajo que es así:

$$
\begin{array}{r|r}
4\overline{)33011} & 4000 \\
\underline{31000} & \\
2011 & 200 \\
\underline{1300} & \\
211 & 20 \\
\underline{130} & \\
31 & 4 \\
\underline{31} & \underline{} \\
 & 4224
\end{array}
$$

Este formato indica un procedimiento más completo. Aquí los cocientes parciales se obtienen esencialmente en la misma forma que en el procedimiento tradicional, usando las tablas de multiplicación para ayudarse a hacer los cálculos.

Ejercicio 5.4

1. Verificar los ejemplos 2, 4, y 5 convirtiendo los numerales quinarios a numerales decimales y haciendo los cálculos aritméticos en el sistema decimal.

2. Hacer los siguientes ejercicios de adición en la aritmética de base cinco:

(a) $\begin{array}{r} 231 \\ \underline{413} \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 2342 \\ 1341 \\ \underline{3124} \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 2013 \\ 4002 \\ 2144 \\ \underline{3241} \end{array}$

3. Efectuar los siguientes ejercicios de multiplicación en la aritmética de base cinco.

(a) $\begin{array}{r} 2342 \\ \underline{3} \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 1341 \\ \underline{32} \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 2144 \\ \underline{234} \end{array}$

4. Hacer los siguientes ejercicios de sustracción en la aritmética de base cinco.

(a) $\begin{array}{r} 413 \\ \underline{231} \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 2342 \\ \underline{1424} \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 3000 \\ \underline{2143} \end{array}$

5. Hacer los siguientes ejercicios de división en la aritmética de base cinco.

(a) $4\overline{)2033}$ (b) $3\overline{)1414}$ (c) $10\overline{)204320}$

6. Verificar los resultados del problema 2 convirtiendo los números al sistema decimal.

7. Construir las tablas de propiedades elementales para la aritmética de base tres (ternaria) y efectuar los cálculos siguientes:

(a) Sumar:

$$\begin{array}{r} 212 \\ 220 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 222 \\ 111 \\ \hline \end{array}$$

(b) Restar:

$$\begin{array}{r} 212 \\ 121 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2121 \\ 212 \\ \hline \end{array}$$

(c) Multiplicar:

$$\begin{array}{r} 212 \\ 22 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21022 \\ 2102 \\ \hline \end{array}$$

(d) Dividir 21021 entre 12. Dividir 21020 entre 12.

8. ¿Cuál es el número mínimo de pesas necesarias para pesar objetos hasta de 41 onzas con una balanza de dos platillos?

5.5 ARITMETICA DE BASE DOS

En la aritmética de base dos (binaria) necesitamos únicamente dos símbolos, y es conveniente usar los símbolos decimales 0 y 1. Los datos elementales necesarios para el cálculo en base dos son verdaderamente sencillos. Tomando en cuenta las propiedades especiales del cero y uno, vemos que el único dato que falta es $1 + 1 = 10$ en base dos. Las tablas son triviales, pero para mayor claridad vamos a incluirlas.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	1
1	1

Ejemplo 1

Sumar 1011_{dos} y 1100_{dos}

Procedimiento

$$\begin{array}{r} 1011 \\ 1100 \\ \hline 10111 \end{array}$$

1a. columna: $0 + 1 = 1$. Escribimos 1.
2a. columna: $0 + 1 = 1$. Escribimos 1.
3a. columna: $1 + 0 = 1$. Escribimos 1.
4a. columna: $1 + 1 = 10$. Escribimos 10.

Ejemplo 2

Sumar en base dos: 1011, 1101 y 1001.

Procedimiento

$$\begin{array}{r} 1011 \\ 1101 \\ 1001 \\ \hline 100001 \end{array}$$

1a. columna: $1 + 1 = 10$, $10 + 1 = 11$. Escribimos 1, llevamos 1.
2a. columna: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1$ (lo que llevamos) $= 10$. Escribimos 10, llevamos 1.
3a. columna: $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$. Escribimos 0, llevamos 1.
4a. columna: $1 + 1 = 10$, $10 + 1 = 11$, $11 + 1 = 100$. Escribimos 100.

Nuevamente, como en la aritmética quinaria, algunas de las adiciones efectuadas al encontrar la suma de una columna son en sí mismas problemas. Por ejemplo, $11 + 1 = 100$ no se encuentra directamente en la tabla.

Para comprobar este ejemplo convertimos los numerales binarios a numerales decimales y calculamos en el sistema que nos es más familiar.

$$\begin{aligned} 1011_{dos} &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0. && \text{Forma desarrollada} \\ &= 8 + 0 + 2 + 1. && \text{de los numerales} \\ &= 11_{diez} && \text{decimales.} \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} 1101_{dos} &= 13_{diez}. \\ 1001_{dos} &= \ \ 9_{diez}. \\ 11 + 13 + 9 &= 33. && \text{Aritmética decimal} \\ 100001_{dos} &= 33_{diez}. && \text{Verificación.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, nuestra suma binaria coincide con la suma decimal.

Ejemplo 3

Multiplicar los números binarios: (1011) y (101).

Procedimiento

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \underline{101} \\ 1011 \\ \underline{10110} \\ 110111 \end{array}$$

Seguimos el mismo procedimiento que en la aritmética decimal, sin embargo, el problema de multiplicación es mucho más sencillo. Para multiplicar por 1 todo lo que necesitamos hacer es copiar el multiplicando y escribirlo en la posición adecuada.

Se deja al estudiante convertir estos numerales binarios a numerales decimales y realizar la comprobación.

La sustracción puede efectuarse usando los datos de la adición como en el ejemplo 4 de la sección precedente.

En la división de números binarios no es necesario estimar un posible cociente. Debido a la naturaleza del sistema, no tenemos más que dos posibilidades en cada paso del proceso de división. O bien el divisor "cabe" o no "cabe". Un ejemplo sencillo es suficiente para ilustrar esto.

Ejemplo 4

Dividir los numerales binarios: 1000010101 entre 1101.

$$\begin{array}{r} 101001 \\ 1101\overline{)1000010101} \\ \underline{1101} \\ 1110 \\ \underline{1101} \\ 1101 \\ \underline{1101} \\ \end{array}$$

Se deja al estudiante convertir estos numerales binarios a numerales decimales y comprobar el cálculo.

Puede parecer una pérdida de tiempo el considerar la aritmética de base dos. Sin embargo, le sorprendería al lector saber que el sistema binario tiene muchas aplicaciones útiles y prácticas. Los números binarios se usan en investigaciones estadísticas y en el estudio del cálculo de probabilidad, para analizar algunos juegos, y como unidades aritméticas de algunas calculadoras electrónicas. Siempre que una situación pueda ser descrita en términos de "dentro" o "fuera", "sí" o "no", "carga" o "no carga", o posibilidades duales semejantes, el sistema de numeración binaria es útil en su análisis.

Ejercicios 5.5

1. Comprobar los ejemplos 1, 3 y 4 de la sección 5.5 convirtiendo los numerales binarios a numerales decimales y efectuar la comprobación en aritmética decimal.

2. Efectuar los siguientes problemas de adición en aritmética binaria:

(a) $101 + 111$ (b) $1101 + 1001 + 1111$
(c) $1001 + 1111 + 101$ (d) $10011 + 1001 + 100$
(e) $11011 + 11100 + 10111$ (f) $1111 + 1111 + 1111$

3. Calcular en aritmética binaria

(a) $(1011)(111)$ (b) $(11010)(101)$
(c) $(11011)(1101)$ (d) $11011 - 1101$
(e) $10011 - 1010$ (f) $1100100 \div 1010$

4. Una aplicación de la aritmética binaria está implícita en el siguiente juego de números. Consideremos las siguientes tarjetas:

Tarjeta A		Tarjeta B		Tarjeta C		Tarjeta D		Tarjeta E	
16	24	8	24	4	20	2	18	1	17
17	25	9	25	5	21	3	19	3	19
18	26	10	26	6	22	6	22	5	21
19	27	11	27	7	23	7	23	7	23
20	28	12	28	12	28	10	26	9	25
21	29	13	29	13	29	11	27	11	27
22	30	14	30	14	30	14	30	13	29
23	31	15	31	15	31	15	31	15	31

A un estudiante le dan estas tarjetas y le piden que indique aquéllas que tengan su edad impresa. Las mira con cuidado y entonces responde que su edad está impresa en las tarjetas *A* y *E*. El dueño de las tarjetas suma los números que aparecen en la parte superior izquierda de estas dos tarjetas y dice "Usted tiene 17 años de edad."
Compruebe esto con sus amigos. Encontrará el sistema infalible.
¿Cuál es el sistema? Reflexione sobre el "por qué" de este truco sencillo.

Para empezar escriba los numerales binarios de uno a treinta y dos y use esto como una guía.

5.6 ARITMETICA DUODECIMAL

La aritmética duodecimal (base 12) puede desarrollarse como la de base cinco o base dos. Sin embargo, hay una diferencia: los símbolos de los dígitos decimales serán insuficientes en número. Necesitamos doce símbolos para un sistema de numeración duodecimal, como se indicó en la sección 5.3. Las tablas de propiedades elementales para la adición y multiplicación serían como se muestra en las tablas 2 y 3.

Tabla 2. Adición, base doce

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*T*	*E*
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*T*	*E*
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*T*	*E*	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	*T*	*E*	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	*T*	*E*	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	*T*	*E*	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	*T*	*E*	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	*T*	*E*	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	*T*	*E*	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	*T*	*E*	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	*T*	*E*	10	11	12	13	14	15	16	17	18
T	*T*	*E*	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
E	*E*	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1*T*

En el sistema duodecimal de numeración tenemos nombres para algunas potencias de la base. Para el nombre de la potencia de la base que aparece en el primer lugar a la izquierda del punto de referencia

Tabla 3. Multiplicación, base doce

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*T*	*E*
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*T*	*E*
2	2	4	6	8	*T*	10	12	14	16	18	1*T*
3	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	5	*T*	13	18	21	26	2*E*	34	39	42	47
6	6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	7	12	19	24	2*E*	36	41	48	53	5*T*	65
8	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
T	*T*	18	26	34	42	50	5*T*	68	76	84	92
E	*E*	1*T*	29	38	47	56	65	74	83	92	*T*1

podemos usar "unidades" exactamente como hacemos para el sistema decimal. El siguiente lugar a la izquierda puede tener el nombre "docenas", exactamente como decimos "decenas" en el sistema decimal. El siguiente lugar podría ser llamado "gruesa" (una docena de docenas) y el siguiente "gran gruesa" o "docena de gruesas", y así sucesivamente.

El sistema duodecimal ha sido propuesto por mucha gente como sistema común de numeración en lugar del sistema decimal. Tiene ciertas ventajas sobre el sistema decimal, pero el problema de la conversión en escala nacional o internacional sería casi insuperable. En el siguiente grupo de ejercicios se preguntará al estudiante sobre algunas de las ventajas del sistema duodecimal comparado con el sistema decimal.

Ejemplo 1

Sumar $7ET45_{\text{doce}}$ y 21372_{doce}.

Procedimiento

$7E\,T45$	1a. columna: $5 + 2 = 7$. Escribimos 7.
$21\,372$	2a. columna: $4 + 7 = E$. Escribimos E.
$\overline{T1\,1E7}$	3a. columna: $T + 3 = 11$. Escribimos 1, llevamos 1.
	4a. columna: 1 (llevamos) $+ E = 10$, $10 + 1 = 11$. Escribimos 1, llevamos 1.
	5a. columna: 1 (llevamos) $+ 7 = 8$, $8 + 2 = T$. Escribimos T.

Ejemplo 2

Multiplicar $T45_{\text{doce}}$ y 372_{doce}.

Procedimiento

$T45$	Multiplicando por 2: $2 \cdot 5 = T$. Escribimos T. $2 \cdot 4 = 8$.
372	Escribimos 8. $2 \cdot T = 18$. Escribimos 18.
$\overline{188T}$	Multiplicando por 7: $7 \cdot 5 = 2E$. Escribimos E, llevamos 2.
$606E$	$7 \cdot 4 = 24$, $24 + 2 = 26$. Escribimos 6, llevamos 2. $7 \cdot T =$
2713	$5T$, $5T + 2 = 60$. Escribimos 60.
$\overline{31367T}$	Multiplicando por 3: $3 \cdot 5 = 13$. Escribimos 3, llevamos 1. $3 \cdot 4 = 10$, $10 + 1 = 11$. Escribimos 1, llevamos 1. $3 \cdot T = 26$, $26 + 1 = 27$. Escribimos 27.

La sustracción y la división puede efectuarse en forma semejante a la usada para la aritmética en otras bases ya discutidas. Este tipo de cálculo se deja como ejercicio.

Ejercicios 5.6

1. ¿Cuáles son algunas de las ventajas del sistema binario sobre el sistema decimal?

2. ¿Cuáles son algunas de las ventajas del sistema duodecimal sobre el sistema decimal?

3. Efectuar los siguientes cálculos en la aritmética duodecimal:

(a) $3E + T4$ (b) $204 + 60T$
(c) $1702 + 91TE6$ (d) $188TE + E7E03T$
(e) $60T - T4$ (f) $312 - 5T$
(g) $18E8T - 5TE4$ (h) $604T5 - 231E4$
(i) $(4T)(E3)$ (j) $(54)(214E)$
(k) $(2E4)(5467)$ (l) $(325)(TE41)$
(m) $293 \div 7$ (n) $11413 \div 5$
(o) $E468 \div 4E$ (p) $12E114 \div 214$

4. Usar el algoritmo de la adición para encontrar la suma en cada uno de los siguientes ejercicios dando las razones en cada paso:

(a) $27 + 9$ (b) $36 + 8$ (c) $379 + 96$ (d) $432 + 899$

5. Use el algoritmo de la multiplicación para encontrar el producto en cada uno de los siguientes ejercicios:

(a) $(36)(9)$ (b) $(47)(8)$ (c) $(36)(45)$ (d) $(57)(92)$

6. (a) ¿Cuál es el efecto al multiplicar un número por la base del sistema de numeración?
(b) Multiplicar el número 342_{cinco} (en base cinco) por la base.
(c) Multiplicar el número $TET7_{\text{doce}}$ (base doce) por la base.

7. Use la tabla de propiedades elementales de la sección 5.6 y el algoritmo de la adición para encontrar la suma en cada uno de los siguientes ejercicios:

(a) $9E7 + T$ (b) $TT + T$ (c) $EE + E$ (d) $TE + 9$

8. Usar la tabla de datos elementales en la sección 5.6 y el algoritmo de multiplicación para encontrar los siguientes productos:

(a) $(EE)(9)$ (b) $(TET)(8)$ (c) $(7E)(T5)$ (d) $(6T)(5E)$

9. Los siguientes ejercicios son ilustraciones adicionales de la aplicación de la aritmética de base dos.

Indudablemente que el lector se ha preguntado sobre cómo se multiplica con jeroglíficos egipcios. La adición en este sistema de numeración es un proceso sencillo y la multiplicación puede pensarse como la adición repetida de uno de los números tantas veces como se indique en un segundo número. Es decir, $3 \cdot 6 = 6 + 6 + 6$. Así es como las calculadoras manuales efectúan las multiplicaciones. Fue probablemente este método el usado durante mucho tiempo por los egipcios. Sin embargo, sus herramientas de escritura y sus condiciones de trabajo determinaron un proceso de multiplicación compacto. Un proceso muy ingenioso llamado "doblando y sumando" acortó su trabajo considerablemente. Este procedimiento está basado en el hecho de que cualquier número puede ser expresado como una suma de potencias de 2 (ésta es la idea de la base dos). Sin embargo, la notación de la base dos no fue usada. Consideremos un ejemplo:

Encontrar (39)(46).

Expresando 39 como una suma de potencias de 2 obtenemos $39 = 32 + 4 + 2 + 1$, ó $39 = 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0$. Por lo tanto, multiplicar por 39 es lo mismo que multiplicar por 1, 2, 4, y 32 y después sumar (use la ley distributiva).

1	46
2	92
4	184
8	368
16	736
32	1472

Observar que en cada columna los números sucesivos se obtienen "duplicando" el número precedente.

(a) ¿Qué números de la columna de la derecha deben sumarse para obtener el producto de 39 y 46?

(b) Multiplicar (27)(49) con este método.

(c) Multiplicar (325)(202) con este método.

Una variante de este método se llama "dividiendo entre 2 y duplicando". El cálculo debe desarrollarse como sigue:

39	46*
19	92*
9	184*
4	368
2	736
1	1472*

Obsérvese que en el proceso de "dividir entre 2" omitimos los residuos. Para obtener el producto, (39)(46), sumamos aquellos números de la columna del lado derecho opuestos a los números impares de la columna del lado izquierdo, es decir,

$$(39)(46) = 46 + 92 + 184 + 1472 = 1794.$$

(d) Usar este método para los problemas de (b) y (c).

Considere el procedimiento de dividir entre 2 y duplicar, y esta vez escriba los residuos de cada "división" como sigue:

39	1
19	1
9	1
4	0
2	0
1	1

Ahora escriba los residuos de derecha a izquierda en el mismo orden en que aparecen de abajo a arriba esto es, 100111.

(e) ¿Cuál es el numeral decimal del numeral binario 100111?

5.7 LA TABLA "DE 100" PARA CONTAR

Un invento útil e interesante para enseñar a contar en cualquier base es la tabla "de 100" para contar. La tabla para contar mostrada en el esquema 4 es para las bases dos hasta doce.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	*T*	*E*	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	1*T*	1*E*	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	2*T*	2*E*	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	3*T*	3*E*	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	4*T*	4*E*	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	5*T*	5*E*	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	6*T*	6*E*	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	7*T*	7*E*	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	8*T*	8*E*	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	9*T*	9*E*	*T*0
*T*1	*T*2	*T*3	*T*4	*T*5	*T*6	*T*7	*T*8	*T*9	*TT*	*TE*	*E*0
*E*1	*E*2	*E*3	*E*4	*E*5	*E*6	*E*7	*E*8	*E*9	*ET*	*EE*	100

Como se muestra, es la tabla "de 100" para contar en la base doce. Suprimiendo las columnas encabezadas por *T* y *E* y las hileras que empiezan con *T*1 y *E*1 (excepto el último lugar donde está 100), obtendremos la tabla de contar en la base diez. Suprimiendo las columnas encabezadas por 7, 8, 9, *T* y *E* y las hileras empezando con 71, 81, 91, *T*1 y *E*1 (excepto el último lugar donde está 100), tenemos la tabla para contar en la base siete.

Para hacer una tabla "de 100" de contar en otras bases se suprimirán las hileras y columnas apropiadas.

EJERCICIOS DE REPASO

1. ¿Cuál es la razón fundamental para estudiar los sistemas de numeración de valor relativo en bases diferentes de diez?

2. Hacer un sistema de valor relativo en base cuatro usando símbolos diferentes de los numerales decimales. Los nuevos símbolos son los siguientes:

$$n(\emptyset) = \Delta$$
$$n(\{\Delta\}) = -$$
$$n(\{\Delta, -\}) = \cap$$
$$n(\{\Delta, -, \cap\}) = \Sigma$$

(a) Escribir los primeros cincuenta numerales en este sistema.
(b) ¿Cuál es el sucesor de $\Sigma\Sigma\Sigma$?
(c) ¿Cuál es mayor, $\cap^{\Sigma}$ o $\Sigma^{\cap}$?
(d) ¿Cuál es el numeral decimal para $-\Delta.\cap\cap$?

3. Usando el sistema de numeración del problema 2, realizar las operaciones indicadas.
(a) ¿$\cap\Sigma{-}\Sigma + \Sigma\Sigma\Delta\cap = ?$
(b) ¿$\cap\Sigma{-}\Sigma \cdot -\Delta\Delta = ?$

4. Construir una línea numérica para los números enteros no negativos y marcar los puntos usando el sistema de numeración del problema 2.

5. Sobre la línea numérica del problema 4, trazar los siguientes puntos:
$-.\cap$, $\Delta.{-}\cap$, $\cap.\cap{-}$

6. Sea W el conjunto de números enteros no negativos y N el conjunto de números naturales. Definimos una relación en el conjunto $W \times N$ como sigue:

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y solamente si } ad = bc.$$

(a) Dar tres elementos que estén relacionados con $(3, 5)$.
(b) ¿Cuáles de los siguientes elementos no pertenecen a $W \times N$:
$(2, 1)$ $(1, 1)$ $(6, 0)$ $(1, 8)$ $(0, 0)$ $(0, 1)$?
(c) Use ejemplos numéricos para convencerse de que esto es una relación de equivalencia.

7. Defina la operación binaria $\oplus$ en $W \times W$ como sigue:

$$[(a, b), (c, d)] \xrightarrow{\oplus} (a, b) \oplus (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

(a) ¿Qué es $(7, 5) \oplus (6, 8)$
(b) ¿Qué es $(3, 8) \oplus (7, 7)$?

8. ¿La operación binaria definida en el problema 7 satisface la ley de clausura? Dar un ejemplo.

9. ¿La operación binaria definida en el problema 7 satisface la ley conmutativa? dar ejemplos.

10. ¿La operación binaria definida en el problema 7 satisface la ley asociativa?

11. ¿Hay un elemento que actúe como idéntico para la operación binaria definida en el problema 7? ¿Cuál es?

12. En el conjunto $W \times W$ se define una relación como sigue:

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y solamente si } a + d = b + c.$$

(a) Use ejemplos numéricos para convencerse que esto es una relación de equivalencia.
(b) Dar algunos elementos de la clase de equivalencia a la cual pertenece $(3, 3)$.

3. Si se define la operación binaria $\ominus$ en $W \times W$ como sigue:

$$[(a, b), (c, d)] \xrightarrow{\ominus} (a, b) \ominus (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

(a) ¿Qué es $(7, 5) \ominus (6, 8)$?
(b) ¿Qué es $(3, 8) \ominus (7, 7)$?

14. ¿La operación binaria definida en el problema 13 satisface la ley de cerradura? Dar algunos ejemplos.

15. ¿La operación binaria definida en el problema 13 satisface la ley conmutativa? ¿La ley asociativa?

16. ¿Hay un elemento que actúe como idéntico para la operación binaria definida en el problema 13? ¿Cuál es?

REFERENCIAS

Banks, J. Houston, *Elements of Mathematics*, Allyn and Bacon, Boston, 1964, Cap. II, secs. 2.7–2.12.
Hafstrom, John, E., *Basics Concepts in Modern Mathematics*, Addison Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1961, Cap. II, secs. 2–5.
Larsen, Harold, D., *Arithmetic for Colleges*, The Macmillan Company, Nueva York, 1958, Cap. I, secs. 7, 8 y 9.
Mueller, Francis J., *Arithmetic, Its Structure and Concepts*, Prentice Hall, Englewood, Cliffs, Nueva Jersey, 1964, unidades 4, 5 y 6.
Swain, Robert L., and Eugene Nichols, *Understanding Arithmetic*, rev. ed. Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1965, Ch. VI.
Uspensky, J. V. y M. A. Heaslet, *Elementary Number Theory*, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1939.

CAPITULO 6

El sistema de los números enteros

6.1 INTRODUCCION

Históricamente, los números naturales fueron inventados con el objeto de contar. Los números racionales (fracciones) fueron introducidos en conexión con problemas de medición. Pasó mucho tiempo para que el cero fuera aceptado como número. Lo mismo podemos decir de los números negativos. A pesar de que algunos números irracionales fueron conocidos por los matemáticos de la Grecia antigua, no fue sino hasta hace relativamente poco tiempo que se desarrolló una teoría completa de los números irracionales. En el sistema educacional actual se utiliza casi el mismo orden de desarrollo en la enseñanza de los números. Si se introducen los números en este orden se aprenden probablemente mejor que si se estudiaran en otro orden, ya que es fácil relacionar cada nuevo concepto de número con experiencias físicas. El concepto de mitad es algo que se aprende mucho antes de que se introduzca $\frac{1}{2}$ como número. En el momento en que se introduce $\frac{1}{2}$ como número, es fácil relacionar el hecho de que dos mitades de un pastel son lo mismo que un pastel entero con el hecho de que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Estas analogías deben seleccionarse cuidadosamente. Así, el afirmar que dos mitades de algo son iguales al entero, tiene sentido solamente en algunos contextos. ¡No mucha gente estaría dispuesta a aceptar dos mitades de llanta de automóvil por una entera!

Nos alejamos de lo tradicional y tratamos los números negativos antes de tratar las fracciones (los números racionales). Esto no presenta mayor dificultad, ya que éste no es un primer curso de aritmética. Por el contrario, nos permite presentar los diferentes sistemas numéricos en el orden que nos parece razonable. Este enfoque nos permite recalcar las ventajas y las limitaciones de cada sistema y alcanzar un conocimiento profundo de la *estructura* de los diferentes sistemas numéricos. La idea de la estructura de los sistemas numéricos es importante para la comprensión de la estructura de las matemáticas. Esperamos, finalmente, aclarar los procesos aritméticos en términos de los sistemas de numeración y de la estructura de estos últimos.

Para una discusión de la enseñanza de la aritmética de números con signo a estudiantes de escuela primaria, ver "A Rationale in Working with Signed Numbers" de Louis S. Cohen, en *The Arithmetic Teacher,* de Noviembre de 1965.

6.2 EL CONJUNTO DE LOS ENTEROS

Recuérdese que el conjunto N de números naturales es el conjunto "de los números que sirven para contar", $\{1, 2, 3, \ldots\}$. El conjunto W de los números enteros no negativos es el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Por *sistema* de números enteros no negativos entendemos el conjunto W, las dos operaciones binarias, $+$ y $\cdot$, y las reglas que rigen el comportamiento de los números con relación a dichas operaciones binarias.

El sistema de los números enteros no negativos es un sistema en el cual podemos contestar las siguientes preguntas sencillas.

Primera: ¿Cuál es el número $2 + 3$? Escribimos esto así:

$$2 + 3 = ?$$

ó

$$2 + 3 = n, \quad n = ?$$

Segunda: "Estoy pensando en un número. Si aumento 3 a este número, obtengo 5. ¿Cuál es el número?" Escribimos esto así:

$$n + 3 = 5, \quad n = ?$$

(Estamos haciendo básicamente una sustracción.)

Hay, sin embargo, severas limitaciones en el sistema de números enteros no negativos. Preguntas similares al modelo de la segunda pregunta no necesariamente tienen respuestas. Por ejemplo, ¿qué número debe ser sumado a 5 para obtener 4? ¿Qué número sumado a 3 da 0? O sea:

$$5 + ? = 4.$$

$$3 + ? = 0.$$

Con el objeto de responder a estas preguntas sencillas y a otras semejantes, definimos un nuevo conjunto I, al que llamamos *los enteros*.

Digamos que

> $^{-}3$ es el número que sumado a 3 da 0 y es el único con tal propiedad.
> $^{-}1$ es el número que sumado a 1 da 0 y es el único con tal propiedad.
> $^{-}15$ es el número que sumado a 15 da 0 y es el único con tal propiedad.

En general, si n es cualquier número, ^{-}n es el número que sumado a n da 0, y, para cada n, es único. Al nuevo número ^{-}n, se le llama *inverso aditivo* de n.

El número n puede ser cualquier elemento de J, y puesto que 3 es el número que sumado a $^{-}3$ da 0, y él es único, *aditivo inverso* de n es un nombre más apropiado que "negativo de n".

Obsérvese que

$$^{-}3 + 3 = 0,$$

y

$$^{-}3 + {}^{-}(^{-}3) = 0,$$

y puesto que $^{-}3$ tiene solamente un inverso aditivo, es

$$^{-}(^{-}3) = 3$$

En general, de la definición de inverso aditivo surge claramente que

$^{-}(^{-}m) = m$ para cualquier entero m. **I–1**

Usaremos esto con gran frecuencia en lo sucesivo y nos referiremos a este hecho con el símbolo **I–1**.

> **Definición 6.2.** El *conjunto* J de los enteros está formado por el conjunto N de números los naturales, el cero y, para cada n en N, el número ^{-}n tal que $n + {}^{-}n = 0$. Es decir,
>
> $$J = \{\ldots, {}^{-}n, \ldots, {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}.$$

Los números $^{-}1$, $^{-}2$, $^{-}3$, etc., cuando los asociamos con la línea numérica, se trazan a la izquierda del punto marcado con 0, en la misma forma que 1, 2, 3, etc., fueron trazados a la derecha (ver sección 4.16a).

Conjunto J

$$\underbrace{\ldots {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1,}_{\text{Enteros negativos}}\ \underbrace{0,}_{\text{Cero}}\ \overbrace{\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots}_{\text{Enteros positivos}}}^{\text{El conjunto } N}$$

6.3 PROPIEDADES DEL CONJUNTO DE ENTEROS

Obsérvese que el conjunto N de los números naturales es un subconjunto del conjunto J de los enteros. Como enteros, nos referiremos a los números naturales como *enteros positivos*. Los aditivos inversos de los enteros positivos se llaman *enteros negativos*.

Si decimos que m es un entero, entonces *solamente uno* de los siguientes asertos es cierto:

1. $m = 0$, o bien
2. m es positivo, o bien
3. ^-m es positivo.

Por ejemplo: $0 = 0$; 1 es positivo; $^-1$ es tal que $^-(^-1)$ es positivo; etc. Es decir, el *conjunto de los enteros* está dividido en tres conjuntos mutuamente ajenos y cualquier entero pertenece a uno y únicamente a uno de estos tres conjuntos. Esto es un enunciado de la *ley de la tricotomía*.

6.3a Propiedades de los enteros positivos

Recuérdese que los números naturales son los *enteros positivos* cuando se les considera como un subconjunto de los enteros. Pero el conjunto de los números naturales es cerrado con respecto a las operaciones binarias de suma y multiplicación. Volvemos a enunciar las leyes de clausura (1 y 2 siguientes) porque serán útiles posteriormente para establecer las relaciones de orden.

1. La suma de dos enteros positivos es un entero positivo.
2. El producto de dos enteros positivos es un entero positivo.
3. Si m es un entero y $m \neq 0$, entonces uno de los casos siguientes es posible: m es positivo o ^-m es positivo.

Extenderemos las operaciones binarias de adición y multiplicación al conjunto de enteros y exigiremos que las leyes de clausura, las leyes conmutativas, las leyes asociativas y la ley distributiva se cumplan. El nuevo sistema, formado por el conjunto J de los enteros, las operaciones binarias definidas en J y las leyes que rigen estas operaciones, se llama *el sistema de los enteros* (o de los números enteros).

Ejercicios 6.3

1. ¿Es el 0 un número positivo? ¿Por qué?
2. ¿Es $^-0$ un número negativo?
3. ¿Es $0 = {}^-0$? ¿Muestre Ud. por qué?

4. Si a es un entero, ¿es $-(-a)$ positivo? ¿Cuál es el significado de $-(-a)$? ¿A qué es igual lo anterior? ¿Qué es $-(-3)$? ¿Qué es $-m$ si $m = -2$?

5. Enuncie de otra manera la ley de la tricotomía para los enteros.

6. ¿Es $-m$ un entero negativo si m es un entero?

7. ¿Qué es $-(m + n)$?

8. ¿Cuál es el inverso aditivo de $^-3$?

9. ¿Cuál es el inverso aditivo de ^-m?

10. ¿Cuál es el inverso aditivo de -0?

6.4 EL SISTEMA DE LOS ENTEROS

El conjunto de enteros puede considerarse como un conjunto ampliado de números que contiene al conjunto de los números naturales y al conjunto $\{0\}$ como subconjuntos propios. Cuando hablamos del *sistema de los números enteros* pensamos en el conjunto J definido en la sección 6.2 y en las operaciones binarias adición y multiplicación, satisfaciendo ciertas leyes. Queremos que la adición de los enteros sea una extensión de la operación binaria de la adición de los números naturales en el sentido de que, cuando pensemos en los números naturales como enteros positivos, la adición de los enteros positivos sea consistente con la adición de los números naturales. Lo mismo es cierto para la multiplicación.

En el sistema de enteros, que es una ampliación del sistema de enteros no negativos, requerimos de las operaciones binarias que satisfagan las mismas leyes que en el sistema de los números enteros no negativos y además una nueva ley concerniente a la existencia y unicidad del aditivo inverso de cualquier elemento.

Definición 6.4. Por el *sistema de enteros* entendemos el conjunto

$$J = \{\ldots, {}^-n, \ldots, {}^-4, {}^-3, {}^-2, {}^-1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\},$$

las operaciones binarias, adición $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$, y las siguientes leyes:

Leyes de clausura

1. Para m y n en J hay una suma determinada en forma única, que escribimos $m + n$, en J.

2. Para m y n en J hay un producto determinado en forma única, que escribimos $m \cdot n$ en J.

Leyes asociativas. Para m, n y k en J,

3. $m + (n + k) = (m + n) + k$.
4. $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$.

Leyes conmutativas. Para m y n en J,

5. $m + n = n + m$.
6. $m \cdot n = n \cdot m$.

Ley distributiva. Para m, n, y k en J,

7. $m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k$.

Identidades

8. Existe un elemento único 0 tal que para cualquier m en J es $m + 0 = 0 + m = m$.

9. Existe un elemento único 1 tal que para cualquier m en J es $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$.

Inversos aditivos

10. Para cada m en J hay un elemento único ^-m en J tal que $m + {}^-m = {}^-m + m = 0$.

6.4a Suma de enteros

El uso de las leyes anteriores nos permite extender la operación binaria de adición al conjunto de los números enteros, usando lo que ya sabemos acerca de la adición en el conjunto de los números enteros no negativos.

"Los enteros positivos" es otro nombre para los números naturales, de tal forma que la adición de los enteros positivos es la adición de los números naturales.

Para extender la operación binaria de adición a los enteros negativos hacemos uso de nuestros conocimientos acerca de la adición de enteros positivos. Si m y n son dos enteros cualesquiera, afirmamos que

$$^-m + {}^-n = {}^-(m + n). \qquad \textbf{(A-1)}$$

Esta afirmación establece que la operación binaria *adición* asigna al par ordenado $(^-m, {}^-n)$ el número que escribimos como $(^-m + {}^-n)$, el cual tiene otro nombre, $^-(m + n)$. Este "otro nombre" para el número es el que nos indica cómo encontrar la suma en términos de la adición de enteros positivos.

El siguiente ejemplo indica el procedimiento para establecer esta afirmación, usando enteros positivos para m y n. La demostración del caso general se deja como un ejercicio para el lector.

Ejemplo 1

Deseamos demostrar que $(^-2 + ^-3) = ^-(2 + 3)$.

$$
\begin{aligned}
^-(2+3) + (2+3) &= 0 \text{ por la propiedad de inversos aditivos.}\\
(^-2 + ^-3) + (2+3) &= (^-2 + ^-3) + (3+2) && \text{¿Por qué?}\\
&= ^-2 + (^-3 + 3) + 2 && \text{¿Por qué?}\\
&= ^-2 + 0 + 2 && \text{¿Por qué?}\\
&= ^-2 + 2 && \text{¿Por qué?}\\
&= 0 && \text{¿Por qué?}
\end{aligned}
$$

Tenemos

$$^-(2 + 3) + (2 + 3) = 0$$

y

$$(^-2 + ^-3) + (2 + 3) = 0.$$

En vista de que el inverso aditivo de cualquier número, en este caso $(2 + 3)$, debe ser único (uno y solamente uno), concluimos que

$$(^-2 + ^-3) = ^-(2 + 3).$$

Para extender la operación binaria a la adición de un entero negativo y un entero positivo, usando propiedades ya desarrolladas, afirmamos que si m y n son enteros, entonces $(^-m + n)$ es el número que sumado a m da n.

Esta afirmación establece que la operación binaria *adición* asigna al par ordenado $(^-m, n)$ el número que se escribe como $(^-m + n)$. Es la solución a la ecuación

$$m + ? = n.$$

Indicaremos el procedimiento para establecer esta afirmación, y prácticamente para encontrar un nuevo nombre para el número $(^-m + n)$, por medio de diversos ejemplos. Con este objeto, recordemos la ecuación sencilla

$$3 + x = 7, \quad x = ?$$

¿Qué número debe sumarse a 3 para obtener 7?

Procedamos a "resolver" esta ecuación. Sumando el inverso aditivo de 3 a cada miembro de la ecuación tenemos:

$$
\begin{aligned}
^-3 + (3 + x) &= 7 + ^-3\\
(^-3 + 3) + x &= (7 + ^-3) && \text{¿Por qué?}\\
0 + x &= (7 + ^-3) && \text{¿Por qué?}\\
x &= (7 + ^-3) && \text{¿Por qué?}
\end{aligned}
$$

Pero, por la tabla de propiedades elementales sabemos que $4 + 3 = 7$. Por sustitución tenemos:

$$\begin{aligned} x &= (4 + 3) + {}^-3 & \\ &= 4 + (3 + {}^-3) & \text{¿Por qué?} \\ &= 4 + 0 & \text{¿Por qué?} \\ &= 4 & \text{¿Por qué?} \end{aligned}$$

Esto nos dice que $(7 + {}^-3)$ es exactamente otro nombre para 4, o que $(7 + {}^-3) = 4$. Por convención, escribimos esto como $(7 - 3)$ en lugar de $(7 + {}^-3)$.

Esto puede parecer una forma innecesariamente complicada de resolver un problema muy sencillo. Admitimos que esto puede parecer así, pero el objeto de este ejemplo es ilustrar el papel de las leyes básicas en la comprensión de la aritmética. El siguiente problema es esencialmente el mismo que el anterior, pero en general se evita en enseñanza primaria y en niveles intermedios por el hecho de que el resultado es un entero negativo.

$$9 + x = 4, \quad x = ?$$

¿Qué número sumado a 9 da 4?

Nuevamente, procederemos a "resolver" esta ecuación.

$$\begin{aligned} 9 + x &= 4 & \\ {}^-9 + (9 + x) &= 4 + {}^-9 & \text{¿Por qué?} \\ ({}^-9 + 9) + x &= 4 + {}^-9 & \text{¿Por qué?} \\ 0 + x &= 4 + {}^-(4 + 5) & \text{¿Por qué?} \\ x &= 4 + ({}^-4 + {}^-5) & \text{¿Por qué?} \\ x &= (4 + {}^-4) + {}^-5 & \text{¿Por qué?} \\ x &= 0 + {}^-5 & \text{¿Por qué?} \\ x &= {}^-5 & \text{¿Por qué?} \end{aligned}$$

Es esencial ver que $(7 - 3)$, esto es, $(7 + {}^-3)$ es el número que sumado a 3 da 7. También, $(11 - 5)$, que es $(11 + {}^-5)$, es el número que sumado a 5 da 11.

Estas advertencias conducen naturalmente a la generalización de que $(n - m)$ es aquel número que sumado a m da n.

$$(n - m) + m = n.$$

Es más, en vista de que

$$m + ({}^-m + n) = n,$$

entonces

$$({}^-m + n) = (n + {}^-m) = n - m. \tag{A-2}$$

Es posible que esta expresión no tenga significado en el sistema de los números enteros no negativos porque $n - m$ puede ser un número negativo. En la aritmética elemental $n - m$ se interpreta como la *diferencia* de n y m, o como m *restado* de n. La "sustracción", como operación binaria, no es ni asociativa ni conmutativa (ver secciones 4.8b, 4.8c).

Para resumir esta sección sobre la adición de enteros, consideremos varios ejemplos numéricos.

Ejemplo 2

(a) $^-5 + {}^-9 = {}^-(5 + 9) = {}^-14$
(b) $^-5 + 9 = {}^-5 + (5 + 4) = ({}^-5 + 5) + 4 = 0 + 4 = 4$
(c) $5 + {}^-9 = 5 + {}^-(5 + 4) = 5 + ({}^-5 + {}^-4)$
$= (5 + {}^-5) + {}^-4 = 0 + {}^-4 = {}^-4$

Ejemplo 3

(a) $^-6 + {}^-15 = {}^-(6 + 15) = {}^-21$
(b) $^-6 + 15 = {}^-6 + (6 + 9) = ({}^-6 + 6) + 9 = 0 + 9 = 9$
(c) $6 + {}^-15 = 6 + {}^-(6 + 9) = 6 + ({}^-6 + {}^-9)$
$= (6 + {}^-6) + {}^-9 = 0 + {}^-9 = {}^-9$

Ejercicios 6.4a

1. Sumar $9 + {}^-3$ demostrando y justificando cada paso.
2. Sumar $^-7 + 4$, demostrando y justificando cada paso.
3. Volver a escribir los problemas de los ejemplos 2 y 3, justificando cada paso.
4. Demostrar que $({}^-m + {}^-n) = {}^-(m + n)$ para cualquier entero m y n.
5. Escribir los inversos aditivos de cada una de las siguientes expresiones:

(a) 12	(b) 2
(c) $^-3$	(d) $^-1$
(e) 0	(f) a
(g) ^-a	(h) $2 + a$
(i) $^-2 + a$	(j) $^-a + 2$
(k) $^-3 + 3$	(l) $^-5 + 3$
(m) $^-(a + b) + 2$	(n) $^-2 + (a + b)$
(o) $^-a + b + 3$	(p) $^-3 + {}^-2$

6. Sumar

(a) $^-3 + {}^-5$	(b) $^-2 + {}^-1 + {}^-6$
(c) $a + {}^-3 + {}^-1$	(d) $^-13 + {}^-8$
(e) $^-18 + 3 + {}^-7$	(f) $(18 + {}^-3) + {}^-7$
(g) $18 + ({}^-3 + {}^-7)$	(h) $^-9 + {}^-13$

7. Resolver las siguientes ecuaciones en detalle y justificar cada paso:

(a) $3 + n = 10$.	(b) $n + 5 = 1$.
(c) $a + x = b$, encontrar x.	(d) $n + a = b$, encontrar x.

8. Demostrar que $17 - 12$ es otro nombre para 5.

9. Demostrar que $372 - 176$ es otro nombre de 196.

10. Partimos una vara que mide una yarda en dos partes. Si una parte mide n pulgadas, ¿qué longitud tiene la otra parte?

11. ¿Dónde debemos partir dicha vara si la parte más larga debe ser 3 veces la longitud de la parte más corta?

12. ¿Es la sustracción, como operación binaria, conmutativa? Utilice un ejemplo numérico para justificar su respuesta.

13. ¿Es la sustracción, como operación binaria, asociativa? Utilice un ejemplo numérico para justificar su respuesta.

14. Use las propiedades del sistema de los enteros (ver definición 6.4) para probar que $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$ para cualquier entero m.

6.4b Multiplicación de enteros

El conjunto de enteros positivos es el mismo que el conjunto de números naturales. Así, la multiplicación de los enteros positivos será la misma que la multiplicación de los números naturales.

A fin de extender la operación de multiplicación a los enteros, demostraremos que, para m y n enteros,

$$(^-m)(n) = {}^-(m \cdot n). \qquad \text{(M-1)}$$

Antes de intentar la demostración en el caso general, mostraremos un ejemplo numérico. Usaremos el dato de que un número tiene solamente un inverso aditivo para demostrar que $(^-4)(3) = {}^-12$.

Ejemplo 1

$$^-12 + 12 = 0 \qquad \text{¿Por qué?}$$
$$^-(4 \cdot 3) + (4 \cdot 3) = 0 \qquad \text{¿Por qué?}$$

Esto es, $^-(4 \cdot 3)$ es el inverso aditivo de $(4 \cdot 3)$.

Pero

$$(^-4)(3) + (4)(3) = (^-4 + 4)3 \qquad \text{¿Por qué?}$$
$$(^-4 + 4)\,3 = 0 \cdot 3 = 0 \qquad \text{¿Por qué?}$$

Por lo tanto, $(^-4)(3)$ es también un inverso aditivo de $(4 \cdot 3)$. Pero el inverso aditivo de todo número es único. Por lo tanto, $(^-4)(3) = {}^-(4 \cdot 3) = {}^-12$.

Ahora demostraremos, en general, que $(^-m)(n) = {}^-(m \cdot n)$.

$^-(m \cdot n) + (m \cdot n) = 0$	Por las propiedades del inverso aditivo.
$(^-m)(n) + (m)(n) = (^-m + m)n$	Por la ley distributiva.
$(^-m + m)n = 0 \cdot n = 0$	Por las propiedades del inverso aditivo y cero. (Ver problema 14, ejercicio 6.4a.)

Hemos demostrado que $^-(m \cdot n) + (m \cdot n) = 0$. También hemos demostrado que $(^-m)(n) + (m \cdot n) = 0$. Pero $(m \cdot n)$ tiene solamente un inverso aditivo, es decir $(^-m)(n) = {}^-(m \cdot n)$.

En particular, obsérvese que hemos mostrado cómo encontrar el producto de un entero positivo y un entero negativo en términos del producto de dos enteros positivos.

Similarmente, para cualesquiera enteros m y n,

$$(m)(^-n) = {}^-(m \cdot n).$$

La prueba de esto se dejará como un ejercicio para el lector.

Los principios anteriores pueden resumirse diciendo que la operación binaria de multiplicación asigna a cualquier par ordenado, que consista de un entero y el inverso aditivo de un entero, el inverso aditivo del producto de los enteros. El aserto "un número negativo por un número positivo da un número negativo" resulta ser una simple consecuencia de las leyes básicas.

Ahora consideremos el producto de los inversos aditivos de dos enteros cualesquiera. Demostraremos que

$$(^-m)(^-n) = m \cdot n. \qquad \text{(M-2)}$$

Para esto empecemos con la expresión

$$(^-m)(^-n) + (^-m)(n) + (m)(n)$$

y demostraremos que es simultáneamente igual a $(^-m)(^-n)$ y a $(m)(n)$. Entonces, el resultado deseado resulta de la transitividad de igualdades.

$(^-m)(^-n)+(^-m)(n)+(m)(n)=$	$(^-m)(^-n)+(^-m)(n)+(m)(n)=$
$(^-m)(^-n)+[(^-m)(n)+(m)(n)]=$	$[(^-m)(^-n)+(^-m)(n)]+(m)(n)=$
$(^-m)(^-n)+(^-m+m)(n)=$	$(^-m)(^-n+n)+(m)(n)=$
$(^-m)(^-n)+0\cdot n=$	$(^-m)(0)+(m)(n)=$
$(^-m)(^-n)+0=$	$0+(m)(n)=$
$(^-m)(^-n)$	$(m)(n)$

Por lo tanto, $(^-m)(^-n) = m \cdot n$. Esto implica la regla familiar: "un número negativo por un número negativo es un número positivo." Hemos demostrado que esto es un hecho que es una consecuencia de las leyes básicas.

Ejercicios 6.4b

Probar las siguientes igualdades, usando las propiedades del sistema de enteros, **I-1**, **A-1**, **A-2**, **M-1**, **M-2**, y las propiedades del cero:

1. $^-(1 \cdot 1) = {}^-1$.

por ejemplo, $^-(1 \cdot 1) = (^-1)(1)$ por **M-1**.

$= {}^-1$ por elemento identidad de la multiplicación.

2. $(^-1)(^-1) = 1$.
3. $(^-2)(^-3) = (2)(3)$.
4. $(^-5)(0) = 0$.
5. $(^-2)(^-3)(^-4) = {}^-24$.
6. $(^-2)(^-3 + {}^-4) = 14$, en dos formas.
7. $(^-3)(^-4 + {}^-5) = 27$.
8. $8(7 - 3) = 32$, en dos formas.
9. $8(3 - 7) = {}^-32$, en dos formas.
10. $^-(7 - 3) = (3 - 7)$.
11. $^-(m - n) = (n - m)$.
12. $^-(^-3) = 3$.
13. $(^-2)(3) = {}^-(2 \cdot 3)$.
14. $(m)(^-n) = {}^-(m \cdot n)$.
15. $(^-n)(0) = 0$.

6.5 LAS LEYES DE CANCELACION

Hemos visto que en general $n \cdot 0 = 0$. (Ver problema 14, ejercicio 6.4a.) Esto es sorprendente para mucha gente. De hecho, mucha gente confunde el número 0 con el significado de la palabra "nada". Repetimos que 0 no es lo mismo que nada, 0 es *un número*, un número muy importante y útil. Previamente, el número 0 fue usado para definir los inversos aditivos. Usaremos este número nuevamente cuando discutamos el *orden* en los enteros. Por el momento consideraremos otro principio aritmético aparentemente obvio que incluye al 0.

El sistema de enteros no tiene divisores de cero. Por esto entendemos que el producto de dos enteros es cero si y solamente si uno de los factores es cero, es decir, $a \cdot b = 0$ si y solamente si $a = 0$ ó $b = 0$. (La "ó" aquí tiene el significado de inclusión.) (Ver problema 7. ejercicio 7.10a.) Este principio tendría indudablemente más sentido si uno estuviese familiarizado con un sistema matemático donde el producto de dos elementos diferentes de cero fuera cero. Esto se considera en la sección 6.14b. Por el momento consideremos los siguientes ejemplos:

$$2 \cdot 0 = 3 \cdot 0 \quad \text{porque} \quad 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{y} \quad 3 \cdot 0 = 0.$$

En general,

$$x \cdot 0 = y \cdot 0$$

Ahora consideremos lo siguiente:

$$x \cdot 2 = y \cdot 2.$$

Sumando el inverso aditivo de $y \cdot 2$ a ambos miembros de la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} x \cdot 2 + {}^{-}(y \cdot 2) &= y \cdot 2 + {}^{-}(y \cdot 2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $(x + {}^{-}y) \cdot 2 = 0$ por la ley distributiva.

Observen que estamos examinando el producto de dos términos, siendo el primero $(x + {}^{-}y)$ y el segundo 2. Usando el hecho de que el producto de dos términos es 0 si y solamente si uno de los factores es 0, vemos que, puesto que 2 no es 0, $(x + {}^{-}y)$ debe ser 0. Esto es,

$$(x + {}^{-}y) = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (x + {}^{-}y) + y &= 0 + y \\ x + ({}^{-}y + y) &= y && \text{¿Por qué?} \\ x + 0 &= y && \text{¿Por qué?} \\ x &= y && \text{¿Por qué?} \end{aligned}$$

Esto es un ejemplo de la ley de *cancelación para la multiplicación*.

Si a es un entero y $a \cdot x = a \cdot y$, ¿podemos concluir que $x = y$? Hemos visto que si $a = 0$, no podemos. Si $a \neq 0$, entonces podemos decir que $x = y$.

La ley de cancelación para la multiplicación. Si $a \neq 0$ y $a \cdot x = a \cdot y$, entonces $x = y$.

No estamos "dividiendo" entre a. Este es un punto sutil que se explicará más adelante cuando discutamos el sistema de números racionales.

Hay también una ley de *cancelación para la adición*. Sin embargo, esta ley no requiere condiciones sobre los términos.

Ley de cancelación para la adición. Si $a + x = a + y$, entonces $x = y$.

La ley de cancelación para la adición puede ser probada como sigue:

$$\begin{aligned} a + x &= a + y && \text{Hipótesis} \\ {}^{-}a + (a + x) &= {}^{-}a + (a + y) && \text{¿Por qué?} \\ ({}^{-}a + a) + x &= ({}^{-}a + a) + y && \text{¿Por qué?} \\ 0 + x &= 0 + y && \text{¿Por qué?} \\ x &= y && \text{¿Por qué?} \end{aligned}$$

Ejercicios 6.5

1. Si $(x - 3)(x - 7) = 0$, ¿qué puede usted decir acerca de x? ¿Por qué? (Este tipo de argumento se usa en la solución de ecuaciones cuadráticas por factorización.)

2. Si $x + 3 = y + 3$, ¿qué puede usted decir acerca de x? ¿Por qué?

3. Si $y = 6/(x - 1)$, ¿qué puede usted decir acerca de x? ¿Por qué?

4. Diga qué ley está ejemplificada en cada una de las siguientes igualdades:

(a) $xy = yx$.
(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$
(c) $xy + xz = x(y + z)$
(d) $x + a = a + x$
(e) $(2a)b = 2(ab)$
(f) $a + 0 = a$
(g) $a = 1 \cdot a$
(h) $0 = a + {}^-a$
(i) $({}^-a)(b + {}^-b) = ({}^-a)(b) + ({}^-a)({}^-b)$

5. Exponga la razón que justifica cada uno de los siguientes pasos en la demostración de que $({}^-a)({}^-b) = (a)(b)$:

$$\begin{aligned}
({}^-a)({}^-b) &= ({}^-a)({}^-b) + 0 \\
&= ({}^-a)({}^-b) + [{}^-(a)(b) + (a)(b)] \\
&= ({}^-a)({}^-b) + [({}^-a)(b) + (a)(b)] \\
&= [({}^-a)({}^-b) + ({}^-a)(b)] + (a)(b) \\
&= ({}^-a)({}^-b + b) + (a)(b) \\
&= ({}^-a)(0) + (a)(b) \\
&= 0 + (a)(b) \\
&= (a)(b) \\
({}^-a)({}^-b) &= (a)(b)
\end{aligned}$$

6. ¿Cuál es el significado de ${}^-({}^-a)$?

7. ¿Qué es $-({}^-a)$? ¿Puede probar esto?

8. ¿Para qué valores enteros de x es $(x - 3)(x - 7)$ positivo?

9. Si m es un entero, ¿es $-(m^2)$ un número negativo?

10. Si m y n son enteros, ¿es $({}^-m)({}^-n)$ un entero positivo?

11. Justificar cada paso en la prueba de la ley de cancelación para la adición.

12. ¿Qué significa para nosotros divisores del cero?

13. Exponga la ley de cancelación para la multiplicación de enteros.

6.6 NUMEROS PRIMOS Y NUMEROS COMPUESTOS

Hemos introducido el concepto de divisibilidad para los números naturales con anterioridad. Es decir, 12 es divisible por 3, 72 es divisible por 12, y 72 es también divisible por 9 y 8. Extendamos este concepto a los enteros.

Definición 6.6a. Un entero n es divisible por un entero m, $m \neq 0$, si existe un entero único k tal que $n = m \cdot k$.

Definición 6.6b. Decimos que m es un *divisor* de n si n es divisible por m. También podemos decir que m es un factor de n.

Es obvio que 1 divide a n y también que n divide a n, puesto que $n = n \cdot 1$.

Definición 6.6c. Decimos que m es un *divisor* propio de n si m es un divisor de n y $m \neq 1$, $m \neq -1$, $m \neq n$ y $m \neq -n$. Decimos en este caso que m es un *factor propio* de n.

(*Nota:* Aquí y en lo sucesivo usamos la notación tradicional $-n$ para el inverso aditivo de n.)

Así, 2 es un divisor propio de 18; 9 es también un divisor propio de 18; y 2 y 9 son factores propios de 18.

Obsérvese que no podemos decir que 0 divide a algún número. Supongamos que preguntamos, ¿"0 divide a 2"? Si es así debemos ser capaces de escribir 2 como un múltiplo de 0. Pero 0 veces cualquier número es 0, no 2. Por otra parte, cualquier entero diferente de cero divide a 0, puesto que $0 = 0 \cdot n$.

Ahora, consideremos el siguiente subconjunto del conjunto de enteros positivos:

$$\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$$

¿Cuál cree usted que debe ser el siguiente entero? Es 11. ¿Y el siguiente? Es 13. Decir qué criterio se usa para determinar si un entero pertenece a este conjunto.

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$$

Estos números no tienen factores propios y se llaman *números primos, primos.*

Definición 6.6d. Un entero $p, p > 1$, es *primo* si no tiene divisores propios.

Los únicos divisores de un primo p son $1, -1, p$, y $-p$.

Definición 6.6e. Un entero positivo diferente de 1 que no es primo se llama *compuesto.*

Los enteros negativos pueden ser clasificados análogamente, considerando el entero negativo $(-n)$, $n \neq 1$ como $(-1)(n)$ y examinando el entero positivo n.

Ejercicios 6.6

1. Hacer una lista de todos los primos menores que 50.

2. Hacer una lista de *todos* los divisores positivos de 36. También de los divisores *primos.*

3. Hacer una lista de *todos* los divisores positivos de 52, y otra de los divisores *primos.*

4. Hacer una lista de *todos* los divisores positivos de 14, y otra de los divisores *primos*.

5. Hacer una lista de *todos* los divisores positivos de 39. También los divisores *primos*.

6. Encontrar todos los primos menores que 100 desechando primero los múltiplos de 2, luego los múltiplos de 3, después los múltiplos de 5, y así sucesivamente. (La criba de Eratóstenes, ver Swain, p. 114.)

7. ¿Cómo puede usted decir si un número es divisible por 2? ¿Y por 3? ¿Por 4? ¿Por 5? ¿Por 9?

8. Hacer una lista de los divisores comunes de 50 y 52; de 36 y 39; de 39 y 52.

9. Escribir los siguientes números como producto de factores primos: (a) 72, (b) 356, (c) 512, (d) 1000.

10. ¿Es 1 divisible por 0? ¿Por qué? ¿Es 0 divisible por 1? ¿Por qué?

6.7 FACTORIZACION EN PRIMOS

El conjunto de enteros positivos mayores de 1 está dividido en dos conjuntos ajenos, el conjunto formado por los primos y el formado por los compuestos. Los primos son, en cierto sentido, los ladrillos en la construcción de los compuestos, como se indica en la siguiente proposición.

El teorema fundamental de la aritmética

Cualquier entero, diferente de 0 y ± 1, puede escribirse como producto de primos y ± 1, en forma única excepto por el orden en que se escriban los factores.

Ejemplo 1

Considérese el entero 72. Podemos pensar en éste como $9 \cdot 8$; después, factorizando más, como $3 \cdot 3 \cdot 8 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^2 \cdot 2^3$. Por otra parte, podemos considerarlo como sigue: $72 = 6 \cdot 12 = 2 \cdot 3 \cdot 12 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$. Hemos obtenido la factorización de 72 en factores primos en dos formas diferentes, pero hemos llegado a una factorización única excepto por el orden de los factores.

El teorema fundamental de la aritmética puede ser demostrado usando las nociones elementales de la teoría de los números y la inducción matemática. Para nuestra finalidad lo aceptaremos como un principio fundamental.

El problema de encontrar los factores primos de un número es, en general, tedioso. Para números grandes el problema se ha resuelto con las máquinas calculadoras modernas. Hay algunos hechos acerca de la divisibilidad que nos permiten por inspección decir si un número dado es divisible por los más pequeños números. Presentamos estos hechos, algunos con demostración y otros sin ella, para así facilitar la factorización de los números en sus factores primos. En especial, se debe observar que estos criterios de divisibilidad se apoyan fundamentalmente en el hecho de que nuestro sistema de numeración es un sistema decimal de valor relativo.

Divisibilidad por 2. Un número es divisible por 2 si y solamente si el dígito de las unidades de su numeral es par. La razón para esto es que cada potencia de 10 excepto 10^0 es divisible por 2. Por lo tanto, el número es divisible por 2 si y solamente si el dígito de las unidades de su numeral es divisible por 2.

Divisibilidad por 3. Un número es divisible por 3 si y solamente si la suma de los dígitos de su numeral es divisible por 3. Haremos que esto parezca razonable por medio de un ejemplo.

$$\begin{aligned}
378 &= 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8 \\
&= 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8 \\
&= 3(99 + 1) + 7(9 + 1) + 8 \\
&= 3 \cdot 99 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 9 + 7 \cdot 1 + 8 \\
&= (3 \cdot 99 + 7 \cdot 9) + (3 + 7 + 8) \\
&= (3 \cdot 33 + 7 \cdot 3)3 + (3 + 7 + 8)
\end{aligned}$$

Vemos que 3 divide al primer término a la derecha en la última ecuación. Si también divide al segundo término $(3 + 7 + 8)$, entonces divide a 378. Por lo tanto, si 3 divide a $(3 + 7 + 8)$, 3 divide a 378. Además, si 3 divide a 378, debe dividir a $(3 + 7 + 8)$. Este argumento está basado en la ley distributiva y en el significado de "divide a". Observar que la misma regla y un argumento similar se aplica a la divisibilidad entre 9.

Divisibilidad por 5. Un número es divisible entre 5 si y solamente si el dígito de las unidades de su numeral es 0 ó 5.

Divisibilidad por 7. La mejor forma de ilustrar una técnica para probar la divisibilidad entre 7 será con un ejemplo.

Ejemplo 1

5236 es divisible entre 7 si $523 - 2 \cdot 6 = 511$ lo es.
511 es divisible entre 7 si $51 - 2 \cdot 1 = 49$ lo es.
Como 49 es divisible entre 7, también 511 y 5236 lo son.

Ejemplo 2

25,252 es divisible entre 7 si $2525 - 2 \cdot 2 = 2521$ lo es.
2521 es divisible entre 7 si $252 - 2 \cdot 1 = 250$ lo es.

250 es divisible entre 7 si $25 - 2 \cdot 0 = 25$ lo es.
Como 25 no es divisible entre 7, tampoco 25,252 lo es.

Divisibilidad por 11. Un procedimiento similar puede usarse para verificar la divisibilidad entre 11. El único cambio es que el dígito de las unidades se resta multiplicado por 1 y no por 2.

Ejemplo 3

25,256 es divisible entre 11 si $2525 - 6 = 2519$ lo es.
2519 es divisible entre 11 si $251 - 9 = 242$ lo es.
242 es divisible entre 11 si $24 - 2 = 22$ lo es.
Como 22 es divisible entre 11, también 25,256 lo es.

(Ver "A General Test by Divisibility by any Prime (except 2 y 5)" por Benjamín Bold.)

Ejercicios 6.7

1. Hacer una lista de todos los divisores positivos de 72.

2. Hacer una lista de los números primos menores de 100.

3. Expresar cada uno de los siguientes números como producto de factores primos: (a) 84, (b) 198, (c) 975, (d) 144, (e) 4455.

Un entero d es un divisor común de un conjunto de enteros si es divisor de cada uno de ellos.

4. Dar una lista de todos los divisores comunes de 198 y 144.

5. Dar una lista de todos los divisores comunes de 84, 198 y 405.

6. Escribir 21,489 como un producto de factores primos.

7. Escribir 4408 como un producto de factores primos.

8. Dar una lista de los divisores comunes de 4408 y 72.

9. Probar la divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 de los siguientes números: (a) 627,433, (b) 2,288,817, (c) 324,244, (d) 625,530.

10. Recordando que la tabla de multiplicación por 9 resulta ser difícil para algunas personas, considérese lo siguiente:

$$¿9 \times 4 = ? \quad 10 - 4 = 6, \quad 9 - 6 = 3, \quad \text{por lo tanto } 9 \times 4 = 36.$$
$$¿9 \times 8 = ? \quad 10 - 8 = 2, \quad 9 - 2 = 7, \quad \text{por lo tanto } 9 \times 8 = 72.$$
$$¿9 \times 5 = ? \quad 10 - 5 = 5, \quad 9 - 5 = 4, \quad \text{por lo tanto } 9 \times 5 = 45.$$

(a) ¿Por qué da esto la respuesta correcta?

(b) ¿Puede usted extender esta idea a la multiplicación por 9 de cualquier dígito?

6.8 EL ALGORITMO DE LA DIVISION

A pesar de que la relación de "divide a" existe sólo entre algunos pares ordenados de enteros, podemos siempre decir algo acerca de *cualquier* par dado. Por ejemplo, dados los enteros 16 y 7, podemos expresar 16 como un múltiplo de 7 más un residuo de 2.

$$16 = 7 \cdot 2 + 2.$$

Este principio aritmético tan obvio ilustra el algoritmo de la división.

El algoritmo de la división. Si m y n son dos enteros cualesquiera, y n es mayor que 0, entonces existe un par único de enteros, q y r, tales que

$$m = n \cdot q + r,$$

donde r es menor que n y mayor que o igual a 0. Si $r = 0$, entonces n divide a m.

El algoritmo de la división es una proposición que se puede deducir de otras consideraciones básicas; sin embargo, aquí lo aceptamos como un principio fundamental que es intuitivamente posible.

El algoritmo de la división es un principio comparativo acerca del par de enteros m y n. Si consideramos a n como un entero positivo fijo (digamos 3), entonces el algoritmo de la división nos dice que cualquier entero m puede ser escrito como un múltiplo de 3 y con 0, 1 ó 2 como posibles residuos. Si hacemos $n = 7$, los residuos de los enteros cuando se dividen entre 7 son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Nos referiremos a esto nuevamente. Por el momento veremos cómo ello puede aplicarse para encontrar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de un par de enteros.

6.9 EL MAXIMO COMUN DIVISOR

En las secciones subsecuentes de este libro necesitaremos "reducir" fracciones. Veremos que es conveniente escribir $3/4$ en lugar de $39/52$. La idea de "reducir" comprende a la de máximo común divisor.

> **Definición 6.9a.** Un entero positivo, d, es el *máximo común divisor* de los enteros a y b si d es un divisor común de a y b y es un múltiplo de cada uno de los otros divisores comunes.

La abreviatura "*m.c.d.*" designa al máximo común divisor.

Ejemplo 1

m.c.d. $(36, 60) = 12.$
m.c.d. $(-10, 35) = 5.$

m.c.d. $(6, 12) = 6.$
m.c.d. $(5, 7) = 1.$

Definición 6.9b. Si el *m.c.d.* $(a, b) = 1$, decimos que a y b son *primos relativos.*

6.9a El m.c.d. usando factorización en primos

El problema de encontrar el m.c.d. de dos números es sencillo cuando los enteros son pequeños, y puede ser obtenido usualmente por inspección. Hay procedimientos sistemáticos para determinar el m.c.d. de dos enteros. Examinaremos dos métodos. El primer método se ilustra con ejemplos numéricos.

Ejemplo 2

Deseamos encontrar el *m.c.d.* (6, 15). Factorizando tenemos:

$$6 = 2 \cdot 3,$$

y

$$15 = 3 \cdot 5.$$

Observemos que 3 es divisor de 6 y 15 y es el único divisor común positivo diferente de 1. Por lo tanto, *m.c.d.* $(6, 15) = 3$.

Ejemplo 3

Deseamos encontrar el *m.c.d.* de 72, 90. Factorizando tenemos:

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2,$$

y

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

La única potencia del primo 2 que divide a 72 y 90 es 2^1. La potencia mayor del primo 3 que divide a 72 y 90 es 3^2. Estos números pueden ser expresados como

$$72 = (2 \cdot 3^2) \cdot 2^2,$$

y

$$90 = (2 \cdot 3^2) \cdot 5,$$

lo que indica que $(2 \cdot 3^2)$ es un divisor común de 72 y 90, y es el máximo común divisor de 72 y 90 ya que es el producto de las potencias mayores de los primos *comunes a ambos* números.

En general, el *m.c.d.* de dos números, m y n, es el producto de las potencias más grandes de los primos *comunes* a las factorizaciones de m y n.

Ejercicios 6.9a

1. Encontrar el *m.c.d.* de 84 y 198; de 36 y 54.

2. Encontrar el *m.c.d.* de 975 y 144; de 17 y 51.

3. Encontrar el *m.c.d.* de -84 y 144; de -96 y 336.

4. Encontrar el *m.c.d.* de 198 y 975.

5. Encontrar el *m.c.d.* de -198 y -144.

6. Encontrar el *m.c.d.* de 84, 198, y 144.

7. Encontrar el *m.c.d.* de 144, 198, y 975.

8. 11 divide a $(10 + 1)$, $(10^2 - 1)$, $(10^3 + 1)$, $(10^4 - 1)$, etc. Usando un procedimiento similar al usado para verificar divisibilidad entre 9, determinar una regla para la divisibilidad entre 11.

9. Si p es un primo y n cualquier entero, ¿cuál es el *m.c.d.* de p y n?

6.9b El m.c.d usando el algoritmo de la división

Con el segundo método para encontrar el *m.c.d.* de dos enteros se utiliza el algoritmo de la división. Supóngase que estamos interesados en encontrar el *m.c.d.* de 58 y 16. El algoritmo de la división nos permite escribir

$$58 = 16 \cdot 3 + 10, \qquad \text{donde} \quad 0 \leqq 10 < 16.$$

Obsérvese que cualquier número que divida a 58 y a 16 debe también dividir a 10 porque podemos escribir

$$10 = 58 - 16 \cdot 3.$$

En particular, el *m.c.d.* de 58 y 16 debe dividir a 10. Esto es una consecuencia de la ley distributiva y del significado de "divide a". Esto implica que el *m.c.d.* —que llamaremos *d*— es un divisor común de 16 y 10. Es más, debe ser el máximo común divisor de 16 y 10 porque si hubiera otro común divisor mayor que él, este divisor tendría que dividir también a 58, y *d* no sería el m.c.d. de 58 y 16. Además, cualquier número que divida a 16 y 10 debe dividir también a 58.

$$m.c.d.\ (58, 16) = m.c.d.\ (16, 10).$$

Ahora hemos reducido nuestro problema a encontrar el *m.c.d.* de 16 y 10. Aplicando el algoritmo de la división nuevamente tenemos

$$16 = 10 \cdot 1 + 6.$$

Nuevamente, cualquier número que divide a 16 y 10 debe dividir también a 6, porque tenemos

$$6 = 16 - 10.$$

En particular el *m.c.d.* de 16 y 10 debe dividir a 6. También cualquier número que divide a 16 y a 6 debe dividir a 16, así que

$$m.c.d.\ (16, 10) = m.c.d.\ (10, 6).$$

Usando la ley transitiva de igualdades hemos reducido el problema a encontrar el *m.c.d.* de 10 y 6. Aplicando el algoritmo de la división y razonando como antes tenemos

$$10 = 6 \cdot 1 + 4,$$
y $$6 = 4 \cdot 1 + 2,$$
y $$4 = 2 \cdot 2.$$

El último enunciado, que identifica a d, establece que el *m.c.d.* $(4, 2) = 2$. Siguiendo la cadena de ecuaciones en orden invertido tenemos $2|2$ y $2|4$, así que también $2|6$, $2|4$ y $2|6$; por lo tanto, $2|10$, $2|6$ y $2|10$; así que $2|16$, $2|10$ y $2|16$; por tanto $2|58$, $2|16$ y $2|58$, y ha sido identificado el *m.c.d.* en cada paso; por lo tanto *m.c.d.* $(58, 16) = 2$.

Ejemplo 1

Encontrar el *m.c.d.* (84, 198):

$198 = 84 \cdot 2 + 30$	*m.c.d.* (198, 84) = *m.c.d.* (84, 30)
$84 = 30 \cdot 2 + 24$	*m.c.d.* (84, 30) = *m.c.d.* (30, 24)
$30 = 24 \cdot 1 + 6$	*m.c.d.* (30, 24) = *m.c.d.* (24, 6)
$24 = 6 \cdot 4$	*m.c.d.* (24, 6) = 6

Por lo tanto 6 es el *m.c.d.* (84, 198).

Ejemplo 2

Encontrar el *m.c.d.* (198, 144):

$198 = 144 \cdot 1 + 54$	*m.c.d.* (198, 144) = *m.c.d.* (144, 54)
$144 = 54 \cdot 2 + 36$	*m.c.d.* (144, 54) = *m.c.d.* (154, 36)
$54 = 36 \cdot 1 + 18$	*m.c.d.* (54, 36) = *m.c.d.* (36, 18)
$36 = 18 \cdot 2$	*m.c.d.* (36, 18) = 18

Por lo tanto *m.c.d.* (198, 144) = 18.

El cálculo para encontrar el *m.c.d.* por el algoritmo de la división puede efectuarse como sigue. Deseamos encontrar el *m.c.d.* (84, 198).

$$\begin{array}{lllllll}
 & 2 & & & & & \\
84/ & 198 & & & & & \\
 & 168 & 2 & & & & \\
 & 30/ & 84 & & & & \\
 & & 60 & 1 & & & \\
 & & 24/ & 30 & & & \\
 & & & 24 & 4 & & \\
 & & & 6/ & 24 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
198 = 84 \cdot 2 + 30 \\[2ex]
84 = 30 \cdot 2 + 24 \\[2ex]
30 = 24 \cdot 1 + 6 \\[2ex]
24 = 6 \cdot 4
\end{array}$$

g.c.d. (84, 198)

Este procedimiento para encontrar el m.c.d. se llama el *algoritmo de Euclides.*

El máximo común divisor de tres o más números, por ejemplo, a, b y c, puede encontrarse por pares. Primero encontraremos el *m.c.d.* $(a, b) = d$; después *m.c.d.* $(d, c) = g$; en *consecuencia m.c.d.* $(a, b, c) = g$ (ver problema 3c. ejercicio 6.9b).

Ejemplo 3

Encontrar el *m.c.d.* (12, 18, 33):

m.c.d. $(12, 18) = 6$

m.c.d. $(6, 33) = 3$

Por lo tanto el *m.c.d.* $(12, 18, 33) = 3$

Ejercicios 6.9b

1. Encontrar el *m.c.d.* de los siguientes conjuntos de números por el método de factorización en primos:

(a) 84, 198 (b) 252, 144

(c) 36, 54 (d) 12, 30, 42

2. Encontrar el *m.c.d.* de los siguientes conjuntos de números por el algoritmo de Euclides:

(a) 14, 198 (b) 210, 126

(c) 735, 858 (d) 84, 210, 126

3. Definimos la operación binaria $\odot$ en el conjunto J de los enteros como sigue. Para los enteros m y n, siendo alguno de ellos diferente de cero,

$m \odot n = m.c.d.\ (m, n).$

(a) ¿Es el conjunto J cerrado con respecto a esta operación?

(b) ¿Es esta operación conmutativa? Ilustrar numéricamente.

(c) ¿Es esta operación asociativa? Ilustrar numéricamente.

(d) ¿Hay un elemento identidad? Si es así, ¿cuál es?

4. ¿En qué tipo de cálculo aritmético es el usado para el *m.c.d.*? Ilustrar numéricamente.

5. Encontrar el *m.c.d.* de las siguientes parejas: (a) 0,9; (b) 0, -12; (c) -9, 0; (d) 0, 1.

6. ¿Qué puede usted decir acerca del *m.c.d.* $(0, n)$ para cualquier entero n, siendo $n \neq 0$?

7. ¿Cuál es el *m.c.d.* de p y q si p y q son ambos números primos?

6.9c Propiedades especiales del m.c.d.

Una propiedad interesante y útil del *m.c.d.* de un par de números, a y b, es que el *m.c.d.* (a, b) puede escribirse como la suma de un múltiplo de a y otro múltiplo de b, siendo esto también consecuencia del algoritmo de la división.

Ejemplo 1

m.c.d. $(7, 17) = 1$
Múltiplos de 7: 7, 14, 21, 28, 35, 42,...
Múltiplos de 17: 17, 34, 51, 68,...

$$1 = (5)(7) + (-2)(17).$$

Ejemplo 2

m.c.d. $(6, 15) = 3$
Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30,...
Múltiplos de 15, 15, 30, 45, 60, 75,...

$$3 = (1)(15) + (-2)(6).$$

Teorema I. En general, si el *m.c.d.* $(a, b) = d$, entonces existen múltiplos $s \cdot a$ y $t \cdot b$ de a y b tales que

$$d = s \cdot a + t \cdot b.$$

La prueba de este teorema no es difícil pero la consideramos innecesaria para nuestros propósitos (ver Hamilton y Landin, pp. 152–3).

Ahora demostraremos algunos teoremas sencillos referentes a números primos, y esto servirá como una revisión de algunas definiciones y conceptos que hemos introducido.

Teorema II. Si p es un primo y p divide al producto $a \cdot b$, entonces p divide a a o divide a b.

Demostración. Si a es un múltiplo de p, entonces p divide a a. Si a no es múltiplo de p, puesto que p es un primo cuyos únicos divisores son $\pm p$ y ± 1, *es m.c.d.* $(a, p) = 1$ (ver problema 9, ejercicio 6.9a).

Por lo tanto

$$1 = s \cdot a + t \cdot p. \qquad \text{(Teorema I)}$$

Multiplicando por b tenemos

$$b = s(ab) + t(pb).$$

Como supusimos que p divide a ab, entonces p divide $s(ab)$. También, p divide a $t(pb)$, puesto que éste es un múltiplo de p.

La ley distributiva implica que p divide $s(ab) + t(pb)$. Por lo tanto p divide a b.

Teorema III. Si m y n son primos relativos y m divide a $n \cdot a$, entonces m debe dividir a a.

Demostración. $1 = s \cdot m + t \cdot n$ (¿Por qué?)
Entonces, $a = s \cdot m \cdot a + t \cdot n \cdot a$ (¿Por qué?)
Entonces m divide a a. (¿Por qué?)

Teorema IV. Si a y b son primos relativos y a divide a m y b divide a m, entonces ab divide a m.

Demostración. $m = a \cdot k$. (¿Por qué?)
b divide ak. (¿Por qué?)
Por lo tanto b divide a k. (Teorema III)
Por lo tanto $k = b \cdot e$, para alguna e (¿Por qué?)

Sustituyendo $b \cdot e$ por k en la primera ecuación tenemos

$m = a \cdot b \cdot e$.
Por lo tanto, $a \cdot b$ divide a m.

6.10 EL MINIMO COMUN MULTIPLO

El mínimo común múltiplo, m.c.m., de un par de enteros positivos m y n es el menor entero positivo divisible entre m y n. El *m.c.m.* de 6 y 5 es 30; el *m.c.m.* de 12 y 18 es 36.

Definición 6.10. El entero positivo d es el *m.c.m.* de los enteros positivos m y n si (1º) m divide a d y n divide a d, y (2º) si k es cualquier otro múltiplo de m y n, entonces d divide a k.

El *m.c.m.* de tres o más enteros positivos se encuentra obteniendo el *m.c.m.* por pares en la misma forma en que se encontró el *m.c.d.* de tres o más números; esto es, para hallar el *m.c.m.* de (a, b, c), primero encontramos el *mc.m.* $(a, b) = k$; entonces *m.c.m.* $(k, c) = m$. Por lo tanto, *m.c.m.* $(a, b, c) = m$ (ver problema 5c, ejercicio 6.10).

6.10a El m.c.d. obtenido por medio de la factorización en primos

El problema de encontrar el *m.c.m.* de un conjunto de enteros positivos es un paso esencial en el manejo de números racionales (fracciones). Aquí nuevamente hay más de una forma para determinar el *m.c.m.* Primero examinaremos el método de factorización en números primos.

Ejemplo 1

Encontrar el *m.c.m.* de 12 y 18:

$$12 = 2^2 \cdot 3,$$
$$18 = 2 \cdot 3^2.$$

El *m.c.m.* evidentemente debe contener como factores a 2 y 3. Además, el 2 debe aparecer elevado a la segunda potencia. Lo mismo es cierto para el 3. Entonces el *m.c.m.* $(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

En general, el *m.c.m.* de dos enteros positivos m y n es el producto de las potencias más altas de todos los factores *diferentes* que aparecen en la factorización en primos de cualquier entero.

Ejemplo 2

Deseamos encontrar el *m.c.m.* de 60 y 36. Factorizando tenemos:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$$

y

$$36 = 2^2 \cdot 3^2.$$

Vemos que los *diferentes* primos que se presentan en cada una de las factorizaciones son 2, 3, y 5. La potencia más alta de 2 que aparece es 2^2, la más alta de 3 es 3^2 y la más alta de 5 es 5^1.

Por lo tanto, el *m.c.m.* $(60, 36) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

6.10b Encontrar el m.c.m. a partir del m.c.d.

Otro método para encontrar el *m.c.m.* de un par de enteros positivos m y n es dividir su producto entre su *m.c.d.* Esto es intuitivamente evidente. Si d es el *m.c.d.* de m y n, entonces $m = d \cdot a$; $n = d \cdot b$; y el *m.c.d.* $(a, b) = 1$. Por lo tanto $m \cdot n = d \cdot a \cdot d \cdot b$. Pero $a \cdot d \cdot b$ es el múltiplo de m y n, ya que $a \cdot n = adb = m \cdot b$, y es el *m.c.m.* (m, n). Esto es:

$$m.c.m.\ (m, n) = adb = \frac{dadb}{d} = \frac{m \cdot n}{m.c.d.\ (m, n)}$$

Cuando los números son grandes, ésta es la forma más práctica de encontrar el *m.c.m.*

Ejemplo 1

Encontrar el *m.c.m.* (285, 76):

$$285 = 76 \cdot 3 + 57$$
$$76 = 57 \cdot 1 + 19$$
$$57 = 19 \cdot 3$$

Por lo tanto, el *m.c.d.* $(285, 76) = 19$.

Entonces el *m.c.m.* $(285, 76) = \dfrac{(285)(76)}{19} = (285)(4) = 1140.$

Ejercicios 6.10

1. Encontrar el *m.c.m.* de los siguientes números, usando el método de factores primos:

(a) 32, 40 (b) 8, 18, 27
(c) 36, 56 (d) 17, 7

2. Encontrar el *m.c.m.* en cada uno de los siguientes ejercicios usando el *m.c.d.*:

(a) 18, 84 (b) 36, 27
(c) 96, 84 (d) 252, 33

3. Encontrar el *m.c.d.* de cada uno de los siguientes pares de números:

(a) (9, 16) (b) (22, 46)
(c) (30, 42) (d) (35, 66)
(e) (42, 90) (f) (74, 111)
(g) (260, 611) (h) (264, 1512)
(i) (806, 1116) (j) (1936, 3630)
(k) (1728, 5400) (l) (6912, 20160)

4. Encontrar el *m.c.m.* de cada una de las parejas de números del problema 3.

5. Definamos la operación binaria * en el conjunto J de los enteros como sigue: Dados los enteros m y n, siendo ambos distintos de cero,

$$m * n = m.c.m.\ (m, n).$$

(a) ¿Es el conjunto J cerrado con respecto a esta operación?
(b) ¿Es esta operación conmutativa? Ilustrar numéricamente.
(c) ¿Es esta operación asociativa? Ilustrar numéricamente.
(d) ¿Hay un elemento de identidad? Si lo hay, ¿cuál es?

6. ¿En qué tipo de cálculo aritmético se usa el *m.c.m.*? Ilustrar numéricamente.

6.11 RELACIONES DE ORDEN PARA LOS ENTEROS

Definimos una relación "menor que" y una relación "menor o igual que" para los números naturales y el cero en términos de una correspondencia "uno-a-uno" entre conjuntos. Puesto que esto no es muy significativo para enteros negativos, definimos estas relaciones para enteros en términos de los enteros positivos.

Definición 6.11a. Si m y n son dos enteros cualesquiera, decimos que m "es menor que" n si $(n - m)$ es un entero positivo.

Indicamos esto así: $m < n$. Las expresiones que comprenden a la relación $<$ se llaman *desigualdades* o *desigualdades estrictas.* Esto es diferente de "no es igual".

> **Definición 6.11b.** Si m y n son dos enteros cualesquiera, decimos que m es "menor o igual que" n si se cumple que $(n - m)$ es un entero positivo o $(n - m)$ es 0.

Indicamos esto así $m \leqq n$. La relación $\leqq$ se llama también *desigualdad* o *desigualdad débil.*

Ejemplo 1

$5 < 7$, en vista de que $7 - 5 = 2$ un entero positivo.
$0 < m$ para cualquier entero positivo m, puesto que $m - 0 = m$, un entero positivo.
$-7 < -5$, ya que $-5 - (-7) = 2$, un entero positivo.

Señalaremos en lo sucesivo que un número m sea positivo con el símbolo $m > 0$.

La relación de orden $<$ para los enteros no tiene la propiedad reflexiva porque $n - n = 0$ no es un entero positivo. Por otra parte, $\leqq$ es reflexiva.

Ni la relación $<$ ni la relación $\leqq$ son simétricas.

Ambas relaciones son transitivas, esto es, si $m < n$ y $n < k$, entonces $m < k$. Para establecer esto para la relación "menor que" observamos lo siguiente:

$$m < n \text{ significa } n - m > 0,$$

y

$$n < k \text{ significa } k - n > 0.$$

Es necesario demostrar que estas dos proposiciones implican $m < k$, esto es, que $k - m > 0$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} (k - n) + (n - m) &= [k + (-n)] + [n + (-m)] \\ &= k + [(-n) + n] + (-m) \\ &= k + (-m) \\ &= k - m. \end{aligned}$$

Puesto que la suma de dos enteros positivos es un entero positivo, y $(k - n)$ y $(n - m)$ son positivos, $k - m$ es un entero positivo. Entonces, por definición $m < k$.

La prueba para $\leqq$ puede hacerse reemplazando $<$ por $\leqq$ en cada paso de la demostración anterior.

El hecho de definir el orden para los enteros en términos de los elementos positivos del sistema tiene ciertas ventajas algebraicas; por ejemplo, la ley de la tricotomía puede enunciarse como sigue.

La ley de la tricotomía para enteros

Si $m \neq 0$, debe cumplirse que $m > 0$ o $-m > 0$.

Esto puede ser enunciado alternativamente en la forma siguiente:

Si m y n son dos enteros cualesquiera, entonces una y solamente una de las siguientes proposiciones es cierta:

(1) $m = n$.

(2) $m < n$.

(3) $m > n$.

La ley de la tricotomía establece que dos enteros cualesquiera pueden ser comparados. Esto, después de todo, es una de las cosas más importantes que hacemos con los números.

Se insiste aquí en la ley de la tricotomía porque una exposición precisa de ella es extremadamente útil. Los estudiantes de matemáticas superiores tienen dificultades porque no están completamente conscientes de la importancia de esta idea y su relación con las propiedades de orden de los números que usamos.

Las relaciones de orden tienen algunas propiedades adicionales que son a la vez interesantes y útiles.

Propiedades de las desigualdades $<$ y $\leqq$

Para los enteros, a, b, y c vale:

1. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
2. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
3. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Estas proposiciones se pueden también escribir con $\leqq$ en lugar de $<$. El último aserto dice que el multiplicar ambos miembros de una desigualdad por el mismo número negativo tiene el efecto de invertir el sentido de la desigualdad.

Ejercicios 6.11

1. Describir los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{n \mid n$ es un entero y $-3 < n \leqq 5\}$.
(b) $B = \{n \mid n$ es un entero y $0 \leqq n \leqq 7\}$.
(c) $C = \{n \mid n$ es un entero y $n < 0\}$.
(d) $N = \{n \mid n$ es un entero y $0 < n\}$.
(e) $O = \{n \mid n$ es un entero y $n = -n\}$.
(f) $J = \{n \mid n$ es un entero$\}$.

2. Describa los complementos de los conjuntos del problema 1.

3. Dar los elementos de $B \times B$ y dibujar la representación geométrica de $B \times B$ (conjunto B del problema 1).

4. Hacer una lista de los elementos de $A \times A$ y dibujar la representación geométrica de $A \times A$ (conjunto A del problema 1).

5. Describir $N \times N$ (ver N del problema 1).

6. Describir $J \times J$ (ver J del problema 1).

7. ¿Hay un entero que sea el menor de todos? ¿Hay un entero positivo mínimo? Si es cierto, ¿cuál es?

8. ¿Hay un entero no negativo mínimo? Si es así, ¿cuál es?

9. ¿Hay un número entero máximo? Si es así, ¿cuál es?

10. ¿Cuántos enteros satisfacen las desigualdades $-5 < n < 5$? Hacer una lista de ellos e indicarlos sobre la línea numérica.

11. Demostrar que si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

12. Demostrar que si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

13. Demostrar que si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

14. ¿Cuántas soluciones tiene la desigualdad $3 + n < 10$ en el conjunto de los números naturales? ¿Y en el conjunto de los enteros?

15. ¿Cuál es la suma de los 5 primeros enteros positivos?

16. ¿Cuál es la suma de los primeros 10 enteros positivos? He aquí una forma fácil para sumar los primeros cinco enteros positivos:

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 6 + 6 + 6 + 6 + 6 \end{array}$$

Cinco veces 6 es 30, pero sumamos dos veces cada número, por lo tanto, debemos dividir nuestro resultado entre 2. En consecuencia, la suma de los 5 primeros enteros positivos es $5(6)/2$.

17. Escribir la suma de los primeros 10 enteros positivos en la misma forma y encontrar la suma.

18. Encontrar la suma de los primeros 20 enteros positivos por el método sugerido en el problema 16.

19. Encontrar la suma de los primeros 50 enteros positivos.

20. Escribir una expresión para la suma de los primeros enteros positivos en la forma sugerida en el problema 16.

21. ¿Cuál es la suma de los 3 primeros enteros positivos impares?

22. ¿Cuál es la suma de los 4 primeros enteros positivos impares?

23. ¿Cuál es la suma de los 5 primeros enteros positivos impares?

24. Escribir una expresión para el enésimo entero positivo impar.

25. ¿Cómo están relacionadas las respuestas a los problemas 21, 22, y 23?

26. ¿Cuál es la suma de los 10 primeros enteros positivos impares?

27. ¿Cuál es la suma de los 11 primeros enteros positivos impares?

28. Escribir una expresión para la suma de los n primeros enteros positivos impares en la forma que surge de los problemas del 21 a 27.

6.12 VALOR ABSOLUTO

Usamos el concepto familiar de la línea numérica para introducir valor absoluto (ver sección 4.16a y 6.2).

6.12a Distancias sobre la línea numérica

Si deseamos conocer el número de intervalos entre pares de puntos, es suficiente con contarlos. Esto, sin embargo, no es necesario si usamos los nombres que hemos dado a los puntos.

Por ejemplo, podríamos preguntar cuántas unidades hay desde el punto marcado con 7 hasta el punto marcado con 13. El resultado puede obtenerse si observamos que la marca 7 de hecho puede ser interpretada para indicar que hay 7 intervalos entre este punto y el punto marcado con 0. También la marca 13 indica que hay 13 intervalos entre 0 y 13. Vemos inmediatamente que hay $13 - 7 = 6$ intervalos desde el punto marcado con 7 hasta el punto marcado con 13.

Podríamos estar tentados de decir, en general, que el número de intervalos desde el punto marcado con m hasta el punto marcado con n es $n - m$. Sin embargo, si preguntamos cuántos intervalos hay entre el punto marcado con 13 y el punto marcado con 7, nuestra generalización nos llevaría a -6, lo cual no tiene sentido como respuesta a la pregunta "¿cuántos?"

El número de intervalos entre puntos sobre una línea se llama la *distancia* entre puntos sobre la línea. Para definir adecuadamente la distancia entre puntos en términos de los nombres asignados a los puntos, introducimos el concepto de *valor absoluto* de un número.

Definición 6.12a. Si m es un número, el *valor absoluto* de m, indicado por $|m|$, está definido como sigue:

Si $m > 0$, entonces $|m| = m$.
Si $m = 0$, entonces $|m| = 0$.
Si $m < 0$, entonces $|m| = -m$.

Ejemplo 1

$|3| = 3$, ya que $3 > 0$.
$|-7| = 7$, ya que $-7 < 0$ y $-(-7) = 7$.
$|0| = 0$.

6.12b Propiedades del valor absoluto

1. El valor absoluto del producto de dos números es el producto de los valores absolutos de los números.

$$|m \cdot n| = |m| \cdot |n|.$$

2. El valor absoluto de la suma de dos números no siempre es igual a la suma de los valores absolutos. Puede ser menor pero nunca mayor. Indicamos esto como sigue:

$$|m + n| \leqq |m| + |n|.$$

Definición 6.12b. La distancia entre puntos cuyos nombres son m y n sobre la línea numérica es $|m - n|$.

6.12c Propiedades de distancia

1. La distancia entre dos puntos es un número no negativo. Puede ser 0. Esto sucede cuando los dos puntos coinciden.
2. La distancia del punto A al punto B es la misma que la distancia del punto B al punto A.

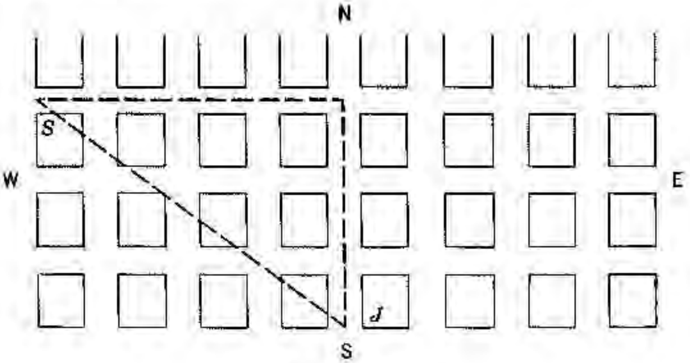


Figura 1.

3. La distancia de A a B más la distancia de B a C es mayor o igual a la distancia de A a C. Esta propiedad es conocida como la *desigualdad del triángulo*. ¿Por qué?

Hasta ahora hemos hablado de distancias sobre una línea recta. También podemos hablar de distancias en el plano. Aquí hay dos clases de distancias familiares a la mayoría de la gente: la distancia por "calles" y la distancia "a vuelo de pájaro". Consideremos una porción de un mapa de la ciudad como se muestra en la figura 1.

¿Cuán lejos está la casa del Sr. Sánchez (S) de la casa del Sr. Jiménez (J)? Si usted va en auto, la respuesta es 4 cuadras hacia el este y 3 cuadras hacia el sur, o sea un total de 7 cuadras. Podemos también decir 3 cuadras sur y 4 cuadras este. Este es uno de los significados de "distancia" en el plano. Podemos también estar interesados en cuán lejos está una casa de otra "a vuelo de pájaro". Aquí el significado de distancia es la línea recta de casa a casa. Es posible que Ud. recuerde que esto se calcula como se muestra en la figura 2.

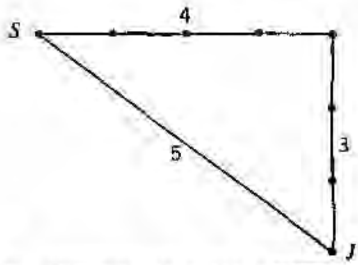


Figura 2. Distancia (S a J): $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Tenemos dos distancias de Sánchez a Jiménez, siguiendo las calles (7 cuadras) y a vuelo de pájaro (5 cuadras). Afirmamos que ambas "distancias" satisfacen las propiedades de distancia enunciadas al principio de esta sección.

Ejercicioos 6.12

1. Encontrar y dibujar los siguientes conjuntos y sus complementos sobre la línea numérica:

(a) $\{m \in J \mid |m| < 5\}$ (b) $\{m \in J \mid |m| < 4\}$
(c) $\{m \in J \mid m < 5 \text{ y } m > -2\}$ (d) $\{m \in J \mid |m - 5| < 2\}$

2. Encontrar y dibujar los siguientes conjuntos y sus complementos sobre la línea numérica:

(a) $\{n \in J \mid |n| \leqq 3\}$ (b) $\{n \in J \mid |n - 8| \leqq 2\}$
(c) $\{n \in J \mid |n| \leqq 1\}$ (d) $\{n \in J \mid |n + 5| \leqq 3\}$
(e) $\{n \in J \mid |n - 6| = 2\}$

3. Si $a < b$, ¿qué relación hay entre ac y bc?

4. Use ejemplos numéricos para ilustrar: $|m + n| \leqq |m| + |n|$.

(a) ¿Bajo qué condiciones la igualdad tiene validez?
(b) ¿Bajo qué condiciones la desigualdad estricta tiene validez?

5. (a) Escribir una expresión para la distancia del punto 3 al punto 9 sobre la línea numérica.
   (b) Escribir una expresión para la distancia del punto 11 al punto 8.

6. (a) Escribir una expresión para la distancia del punto 4 al punto n.
   (b) Escribir una expresión para la distancia del punto n al punto 18.

7. Sobre la línea numérica de los enteros, ¿qué enteros corresponden a los puntos cuya distancia de 7 es 3?

8. ¿Qué enteros corresponden a los puntos cuya distancia de 7 es menor que o igual a 3?

9. Si m y n son enteros, ¿es $(-m)(n)$ un entero negativo?

6.13 ARITMETICA DEL RELOJ

Supongamos que son las 9 en punto y que desayunamos dos horas antes. Planeamos tener una reunión cuatro horas después (ver figura 3).

Figura 3.

Dos horas antes de las 9 son las 7. Cuatro horas después de las 9 es la 1. Si reflexionamos en términos de adición y sustracción de horas tenemos:

$$9 - 2 = 7.$$
$$9 + 4 = 1.$$

Si no supiéramos que se está hablando acerca de la "hora", lo anterior resultaría verdaderamente extraño en aritmética. ¿Qué hora es 17 horas después de las 6 en punto?

$$6 + 17 = 11.$$

Por la necesidad de saber si la hora dada es de la mañana o de la tarde, el tiempo se expresa algunas veces en términos de 24 horas. Así 22.00 horas son las 10 P.M., 03.00 horas son 3 A.M., 12.00 horas es el mediodía. Obsérvese que en estos numerales de cuatro dígitos, referidos al tiempo, el primer par varía desde 00 horas hasta 24 y el segundo par varía desde 00 hasta 59.

Al resolver problemas acerca del tiempo con el sistema de 12 horas, llegamos a la conclusión de que la hora correcta se obtiene sumando a las horas que marca el reloj un cierto número de horas dado, dividiendo entre 12, y tomando el residuo como el resultado.

Ejemplo 1

$$9 + 4 = 13 = 12 \cdot 1 + 1 \equiv 1.$$
$$9 + 17 = 26 = 12 \cdot 2 + 2 \equiv 2.$$
$$8 + 8 = 16 = 12 \cdot 1 + 4 \equiv 4.$$

Siempre que sumamos o restamos h horas a un tiempo dado t, obtenemos la "suma" usando el algoritmo de la división como sigue:

$$t + h = 12\ g + r \text{ y } r \text{ es la hora}$$

Ejemplo 2

Sumando 26 horas a las 9.

$$9 + 26 = 35 = 12 \cdot 2 + 11.$$

Por lo tanto la hora es las 11 en punto.

Ejercicios 6.13

1. ¿Qué hora es en cada uno de los siguientes ejercicios?
   (a) ¿75 horas después de las 3.00 A.M.? ¿Será A.M. o P.M.?
   (b) Usted planea servir un asado que toma 15 horas para cocinarse. La comida debe estar a las 7.00 P.M. ¿A qué hora pondrá el asado en el horno?
   (c) Se llevan 7 horas para escalar el Popocatépetl. Usted desea llegar a la cima a las 3.00 P.M. ¿A qué hora debe usted empezar a escalar?

2. Sumar lo siguiente en la "aritmética del reloj": (a) $9 + 5$; (b) $11 + 6$; (c) $8 + 15$; (d) $4 + 22$.

3. ¿Qué hora es en los siguientes ejercicios?
   (a) ¿112 horas después de las 3.00 P.M.?
   (b) ¿64 horas después de las 7.00 A.M.?
   (c) ¿42 horas después de las 5.00 P.M.?

6.14 LA RELACION DE CONGRUENCIA

La relación de congruencia es una relación conocida, aunque anteriormente no le hemos dado este nombre; de hecho, no le dimos un nombre especial (ver problema 5, ejercicios 3.5b y problema 11, ejercicios 4.1). En estos problemas definimos la relación indicada por $\equiv$, como sigue: Para los enteros m y n, $m \equiv n$ si $m - n$ es un múltiplo de un número, por ejemplo, de 4 (ó 5) ó de otra forma, $m \equiv n$ si dan el mismo residuo cuando se dividen entre 4 (ó 5) (u otro número cualquiera). Definamos ahora esta relación explícitamente:

Definición 6.14a. Si a y b son enteros y m es un entero positivo; a es *congruente* con b, módulo m, si $(a - b)$ es un múltiplo de m.

Simbólicamente:

$$a \equiv b \text{ (mód. } m) \text{ si } a - b = k \cdot m, \text{ para algún entero } k.$$

La definición dada aquí es equivalente a la definición de que a es congruente con b, módulo m, si dan cada uno el mismo residuo cuando se dividen entre m. Es también equivalente a la definición de que a es congruente con b, módulo m, si $a - b$ es divisible por m. Se pedirá al estudiante que verifique esto en el ejercicio 6.14a.

Ejemplo 1

$39 \equiv 3$ (mód. 12) porque $39 - 3 = 36$, un múltiplo de 12.
$65 \equiv 113$ (mód. 12) porque $65 - 113 = 48$, un múltiplo de 12.

O podríamos decir:

$39 \equiv 3$(mód. 12) porque $39 = 3 \cdot 12 + 3, 3 = 0 \cdot 12 + 3$; ambos dan el mismo residuo cuando los dividimos entre 12.

Similarmente, 65 y 113 dan un residuo de 5 cuando se divide entre 12.

Recuérdese la definición de relación de equivalencia. (Ver sección 3.4). Demostraremos que la relación de congruencia tiene las propiedades necesarias de una relación de equivalencia.

La propiedad reflexiva

$$a \equiv a \text{ (mód. } m) \text{ porque } a - a = 0 = 0 \cdot m.$$

La propiedad simétrica

Si $a \equiv b$ (mód. m), entonces $b \equiv a$ (mód. m). Para demostrar esto observemos que $a \equiv b$ (mód. m) significa $a - b = k \cdot m$, para algún k. Entonces $b - a = (-k)m$, pero éste también es un múltiplo de m. Por lo tanto, si $a \equiv b$ (mód. m), entonces $b \equiv a$ (mód. m).

La propiedad transitiva

Si $a \equiv b$ (mód. m) y $b \equiv c$ (mód. m), entonces $a \equiv c$ (mód. m). Para demostrar esto observamos que $a \equiv b$ (mód. m) significa $a - b = k \cdot m$ y $b \equiv c$ (mód. m) significa $b - c = j \cdot m$, para ciertos enteros k y j.

Sumando:

$$\begin{aligned}(a - b) + (b - c) &= k \cdot m + j \cdot m\\ a - b + b - c &= (k + j)m\\ a - c &= (k + j)m.\end{aligned}$$

Pero $(k - j)$ es un entero, así que $a - c$ es un múltiplo de m. Esto significa que si $a \equiv b$ (mód. m) y $b \equiv c$ (mód. m), entonces $a \equiv c$ (mód. m).

Puesto que la relación de congruencia así definida tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, es una relación de equivalencia. Recordemos nuevamente el efecto que tiene una relación de equivalencia definida en un conjunto (ver sección 3.4). La relación induce una partición del conjunto en subconjuntos ajenos llamados clases de equivalencia.

Veamos qué efecto tiene la relación de congruencia, módulo 12, en el conjunto J de los enteros.

Primero preguntamos: "¿Qué números son congruentes con 0, mód. 12?"

Obviamente, los múltiplos de 12 lo son. Llamamos a esta clase la clase 0.

Nuestra siguiente pregunta es: "¿Qué números son congruentes con 1, mód. 12?" Son 1, 13, 25, etc., y, en general, cualquier número de la clase 0, + 1. ¿Cómo obtenemos los números congruentes con 2, mód. 12? ¿Cuántas clases tendremos? Respondemos a la última interrogante con la pregunta: "¿Cuántos residuos son posibles cuando los enteros se dividen entre 12?"

Tenemos 12 clases en la siguiente forma:

...	− 24	− 12	0	12	24	36	...
...	− 23	− 11	1	13	25	37	...
...	− 22	− 10	2	14	26	38	...
...	− 21	− 9	3	15	27	39	...
...	− 20	− 8	4	16	28	40	...
...	− 19	− 7	5	17	29	41	...
...	− 18	− 6	6	18	30	42	...
...	− 17	− 5	7	19	31	43	...
...	− 16	− 4	8	20	32	44	...
...	− 15	− 3	9	21	33	45	...
...	− 14	− 2	10	22	34	46	...
...	− 13	− 1	11	23	35	47	...

Obsérvese que, dado un número de cualquier renglón, tiene el mismo residuo que cualquier otro número del mismo renglón al dividirlo entre 12. Estos renglones (los puntos indican que hay unas sucesiones interminables de enteros) son las *clases de equivalencia*, módulo 12, del conjunto de los enteros. Obsérvese que cada entero se encuentra en una y solamente una clase. Las clases son subconjuntos ajenos del conjunto de los enteros.

Nombremos las clases como la clase-0, la clase-1, la clase-2, etc., y usemos para ellas los siguientes símbolos:

$$[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11].$$

Llamaremos J_{12}, al sistema formado por el conjunto de las clases de equivalencia módulo 12, con adición y multiplicación como se define en las siguientes secciones.

6.14a Adición en J_{12}

Ahora observamos un fenómeno interesante. Consideremos los números 27 y 38, cuya suma es 65. Obsérvese que 27 está en la clase indicada con [3] y 38 está en la clase indicada con [2], y su suma 65 está en la clase indicada con [5]. Esto es verdad para cualquier número de la clase [2] y cualquiera de la clase [3]. Su suma estará siempre en [5]. Indicamos esto escribiendo:

$$[2] + [3] = [5].$$

Interpretamos lo anterior señalando que cualquier número en la clase-2 sumado a cualquier número en la clase-3 es un número en la clase-5.

Intentemos otra adición de "clases".

$$[5] + [9] = ?$$

5 está en [5], y 9 está en [9]; $5 + 9 = 14$; 14 está en [2].

Por lo tanto

$$[5] + [9] = [2].$$

Si esto parece algo raro en la aritmética, recordemos que en nuestra "aritmética del reloj" 9 horas sumadas a la hora 5 dio la hora 2.

Consideremos el nuevo conjunto, denotado por J_{12}, y cuyos elementos son [0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]. Los ejemplos anteriores nos definen una operación binaria en J_{12}, que llamaremos "adición". Si consideramos que $[a]$ y $[b]$ son elementos cualesquiera de J_{12}, entonces:

$$[a] + [b] = [a + b],$$

donde $[a + b]$ es la clase de $a + b$ reducida módulo 12. Para aceptar que esta "operación" está "bien definida", debemos demostrar que la "operación" es independiente de los representantes de las clases: esto es, sin tomar en cuenta cómo se escogen las clases representativas $[a]$ y $[b]$, la "suma" estará en la clase marcada $[a + b]$. Algunos ejemplos numéricos ilustran esto. La prueba formal no es difícil y se deja como ejercicio al estudiante.

La tabla 1 muestra la "adición" para este sistema.

Tabla 1. Adición en J_{12}

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
[0]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
[1]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
[2]	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
[3]	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
[4]	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
[5]	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
[6]	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
[7]	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
[8]	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
[9]	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
[10]	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[11]	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Observamos en la tabla de la adición las siguientes propiedades interesantes de la "adición" definida en el conjunto J_{12}. (Obsérvese que en el cuerpo de la tabla hemos omitido los paréntesis rectangulares).

La propiedad conmutativa de la "adición" resulta de la simetría sobre la diagonal que va del extremo superior izquierdo al extremo inferior derecho; esto es: $[a] + [b] = [b] + [a]$.

El primer renglón y la primera columna del cuerpo de la tabla indican que [0] es el elemento identidad aditivo.

El elemento [0] aparece una y sólo una vez en cada hilera o columna. Esto significa que el par de elementos cuya suma es [0] son inversos aditivos uno del otro; por ejemplo $[5] + [7] = [0]$. Por lo tanto [7] es el inverso aditivo de [5] y [5] es el *inverso aditivo* de [7]. El elemento [6] es su propio inverso aditivo.

El hecho de que la "adición" en este sistema sea asociativa no es evidente a pesar de que se lo pueda demostrar.

Ejercicios 6.14a

1. Use ejemplos numéricos para ilustrar que la "adición" en J_{12} es asociativa.

2. Resolver las siguientes ecuaciones en J_{12}:

(a) $[3] + [x] = [7]$ (b) $[4] + [5] = [x]$
(c) $[8] + [x] = [0]$ (d) $[8] + [8] = [x]$
(e) $[x] + [x] = [0]$ (f) $[x] + [x] = [6]$

3. Demostrar que los diversos métodos para definir la relación de congruencia son equivalentes (ver sección 6.14).

4. ¿Cómo interpretaría usted $-|3|$?

5. Explicar lo siguiente:

(a) $-|3| = |-3|$ (b) $-|3| = |9|$
(c) $-|6| = |6|$ (d) $|-2| = |10|$

6.14b Multiplicación en J_{12}

Definimos ahora otra operación binaria, que llamamos "multiplicación", en una forma parecida a la usada para definir "adición".

Si $[a]$ y $[b]$ son elementos cualesquiera en J_{12}, entonces

$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b],$$

donde $[a \cdot b]$ es la clase de $a \cdot b$ reducida módulo 12. Esta "operación" está también bien definida. La prueba se deja nuevamente como un reto al lector. La tabla 2 muestra la "multiplicación" para este sistema.

Examinando la tabla cuidadosamente, observamos que la "multiplicación" es conmutativa. Nótese la simetría en la diagonal principal.

La primera hilera y la primera columna en el cuerpo de la tabla indican que [1] es el elemento *idéntico* (o identidad) *multiplicativo*.

Este sistema tiene muchos "divisores del cero"; es decir $[3] \neq [0]$ y $[4] \neq [0]$ pero $[3] \cdot [4] = [0]$. Por nuestra definición de "divide a", [3] y [4] son ambos diferentes de cero a la vez que son diversos del cero.

Tabla 2. Multiplicación en J_{12}

·	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
[1]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
[2]	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
[3]	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
[4]	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
[5]	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
[6]	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
[7]	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
[8]	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
[9]	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
[10]	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
[11]	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Notamos que J_{12} es un sistema matemático. Es cerrado con respecto a dos operaciones binarias que son conmutativas y asociativas, y se cumple la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. El sistema posee un elemento identidad aditivo y un elemento identidad multiplicativo, y hay inversos con respecto a la adición. Este sistema tiene divisores del cero y la ley de cancelación para la multiplicación no tiene validez.

6.14c Congruencia módulo 2

Para los enteros a y b, $a \equiv b$ (mód. 2) si $b - a$ es un múltiplo de 2. Esto equivale a decir que a y b tienen los mismos residuos cuando se dividen entre 2. El algoritmo de la división nos dice que los únicos residuos posibles cuando se dividen enteros entre 2 son 0 y 1. La relación de congruencia divide el conjunto de los enteros en dos subconjuntos ajenos: aquéllos que tienen residuo 0 (los enteros pares) y aquéllos que tienen residuo 1 (los enteros impares).

Clases de equivalencia mód. 2

$$\ldots -14, -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots$$
$$\ldots -13, -11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots$$

Tabla de adición mód. 2

+	[0]	[1]
[0]	0	1
[1]	1	0

Tabla de multiplicación mód. 2

·	[1]
[1]	1

Ejercicios 6.14c

1. Interpretar la tabla de adición mód. 2 en términos de adición de enteros pares e impares.

2. Usar ejemplos numéricos para ilustrar que la multiplicación es asociativa en J_{12}.

3. Decir si es siempre posible encontrar una solución para la ecuación

$$[a] \cdot [x] = [b] \quad \text{(módulo 12)}$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones (módulo 12):

(a) $[x] \cdot [x] = [0]$ (b) $[x] \cdot [x] = [x]$
(c) $[3] \cdot [x] = [3]$ (d) $[3] \cdot [x] = [5]$

5. ¿Es válida la ley de cancelación para la multiplicación en J_{12}? Ilustrar con un ejemplo numérico.

6. Si $[x + 3] \cdot [x + 4] = [0]$ en J_{12}, ¿qué puede usted decir acerca de x? Dar algunas de las soluciones de esta ecuación.

7. Supongamos que J_3 indica las clases de equivalencia, módulo 3. Use [0], [1] y [2] para indicar los elementos. Construir las tablas de adición y multiplicación para este sistema.

8. ¿Tiene J_3 divisores de cero?

9. ¿Cuál es el inverso aditivo de [2] en J_3?

10. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de [2] en J_3?

11. ¿Cuál es el *m.c.d.* (7980, 2310)? ¿Y el *m.c.m.* (7980, 2310)?

12. ¿Cuál es el *m.c.d.* de 300, 210 y 230? ¿Y el *m.c.m.*?

13. ¿Cuál es el error en la siguiente "demostración"? Sabiendo que $a = b$. Entonces:

$$\begin{aligned} a^2 &= ab \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ (a-b)(a+b) &= b(a-b) \\ a+b &= b \\ 2a &= a \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE REPASO

1. Un entero p, $(p > 1)$, es un ——— si no tiene divisores propios.

2. ——— establece que un entero p $(p \neq 0$ y $p \neq \pm 1)$, puede escribirse como un producto de primos y ± 1 en una y solamente una forma excepto por el orden posible en el que los factores sean presentados.

3. Si a, b, y m son enteros y $m \neq 0$, ——— si $a - b$ es un múltiplo de m.

4. Si una operación binaria definida en un conjunto S asigna a cada par de elementos de S un elemento determinado en forma única, que a su vez es un elemento de S, decimos que la operación satisface la ———.

5. Si W es el conjunto de los números enteros no negativos, $+$ es una operación binaria definida en W, y para todo elemento x en W hay un elemento $x' + x = 0$ (el elemento identidad aditivo), entonces x' se llama ———.

6. Si J es el conjunto de enteros, $+$ es una operación binaria definida en J, y para cada elemento x en J existe un elemento x' en J tal que $x + x' = x' + x = 0$ (el elemento identidad aditivo), x' se llama ———.

7. El ——— es el conjunto J cerrado con respecto a las operaciones de adición y multiplicación, siendo cada operación conmutativa y asociativa, con multiplicación distributiva respecto a la adición, con elementos identidad para cada operación, y con un inverso aditivo para cada elemento en J.

8. El ——— de un conjunto de enteros es el mayor entero positivo que divide a cada uno de los enteros del conjunto.

9. El ——— de un conjunto de enteros es el menor entero positivo que es dividido entre cada uno de los enteros dados.

10. Si m es un entero, ¿qué es ^-m?

11. Si m es un entero, ¿qué es $^-(^-m)$?

12. Si m es un entero, ¿es ^-m un entero negativo?

13. ¿Cuál es el inverso aditivo de 5?

14. ¿Cuál es el inverso aditivo de $^-5$?

15. ¿Qué es $^-2$?

16. Designar la propiedad fundamental del sistema de enteros que se ilustra en cada uno de los siguientes ejercicios:

(a) $a + b$ es un entero
(b) $a + b = b + a$
(c) $a(b + c) = ab + ac$
(d) ab es un entero
(e) $a + {}^-a = 0$
(f) $a + 0 = a$
(g) $(a + b) + c = a + (b + c)$
(h) $a(bc) = (ab)c$
(i) $a + c = b + c$, entonces $a = b$
(j) $ab = ba$
(k) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

17. Dar las razones que justifican cada paso en la siguiente demostración:
$a + ac + b + bc = (a + b)(1 + c)$:

(a) $a + ac + b + bc = a + (ac + b) + bc$
(b) $= a + (b + ac) + bc$
(c) $= (a + b) + (ac + bc)$
(d) $= (a + b) + (a + b)c$
(e) $= (a + b) \cdot 1 + (a + b)c$
(f) $= (a + b)(1 + c)$
(g) $a + ac + b + bc = (a + b)(1 + c)$

18. Demostrar que $^-3 + 8 = 5$, justificando cada paso.

19. (a) Dar una lista de todos los divisores positivos de 30.
(b) Dar una lista de todos los divisores positivos de 75.
(c) Subrayar los divisores primos de 30 y los divisores primos de 75.
(d) Encerrar en un círculo el *m.c.d.* de 30 y 75.

20. Establecer cuál de los siguientes números es primo. Para aquellos que son compuestos hacer la factorización de primos:

(a) 147, (b) 251, (c) 493

21. Encontrar el *m.c.d.* y el *m.c.m.* de 180 y 72.

22. Encontrar el *m.c.d.* y el *m.c.m.* de 1116 y 806 usando el algoritmo de Euclides.

23. (a) Hacer una lista parcial de cada una de las clases de equivalencia módulo 7.
(b) Construir tablas de adición y multiplicación para J_7.

(c) ¿Cuál es el inverso aditivo de [3] en J_7?
(d) ¿Cuál es el inverso multiplicativo de [5] en J_7?
(e) ¿Hay divisores de cero en J_7? Si los hay, dé una lista de ellos.

REFERENCIAS

Banks, J. Houston, *Elements of Mathematics*, Allyn and Bacon, Boston, 1956, secciones 3.16-17; 5.8-5.12.

Bold, Benjamin, "A General Test for Divisibility by Any Prime (except 2 and 5)", *The Mathematics Teacher*, abril de 1965, vol. LVIII, núm. 4.

Cohen, Louis S., "A Rationale in Working with Signed Numbers", *The Arithmetic Teacher*, vol. 12, núm. 7, noviembre de 1965.

Hafstrom, John E., *Basic Concepts in Modern Mathematics*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1961, Capítulo 7.

Hamilton, Norman T. y Joseph Landin, *Set Theory, the Structure of Arithmetic*, Allyn and Bacon, Boston, 1961, secciones 3.1, 3.2 y 3.3.

Mueller, Francis J., *Arithmetic, Its Structure and Concepts*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1956, unidad 7.

Swain, Robert L. y Eugene Nichols, *Understanding Arithmetic*, Holt, Rinehart y Winston, Nueva York, 1964, Capítulo III, secciones 7-9; Capítulos IV, V y VII.

CAPITULO 7

El sistema de los números racionales

7.1 INTRODUCCION

Así como una persona puede ser maestro, jugador de béisbol, padre y propietario de una casa, los símbolos a los cuales llamamos numerales tienen más de una interpretación. Los números naturales pueden ser considerados como *elementos* del *sistema de los números enteros no negativos*. Cuando se consideran como un subsistema del *sistema de los números enteros*, se llaman *enteros positivos*. Hacemos uso ordinal de los números naturales al contestar la pregunta "¿cuál?" Hacemos uso cardinal de los números naturales cuando contestamos a la pregunta "cuántos?"

7.2 INTERPRETACION DE PARES DE NUMEROS

Consideremos ahora los números a los que comúnmente llamamos *fracciones* y que escribimos en la forma $2/5$, $7/11$, $16/3$, etc. Nuevamente tenemos diversas *interpretaciones*, aparentemente sin relación entre sí, de los símbolos para estos pares de números. Distinguimos cuatro significados o interpretaciones principales de estos pares de números. Son familiares para el lector pero es posible que no hayan sido distinguidos y plenamente apreciados.

Las interpretaciones son:

1. La interpretación de "elemento de un sistema matemático".
2. La interpretación de "división".
3. La interpretación de "fracción" o "partición".
4. La interpretación de "razón".

Cada una de estas interpretaciones es muy usada, es importante; y no está en peligro de resultar obsoleta en ninguna concepción moderna de la aritmética. Cualquier restricción a una sola interpretación puede ser tan engañosa y limitada como la interpretación de uno de los seis hombres ciegos que examinaron al elefante. Cada interpretación está asociada con una situación en la que hay un problema razonablemente bien definido. El diagrama esquemático de la figura 1 presenta algunas de las ideas asociadas con las diferentes interpretaciones.

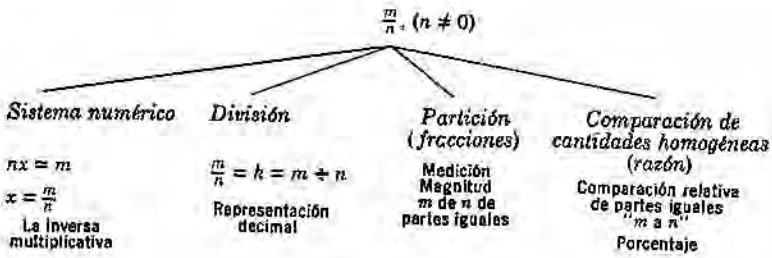


Figura 1

Consideraremos primero los pares de números, como elemento del sistema matemático llamado el *sistema de los números racionales*. Las otras interpretaciones serán tratadas donde resulte adecuado.

Ejercicios 7.2

1. Indicar el uso cardinal y ordinal de los números en los siguientes ejercicios:
   (a) Los números usados para indicar la posición de los equipos de béisbol en la liga americana.
   (b) Los tantos logrados por cada equipo en un campeonato de basquetbol.
   (c) El número que aparece en la parte superior de esta página.

2. Discutir el uso cardinal de 1 y 0.

3. Exponer el papel de los números 1 y 0 como elementos del sistema de los enteros.

4. Dar una definición precisa del elemento identidad aditivo; y del elemento identidad multiplicativo.

5. Los números se usan frecuentemente con el único propósito de nombrar objetos, eventos, o aun personas. En este sentido la única propiedad de los números usados es que son una fuente inagotable de nombres nuevos y distintos. El número de seguro social 517-16-1722 identifica una y solamente una persona. Dar otros ejemplos del uso de números como nombres.

7.3 EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES

Los sistemas numéricos que se han discutido hasta aquí pueden considerarse en términos del tipo de preguntas matemáticas que pueden contestarse en un sistema particular. El sistema de números enteros no negativos es adecuado para las siguientes preguntas:

$$m + n = ?$$
$$m \cdot n = ?$$

En estas preguntas m y n representan cualesquiera elementos en el sistema de los números enteros no negativos. Se usan operaciones aritméticas para encontrar estos números.

Las siguientes preguntas pueden o no tener respuesta en el sistema de números enteros no negativos:

$$m + ? = n.$$
$$n \cdot ? = m.$$

Por ejemplo,

$$9 + ? = 4.$$
$$3 \cdot ? = 2.$$

Puesto que no existe un número entero no negativo que sumado a 9 dé 4, definimos números nuevos $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ es decir $-1 + 1 = 0, \ -2 + 2 = 0, \ldots, \ -n + n = 0, \ldots$ Estos números junto con los números enteros no negativos y con la adición y la multiplicación definidas apropiadamente, constituyen el sistema de los enteros. El sistema de enteros puede considerarse como una ampliación del sistema de los números enteros no negativos en la cual la pregunta

$$m + ? = n$$

puede contestarse para cualesquiera enteros m y n.

Aún así este sistema ampliado es inadecuado para contestar la pregunta

$$n \cdot ? = m.$$

(Obsérvese que si n es cero, también m lo es ya que $0 \cdot a = 0$ para toda a. Por lo tanto excluiremos el cero como posibilidad para n.)

Ahora estamos interesados en un sistema matemático en el cual no solamente $m + ? = n$ tenga solución, sino en el que también

$$a \cdot ? = b$$

tenga solución en el sistema para cualesquiera a y b, $a \neq 0$. Esta pregunta tiene soluciones enteras para algunas parejas. Por ejemplo,

$$3 \cdot ? = 15$$

tiene la solución 5. (Recordemos esto: se dice 3 "divide" a 15). Para otros pares no hay solución entera. Por ejemplo,

$$3 \cdot ? = 2.$$

Estamos buscando un número que multiplicado por 3 dé 2. El hecho de que este número está íntimamente relacionado a los números 2 y 3 se reconoce y se incorpora al símbolo que representa a dicho número. Debemos volver a los "pares ordenados" de enteros para responder nuestra pregunta.

Definición 7.3. Un número racional es una clase de pares ordenados en enteros. Los pares ordenados se describen en la forma m/n, con la restricción de que n nunca es 0.

El hecho de que los números racionales se definan como *clases* se aclarará en lo que sigue. Inicialmente los trataremos como pares ordenados de enteros, y el lector debe estar prevenido de que al hacerlo así estamos suponiendo la identificación de un par ordenado particular con una *clase*.

El que se pida que $n \neq 0$ es consecuencia de la interpretación de *"división"*. En el par ordenado m/n, a m se le llama el *numerador*, a n se le llama el *denominador*. Esta terminología tiene su origen en la interpretación de "fracción".

Hasta ahora hemos analizado los números naturales, los números enteros no negativos, los enteros positivos, los enteros negativos y ahora estamos introduciendo los números racionales. Acentuando el hecho de que los términos se usan como *nombres de conjuntos.* Después hablaremos de números complejos. Nuevamente, los términos se usan estrictamente en el sentido de que son *nombres* de diversos *conjuntos de números.* La elección de estos nombres es muy desafortunada porque los significados literales que tienen los términos despiertan prejuicios en el estudiante y tienden a obstruir el aprendizaje de las matemáticas. Los términos reflejan las actitudes y sospechas que los conceptos de número han tenido para poder sobrevivir. No hay razón por la que esta desconfianza no aceptación deba ser promulgada y la enseñanza de la aritmética sufra las consecuencias. Por lo tanto, repetimos, el término enteros negativos no significa no-entero, sino que es el nombre de un conjunto definido de números. El término números racionales es el nombre de un conjunto definido de números.

El término números irracionales es el nombre de un conjunto definido de números.

Hay una diferencia matemática entre enteros y números racionales. Se desea llegar a interpretar los enteros como números racionales.

Cuando consideramos el conjunto de todos los posibles pares ordenados de enteros m/n, $n \neq 0$, hay muchos pares ordenados que aparentemente son diferentes pero que estamos acostumbrados a considerarlos como el mismo.

Ejemplo 1

$1/2, 2/4, 3/6, 4/8, 5/10, 6/12, \ldots$

$2/3, 4/6, 6/9, 8/12, 10/15, 12/18, \ldots$

$2/1, 4/2, 6/3, 8/4, 10/5, 12/6, \ldots$

Para pares ordenados sencillos es fácil reconocer esta relación. Esto no es obvio para los numerales.

$$\frac{27{,}946}{845{,}692} \text{ y } \frac{307{,}406}{9{,}302{,}612}$$

Estos numerales pueden ser nombres para el mismo número, pero ¿cómo puede usted determinar si lo son o no? Para responder a esta pregunta definimos una relación en el conjunto de pares ordenados de enteros $m/n, n \neq 0$.

7.4 RELACION DE EQUIVALENCIA PARA PARES ORDENADOS DE ENTEROS

Definición 7.4. Decimos que dos pares ordenados de enteros m/n y p/q, son equivalentes y escribimos

$$\frac{m}{n} \doteq \frac{p}{q} \text{ si y solamente si } mq = np.$$

Usamos el símbolo $\doteq$ en lugar de $=$ para acentuar que ésta es una nueva relación definida en el conjunto de pares ordenados de enteros en términos de la relación "igualdad" en el conjunto de los números enteros. Esta relación a la larga, se escribirá como "$=$" con el significado de "nombres para el mismo número" exceptuando el caso en que los pares ordenados sean interpretados como razones o comparaciones. La relación de los símbolos $\doteq$ y $=$ se aclara en la sección 7.7.

Ejercicios 7.4

1. Escriba cinco numerales equivalentes a cada uno de los siguientes:

(a) $\frac{2}{3}$	(b) $\frac{-17}{19}$	(c) $\frac{10}{10}$
(d) $\frac{0}{5}$	(e) $\frac{17}{-19}$	(f) $\frac{4}{1}$
(g) $\frac{9}{1}$	(h) $\frac{0}{10}$	(i) $\frac{3}{4}$
(j) $\frac{-2}{3}$	(k) $\frac{4}{-6}$	(l) $\frac{-1}{-1}$

2. ¿Cuáles de los siguientes numerales son equivalentes?

$$\frac{27{,}946}{854{,}692}, \frac{11}{45}, \frac{3{,}157{,}898}{96{,}580{,}196}, \frac{3333}{13{,}329}, \frac{63{,}327}{253{,}251}.$$

3. ¿Cuáles de los siguientes numerales son equivalentes?

$$\frac{33}{29}, \frac{33-2}{29-2}, \frac{2\cdot 33}{2\cdot 29}, \frac{2+33}{2+29}$$

4. Demostrar que cada uno de los siguientes pares son equivalentes:

(a) $\frac{-2}{3}$ y $\frac{2}{-3}$ (b) $\frac{-4}{-1}$ y $\frac{8}{2}$

(c) $\frac{-5}{3}$ y $\frac{10}{-6}$ (d) $\frac{-m}{-m}$ y $\frac{m}{m}$

(e) $\frac{0}{7}$ y $\frac{0}{6}$ (f) $\frac{1}{1}$ y $\frac{3}{3}$

(g) $\frac{0}{-1}$ y $\frac{0}{1}$ (h) $\frac{-m}{n}$ y $\frac{m}{-n}$

5. Encontrar el número racional equivalente a cada uno de los siguientes números en el cual el *m.c.d.* del numerador y del denominador es 1:

(a) $\frac{3964}{87{,}258}$ (b) $\frac{57}{76}$ (c) $\frac{144}{504}$

6. Hay algunos problemas del tipo $ax + b = c$ que son accesibles a estudiantes de primaria si se plantean en una forma razonable: "Estoy pensando un número. Lo duplico y le aumento 1, obtengo 9. ¿Cuál es el número?" Trate Ud. de hacer esto con alumnos de 4º ó 5º grado y obtenga su respuesta.

Proponga, con palabras, los problemas siguientes:

(a) $3x + 1 = 7$ (b) $2x + 3 = 13$ (c) $3x + 1 = 10$

7. Hacer una lista parcial, incluyendo enteros positivos y negativos, de cada una de las clases de equivalencia de los enteros módulo 13.

7.4a Propiedades de la relación de equivalencia $\doteq$

La relación $\doteq$ es transitiva. Para la prueba de esta afirmación se procede como sigue. Debemos demostrar que si $a/b \doteq c/d$ y si $c/d \doteq e/f$, entonces $a/b \doteq e/f$, para a/b, c/d, y e/f pares ordenados de enteros, b, a, y f diferentes de cero.

1. $\frac{a}{b} \doteq \frac{c}{d}$ significa $ad = bc$.

2. $\frac{c}{d} \doteq \frac{e}{f}$ significa $cf = de$.

Si demostramos que $af = be$, entonces $a/b \doteq e/f$.

Multiplicando (1) por f y (2) por b tenemos

$$adf = bcf \quad \text{y} \quad bcf = bde.$$

Por la transitividad de la "igualdad" tenemos $adf = bde$.

Usando la ley de cancelación de multiplicación para los enteros, tenemos

$$af = be \quad \text{o} \quad a/b \doteq e/f.$$

La relación $\doteq$ es simétrica. Necesitamos demostrar que si $a/b \doteq c/d$, entonces $c/d \doteq a/b$. Dejamos esto como un ejercicio.

La relación $\doteq$ es reflexiva. Esto se deja también como un ejercicio.

Si a/b es un par ordenado de enteros y x es un entero, $x \neq 0$, entonces $a/b \doteq ax/bx$.

Demostración	$(ab)x = (ab)x$	por la propiedad reflexiva de la igualdad en el sistema de los números enteros.
	$(ab)x = (ba)x$	por la propiedad conmutativa de la multiplicación en el sistema de los números de enteros.
	$a(bx) = b(ax)$	por la propiedad asociativa de la multiplicación en el sistema de los números enteros.
	$\frac{a}{b} \doteq \frac{ax}{bx}$	por la definición de $\doteq$ en el conjunto de pares ordenados.

7.5 CLASES DE EQUIVALENCIA DE PARES ORDENADOS DE ENTEROS

Hemos demostrado que la relación $\doteq$ es reflexiva, simétrica, y transitiva. Esta relación es una relación de equivalencia. Una relación de equivalencia divide al conjunto en el cual está definida en subconjuntos ajenos.

Recordamos como la relación de congruencia módudo m, definida en el conjunto de los números enteros, divide al conjunto en clases de equivalencia. La relación $\doteq$ tiene un efecto similar en el conjunto de pares ordenados de enteros. Tabularemos algunas de las clases.

La clase a la cual $\frac{1}{2}$ pertenece es la siguiente:

$$\ldots, \frac{-5}{-10}; \frac{-4}{-8}; \frac{-3}{-6}; \frac{-2}{-4}; \frac{-1}{-2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \frac{4}{8}; \frac{5}{10}; \frac{6}{12}; \frac{7}{14}, \ldots$$

Indicaremos esta clase por [½], aunque cualquier otro par de la clase podría usarse. La notación de paréntesis rectangular indica la clase a la cual pertenece el objeto encerrado en el paréntesis; [¹⁰⁄₂₀] indica la misma clase de equivalencia que [½], ½ es sencillamente un representante de la clase [½].

La clase a la cual $\frac{-2}{3}$ pertenece es la siguiente:

$$\ldots, \frac{8}{-12}; \frac{6}{-9}; \frac{4}{-6}; \frac{2}{-3}; \frac{-2}{3}; \frac{-4}{6}; \frac{-6}{9}; \frac{-8}{12}; \frac{-10}{15}; \frac{-12}{18}; \frac{-14}{21}, \ldots$$

Indicamos esta clase por $\left[\frac{-2}{3}\right]$ Es la misma que $\left[\frac{-6}{9}\right]$ ó $\left[\frac{4}{-6}\right]$.

La clase a la cual $\frac{1}{1}$ pertenece es la siguiente:

$$\ldots, \frac{-6}{-6}; \frac{-5}{-5}; \frac{-4}{-4}; \frac{-3}{-3}; \frac{-2}{-2}; \frac{-1}{-1}; \frac{1}{1}; \frac{2}{2}; \frac{3}{3}; \frac{4}{4}; \frac{5}{5}; \frac{6}{6}, \ldots$$

Se indica por [1/1] y jugará un papel especial en las operaciones con números racionales.

Similarmente, la clase a la cual 0/1 pertenece juega un papel especial. La clase se indica por [0/1] y es la siguiente:

$$\ldots, \frac{0}{-6}; \frac{0}{-5}; \frac{0}{-4}; \frac{0}{-3}; \frac{0}{-2}; \frac{0}{-1}; \frac{0}{1}; \frac{0}{2}; \frac{0}{3}; \frac{0}{4}; \frac{0}{5}; \frac{0}{6}, \ldots$$

Ejercicios 7.5

1. Demostrar que $\doteq$ tiene la propiedad simétrica.
2. Demostrar que $\doteq$ tiene la propiedad reflexiva.
3. Indicar como en la sección 7.5, la clase a la cual cada uno de los numerales siguientes pertenece:

(a) $\frac{54}{81}$ (b) $\frac{16}{16}$ (c) $\frac{19}{2}$

(d) $\frac{0}{100}$ (e) $\frac{0}{-3}$ (f) $\frac{7}{36}$

4. Indicar como se hizo en la sección 7.5, la clase a la cual pertenece cada uno de los siguientes numerales:

(a) $\frac{-1}{2}$ (b) $\frac{2}{-1}$ (c) $\frac{-2}{3}$

(d) $\frac{-7}{6}$ (e) $\frac{0}{-3}$ (f) $\frac{-22}{2}$

(g) $\frac{2}{-3}$ (h) $\frac{4}{5}$ (i) $\frac{-4}{-5}$

(j) $\frac{1}{-2}$ (k) $\frac{12}{-3}$ (l) $\frac{12}{3}$

5. (a) Demostrar que $\frac{2}{3}$ y $\frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3}$ pertenecen a la misma clase.

(b) Demostrar que $\frac{2}{3}$ y $\frac{2 \cdot n}{3 \cdot n}$ están relacionados por $\doteq$ para cualquier entero $n \neq 0$.

(c) Demostrar que $\frac{m}{n}$ y $\frac{2m}{2n}$ son equivalentes.

(d) Demostrar que $\frac{a}{b}$ y $\frac{na}{nb}$ son equivalentes $n \neq 0$.

6. Use los pares ordenados $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{15}$, y $\frac{-3}{-5}$ o ilustre el hecho de que la relación $\doteq$ es transitiva.

7. ¿Qué puede usted decir acerca de $\left[\frac{-2}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{-3}\right]$?

8. ¿Qué queremos decir cuando escribimos

$$\left[\frac{0}{11}\right] = \left[\frac{0}{4}\right]?$$

9. ¿Qué queremos dar a entender cuando escribimos

$$\left[\frac{6}{6}\right] = \left[\frac{-3}{-3}\right]?$$

7.6 NUMEROS RACIONALES COMO CLASES DE EQUIVALENCIA

En la sección anterior construimos varias clases de equivalencia. Vimos, cómo cualquier miembro de una clase puede actuar como representante de la clase a la cual pertenece. Esta es la razón por lo cual identificamos ciertos pares ordenados con una *clase*. La capacidad para pensar en un número racional como una clase equivalente de pares ordenados de enteros será útil para la comprensión de las fracciones en aritmética. Esta idea no es nueva. Es de hecho, un concepto familiar. ¿Qué viene a su mente cuando usted ve $\frac{2}{4}$? ¿Qué se le ocurre cuando ve $\frac{6}{8}$? ¿Qué piensa, cuando ve $\frac{12}{16}$ ó $\frac{9}{12}$? Para sumar $\frac{2}{3}$ a $\frac{5}{6}$, se acostumbra sumar $\frac{4}{6}$ a $\frac{5}{6}$. Esto es, $\frac{4}{6}$ es lo mismo, en cierto sentido, que $\frac{2}{3}$.

Los objetos del sistema de números racionales serán estas clases de equivalencia. Definiremos las operaciones binarias en estas *clases*.

Las operaciones binarias están definidas en términos de los *representantes de las clases*. La adición y la multiplicación como las definamos pueden no producir directamente los métodos más convenientes para encontrar la suma y el producto de dos números racionales, pero la forma usual (conveniente) de efectuar estas operaciones pueden razonarse en términos de nuestras definiciones.

7.7 ADICION DE NUMEROS RACIONALES

Sean $3/4$ y $1/6$ representantes de las clases de equivalencia $[3/4]$ y $[1/6]$, respectivamente. El procedimiento usual para manejar números racionales no distingue entre el representante de una clase y la clase misma. Para claridad en la exposición y facilidad en la comprensión de los cálculos que contengan "fracciones", deseamos por el momento guardar esta distinción.

La operación binaria "adición", asigna al par ordenado $(3/4, 1/6)$ el numeral que escribimos como $(3/4 + 1/6)$. Deseamos que esto sea un par ordenado de enteros para cumplir con la *ley de cerradura*. Además, deseamos que esto sea compatible con la adición de números enteros cuando los interpretamos como un subconjunto de los números racionales.

Hay varias formas de determinar cuál par ordenado de enteros deberá ser. Discutiremos posteriormente el procedimiento usual que involucra la idea de "mínimo común denominador". Por el momento, encontraremos el par ordenado representado por $3/4 + 1/6$ en la forma siguiente:

Ejemplo 1

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 1}{4 \cdot 6} = \frac{18 + 4}{24} = \frac{22}{24}$$

Obsérvese que estamos usando la interpretación "nombres para el mismo número" de $=$. Puesto que la relación $\doteq$ definida para los pares ordenados tiene las mismas propiedades que $=$, cuando necesitemos usar la interpretación "nombres para el mismo número" olvidaremos el nuevo símbolo y volveremos a usar el símbolo $=$.

En general definimos a/b y c/d como sigue:

Definición 7.7. Para a/b y c/d representantes de números racionales,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

La expresión $\dfrac{ad + bc}{db}$ representa un par ordenado de enteros porque el conjunto de enteros es cerrado con respecto a la adición y a la multiplicación. Este procedimiento no es el usual para sumar números tales como $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{6}$. Sin embargo, es compatible con el procedimiento para la adición de enteros cuando los pares ordenados se interpretan como enteros (ver problemas 9, ejercicios 7.7).

El procedimiento acostumbrado usa el mismo común denominador con una considerable economía de operaciones y es el siguiente:

Ejemplo 2

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}.$$

Los dos métodos comprenden esencialmente la misma cantidad de trabajo cuando los denominadores son primos relativos.

Ejemplo 3

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{15+4}{20} = \frac{19}{20}.$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{15+4}{20} = \frac{19}{20}.$$

En ambos casos, lo importante es notar que las sumas pueden no considerarse las mismas, pero quedarán relacionadas por la "igualdad" en el sentido de "nombres para el mismo número". De los ejemplos 1 y 2 precedentes $\frac{22}{24} = \frac{11}{12}$ porque estos numerales son sencillamente nombres diferentes para el mismo número. Pensando en los números racionales como clases de equivalencia, vemos que $\frac{22}{24}$ y $\frac{11}{12}$ son representantes diferentes de la clase $[\frac{11}{12}]$.

Resumamos, hemos querido definir la adición de "números racionales". Quisimos que la adición cumpliera con la ley de cerradura. También que la suma quedase determinada en forma única, es decir que la operación binaria asignase a cualquier par particular de números uno y solamente un número. Esta es la razón por la cual definimos la operación con respecto a las *clases*. Así un representante de la clase $[\frac{3}{4}]$ sumado a un representante de la clase $[\frac{1}{6}]$ es un representante de la clase $[\frac{3}{4} + \frac{1}{6}]$.

$$\frac{3}{4} \text{ está en } \left\{\ldots, \frac{-6}{-8}, \frac{-3}{-4}, \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \boxed{\frac{9}{12}}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \ldots\right\}$$

$$\frac{1}{6} \text{ está en } \left\{\ldots, \frac{-2}{-12}, \frac{-1}{-6}, \frac{1}{6}, \boxed{\frac{2}{12}}, \frac{3}{18}, \frac{4}{24}, \frac{5}{30}, \ldots\right\}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} \text{ está en } \left\{\ldots, \frac{-22}{-24}, \frac{-11}{-12}, \boxed{\frac{11}{12}}, \frac{22}{24}, \frac{33}{36}, \ldots\right\}$$

Hemos visto que esta clase puede ser determinada en dos formas. Una forma identificó a esta clase como $[22/24]$, otra forma como $[11/12]$. Pero $22/24 \doteq 11/12$, así $[22/24] = [11/12]$.

Los números encerrados en círculo indican la adición como se definió. Los números encerrados en cuadros indican la adición en la forma acostumbrada.

Afirmamos pero sin demostrarlo, que la *adición, como se ha definido en las clases, es independiente de los representantes de las clases.* Cualquier representante de la clase $[3/4]$ sumado a cualquier representante de $[1/6]$ está en la clase $[3/4 + 1/6]$. En otras palabras, la *clase* de la suma queda determinada en forma única. Esta es esencialmente la razón por la que el procedimiento definido produce el "mismo" resultado que el método del mínimo común denominador. Sólo que este último usa un conjunto de representantes de la clase más conveniente. El resultado de hacer esto es que usualmente el trabajo que se hace es menor.

Ejercicios 7.7

1. Verificar que $\dfrac{ad + bc}{bd}$ es un par ordenado de enteros cuyo denominador es diferente de cero si b y d son enteros diferentes de cero.

2. Sumar $\dfrac{12}{16}$ y $\dfrac{4}{24}$ y demostrar que el resultado obtenido es equivalente a $\dfrac{33}{36}$.

3. Sumar $\dfrac{-3}{-4}$ y $\dfrac{1}{6}$ y demostrar que el resultado obtenido es equivalente a $\dfrac{11}{12}$.

4. Explicar lo siguiente: $\left[\dfrac{3}{4}\right] + \left[\dfrac{1}{6}\right] = \left[\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{6}\right]$.

5. Explicar lo siguiente: $\left[\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{6}\right] = \left[\dfrac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 1}{4 \cdot 6}\right]$.

6. En cada uno de los siguientes ejercicios, efectuar la suma:

(a) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{0}{1}$ (b) $\dfrac{0}{3} + \dfrac{4}{3}$

(c) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{-4}{6}$ (d) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$

7. En cada uno de los siguientes ejercicios efectuar la suma:

(a) $\dfrac{39}{27} + \dfrac{54}{144}$ (b) $\dfrac{369}{288} + \dfrac{39}{306}$

8. Demostrar que la adición definida en las clases es independiente de los representantes que se escojan.

9. Hagamos corresponder al entero m el número racional $\left[\frac{m}{1}\right]$ y al entero n el número racional $\left[\frac{n}{1}\right]$. Demostrar que la adición definida para números racionales da como resultado una suma correspondiente a $(m+n)$.

7.8 MULTIPLICACION DE NUMEROS RACIONALES

Sean $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$ representantes de las clases de equivalencia a las cuales pertenecen. La operación binaria multiplicación, asigna al par $(\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$ el numeral $(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5})$. Nuevamente, deseamos que este producto sea un par ordenado de enteros de tal forma que la multiplicación satisfaga la ley de la cerradura. Este par ordenado se determina como sigue:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10}.$$

Tengamos en mente que los numerales $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, y $\frac{3}{10}$ son representantes de las clases $[\frac{1}{2}]$, $[\frac{3}{5}]$, y $[\frac{3}{10}]$.

En general, definimos la multiplicación de números racionales como sigue:

Definición 7.8. Dado m/n y r/s como representantes de números racionales

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = \frac{m \cdot r}{n \cdot s}.$$

El producto representa un par ordenado de enteros.

Las operaciones binarias "adición" y "multiplicación" para números racionales pueden escribirse más adecuadamente como sigue:

$$\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{ad+bc}{bd}\right]$$

$$\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right].$$

Los paréntesis indican la clase equivalente a la cual pertenece el numeral dentro del paréntesis. Repetimos, es solamente en términos de clases de equivalencia que las operaciones binarias están *bien definidas*.

Ejercicios 7.8

1. Multiplique $\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{2}{9}\right)$.

2. Multiplique $\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{6}{4}\right)$.

3. Multiplique $\left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{6}{4}\right)$.

4. Multiplique $\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

5. Escribir cada uno de los siguientes ejercicios como producto, por ejemplo:

$$\frac{14}{10} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{7}{5}\right)$$

(a) $\frac{35}{49}$ (b) $\frac{33}{39}$

6. Demostrar que la multiplicación está bien definida; esto es, demostrar que el producto es independiente del representante escogido.

7. Hagamos corresponder al entero m con $\left[\frac{m}{1}\right]$ y al entero n con $\left[\frac{n}{1}\right]$. Demostrar que la multiplicación definida para los números racionales, da como resultado un racional que corresponde a $m \cdot n$.

8. Efectúe la operación binaria indicada en la forma en que se ha definido:

(a) $\frac{5}{7} + \frac{5}{9}$ (b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$ (c) $\frac{4}{3} + \frac{0}{2}$

(d) $\frac{0}{5} + \frac{2}{5}$ (e) $\frac{16}{4} + \frac{12}{4}$ (f) $\frac{0}{1} + \frac{2}{1}$

(g) $\frac{-3}{2} + \frac{3}{2}$ (h) $\frac{3}{2} + \frac{3}{-2}$ (i) $\frac{4}{9} + \frac{0}{6}$

(j) $\frac{4}{9} + \frac{4}{-9}$ (k) $\frac{2994}{876{,}658} + \frac{779{,}922}{9{,}197{,}245}$

9. Efectúe la operación binaria indicada en la forma en que se ha definido:

(a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5}$ (b) $\frac{9}{3} \cdot \frac{10}{7}$ (c) $\frac{13}{1} \cdot \frac{1}{13}$

(d) $\frac{19}{4} \cdot \frac{3}{3}$ (e) $\frac{7}{6} \cdot \frac{1}{1}$ (f) $\frac{4}{7} \cdot \frac{0}{2}$

(g) $\frac{6}{3} \cdot \frac{8}{2}$ (h) $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{4}$ (i) $\frac{7}{1} \cdot \frac{1}{1}$

(j) $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$ (k) $\frac{2994}{876{,}658} \cdot \frac{779{,}922}{9{,}197{,}245}$

10. Explique el significado de cada uno de los siguientes ejercicios:

(a) $\left[\frac{6}{8}\right]+\left[\frac{4}{8}\right]=\left[\frac{5}{4}\right]$ (b) $\left[\frac{4}{7}\right]+\left[\frac{0}{6}\right]=\left[\frac{4}{7}\right]$

(c) $\left[\frac{7}{12}\right]+\left[\frac{-7}{12}\right]=\left[\frac{0}{1}\right]$ (d) $\left[\frac{6}{9}\right]+\left[\frac{2}{-3}\right]=\left[\frac{0}{-1}\right]$

(e) $\left[\frac{0}{100}\right]+\left[\frac{1}{1}\right]=\left[\frac{7}{7}\right]$

11. Explique el significado de cada uno de los siguientes ejercicios:

(a) $\left[\frac{9}{18}\right]\cdot\left[\frac{6}{3}\right]=\left[\frac{1}{1}\right]$ (b) $\left[\frac{4}{4}\right]\cdot\left[\frac{5}{7}\right]=\left[\frac{5}{7}\right]$

(c) $\left[\frac{0}{7}\right]\cdot\left[\frac{1}{1}\right]=\left[\frac{0}{1}\right]$ (d) $\left[\frac{18}{18}\right]\cdot\left[\frac{27}{36}\right]=\left[\frac{3}{4}\right]$

(e) $\left[\frac{-2}{3}\right]\cdot\left[\frac{4}{5}\right]=\left[\frac{-8}{15}\right]$

12. (a) Dar un ejemplo numérico que ilustre el hecho de que la adición de números racionales es conmutativa.
(b) Presentar un ejemplo numérico ilustrando el hecho de que la adición de los números racionales es asociativa.

13. (a) Dar un ejemplo numérico que ilustre el hecho de que la multiplicación de números racionales es conmutativa.
(b) Dar un ejemplo numérico que ilustre el hecho de que la multiplicación de números racionales es asociativa.

14. (a) $\left[\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{7}\right]+\left[\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{4}\right]=?$ (b) $\left[\frac{4}{7}+\frac{9}{4}\right]\cdot\left[\frac{5}{3}\right]=?$

15. (a) $\left[\frac{5}{5}\cdot\frac{16}{9}\right]+\left[\frac{7}{5}\cdot\frac{16}{9}\right]=?$ (b) $\left[\frac{5}{5}+\frac{7}{5}\right]\cdot\left[\frac{16}{9}\right]=?$

16. (a) $\left[\frac{0}{1}+\frac{5}{5}\right]\cdot\left[\frac{7}{7}\right]=?$ (b) $\left[\frac{6}{3}+\frac{2}{-1}\right]\cdot\left[\frac{17}{19}\right]=?$

17. (a) $\frac{784{,}327}{2{,}994{,}463}+\frac{9{,}548{,}012}{1{,}988{,}544}=?$ (b) $\frac{784{,}327}{2{,}994{,}463}\cdot\frac{9{,}548{,}012}{1{,}988{,}544}=?$

7.9 DESIGNACION DE CLASES (FRACCIONES DE REDUCCION)

Cualquier par de números de una clase de equivalencia puede ser usado para dar nombre a la clase. Sin embargo, entre todos los pares de números de una clase de equivalencia, hay siempre uno que es en algún sentido el más simple o el más conveniente, por ejemplo, $8/12$ está en la siguiente clase:

$$\ldots, \frac{-14}{-21}; \frac{-12}{-18}; \frac{-10}{-15}; \frac{-8}{-12}; \frac{-6}{-9}; \frac{-4}{-6}; \frac{-2}{-3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{6}; \frac{6}{9}; \frac{8}{12}; \frac{10}{15}; \frac{12}{18}, \ldots$$

Cuando uno se encuentra con $8/12$ piensa naturalmente en $2/3$, así es como tendemos a identificar $8/12$ con $2/3$. No pensamos que esto implique que los dos numerales sean idénticos. Pensamos sencillamente que $8/12$ y $2/3$ están en la misma clase, o sea la clase $[2/3]$ la cual llamamos $2/3$. Llamamos a esta clase $2/3$ porque $2/3$ es el representante que está en forma *simplificada* o *reducida.*

Definición 7.9. Un representante $\dfrac{m}{n}$ de un número racional $\left[\dfrac{m}{n}\right]$, está en forma *reducida* si el máximo común divisor de los enteros m y n es 1, y n es positivo.

Obsérvese que $2/3$ está en forma reducida, $7/12$ está en forma reducida, $14/24$ no está en forma reducida. Si la clase de equivalencia se escribe en forma explícita como previamente se hizo, entonces resulta fácil encontrar la forma reducida. Es aquel elemento cuyo denominador es el menor entero positivo en el conjunto de denominadores.

Si no escribimos en forma explícita la clase de equivalencia, hay fundamentalmente dos métodos para "reducir" fracciones. Un método utiliza el teorema fundamental de la aritmética. El otro está basado en encontrar el *m.c.d.* de dos enteros. Analizaremos ambos procedimientos porque los dos son usados.

Simplificaremos $\dfrac{6}{8}$, y $\dfrac{1{,}439{,}900}{3{,}496{,}900}$. Cuando simplificamos o reducimos $\dfrac{6}{8}$ es fácil obtener $\dfrac{3}{4}$. Para un principiante, sin embargo el procedimiento aparece como $\dfrac{6}{8} = \dfrac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}$. Vimos en la sección 7.5 que $\dfrac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}$ es equivalente a $\dfrac{3}{4}$; es decir factorizamos los dos enteros y usamos nuestra definición de relación. Esta misma técnica serviría para reducir $\dfrac{1{,}439{,}900}{3{,}496{,}900}$ pero requiere una gran cantidad de cálculos. Otro método para reducir $\dfrac{1{,}439{,}900}{3{,}496{,}900}$ es encontrar el máximo común divisor del par de números usando el algoritmo de Euclides. La forma reducida se reconoce fácilmente tan pronto como se ponga en la forma $\dfrac{md}{nd}$ donde d es el *m.c.d.* de los dos enteros.

El problema de encontrar la forma reducida de este número en particular se deja como un ejercicio. En aplicaciones como ésta del algoritmo de Euclides se da uno cuenta de la importancia que tiene.

Ejercicios 7.9

Encontrar el nombre de la clase a la cual pertenece cada uno de los números siguientes. Esto es, *simplificar* cada uno de los siguientes números.

1. $\dfrac{72}{144}$
2. $\dfrac{727}{1441}$
3. $\dfrac{163{,}264}{2{,}754{,}108}$
4. $\dfrac{1{,}439{,}900}{3{,}496{,}900}$
5. $\dfrac{39 \cdot 27}{52 \cdot 26}$
6. $\dfrac{228 \cdot 19}{204 \cdot 19}$
7. $\dfrac{39}{52} \cdot \dfrac{26}{27}$
8. $\dfrac{72}{38} + \dfrac{16}{19}$
9. $\dfrac{-54}{81}$
10. $\dfrac{108}{-162}$
11. $\dfrac{0}{5}$
12. $\dfrac{27}{27}$

7.10 EL SISTEMA DE LOS NUMEROS RACIONALES

Revisemos brevemente lo que hasta ahora hemos visto del desarrollo del sistema de los números racionales. Hemos considerado todos los posibles pares ordenados de enteros de la forma m/n donde $n \neq 0$. Definimos un criterio para determinar cuando estos pares ordenados están "relacionados". Se demostró que la relación $\doteq$ es una relación de equivalencia. Esto introdujo cierto orden en la colección de pares ordenados de enteros; esto es, el conjunto de pares ordenados de enteros fue dividido en clases ajenas de elementos relacionados entre sí. Indicamos estas clases por $\left[\dfrac{m}{n}\right]$. Las operaciones binarias se definieron en estas clases en términos de representantes de las clases.

Ejemplo 1

$$\left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{5}{6}\right] = \left[\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right] = \left[\frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 6}\right],$$

$$\left[\frac{2}{3}\right] \cdot \left[\frac{5}{6}\right] = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}\right] = \left[\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6}\right].$$

Recuérdese el significado de estos símbolos. Deben ser interpretados para indicar que cualquier representante de la clase $\left[\frac{2}{3}\right]$ sumado a cualquier representante de la clase $\left[\frac{5}{6}\right]$ es un elemento de la clase de los pares ordenados que se obtiene al efectuar las operaciones indicadas en el último paréntesis. El simplificar la fracción, equivalió a encontrar el nombre usual de la clase del resultado; esto es, el nombre de la clase $\left[\frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 6}\right]$ se encuentra por la reducción de $\frac{12 + 15}{18} = \frac{27}{18}$ a $\frac{3}{2}$. Escribimos esto $\left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{5}{6}\right] = \left[\frac{3}{2}\right]$ Por conveniencia y economía de símbolos, esto puede reducirse a $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$ sin que se pierda el significado.

Lo mismo se aplica a la multiplicación.

7.10a Idénticos e inversos

El *idéntico aditivo* para el sistema de números racionales es aquel elemento que sumado a cualquier otro elemento no lo altera.

Ejemplo 1

$$\frac{0}{1} + \frac{3}{7} = \frac{0 \cdot 7 + 1 \cdot 3}{1 \cdot 7} = \frac{0 + 3}{7} = \frac{3}{7}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{b \cdot 1} = \frac{a + 0}{b} = \frac{a}{b}.$$

Aparece $0/1$ como *idéntico aditivo.* Pero $0/1$ es únicamente un representante de la clase $[0/1]$. Otro elemento de esta clase es $0/5$.

Ejemplo 2

$$\frac{3}{7} + \frac{0}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 7 \cdot 0}{7 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5 + 0}{7 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5}$$

Pero

$$\frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{3}{7}$$

Es más apropiado escribir

$$\left[\frac{3}{7}\right] + \left[\frac{0}{1}\right] = \left[\frac{3}{7}\right].$$

Si interpretamos correctamente esta afirmación, cualquier elemento de [0/1] puede actuar como idéntico aditivo, es decir,

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{n} \doteq \frac{a}{b}, \qquad n \neq 0.$$

El *idéntico multiplicativo* está definido en forma análoga. El *idéntico multiplicativo* para el sistema de números racionales es aquel elemento que multiplicado por cualquier número racional da un producto que es igual a dicho número.

Ejemplo 3

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5}.$$

Recordando que 4/5 y 1/1 son representantes de las clases a las cuales pertenecen, podemos escribir

$$\left[\frac{4}{5}\right] \cdot \left[\frac{1}{1}\right] = \left[\frac{4}{5}\right].$$

Estamos diciendo que cualquier miembro de la clase [1/1] puede actuar como idéntico multiplicativo, esto es:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} \doteq \frac{a}{b} \text{ para cualquier entero } n \neq 0.$$

El *inverso aditivo* del elemento m/n en el sistema de los números racionales es aquel elemento que sumado a m/n nos da el idéntico aditivo del sistema de números racionales. Así como el inverso aditivo de n en el sistema de enteros se indicó por $-n$, indicamos el inverso aditivo de m/n por $-(m/n)$. Es decir:

$$\frac{m}{n} + \left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{0}{1}.$$

Observa, sin embargo, que

$$\frac{m}{n} + \frac{-m}{-n} = \frac{mn + (-mn)}{nn} = \frac{0}{n^2} \doteq \frac{0}{1}$$

y

$$\frac{m}{n} + \frac{m}{-n} = \frac{-mn + mn}{-nn} = \frac{0}{-n^2} \doteq \frac{0}{1}.$$

Esto es, $\dfrac{-m}{n}$ y $\dfrac{m}{-n}$ se comporta igual que $\left[-\dfrac{m}{n}\right]$. Encontramos anteriormente que $\left[\frac{-m}{n}\right] = \left[\frac{m}{-n}\right]$: (Ver problema 4o., ejercicio 7.4). Estamos diciendo ahora que

$$\left[-\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{-m}{n}\right] \qquad \text{y} \qquad \left[-\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{m}{-n}\right].$$

En general $-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n} = \frac{m}{-n}$, donde estamos usando "nombres del mismo número" como significado de la relación de "igualdad". Adoptemos aquí la misma convención que usamos con los enteros, y escribamos, por ejemplo, $\frac{7}{5} - \frac{2}{3}$ en lugar de $\frac{7}{5} + \left(-\frac{2}{3}\right)$.

Recordemos que introdujimos los números negativos con el fin de obtener un sistema matemático lo suficientemente rico como para proporcionar una solución a la ecuación

$$m + x = n,$$

para todo par de números enteros no negativos m y n. A este sistema se le dio el nombre de "sistema de los enteros".

Construimos los números racionales con el objeto de tener un sistema numérico lo suficientemente rico como para proporcionar una solución a la ecuación

$$n \cdot x = m,$$

para cualquier par de enteros m y n, excepto cuando $n = 0$. Más generalmente, construimos un sistema numérico que pueda suministrar una solución a la ecuación

$$a \cdot x = b,$$

para cualquier par de números a y b de nuestro sistema, donde a no está en la clase cero. Puesto que los elementos de nuestro sistema de números racionales pueden escribirse en la forma $\left[\frac{m}{n}\right]$, estamos diciendo que nuestro sistema es lo suficientemente completo como para suministrar soluciones a la ecuación

$$\left[\frac{m}{n}\right] \cdot x = \left[\frac{r}{s}\right],$$

donde $\left[\frac{m}{n}\right]$ y $\left[\frac{r}{s}\right]$ son cualesquiera números racionales y $\left[\frac{m}{n}\right] \neq \left[\frac{0}{1}\right]$.

Ejemplo 4

Encontrar x tal que

$$\frac{3}{1} \cdot x = \frac{1}{1}.$$

Tenemos

$$x = \frac{1}{3},$$

puesto que

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 3} = \frac{3}{3} = \frac{1}{1}.$$

El *inverso multiplicativo* de cualquier número racional $\left[\frac{m}{n}\right] \neq \left[\frac{0}{1}\right]$, es aquel elemento que multiplicado por $\left[\frac{m}{n}\right]$ da el idéntico multiplicativo.

El inverso multiplicativo de $\left[\frac{m}{n}\right]$ se denota por $\left[\frac{m}{n}\right]^{-1}$.

Si usamos la letra a para representar un número racional, escribimos el inverso multiplicativo de a como a^{-1}. Al inverso multiplicativo también se le llama *recíproco.*

Definimos $\left[\frac{m}{n}\right]^{-1}$ como aquel elemento que multiplicado por $\left[\frac{m}{n}\right]$ de $\left[\frac{1}{1}\right]$.

$$\left[\frac{m}{n}\right] \cdot \left[\frac{m}{n}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{1}\right].$$

Ejemplo 5

$$\frac{3}{11} \cdot \left[\frac{3}{11}\right]^{-1} = \frac{1}{1}.$$

Obsérvese, sin embargo que

$$\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{3} = \frac{33}{33} = \frac{1}{1}.$$

Los números $\left(\frac{3}{11}\right)^{-1}$ y $\frac{11}{3}$ dan ambos el idéntico multiplicativo cuando los multiplicamos por $\frac{3}{11}$. Así, escribimos $\left[\frac{3}{11}\right]^{-1} = \frac{11}{3}$, en el sentido que éstos son nombres para el mismo número.

En general,

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{-1} = \left[\frac{n}{m}\right].$$

Esto es,

$$\left[\frac{m}{n}\right] \cdot \left[\frac{n}{m}\right] = \left[\frac{1}{1}\right].$$

En el caso especial, cuando $n = 1, \frac{m}{n} = \frac{m}{1}$, y tenemos

$$\left[\frac{m}{1}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{m}\right].$$

Ejercicios 7.10

1. Escribir el inverso aditivo de cada uno de los siguientes números y efectuar la adición para verificar que su elección es correcta.

(a) $\frac{5}{1}$ (b) $\frac{137}{329}$ (c) $\frac{-19}{3}$ (d) $\frac{2}{-10}$

(e) $\frac{6}{-7}$ (f) $\frac{5}{8}$ (g) $\frac{0}{-1}$ (h) $\frac{-3}{-4}$

(i) $\frac{0}{10}$ (j) $\frac{239}{316}$ (k) $\frac{m}{n}$ (l) $-\frac{m}{n}$

2. Escribir el inverso multiplicativo de cada uno de los siguientes números racionales en dos formas y efectuar el cálculo para verificar que su respuesta es correcta.

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{9}{14}$ (c) $\frac{17}{6}$ (d) $\frac{100}{19}$

(e) $\frac{-2}{11}$ (f) $\frac{8}{-3}$ (g) $\frac{-5}{-4}$ (h) $\frac{6}{1}$

(i) $\frac{9}{1}$ (j) $\frac{1}{23}$ (k) $\frac{33}{3}$ (l) $\frac{-13}{26}$

(m) $\frac{0}{1}$ (n) $\frac{2}{2}$ (o) $\frac{4}{1}$ (p) $\frac{1976}{1967}$

3. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

(a) $\frac{2}{5} + \frac{5}{2}$ (b) $\left(\frac{7}{3} + \frac{7}{3}\right) + \frac{7}{3}$

(c) $\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{17} + \frac{9}{4}\right)$ (d) $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

(e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

4. ¿Cuál es el inverso aditivo de cada uno de los números del problema 2?

5. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de cada uno de los números del problema 1?

6. Efectuar las operaciones indicadas.

(a) $\frac{2}{9} - \left(\frac{9}{2}\right)^{-1}$ (b) $\frac{5}{7} - \left(\frac{7}{5}\right)^{-1}$

(c) $\frac{11}{5} - \frac{4}{2}$ (d) $\frac{3}{4} - \frac{0}{2}$

En los ejercicios 7.8 se le pidió al lector que ilustrara las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la adición y de la multiplicación de los números racionales a través del uso de ejemplos numéricos. Estableceremos éstas como leyes que gobiernan el comportamiento de las operaciones con números racionales, aunque puede probarse que son ciertas usando las propiedades de los enteros y las definiciones de igualdad, adición y multiplicación de números racionales.

Definición 7.10a. El *sistema de los números racionales* es el conjunto

$$R = \left\{x \mid x = \left[\frac{a}{b}\right], a \text{ y } b \text{ enteros } b \neq 0\right\},$$

las operaciones binarias, adición $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$, la relación $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solamente si $ad = bc$, y las siguientes leyes.

(*De aquí en adelante, por razones de sencillez, omitimos el uso de los paréntesis rectangulares.*)

Leyes de la cerradura

1. Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ en R, existe una suma determinada en forma única que escribimos $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ en R.

2. Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ en R, existe un producto determinado en forma única que escribimos $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ en R.

Leyes asociativas. Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d},$ y $\frac{e}{f}$ en R.

3. $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$.
4. $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$.

Leyes conmutativas. Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ en R.

5. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$.
6. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$.

Ley distributiva. Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$ en R.

7. $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$.

Idénticos

8. Existe elemento único, $\frac{0}{1}$, tal que para cualquier $\frac{a}{b}$ en R, $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

9. Existe un elemento único, $\frac{1}{1}$, tal que para cualquier $\frac{a}{b}$ en R, $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

Inversos aditivos

10. Para cada $\frac{a}{b}$ en R hay un elemento único $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}$ en R tal que $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=\frac{0}{1}$, donde $\frac{0}{1}$ es el idéntico aditivo.

Inversos multiplicativos

11. Para cada $\frac{a}{b}$ en R, $\frac{a}{b}\neq\frac{0}{1}$ hay un elemento único $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$ en R tal que $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{1}{1}$ donde $\frac{1}{1}$ es el multiplicativo idéntico.

Ejercicios 7.10a

1. Use ejemplos numéricos para ilustrar cada una de las leyes de la sección precedente.

2. Exponga con palabras el significado de cada una de las leyes de la sección precedente.

3. ¿Es el conjunto de los números racionales cerrado con respecto a la sustracción?

4. Usando las propiedades del sistema de los enteros y la definición de adición y multiplicación de los números racionales demostrar que

(a) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

(b) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$

(c) $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$

5. Escribir una ley de cancelación para la adición de números racionales y probarla.

6. Escribir una ley de cancelación para la multiplicación de números racionales y probarla.

7. Si $a\cdot b=0$, entonces $a=0$ o $b=0$.

Demostración

Si $a=0$, entonces el principio es cierto.
Si $a\neq 0$, entonces $1/a$ es el inverso multiplicativo de a.

(a) Use este hecho para demostrar que si $a \neq 0$, entonces $b = 0$.
(b) Use el principio para demostrar que si $(x - 3)(x - 7) = 0$, entonces $x = 3$ ó $x = 7$.

7.10b Los enteros como un subsistema de los números racionales

Hemos estudiado el sistema de enteros como un sistema de números aparte del sistema de números racionales. El darse cuenta de que cada uno es un sistema numérico con propiedades particulares e interesantes es de importancia considerable. Representa el punto de vista de los algebristas y de aquéllos que estudian teoría de los números quienes están interesados en la estructura de las matemáticas. Este concepto es fundamental en la comprensión de la solubilidad de las ecuaciones. Como hemos acentuado repetidamente en nuestra exposición, *la posibilidad de resolver ecuaciones depende del sistema numérico en el cual la ecuación deba ser resuelta.*

Es deseable interpretar el sistema de los enteros como un subsistema del sistema de números racionales. A la larga, consideraremos el sistema de números racionales como un subsistema del sistema de los números reales.

Hemos identificado $\left[\dfrac{m}{1}\right]$ con m y $\left[\dfrac{n}{1}\right]$ con n, donde m y n son enteros, y examinando su comportamiento con respecto a las operaciones binarias (ver problema 9, ejercicio 7.7 y problema 7, ejercicio 7.8). La adición y la multiplicación de estos números racionales identificados con los enteros eran compatibles con la adición y multiplicación de los enteros.

Ahora vemos que esta misma identificación de enteros con números racionales, esto es, m correspondiendo a $m/1$, nos da

$$m^{-1} = \frac{1}{m}. \qquad \text{(ver sección 7.10)}$$

Esto es también compatible con la definición de exponentes (ver sección 1.5b)

Ejemplo 1

$$\frac{7}{1} + \frac{5}{1} = \frac{7 \cdot 1 + 1 \cdot 5}{1 \cdot 1} = \frac{7+5}{1} = \frac{12}{1} \qquad \text{Números racionales}$$

$$7 + 5 = 12 \qquad \text{Enteros}$$

$$12 = \frac{12}{1} \qquad \text{Nombres para el mismo número}$$

$$\frac{7}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{7 \cdot 5}{1 \cdot 1} = \frac{35}{1} \qquad \text{Números racionales}$$

$$7 \cdot 5 = 35 \qquad \text{Enteros}$$

$$35 = \frac{35}{1} \qquad \text{Nombres para el mismo número}$$

Esto es, el sistema de los números racionales, realmente contiene un subsistema que se comporta igual que los enteros. No son exactamente lo mismo que los enteros porque son clases de pares ordenados de enteros. Asumiremos una posición intuitiva y diremos que el hecho de que se comporten igual que los enteros nos basta para interpretarlos como enteros. De aquí en adelante usaremos m y $\dfrac{m}{1}$ indistintamente como nombres para el mismo número.

7.11 INTERPRETACIONES DE LOS NUMEROS RACIONALES

Como se indicó en la sección 7.2 ahora volvemos a las otras interpretaciones de los números racionales.

7.11a La interpretación de "división"

Hemos identificado los enteros con números racionales particulares, es decir,

$$\frac{2}{1} = 2 \quad \text{ó} \quad 2 = \frac{2}{1},$$

$$\frac{3}{1} = 3 \quad \text{ó} \quad 3 = \frac{3}{1}$$

$$\frac{n}{1} = n \quad \text{ó} \quad n = \frac{n}{1},$$

etc. Pero $2/1$ es sólo uno de los representantes de la clase $[2/1]$. Podemos usar $4/2$, $6/3$, $8/4$, y así sucesivamente, como representantes de esta clase:

$$4/2 = 6/3 = 8/4 = 2.$$

Para establecer una conexión entre m/n y la división, volvamos a nuestra definición de "divide a" en el conjunto de los enteros. Recuerde que $a|b$ si hay un entero k tal que $b = a \cdot k$. Esto también puede establecerse diciendo: b "dividido por" a es k ó, con el símbolo usual, $b \div a = k$.

Puesto que $8 = 4 \cdot 2$, $4|8$. Usando lenguaje "dividido por", tenemos $8 \div 4 = 2$. Pero de la afirmación anterior vemos que $8/4 = 2$. Entonces $8/4$ puede ser interpretado como $8 \div 4$. Esto es la interpretación de "división" del número racional $8/4$.

Generalizando, decimos que m/n puede ser interpretado como $m \div n$.

La interpretación de "división" sirve para muchos propósitos. Veremos en una sección posterior cómo se usa para obtener una representación muy útil de los números.

7.11b División de fracciones

La regla usual asociada con la división de fracciones es "invertir el denominador y multiplicar."

Ejemplo 1

$$\frac{3/7}{2/11} = \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{2} = \frac{33}{14}$$

La explicación de este procedimiento está basado en el hecho de que a/a puede ser usada como un representante de la clase $[1/1]$, el idéntico multiplicativo para los números racionales. La elección de a es tal, que multiplicada por el denominador, da $1/1 = 1$. En este ejemplo debemos escoger a de tal manera que sea el inverso multiplicativo de $2/11$.

$$\left(\frac{2}{11}\right)^{-1} = \frac{11}{2}$$

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{11}} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{11}} \cdot \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{2}} = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{11}{2}}{\frac{2}{11} \cdot \frac{11}{2}} = \frac{\frac{33}{14}}{\frac{1}{1}} = \frac{\frac{33}{14}}{1} = \frac{33}{14}.$$

Nótese que estamos usando el hecho de que

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{11}} \cdot \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{2}} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{11}}.$$

Es decir, que $\dfrac{11/2}{11/2}$ es una forma de idéntico multiplicativo.

El ejemplo 2 ilustra el procedimiento que está siendo representado en muchos de los más recientes textos de aritmética.

Otra aproximación para la división de fracciones sería el considerar el tipo de problema que pide como respuesta un número de la forma $\dfrac{3/7}{2/11}$. Esto puede ser interpretado como un caso especial de b/a, donde

b/a es aquel número que multiplicado por a da b, donde a y b son números racionales, esto es, b/a es la solución del problema

$$a \cdot x = b.$$

El número $\dfrac{3/7}{2/11}$ puede ser interpretado como la solución de la ecuación:

El número $\cfrac{\frac{7}{5}}{\frac{2}{11}}$ puede ser interpretado como la solución de la ecuación:

$$2/11 \cdot x = 3/7.$$

Podemos resolver para x multiplicando ambos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de $2/11$ y haciendo uso de las leyes conmutativa y asociativa,

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{11} \cdot x &= \tfrac{3}{7} \\ (\tfrac{2}{11})^{-1} \cdot \tfrac{2}{11} \cdot x &= \tfrac{3}{7} \cdot (\tfrac{2}{11})^{-1} \\ 1 \cdot x &= \tfrac{3}{7} \cdot (\tfrac{2}{11})^{-1} \\ x &= \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{11}{2}. \end{aligned}$$

se deduce que

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{11}} = \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{11}{2}.$$

Ejercicios 7.11b

1. Realizar las operaciones indicadas.

(a) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$ (b) $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{6}}$ (c) $\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}}$

2. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{5}{6}$ (b) $\frac{11}{3} \cdot x = \frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{7} \cdot x = \frac{7}{4}$

3. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de cada uno de los siguientes números?

(a) $2/3$ (b) 1 (c) $1/5$
(d) $(3/4)^{-1}$ (e) 31 (f) $(6/1)^{-1}$

4. ¿Cuál es el inverso aditivo de cada uno de los siguientes números?

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$

5. Explicar en detalle por qué el numerador se multiplica por el recíproco del denominador para obtener el cociente de dos números racionales.

6. Realizar las operaciones indicadas.

(a) $\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{7}{2}}$ (b) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{6}}$ (c) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}$

(d) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}$ (e) $\frac{2}{5}\cdot(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})$ (f) $\dfrac{\frac{1}{15}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}$

7. Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes:

(a) $\frac{3}{4}\cdot x-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ (b) $\frac{4}{5}\cdot x=\frac{2}{3}-\frac{3}{7}$ (c) $\frac{5}{2}\cdot x+\frac{0}{1}=\frac{3}{5}$

8. Dar un ejemplo de un problema en el cual resulte útil escribir $1\cdot 3$ en lugar de 3. (Sugerencia: Factorizar $3x+3$.)

9. Dar un ejemplo de un problema en el cual resulte útil escribir $15/3$ en lugar de 5. (Sugerencia: Sumar $2/3$ a 5.)

10. Dar un ejemplo de un problema en el que resulte útil escribir 1 como $2/2$.

7.11c La interpretación de "fracción"

En el desarrollo inicial de las fracciones en cualquier libro de texto de aritmética usted encontrará una ilustración similar a la siguiente.

Ejemplo 1

En la figura 2, el disco está dividido en tres partes iguales. Los números 2 y 3 pueden usarse para decirnos qué parte del disco está sombreada.

Este dice el número de partes iguales $\searrow \dfrac{2}{3} \nwarrow$ dos de las partes están sombreadas.

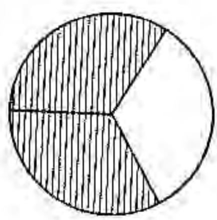


Figura 2

Podrían citarse muchos ejemplos más. Esta es la interpretación de "fracción" o, como algunos autores lo llaman, la interpretación "partición" del número racional. Esta es, probablemente, la interpretación más familiar de los números racionales, así es que, aquí, no es necesaria una larga explicación.

En el número racional m/n, usado en el sentido de "fracción", la n se llama el *denominador* y la m se llama el *numerador*. Denominador se deriva de la palabra latina *denominatus*, "llamar por el nombre". Designa el nombre de (nombre del número) las partes en las cuales el entero está dividido. El numerador se deriva de la palabra latina *numeratus*, "para contar," y "cuenta" las partes bajo consideración. El símbolo, m/n, con respecto a la interpretación de "fracción" designa m de n partes iguales.

$$\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}.$$

Ejemplo 2

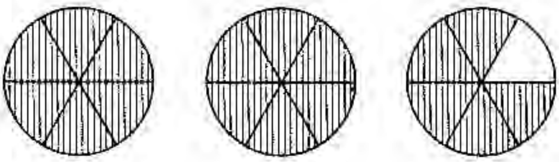


Figura 3

¿Cómo debemos expresar la porción sombreada de los circulos, $2\frac{5}{6}$ ó $\frac{17}{6}$?

El símbolo $2\frac{5}{6}$ se reconoce y acepta como nombre de un número. Se lee, "dos enteros y cinco sextos". Significa $2 + \frac{5}{6}$. Como está escrito, es la suma de un entero y un número racional. Sabemos cómo sumar enteros a enteros y números racionales a numerales racionales, pero no hemos definido la adición de enteros a números racionales.

Para dar el sentido al numeral $(2 + \frac{5}{6})$, debemos volver al sistema de números racionales. Debemos interpretar el entero 2 como un número racional como acordamos anteriormente que debe hacerse. La elección obvia para un número racional que representa a 2 debe ser $\frac{2}{1}$. Por $\frac{2}{1}$ entendemos $[\frac{2}{1}]$. Tenemos suficiente libertad para escoger un representante de $[\frac{2}{1}]$.

El término "cinco-sextos" sugiere la interpretación de "fracción" o "partición" del número racional, $\frac{5}{6}$. El enfoque "5 de 6 partes iguales" es convencional pero, técnicamente, requiere precaución. El introducir la fracción $\frac{5}{6}$ como

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

supone que el lector sabe como sumar números racionales o multiplicar un entero por un número racional.

$$1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 5 \cdot 1/6 = 5/6.$$

Para evitar esta suposición introdujimos el sistema de los números racionales antes de exponer las diversas interpretaciones. De las exposiciones previas sabemos que podemos proceder como sigue:

$$5/6 = 5/1 \cdot 1/6.$$

Pero $5/1 = 5$ así que, podemos también escribir

$$5/6 = 5/1 \cdot 1/6 = 5 \cdot 1/6.$$

En la interpretación de $(2 + 5/6)$ podemos escoger $12/6$ como representante de $[2/1]$ y escribimos esto como $12 \cdot 1/6$. Tenemos entonces

$$2 + 5/6 = 12/1 \cdot 1/6 + 5/1 \cdot 1/6.$$

Usando la ley distributiva, tenemos

$$\begin{aligned} 12/1 \cdot 1/6 + 5/1 \cdot 1/6 &= (12/1 + 5/1) \cdot 1/6 \\ &= (12 + 5) \cdot 1/6 \\ &= 17 \cdot 1/6 \\ &= 17/6. \end{aligned}$$

Esta es una forma tediosa de demostrar que $2\,5/6 = 17/6$, pero está basada en las propiedades fundamentales de los sistemas numéricos que hemos discutido. El procedimiento usual se escribe

$$2\frac{5}{6} = 2 + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} + \frac{5}{6} = \frac{12 + 5}{6} = \frac{17}{6}.$$

Surge la pregunta: ¿cuál es el nombre más útil, $2\,5/6$ ó $17/6$? La forma $2\,5/6$ refleja su origen en mediciones y sugiere magnitud o tamaño. La expresión "$17/6$ metros de tela", no es una forma usual de pedir un número de metros de tela. Por otra parte, hay veces que es más conveniente $17/6$ que $2\,5/6$. Por ejemplo, si dividimos $2\,5/6$ metros de tela entre seis personas, ¿cuánto recibe cada una?

$$2\,5/6 \div 6 = ?$$
$$17/6 \div 6 = 17/6 \cdot 1/6 = 17/36.$$

Cada persona deberá recibir $17/36$ metros de tela.

Para concluir esta sección ilustramos el uso en los cálculos de $2\,5/6$ y $17/6$ como nombres para el mismo número.

Ejemplo 3

$$
\begin{aligned}
(2\tfrac{5}{6})(1\tfrac{1}{2}) &= (2 + \tfrac{5}{6})(1 + \tfrac{1}{2}) \\
&= (2 + \tfrac{5}{6})(1) + (2 + \tfrac{5}{6})(\tfrac{1}{2}) \\
&= 2\cdot 1 + \tfrac{5}{6}\cdot 1 + 2\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{2} \\
&= 2 + \tfrac{5}{6} + 1 + \tfrac{5}{12} \\
&= (2 + 1) + (\tfrac{5}{6} + \tfrac{5}{12}) \\
&= (2 + 1) + (\tfrac{10}{12} + \tfrac{5}{12}) \\
&= 3 + \tfrac{15}{12} \\
&= 3 + \frac{12 + 3}{12} \\
&= 3 + \tfrac{12}{12} + \tfrac{3}{12} \\
&= (3 + 1) + \tfrac{1}{4} \\
&= 4 + \tfrac{1}{4} = 4\tfrac{1}{4}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
(2\tfrac{5}{6})(1\tfrac{1}{2}) &= (\tfrac{17}{6})(\tfrac{3}{2}) \\
&= \frac{17\cdot 3}{6\cdot 2} \\
&= \frac{17}{2\cdot 2} \\
&= \tfrac{17}{4} \\
&= \frac{16 + 1}{4} \\
&= \tfrac{16}{4} + \tfrac{1}{4} \\
&= 4 + \tfrac{1}{4} \\
&= 4\tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\tfrac{5}{6} + 1\tfrac{1}{2} &= 2 + \tfrac{5}{6} + 1 + \tfrac{1}{2} \\
&= (2 + 1) + (\tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{2}) \\
&= 3 + (\tfrac{5}{6} + \tfrac{3}{6}) \\
&= 3 + \tfrac{8}{6} \\
&= 3 + \frac{6 + 2}{6} \\
&= 3 + \tfrac{6}{6} + \tfrac{2}{6} \\
&= (3 + 1) + \tfrac{1}{3} \\
&= 4\tfrac{1}{3}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
2\tfrac{5}{6} + 1\tfrac{1}{2} &= \tfrac{17}{6} + \tfrac{3}{2} \\
&= \tfrac{17}{6} + \tfrac{9}{6} \\
&= \frac{17 + 9}{6} \\
&= \tfrac{26}{6} \\
&= \frac{24 + 2}{6} \\
&= \tfrac{24}{6} + \tfrac{2}{6} \\
&= 4 + \tfrac{1}{3} \\
&= 4\tfrac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Ejercicios 7.11c

1. (a) Sumar $2\frac{1}{8}$ a $3\frac{3}{8}$ como se le enseñó en aritmética.
   (b) Sume los mismos números como en el ejemplo 3, sección 7.11c, y justifique cada paso.

2. Efectuar las operaciones indicadas y escribir su respuesta como un número racional y como un entero más un número racional.

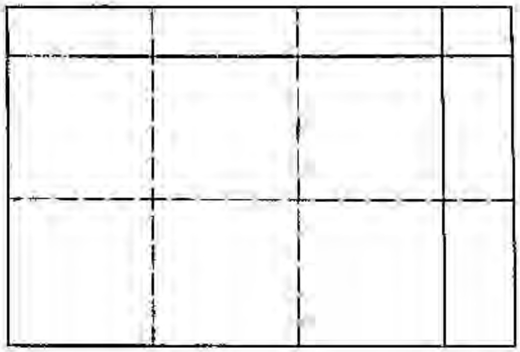
   (a) $\dfrac{2 + \frac{5}{6}}{2}$ (b) $\dfrac{3\frac{4}{7}}{2\frac{1}{3}}$

   (c) $\dfrac{(5 + \frac{1}{4}) + 2}{3 + \frac{1}{3}}$ (d) $(2\frac{1}{3})(3\frac{1}{2})$

3. Dar un ejemplo de una situación en la cual cada uno de los siguientes numerales está escrito en forma conveniente.

   (a) $4\frac{1}{8}$ (b) $\frac{33}{11}$ (c) $\frac{9}{6}$
   (d) $\frac{5}{3}$ (e) $9\frac{2}{6}$ (f) $4 + \frac{1}{7}$

4. El siguiente diagrama representa el producto $(2\frac{1}{3})(3\frac{1}{2})$. Marque adecuadamente cada parte.



5. Efectuar el cálculo y explicar cada paso en la siguiente operación:

$$\frac{17\frac{3}{5}}{3\frac{5}{6}}$$

6. Efectúe las operaciones indicadas.

(a) $2\frac{3}{7} \div 4\frac{3}{5}$ (b) $1 \div \dfrac{1}{10}$

(c) $\left(5 + \dfrac{2}{3}\right) \div \left(6 + \dfrac{1}{2}\right)$ (d) $\dfrac{4\frac{1}{3}}{2}$

(e) $2 \div 5\frac{3}{4}$ (f) $\dfrac{5 + \frac{5}{7}}{7}$

7. Resolver para x: $(3\frac{1}{2})x = 4\frac{2}{3}$.

8. Multiplicar los siguientes números aplicando la ley distributiva.
   (a) $(5 + \frac{4}{5})(6 + \frac{3}{10})$ (b) $(6 + \frac{1}{3})(9 + \frac{1}{6})$
   (c) Representar cada producto como área y marcar cada parte.
   (d) Cambiar los numerales de (a) y (b) a la forma racional y efectuar la multiplicación.

9. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

(a) $\dfrac{3 + \frac{1}{3}}{2}$ (b) $\dfrac{3^{-1} + 3}{3}$

(c) $\dfrac{5 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1}$ (d) $2(\frac{2}{3} - \frac{1}{6})$

(e) $\frac{1}{2} \cdot (3 + \frac{5}{8})$ (f) $5\frac{2}{3} - 4\frac{7}{8}$

7.11d Interpretación de "razón"

Hemos tenido ocasión de considerar a los números enteros no negativos en situaciones en las cuales las únicas propiedades usadas fueron el hecho de ser diferentes y de que se dispone de una reserva inagotable de ellos. En estas situaciones los números se usan como nombres de objetos o lugares, por ejemplo, números de teléfonos, posiciones en un equipo de béisbol, etc. La adición y multiplicación en estas situaciones no tienen significado. Los números se usan como nombres y no como números.

Similarmente, en muchas situaciones se necesita el uso de pares ordenados de números enteros no negativos, por ejemplo, "María compró 3 lápices por 10 centavos." El par de números naturales (3, 10), es un par ordenado. "María compró 10 lápices por 3 centavos" describe una situación completamente diferente. (Esto sería una ganga). Otra forma de describir esta situación es decir que María compró lápices con costo de "3 por 10 centavos." El signo que aparezca en la ventana de la tienda probablemente será, "lápices 3/10¢."

El par ordenado de números naturales se usa aquí para describir *una correspondencia muchos a muchos*, en este ejemplo, es una correspondencia 3 a 10.

La afirmación "La probabilidad de que ganen los Yankees es de 8 a 5", describe una correspondencia 8 a 5. Como dijimos antes, estas situaciones comprenden pares ordenados de números naturales, pero no como números de un sistema numérico. ¿Qué sentido tendría sumar o multiplicar los pares ordenados en estas situaciones? Los pares de números se están usando para indicar *razón*. Como tal, frecuentemente se escriben en la misma forma que los números racionales ordinarios. Como *razón* deben leerse "3 por 10," ó "3 a 10," u "8 a 5" y no como tres décimos u ocho quintos.

En muchas situaciones que involucran pares ordenados, diferentes pares pueden describir la misma situación. Esto es 3 lápices por 10¢ describe la misma situación que 6 lápices por 40¢ ó 12 lápices por 20¢. Similarmente 20 kilómetros por 1 litro es equivalente a 40 kilómetros por 2 litros, ó 100 kilómetros por 5 litros. El criterio para determinar cuando dos razones describen la misma correspondencia muchos a muchos es el mismo que para determinar cuando dos números racionales son *equivalentes*. Esto es, la razón m/n, será *equivalente* a la razón r/s, si y solamente si $m \cdot s = n \cdot r$ como enteros. Usemos el símbolo $=$ para indicar que dos comparaciones describen la misma correspondencia muchos a muchos.

Ejemplo 1

$\frac{3}{10} = \frac{6}{20}$ porque $3 \cdot 20 = 10 \cdot 6$.
$\frac{3}{10} = \frac{9}{30}$ porque $3 \cdot 30 = 10 \cdot 9$.
$\frac{8}{5} = \frac{16}{10}$ porque $8 \cdot 10 = 5 \cdot 16$.

Esta relación entre razones es una relación de equivalencia y divide a todas las razones en clases de equivalencia. La diferencia esencial cuando se trabaja con los pares ordenados como razones y con los pares ordenados como números racionales es que los últimos se suman, se multiplican, se restan y se dividen. Estas operaciones asocian a los pares ordenados de dos clases, un par ordenado de una tercera clase. Por otra parte, las razones comprenden esencialmente trabajar con una clase a la vez.

El problema usual en el que aparecen las razones se estructura alrededor de la siguiente idea sencilla. *Tres* de las cuatro componentes de dos razones equivalentes se conocen. El problema es encontrar la *cuarta* componente.

Ejemplo 2

Si 6 manzanas cuestan 25¢, ¿cuál es el costo de 30 manzanas?
La clase de equivalencia a la cual pertenecen las razones $6/25$ es

$6/25$, $12/50$, $18/75$, $24/100$, $30/125$, $36/150$, . . .

Ahora la respuesta a la pregunta es completamente obvia. La razón cuya primera componente es 30 es $30/125$ lo cual se interpreta como 30 manzanas por \$1.25. Esto usualmente se abrevia como sigue:

Sea N el costo de las 30 manzanas entonces

$$\frac{6}{25} = \frac{30}{N} \qquad \text{si y solamente si} \quad 6 \cdot N = 25 \cdot 30.$$

Entonces

$$N = \frac{25 \cdot 30}{6},$$

y

$$N = 125.$$

Ejercicios 7.11d

1. Dar cinco ejemplos del uso de los números como nombres.

2. ¿Cuál es el significado de la expresión en béisbol, "*Fuera*, 6 a 3"?

3. ¿Cuál es el significado de los números de las puertas de los edificios?

4. Un producto enlatado cuesta 3 latas por 38¢. ¿Cuántas latas puede usted adquirir por \$1.90?

5. Un banco cobra \$3 por cada \$500 que se emiten en cheque certificado. Si por la emisión de un cheque cobran \$12. ¿Cuál es el valor del cheque?

6. En un mapa 1 cm. representa 16 kilómetros. ¿Qué distancia queda representada por $5\frac{1}{2}$ cm.?

7. Un árbol de 60 pies de alto proyecta una sombra de 45 pies de longitud. ¿Cuál es la altura de un árbol que proyecta una sombra de 30 pies de longitud a la misma hora del día?

8. Un automovilista hace un viaje de 125 kilómetros en $2\frac{1}{2}$ horas. A la misma velocidad ¿en qué tiempo haría un viaje de 500 kilómetros?

9. La escala del dibujo de un arquitecto es 1 pie a $\frac{1}{4}$ pulgada. ¿Cuántos pies de la estructura representa una longitud de 10 pulgadas en el dibujo?

10. Cada 3 litros de fluido de radiador contienen 2 cuartos de anticongelante puro. ¿Cuántos cuartos de anticongelante hay en 45 litros de esta mezcla?

7.11e Interpretación de razón (porcentaje)

La razón también se usa para hacer comparaciones relativas. Así una persona invierte $3,000 en un ramo en particular y los vende por $3,450. El obtiene una utilidad de $450. Otra persona invierte $450 en algún otro ramo y lo vende a $900. También obtiene una ganancia de $450. La cantidad total ganada fue la misma, pero la razón de cambio en inversión original es notablemente diferente. Las razones, $450/3000$ $450/450$, describen aspectos diferentes de esta situación de inversión. Es posible hacer una comparación de estas dos razones; sin embargo es mejor comparar razones cuyos denominadores sean iguales. Lo que se acostumbra es usar 100 como el común denominador. Las razones cuyo denominador es 100 se llaman porcentajes. Los porcentajes son razones cuya segunda componente es 100, y cuando esto se entiende, se escribe con el símbolo % o "por ciento" en lugar del 100 en el denominador.

De estos ejemplos tenemos

$$450/3000 = 15/100 = 15\%$$
$$450/450 = 100/100 = 100\%$$

En este caso 15% realmente significa 15 por 100. En términos de porcentajes, la situación de inversión puede ser comparada por inspección.

El problema de cambiar de porcentajes a forma decimal y viceversa implica simplemente recordar el significado de porcentaje:

$$15\% = \frac{15}{100} = 0.15$$

$$0.02 = \frac{2}{100} = 2\%$$

Muchos de los números racionales pueden ser expresados solamente en forma decimal aproximada. Lo mismo es cierto para razones y porcentajes. La razón $1/3$ solamente puede ser aproximada con un porcentaje. Por ejemplo

$\frac{1}{3} \cong \frac{33}{100} = 33\%$.

Convencionalmente se ha dado significado a los siguientes porcentajes:

$33\frac{1}{3}\%$ $\quad 66\frac{2}{3}\%$

El significado aquí es claro. Sin embargo rara vez se ven porcentajes como:

$14\frac{2}{7}\%$ $\quad 81\frac{9}{11}\%$ $\quad 74\frac{74}{100}\%$

Estos se expresan usualmente como "14% aproximadamente," "82% aproximadamente" y "75% aproximadamente." Simplemente mencionamos esto como una convención y no intentamos aclararlo como una idea matemática.

Tradicionalmente, en la presentación de los problemas de porcentaje o los que comprenden porcentajes, se consideran tres tipos diferentes ó 3 casos. Con el uso de las razones, los problemas de porcentaje son esencialmente de un tipo: encontrar la cuarta componente de dos razones equivalentes cuando tres de ellas se conocen.

Supongamos que P *simboliza* el porcentaje. Entonces, por ejemplo 32% debe darnos $P = 32$ y deberá ser expresado como la razón $\frac{32}{100}$. Cuando usamos P para representar el porcentaje, $P/100$ es la razón. Para denotar a la otra razón equivalente en el problema de porcentaje usaremos A/B, donde A se llama "cantidad" y B la "base". Ahora los "tres" tipos de problemas de porcentaje pueden expresarse en términos de estas dos razones.

Encontrar el 32% de 400. $\qquad \dfrac{32}{100} = \dfrac{A}{400}, \quad A = 128.$

¿Qué porcentaje de 400 es 128? $\qquad \dfrac{P}{100} = \dfrac{128}{400} \quad P = 32.$

¿De qué número es 128 el 32%? $\qquad \dfrac{32}{100} = \dfrac{128}{B}, \quad B = 400.$

Ejercicios 7.11e

1. Expresar las siguientes razones como porcentajes:

(a) $\frac{32}{100}$ (b) $\frac{2}{100}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{13}{20}$
(e) $\frac{4}{25}$ (f) $\frac{18}{50}$ (g) $\frac{18}{75}$ (h) $\frac{96}{400}$

2. Expresar los siguientes porcentajes como razones:

(a) 25% (b) 34% (c) 40% (d) 85%
(e) 125% (f) 250% (g) 400% (h) 12.5%

3. Use la idea de razón para resolver lo siguiente:

(a) ¿Cuál es el 15% de 80?
(b) ¿Cuál es el 45% de 2300?
(c) ¿Qué porcentaje de 248 es 31?

(d) ¿Qué porcentaje de \$2000 es \$160?
(e) El 65% de un número es 260. ¿Cuál es el número?
(f) El 34% de un número es 170. ¿Cuál es el número?

7.12 ORDEN EN LOS NUMEROS RACIONALES

Introducimos el *orden* en los números racionales en una forma parecida a como lo hicimos con los enteros. Primero definimos los *números racionales positivos* y después definimos la relación de orden en términos de ellos.

Definición 7.12a. El número racional m/n es positivo si el entero $n \cdot m$ es un entero positivo.

Usamos la notación

$$\frac{m}{n} > 0$$

para indicar que $\frac{m}{n}$ es positivo. El numeral $\frac{m}{n}$ es un representante de la clase $\left[\frac{m}{n}\right]$. Si $\frac{m}{n}$ es positivo, también lo será cada miembro de la clase $\left[\frac{m}{n}\right]$, esto es, la definición de positivo es independiente del representante. Afirmamos que esto es cierto y el lector interesado encontrará que es fácil verificarlo.

7.12a La ley de la tricotomía y el orden para los números racionales

Suponiendo que la letra r representa un número racional, entonces una y solamente una de las siguientes afirmaciones es cierta:

1. r es positivo,
2. $r = 0$ ó
3. $-r$ es positivo.

Si r es positivo, $-r$ se llama un número racional *negativo*.

El conjunto de números racionales está separado en tres conjuntos, los números racionales positivos, los números racionales negativos, y el 0. (En adelante trataremos a los enteros como un subconjunto de los números racionales.)

Los *números racionales positivos* son cerrados con respecto a la suma y a la multiplicación en la misma forma que los *enteros y positivos*.

1. La suma de dos números racionales positivos es positiva.
2. El producto de dos números racionales positivos es positivo.

Ahora ya podemos definir el orden en los números racionales.

Definición 7.12b. Si r y s indican números racionales, entonces r "es menor que" s si $s - r$ es positivo.

Usaremos la misma notación usada anteriormente:

$r < s$ si y solamente si $s - r > 0$.

También escribimos $r \leqq s$ si y solamente si $s - r \geqq 0$, y esto es cierto si $r < s$ o $r = s$.

Usamos la notación $r < x < s$ para indicar que $r < x$ y $x < s$ se cumplen simultáneamente.

Hacemos ahora una lista de algunas de las propiedades de orden. Sean p, r y s, números racionales.

1. Si $r < s$, entonces $r + p < s + p$.
2. Si $r < s$, y $p > 0$, entonces $rp < sp$.
3. Si $0 < r < s$, entonces $\frac{1}{r} > \frac{1}{s}$.
4. Si $r < s$ y $p < 0$, entonces $rp > sp$.

Ejercicios 7.12a

1. Verificar que cada una de las siguientes desigualdades se cumple:

(a) $\frac{3}{5} < \frac{32}{51}$ (b) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{10} < \frac{1}{7}$

(d) $\frac{1}{100} < \frac{2}{100}$ (e) $\frac{1}{1001} < \frac{1}{1000}$ (f) $\frac{2}{3} < \frac{2463}{3463}$

2. Verificar que cada una de las siguientes desigualdades se cumple:

(a) $\frac{-2}{3} < \frac{2}{3}$ (b) $\frac{-1}{4} < \frac{1}{-5}$ (c) $\frac{1}{-7} < \frac{1}{-8}$

(d) $\frac{-1}{9} < \frac{1}{2}$ (e) $-3 < 2$ (f) $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$

3. Si $a > 0$ y $b > 0$ y si $a < b$, ¿qué relación hay entre $1/a$ y $1/b$?

4. (a) Demuestre Ud. que su respuesta al problema 3 es correcta.

   (b) Dada la desigualdad $2 < 3$, ¿cuál es el efecto de multiplicar ambos miembros de la desigualdad por 2? ¿Por -3? ¿Por -1? ¿Por $-\frac{1}{2}$?

5. (a) Diga Ud. cuáles son los enteros que satisfacen lo siguiente: $-3 < x \leqq 5$.

(b) Haga Ud. una lista de los enteros positivos que satisfacen lo siguiente:

$-3 < x \leqq 5$.

(c) Usar desigualdades para especificar el conjunto formado por

$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

6. (a) Demostrar que si $n^2pq > q^2mn$, entonces $m/n < p/q$. (Sugerencia: $n^2pq > q^2mn$ si $n^2pq - q^2mn > 0$. Divida por qn.)

   (b) Demostrar que si $m/n < p/q$, entonces $n^2pq - q^2mn > 0$. (Sugerencia: $m/n < p/q$ si y solamente si $p/q - m/n > 0$. Use la definición 7.12a.)

7. (a) Sean m, n y k enteros positivos; demostrar que $m/k < n/k$ si y solamente si $m < n$.

   (b) Use (a) para demostrar que si m, n, p, q, son enteros positivos entonces $m/n < p/q$ si y solamente si $mq < np$.

8. Hacer una lista de algunos números racionales que satisfagan lo siguiente:

   (a) $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

9. Ilustrar cada una de las propiedades, (1), (2), (3), (4), de orden.

10. Localizar cada uno de los siguientes números en la recta numérica:

    (a) $0, \frac{5}{7}, \frac{11}{3}, \frac{6}{8}, \frac{9}{11}$ (b) $-1, \frac{-4}{3}, \frac{-3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{10}{7}$

7.12b Valor absoluto

Repetimos una definición anterior en términos de números racionales.

Definición 7.12c. Para cada número racional r definimos

$$|r| = \begin{cases} r \text{ si } r > 0 \\ -r \text{ si } r < 0 \\ 0 \text{ si } r = 0 \end{cases}$$

El número $|r|$ se le llama el valor absoluto de r.

Ejemplo 1

$$\left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3} \qquad |-6| = 6 \left|\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5}$$

Las siguientes son algunas de las propiedades útiles del valor absoluto. Dados los números racionales a y b.

1. Si $a \neq 0$, entonces $|a| > 0$; $|a| = 0$ si y solamente si $a = 0$.
2. $|a - b| = |b - a|$.

3. $|a + b| \leqq |a| + |b|$.
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
5. $\big||a| - |b|\big| \leqq |a - b|$.

Ejercicios 7.12b

1. Encontrar las soluciones enteras.
   (a) $|x| \leqq 3$ (b) $|x - 13| \leqq 2$
   (c) $|x + 5| \leqq 3$ (d) $|x - 6| < 1$
   (e) $|x + 3| = 2$
   (f) Usar la notación de conjuntos y desigualdades para describir los complementos de los conjuntos solución desde (a) hasta (e)

2. Encontrar las soluciones enteras.
   (a) $|3x + 2| = 5$ (b) $|2x - 3| = 7$

3. Usar ejemplos numéricos para ilustrar las propiedades del valor absoluto, desde (1) hasta (5), en la sección 7.12b.

4. Dar un ejemplo numérico de las propiedades (3) y (5) de valor absoluto en el cual se cumpla estrictamente la desigualdad. (i. e. que valga $<$ y no $=$).

5. Si a es racional y $1 < a$, ¿qué relación hay entre a y a^2?

6. Si a es racional y $0 < a < 1$, ¿qué relación hay entre a y a^2?

7. Si a es racional y $a < -1$, ¿cómo está relacionado a con a^2?

8. Si a es racional y $-1 < a < 0$, ¿cómo está relacionado a con a^2?

7.12c La propiedad de ser denso

Asociado a cada número racional el punto en la *recta numérica* cuya *distancia* a un punto fijo (ver secciones 6.12b y 6.12c) es el número racional, definimos una correspondencia uno a uno entre los números racionales y un subconjunto de los puntos en la recta. Veremos en la sección 7.13 que hay puntos en la recta numérica que no corresponden a ningún número racional. (Ver figura 4).

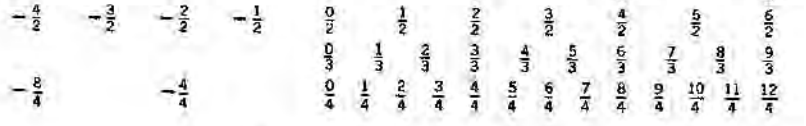


Figura 4. La *recta* de números racionales.

Dados dos números racionales cualesquiera a y b (suponiendo que $a < b$), siempre es posible encontrar otro número racional c tal que c

está "entre" a y b; esto es, dados a y b con $a < b$ podemos encontrar otro número racional c tal que

$$a < c < b.$$

Una forma para hacer esto es tomar la mitad de la suma de a y b; esto es

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Usando las propiedades de orden podemos probar esto fácilmente:

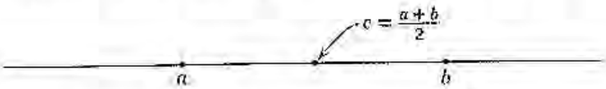
$a < b$; por lo tanto $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$, por la propiedad 2, sección 7.12.

y $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ por la propiedad 1, sección 7. 12.

También $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$ por la misma propiedad

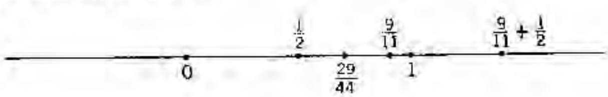
Por lo tanto $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Hablando geométricamente, observamos que el punto $c = (a + b)/2$ es el punto medio del segmento de línea de a a b.



Ejemplo 1

Encontrar el punto medio del segmento de línea de ½ a 9/11 y verificar que está entre ½ y 9/11.



$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{11}}{2} = \frac{\frac{11+18}{22}}{\frac{2}{1}} = \frac{29}{44}.$$

Para demostrar que $\frac{1}{2} < \frac{29}{44} < \frac{9}{11}$, primero demostramos que $\frac{1}{2} < \frac{29}{44}$ y después demostramos que $\frac{29}{44} < \frac{9}{11}$. $\frac{29}{44} - \frac{1}{2} = \frac{58-44}{88} = \frac{14}{88} > 0$ puesto que $14 \cdot 88 > 0$. En consecuencia $\frac{1}{2} < \frac{29}{44}$. $\frac{9}{11} - \frac{29}{44} = \frac{396 - 319}{484} = \frac{77}{484} > 0$ puesto que $77 \cdot 484 > 0$. En consecuencia $\frac{29}{44} < \frac{9}{11}$.

El hecho de que siempre podamos encontrar un número racional entre dos números racionales diferentes implica que entre dos números racionales diferentes hay un número infinito de números racionales. ¿Por qué? Porque sin importar qué "tan cerca" puedan estar dos números racionales, podemos encontrar otro número racional que esté entre ellos. Esta interesante propiedad de los números racionales se llama densidad.

> **Definición 7.12d.** El decir que los números racionales son *densos en sí mismos* (o densos) significa que entre cualesquiera dos números racionales distintos pueden siempre encontrarse otro número racional.

Esto es únicamente una forma de decir que los números racionales están densamente distribuidos a lo largo de la recta numérica, esto es, no hay ninguna parte de la recta numérica que conteniendo dos números racionales no contenga una infinidad de ellos. La idea de densidad está estrechamente relacionada con la idea de aproximaciones. Este concepto es extremadamente importante en cualquier situación que involucre mediciones y desde luego en muchos aspectos de las matemáticas. Examinaremos esto en el capítulo 8.

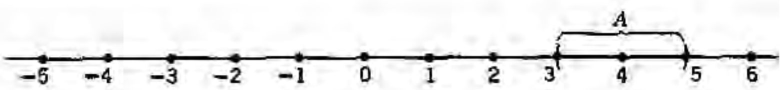
7.12d Graficar conjuntos solución

Al graficar conjuntos solución adoptamos la convención de usar paréntesis redondo para indicar que los extremos no estarán incluidos en el conjunto. Si los puntos extremos están incluidos se usa un paréntesis rectangular.

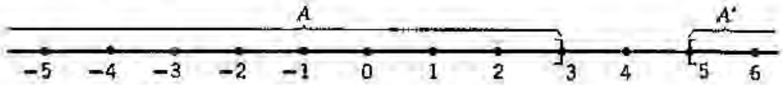
Ejemplo 1

Graficar el conjunto y su complemento, donde
$A = \{x \in R \mid 3 < x < 5\}$.

La gráfica de A:



La gráfica de A':

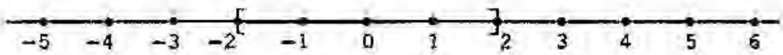


Ejemplo 2

Graficar el conjunto y su complemento donde

$B = \{x \in R \mid |x| \leqq 2\}$.

La gráfica de B:



La gráfica de B':

Ejercicios 7.12c

1. Encontrar un número racional entre 0 y 1.

2. Encontrar 5 números racionales entre 0 y $\frac{1}{4}$.

3. Encontrar otros 5 números racionales diferentes de los del problema 2, situados entre 0 y $\frac{1}{4}$.

4. Considérese el conjunto de todos los números racionales mayores que 1. ¿Tiene este conjunto un elemento mínimo? ¿Por qué?

5. Considérese el conjunto de todos los números racionales menores que 3. ¿Tiene este conjunto un elemento máximo? ¿Por qué?

6. ¿Hay un entero positivo mínimo? ¿Cuál es?

7. ¿Hay un número racional positivo mínimo? ¿Cuál es?

8. ¿Qué número corresponde al punto medio de 0 y $1/2^n$ para n entero positivo?

9. ¿Hay un número racional mínimo mayor que $\frac{1}{3}$?

10. ¿Hay un número racional máximo menor que $\frac{1}{2}$?

11. ¿Cuál es el entero mínimo mayor que -9?

12. ¿Cuál es el entero máximo menor que -5?

13. ¿Cuál es el número racional mínimo x tal que $x \geqq \frac{3}{4}$?

14. ¿Cuál es el número racional mínimo x tal que $x \leqq \frac{7}{4}$?

15. ¿Qué significa el decir que dos números racionales están cerca uno de otro?

16. Extienda las definiciones 4.16b, c, y d al conjunto de los enteros. Al conjunto de los números racionales.

17. ¿Cuál es el supremo del conjunto A en cada uno de los siguientes ejercicios (x racional)? (Ver definición 4.16c.).

(a) $A = \{x \mid |x| \leqq 10\}$ (b) $A = \{x \mid |x| < 1\}$

(c) $A = \{x \mid -3 < x \leqq 0\}$ (d) $A = \{x \mid -5 < x < -2\}$

18. Graficar los conjuntos del problema 17 y sus complementos.

7.13 INTRODUCCION A LOS NUMEROS IRRACIONALES

Algunos números son racionales, algunos no lo son; por ejemplo, $3/4$ es un número racional, $5/1$ es un número racional. Como también interpretamos m/n como una división, podemos considerar 5 como un número racional; 0 es también un número racional; $1, -1, 17/4, 7/3, -77/13$ son números racionales.

Los números que no son racionales se llaman números *irracionales*. Ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{11}$, $\sqrt{13}$, π, No es raro encontrar personas que consideren $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{87}$ como una operación complicada de aritmética. (Recordaremos nuevamente al lector que el algoritmo de la adición, de la multiplicación y el de la raíz cuadrada son sólo procedimientos aritméticos para determinar otro nombre de un número.) Repetimos: $2 + 5$ es el nombre de un número y reconocemos que es el número 7. Así también $3{,}746{,}297 + 894{,}299$. Un estudiante puede sentir que debe saber *cómo* se suma antes de poder decir que se trata de un *número*. Sin embargo, es perfectamente válido como número en la forma en que se escriba. Teniendo esto en mente, $\sqrt{2}$ es un número. *Es aquel número positivo que multiplicado por sí mismo da el número 2.*

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

Este número no es un número racional. Se llama número irracional y aparece en forma natural. Hay un teorema bien conocido en geometría el cual ya era conocido de los Babilonios casi 2000 años antes de Cristo, pero cuyo descubrimiento es frecuentemente acreditado a los Griegos. Se llama el teorema de Pitágoras. Este teorema establece que la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa. (Ver capítulo 9). Si marcamos los catetos del triángulo por a y b y la hipotenusa por c, entonces el teorema afirma que $a^2 + b^2 = c^2$ (ver figura 5).

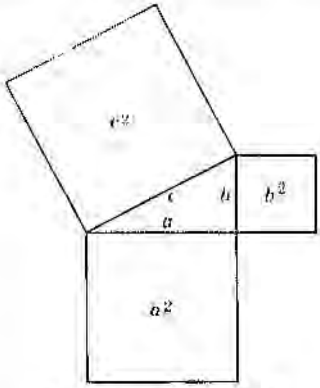


Figura 5. $a^2 + b^2 = c^2$

Considerando el triángulo formado por la diagonal y dos de los lados de un cuadrado cuyo lado mide la unidad de longitud. Tenemos

$$1^2 + 1^2 = 2.$$

Esto significa que la hipotenusa c debe tener una longitud tal que $c^2 = 2$. En el tiempo de los Babilonios tales números eran desconocidos. Los Griegos se referían a la hipotenusa de dicho triángulo como inconmensurable. Veremos que se encontró que el conjunto de números racionales desarrollado con el objeto de medir era inadecuado aun para las mediciones más sencillas.

Ejemplo 1

El lado de un cuadrado cuya área es 2, es $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ es un número irracional.

El lado de un cuadrado cuya área es 3, es $\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$ es un número irracional.

El lado de un cubo cuyo volumen es 2, es $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{2}$ es un número irracional.

El radio de un círculo cuya área es 1, es $\sqrt{\pi}/\pi$ y $\sqrt{\pi}/\pi$ es un número irracional.

Estos ejemplos sencillos sugieren que hay muchos números que son números irracionales (no racionales). Hay, de hecho, mucho más números irracionales que números racionales. No son tan familiares como los números racionales, pero tales números existen. Por ejemplo, π es un número irracional, pero transcurrió mucho tiempo antes de que se demostrara que era irracional. El número cuyo símbolo es e es familiar al estudiante de cálculo. Es útil como una base para un sistema de logaritmos.

Ahora demostraremos que $\sqrt{2}$ no es un número racional, lo que confirmará la afirmación de que los números irracionales existen.

7.13a La irracionalidad de $\sqrt{2}$

El argumento usado para demostrar que no hay un número racional x tal que $x^2 = 2$ es un ejemplo del método de demostración indirecta. El procedimiento es como sigue. Suponemos que hay un número racional p/q cuyo cuadrado es 2. Usando correctamente las operaciones matemáticas llegamos a una situación contradictoria. Puesto que llegamos a esta contradicción por pasos correctos de matemáticas, la única conclusión permitida es que nuestra suposición es falsa.

Proposición por demostrar. No hay ningún número racional p/q tal que $(p/q)^2 = 2$.

Suposición. Consideremos que la proposición es falsa: esto es, suponemos que existe un número racional p/q tal que $p^2/q^2 = 2$.

1. Supongamos que p/q está en la forma reducida; es decir, p y q no tienen factores comunes excepto $+1$ ó -1. Podemos hacer esto sin pérdida de generalidad. Puesto que si $p^2/q^2 = 2$ donde p/q no es un número racional en su forma más simple, entonces

$$\frac{p}{q} = \frac{dp'}{dq'} = \frac{p'}{q'} \qquad \text{donde } m.c.d.\ (p', q') = 1.$$

Esto es, p'/q' está en forma reducida.

2. $p^2/q^2 = 2$, por lo tanto $p^2 = 2q^2$.
3. $p^2 = 2q^2$ implica p^2 es par. Pero si p^2 es par, también lo es p. Ya que si p es impar, p^2 también es impar. Por lo tanto p es par.
4. Si p es par, podemos escribir p en la forma $p = 2m$ donde m es un entero.
5. Por lo tanto $p^2 = 2m \cdot 2m = 4m^2$, esto es $p^2 = 4m^2 = 2q^2$.
6. $4m^2 = 2q^2$ implica que $2m^2 = q^2$.
7. Por lo tanto q^2 es par. Pero eso significa que q es par. Así que p y q deben tener el factor común 2. Esto no puede suceder si el único factor común es $+1$ ó -1.
8. Por lo tanto nuestra suposición debe ser falsa.
9. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es irracional.

EJERCICIOS DE REPASO

1. Definir la operación binaria $\odot$ en $W \times N$ como sigue:

$$((m, n), (p, q)) \xrightarrow{\odot} (m, n) \odot (p, q) = (mp, nq)$$

(a) ¿Es $W \times N$ cerrado con respecto a $\odot$?
(b) ¿Obedece $\odot$ a la ley conmutativa?
(c) ¿Obedece $\odot$ a la ley asociativa?
(d) ¿Hay un elemento idéntico para $\odot$? Si lo hay, ¿cuál es?

2. Los números pares son de la forma $2k$, donde k está en W. Los números impares son de la forma $(2k - 1)$ ó $(2k + 1)$, donde k está en W.
   (a) Demostrar que el producto de dos números pares es par y justificar cada paso.
   (b) Demostrar que la suma de dos números pares es par y justificar cada paso.
   (c) Demostrar que el producto de dos números impares es impar y justificar cada paso.

Dar definiciones precisas de cada uno de los siguientes enunciados:

3. Un subconjunto propio de un conjunto.
4. La intersección de dos conjuntos.
5. El conjunto universal.
6. La relación de "inclusión" para conjuntos.
7. Una relación de equivalencia.
8. Dominio de una relación.
9. La relación de "divide a" para números naturales.
10. Una correspondencia uno a uno.
11. Un sistema de numeración.
12. La relación de orden, $\leqq$, para los enteros.
13. Densidad de los números racionales.
14. Valor absoluto de n, para n entero.

Hacer una lista de las propiedades de cada una de las siguientes relaciones (a y b son enteros):

15. a Ⓡ b si y solamente si $|a - b| = k > 0$.
16. a Ⓡ b si y solamente si $|a - b| = 0$.
17. a Ⓡ b si y solamente si $|a - b| \geqq 0$.
18. a Ⓡ b si y solamente si $|a - b| > 0$.

Dar una definición formal de cada uno de los siguientes:

19. El sistema de enteros.
20. El sistema de números racionales.
21. ¿Qué significa decir que un conjunto es finito?
22. ¿Qué significa decir que un conjunto es infinito?

REFERENCIAS

Birkhoff, Garret, y Saunders MacLane, *A Brief Survey of Modern Algebra*, The Macmillan Co., Nueva York, 1953, Cap. II.

CAPITULO 8

El sistema de los números reales

8.1 INTRODUCCION

Observamos anteriormente que la formación de conjuntos es un proceso humano. Es la forma en que el hombre ordena su universo. En este proceso los números le ayudan a cuantificar y a aprender más acerca de su medio ambiente. El asignar números a objetos, donde la palabra "objeto" se está usando en su más amplio sentido, se llama ya sea medición o bien ordenación. La ordenación es parte del proceso de "llevar la cuenta de", mientras que la medición aumenta los conocimientos que el hombre tiene del objeto. Los números asignados a un "objeto" en el proceso de medición se llaman *dimensiones*. El aspecto o propiedad del objeto que está siendo medido se llama la *medida* del objeto. Generalmente usamos el término *medida* en el sentido más amplio de la palabra pero podría ser peso, longitud, área, velocidad, costo, tiempo, volumen, cambio, masa, viscosidad, inteligencia, o cualquiera de las múltiples cantidades medibles. Algunas de estas medidas admiten *unidades regulares* o corrientes de comparación, mientras que otras no. El incremento de actividades en la investigación científica y la extensión del método científico a las disciplinas sociales y económicas están introduciendo muchas aplicaciones del uso de los números en las mediciones, muchos con unidades nuevas. El *barn* y el *shed* son unidades de medida nuevas en física. (El barn es 10^{-24} centímetros cuadrados y el shed es 10^{-44} centímetros cuadrados.) La calificación de Hooper da una medida de la popularidad de los programas de televisión.

Vivimos en un mundo interesante, un mundo en el cual ya no es cierto que "toda cosa que sube debe bajar". Aún así, los números siguen teniendo una función importante. El viejo refrán "si lo mides, entonces sabrás algo acerca de ello" es todavía tan cierto como lo fue en cualquier tiempo pasado.

Uno podría preguntarse si tenemos un sistema numérico adecuado para satisfacer las demandas de nuestro mundo cambiante. Ciertamente las civilizaciones antiguas se vieron seriamente impedidas por las deficiencias en los sistemas numéricos de que disponían. Se quedaron con cantidades inconmensurables, tales como la diagonal de un cuadrado de lado unitario y la circunferencia de un círculo de diámetro unitario, las cuales perturbaron aun a sus intelectuales más capaces. Vestigios de sus frustraciones pueden encontrarse en términos tales como números negativos (no números), números irracionales y otros.

La situación actual no es tan desesperada. Afortunadamente, el sistema numérico disponible para nosotros es lo suficientemente rico para satisfacer nuestras necesidades actuales y admite una representación muy conveniente, a saber, la representación decimal. Investigaremos el concepto de *completidad* * y su relación con la recta numérica antes de considerar fracciones decimales.

8.2 LA RECTA NUMERICA

En la sección 7.12c discutimos la distribución de los números racionales sobre la recta numérica. Observamos que los números racionales eran *densos*. Intuitivamente esto significa que independientemente del punto que se escoja en la recta numérica, hay una infinidad de *números racionales* arbitrariamente cerca de él. El "punto que se escoja en la recta numérica" del último párrafo puede *no* ser un número racional. En el capítulo 7 indicamos que hay números como $\sqrt{2}$ y π que no son racionales. Ahora mostramos, aunque no rigurosamente, que hay puntos en la recta numérica que corresponden a estos números irracionales y que hay números racionales arbitrariamente cerca de ellos.

Construyamos un cuadrado cuyo lado es de longitud 1, y que tiene como base al segmento de recta que va de 0 a 1 (ver figura 1). Consideremos la diagonal del cuadrado cuyo extremo está en 0. La longitud de esta diagonal es $\sqrt{2}$. Si giramos la diagonal en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto 0 hasta que quede sobre la recta, el extremo final de la diagonal marca el punto cuya distancia a 0 es $\sqrt{2}$. Marcamos este punto con $\sqrt{2}$. Si giramos la diagonal en contra de las manecillas del reloj hasta llegar a la recta numérica, el extremo libre marca el punto que designamos $-\sqrt{2}$.

* Cuando un sistema es *completo* (en algún sentido) diremos que tiene la propiedad de *completidad*. (N. de los T.)

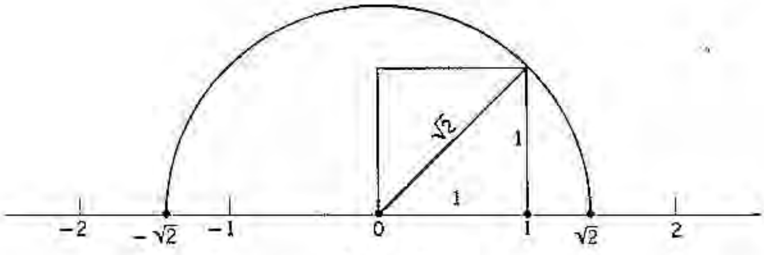


Figura 1

El número irracional $\sqrt{2}$ se encuentra entre 1 y 2. De hecho, $\sqrt{2}$ está entre 1 y $3/2$, puesto que $1^2 = 1$ y $(3/2)^2 = 9/4 = 2\frac{1}{4}$. Cualquier número racional entre 1 y $3/2$ está bastante cerca de $\sqrt{2}$, por ejemplo, el punto medio del segmento de recta de 1 a $3/2$. (El punto medio también es llamado la *media aritmética* o *promedio* de los números 1 y $3/2$.)

$$\frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} \quad \text{Primera aproximación}$$

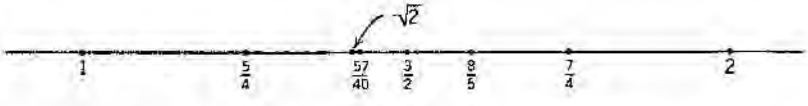
$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} < \frac{32}{16} = 2$$

Vemos que $3/2$ es mayor que $\sqrt{2}$ y $5/4$ es menor que $\sqrt{2}$. (Estos números racionales que están cerca de $\sqrt{2}$ serán llamados *estimaciones* o *aproximaciones* de $\sqrt{2}$.)

Con el objeto de obtener una aproximación más cercana a $\sqrt{2}$, dividimos 2 por la primera estimación, $5/4$, y tomamos el *promedio* de este cociente y $5/4$.

$$\frac{2}{\frac{5}{4}} = \frac{8}{5} \quad \text{cociente}$$

$$\frac{\frac{5}{4}+\frac{8}{5}}{2} = \frac{57}{40} \quad \text{Segunda aproximación}$$



Podríamos preguntarnos por qué efectuamos estas inesperadas operaciones para obtener nuestra segunda aproximación. Realmente es un procedimiento muy razonable. El símbolo $\sqrt{2}$ es el nombre del número que multiplicado por sí mismo da 2.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

Buscamos un número, digamos x, tal que

$$x \cdot x = 2.$$

En nuestro primer intento, probamos $\frac{3}{2}$. Tenemos que considerar la siguiente relación:

$$\tfrac{3}{2} \cdot x = 2.$$

Si resolvemos esta relación para x, obtenemos $x = \frac{4}{3}$. Puesto que estamos usando $\frac{3}{2}$ como una estimación de $\sqrt{2}$, es razonable suponer que $\frac{4}{3}$ también es una aproximación de $\sqrt{2}$. Además, si una de estas estimaciones es demasiado pequeña, la otra será demasiado grande. Esta es la razón para tomar el *promedio* de estas dos "estimaciones" para obtener $\frac{57}{40}$ como una mejor aproximación. Este proceso de dividir el número por la última aproximación y tomar el promedio puede continuarse indefinidamente. En esta forma obtenemos una sucesión de números racionales que se acercan a $\sqrt{2}$.

Cualquiera de los números racionales $\frac{3}{2}$, $\frac{57}{40}$, . . . puede ser usado como aproximación *racional* de $\sqrt{2}$. Vimos anteriormente que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2, pero el hecho que los números racionales sean *densos* significa que hay números racionales cuyos cuadrados difieren de 2 en tan poco como se quiera.

Ejercicios 8.2

1. Divida $\frac{57}{40}$ entre 2 y tome el promedio de este cociente y $\frac{57}{40}$ como una nueva aproximación para $\sqrt{2}$. Compare esta aproximación con la anterior encontrando la diferencia de 2 y los cuadrados de las aproximaciones.

$$\left| 2 - \left(\frac{57}{40}\right)^2 \right| = ?$$

$$\left| 2 - \left(\begin{matrix}\text{tercera}\\ \text{estimación}\end{matrix}\right)^2 \right| = ?$$

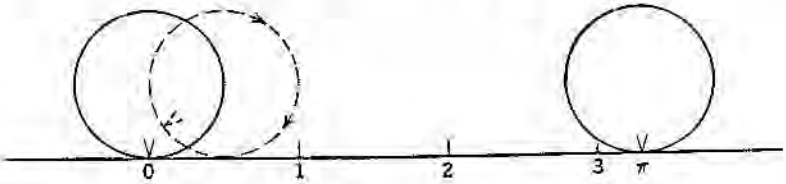
2. Encontrar la cuarta aproximación para $\sqrt{30}$, usando 5 como su primera aproximación. Comprobar el resultado elevando al cuadrado.

$$\frac{30}{5} = 6$$

$$\frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} \quad \text{segunda aproximación}$$

3. Encontrar la tercera aproximación de $\sqrt{300}$, usando 17 como su primera estimación.

4. Si un círculo de diámetro 1 que toca a la recta numérica en 0 rueda a lo largo de ella, el punto del círculo que estaba tocando a 0 tocará a la línea nuevamente en el punto correspondiente al número irracional π.



¿Cuáles son algunos números racionales cercanos a π?

5. Encontrar la tercera aproximación de $\sqrt{2}$ usando $7/5$ como su primera estimación. Compare esto con la tercera aproximación en el problema 1.

6. Encontrar la segunda aproximación de $\sqrt{30}$, usando $27/5$ como la primera aproximación, y comparar el resultado con la tercera aproximación obtenida en el problema 2.

8.2a Más números irracionales sobre la recta numérica

Hemos marcado los números irracionales $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ sobre la línea numérica colocando la esquina inferior izquierda el cuadrado de lado 1 sobre el punto 0. Si colocamos esta esquina del cuadrado en el punto $\frac{1}{2}$ y nuevamente rotamos la diagonal, el extremo libre de ésta determinará números nuevos. Esta traslación del cuadrado del lado unitario corresponde a la operación de aumentar $\frac{1}{2}$ a cada uno de los números $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.

La operación binaria de la adición asigna al par denúmeros $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{2}$ un número que escribimos como $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$. Análogamente, para el par $(\frac{1}{2}, -\sqrt{2})$ escribimos $\frac{1}{2}+(-\sqrt{2})$ ó $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$. Cuando sumamos $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ escribimos $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, pero después encontramos un nuevo nombre para este número, $\frac{3}{4}$. Para $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{2}$ el numeral $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ *es* un nombre del número. Este no es el único nombre: otro es $(1+2\sqrt{2})/2$.

Estos nuevos números $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$ y $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ son, nuevamente, números irracionales (ver figura 2). Podemos usar el siguiente argumento para demostrar esto. Supongamos $\frac{1}{2}+\sqrt{2}=p/q$, donde p/q es un número racional; entonces $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}=-\frac{1}{2}+p/q$, esto es, $\sqrt{2}=-\frac{1}{2}+p/q$. Pero $-\frac{1}{2}+p/q$ es la suma de dos números racionales. Por la ley de la cerradura para la adición de números racionales inferimos que $\sqrt{2}$ es racional; pero esto no es cierto. Por lo tanto, $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ no puede ser racional.

Lo anterior sigue siendo válido si usamos *cualquier* número racional n/m en lugar de $\frac{1}{2}$; es decir, para todo número racional n/m, los números $n/m-\sqrt{2}$ y $n/m+\sqrt{2}$ son números irracionales. Así vemos que hay tantos números irracionales de la forma $n/m + \sqrt{2}$ como hay números racionales. También, hay tantos números irracionales de la forma $n/m - \sqrt{2}$ como hay números racionales; lo mismo es cierto para $n/m + \pi$, $n/m - \pi$, $n/m + \sqrt{3}$ y muchos otros más. Por lo tanto es razonable pensar que hay más números irracionales que números racionales.

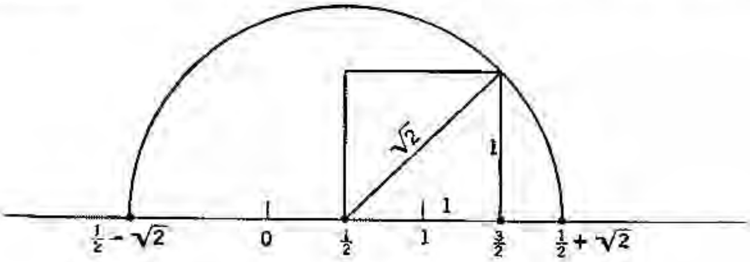


Figura 2

Estos argumentos indican que la *recta numérica racional* está llena de "huecos". Estos "huecos" en la recta corresponden a los números irracionales. El conjunto de todos los números que corresponden a los puntos de la línea se llama el *conjunto de números reales*. De aquí en adelante nos referiremos a la línea recta a la cual corresponden los números reales como la *recta real*. Los números irracionales que llenan los "huecos" de la recta hacen que el conjunto de números reales sea *completo*. Este hecho es sumamente importante en matemáticas y será discutido con mayor amplitud en la siguiente sección.

Ejercicios 8.2a

1. Demostrar que $5 + \sqrt{2}$ es un número irracional.

2. Demostrar que $-\frac{4}{3} + \sqrt{2}$ es un número irracional.

3. ¿Cuál es el mayor *entero* menor que 3? ¿y menor que 0?

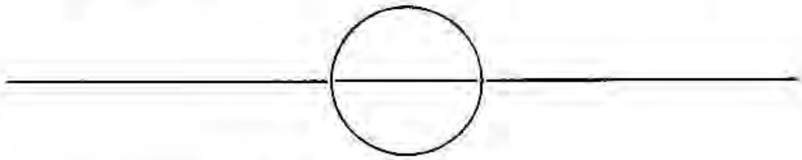
4. ¿Hay un número racional máximo menor que 5?

5. Hacer una lista de algunas cotas superiores de cada uno de los siguientes conjuntos:

   (a) $A = \{x \mid x \leqq 17\}$
   (b) $B = \{x \mid x = 1 - 1/n$ para n entero positivo$\}$
   (c) $C = \{x \mid x^2 \leqq 2\}$
   (d) $D = \{x \mid x^2 \leqq 25\}$

6. Explicar el significado del enunciado de que los racionales son densos en los números reales.

7. Si viviéramos en un mundo en el cual no hubiera números irracionales, podría ser posible para un círculo pasar a través de la línea numérica sin "cortarla".



Dar un ejemplo de dicho círculo.

8.3 EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES

El conjunto de los números reales se introdujo vagamente diciendo que está formado por los números racionales e irracionales que corresponden a puntos de la recta real. Sin probarlo, hemos indicado que existe una correspondencia "uno a uno" entre los puntos en la recta real y el conjunto de números reales. Esta es una idea muy útil. Es el eslabón entre la aritmética y la geometría analítica. Si pensamos en los puntos de la recta como indicados o nombrados con los números reales, esto nos permite localizar los puntos en forma muy conveniente. Así, el plano puede ser concebido como el producto Cartesiano de la recta real consigo misma. Los puntos del plano estarán en correspondencia biunívoca con los pares ordenados de números reales (ver figura 3).

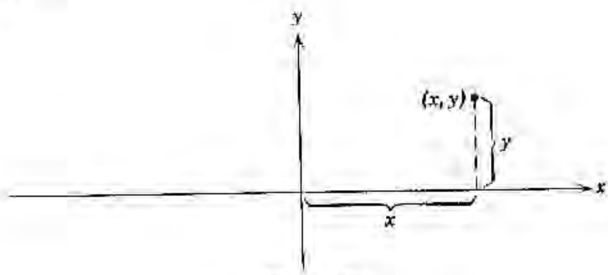


Figura 3

Observamos que no hemos intentado responder a la pregunta "¿qué es un número real?" La respuesta a esta pregunta comprende "procesos de límite" y operaciones que incluyen conjuntos infinitos. Discutiremos esto después en el capítulo sobre fracciones decimales, aunque no rigurosamente. Por el momento decimos que el *conjunto de números reales* está formado por los números racionales (los cuales incluyen a los enteros) y los números irracionales, como se introdujeron anteriormente.

Indicamos brevemente una relación entre números racionales y números irracionales, usando $\sqrt{2}$ como ejemplo. Recuérdese que en la sección 8.2 mostramos cómo se puede encontrar una infinidad de números racionales m/n tales que $(m/n)^2$ está cerca de 2. Entre éstos hay aquéllos como p/q tales que $(p/q)^2 < 2$ y aquéllos como r/s tales que $(r/s)^2 > 2$; esto es, algunos son mayores que $\sqrt{2}$ y otros son menores que $\sqrt{2}$. Denotamos los dos conjuntos de números racionales como sigue:

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p^2 < 2q^2 \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{r}{s} \,\middle|\, r^2 > 2s^2 \text{ y } \frac{r}{s} > 0 \right\}$$

El número $\sqrt{2}$ es una *cota superior* del conjunto A y una *cota inferior* del conjunto B. Es, de hecho, *la menor de las cotas superiores* ("supremo") del conjunto A. Es también *la mayor de las cotas inferiores* ("ínfimo") del conjunto B. Análogamente, *todo* número real puede ser considerado como *la menor de las cotas superiores* de un conjunto de números racionales, como es el caso de $\sqrt{2}$. Por ejemplo, 3 puede ser considerado como el *supremo* * del conjunto de todos los números racionales de la forma $3 - 1/n$, donde n es un entero positivo. Cuando $n = 1$, es $3 - 1/1 = 2$; cuando $n = 2$, es $3 - 1/2 = 5/2$; cuando $n = 3$, es $3 - 1/3 = 8/3$; y cuando $n = 4$, $3 - 1/4 = 11/4$: Este conjunto aparece como:

$$\{2, 5/2, 8/3, 11/4, 14/5, \cdots\}.$$

Este es el concepto involucrado en el aserto de que el conjunto de números reales es *completo*. Establecemos esto con más precisión.

> **Definición 8.3a.** Un conjunto S de números reales es *acotado* si hay un número positivo b tal que $|s| \leqq b$ para todo s en S.

> **Definición 8.3b.** El hecho de que el conjunto de números reales sea *completo* significa que todo conjunto acotado y no vacío de números reales tiene una mínima cota superior o *supremo*.

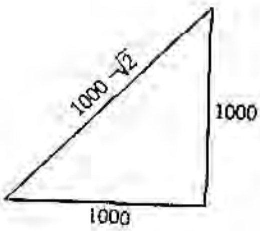
Ya que admitimos la existencia de números irracionales, tales como $\sqrt{2}, \sqrt{30}, 5 + \sqrt{7}, \pi, \ldots$, se plantean las siguientes preguntas: "¿Cómo se usan estos números en el cálculo aritmético? ¿Cómo se usan para describir los aspectos cuantitativos de nuestro alrededor?"

---

* También se dice "*extremo superior*"; y para "*ínfimo*" se usa "*extremo inferior*".

Ejemplo 1

¿Cuántos pies de reja deben comprarse para cercar un campo que tiene forma de un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1000 pies de longitud? Vemos que



$$\text{longitud} = 1000 + 1000 + 1000\sqrt{2} \text{ pies, o}$$

$$\text{longitud} = 2000 + 1000\sqrt{2} \text{ pies}$$

Ejemplo 2

¿Cuál es la circunferencia de un círculo cuyo radio es $\sqrt{2}$? Se sabe que es $2\pi\sqrt{2}$.

8.4 FRACCIONES DECIMALES

Los ejemplos de la sección anterior sugieren que es necesaria alguna otra representación de los números reales; una representación que pueda ser tratada por el cálculo aritmético y que dé al que la usa una idea fácil de la noción de magnitud. Esto deberá ser cierto tanto para números racionales como para números irracionales. Por ejemplo, ¿cuál de los dos números racionales presentados a continuación es el mayor y cuál es su suma?

$$\frac{3{,}692{,}846}{15{,}496{,}321} \qquad \frac{29{,}487{,}692}{58{,}836{,}857}$$

Sin otra representación disponible, los cálculos con estos números habrían de ser efectuados, y, de hecho, lo han sido, sin más que con fuerza bruta y paciencia. Las innovaciones necesarias en nuestro sistema de numeración han tenido lugar en tiempos relativamente recientes. El uso de exponentes para expresar números extremadamente pequeños y extremadamente grandes se originó en el siglo XVII (ver Eves). La idea de fracción decimal se introdujo el siglo anterior. Tornemos nuestra atención a este último concepto.

Los historiadores informan que Al-Kashi usó *fracciones decimales* en forma sistemática en el siglo XV (ver "Historically Speaking" en *The Mathematics Teacher,* abril de 1964). Antes de este informe, registros más accesibles demostraron que durante la mitad del siglo XVI Simón Stevin, un belga, introdujo la idea de las *fracciones decimales.* Combinando la idea del uso de fracciones cuyos denominadores son potencias enteras de la base con la idea del valor relativo, el calculista se libera de cálculos del tipo anterior.

Definición 8.4. Una *fracción decimal* es un número racional cuyo denominador es una potencia entera de 10.

Ejemplo 1

$$\frac{25}{100}, \quad \frac{874}{10{,}000}, \quad \frac{21}{100{,}000}, \quad \frac{337{,}601}{10{,}000}.$$

En lugar de escribir la potencia 10 en el denominador, se coloca un punto llamado el punto decimal entre dos de los dígitos del numerador de tal forma que *el número de lugares a la derecha de este punto indica la potencia de la base en el denominador.* El punto sirve como una "separatriz". Los dígitos a la izquierda del punto forman la parte entera del número y los dígitos a la derecha del punto son el numerador de la fracción cuyo denominador es la potencia de 10 con exponente igual al número de dígitos a la derecha del punto decimal.

Ejemplo 2

$$\frac{25}{100} = \frac{25}{10^2} = 0.25.$$

$$\frac{874}{10{,}000} = \frac{874}{10^4} = 0.0874.$$

$$\frac{337{,}601}{10{,}000} = \frac{337{,}601}{10^4} = 33.7601.$$

El número de dígitos a la derecha del punto decimal se llama *"número de lugares decimales"* del número.

Ejemplo 3

1. El numeral 3.1416 está dado con cuatro cifras decimales.

$$\frac{31{,}416}{10{,}000} = 3.1416.$$

2. El numeral 0.000163 está dado con seis cifras decimales.

$$\frac{163}{1{,}000{,}000} = 0.000163.$$

3. El numeral 0.001 está dado con tres cifras decimales.

$$\frac{1}{1000} = 0.001.$$

8.4a Cálculos con fracciones decimales

Nada hay esencialmente nuevo en los cálculos que comprenden fracciones decimales. Las fracciones decimales son, después de todo, números racionales especiales escritos en "forma decimal". A lo más, la "colocación del punto decimal" en el resultado de una operación binaria es el único proceso nuevo no discutido previamente. Examinaremos este problema brevemente, ya que puede ser explicado como una consecuencia simple del comportamiento de exponentes y de las propiedades del sistema de los números racionales.

8.4b Adición de fracciones decimales

El procedimiento usual en la adición de dos o más fracciones decimales es sumar los números en columna después de alinearlos con respecto a los puntos decimales. Como en el caso de la adición en columna de enteros, los puntos decimales son "alineados" de modo de que la ley distributiva pueda ser aplicada.

Ejemplo 1

Encontrar la suma de 3.92, 406.7273 y 0.076.

$$\begin{array}{r} 3.92 \\ 406.7273 \\ 0.076 \\ \hline 410.7233 \end{array}$$

Estos tres números pueden también sumarse como números racionales, recordando que el número de cifras decimales indica la potencia de la base en el denominador.

$$3.92 + 406.7273 + 0.076 = \frac{392}{10^2} + \frac{4{,}067{,}273}{10^4} + \frac{76}{10^3}.$$

Escribiendo estos números racionales con un común denominador tenemos:

$$\frac{39{,}200}{10{,}000} + \frac{4{,}067{,}273}{10{,}000} + \frac{760}{10{,}000} \qquad \text{selección apropiada de representantes de las clases}$$

$$= \frac{39{,}200 + 4{,}067{,}273 + 760}{10{,}000} \qquad \text{por la ley distributiva.}$$

La adición indicada en el numerador de la última expresión puede ser efectuada por "adición en columna" (nuevamente la ley distributiva).

$$\begin{array}{r} 39{,}200 \\ 4{,}067{,}273 \\ 760 \\ \hline 4{,}107{,}233 \end{array}$$

Obsérvese que los dígitos están alineados en las mismas columnas como en la forma decimal. Entonces tenemos

$$\frac{4{,}107{,}233}{10^4} = 410{,}7233.$$

La razón para alinear los puntos decimales en los números decimales para efectuar la adición en columna puede resultar más clara si los números se escriben en forma desarrollada. Un numeral escrito en un sistema de numeración con valor relativo no es más que una expresión conveniente para *una suma de múltiplos de potencias de la base.* Por ejemplo, el entero 1066 puede escribirse en forma "desarrollada" como sigue:

$$1066 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0.$$

Usando exponentes negativos, los numerales decimales pueden escribirse en la forma desarrollada.

Ejemplo 2

1. $2033{,}3906 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1}$
   $+ 9 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$
2. $0{,}027 = 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$.

El algoritmo de la adición puede ser ampliado a los numerales decimales directamente, y la ley distributiva aplicada a potencias "iguales" justifica la adición en columna indicada anteriormente.

8.4c Multiplicación de fracciones decimales

La multiplicación es precisando, una operación binaria. Los productos de más de dos números pueden ser expresados debido a la ley asociativa, ya que el cálculo real es estrictamente binario. La colocación del punto decimal en el producto de dos numerales decimales no es problema. Ilustraremos con un ejemplo numérico.

Ejemplo 1

$$\begin{array}{r} 33{,}9 \\ 4{,}27 \\ \hline 2373 \\ 6780 \\ 135600 \\ \hline 144{,}753 \end{array}$$

Para colocar el punto decimal en el producto, se suman el número de cifras decimales del multiplicando y del multiplicador. El número de cifras decimales en el producto es la suma. Este procedimiento es una consecuencia inmediata del comportamiento de los exponentes.

$$(33.9)(4.27) = \left(\frac{339}{10^1}\right) \cdot \left(\frac{427}{10^2}\right) = \frac{(339)(427)}{10^3} = \frac{144{,}753}{10^3} = 144.753$$

$$(0.0339)(0.427) = \left(\frac{339}{10^4}\right) \cdot \left(\frac{427}{10^3}\right) = \frac{144{,}753}{10^7} = 0.0144753.$$

8.4d División de fracciones decimales

El procedimiento usual para colocar el punto decimal en el cociente de dos números decimales es el siguiente. Se mueve a la derecha el punto decimal en el dividendo y en el divisor los lugares necesarios para convertirlos en números enteros, aumentando ceros donde sea necesario. Se efectúa la división como se hizo con los números enteros y se escribe el punto decimal directamente arriba del que tiene la nueva posición del dividendo.

Ejemplo 1

$60.69 \div 0.017 = ?$

$0.017.\overline{)60.690.}$

```
17)60690.   3000
   51000
    9690     500
    8500
    1190      70
    1190
           3570.  cociente
```

El hecho de mover el punto decimal tanto en el divisor como en el dividendo para obtener división de enteros, como hemos indicado, es realmente multiplicar el divisor y el dividendo por una potencia de 10 suficientemente grande para convertirlos en enteros. Si la división indicada se expresa en forma racional, entonces multiplicando el dividendo y el divisor por la misma potencia de 10 es lo mismo que multiplicar por la identidad multiplicativa.

Ejemplo 2

$$\frac{60.69}{0.017} = \left(\frac{60.69}{0.017}\right) \cdot \left(\frac{10^3}{10^3}\right) = \frac{(60.69)(10^3)}{(0.017)(10^3)} = \frac{60{,}690}{17} = 3570.$$

Otro procedimiento que es bastante común consiste en ejecutar la división como una división de números racionales. Usando este procedimiento, los puntos decimales se mueven el número de lugares necesarios hacia la derecha para obtener como divisor un número entero, poniendo ceros donde sea necesario. Se coloca el punto decimal directamente en el cociente arriba del punto decimal que en su nueva posición ocupa en el dividendo.

Ejemplo 3

$$\frac{6.069}{0.17} = \frac{\dfrac{6069}{10^3}}{\dfrac{17}{10^2}} = \left(\frac{6069}{10^3}\right)\cdot\left(\frac{10^2}{17}\right) = \left(\frac{6069}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{17}\right) = \frac{606.9}{17}$$

$$\begin{array}{r} 35.7 \\ 0.17.\overline{)6.06.9} \end{array}$$

Ejercicios 8.4

1. Sumar los siguientes números racionales.

(a) $\dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{100}$ (b) $\dfrac{2}{10} + \dfrac{6}{1000}$

(c) $\dfrac{7}{100} + \dfrac{9}{1000}$ (d) $\dfrac{2}{10} + \dfrac{3}{100} + \dfrac{7}{1000}$

2. Escribir cada uno de los números racionales del problema 1 en la forma decimal y verificar que la adición con fracciones decimales da resultados compatibles.

3. Un número está escrito en forma desarrollada cuando está escrito como una suma de productos de dígitos por las potencias de la base 10; por ejemplo:

$$73.25 = 7\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 + 2\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2}.$$

Escribir cada uno de los siguientes números en forma desarrollada:

(a) 700.125 (b) 333.3333 (c) 10,000.0001
(d) 27.272727 (e) 3.1416

4. Realizar las operaciones indicadas:

(a) $(3.1416)\cdot(17.74)$ (b) $17.74 \div 3.1416$
(c) $3.1416 \div 17.74$ (d) $(293.004)(7.46)(2.917)$
(e) $1001.0102 \div 0.005$

5. Realizar las operaciones indicadas:

(a) $(2.99776\cdot 10^{10})(1.673\cdot 10^{-24})$ (b) $(3.5\cdot 10^{4})(7.69)$
(c) $(6.0228\cdot 10^{23})(1.673\cdot 10^{-24})$ (d) $(8.015\cdot 10^{5}) \div (0.005)$
(e) $(6.45\cdot 10^{-3}) \div (2.4\cdot 10^{5})$

6. El *barn* y el *shed* a los que nos referimos en la sección 8.1 son unidades extremadamente pequeñas. Escribir cada una en notación decimal.

7. Si tomamos el diámetro de un dólar de plata como la unidad de longitud de una recta numérica, ¿cuántas de estas unidades deberá el dólar rodar para que, si empieza con la cabeza de la efigie hacia arriba, vuelva a quedar al final nuevamente con la cabeza hacia arriba?

8. Si dos monedas de cuarto de dólar cuya efigie es Jorge Washington se colocan una junto a la otra, ambas con las cabezas hacia arriba, y una moneda rueda sobre el filo de la otra, ¿cuál será la posición de la cabeza en la moneda que rueda cuando ésta queda apoyada en el lado opuesto del que empezó? Ensaye esto con monedas.

8.5 APROXIMACIONES

Regresando a la definición de una fracción decimal como número racional cuyo denominador es una potencia de 10, encontramos que muy pocos números racionales pueden escribirse exactamente como fracciones decimales. Los factores primos de 10 son 2 y 5, así que cualquier potencia positiva no trivial de 10 es un producto de las correspondientes potencias de 2 y 5.

$$10 = 2 \cdot 5$$
$$10^2 = 10 \cdot 10 = (2 \cdot 5)(2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 5^2$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2^3 \cdot 5^3$$
$$\vdots$$
$$10^n = 2^n \cdot 5^n$$

Esto significa que para que un número racional escrito en su mínima expresión pueda escribirse con exactitud como una fracción decimal, su denominador puede incluir solamente potencias de 2 y/o potencias de 5 como factores.

Ejemplo 1

1. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{10} = 0.5$

2. $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{25} = \frac{25}{100} = 0.25$

3. $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{10} = 0.2$

4. $\frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \cdot 5} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{5}{5^2} = \frac{5}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{5}{10^2} = 0.05$

5. $\frac{1}{50} = \frac{1}{2 \cdot 5^2} = \frac{2}{2^2} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{2}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{2}{10^2} = 0.02$

Así los números racionales de la forma $1/3$, $13/11$, $\cdots$ que tienen primos diferentes de 2 y 5 como factores del denominador no pueden escribirse exactamente como fracciones decimales. Esto indudablemente impidió a los predecesores de Simón Stevin el descubrir esta innovación tan potente en la aritmética. La *idea* esencial en el descubrimiento de las fracciones decimales fue uno de los problemas de la antigüedad. Esto aparece concretamente en problemas familiares como aquel de la rana que en cada salto recorre la mitad de la distancia de donde está colocada hasta el final de un leño. La inspiración de Simón Stevin surgió seguramente cuando se dio cuenta de que muchas situaciones numéricas no exigen *exactitud* tanto como una *aproximación con un error admisible.* Esta es una idea muy importante. Es esencialmente la idea de aproximaciones lo que usamos antes en esta sección.

Nos hemos referido a la aproximación como una *idea*; de hecho, una idea muy importante. Es la idea de usar una representación más aceptable, simple y práctica en lugar de algo inaccesible, desconocido o inconveniente. Como idea matemática, está relacionada al concepto de densidad. Encontramos que los números racionales están densamente distribuidos a lo largo de la recta numérica. Esto significa que números tales como $\sqrt{2}$, π, y otros números irracionales que están en la recta numérica deben tener muchos números racionales muy cercanos a ellos. El número racional $22/7$ es mayor que el número irracional π, pero está lo suficientemente cerca de π como para que en muchos problemas que incluyen círculos, el error resultante de usar $22/7$ en lugar de π sea admisible. Hemos encontrado varios números racionales "cercanos" a $\sqrt{2}$. Algunos de ellos pueden ser usados en vez de $\sqrt{2}$ en algunos casos.

Ejercicios 8.5

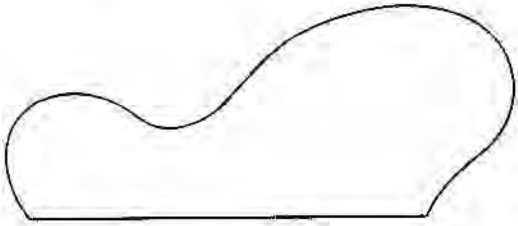
1. Hacer una lista de diez números racionales que se puedan escribir exactamente como fracciones decimales. Escribir estos números en forma decimal.

2. Hacer una lista de cinco números racionales que se puedan escribir exactamente como fracciones decimales. Escribirlos como números racionales con potencias de 10 en el denominador, y en forma decimal.

3. Un campo rectangular tiene 1276.32 pies de largo y 789.44 pies de ancho.

   (a) Calcular el área del campo redondeando las medidas a pies.
   (b) Calcular el área con dos cifras decimales, usando los números dados.
   (c) ¿Cuál es la diferencia entre los dos resultados?

4. ¿Cómo encontraría usted el área aproximada de un campo que tiene la forma siguiente?



5. ¿Cómo obtendría usted una medida más aproximada del área? ¿Podría usted justificar que esto es más aproximado?

6. Dar otros *números racionales* que están muy cercanos al número π. ¿Qué fracciones decimales están cercanas a π?

7. ¿Cuáles son algunos números racionales cercanos a $\sqrt{10}$? Usar el proceso de división y promedio para encontrar cinco de ellos.

8. ¿Cuáles son algunos de los números racionales cercanos a $\sqrt{5}$? Usar el proceso de división y promedio para encontrar cinco de ellos.

8.6 APROXIMACIONES DECIMALES DE NUMEROS RACIONALES

En la sección 8.5 demostramos que no podemos expresar todos los números racionales exactamente como fracciones decimales. Sin embargo, podemos encontrar fracciones decimales que difieren de un número racional dado en una cantidad que prácticamente podemos despreciar, dicha cantidad dependiendo del problema de que se trate. Encontramos esta *aproximación decimal* por el simple proceso de división; es decir, encontramos la aproximación decimal de $\frac{1}{3}$ por la división de 1 entre 3 para obtener 0.3, 0.33, 0.333, y así sucesivamente.

Hemos sido cuidadosos al llamar a las fracciones decimales 0.3, 0.33 y 0.333 "aproximaciones decimales de $\frac{1}{3}$". Los numerales 0.3, 0.33 y 0.333 son numerales adecuados usados en lugar de $\frac{3}{10}$, $\frac{33}{100}$ y $\frac{333}{1000}$, respectivamente. En esta forma es fácil calcular el error cometido al usar estas fracciones decimales en lugar del número racional $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000}$$

Estos cálculos indican que $\frac{1}{3}$ es mayor que cualquiera de las fracciones decimales 0.3, 0.33, 0.333, etc. Si continuásemos el proceso de división indefinidamente, tendríamos una infinidad de fracciones decimales de la forma 0.3333, 0.33333,... Entonces, $\frac{1}{3}$ es una *cota su-*

perior de las fracciones decimales de este tipo e indiscutiblemente ⅓ es la *menor de las cotas superiores* de todas esas fracciones decimales. Esta es la misma idea usada al considerar a $\sqrt{2}$ como la menor de las cotas superiores de los números racionales de la forma p/q, con $p^2 < 2q^2$. Por esta razón adoptamos la convención de que el número racional ⅓ *es el mismo* que el número decimal 0.333. . ., donde los puntos indican que el 3 continúa indefinidamente; esto es, escribimos

$$1/3 = 0.3333\ldots.$$

Cualquiera de los numerales 0.3, 0.33, 0.333,. . . es una aproximación decimal que contiene un error que puede ser calculado. Este error puede hacerse más pequeño usando una fracción decimal con más cifras decimales. En un momento dado uno debe decidir cuándo la conveniencia de usar fracciones decimales sobrepasa el error o pérdida de exactitud y cuál es el máximo error que uno está dispuesto a aceptar.

Ejercicios 8.6

1. ¿Cuál es la diferencia entre pagar 0.3 de \$100 y $\frac{1}{3}$ de 100?

2. ¿Cuántas cifras en una aproximación decimal de $\frac{1}{3}$ deben usarse para tener un error menor que un millonésimo?

3. ¿Cuántas cifras en una aproximación decimal de $\frac{1}{7}$ deben usarse para tener un error menor de un millonésimo?

4. ¿Cuál es el error que se comete al usar tres cifras decimales de aproximación de $1/7$? ¿Y en una aproximación de cuatro decimales?

5. Encontrar una aproximación decimal de diez cifras de $1/7$ y de $1/11$.

8.7 LOS NUMEROS REALES COMO DECIMALES INFINITOS

El decimal 0.333. . . se llama un *decimal infinito*. Hemos indicado que ⅓ puede ser expresado como un decimal infinito. Por otra parte, las fracciones decimales de la forma 0.5, 0.25, etc., se llaman decimales finitos o decimales que terminan. Sin embargo, si agregamos ceros a 0.5 en una sucesión sin fin, tenemos:

0.50000. . .,

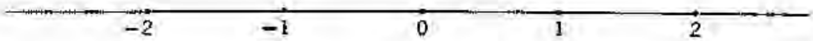
y podemos pensar que la fracción decimal que representa ½ es un decimal infinito. Debemos tener en cuenta lo siguiente. El número 1 puede ser escrito como un decimal infinito de la forma 1.00000. . ., pero al mismo tiempo el decimal infinito 0.99. . ., es también el número entero 1 en el mismo sentido que ⅓ = 0.333. . . Si identificamos 0.999. . ., con 1, también 3,279999. . . con 3,28, y así sucesivamente, entonces podemos expresar cualquier número racional en forma única como un *decimal infinito*. Esto es también cierto para cualquier número irracional, aunque no siempre es fácil encontrar la representación decimal de un número irracional. De hecho, el *algoritmo de la raíz cuadrada* es simplemente el proceso para encontrar la representación decimal de la raíz cuadrada de un número. Ahora podemos definir los números reales.

> **Definición 8.7.** Los números reales son los números que se escriben como decimales infinitos.

El *conjunto de números reales* fue primeramente introducido como aquellos números correspondientes a puntos de la recta numérica. Definimos los números reales como aquéllos que se escriben como decimales infinitos. Usamos ambos enfoques para tener una comprensión amplia de la naturaleza de los números reales. Estos dos enfoques son completamente diferentes pero de ninguna manera son incompatibles. La definición de los números reales en términos de los decimales infinitos es un concepto unificado compatible con la otra definición.

8.8 LA RECTA REAL

Si consideramos la recta numérica nuevamente, vemos que es una línea recta a lo largo de la cual los *enteros* se marcan equidistantes en ambas direcciones a partir del origen el cual señalamos con 0.



Las fracciones decimales que llamamos *décimos* separan el segmento de línea en segmentos iguales de tal forma que 10 de tales segmentos se encuentran entre cualquier par consecutivo de enteros.

Los *centésimos* dividen a cada uno de los décimos en diez partes iguales. Los milésimos dividen cada uno de los centésimos en diez partes iguales. Los diezmilésimos, los cienmilésimos, los millonésimos, y así sucesivamente se encuentran a lo largo de la línea numérica en la

misma forma como lo hemos indicado. Si la línea se divide en millonésimos, habrá un millón de tales segmentos entre dos enteros consecutivos cualesquiera. Esto sugiere que las fracciones decimales son también *densas* en la línea numérica. Este es realmente el caso aunque el hecho necesita ser demostrado. Esta es fundamentalmente la razón por la cual podemos usar fracciones decimales en cualquier cálculo que comprenda números reales. Uno puede imaginarse que al dibujar los números 0.3, 0.33, 0.333 . . . indefinidamente, éstos se aproximan en el límite al número racional $\frac{1}{3}$. Recíprocamente, es posible que dada la letra r que indica al punto sobre la línea real correspondiente al número real r, tomando subdivisiones sucesivas, décimas, centésimas, milésimas, y así sucesivamente y eligiendo en cada paso sucesivo la marca más próxima a r, lleguemos al punto correspondiente a r o nos aproximemos al número real r por una fracción decimal. Continuando indefinidamente, el número r puede ser expresado como un decimal infinito.

Ejercicios 8.8

1. Dibujar los puntos 0.1, 0.14, y 0.142.
2. Encontrar aproximaciones decimales de $\frac{57}{40}$. Comparar éstas con la tabla de valores de $\sqrt{2}$.
3. Encontrar las aproximaciones decimales de $\frac{6449}{4560}$ y comparar éstas con la tabla de valores de $\sqrt{2}$.
4. Encontrar aproximaciones decimales de $\frac{22}{7}$ y compararlas con el valor de π dado por las citas históricas de la sección 9.13c.
5. Encontrar aproximaciones decimales de $\frac{3927}{1250}$, $\frac{754}{240}$, $\frac{355}{113}$ y comparar éstas con π.
6. Las fracciones decimales son *densas* en los números reales.
   (a) Interpretar esta afirmación, usando $\sqrt{2}$ como una ilustración.
   (b) Interpretar esta afirmación, usando π como una ilustración.

8.9 RELACIONES DE ORDEN EN LOS REALES

Las relaciones de orden $<$ y $\leqq$ en los números reales están definidos en la misma forma que en el sistema de los números racionales y en el sistema de los enteros. En cada caso se especificó cuáles eran los elementos *positivos*, y definimos las relaciones de orden en términos de los elementos positivos. Haremos lo mismo ahora. Para indicar que el número real r es positivo escribimos $r > 0$ ó $0 < r$. Para indicar que no es negativo escribimos $r \geqq 0$ ó $0 \leqq r$.

La forma de determinar si un número real es positivo o negativo depende de la forma como los números reales se han introducido.

Si imaginamos los números reales como números que corresponden a los puntos sobre la línea real, entonces el número real es positivo si está asociado con un punto a la derecha del punto 0 (el origen). Si

r y s son dos números cualesquiera $r < s$, o $r \leqq s$ si $s - r > 0$ ó $s - r \geqq 0$, respectivamente.

Si pensamos en los números reales como decimales infinitos, la fracción decimal aproximada obtenida despreciando todas las cifras decimales a partir de una cierta cifra decimal, es un número racional. Un número real positivo tiene una aproximación decimal positiva. Un número real negativo tiene una aproximación decimal negativa. Esto es, nuevamente los elementos positivos pueden ser determinados y las relaciones de orden definidas.

8.10 EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

Hay otras formas de definir los números reales. Pueden ser definidos como clases de equivalencia de las sucesiones de Cantor (Sucesiones de Cauchy) como se hizo en *"Set Theory, The Structure of Arithmetic,"* por Hamilton y Landin. Los números reales pueden también ser definidos por medio de "cortaduras de Dedekind". Para un tratamiento elaborado y riguroso, véase "*Principles of Mathematical Analysis*" de Rudin. Nuestro tratamiento no riguroso de los números reales, como decimales infinitos, por una parte, y como mínimas cotas superiores de conjuntos de números racionales, por otra, introducen al estudiante a ambos enfoques formales indicados anteriormente de tal manera que la naturaleza y las propiedades de los números reales resultan más accesibles. Cada uno de los sistemas numéricos previamente estudiados en este libro es un subsistema del sistema de los números reales. Los números naturales son números reales. Los enteros son números reales. Los números racionales son números reales. Sin hacer una lista formal de las propiedades, como lo hemos hecho con otros sistemas numéricos, definimos el *sistema de los números reales* como un sistema numérico que satisface las mismas leyes que el sistema de los números racionales y el cual tiene una relación de orden con respecto a la cual el *conjunto es completo.* El sistema matemático que satisface las mismas leyes que el *sistema de los números racionales* se llama un *campo.* En este lenguaje, los números reales se consideran como un *campo completamente ordenado.* En vez de proseguir la discusión de esta dirección, hacemos algunos comentarios con relación a los cálculos con números reales. La Aritmética a nivel elemental está primordialmente relacionada con los cinco procesos aritméticos: adición, sustracción, multiplicación, división y estimación de raíces cuadradas. Los cálculos aritméticos están limitados a estas operaciones con números racionales excepto por algunos ejemplos aislados, tales como $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$.

Los cálculos con números irracionales comprenden procesos infinitos; por lo tanto, en los cálculos numéricos reales los números irracionales se reemplazan por fracciones decimales.

El estar consciente de esta situación, es importante, y en este libro se ha dado a ello mucho realce.

8.11 DECIMALES PERIODICOS

Tuvimos cuidado al distinguir entre números racionales y números irracionales, siendo los números racionales de la forma m/n, donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Los números irracionales no pueden ser expresados en esta forma. Preguntamos ahora: "¿Pueden estos números distinguirse cuando los expresamos en forma decimal?" La respuesta es "Sí". Algunos números racionales son finitos; los otros números racionales resultan ser aquellos decimales infinitos que son "periódicos", esto es, cierto grupo de dígitos consecutivos se repiten una y otra vez en una sucesión indefinida.

Ejemplo 1

0.825 0.75	Decimales finitos.
$0.272727\overline{27}\ldots$ $0.46314631\overline{4631}\ldots$ $29.37854854\overline{854}\ldots$	Decimales periódicos. Las barras indican los "bloques" repetidos.

El que esto sea así puede ser fácilmente verificado usando la interpretación de la "división" en algunos números racionales, tales como 5/7, 2/6, 4/11. Nos interesa más saber *por qué* los números racionales tienen representación como decimales periódicos infinitos.

Examinando el proceso de división que produce la representación decimal de un racional, tal como 5/7, veremos que estamos realmente dividiendo repetidamente por el mismo número 7.

$$\begin{array}{r} 0.7 \\ 7\overline{)5.0} \\ \underline{49} \\ 1 \end{array} \qquad 50 = 7 \cdot 7 + 1$$

El siguiente paso es dividir 7 entre 10.

$$\begin{array}{r} 0.71 \\ 7\overline{)5.00} \\ \underline{490} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 3 \end{array} \qquad 10 = 7 \cdot 1 + 3$$

El siguiente paso es dividir 7 entre 30.

```
     0.714
  7) 5.000
     4900        30 = 7 · 4 + 2
      100
       70
       30
       28
        2
```

Obsérvese que en cada paso estamos dividiendo entre 7 el residuo de la división previamente multiplicado por una potencia de 10. Pero, ¿cuántos residuos diferentes pueden haber cuando dividimos todos los números posibles entre 7? Vimos en la sección 6.8 que los únicos residuos posibles cuando dividimos entre 7 son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ahora continuamos la división:

$0.714285\overline{714285}$

```
  7) 5.000000000000
     49
      10
       7
       30
       28
        20
        14
         60
         56
          40
          35
           50
```

Es muy obvio que "714285" se repetirá indefinidamente. Viendo la división precedente, ¿puede uno decir cuál será el desarrollo decimal de $1/7$, $2/7$, $3/7$, etc.?

La razón para que los números racionales sean decimales periódicos infinitos está realmente incluida en lo que antes hemos llamado el *algoritmo de la división*. Repitiendo: si m y n son dos enteros positivos cualesquiera, entonces hay enteros positivos q y r tales que $m = n \cdot q + r$ y $0 \leqq r < n$.

Como hay solamente n valores enteros distintos que el residuo puede tomar, el razonamiento implica que el numeral decimal para m/n será repetitivo. Esto no debe interpretarse como que el número de dígitos en la secuencia periódica será igual al divisor n. Significa que puede ser menor o igual al divisor pero nunca mayor.

Puede demostrarse, recíprocamente, que todo decimal periódico es la representación decimal de un número racional; esto es, dado un decimal periódico, puede encontrarse un número racional cuyo decimal periódico sea el dado. Indicamos aquí cómo se hace. Usemos la letra N para indicar un decimal periódico. Supongamos que el número sea

$$N = 0.273273273\overline{273}\ldots$$

Multiplicamos por aquella potencia de 10 cuyo exponente es igual al número de dígitos del bloque periódico y restamos N de este producto; así se tiene

$$\begin{aligned} 10^3N = 1000N &= 273.273273\overline{273}\ldots \\ N = \quad 1N &= \quad 0.273273\overline{273}\ldots \\ \hline 999N &= 273 \\ N &= \frac{273}{999}. \end{aligned}$$

Para aquellos decimales periódicos cuyo período no empieza al principio, debemos hacer algunas modificaciones a este proceso; por ejemplo, sea

$$N = 32.49631631631\overline{631}\ldots.$$

Queremos que los períodos repetidos "se correspondan" de tal forma que con la sustracción eliminemos la fracción decimal. Por lo tanto primero multiplicamos por 10^5 y después por 10^2.

$$\begin{aligned} 10^5N = 100{,}000N &= 3{,}249{,}631.631631\overline{631}\ldots \\ 10^2N = \quad 100N &= \quad 3{,}249.631631\overline{631}\ldots \\ \hline 99{,}900N &= 3{,}246{,}382 \\ N &= \frac{3{,}246{,}382}{99{,}900}. \end{aligned}$$

Los argumentos anteriores indican que todo número racional es un decimal periódico, y los ejemplos dados sugieren que todo decimal periódico infinito es un número racional. Esto nos conduce a una conclusión. Los *números irracionales* son los *decimales no periódicos infinitos*. Si uno reflexiona acerca de este hecho por un momento, puede parecer lógico que haya muchos más irracionales que racionales.

Ejercicios 8.11

1. (a) ¿Cuántos residuos posibles hay cuando 11 es el divisor? Haga una lista de ellos.
   (b) Escribir $\frac{1}{11}$ como un decimal periódico infinito.
   (c) Escribir $\frac{2}{11}$ como un decimal periódico infinito.
   (d) Escribir $\frac{3}{11}$ como un decimal periódico infinito.

2. (a) ¿Cuántos posibles residuos hay cuando 12 es el divisor?
   (b) Escribir $\frac{1}{12}$ como un decimal periódico infinito.
   (c) Escribir $\frac{2}{12}$ como un decimal periódico infinito.
   (d) Escribir $\frac{3}{12}$ como un decimal periódico infinito.

3. (a) ¿Cuántos posibles residuos hay cuando 13 es el divisor?
   (b) Escribir $\frac{1}{13}$ como un decimal periódico infinito.
   (c) Escribir $\frac{2}{13}$ como un decimal periódico infinito.

4. Cada uno de los decimales periódicos infinitos representan un número racional. Encontrar los números racionales de:
   (a) $0.17721772\overline{1772}\ldots$
   (b) $0.314314314\overline{314}\ldots$
   (c) $0.29353535\overline{35}\ldots$

5. Encontrar una fracción decimal aproximada a cada uno de los números racionales del problema 4 con un error menor que un diezmilésimo.

6. Encontrar el número racional representado por cada uno de los siguientes decimales periódicos infinitos.
   (a) $4.99999\overline{9}\ldots$
   (b) $0.100100100\overline{100}\ldots$
   (c) $0.009009009\overline{009}\ldots$

8.12 REDONDEO DE APROXIMACIONES DECIMALES

Puesto que es físicamente imposible escribir un decimal infinito, los decimales después de cierto número finito de cifras se omiten. La parte que se retiene es una fracción decimal y la parte que se omite constituye el error que implica usar la aproximación:

$$\frac{5}{7} = 0.714285\overline{714285}\ldots$$

$$\tfrac{1}{3} = 0.333\bar{3}\ldots$$

$$\tfrac{5}{7} = \underbrace{0.7142}_{\text{fracción decimal aproximada}} + \underbrace{0.0000\overline{857142}85\ldots}_{\text{error}}$$

$$\tfrac{1}{3} = \underbrace{0.333}_{\text{fracción decimal aproximada}} + \underbrace{0.000333333\ldots}_{\text{error}}$$

El propósito usual de "redondear" una fracción decimal es reducir el error que implica la aproximación. Hay diversas convenciones usadas para redondear números. El procedimiento que usaremos consiste en fijarnos en el primer dígito omitido. Si este dígito es 0, 1, 2, 3 ó 4, el último dígito en la aproximación se conserva. Si el primer dígito despreciado es 5, 6, 7, 8 ó 9, el último dígito en la aproximación es aumentado en 1. Esto es, podemos usar 0.333 como una aproximación decimal de tres cifras * de ⅓ y 0.7143 como una aproximación decimal de cuatro cifras de 5/7.

Los numerales decimales, en general, son frecuentemente redondeados en cierto número de cifras dígitos significativos. Un dígito de un numeral de un número aproximado es *significativo* a menos que su única función sea la de ayudar a colocar el punto decimal. Siempre que los dígitos a la derecha del punto decimal sean despreciados y omitidos, no deben nunca ser reemplazados por ceros, de acuerdo con el significado de *dígitos significativos.* Todos los dígitos diferentes de cero en un número son significativos. Todos los ceros entre dígitos significativos son significativos. Un cero que está a continuación de un dígito diferente de cero puede o no ser significativo.

Ejemplo 1

673,924	tiene seis cifras significativas.
674,000	como una aproximación de 673,924 tiene tres cifras significativas. Como numeral independiente, tiene tres o más, posiblemente seis, cifras significativas.
0.07003	tiene cuatro cifras significativas.**
0.07	tiene una cifra significativa.
1.2370	tiene cinco cifras significativas.
200,001	tiene seis cifras significativas.

* "Cifras" o "lugares decimales", o sea, a la derecha del punto decimal.

** Nótese que tiene sólo *cuatro* porque se hizo la convención de que el cero que precede al 7 sólo sirve para colocar el punto decimal, o sea para indicar que 7 centésimos y 3 cienmilésimos. Cambiando esta convención, también se podría decir que el número tiene *cinco* cifras significativas. (N. del T.)

Ejemplo 2

La población de Montana en el censo de 1960 fue calculada como 670,000. Esto se interpreta como un número de dos dígitos significativos. La población en la época del censo pudo haber sido cualquier número, tal como 673,924 o cualquier otro número entre 665,000 y 675,000, pero debido a que la población está cambiando constantemente como resultado de la salida o entrada de gente al Estado por una u otra razón, carece de sentido calcular 673,924 exactamente. Para muchas finalidades la aproximación de 670,000 es suficiente.

8.13 APROXIMACIONES DECIMALES DE NUMEROS IRRACIONALES

El significado pleno de la caracterización de los números racionales como decimales finitos o decimales periódicos infinitos y de los números irracionales como decimales infinitos no periódicos pudo no haber sido comprendido. Se encontró que la representación decimal de un número racional implica solamente un sencillo proceso de división, y cuando el período de dígitos ha sido determinado el proceso de división no tiene que continuarse; esto es, siempre es posible determinar los dígitos exactos de cualquier lugar decimal en un decimal periódico infinito una vez que el período ha sido determinado.

Ejemplo 1

¿Qué dígito ocupa el 105avo lugar decimal del decimal periódico infinito del número racional $1/7$? Puesto que hay seis dígitos en el período, ya que $105 \equiv 3 \pmod{6}$, el dígito en el 105avo lugar es el mismo que el dígito del tercer lugar del período.

También es posible calcular el error exacto cometido al usar una fracción decimal como aproximación de un número racional (sección 8.6). Este no es el caso cuando las fracciones decimales se usan para estimar números irracionales. Sin calcular efectivamente los decimales, no hay una forma de predecir el dígito de la quinta cifra decimal de π o el dígito en la séptima cifra decimal de $\sqrt{3}$, o el dígito en cualquier cifra decimal de cualquier número irracional. Esto significa que no podemos calcular el error exacto que se comete al usar las fracciones decimales en lugar de números irracionales. Es posible dar *cotas* del error. Esto lo podemos hacer usando solamente las propiedades del sistema de valor relativo y lo que entendemos por redondeo de un número. Ilustramos esto con algunos ejemplos.

Ejemplo 2

¿Qué significa decir que 1.4 es una aproximación de una cifra decimal de $\sqrt{2}$? Esto significa que $\sqrt{2}$ es un número que está entre 1.35 y 1.45,

$$1.35 \leqq \sqrt{2} \leqq 1.45.$$

El error que se comete al usar 1.4 como una aproximación de $\sqrt{2}$ es menor en valor absoluto que 0.05; esto es, 0.05 es una cota del error. Sacando la raíz cuadrada de 2 con dos cifras decimales obtendremos 1.41. El error al usar 1.41 como una aproximación de $\sqrt{2}$ es menor en valor absoluto que 0.005. Similarmente, el error al usar 3.1416 en lugar de π es menor en valor absoluto que 0.00005 o que cinco cienmilésimas.

Ejercicios 8.13

1. ¿En qué sentido es 3.14 una aproximación de π? ¿Es 3.142 una aproximación de π? ¿Es 3 una aproximación de π?

2. ¿Cuál es una mejor aproximación de π, 3.142 ó $\frac{22}{7}$?

3. ¿Cuál es el error al usar 0,6666667 en lugar de $\frac{2}{3}$?

8.14 RAICES CUADRADAS

Antes de considerar el problema de encontrar aproximaciones decimales de las raíces cuadradas de los números (algoritmos de la raíz cuadrada), discutiremos más ampliamente el significado de la raíz cuadrada de un número. En el capítulo 7 señalamos que el símbolo "$\sqrt{2}$" es un numeral, esto es, un nombre para aquel número que multiplicado por sí mismo da el número 2. También señalamos que mucha gente considera a $\sqrt{2}$ como una *operación* complicada de aritmética. Indiscutiblemente, mucha gente piensa que $\sqrt{2}$ no es un número. Desgraciadamente, hay muchos maestros de escuelas primaria y secundaria que piensan que $\sqrt{2}$ no es un número sino algo que hay que hacer. Esto es, en parte, debido a la existencia de ciertos números naturales que son cuadrados perfectos. Los cuadrados perfectos son los cuadrados de los números naturales:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

Estos números son parte del sistema de los números reales; y, por lo tanto, hay una respuesta natural a la pregunta "¿qué número multiplicado por sí mismo da 4, ó 9, ó 16, etc.?" Esto está indicado por

$$\sqrt{4} = 2$$
$$\sqrt{9} = 3$$
$$\vdots$$
$$\sqrt{144} = 12$$
$$\sqrt{625} = 25$$

.
.
.

$\sqrt{2401} = ?$

.
.
.

$\sqrt{82369} = ?$

Cuando el número N^2 es ya demasiado grande, como 2401 u 82,369, la pregunta que naturalmente surge es si estos números son cuadrados perfectos; y, si lo son, ¿cómo encontrar sus raíces cuadradas? Una manera de hacerlo, por supuesto, es escribir los cuadrados de los números naturales para ver si tales cuadrados aparecen entre los cuadrados dados. Hay en realidad un algoritmo para responder a esta pregunta y es parte de la razón por la cual existe la confusión entre el número y el algoritmo.

La raíz cuadrada de un número a es realmente una solución de la ecuación:

$$x^2 = a.$$

Hemos observado repetidas veces que la solubilidad de ecuaciones, en general, depende del sistema numérico en el cual están los coeficientes; esto es, si la letra "a" indica un cuadrado perfecto y pedimos que la solución sea un *número natural*, hay solamente *una* solución. Si admitimos soluciones *enteras*, hay *dos* soluciones; por ejemplo, si

$$x^2 = 25,$$

entonces

$$x = 5 \qquad \text{ó} \qquad x = -5.$$

Si permitimos que a sea cualquier número racional positivo y se piden soluciones *racionales*, podemos no tener solución o tener dos soluciones, dependiendo de la naturaleza de a; esto es, *si* a es el cuadrado de un número racional, tendremos dos soluciones. Si a no es el cuadrado de un número racional, no tendremos soluciones racionales. La ecuación

$$x^2 = 25/64$$

tiene dos soluciones racionales

$$x = 5/8 \quad \text{y} \quad x = -5/8,$$

mientras que

$$x^2 = 2$$

no tiene soluciones racionales, puesto que no hay un número racional cuyo cuadrado sea el número 2.

Si permitimos que a sea un número real no negativo y que las soluciones de $x^2 = a$ sean números reales, habrá exactamente dos soluciones cuando $a \neq 0$. Indicamos las dos raíces cuadradas del número a por los símbolos $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$. Las raíces cuadradas de 3 las escribiremos $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. La $\sqrt{3}$ es el número positivo que multiplicado por sí mismo da el número 3; mientras que $-\sqrt{3}$ es el inverso aditivo de $\sqrt{3}$ y es el número negativo que multiplicado por sí mismo da 3. Con el objeto de evitar cualquier confusión acerca de las raíces cuadradas de números escritos como cuadrados, usamos el valor absoluto para definir $\sqrt{a^2}$.

Definición 8.14. Para cualquier número real a, $\sqrt{a^2} = |a|$ y $-\sqrt{a^2} = -|a|$.

Ejemplo 1

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3.$$

Hay una situación que aún no hemos discutido y que es el caso en que a pueda ser un número negativo en la ecuación $x^2 = a$; esto es, ¿tienen soluciones las ecuaciones

$$x^2 = -1,$$
$$x^2 = -5,$$
$$\vdots$$

etc.?

Estas ecuaciones no tienen soluciones que sean números *reales*. En la misma forma como introducimos los enteros negativos como soluciones de la ecuación

$$a + x = b,$$

y los números racionales como soluciones de la ecuación

$$ax = b,$$

y los números irracionales como soluciones de la ecuación

$$x^2 = a \qquad \text{donde} \qquad a > 0,$$

ahora introducimos el número i como solución de la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

o

$$x^2 = -1.$$

Por lo tanto,

$$i^2 = -1.$$

Se deduce que

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1,$$

e

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1.$$

En general, los números de la forma $2 + 3i$, $1 + i$, $7i$, $\frac{1}{2} + (\sqrt{2}/3)i$, $\pi - i$ se llaman *números complejos*. Los números de la forma $7i$, $2i$, $\sqrt{3}i$ se llaman *imaginarios puros*. Los términos *complejo* e *imaginario puro* se usan aquí sencillamente como nombres de conjuntos de números. Se previene al lector de no dar un sentido literal a estos términos. El sistema de los números complejos es un sistema numérico que es una parte muy importante del mundo científico, pero que no será discutido en este libro.

Ejercicios 8.14

1. ¿Es $3 + \sqrt{5}$ un número?

2. ¿Cuáles son la suma, diferencia y producto de $3 - \sqrt{5}$ y $3 + \sqrt{5}$?

3. ¿Cuáles son la suma, diferencia y el producto de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $\sqrt{a} - \sqrt{b}$?

4. $\sqrt{10}$ es aproximadamente 3.162. Dar una aproximación decimal para $1/\sqrt{10}$.

5. $\sqrt{2}$ es aproximadamente 1.4142. Dar una aproximación decimal para $1/\sqrt{2}$.

6. Dar una aproximación decimal para $1/(2 + \sqrt{2})$.

7. Dar una aproximación decimal para $1/(10 - \sqrt{2})$.

8. Dar una aproximación decimal para $\sqrt{10}/10$, $\sqrt{2}/2$, $(2 + \sqrt{2})/2$, $(\sqrt{10} + \sqrt{2})/8$.

9. Dar una aproximación decimal para $2/\sqrt{2}$, $10/\sqrt{10}$, $(2 + \sqrt{2})/(2 - \sqrt{2})$.

10. Expresar los siguientes números, usando el número i (por ejemplo, $\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$, ya que $(i\sqrt{5})^2 = i^2(\sqrt{5})^2 = -5$):

$$\sqrt{-4}, \quad \sqrt{-9}, \quad \sqrt{-7}, \quad \sqrt{-1}, \quad \sqrt{-50} + \sqrt{-32}.$$

8.14a El algoritmo de la raíz cuadrada

El algoritmo de la raíz cuadrada es el proceso aritmético para encontrar o aproximar la raíz cuadrada de un número. Revisemos el proceso.

Ejemplo 1

Encontrar $\sqrt{82369}$.

Paso 1. Separar los dígitos por parejas hacia la izquierda, empezando desde el punto decimal. Cada par determina un *lugar* en la raíz cuadrada.

$$\begin{array}{l} \;\;*\;\;*\;\;*. \\ \sqrt{8'23'69.} \end{array}$$

Paso 2. Encontrar el mayor entero cuyo cuadrado es menor o igual al número designado por la pareja o el dígito de la izquierda:

$$2^2 = 4 < 8 < 9 = 3^2.$$

$$\begin{array}{r|l} & 2\;*\;*. \\ \sqrt{} & 8'23'69. \\ & 4 \\ \hline & 4 \end{array}$$

Escribir 2 arriba de esta "pareja". Elevar 2 al cuadrado y restar de 8. Bajar los dos dígitos de la siguiente pareja.

Paso 3. Duplicar el número 2 en la raíz y colocar a la derecha del 4 un asterisco como se indica.

$$\begin{array}{r|l} & 2\;*\;* \\ \sqrt{} & 8'23'69 \\ & 4 \\ \hline 4(*) & 4\,23 \end{array}$$

Paso 4. Estimar cuántas veces 40 divide a 423. Probamos con 9. Reemplazamos el asterisco por 9 y multiplicamos por 9.9: resulta demasiado grande. Probamos con 8. Reemplazamos el asterisco por 8 y multiplicamos por 9. Se coloca el 8 arriba del par que se bajó.

$$\begin{array}{r|l} & 2\;9\;*. \\ \sqrt{} & 8'23'69 \\ & 4 \\ 4(9) & 4\,23 \\ 9 & 4\,41 \end{array}$$

Paso 5. Repetir pasos 3 y 4.

$$\begin{array}{r|l} & 2\;8\;7 \\ \sqrt{} & 8'23'69. \\ & 4 \\ 4(8) & 4\,23 \\ 8 & 3\,84 \\ 56(7) & 39\,69 \\ 7 & 39\,69 \end{array}$$

$$\sqrt{82369} = 287.$$

Ahora consideramos lo que sucede en cada paso. Recuérdese que el multiplicar un número por 100 mueve el punto decimal *dos* lugares a la derecha. Pero el multiplicar un número por 100 solamente multiplica la raíz cuadrada del número por 10. Esto se deduce del hecho de que la raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas de los factores:

$$\sqrt{M \cdot N} = \sqrt{M} \cdot \sqrt{N}.$$
$$\sqrt{36} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6.$$
$$\sqrt{100 \cdot N} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{N} = 10\sqrt{N}.$$

Esta es la razón por la que los dígitos en el número se marcan por parejas. El número de parejas determina el número de dígitos en la raíz cuadrada.

En cada paso del algoritmo estamos interesados en encontrar el mayor entero cuyo cuadrado es menor que o igual al número determinado por estos pares. En el paso 2, por ejemplo, calculamos el mayor número cuyo cuadrado es menor que o igual a 8. En el siguiente paso buscamos el mayor número cuyo cuadrado es menor o igual a 823. En este punto estamos trabajando con dos pares; entonces, la raíz cuadrada de 823 es un número de dos dígitos de los cuales el primero es 2. Podemos escribir esto como $20 + x$. Queremos calcular el mayor entero x en forma tal que el cuadrado del número $20 + x$ sea menor o igual a 823; esto es, debemos buscar el mayor valor de x que satisfaga la condición

$$(20 + x)^2 \leqq 823.$$

Elevando al cuadrado $(20 + x)$, tendremos

$$400 + 2 \cdot 20x + x^2 \leqq 823.$$

Restando 400 de ambos miembros de esta desigualdad, vemos que

$$2 \cdot 20x + x^2 \leqq 423.$$

Este paso corresponde a restar 4 de 8 y bajar el siguiente par de dígitos (observar este paso en el ejemplo). Ahora escribimos:

$$(2 \cdot 20 + x)x \leqq 423.$$
$$(40 + x)x \leqq 423.$$

Esto explica el que se duplique el dígito en la raíz y el dejar un lugar para un dígito como está indicado por el * en el ejemplo. Hemos dividido entre 40 para obtener una estimación de x. Este procedimiento está basado en la observación de que 40 es mucho mayor que el dígito x, así que dividir entre 40 es casi lo mismo que dividir entre $40 + x$. Esta es la razón por la cual frecuentemente sobreestimamos x. Vimos en el ejemplo que 9 fue demasiado grande, así que 8 es el número buscado.

El siguiente paso es esencialmente una repetición del paso anterior. Deseamos encontrar el mayor número cuyo cuadrado sea igual o menor a 82,369. Este es un número de tres dígitos cuyos primeros dos dígitos son conocidos. Esto es, buscamos el mayor número entero x tal que

$$
\begin{aligned}
&(280 + x)^2 \leqq 82{,}369 \\
&78{,}400 + 2 \quad 280x + x^2 \leqq 82{,}369 \\
&560x + x^2 \leqq 3969 \\
&(560 + x)x \leqq 3969 \\
&x = 7 \\
&280 + 7 = 287
\end{aligned}
$$

Hemos obtenido la raíz cuadrada del cuadrado de un número natural. El algoritmo es válido para cualquier número real positivo, y el proceso puede ser continuado después del punto decimal. Debemos aumentar ceros para hacer tantos pares a la derecha del punto decimal como cifras decimales deseemos en la raíz cuadrada. Ilustraremos con lo siguiente:

Ejemplo 2

Encontrar $\sqrt{3.4}$ con tres cifras decimales.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1\ \ 8\ \ 4\ \ 3 \\
 & \sqrt{3.40'00'00} \\
 & 1 \\
28 & 2\ 40 \\
8 & 2\ 24 \\
364 & 16\ 00 \\
4 & 14\ 56 \\
3683 & 1\ 44\ 00 \\
3 & 1\ 10\ 49
\end{array}
$$

Si efectuamos la operación hasta la cuarta cifra, encontraremos que $\sqrt{3.4}$ está más cercano a 1.844 que a 1.843. Este paso adicional es menos fastidioso que trabajar con los "mínimos residuos absolutos". Señalamos, en cambio que podemos mejorar en gran parte la aproximación por un sencillo proceso de división el cual se expone en la siguiente sección.

Ejercicios 8.14a

1. Encontrar $\sqrt{502.3}$ redondeado con 3 cifras decimales.
2. Encontrar $\sqrt{50.23}$ redondeado con 3 cifras decimales.
3. Encontrar $\sqrt{1000.}$ redondeado con 4 cifras decimales.
4. Encontrar $\sqrt{5.023}$ redondeado con 4 cifras decimales.
5. Encontrar $\sqrt{0.5023}$ redondeado con 4 cifras decimales.

8.14b Método de Newton para la aproximación de raíces cuadradas

El método de aproximación de la raíz cuadrada de un número por el proceso de "división y promedio" tratado anteriormente es en realidad un caso muy particular del *método de aproximación de Newton.* Sir Isaac Newton (1642-1727), un inglés, fue uno de los más grandes científicos de todos los tiempos. Newton aportó muchas contribuciones a las matemáticas y a la física, algunas de las cuales llevan su nombre. Al mismo tiempo que Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716), pero independientemente, creó el cálculo infinitesimal.

El método de Newton está basado en el cálculo infinitesimal y es un método eficaz para la aproximación de raíces de ecuaciones muy generales. En el caso de la aproximación de raíces cuadradas el método se reduce a una simple *reiteración* o proceso *repetitivo.* La naturaleza repetitiva del proceso "dividir y sacar promedio, dividir y sacar promedio, etc.", hace que este método sea muy adecuado para las máquinas calculadoras electrónicas modernas. Otro rasgo importante del método de Newton es el hecho de que la primera "suposición" o aproximación no tiene que ser muy precisa. Esto es, el hacer una "pobre suposición" la primera vez no significa siempre que el trabajo debe ser abandonado y que se deba empezar el proceso desde el principio nuevamente; ello puede, más bien, tener como consecuencia que será necesario repetir una o dos veces el proceso para determinar una aproximación exacta. Ilustramos el método para encontrar una aproximación de $\sqrt{300}$. Marcamos nuestra primera "suposición" A_1 y las aproximaciones sucesivas $A_2, A_3, \ldots$.

Ejemplo 1

Encontrar $\sqrt{300}$.

Paso 1. Puesto que $17^2 = 289 < 300 < 324 = 18^2$, escogemos 17 como una primera suposición razonable.

$$A_1 = 17 \quad \text{(primera aproximación)}$$

Paso 2. Dividimos el número N entre A_1, esto es, 300 entre 17, y al efectuar la división aproximamos hasta que haya el doble de dígitos que en la aproximación previa, redondeando el último dígito por un número par. Para encontrar la segunda aproximación, A_2, tomamos el promedio entre este cociente y la aproximación previa.

$$\frac{300}{17} = 17.64.$$

Redondeando por el más próximo dígito par, tenemos 17.64, teniendo este número el doble de dígitos que A_1. Ahora escribimos

$$A_2 = \frac{17.64 + 17.00}{2} = 17.32 \quad \text{(segunda aproximación)}$$

Observar que A_2 *verifica* que nuestra primera suposición fue una buena aproximación porque cuando redondeamos 17.32 por un número de dos dígitos obtenemos $A_1 = 17$. A esto llamaremos "verificar" en lo que sigue. Repitiendo el proceso tenemos

$$A_3 = \frac{\frac{300}{17.32} + 17.320000}{2} = \frac{17.321016 + 17.320000}{2}$$

$$= 17.320508 \quad \text{(tercera aproximación)}$$

El hecho de que A_3 "verifique" a A_2 implica que A_2 es exacta hasta dos cifras decimales. A_3 es exacta excepto por la última cifra que puede tener un error de 1.

Para demostrar que una suposición pobre proporciona la misma fracción decimal después de algunas repeticiones más del proceso, supongamos que ponemos

$$A_1 = 10$$

$$A_2 = \frac{\frac{300}{10} + 10}{2} = 20.$$

Obsérvese que A_2 *no* "verifica" a A_1 porque A_2 redondeado a dos dígitos no es igual a A_1. Cuando la "verificación" no ocurre, efectuamos la división y aproximamos hasta que haya una cifra menos que *el doble* de cifras en la aproximación previa.

$$A_3 = \frac{\frac{300}{20} + 20.0}{2} = 17.5$$

$$A_4 = \frac{\frac{300}{17.5} + 17.5000}{2} = \frac{17.142 + 17.500}{2} = 17.321$$

$$A_5 = 17.320508.$$

El método de Newton puede usarse para aproximar raíces cúbicas al igual que para raíces cuadradas (para una buena información, ver la obra de Swain).

Las diferentes medidas de corrección en aquellos casos donde la aproximación no "verifica" a la aproximación previa fueron presentadas como "reglas a seguir". Las razones para la validez de estas medidas, así como también del método mismo, tienen sus orígenes en el cálculo infinitesimal. El método fue presentado aquí como otra forma de calcular raíces cuadradas, y es un método adaptable a las calculadoras electrónicas.

Ejercicios 8.14b

1. Encontrar $\sqrt{3}$ aproximando a 7 cifras decimales.

2. Encontrar $\sqrt{30}$ aproximando a 7 cifras decimales.

3. Encontrar $\sqrt{3000}$ redondeando a 6 cifras decimales.

4. Encontrar $\sqrt{5}$ redondeando a 6 cifras decimales.

5. Encontrar $\sqrt{50}$ redondeando a 7 cifras decimales.

6. Encontrar $\sqrt{500}$ redondeando a 6 cifras decimales.

7. Encontrar $\sqrt{3.4}$ redondeando hasta que haya el doble de los dígitos como en el ejemplo 2, de la sección previa.

EJERCICIOS DE REPASO

1. Con 4 como la primera estimación de $\sqrt{15}$, use el método de "división y promedio" con números racionales para encontrar la tercera estimación.

2. Demostrar que $5 + \sqrt{2}$ es un número irracional.

3. Considerando el conjunto $\{x \mid x = 1 - 1/n$, siendo n un entero positivo$\}$, hacer lo siguiente.

   (a) Hacer una lista de los primeros cinco elementos de este conjunto.

   (b) Dar una cota superior para este conjunto.

   (c) Decir cuál es la mínima cota superior para este conjunto.

4. Escribir 3.1416 en forma desarrollada.

5. ¿Cuántas cifras en la aproximación decimal para el número racional $\frac{1}{3}$ se necesitan para tener un error menor que un millonésimo?

6. (a) Expresar $\frac{2}{11}$ como un decimal infinito.
   (b) Expresar $0.17\overline{17}\ldots$ como un número racional.

7. Encontrar $\sqrt{5.023}$ redondeado a dos cifras decimales.

8. Si $a = 1.83$ y $b = 0.5$, encontrar:

   (a) $a + b$ (b) $a - b$
   (c) $a \cdot b$ (d) a/b

9. Si $\sqrt{2}$ es aproximadamente 1.414, entonces resolver:

   (a) $1/\sqrt{2} = ?$ (dar la respuesta como fracción decimal de tres cifras);

   (b) $1/(1 + \sqrt{2}) = ?$

10. (a) Los decimales periódicos infinitos se llaman ——————.
    (b) Los decimales no periódicos infinitos se llaman ——————.

REFERENCIAS

Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1953.

Hamilton, Norman T. y Joseph Landin, *Set Theory, The Structure of Arithmetic*, Allys and Bacon, Boston, 1961.

Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1953.

Swain, Robert L. y Eugene Nichols, *Understanding Arithmetic*, Holt Rinehart y Winston, Nueva York, 1964.

CAPÍTULO 9

Temas de geometría

9.1 INTRODUCCION

Hasta ahora hemos estado interesados en los números y sus propiedades. Sin embargo, los números no son los únicos objetos matemáticos que interesan al maestro de aritmética. Puntos, líneas, planos y espacio también se discuten en los programas de matemáticas de la escuela elemental.

Es nuestro objetivo presentar en este capítulo *algunos* de los conceptos básicos de geometría sin la formalidad de un desarrollo axiomático. En muchos ejemplos nos apoyaremos en la interpretación convencional de los términos en lugar de formalizar las definiciones.

9.2 PUNTOS, LINEAS Y ESPACIO

Estamos acostumbrados a asociar las cosas físicas con las ideas de geometría. Es cierto, sin embargo, que las abstracciones forman las bases para el estudio de la geometría. Es imposible establecer una definición precisa de "punto" en el sentido geométrico. Es también imposible encontrar un ejemplo físico preciso. Ciertamente usamos la palabra "punto" en un sentido comparable al concepto geométrico abstracto, tal como la punta de una pluma, de un lápiz y de un alfiler o aguja. Pero ésta no es precisamente la interpretación que deseamos dar a la palabra en un sentido geométrico. Los textos actuales para la escuela elemental usan la noción de "localización fija en el espacio" como noción descriptiva, pero subrayan que el concepto de punto geométrico es *no definido*. Similarmente, el concepto de *espacio es no definido* pero puede ser considerado como el *conjunto de todos los puntos*. El espacio geométrico y los puntos geométricos son, al igual que los números, *abstracciones* que existen en la mente. El concepto de *línea recta* ordinariamente tampoco es definido, pero podemos pensar que es un conjunto de puntos y por lo tanto, un subconjunto del espacio.

Al igual que los números, estas abstracciones pueden ser simbolizadas, pero, como con los números, debemos tener en mente que estamos simbolizando con el propósito de poder comunicarnos y que el símbolo en sí no es el concepto. Simbolizamos a los puntos con puntos de lápiz, al espacio con nuestro medio ambiente tridimensional, y dibujamos rayas en el papel o en el pizarrón para simbolizar líneas. Es bueno recordar que estos símbolos representativos son para propósitos de comunicación y no deben confundirse con los conceptos abstractos.

9.3 NOTACION PARA CONCEPTOS BASICOS

En la escritura de estos conceptos abstractos es costumbre usar letras mayúsculas para representar puntos en el espacio. Podemos referirnos a un punto en particular como "el punto A" o "el punto B". Podemos generalizar, como en álgebra, y decir: "considérese el punto C en el espacio."

Si tenemos dos puntos distintos A y B en el espacio, frecuentemente consideramos el conjunto de los puntos que pueden ser *representados* por una cuerda infinita, delgada y tensa que pase a través de los puntos A y B. Este conjunto de punto se simboliza AB, donde la doble flecha escrita arriba se usa para indicar que una línea es "infinita" (ver figura 1).

Figura 1

Aquí estamos considerando la línea "recta". Otros "trazos" o "caminos" que pasen simultáneamente por A y B se llaman *curvas*. La *línea recta* (o sencillamente recta) es un elemento especial del conjunto de todas las curvas que pasan a través de los puntos dados, esto es, la línea recta es considerada como un tipo especial de curva.

Hay una infinidad de rectas que pasan a través de un solo punto A; pero, dados dos puntos diferentes, A y B, hay solamente una recta que pasa por el punto A y por el punto B. Decimos que *dos puntos diferentes en el espacio determinan una línea recta.*

Cuando no es necesario asociar rectas con puntos particulares, se usan letras minúsculas para simbolizar a las líneas rectas, así como "la recta l" o "la recta m".

Un punto de una línea recta (usamos la palabra "de" porque un punto es un elemento del conjunto de puntos que forman la recta) separa a la misma en tres subconjuntos ajenos: el conjunto formado por un solo elemento que consiste del punto mismo, y los dos subconjuntos ajenos llamados *semirrectas*. Cada una de estas semirrectas junto con el punto de separación se llama un *rayo* (ver figura 2).

Un rayo que pasa a través de los puntos A y B con *extremo* A se simboliza $\overrightarrow{AB}$. En la línea recta de la figura 2 podemos obtener los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$. Observar que el rayo $\overrightarrow{AB}$ no es lo mismo que el rayo $\overrightarrow{BA}$. Puesto que las líneas rectas y los rayos son conjuntos de puntos, podemos

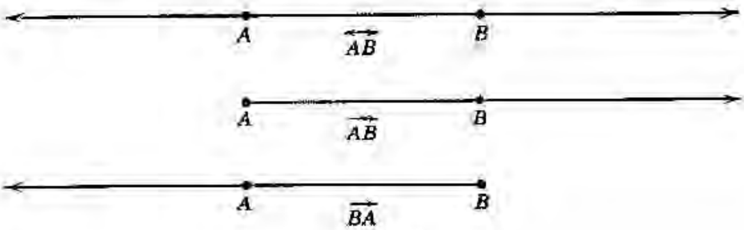


Figura 2

usar la conocida notación de conjuntos y escribir:

$$\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}.$$

La intersección de estos dos rayos es también un conjunto familiar e interesante al que llamamos *segmento de recta*. Lo simbolizamos como AB. Tenemos

$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}.$$

Los puntos A y B se llaman *extremos* de segmento. Decimos que un punto C está *entre* los puntos A y B si C es diferente de A y B y $C \in \overline{AB}$.

9.4 LONGITUDES DE LOS SEGMENTOS DE LINEA RECTA

La longitud de un segmento de línea recta se ha discutido indirectamente en la sección 6.12. Allí hablamos de "distancia" entre dos puntos en la recta numérica usando números enteros para marcar los puntos. El hecho de que exista correspondencia biunívoca entre el conjunto de número reales y los puntos de una línea recta usualmente se menciona como un *axioma* de la geometría intuitiva, y algunas veces se alude a ello como "introducción de coordenadas en la recta". No necesitamos ser tan rigurosos, sino que, más bien, simplemente necesitamos usar el conjunto de números reales para "marcar" o "nombrar" los puntos. Entonces, la *distancia* de un punto llamado "a" a un punto llamado "b" está definida como $|b - a|$. Esta puede definirse como la *longitud del segmento de recta* del punto llamado "a" al punto llamado "b". Obsérvese la diferencia entre "un punto llamado a" y "el punto A." En el primer caso "a" representa un número real y en el segundo "A" es un nombre para un punto. La longitud del segmento de recta del punto A al punto B usualmente se simboliza AB. Si en la correspondencia de números reales con puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$, el punto A está asociado con el número real a, y el punto B está asociado con el número real b, entonces la distancia de A a B, o la longitud del segmento de línea $\overline{AB}$ es

$$|b - a| = AB.$$

Entonces AB es un número real y las propiedades del sistema de los números reales valen para tales medidas. Además, las propiedades de las *distancias*, dadas en la sección 6.12c, se cumplen. Debemos observar que en algunos textos de aritmética la medida de un segmento de recta se simboliza $m(\overline{AB})$. Si éste es el caso, lo que nosotros designamos con AB ellos lo designan con $m(\overline{AB})$. $AB = m(\overline{AB})$.

9.5 PLANOS Y SEMIPLANOS

Como sucede con puntos, líneas y espacio, el concepto de *plano* geométrico es ordinariamente no definido. Es un conjunto particular de puntos; en consecuencia es un subconjunto del espacio, y puede caracterizarse pensando en una superficie plana extendida indefinidamente en todas direcciones. Cualquier superficie plana, tal como la pared de un cuarto, un piso o una hoja de cartón, sugieren un plano. La mejor forma de caracterizar a un plano es con sus propiedades. Dados

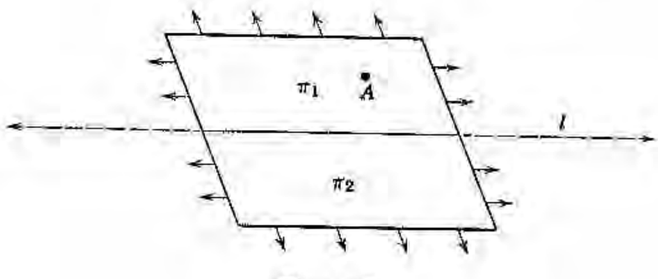


Figura 3

dos puntos cualesquiera diferentes del espacio, hay un número infinito de planos que los contienen. Dando tres puntos cualesquiera, no colineales (que no están en la misma recta) del espacio, hay uno y solamente un plano que contiene a los tres puntos. Decimos que *tres puntos cualesquiera, no colineales, determinan un plano.* Si dos puntos distintos de una línea recta están en un plano, entonces todos los puntos de la recta están en el plano. Puesto que dos rectas que se intersectan tienen por lo menos tres puntos distintos no colineales como subconjuntos, podemos decir que dos rectas distintas que se interceptan determinan un plano único.

Dos rectas diferentes en un plano siempre se intersectan (tienen exactamente un punto en común) o son paralelas (no tienen puntos en común). Considerando que una recta l es un subconjunto de un plano π, entonces es claro que l divide al conjunto de puntos de π en tres subconjuntos ajenos: la recta l y dos *semiplanos* indicados por π_1 y π_2. Tenemos

$$l \cup \pi_1 \cup \pi_2 = \pi.$$

Si hay un punto A tal que $A \in \pi_1$, $A \in l$, hablamos de π_1, en relación a l y π, como el "lado A" de l. (Ver figura 3).

9.6 ÁNGULOS Y SU MEDIDA

Un *ángulo* puede ser definido como la unión de dos rayos con extremo común (ver figura 4). Simbolizamos esto $\angle BAC$.

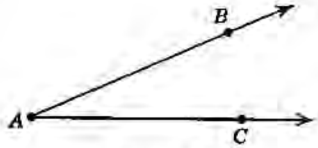


Figura 4

El extremo común A se llama vértice del ángulo, y cuando usamos tres letras para simbolizar un ángulo, la letra que indica el vértice se coloca entre las otras dos. El orden de las otras dos no tiene importancia. Cuando no da lugar a ambigüedades, puede usarse la letra asociada al vértice para designar al ángulo.

$$\angle BAC = \angle CAB = \angle A.$$

Un ángulo es un conjunto de puntos formados por la unión de dos rayos distintos con un extremo común.

$$\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}.$$

Si los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son tales que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{CB}$ (ver figura 5), entonces el ángulo que se forma se llama *ángulo colineal* o *ángulo llano*.

Figura 5

La intersección del "lado C" de $\overleftrightarrow{AB}$ y el "lado B" de $\overleftrightarrow{AC}$ se llama el *interior* del ángulo (ver figura 6).* El conjunto compuesto de puntos en el plano que no están en $\angle BAC$ ni en su interior se consideran como el *exterior* de $\angle BAC$.

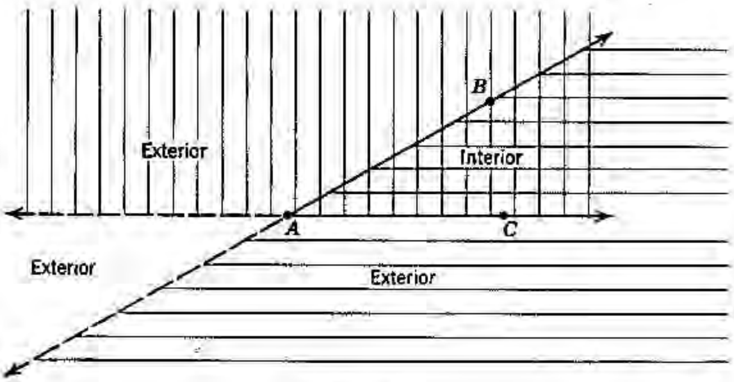


Figura 6

Asociada con los ángulos, como con los segmentos de recta, hay una correspondencia uno a uno entre los ángulos y los números reales, o, más comúnmente, con un subconjunto de los números reales. La medida usual asociada con ángulos es la medida de *grados*. El instrumento usado para establecer esta correspondencia se llama *transportador*. La unidad de medida se llama *grado* y es un número real entre 0 y 180. Simbolizamos esto, por ejemplo, escribiendo

$$m\angle BAC = 45.$$

Observar que *no* decimos "la medida del ángulo es 45 grados". Sin embargo, es común decir: "el ángulo BAC es un ángulo de 45 grados". No nos ocuparemos de la diferencia.

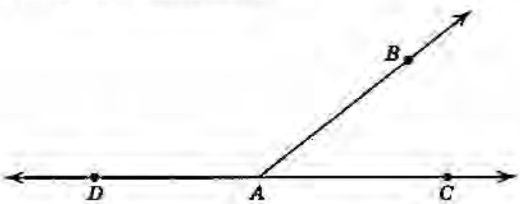


Figura 7

Se dice que un ángulo formado por dos rayos idénticos tiene la medida 0, ó que es un ángulo de 0° (ángulo de cero grados). Un ángulo

* También, *"sector plano"*.

colineal o llano tiene una medida de 180, ó decimos que es un ángulo de 180°. Dos ángulos, $\angle BAC$ y $\angle BAD$, donde A, B, C y D son puntos distintos y donde A está *entre* D y C, se llaman *suplementarios* (ver figura 7). Si dos ángulos suplementarios tienen la misma medida, se llaman *ángulos rectos* y cada uno de ellos tiene una medida de 90. Si $m\angle BAC < 90$, $\angle BAC$ se llama un *ángulo agudo*. Si $90 < m\angle BAC < 180$, $\angle BAC$ se llama un *ángulo obtuso*.

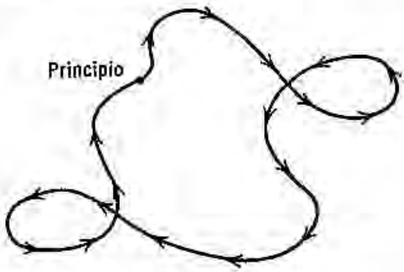


Figura 8

9.7 FIGURAS PLANAS

Una *curva cerrada* en un plano puede ser concebida como una "trayectoria" tal que si uno la recorre de algún modo conduce nuevamente al punto de origen (ver figura 8).

Una *curva cerrada simple* en un plano es una curva cerrada que no se "corta a sí misma" (ver figura 9).

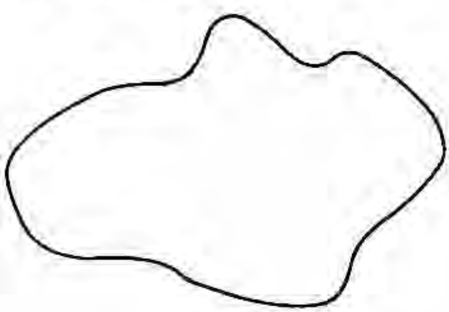


Figura 9

Algunas figuras planas se forman con la unión de segmentos de recta. Un *triángulo* puede ser definido como la unión de tres segmentos de recta, los cuales, por pares, tienen un extremo común, pero en cualquier otro aspecto son distintos. Por ejemplo, considérense tres puntos no colineales A, B y C. Entonces, el triángulo asociado a estos puntos, y que simbolizamos con $\triangle ABC$, es

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC},$$

donde $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, y $\overline{BC}$ se llaman los *lados* del triángulo. Asociados a un triángulo hay tres ángulos "interiores". Los ángulos no son subconjuntos del triángulo puesto que los ángulos están formados de *rayos* y no de segmentos de recta; por lo tanto, decimos que los ángulos están "asociados" al triángulo (ver figura 10).

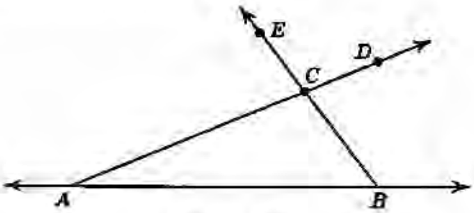


Figura 10

Se dice que un triángulo es un *triángulo rectángulo* si uno de sus ángulos asociados es un ángulo recto. (Aunque incorrecta la expresión "uno de sus ángulos" se usa con frecuencia). Si dos de sus lados son iguales en medida, el triángulo se llama *isósceles*; y puede demostrarse que ángulos opuestos a lados iguales deben también ser iguales en medida. Si los tres lados son iguales en medida, se dice que el triángulo es *equilátero*. Un triángulo equilátero es también *equiángulo*.

Otras figuras planas pueden definirse en forma similar. Una vez familiarizados con las operaciones de conjuntos y las definiciones de rayos, segmentos de recta, etc., como conjuntos de puntos, encontramos estas definiciones muy directas y fáciles de entender. En lugar de tratar ampliamente este tema se prefiere cambiar a otros temas de interés relacionados con la geometría.

Ejercicios 9.7

1. ¿Cuántas rectas diferentes pueden contener:
   (a) un punto específico?
   (b) un par específico de puntos diferentes?
2. ¿Cuántos planos diferentes pueden contener:
   (a) un punto específico?
   (b) un par específico de puntos diferentes?
   (c) un conjunto de tres puntos diferentes no colineales?
3. (a) Si dos rectas diferentes se intersectan, ¿cuántos puntos hay en la intersección?
   (b) Si dos planos diferentes se intersectan, ¿cuántas rectas hay en la intersección?

4. Marcar tres puntos A, B y C en un orden de izquierda a derecha en la misma recta. Indicar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$. ¿Cuáles de estos nombres sirven para el mismo rayo?

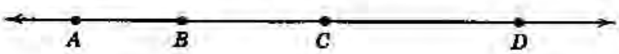
5. Marcar un punto P en una hoja de papel. Dibujar tres rayos distintos con extremo P. ¿Cuántos rayos tiene el extremo P?

6. Dibujar un rayo $\overrightarrow{AB}$. ¿Cuántos rayos hay con extremo A y que contienen al punto B? ¿Está $\overline{AB}$ contenido en $\overrightarrow{AB}$? ¿Cuántos segmentos hay que sean subconjuntos de $\overrightarrow{AB}$ y que tengan a A como extremo?

7. Marcar dos puntos distintos P y Q en una hoja de papel.
   (a) Dibujar un rayo con extremo P.
   (b) Dibujar un rayo con extremo Q.
   (c) Dibujar el rayo $\overrightarrow{PQ}$.
   (d) Dibujar el rayo $\overrightarrow{QP}$.
   (e) Marcar una línea recta gruesa para indicar el segmento $\overline{PQ}$.

8. ¿Cuántos extremos tiene
   (a) una línea?
   (b) un rayo?
   (c) un segmento de recta?

9. ¿Cuántas rectas pueden dibujarse que pasen por cuatro puntos, tomando éstos de dos en dos, si los puntos:
   (a) están en el mismo plano? (dibujar una figura para ilustrar).
   (b) no están en el mismo plano? (dibujar una figura para ilustrar).



10. Considérese:

   (a) $\overline{AB} \cup \overrightarrow{BC} = ?$

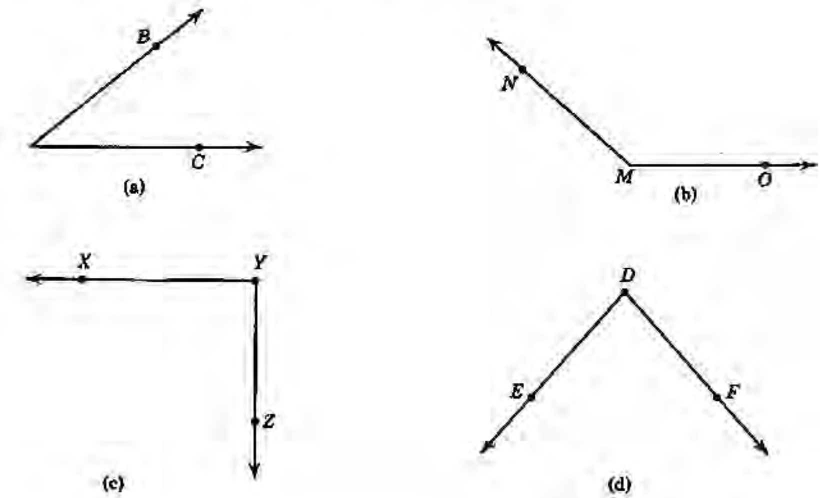
   (b) $\overline{AB} \cup \overrightarrow{CB} = ?$

   (c) $\overline{AC} \cup \overline{CD} = ?$

   (d) $\overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA} = ?$

11. Dibujar ejemplos en cada uno de los siguientes ejercicios:
   (a) curvas que no sean ni cerradas ni simples.
   (b) curvas que sean cerradas pero no simples.
   (c) curvas que sean cerradas y simples.

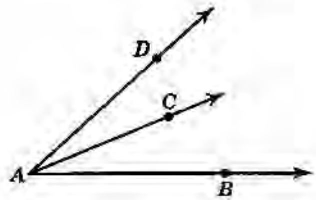
12. Dar el nombre de: el ángulo, el vértice y los lados en cada uno de los siguientes ejemplos:



13. Considerando la figura anexa:

(a) ¿Está el punto C en el interior de $\angle BAD$?

(b) ¿Está $\overrightarrow{AC} \cap \{A\}'$ en el interior de $\angle BAD$?



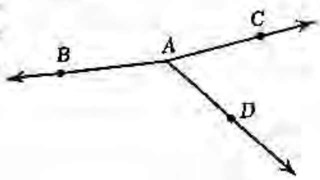
14. Considerando la figura anexa, responda a las preguntas del problema 13.

15. Un ángulo es de 37 grados. Entonces completar:

(a) La unidad de medida es ______

(b) La medida del ángulo es ______

(c) El ángulo se considera un ángulo ______.



9.8 LONGITUD DE UN SEGMENTO DE CURVA

La longitud de un segmento de curva no es fácil de definir; y *cuando se la define*, la tarea de determinarla requiere generalmente del uso del cálculo infinitesimal. Consideremos el caso especial del arco de un círculo. Con un poco de imaginación y procediendo cuidadosamente paso por paso, llegaremos a una definición conveniente de la longitud de un arco de círculo.

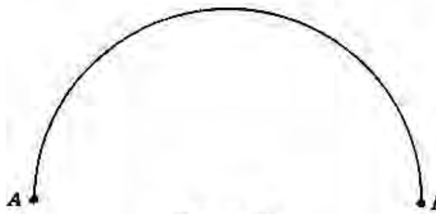


Figura 11

Considérese el arco de círculo, denotado por $\widehat{AB}$, de la figura 11. Deseamos definir la longitud $\widehat{AB}$. Usamos la longitud de segmentos de recta, la desigualdad del triángulo, y los conceptos de la menor de las cotas superiores y la mayor de las cotas inferiores para llegar a la definición.

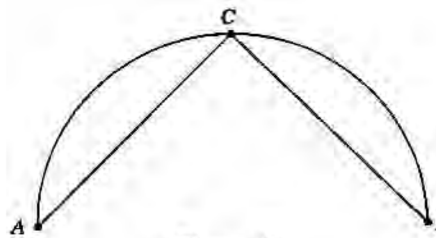


Figura 12

Sea C el punto en medio del arco entre A y B (figura 12) (C puede encontrarse por construcción). Entonces, considerando los segmentos de recta $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, podemos tomar la suma de las longitudes de los segmentos de rectas como una aproximación para la longitud de $\widehat{AB}$.

Supóngase que AC indica la longitud del segmento de la línea recta $\overline{AC}$. (Observar que AC es un número real.) Entonces nuestra primera aproximación a la longitud de $\widehat{AB}$, indicada por l_2 (el "2" porque son dos segmentos), es

$$l_2 = AC + CB.$$

Para una segunda aproximación, escogemos puntos D y E tales que D esté en el punto medio del arco AC y E en el punto medio del arco $\widehat{CB}$ (ver figura 13).

Entonces, una segunda aproximación l_4, a la longitud de $\widehat{AB}$, está dada por

$$l_4 = AD + DC + CE + EB.$$

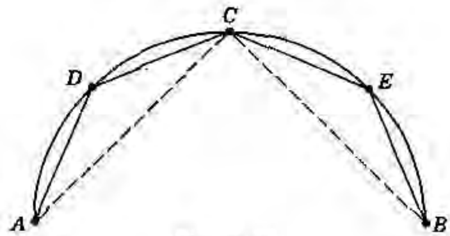


Figura 13

Obsérvese que $l_2 \leqq l_4$, por la desigualdad del triángulo (ver sección 6.12c, 3) esto es:

$$AC \leqq AD + DC$$
y
$$CB \leqq CE + EB,$$
es decir: $l_2 = AC + CB \leqq AD + DC + CE + EB = l_4$.

Continuando en esta forma podemos obtener *trayectorias de poligonales inscritas* de A a B, de 2, 4, 8, 16, etc., lados. Designamos a la aproximación obtenida usando una trayectoria 2^n lados por l_{2^n}.

Asociada con cada trayectoria de una poligonal inscrita está la trayectoria de una poligonal circunscrita obtenida por la construcción de tangentes a los puntos medios del arco, es decir, a cada punto seleccionado. Estas tangentes al encontrarse forman trayectorias poligonales como se indica en la figura 14.

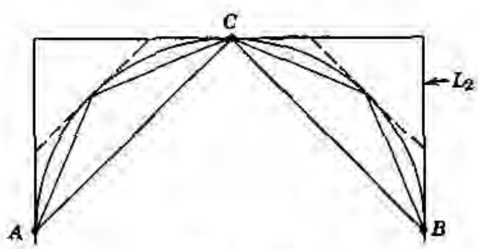


Figura 14

Supongamos que L_2 designa la longitud de la trayectoria circunscrita asociada con el trazo inscrito l_2. Usando la desigualdad del triángulo se puede demostrar que

$$l_{2^n} < L_2 \qquad \text{para todo } n$$
y
$$l_{2^n} < l_{2^{n+1}} \qquad \text{para todo } n$$

La sucesión de números $l_2, l_4, l_8, \ldots l_{2^n}, \ldots$ es una sucesión creciente de números reales acotados superiormente por el número L_2.

Por la propiedad de que los números reales son completos (ver sección 8.3), esta sucesión tiene una mínima cota superior. Similarmente, las longitudes de los trazos circunscritos forman una sucesión decreciente acotada inferiormente por la longitud de la cuerda $\overline{AB}$. Nuevamente, por la propiedad de completidad, esta sucesión tiene una máxima cota inferior. Si la mínima cota superior de la sucesión creciente es *igual* a la máxima cota inferior de la sucesión decreciente, se define este valor común como la *longitud* del arco circular $\overset{\frown}{AB}$.

Ejemplo 1

Para ilustrar este procedimiento usaremos aproximaciones sucesivas como se indicó antes, para estimar la longitud de un arco semicircular de un círculo de diámetro 2, el cual sabemos tiene por longitud π.

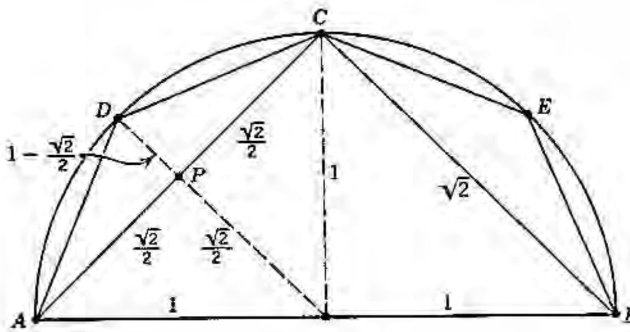


Figura 15

$AB = 2$ Longitud de $\overset{\frown}{AB} = \pi \cong 3.14$

$l_2 = AC + CB = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cong 2(1.4142) \cong 2.83$

$l_4 = AD + DC + CE + EB$, pero, puesto que AD, DC, CE y EB son iguales por construcción,

$l_4 = 4(AD)$, donde AD puede ser calculado a partir del $\triangle APD$, figura 15.

$$AD = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \sqrt{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cong \sqrt{2 - 1.41421356} \cong 0.76537$$

$$l_4 = 4(AD) \cong 4(0.76537) \cong 3.06$$

$l_8 = AF + FD + DG + GC + CH + HE + EI + IB$, pero, por construcción, son todos iguales, es decir:

$l_8 = 8(AF)$, donde AF puede ser calculado a partir del $\triangle AQF$, figura 16.

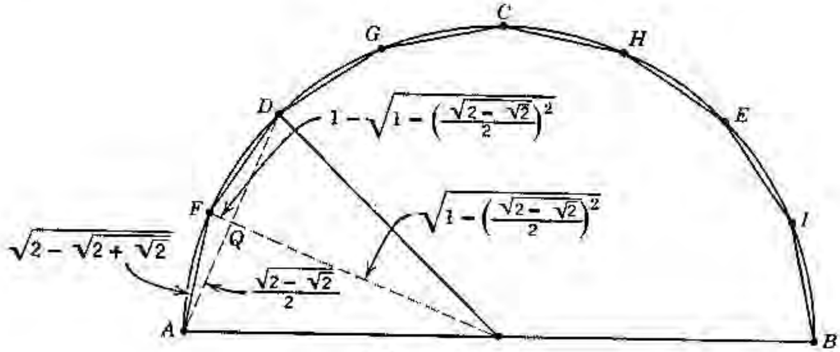


Figura 16

$$AF = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2}\right]^2}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\cong \sqrt{2 - \sqrt{3.41421356}} \cong \sqrt{2 - 1.8477}$$

$$\cong \sqrt{0.1523} \cong 0.39$$

$$l_8 \cong 8(0.39) = 3.12$$

$$2.83 < 3.06 < 3.12 < 3.14$$

$$l_2 < l_4 < l_8 < \pi.$$

Obsérvese que la tercera aproximación nos da una exactitud de dos cifras significativas.

Ejercicios 9.8

1. Demostrar que $l_2 \leqq l_4$, usando la figura 13.

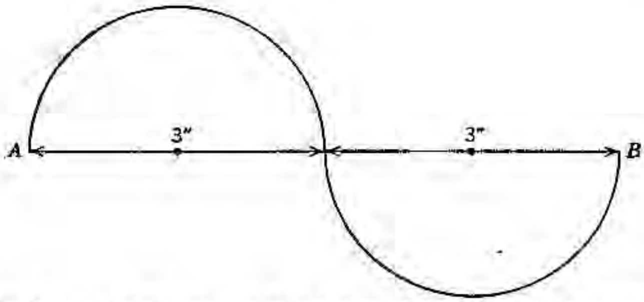
2. Demostrar que $l_{2^n} \leqq l_{2^{n+1}}$.

3. Encontrar l_4 para un arco semicircular de diámetro 3.

4. Estimar la longitud del siguiente trazo de curva que consiste de dos semicírculos.

   (a) usando una regla para estimar la medida de cada segmento del trazo poligonal sobre un dibujo exacto.

   (b) usando los cálculos del problema 3.



5. En la sección 9.8 usamos la desigualdad del triángulo para demostrar que $AC \leqq AD + DC$. Haga un croquis del triángulo correspondiente y verifique la validez de nuestro argumento.

6. ¿Cuál es la longitud exacta del arco del problema 4?

7. Haga un croquis de los triángulos correspondientes de la figura 14 y verifique que $l_2 < L_2$.

8. Marcar convenientemente la figura y verificar que $l_4 < L_2$.

9.9 AREAS

En esta sección presentamos deducciones de las fórmulas comunes para las áreas de algunas figuras planas seleccionadas.

Al igual que la longitud de un segmento de línea, el *área* de una figura plana es también una *medida*; esto es, el área de una figura plana es un número real no negativo tal que si una figura plana P está contenida en una figura plana Q, entonces el área de P, indicada por $A(P)$, es menor o igual al área de Q, $A(Q)$. Si las figuras planas P y Q son ajenas entonces el área de la unión de las dos figuras planas es igual a la suma del área de P y del área de Q. La "longitud" de un segmento de línea, como una medida, tiene estas propiedades. El "volumen" de un objeto en el espacio, que será discutido brevemente en una sección posterior, es también una medida y tiene estas propiedades. Puesto que usamos estas propiedades implícitamente en lo que sigue, las escribiremos en el lenguaje de *área* y nos referiremos a ellas brevemente.

Si P indica una figura plana y $A(P)$ su área, entonces se cumple que:

1. $A(P) \geqq 0$.
   (No negativa)
2. Si $P \subseteq Q$, entonces $A(P) \leqq A(Q)$.
   (Monótona)
3. Si $P \cap Q = \emptyset$, entonces $A(P \cup Q) = A(P) + A(Q)$.
   (Aditividad finita)

Puesto que estamos interesados en cómo determinar el área de una figura plana, analizaremos cuál es el significado del área de un rectángulo.

Primero escogemos una unidad de longitud. Entonces un *cuadrado* cuyo lado mide una unidad de longitud se dice que tiene *una unidad cuadrada de área*. De la figura 17 vemos que si tenemos tres unidades cuadradas juntas debemos contar el área de 3 unidades cuadradas. Similarmente, si tenemos un rectángulo con lados cuya longitud es 2 y 4, contando los cuadrados obtendríamos un área de 8 unidades cuadradas. Un cuadrado de $\frac{1}{2}$ unidad de longitud en cada lado es $\frac{1}{4}$ de unidad cuadrada en área, puesto que cuatro de dichos cuadrados forman una unidad cuadrada. Un rectángulo cuyos lados tienen 2 y $2\frac{1}{2}$ unidades de longitud tiene un área de 5 unidades cuadradas, como podemos ver contando.

Usando nuestra imaginación podemos ver cómo esta idea de contar podría ser extendida a cualquier rectángulo cuyo *largo* y *ancho* están dados en términos de números racionales, y encontramos que el procedimiento de contar nos da el mismo resultado que multiplicar el largo por el ancho (ver problema 4, ejercicio 7.11c).

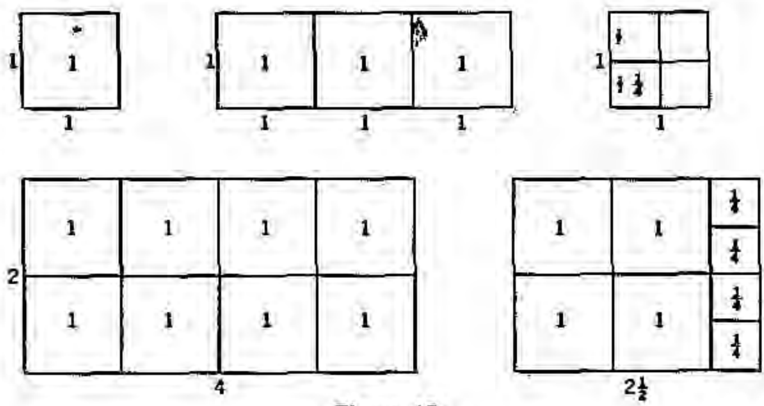


Figura 17

Por esta razón *definimos* el área de un rectángulo de longitud l y ancho w como lw unidades cuadradas, donde los números reales l y w están dados en *las mismas unidades* de longitud. Si usamos A para designar el área, entonces

$$A = lw.$$

Para un cuadrado, el cual es simplemente un caso especial del rectángulo con $l = w$, usualmente usamos el símbolo s para indicar la longitud de un lado. Entonces, el área de un cuadrado está dada por

$$A = s^2.$$

El área de figuras planas, en general, puede ser definida en términos de las áreas de rectángulos (ver sección 9.13 para un ejemplo del procedimiento general). Para nuestros propósitos, deducimos la fórmula para el área de un triángulo y usamos esta información para deducir las fórmulas para el área de otras figuras planas.

9.9a Area de triángulos

La diagonal de un rectángulo divide al rectángulo en dos partes iguales (ver si puede recordar lo suficiente de la geometría plana para demostrar esto; e intente demostrar el teorema "dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y un lado de uno son iguales, respectivamente, a la hipotenusa y un lado del otro".)

Cada una de estas partes es un triángulo rectángulo (ver figura 18). Si el área del rectángulo es lw, entonces el área del triángulo es $\frac{1}{2}lw$. Usualmente designamos la longitud de los dos catetos de un triángulo rectángulo por b y h, b para la base y h para la altura. Entonces el área

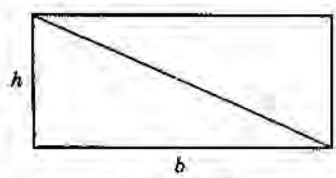


Figura 18

de un triángulo rectángulo es el producto de $\frac{1}{2}$, por la base y por la altura.

$$A = \tfrac{1}{2}(bh).$$

Observar que estamos usando la *propiedad aditiva* del área, esto es, el área del rectángulo es igual a la suma de los dos números iguales que representan al área de cada uno de los triángulos rectángulos.

Para obtener el área en general de un triángulo, dibujamos una perpendicular desde un vértice al lado opuesto (ver figura 19).

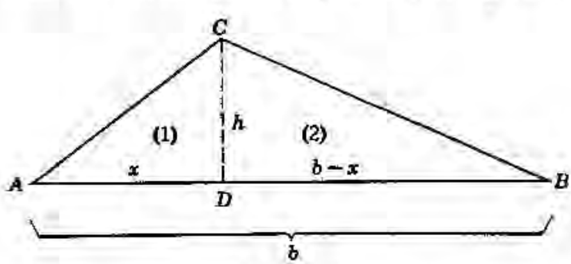


Figura 19

La longitud del segmento $\overline{CD}$ se designa como una altura del triángulo y se indica por h. El segmento $\overline{CD}$ divide al triángulo en dos triángulos (1) y (2), cada uno de los cuales es un triángulo rectángulo. Indiquemos la longitud de la base de (1) por x y la longitud de la base de (2) por $b - x$. Ambos tienen la misma altura h. Aplicando la información conocida acerca de triángulos rectángulos, tenemos

$$\text{Area de (1)} = \tfrac{1}{2}(xh),$$
$$\text{Area de (2)} = \tfrac{1}{2}(b - x)h = \tfrac{1}{2}(bh) - \tfrac{1}{2}(xh),$$
y $$\text{Area (1)} + \text{Area (2)} = \tfrac{1}{2}(xh) + \tfrac{1}{2}(bh) - \tfrac{1}{2}(xh) = \tfrac{1}{2}(bh).$$

Por lo tanto, en general, el área de un triángulo se encuentra multiplicando $\frac{1}{2}$ por la base y por la altura,

$$A = \tfrac{1}{2}(bh).$$

Observar que nos apoyamos en la propiedad aditiva del área.

9.9b Area de los paralelogramos

Veamos ahora el paralelogramo, una figura plana de cuatro lados cuyos lados opuestos son paralelos e iguales (ver figura 20).

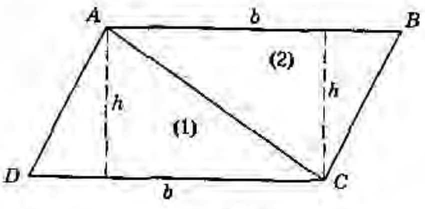


Figura 20

Aquí designamos la longitud del segmento de recta perpendicular entre dos lados paralelos, "*altura*", h, del paralelogramo, y la longitud de uno de estos lados paralelos se llama la "*base*", b. Si dibujamos la diagonal AC, observamos que ésta divide al paralelogramo en dos triángulos, cada uno de los cuales tiene como base la longitud b y la altura de longitud h. Esto es

$$\text{Area del triángulo (1)} = \tfrac{1}{2}(bh),$$
$$\text{Area del triángulo (2)} = \tfrac{1}{2}(bh),$$
y $$\text{Area (1)} + \text{Area (2)} = \tfrac{1}{2}(bh) + \tfrac{1}{2}(bh) = bh.$$

Por lo tanto, el área de un paralelogramo es el producto de las longitudes de la base y de la altura.

$$A = bh.$$

9.9c Area de los trapecios

El trapecio es una figura plana limitada por cuatro segmentos de recta, dos de los cuales son paralelos (ver figura 21).

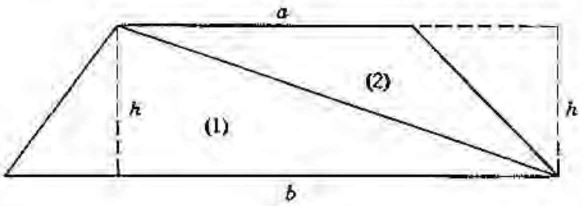


Figura 21

Nuevamente, designamos a la longitud de la perpendicular entre los dos lados paralelos por h, y la llamamos altura. La longitud de uno de los lados paralelos está indicada por b y la otra por a. Dibujando una diagonal, como se indica en la figura 21, vemos que el trapecio está dividido en dos partes, cada una de las cuales es un triángulo. Un triángulo tiene la base de longitud b, y la altura de longitud h y el otro tiene la base de longitud a, y la altura de longitud h. Tenemos

$$\begin{aligned} \text{Area del triángulo (1)} &= \tfrac{1}{2}(bh), \\ \text{Area del triángulo (2)} &= \tfrac{1}{2}(ah), \\ \text{Entonces, Area del trapecio} &= \text{Area (1)} + \text{Area (2)} = \tfrac{1}{2}(bh) + \tfrac{1}{2}(ah) \\ &= \tfrac{1}{2}(b + a)h \qquad \text{Ley Distributiva} \end{aligned}$$

Usualmente esto se escribe

$$A = \tfrac{1}{2}h(a + b).$$

Con palabras, el área de un trapecio se encuentra como el producto de $\frac{1}{2}$ de la altura por la suma de las dos "bases". Observar que, una vez más, nos apoyamos en la propiedad aditiva del área.

9.9d El área de los polígonos regulares

A continuación establecemos la fórmula para el área de un polígono regular de n lados. Este es una figura plana que tiene lados y ángulos iguales. Las figuras planas más simples de este tipo son el triángulo equilátero y el cuadrado. Para establecer una frómula que nos dé el área de cualquier polígono regular ilustraremos como ejemplo el hexágono regular (ver figura 22). Asociado con cada polígono regular hay un círculo circunscrito. Identificamos el centro de este círculo como el centro del polígono regular. Si trazamos líneas rectas del centro a cada

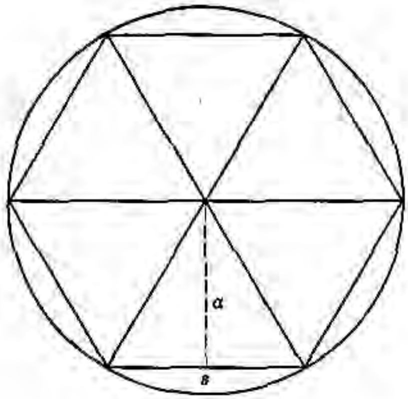


Figura 22

uno de los vértices, construimos un triángulo por cada uno de los lados del polígono. La distancia del centro de un polígono regular a uno de sus lados (esto es, la distancia perpendicular) se llama la *apotema*. Designaremos su longitud por a. Esta es también la altura del triángulo formado por uno de los lados del polígono y las líneas trazadas desde sus extremos al centro. Si designamos la longitud de uno de los lados del polígono por s; entonces el área de uno de los triángulos es $\frac{1}{2}(as)$. Si el polígono tiene n lados, entonces hay n de dichos triángulos en el polígono. Usando la propiedad aditiva del área, tenemos

$$A = \tfrac{1}{2}a(ns).$$

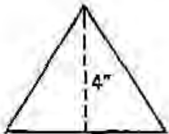
Pero ns es el "perímetro" (contorno) del polígono regular: por lo tanto,

$$A = \tfrac{1}{2}(ap).$$

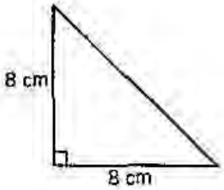
En palabras, el área de un polígono regular es el producto de $\frac{1}{2}$ por la apotema y por el perímetro.

Ejercicios 9.3

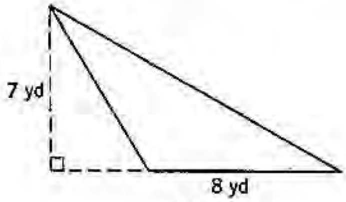
1. Encontrar las áreas de los triángulos mostrados, usando las dimensiones dadas.



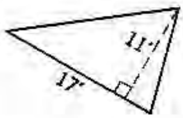
(a)



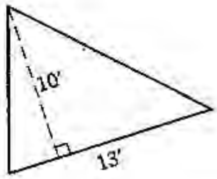
(b)



(c)

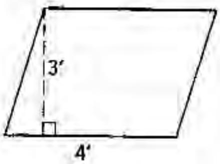


(d)

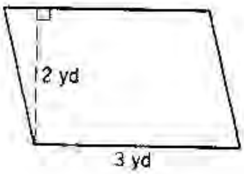


(e)

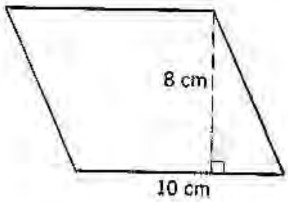
2. Encontrar las áreas de los paralelogramos mostrados usando las dimensiones dadas.



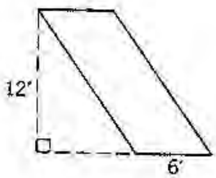
(a)



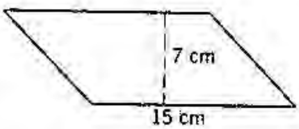
(b)



(c)

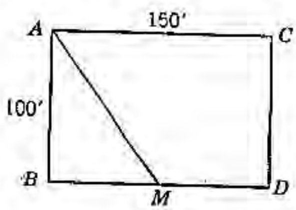


(d)



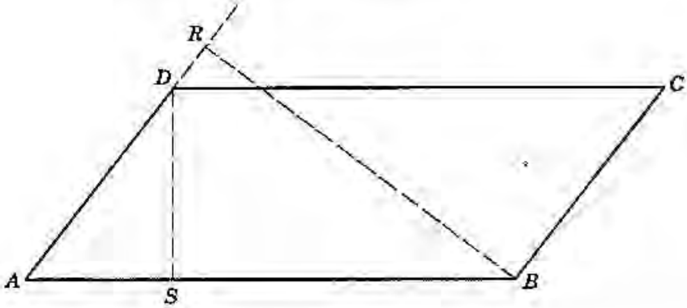
(e)

3. Un hombre tiene un lote rectangular de 150 pies por 100 pies. Desde una esquina, A, se coloca una valla rectilínea hasta un punto M situado en la mitad del lado opuesto, como se indica en la figura.



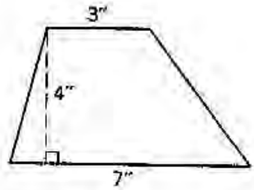
(a) Encontrar el área de $ABCD$.
(b) Encontrar el área de AMB.
(c) Encontrar el área de $AMDC$.

4. (a) En el dibujo siguiente, medir $\overline{AB}$ y $\overline{DS}$. Usando estas medidas, encontrar el área del paralelogramo.

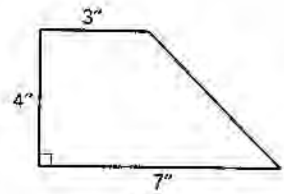


(b) Medir $\overline{AD}$ y $\overline{RB}$. Usando estas medidas, encontrar el área del paralelogramo.
(c) ¿Concuerdan los resultados en (a) y (b)? Puesto que la medición es aproximada, pueden no ser exactamente iguales, pero deben ser muy cercanos.

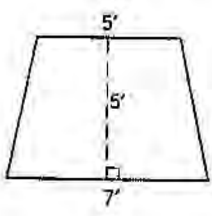
5. Encontrar el área de los siguientes trapezoides, usando las dimensiones dadas:



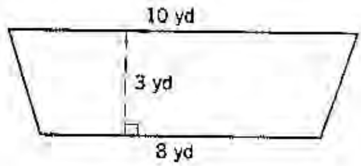
(a)



(b)



(c)



(d)

6. Usando aproximaciones racionales para los números irracionales, encontrar una aproximación del área de un rectángulo cuya longitud es $\sqrt{2}$ pies y cuyo ancho es $\sqrt{3}$ pies.

9.10 VOLUMEN Y AREA DE SUPERFICIES

En esta sección presentamos algunas de las fórmulas para volúmenes. Primero definimos una *unidad de volumen*. Como con el área, escogemos una unidad de longitud. Un *cubo* cuyo lado mide una unidad de longitud tiene una *unidad cúbica de volumen*. De la figura 23 vemos que si tenemos 3 cubos juntos, necesitaríamos contarlos como 3 unidades cúbicas. Similarmente, contando, vemos que si tenemos un sólido rectangular de 2 unidades por 3 unidades por 2 unidades, debemos llamar a esto 12 unidades cúbicas. Un cubo de $\frac{1}{2}$ unidad de lado debe ser considerado como $\frac{1}{8}$ de unidad cúbica porque se necesitan 8 de ellos para "llenar" la unidad cúbica.

Como con el área, si las unidades de medida de las dimensiones del sólido rectangular están dadas en términos de números racionales, podemos obtener el número de unidades de volumen "contando", y el resultado es el mismo que si multiplicamos "largo" por "ancho" por "altura". Si designamos el largo, ancho y alto por l, w y h respectiva-

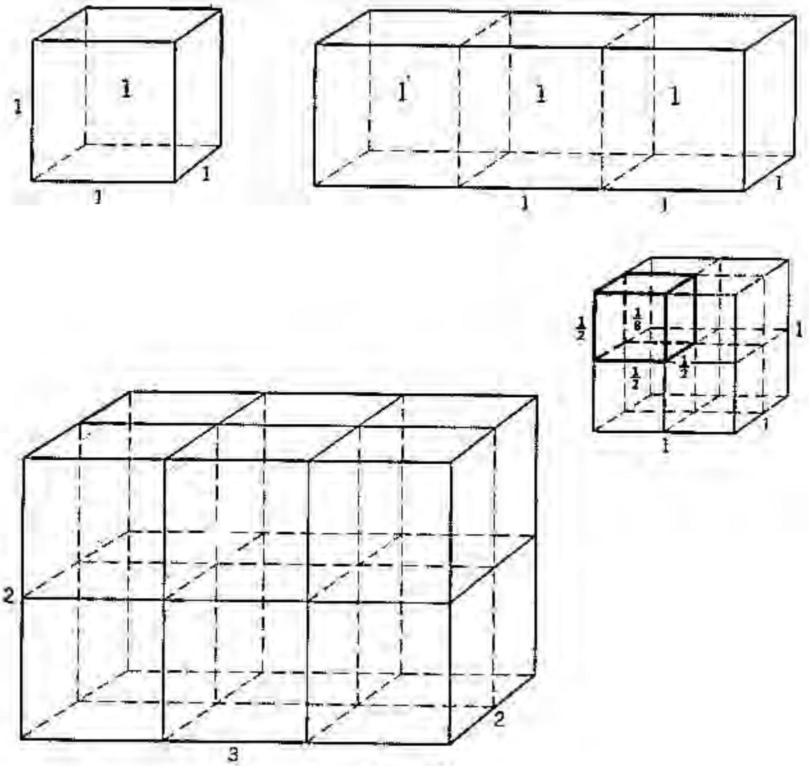


Figura 23

mente, siendo l, w y h números reales, entonces el volumen V del sólido rectangular está *definido* como

$$V = lwh.$$

La obtención de las fórmulas para cada uno de los sólidos dados en los siguientes párrafos puede hacerse en forma precisa con el uso del cálculo infinitesimal. Solamente describiremos el tipo de figura sujeto a discusión y presentamos la fórmula para tal figura.

9.10a Prisma

En la misma forma que hemos llamado polígonos a las figuras bidimensionales limitadas por líneas rectas, llamamos poliedros a las figuras tridimensionales limitadas por planos.

Un *prisma* es un poliedro dos de cuyas caras (llamadas bases) son polígonos congruentes (exactamente del mismo tamaño y forma) en planos paralelos, y cuyas caras restantes (llamadas caras laterales) son paralelogramos (ver figura 25).

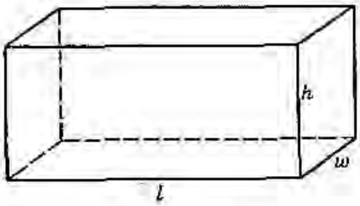


Figura 24

Un prisma que tenga todas sus caras y bases en forma de rectángulo se le llama un *sólido rectangular* o *paralelepípedo rectangular*. El volumen de un paralelepípedo (figura en forma de caja) está dado por el producto de las longitudes de tres aristas concurrentes. (Concurrente significa que "se encuentran en un punto") (ver figura 24). O sea:

$$V = lwh.$$

El *área total* de tal figura es la suma de las áreas de las caras y las bases. El *área lateral* es el área total menos el área de las bases. Indicando por T el área total y S el área lateral, tenemos

$$T = 2(lw + lh + wh),$$

y

$$S = 2(lw + wh).$$

Al hablar en general de prismas es conveniente definir lo que entendemos por una "sección recta". Una *sección recta* de un prisma es el polígono formado por la intersección del prisma con un plano que sea perpendicular a cada una de las caras laterales (ver figura 25).

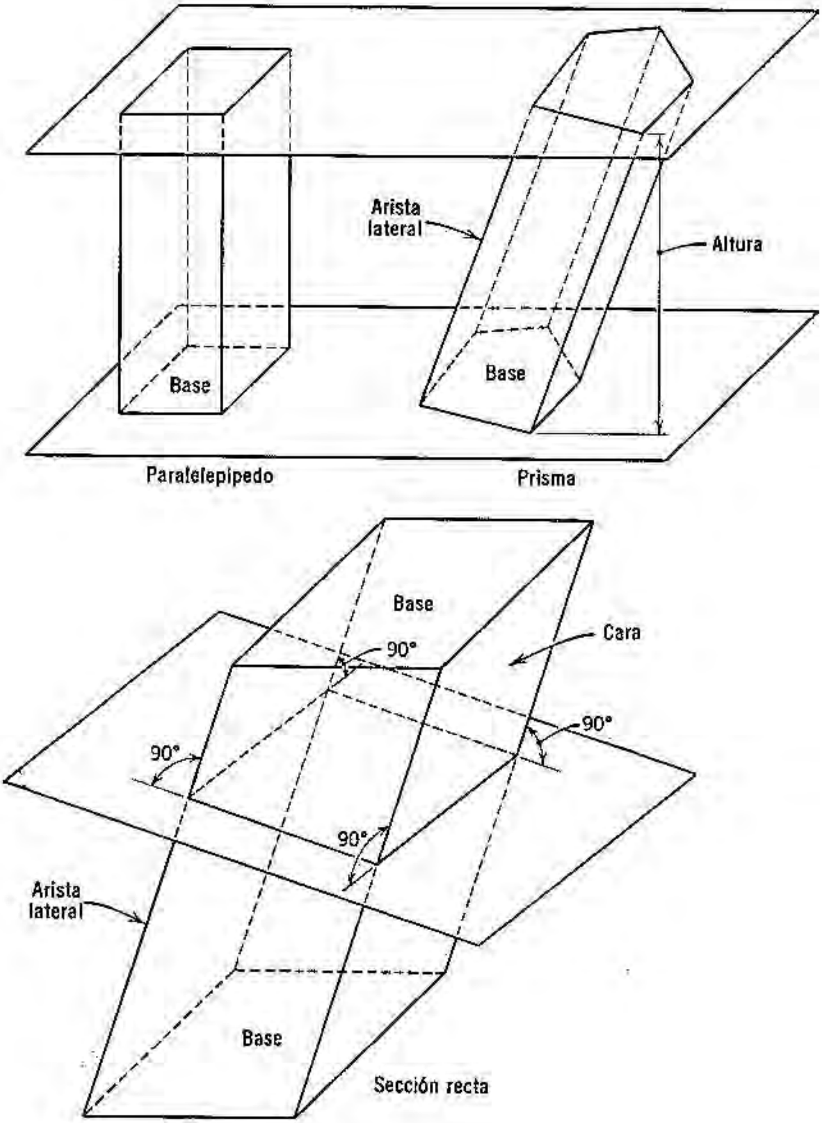


Figura 25

Entonces, en general, para un prisma tenemos

T = (perímetro de una sección recta) $\times$ (arista lateral) + (área de las bases),

$S =$ (perímetro de una sección recta) $\times$ (arista lateral)

y

$V =$ (área de una sección recta) $\times$ (arista lateral)

$V =$ (área de la base) $\times$ (altura)

9.10b Cilindro circular

Un *cilindro circular recto* se parece a un prisma cuyas bases son secciones rectas excepto que las bases son círculos en lugar de polígonos. Las fórmulas para los prismas son también ciertas para el cilindro circular recto, pero pueden ser establecidas en un lenguaje que incluye a π (ver figura 26).

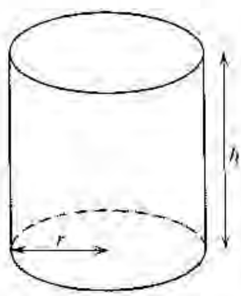


Figura 26

Si r es el radio de la base y h la altura, entonces (ver sección 9.13a) resulta que:

$$S = 2\pi rh,$$
$$T = 2\pi rh + 2\pi r^2,$$
y
$$V = \pi r^2 h.$$

9.10c Pirámide

Una *pirámide* es una figura tridimensional cuya base es un polígono y cuyas caras laterales son triángulos. Si la base es un polígono regular y la recta que va del vértice de la pirámide al centro de la base es perpendicular a la base, entonces la pirámide se llama *pirámide regular* (ver figura 27).
Para una pirámide regular, figura 27. Entonces se tiene aquí que:

$V = \frac{1}{3}$ (área de la base) $\times$ (altura),

y $S = \frac{1}{2}$ (perímetro de la base) $\times$ (altura oblicua).

Para la pirámide en general la fórmula para el volumen sigue siendo válida, pero la fórmula aquí dada para el área S de la superficie lateral no lo es.

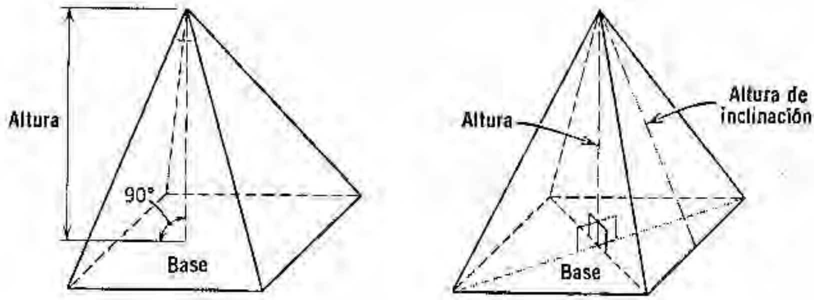


Figura 27

9.10d Cono

El *cono circular recto* se parece en su desarrollo a una pirámide regular excepto que la base es un círculo. Las fórmulas para la pirámide regular también sirven para el cono.

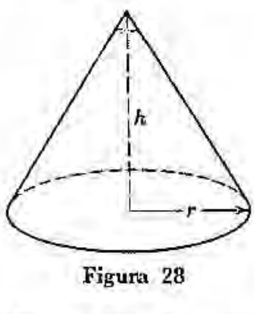


Figura 28

Como con el cilindro, podemos expresar estas fórmulas en términos de π, a saber (figura 28):

$$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2},$$
y $$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Un *tronco* de una pirámide regular o de cono, o una pirámide truncada y un cono truncado, están ilustrados en la figura 29. Dados b y b' indicando las áreas de las bases, y h la altura, entonces

$$S = \tfrac{1}{2} \text{ (suma de perímetros de bases)} \times \text{ (altura oblicua)},$$
y $$V = \tfrac{1}{3}h(b + b' + \sqrt{b \cdot b'}).$$

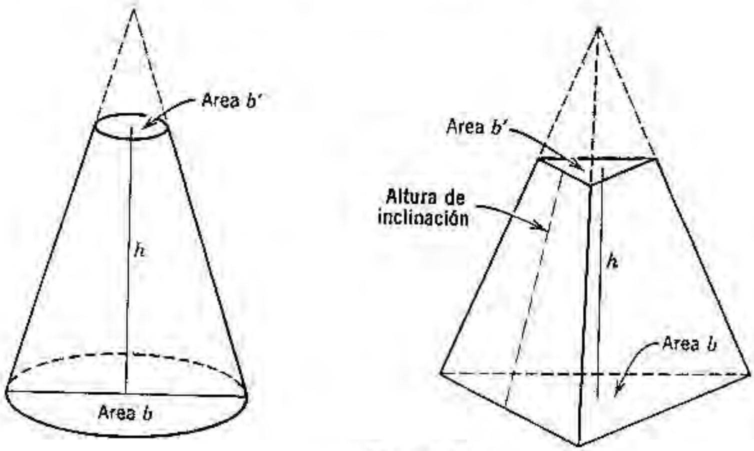


Figura 29

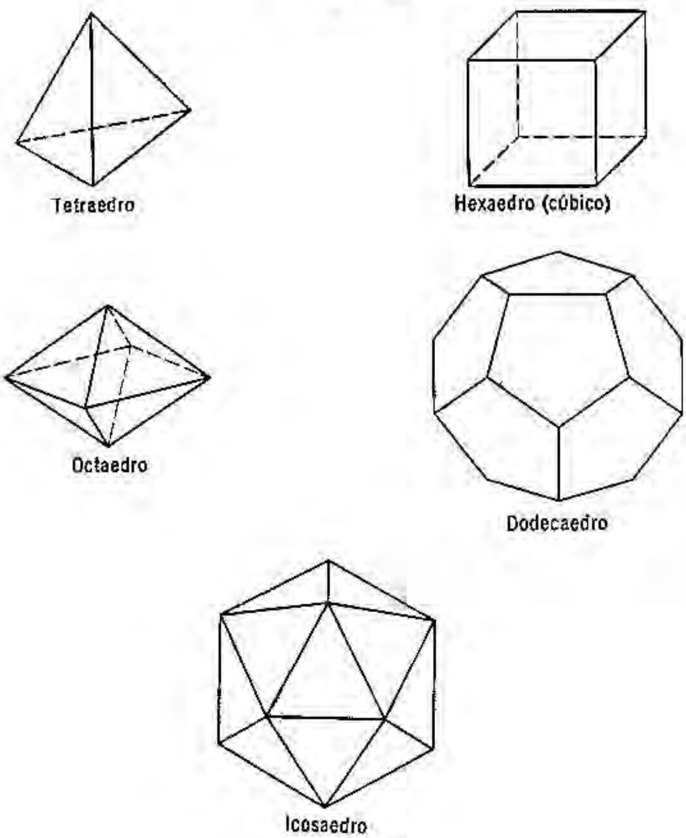


Figura 30

9.10e Poliedro regular

Un *poliedro regular* es aquel cuyas caras son polígonos regulares congruentes.

Hay solamente cinco (excepto por el tamaño) *poliedros regulares*, como se muestra en la figura 30.

Aunque el argumento que se requiere para demostrar que hay cinco y solamente cinco poliedros regulares no es difícil, no se dará aquí. (consultar: *What is Mathematics?* por Courant and Robbins).

Tabla 1 **Poliedros Regulares**

"a" indica la longitud de una arista

Nombre	Naturaleza de la superficie	Area total	Volumen
Tetraedro	4 triángulos	$1.73205a^2$	$0.11785a^3$
Hexaedro	6 cuadrados	$6.00000a^2$	$1.00000a^3$
Octaedro	8 triángulos equiláteros	$3.46410a^2$	$0.47140a^3$
Dodecaedro	12 pentágonos	$20.64573a^2$	$7.66312a^3$
Icosaedro	20 triángulos equiláteros	$8.66025a^2$	$2.18170a^3$

9.10f Esfera

Para una *esfera* (ver figura 31), sean r el radio y d el diámetro; entonces,

$$S = 4\pi r^2 = \pi d^2,$$

y $$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{6}\pi d^3.$$

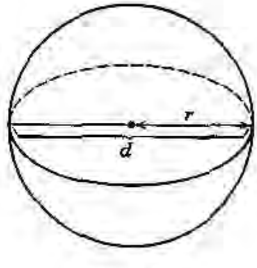


Figura 31

9.10g Toro circular

Consideramos un segmento de recta $\overline{OA}$, de longitud a y un círculo con centro O y radio r, siendo $r < OA$. Fijando el punto A, hagamos que el segmento de recta conjuntamente con el círculo giren en un plano perpendicular al plano del círculo. El círculo se *desliza* y genera una figura llamada un *toro circular* (ver figura 32).

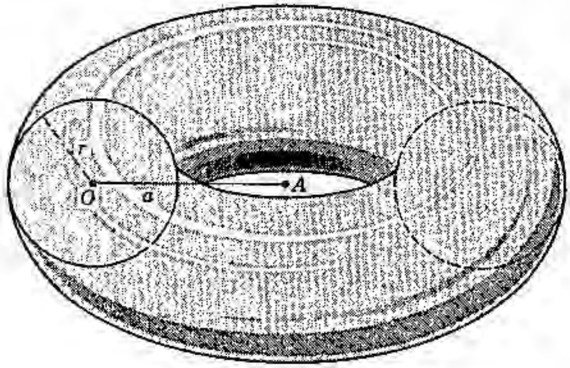


Figura 32

Para el toro circular valen:

$$S = 4\pi^2 ar$$

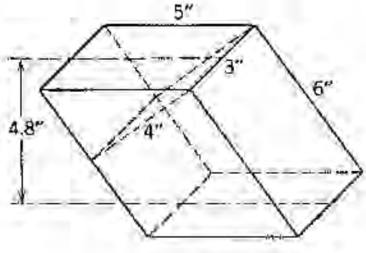
y $$V = 2\pi^2 ar^2.$$

Ejercicios 9.10

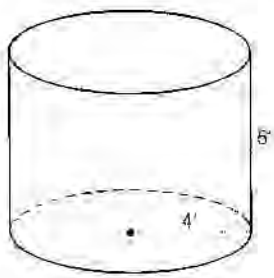
1. Encontrar el volumen y el área de la superficie total de los sólidos rectangulares de dimensiones siguientes:

   (a) 4 pulgadas por 5 pulgadas por 12 pulgadas.
   (b) 3.5 pies por 7.2 pies por 8.6 pies.
   (c) 3 pies por 5 pies por 18 pulgadas.
   (d) $4\frac{1}{2}$ yardas por $2\frac{2}{3}$ yardas por 8 yardas.

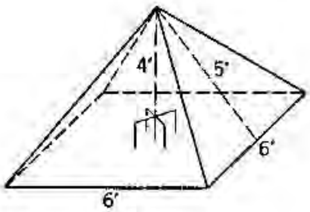
2. Encontrar el área de la superficie total, el área de la superficie lateral, y el volumen de las siguientes figuras:



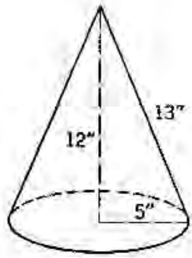
(a)



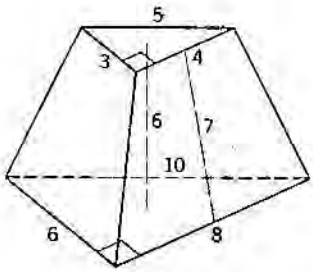
(b)



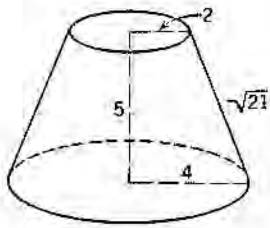
(c)



(d)



(e)



(f)

3. Encontrar el área de la superficie y el volumen de las esferas cuyos radios son:

(a) 3 pulgadas (b) 4 pies

(c) 14 pulgadas (d) $4\frac{1}{2}$ cm.

(Usar 3.14 ó $\frac{22}{7}$ como una aproximación de π.)

9.11 FIGURAS PLANAS SEMEJANTES

En esta sección discutiremos qué es lo que se entiende por *figuras planas semejantes,* con el objetivo primario de usar triángulos rectángulos semejantes en mediciones indirectas.

Se dice que dos triángulos son *semejantes* si los ángulos correspondientes son iguales en medida y los lados correspondientes son proporcionales en medida. Esta relación se simboliza por $\sim$ (ver figura 33).

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$m\angle A = m\angle A', \quad m\angle B = m\angle B', \quad m\angle C = m\angle C'.$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \quad \text{o} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}, \text{ etc.}$$

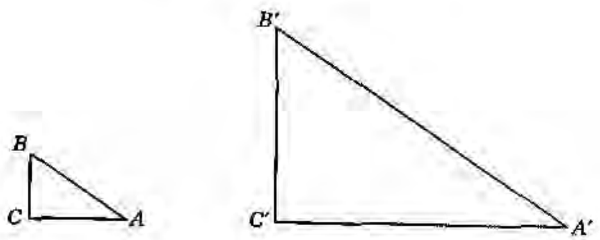


Figura 33

Dos polígonos son *semejantes* si sus ángulos correspondientes son iguales en medida y sus lados correspondientes son proporcionales en medida (ver figura 34).

Los polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ son semejantes, y así:

$$m\angle A = m\angle A', \quad m\angle B = m\angle B', \quad m\angle C = m\angle C',$$
$$m\angle D = m\angle D', \quad m\angle E = m\angle E'.$$
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

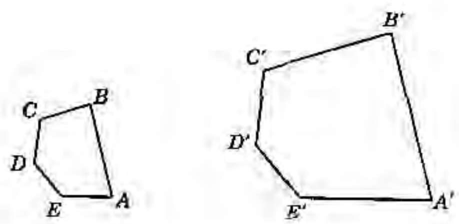


Figura 34

Como un caso especial, podemos demostrar que si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son semejantes. Este criterio sencillo para determinar la semejanza de los triángulos rectángulos conduce a su uso en las mediciones indirectas.

Ejemplo 1

Un lago está situado entre los puntos A y C (figura 35). El problema es determinar la distancia de A a C usando las propiedades de los triángulos rectángulos semejantes.

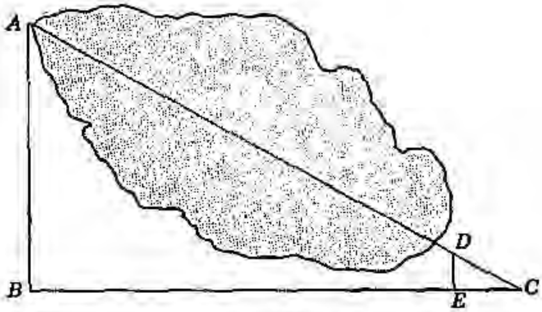


Figura 35

Primero localizamos un punto B tal que $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ formen angulo recto, y escogemos un punto D sobre $\overline{AC}$ y un punto E sobre $\overline{BC}$ tales que $\overline{DE}$ sea perpendicular a $\overline{BC}$. Entonces los triángulos ABC y DEC son triángulos rectángulos semejantes porque $\angle C$ es común a ambos. Medimos y encontramos $EC = 4$ unidades de longitud, $BC = 52$ unidades de longitud, y $DC = 5$ unidades de longitud. De las propiedades de triángulos semejantes tenemos

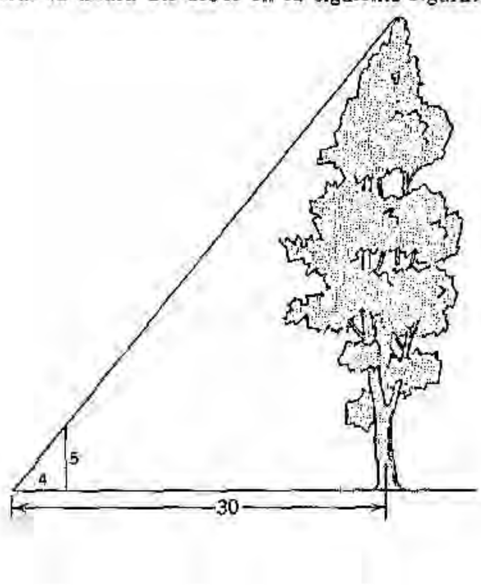
$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}, \qquad \text{o} \qquad \frac{AC}{5} = \frac{52}{4},$$

por lo tanto

$$AC = \frac{260}{4} = 65 \text{ unidades de longitud.}$$

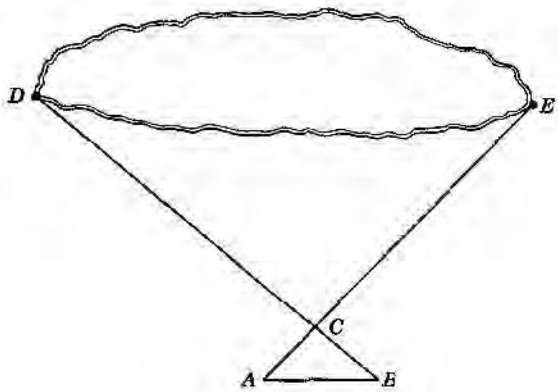
Ejercicios 9.11

1. Encontrar la altura del árbol en la siguiente figura:

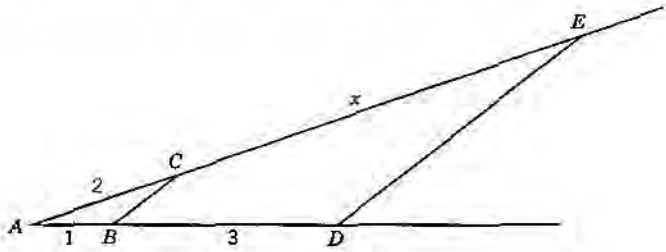


2. Un hombre de 6 pies de altura forma una sombra de 9 pies cuando está parado a 24 pies de un punto situado en la parte inferior de un farol. ¿Qué altura tiene el farol?

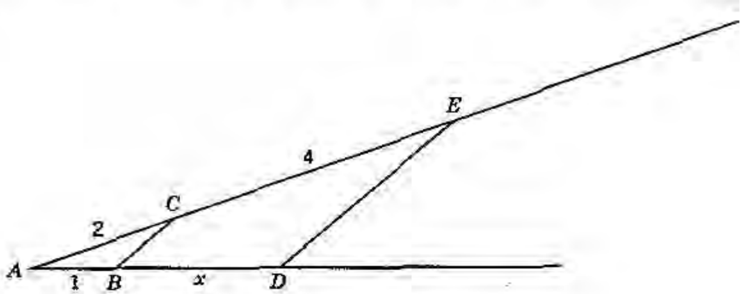
3. En el siguiente diagrama, si $\triangle ABC \sim \triangle DCE$, y $AC = 12$ yardas, $AB = 20$ yardas, y $CE = 100$ yardas, encontrar DE, la longitud del lago.



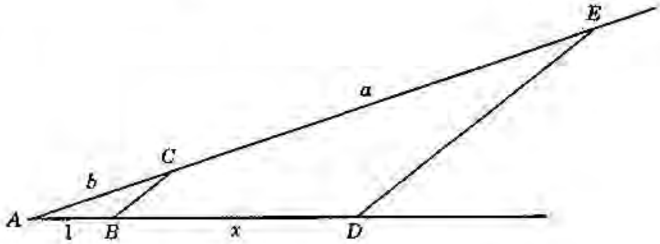
4. En el siguiente diagrama, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Encontrar x.



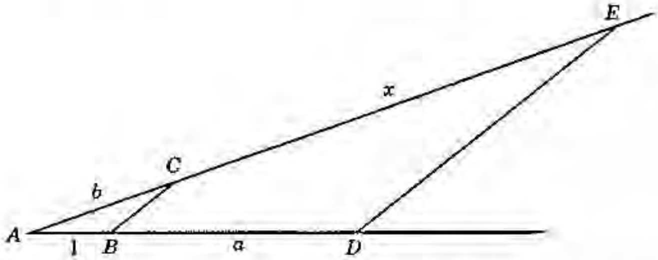
5. En el siguiente diagrama, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Encontrar x.



6. En el siguiente diagrama, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Encontrar x.



7. En el siguiente diagrama, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Encontrar x.



8. Examinar los resultados de los problemas 4, 5, 6 y 7 y dar una interpretación general geométrica de la multiplicación y división.

9. Dar una interpretación geométrica de la adición y sustracción.

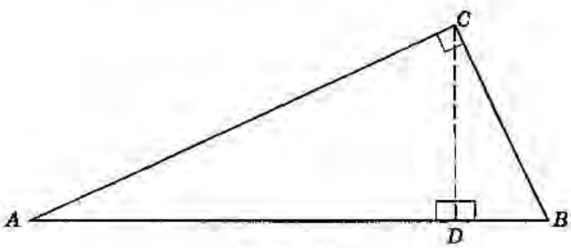


Figura 36

9.12 EL TEOREMA DE PITAGORAS

Teorema de Pitágoras. El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de longitud de los catetos.

Antes de dar demostración alguna del teorema de Pitágoras estableceremos un teorema acerca de los triángulos rectángulos para el cual el lector puede suministrar una demostración.

> **Teorema.** La altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo forma dos triángulos que son semejantes al triángulo dado (ver figura 36).

$$\triangle ADC \sim \triangle ABC \sim \triangle BDC$$

De esto y usando las propiedades de los triángulos semejantes tendremos (ver figura 37):

1. La longitud de la altura $\overline{CD}$ a la hipotenusa es una media proporcional entre las longitudes de los dos segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ formados sobre la hipotenusa. (*Media proporcional*: x es una media proporcional entre a y b si $a/x = x/b$ o $x^2 = ab$).

2. La longitud del cateto $\overline{AC}$ de un triángulo rectángulo ABC es la media proporcional entre la longitud de la hipotenusa $\overline{AB}$ y la longitud de un segmento adyacente $\overline{AD}$ en la hipotenusa formado por la altura $\overline{CD}$ desde el ángulo recto (ver figura 37). Así es:

$$(1)\ \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \qquad (2)\ \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \qquad \text{o} \qquad AC^2 = AD \cdot AB$$

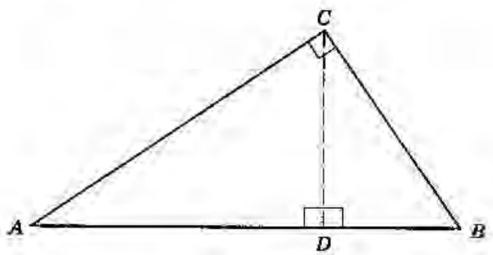


Figura 37

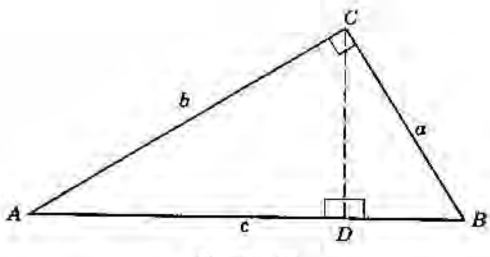


Figura 38

Ahora consideremos la demostración del teorema de Pitágoras.

Sea $\overline{CD}$ la altura desde el ángulo recto a la hipotenusa $\overline{AB}$ (ver figura 38). Sean AD, DB, a, b y c son las longitudes de $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, y $\overline{AB}$, respectivamente. Entonces $AD/b = b/c$, o $AD = b^2/c$, y $DB/a = a/c$, o $DB = a^2/c$. Pero $AD + DB = c$. Por sustitución:

$$AD + DB = c,$$

o $$\frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c} = c;$$

por lo tanto, $b^2 + a^2 = c^2$ o $a^2 + b^2 = c^2$.

Interpretando el teorema de Pitágoras en términos de "área" (figura 39), tenemos:

Para todo triángulo rectángulo el cuadrado sobre la hipotenusa tiene un área igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los otros lados (ver sección 7.13).

Para una demostración del teorema basada en esta interpretación, consideramos el diagrama de la figura 40.

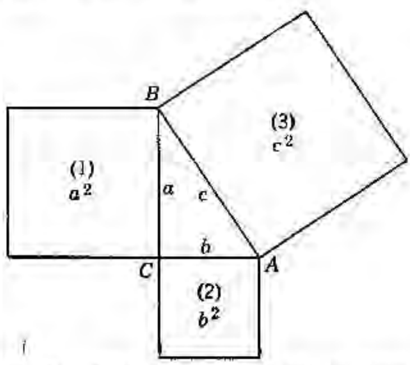


Figura 39. Area (1) + Area (2) = Area (3)

El área del cuadrado mayor de lado $a + b$ es igual al área del cuadrado pequeño de lado c más el área de los cuatro triángulos rectángulos con lados a y b.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= c^2 + 4(\tfrac{1}{2}ab)\\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab\\ a^2 + b^2 &= c^2.\end{aligned}$$

Una demostración con áreas que puede usarse a nivel elemental de enseñanza implica cortes y superposición. Primero puede construirse el diagrama mostrado en la figura 41 en relación a cualquier triángulo rectángulo ABC.

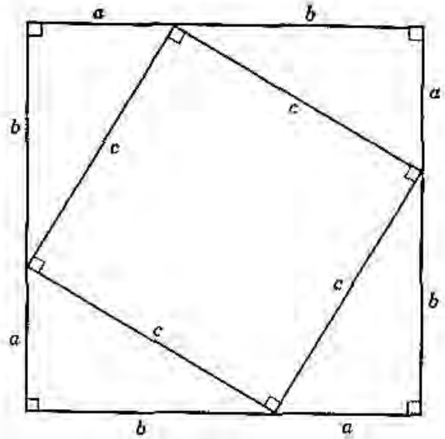


Figura 40

Cortar la figura sobre la recta *DABE* y comparar las dos secciones por superposición. Haciéndolo cuidadosamente, observaremos que las áreas son idénticas. Considerando áreas iguales por pares en los lados opuestos de esta recta y "restando" de las áreas iguales originales, obtenemos:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

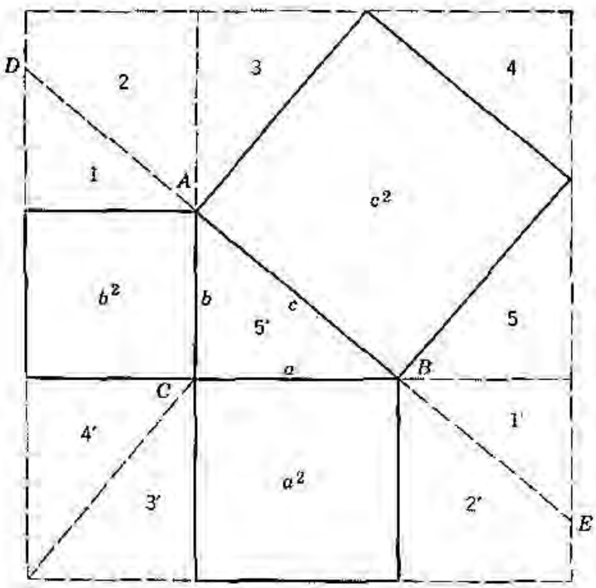


Figura 41

Se advierte al lector que esto no es una "demostración". Es simplemente una evidencia, para aumentar veracidad a la exposición del teorema.

Como ejemplo de que "demostrar" por corte y acomodamiento puede ser engañoso, consideremos la figura 42.

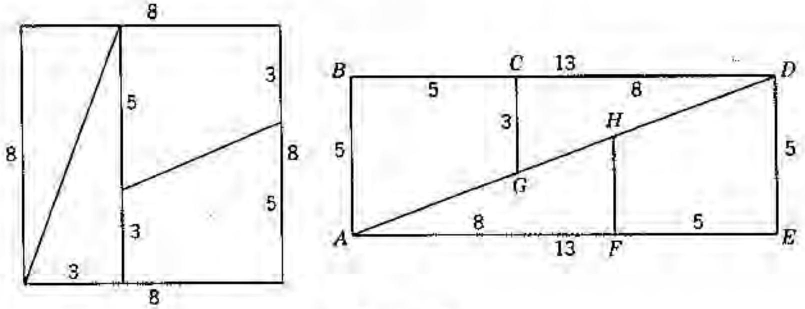


Figura 42

El cuadrado es 8 por 8, por lo tanto tiene área 64. El rectángulo es 5×13, por lo tanto tiene área 65. ¿Dónde está la unidad adicional de área? Antes de leer lo siguiente, vea si usted puede desarrollar una explicación.

Los ángulos en C y F son ángulos rectos, lo que significa que el "ajustamiento" a lo largo de la línea $\overline{HF}$ y $\overline{CG}$ es perfecto. Esto deja únicamente a la diagonal $\overline{AD}$ como un posible lugar para que la unidad cuadrada extra se oculte. Puede ser que $\overline{AGHD}$ no sea una línea recta como parece ser, y debemos investigar los ángulos BAF y CDE para estar seguros de que son ángulos rectos.

Usaremos las propiedades de los triángulos semejantes. Sabemos que $\overline{AFE}$ es una línea recta. ¿Por qué? Observando la figura vemos que $\overline{HF}$

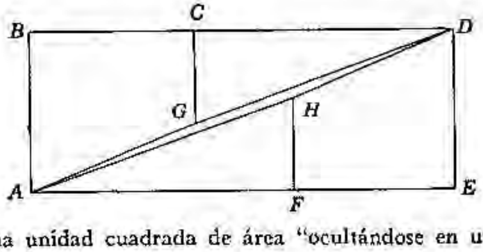


Figura 43. Una unidad cuadrada de área "ocultándose en una hendidura"

es paralela a $\overline{DE}$, y si $\overline{AGHD}$ es una línea recta, entonces $\triangle AFH \sim \triangle AED$. Si estos triángulos son semejantes, entonces sus lados correspondientes son proporcionales. Pero $8/3 \neq 13/5$; por lo tanto, estos triángulos no son semejantes. Si los triángulos no son semejantes entonces $\overline{AGHD}$ no es una línea recta. Un ligero quiebre en la línea en G y H responde de la unidad de área extra (ver figura 43).

Ejercicios 9.12

1. Encontrar el área de un cuadrado inscrito en un círculo de radio:

   (a) 1 pulgada (b) 5 pies

2. Encontrar el área de un polígono regular de seis lados (hexágono regular) inscrito en un círculo de radio:

   (a) 10 pulgadas (b) 68 pies

3. Encontrar el área de un triángulo equilátero inscrito en un círculo de radio:

   (a) 10 pulgadas (b) 18 pulgadas

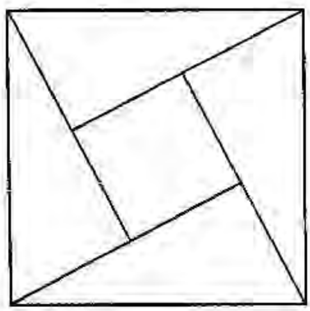
4. En un triángulo rectángulo de 30°, 60° y 90°, el lado opuesto al ángulo de 30° es igual a la mitad de la hipotenusa.

   (a) ¿Cuál es el área de un paralelogramo cuyos lados son 20 y 16 y comprenden un ángulo de 30°?
   (b) ¿Cuál es el área de un paralelogramo cuyos lados son 20 y 16 y comprenden un ángulo de 60°?

5. (a) La longitud de la diagonal de un cuadrado es 18. Encontrar su área.
   (b) La longitud de la diagonal de un cuadrado es 50. Encontrar su área.

6. Demostrar que si dos triángulos son semejantes, la razón de sus áreas es igual a la razón de los cuadrados de las longitudes de dos lados correspondientes.

7. Una variante en la demostración del Teorema de Pitágoras basado en el concepto del área puede ser desarrollada a partir de la siguiente figura:



Marque la figura y complete la prueba.

9.13 EL NUMERO π

El símbolo π es considerado con frecuencia erróneamente. Mucha gente piensa que es algo que se usa en aritmética para representar $3\frac{1}{7}$, ó 3.1416, y se sorprenden al aprender que π es un símbolo para un número particular, en la misma forma que 3 y $\sqrt{5}$ son símbolos para números. π es un *número irracional* y como tal será un *decimal infinito no periódico*. Los números simbolizados por $3\frac{1}{7}$, 3.14 y 3.1416 son *aproximaciones racionales* de π.

El número simbolizado por la letra griega π tiene una historia muy interesante. Presentaremos después una breve cronología de este número en esta sección. Primero veremos si podemos establecer la *existencia* de dicho número.

9.13a La existencia de π y el área de una región circular

Consideremos dos círculos *cualesquiera* con centros O y O' de radios r y r', respectivamente, y $r < r'$ (ver figura 44).

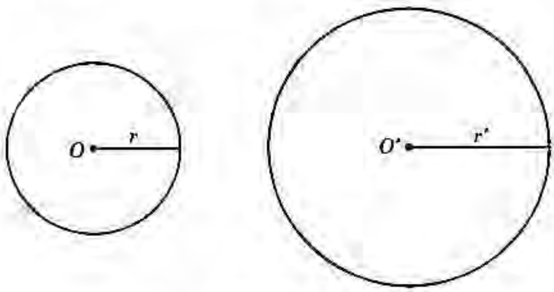


Figura 44

Por simplicidad reconstruimos el círculo de centro O' en forma tal que sea concéntrico con el círculo de centro O, es decir, tienen el mismo centro. Del centro común O dibujamos una línea que corta el círculo pequeño en A y al círculo grande en A'. Desde O dibujamos una segunda línea, diferente de $\overline{OA'}$, cortando el círculo pequeño en B y al círculo mayor en B'. Dibujamos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$. Es fácil demostrar que $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$ (ver figura 45). Usando las propiedades de triángulos semejantes, tenemos

$$\frac{AB}{AO} = \frac{A'B'}{A'O}$$

Pero esto es una igualdad de razones de números reales; por lo tanto, para cualquier número n es

$$\frac{(n)\,(AB)}{AO} = \frac{(n)\,(A'B')}{A'O},$$

o $$\frac{(n)\,(AB)}{(2)\,(AO)} = \frac{(n)\,(A'B')}{(2)\,(A'O)}.$$

Si el círculo fuese dividido en n arcos y triángulos iguales formados por las cuerdas dibujadas y los radios, entonces $(n)\,(AB)$ será el perímetro del polígono inscrito y $(2)\,(AO)$ será el diámetro del círculo pequeño. Similarmente $(n)\,(A'B')$ y $(2)\,(A'O)$ será el perímetro del

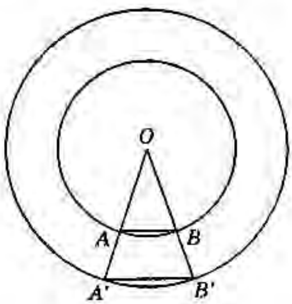


Figura 45

polígono inscrito y el diámetro del círculo mayor respectivamente. Entonces la ecuación

$$\frac{(n)\,(AB)}{(2)\,(AO)} = \frac{(n)\,(A'B')}{(2)\,(A'O)}$$

significa que la razón del perímetro de un polígono regular inscrito, de n lados, al diámetro del círculo es la misma sin importar el tamaño del círculo.

Ahora suponemos que n empieza a ser muy, muy grande. El perímetro de los polígonos inscritos viene acercándose a la longitud de la circunferencia. De hecho, la menor de las cotas superiores de la sucesión de los números reales que indican los perímetros en la longitud de la circunferencia del círculo (ver sección 9.8). Entonces tendremos

$$\frac{\text{circunferencia del círculo pequeño}}{\text{diámetro del círculo pequeño}} = \frac{\text{circunferencia del círculo mayor}}{\text{diámetro del círculo mayor}}.$$

Esto significa que la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro es la misma, independiente del tamaño del círculo, es decir, esta razón es una constante. El nombre dado a esta *constante* es π (se dice "*pi*").

Definición 9.13a. El número π es la razón de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro.

Si c representa la longitud de la circunferencia de cualquier círculo y d su diámetro, entonces

$$\pi = \frac{c}{d}.$$

Esta demostración de la existencia de π también ayuda a la explicación razonable de las fórmulas $c = 2\pi r$ o $c = \pi d$ para la circunferencia y $A = \pi r^2$ para el área de un círculo de radio r. Recordar la fórmula desarrollada para el área de un polígono regular con n lados de longitud s, o sea

$$A = (\tfrac{1}{2}ap) \qquad \text{o} \qquad A = \tfrac{1}{2}a(ns),$$

donde a indica el apotema y p el perímetro ns. Cuando n es muy grande, el apotema a se aproxima al radio r del círculo y el perímetro ns se aproxima a la longitud de la circunferencia, c. De hecho, la menor de las cotas superiores de las sucesiones que representan a a y a p son respectivamente r y c. Entonces

$$A = \tfrac{1}{2}(rc).$$

Pero, por la definición de π, es $c = \pi d$ o $c = 2\pi r$, y así resulta

$$A = \tfrac{1}{2}r(2\pi r),$$

o $\quad A = \pi r^2.$

9.13b Cálculo de π

El método clásico para calcular una aproximación numérica de π hace uso de polígonos regulares inscritos y circunscritos. Puesto que $\pi = c/d$, la longitud de la circunferencia de diámetro unitario es π. El cálculo puede iniciarse usando un triángulo equilátero o un cuadrado como el polígono inicial; entonces, duplicando el número de lados obtenemos polígonos de 6, 12, 24, 36,... u 8, 16, 32, 64,... lados respectivamente. Examinemos el procedimiento, usando el cuadrado como el polígono inicial.

Como primera aproximación tenemos (ver figura 46):

$$2\sqrt{2} < \pi < 4,$$

o

$$2.82 < \pi < 4.$$

Para la segunda aproximación duplicamos el número de lados del polígono inscrito y del polígono circunscrito (ver figura 47). La longitud de un lado del octágono inscrito es

$$s = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{4-4\sqrt{2}+2}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

El perímetro es entonces $8\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$, o aproximadamente

$$4\,(0.7654) \cong 3.06.$$

Para el polígono circunscrito de lado s se tiene

$$\frac{s'/2}{\frac{(\sqrt{2-\sqrt{2}})}{4}} = \frac{1/2}{x},$$

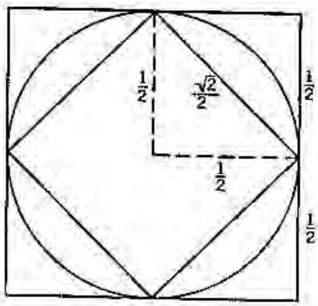


Figura 46

de donde

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)^2}.$$

Resolviendo para s' y usando raíces cuadradas aproximadas, tenemos:

$$\frac{s'}{2} \cong 0.2071.$$

Entonces, el perímetro del polígono circunscrito es

$$(16)\left(\frac{s'}{2}\right) \cong 16(0.2071) \cong 3.31.$$

Por lo tanto, para nuestra segunda aproximación tenemos que

$$3.06 < \pi < 3.31.$$

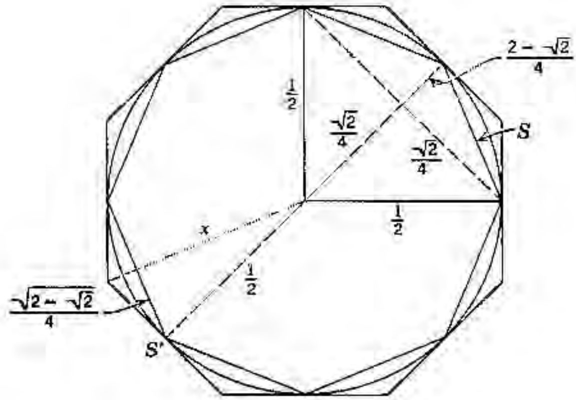


Figura 47

Este procedimiento puede continuarse indefinidamente. Cálculos sucesivos dan aproximaciones más cercanas a π.

El método de usar polígonos inscritos se llama "método clásico" para calcular π. Esto data de la época de Arquímedes, aproximadamente 240 A.C. (ver sección 9.13c y libro de Eves).

Un método para calcular π que comprende el concepto de área está basado en el hecho que un círculo de radio 1 tendrá por área π.

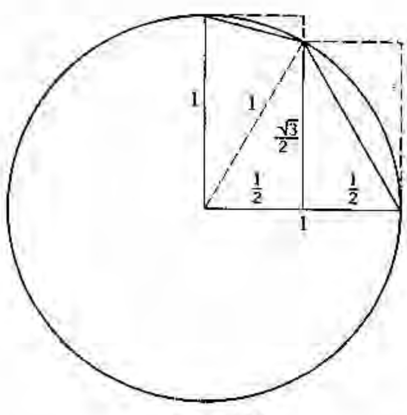


Figura 48

Considerando únicamente un cuadrante para simplificar los cálculos, tenemos del trapecio y el triángulo nuestra primera aproximación "inferior" al área del círculo (ver figura 48).

4 (área del trapecio + área del triángulo)

$$= 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= 4\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = 4\left(\frac{2 + 2\sqrt{3}}{8}\right),$$

que es aproximadamente 2.732.

Usando los rectángulos tenemos nuestra primera aproximación "superior":

$$4\left[1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 2 + \sqrt{3},$$

que es aproximadamente 3.732 .
Entonces,

$$2.732 < \pi < 3.732.$$

Dividiendo el radio en cuatro partes iguales tenemos tres trapecios y un triángulo para aproximar el área (ver figura 49).

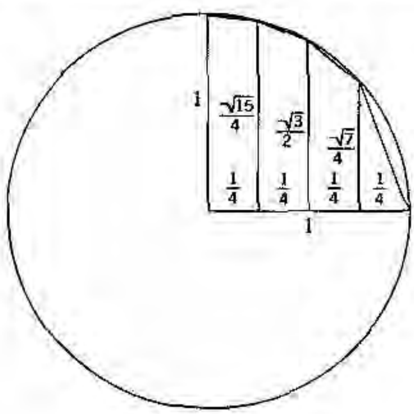


Figura 49

Aproximación "inferior":

$$4\left[\frac{1}{8}\left(\frac{4 + \sqrt{15}}{4}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{15} + 2\sqrt{3}}{4}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\left(\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{7}}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4+\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{4} + \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(4 + 2\sqrt{15} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{7}),$$

que es aproximadamente 2.9957.

La aproximación "superior" es

$$4\left[1\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$
$$= 1 + \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{4},$$

que es aproximadamente 3.4957.

Nuestra segunda aproximación es

$$3.00 < \pi < 3.50.$$

Como con los polígonos inscritos, este procedimiento puede continuarse indefinidamente, y cada cálculo sucesivo nos produce una aproximación más cercana a π.

Hay otros procedimientos geométricos que pueden ser usados en niveles elementales y que no incluyen muchos cálculos. Se han sugerido muchos experimentos en los textos corrientes para dar más información al alumno acerca de π que la sola definición. El más simple consiste en construir un círculo unitario en papel cuadriculado (papel milimétrico) y contar los cuadrados para obtener la aproximación del área. Se dejará esto para el estudiante como un ejercicio.

9.13c Cronología de π

No es exactamente una "cronología" de π en la que fecha por fecha pormenoricemos la historia de π. Es, más bien, una exposición de datos seleccionados en la cronología de π.

Creemos que en la antigüedad la razón de la circunferencia al diámetro de un círculo fue tomada como 3 (ver las referencias bíblicas: Reyes, I, 7:23; II Crónicas, 4:2). El papiro de Rhind nos da $\pi = (4/3)^4 = 3.1604\ldots$. Se cree que la primera consideración científica la hizo Arquímedes cerca del año 240 A.C. Usando el método clásico, determinó que π estaba entre 223/71 y 22/7. Esto también representa una extraordinaria exactitud en la aproximación de raíces cuadradas con números racionales.

Aproximadamente 400 años después Ptolomeo de Alejandría en su famosa *Syntaxis Mathematica* desarrolló una tabla de cuerdas de un círculo subtendidas por ángulos centrales de un grado y de medio grado. De aquí, usando un polígono regular inscrito de 360 lados, él obtuvo un valor, dado en notación sexagesimal como 3 8'30". Llevado a lenguaje decimal esto será 377/120 ó 3.1416 redondeando a 4 cifras.

Aproximadamente en el año 480 A.C., Tsu Ch'ung-chih, un Chino, dio la aproximación racional 355/113. En lenguaje decimal éste corresponde a 3.1415929. . . , que es exacto hasta la sexta cifra decimal. Alrededor del 1150 A.C. el matemático hindú Bhaskara dio 3927/1250 como un valor exacto de π, 22/7 como un valor inexacto, y $\sqrt{10}$ para trabajar con el número en cálculos groseros.

A finales del siglo XVI y principios del XVII se efectuaron los siguientes cálculos de π:

François Vieta, un matemático francés, encontró un valor para π correcto hasta la novena cifra decimal por el método clásico, usando polígonos de $6(2^{16}) = 393{,}216$ lados.

Adriaen van Roomen, de los Países Bajos, encontró un valor de π correcto hasta 15 decimales, por el método clásico, usando polígonos que tienen $2^{30} = 1{,}073{,}741{,}824$ lados.

Ludolph van Ceulen, de Alemania, calculó π con 35 cifras decimales por el método clásico, usando polígonos que tienen $2^{62} = 4{,}611{,}686{,}018{,}427{,}387{,}904$ lados. Esto fue considerado como un logro tan extraordinario que por un tiempo en Alemania a esta aproximación se le llamó "número ludolphiano."

Uno se pregunta por qué tanto tiempo y esfuerzo se emplearon en el cálculo de π. Una de las razones podría ser que estos hombres buscaban una sucesión repetida en la aproximación decimal de π. Si hubiese sido encontrada, entonces habrían demostrado que π era un número racional.

Los cálculos posteriores se basaron en series infinitas:

Abraham Sharp—71 cifras correctas, 1699.
De Lagny—112 cifras correctas, 1719.

Toda la especulación sobre π se acabó cuando en 1767 Johann Heinrich Lambert *demostró* que π es irracional. Esto no detuvo a los "calculadores de π"; William Shanks de Inglaterra calculó π con 707 cifras. Por mucho tiempo esto pareció la más fabulosa pieza de cálculo nunca ejecutada. Ocupó a Shanks por más de 15 años. En 1946 D. F. Ferguson, de Inglaterra, encontró errores en el valor de π de Shanks. Publicó un valor correcto de 710 cifras. En el mismo mes J. W. Wrench Jr., de los Estados Unidos, publicó un valor de π con 808 decimales, pero Ferguson encontró un error en la 732a. cifra o lugar decimal. En enero de 1948 publicaron juntos un valor corregido y verificado para π de 808 decimales.

Para concluir este resumen del cálculo de π, llegamos a las calculadoras electrónicas. La ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) de los Laboratorios de Investigación Balística del Ejército de los EE. UU., en Aberdeen, Maryland, aproximadamente en unas *70 horas* dio un valor de π *con 2035 cifras decimales,* coincidiendo con el resultado de Ferguson-Wrench de 808 decimales (compárese con los esfuerzos de Shanks). Para una discusión más reciente referente a π, ver el artículo por R. K. Pathria citado en las referencias.

En las curiosidades relacionadas con π hay varias reglas mnemotécnicas que han sido desarrolladas con el objeto de recordar un número muy grande de cifras decimales para π. En la siguiente, hecha por A. C. Orr, uno debe simplemente reemplazar cada palabra por el número de letras que cada una contiene para obtener el valor correcto de π con 30 cifras decimales.

Now I, even I, would celebrate
In rhymes unapt, the great
Immortal Syracusan, rivaled nevermore
Who in his wondrous lore,
Passed on before,
Left men his guidance
How to circles mensurate.

Otro semejante es:

See, I have a rhyme
Assisting my feeble brain,
Its tasks ofttimes resisting.

Para una cronología completa de π, ver las obras de Eves y Schepler.

Ejercicios 9.13

1. Dibujar un círculo cuyo radio sea de 10 unidades ($\frac{1}{4}$ pulgada) en papel cuadriculado de $\frac{1}{4}$ pulgada cuadrada.

   (a) Marcar todos aquellos cuadrados por los que pasa el círculo.
   (b) Contar todos los cuadrados que están dentro del círculo y que están sin marcar.
   (c) Contar el número de cuadrados marcados.
   (d) Del dibujo descrito obtener alguna conclusión con respecto a π.

2. Calcular la tercera aproximación para π usando el método del "área".

3. Si a es el lado de un polígono regular inscrito en un círculo de radio r, entonces

$$b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

es el lado de un polígono regular inscrito que tiene el doble de número de lados.

   (a) Usar esta información para calcular la tercera aproximación de π con un polígono inscrito de 16 lados.

4. En la Edad Media, la aproximación común para la raíz cuadrada fue

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a+1}.$$

Tomando $n = 10 = 3^2 + 1$, muestre por qué $\sqrt{10}$ fue usado frecuentemente para π.

5. Encontrar el perímetro de un polígono regular de 12 lados inscrito en un círculo de radio 1, esto es, encontrar una aproximación para π.

6. ¿Qué implica la irracionalidad de π con respecto a su representación decimal?

7. Un *radián* es la medida del ángulo central en un circulo subtendido por un arco igual en longitud al radio del círculo.
   (a) Si θ es la medida de un ángulo central de un círculo dado en radianes, demostrar que la longitud del arco subtendido por este ángulo está dado por $r\theta$.
   (b) ¿Cuántos radianes son equivalentes a 360°?

9.14 INTRODUCCION A LA GEOMETRIA DE COORDENADAS

Hemos usado el concepto de la recta numérica para fortalecer el concepto mismo de número. Hay también una relación interesante entre el concepto de recta numérica y la geometría. Cuando los términos "punto" y "línea" se usan en la geometría plana, son objetos no definidos dotados de ciertas propiedades determinadas por los axiomas. Para tener alguna idea intuitiva de cómo deben ser interpretados estos términos en el mundo físico, se usan expresiones tales como "un punto se puede considerar como el extremo de un alfiler" o "un segmento de línea recta como el canto de una regla". Postulados tales como "existe una y solamente una línea recta que pasa por dos puntos diferentes" y "dos líneas diferentes son paralelas o se encuentran en un punto", nos permiten afinar nuestro concepto de "punto" y "línea". El "plano" puede ser discutido, no rigurosamente, en la misma forma, y precisado mediante un conjunto de postulados. Puesto que los puntos y líneas son indefinibles, podríamos tener una geometría en la cual la "línea" es la recta numérica de los enteros o la línea numérica de los números racionales. Discutimos la *recta numérica* para los *enteros*, los *números racionales* y los *números reales*. La "recta" numérica para los enteros debe ser representada como el conjunto de puntos "a igual distancia" uno de otro y sin puntos entre un par consecutivo de los mismos: *

$$\ldots -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots$$

* Esto es sólo intuitivo y no muy exacto. Se podría eliminar la mención *auxiliar* (pero *innecesaria*) de "distancia". La "recta" en este caso es sólo el *conjunto de "puntos"* en correspondencia biunívoca con el conjunto de los enteros. (N. del T.)

La "recta" numérica racional es difícil de representar debido a que los números racionales son *densos*; esto es, entre dos números racionales cualesquiera pero distintos hay un número infinito de números racionales diferentes. Además, el conjunto de números racionales *no es completo*. Esto implica que hay "huecos" en la "recta" de números racionales.

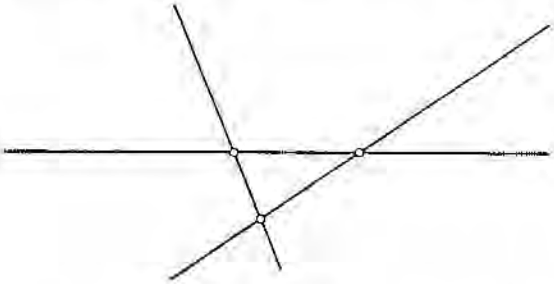


Figura 50

La recta de los números reales es la recta "continua" que usualmente puede visualizarse. Es la recta a la que nos referimos en la geometría plana. Indicamos en el problema 7, ejercicio 8.2a, que la *"recta" de números racionales* tiene demasiados "huecos" para las finalidades de la geometría ordinaria. Es posible tomar dos "rectas" de números racionales en un plano que no sean paralelas ni tampoco tengan un punto en común (ver figura 50).

9.14a El plano euclidiano

La representación gráfica de $R \times R$, donde R es el conjunto de números reales, se llama el *plano Euclidiano*. Al igual como marcamos los puntos de la recta numérica real con números reales, así también marcaremos los puntos en el plano con los pares ordenados de $R \times R$. Usamos el par ordenado (x, y) para indicar un par ordenado arbitrario de números reales y nos referimos a él como al "punto (x, y)" en la representación geométrica. Para establecer esta correspondencia biunívoca entre el conjunto de pares ordenados de números reales y los puntos en el plano, escogemos un par de líneas perpendiculares (usualmente horizontal y vertical) y las llamamos "*ejes*" del sistema. La línea horizontal se llama "eje x" y la línea vertical "eje y". Su punto de intersección se llama "origen" y el par ordenado $(0, 0)$ corresponde a este punto. Los pares ordenados $(x, 0)$ se hacen corresponder a los puntos en el "eje de las x" en la misma forma como los números reales x se hacen corresponder a los puntos en la recta numérica real. Los pares ordenados $(0, y)$ se hacen corresponder a los puntos en el eje y en forma similar, con la dirección "hacia arriba" considerada como la dirección positiva.

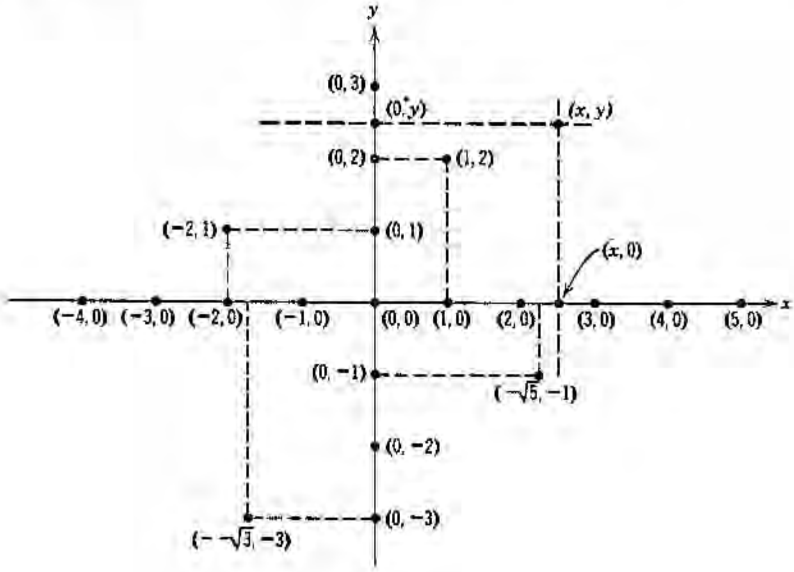


Figura 51

Obtenemos el punto correspondiente al par ordenado (x, y) trazando una recta paralela al eje y a través del punto $(x, 0)$ y otra paralela al eje x a través del punto $(0, y)$. El punto de intersección de estas rectas corresponde al par ordenado (x, y) (ver figura 51).

Ejercicios 9.14a

1. Describir el conjunto $J \times J$, donde J es el conjunto de enteros.

2. Si el conjunto $J \times J$ se representara gráficamente, como en la sección 2.6, indicar cómo sería la representación trazando algunos puntos. Encierre en un círculo aquellos puntos de $J \times J$ cuya distancia al origen $(0, 0)$ sea menor o igual a 5.

3. Representar varios de los puntos en la representación gráfica de $R \times R$ cuyas coordenadas están relacionadas como sigue:

(a) La segunda coordenada es el doble de la primera coordenada, esto es, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ etc... Esta relación puede ser descrita por la ecuación $y = 2x$.
El conjunto de puntos de la representación se llama la *gráfica* de $y = 2x$ y es una línea recta.

(b) La segunda coordenada es igual a la primera. Esta relación puede ser descrita por la ecuación $y = x$.

4. Dibujar los puntos (x, y) cuyas coordenadas están dadas por las siguientes ecuaciones:

(a) $y = 2x + 3$ (b) $y = x + 4$
(c) $y = -x$ (d) $y = -3x + 5$

5. Indicar por medio de sombras el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen lo siguiente:

(a) $x \leqq 3$ (b) $y \leqq 0$
(c) $-3 \leqq x \leqq 3$ (d) $|x| \leqq 3$
(e) $0 \leqq x \leqq 4$ y $0 \leqq y \leqq 3$ (f) $x + y \leqq 5$

9.14b Conjuntos de puntos en el plano

En los problemas 3, 4 y 5, ejercicio 9.14a, discutimos *conjuntos de puntos* especiales del plano. El círculo en la geometría plana puede también ser descrito como un conjunto de puntos. Usualmente lo definimos como el conjunto de puntos que equidistan de un punto dado.

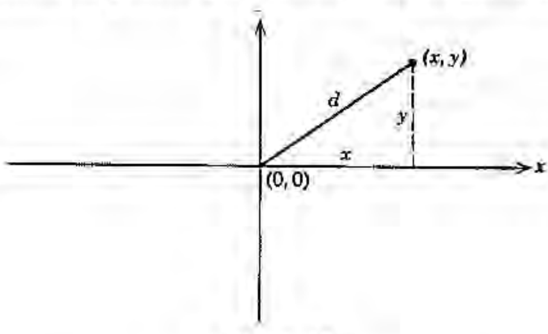


Figura 52

¿Qué podemos decir acerca de las coordenadas de los puntos equidistantes del origen (0, 0)? Dijimos anteriormente que hay muchas formas de definir "distancia". Hubo ejemplos de distancia: "siguiendo las calles" y "a vuelo de pájaro". La "distancia" en la geometría ordinaria es del tipo de esta última, es decir, "distancia en línea recta". Puesto que las coordenadas de un punto en el plano están dadas por el par ordenado de números reales (x, y), podemos calcular la distancia "a vuelo de pájaro" de (0, 0) a (x, y) (ver figura 52).
Si consideramos que d indique la distancia de (0, 0) a (x, y), entonces

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Consideremos el círculo con centro en (0, 0) y de radio 5 (ver figura 53). ¿Cuáles son las coordenadas de algunos de los puntos sobre el círculo? Damos algunos: (0, 5), (0, − 5), (5, 0) y (− 5, 0). Obsérvese que cada uno de estos puntos dista cinco unidades desde el origen sobre cada uno de los ejes.

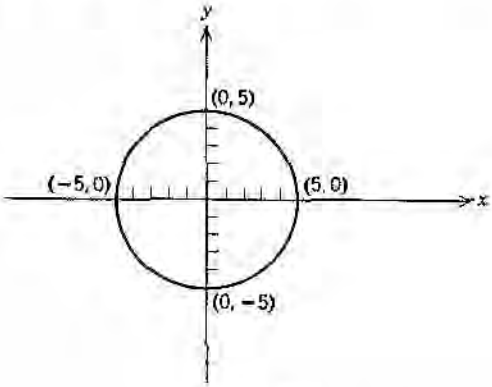


Figura 53

Cualquier otro punto (x, y) sobre el círculo debe también estar a una distancia de 5 unidades del origen, esto es, sus coordenadas deben satisfacer la relación

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5.$$

Podemos escribir esta ecuación sin el radical, elevando al cuadrado ambos miembros. Obtendremos la ecuación cuya gráfica es un círculo de radio 5 con centro en el origen (figura 54):

$$x^2 + y^2 = 25.$$

La relación entre el álgebra de números reales y el estudio de conjuntos de puntos del plano (plano geométrico) conduce a la investigación de la geometría por métodos analíticos. Esto formalmente se llama

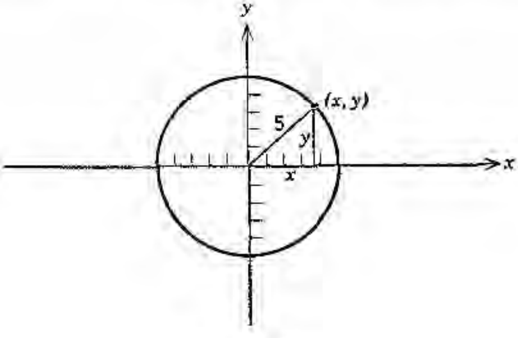


Figura 54

geometría analítica, y el desarrollo de los conceptos que comprende están fuera del objeto de este libro. (Ver cualquier libro reciente de introducción a las matemáticas a nivel de enseñanza preparatoria).

Ejercicios 9.14b

1. (a) ¿Qué distancia hay entre el punto (5, 12) y el punto (0, 0), tomando la distancia en línea recta?
   (b) ¿Qué distancia hay entre el punto (− 12, 5) y el punto (0, 0), tomando la distancia en línea recta?
   (c) Dibujar estos puntos y otros dos puntos cuya distancia de (0, 0) sea la misma que la de los puntos en (a) y (b).
   (d) Escribir la ecuación que describe el conjunto de *todos* los puntos cuya distancia de (0, 0) es la misma que en (a), (b) y (c).

2. Escribir la ecuación de un círculo de radio r, con centro en: (a) el origen, (b) el punto (a, b).

3. (a) ¿Cuál es la distancia del punto (0, 0) al punto (3, 4), usando la distancia "recorriendo calles"?
   (b) ¿Cuál es la distancia del punto (0, 0) al punto (x, y), usando la distancia "recorriendo calles"?
   (c) Usando el "recorriendo calles" como distancia, dibujar varios puntos cuya distancia de (0, 0) sea igual a 7.

4. Si retenemos la definición de círculo como el conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo, y usamos la interpretación de distancia de "recorrer calles" como en el problema 3(c), representar este nuevo "círculo".

REFERENCIAS

Brumfiel, Charles F., Robert E., Eicholz y Merril E. Shanks, Geometry, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1960.

Courant, R. y H. Robbins, What is Mathematics Oxford University Press, Nueva York, 1941.

Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics,* Holt, Rinehart y Winston, Nueva York, 1953.

Larsen, Harold D., *Arithmetic for Colleges,* The Macmillan Company, Nueva York, 1958.

Newman, James R., *The World of Mathematics,* Simon y Schuster, Nueva York, 1956.

Pathria, R. K., *A Statistical Analysis of Randomness among the First 10,000 Digits of* π, Math. Comp., 16, 1962, pp. 188–197.

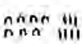
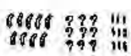
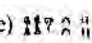
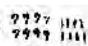
Schepler, H. C., The Chronology of Pi, *Mathematics Magazine,* January-February, March-April & May-June, issues 1950.

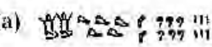
School Mathematics Study Group, *Mathematics for Junior High School,* vols. I, II, y III.

Swain, Robert L. y Eugene Nichols, *Understanding Arithmetic,* Holt, Rinehart & Winston, Nueva York, 1964.

Respuestas a ejercicios seleccionados

Ejercicios 1.3a

1. (a)    (c)    (e)    (g) 

2. (a) 1,220,453   (c) 1,033,306   3. (a) 

4. (b) es el más grande   (d) es el más pequeño

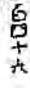
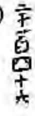
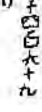
Ejercicios 1.3b

1. (a) XXVI   (c) XLIX   (e) CDXXXI   (g) MDLI   (i) MMCDIX
2. (a) 37   (c) 94   (e) 457   (g) 1151   (i) 2999
4. (a) MMVI   (c) DXLIII   5. (a) MCML   6. MMCMXXIX
7. (a) LXXIV   (c) CLXXXVIII   (e) CMXIV   (g) MMCCCII
   (i) MMMMMCMXCVIII

Ejercicios 1.3c

1. (a) λd (c) $\mu\theta$ (e) $\nu\lambda\alpha$ (g) $\alpha'\phi\nu\alpha$ (i) $\beta'\upsilon\theta$
2. (a) 44   (c) 653   (e) 172   (g) 6435   (i) 54,567
4. (a) $\omega\pi\delta$ 5. $\chi\pi\eta$ es el más grande. $\chi\nu\delta$ es el más pequeño
6. (a) $\pi\eta$ (g) $\alpha M\beta'o$

Ejercicios 1.4a

1. (a)    (c)    (e)    (g)    (i) 

2. (a) 36 (c) 208 (e) 2535

Ejercicios 1.5b

1. (a) 10^7 (c) 2^5 2. (a) 100,000 (c) 1/3 (e) 1

3. (a) 1/8 (c) $3^{27} = (19{,}683)^3 = 7{,}625{,}597{,}484{,}987$ (e) $2^4 = 16$

Ejercicios 1.5c

1. $1 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

3. $1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$ 5. $3 \cdot 10^2$; $3 \cdot 10^1$; $3 \cdot 10^0$

6. (a) 2^9 (c) a^8 (e) m^2 (g) $1/x^4 = x^{-4}$

7. (a) 100,000 (c) $8 - 1 = 7$ (e) 625 (g) 1/8

Ejercicios 1.5d

1. (a) $1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ (c) $3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
(e) $1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$ (g) $1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

2. (a) 10^5; 100,000 (c) 10^{10}; 10,000,000,000 (e) 2^7; 128 (g) 2^1; 2

3. (12) (a) XII; (b) ; (c) $\iota\beta$. (302) (a) CCCII; (b) ; (c) $\tau\beta$
(10,000) (a) $\overline{X}$; (b) ; (c) M. (11) (a) XI; (b) ; (c) $\iota\alpha$

5. 13 6. (a) $6 \cdot 10^{12}$ (c) $18 \cdot 10^5 = 1.8 \cdot 10^6$

7. (a) $6.5 \cdot 10^{-6}$ (c) $8 \cdot 10^{-9}$ (e) $6 \cdot 10^{12}$

8. (a) 8,700,000,000 (c) 0.000000087 (e) 0.000000005

9. (a) 10^2; 100 (c) 10^0; 1
(e) $(7.25)(2.16)(10^{-3}) = 15.66(10^{-3}) = 1.566(10^{-2}) = 0.01566$

Ejercicios 1.6

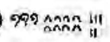
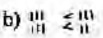
1. (a) $2^8 \cdot 3^6$ 2. (a) 10,000 (c) $2{,}000{,}000 = 2 \cdot 10^6$

3. (a) 2^9 5. Un símbolo para uno; la propiedad aditiva

6. (a) 25 = $\triangle\square\square I$; 100 = $\boxdot\triangle\triangle\square$; 197 = $\boxdot\boxdot\boxdot\square I$ (b) 25 = $I\triangle L\square I$;
100 = $I\boxdot L\triangle\square$; 197 = $F\boxdot I\square I$ (c) 25 = ILI ; 100 = $ILIO$; 197 = $FOII$

7. (a) 360 = $EEFFFFLL$ (b) 360 = $LELO$

Ejercicios 1.8

1. 385 (a)  (b)  (c) $\tau\pi\epsilon$

(d) 三
百
八
十
五 (e) 

2. (a) 27 (c) 2

4. (a) 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, 10001, 10010, 10011, 10100, 10101, 10110, 10111, 11000, 11001,
(b) $10101_{\text{dos}} = 21_{\text{diez}}$; $1110011_{\text{dos}} = 115_{\text{diez}}$

5. A, C, D

6. Ver la respuesta del problema 5.

Ejercicios 2.2

1. 32 es un numeral y {32} es un conjunto formado por un solo elemento.

2. (a) Fácil; {Abril, Junio, Septiembre, Noviembre}
(c) Fácil; {44, 46, 48, 50, . . .} (e) Fácil; {0} (g) Difícil (i) Difícil

3. (a) 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18
(c) El conjunto de los enteros pares no negativos
(e) $m = 2k$ y k un número entero no negativo

4. (a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 (c) El conjunto de los números impares

Ejercicios 2.3

1. (a) P, S, Q, y $\emptyset$ (c) P

3. Sí, cada elemento de S es un elemento de P.

5. Sí, cada elemento de S es un elemento de S.

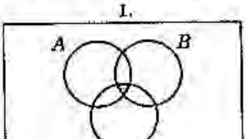
6. (a) Por ejemplo, $S_{(\text{par})} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $S_{(\text{impar})} = \{1, 3, 5, 7\}$
(c) {2}; ϕ; {0, 1, 2, 3, 4, 5}; S mismo; {5, 6, 7, 8,} (e) {0, 1}

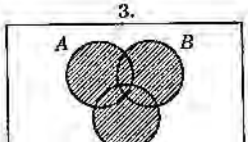
7. S $\{x|x$ es un número par$\}$; $T = \{x|x$ es un número impar$\}$

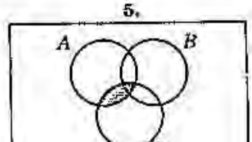
10. (a) No (c) Sí

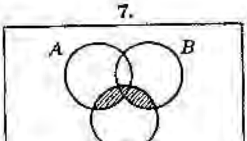
11. (a) {El primer presidente de los Estados Unidos}, {El "padre de nuestro país}," {El esposo de Martha Washington}.

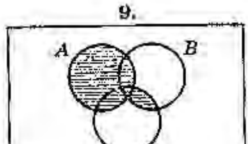
Ejercicios 2.4

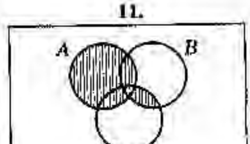
1.


3.


5.


7.


9.


11.


13. (a) $B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C)$
(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

14. (a) Ted, Tim (c) Ted, Tim, John, Jill

Ejercicios 2.5

1. (a) La unión de un conjunto consigo mismo es el propio conjunto. La unión de un conjunto con el conjunto vacío es el propio conjunto. La unión de un conjunto con el conjunto universal es el conjunto universal. (c) Si un conjunto es un subconjunto propio de otros dos conjuntos, entonces es un subconjunto propio de su unión. (e) La intersección de un conjunto consigo mismo es el propio conjunto. La intersección de un conjunto con el conjunto universal es el propio conjunto. La intersección de un conjunto con el conjunto vacío es el conjunto vacío. (g) si un conjunto es un subconjunto propio de cada uno de otros dos, entonces es un subconjunto de su intersección.

2. (a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $A \cap B = \phi$
(c) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$; $A \cap B = \{1, 3\}$
(e) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$; $A \cap B = \{2, 3\}$

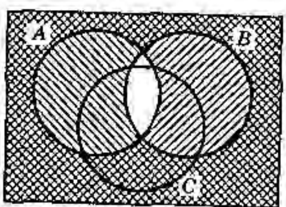
3. (a) $E \cup U = U$ (c) $A \cup B$ es el conjunto de los números naturales impares y 2, 4, y 6
(e) $E \cap U = E$ (g) $A \cap B$ son los tres primeros números naturales impares; $\{1, 3, 5\}$
(i) $(A \cup B) \cap E$ son los tres primeros números naturales pares; $\{2, 4, 6\}$
(k) $(E \cap A) \cup B = B$; $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4. (a) ϕ (c) A (e) $A \cap B$

5. (a) $A \cup B$ (c) B (e) $A \cup B$

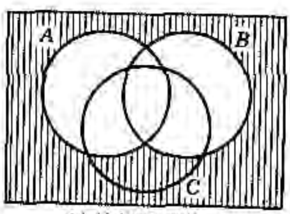
6. (a) $A = \{2, 3, 4, 5\}$ (c) $A = \{3, 4\}$; $B = \{2, 3\}$

7. (a)



A' ////// B' \\\\\\

$A' \cap B'$ ××××



$(A \cup B)'$ ||||||

9. $2^5 = 32$ subconjuntos; 31 subconjuntos propios

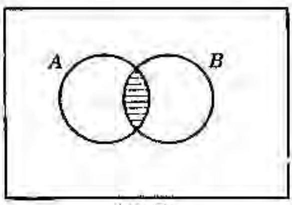
10. (a) El conjunto de especímenes que reaccionan tanto con la prueba A como con la prueba B
(c) O-Neg., A-Neg., B-Neg., y AB-Neg. (e) $A' \cap B' \cap Rh'$
(g) $A \cap B \cap Rh$

11. (a) A, B, $A \cap B$ (c) $A \cup B \cup Rh$

Ejercicios 2.6

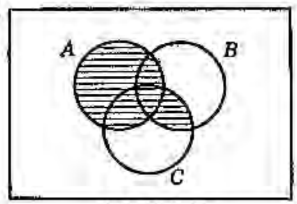
1. {(azul, 31), (azul, 43), (azul, 47), (azul, 59), (verde, 31), (verde, 43) (verde, 47), (verde, 59), (gris, 31), (gris, 43), (gris, 47), (gris, 59)}
2. {0, 1}, {0}, {1}, ϕ
3. (a) $X = \{n|n$ es un entero par no negativo$\}$
   (c) $Z = \{k|k$ es un entero impar no negativo$\}$

(a)



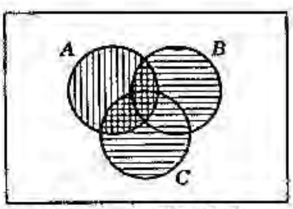
$A \cap B$

(c)



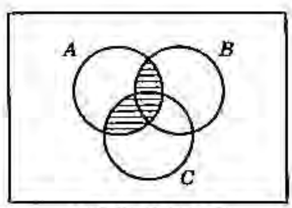
$A \cup (B \cap C)$

5. $2^{16} = 65{,}536$ subconjuntos
6. (a) {2, 3} (c) {3} (e) ϕ (g) {(3, 3)}
7. (a) $A \cap C$ (c) A (e) $A \cap B$



A |||| $B \cup C$ ≡

$A \cap (B \cup C)$ ⊞



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

10. (a) Ted, Tim, Jack, June (c) Ted, Tim (e) Ted, Tim (g) Tom, Tim, Ted, Tobe, Jim, Joan, Jack, June, John, Jill, Jane, Jan, Sam, Sono, Sue, Sara; 16 fueron a la fiesta
11. Total 932

Ejercicios 3.3

1. (a) $A \cap B = \{2, 5\}$; $B \cap A = \{2, 5\}$
   (c) $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 4, 5\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   (e) Por ejemplo, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. (a) Sí, $J = F$. Sí, $A = G$. Sí, $D = K$ (c) A, G, L
4. Sí; Sí

Ejercicios 3.4

1. Ⓓ no es reflexiva, no es simétrica, pero sí es transitiva
3. © no es reflexiva, no es simétrica, y no es transitiva
5. Todos ellos son múltiplos de 7, o divisibles exactamente por 7

Ejercicios 3.5a

2. 120 formas
3. (a) $7 \mid 35$ porque $35 = 7 \cdot 5$ (c) $3 \mid 51$ porque $51 = 3 \cdot 17$
5. Dado $n \leftrightarrow 2n$ para $n = 1, 2, \ldots$
7. 5040 formas
8. 1,307,674,368,000 permutaciones posibles. A razón de 6 por minuto (360/hr) el tiempo necesario es 3,632,428,800 hr, ó 454,053,600 días (8 hr) ó 1,816,214.4 250 días hábiles anuales

Ejercicios 3.5b

1. "1–1" es reflexiva, por lo tanto un conjunto puede ponerse en correspondencia "uno a uno" consigo mismo. "1–1" es simétrica por la definición de la relación, es decir "1–1" significa "en ambas direcciones". A "1–1" B implica, que existe una correspondencia "1–1" de A a B y B a A; por lo tanto B "1–1" A. "1–1" es transitiva. Considerar los conjuntos A, B, y C. Para $a \in A$, $b \in B$, y $c \in C$, sea $a \leftrightarrow b$, $b \leftrightarrow c$; entonces de $a \leftrightarrow b \leftrightarrow c$ podemos obtener $a \leftrightarrow c$. Por lo tanto A "1–1" B y B "1–1" C implican A "1–1" C.
3. Reflexiva, ya que cualquier estudiante es "del mismo sexo que" él mismo. Simétrica, ya que si el estudiante A es del mismo sexo que el estudiante B, entonces el estudiante B es del mismo sexo que el estudiante A. Transitiva, ya que si el estudiante A es del mismo sexo que el estudiante B, por ejemplo, masculino, y el estudiante B es del mismo sexo que el estudiante C, entonces C debe ser del sexo masculino. Por lo tanto A "es del mismo sexo que" C. Las clases de equivalencia son los muchachos y las muchachas.
5. Indíquese la relación con Ⓡ. Sean a, b, y c enteros; a Ⓡ a porque $a - a = 0 = 0 \cdot 4$; por lo tanto, Ⓡ es reflexiva. a Ⓡ b significa $a - b = k \cdot 4$ para algún entero k; entonces $b - a = (-k)4$; por lo tanto b Ⓡ a. Ⓡ es simétrica. a Ⓡ b significa $a - b = k \cdot 4$ y b Ⓡ c significa $b - c = m \cdot 4$; entonces $(a - b) + (b - c) = k \cdot 4 + m \cdot 4$ ó $a - c = (k + m)4$; pero $k + m$ es un entero; por lo tanto a Ⓡ c. Ⓡ transitiva. Es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia son aquellos enteros relacionados a 0, 1, 2, y 3, respectivamente.
7. Inclusión: El conjunto A "está incluido en" el conjunto B si cada elemento de A es un elemento de B. Es reflexiva, no es simétrica, y es transitiva. No es una relación de equivalencia. "Es la hija de": el criterio es inherente de la relación. No es reflexiva, no es simétrica y no es transitiva. No es una relación de equivalencia. "Es condiscípulo de"; es reflexiva, simétrica y transitiva. Es una relación de equivalencia, y las clases de equivalencia son las clases correspondientes a estudiantes de primer año, estudiantes de segundo año, de tercero, y de último año.

Ejercicios 3.6

1. 10 3. 12 5. 20 7. 0 9. $16 = 10 + 12 - 6$

11. 100 13. 56, ó más 15. 24

Ejercicios 3.7

1. (a) Si A y B tienen exactamente los mismos elementos
   (c) Si $a = c$ y $b = d$

4. Uno corta y los otros escogen primero

Ejercicios 3.8

2. Cuando los pares ordenados de f no tienen las mismas segundas componentes

4. (b) es una función de x y tiene dominio $\{2, 3, 4\}$ y rango $\{2, 3, 4\}$; (d) es una función de x y tiene dominio $\{1, 2, 3, 4\}$ y rango $\{1, 3\}$; (a) es una función de y y tiene dominio $\{1, 2, 3, 4\}$ y rango $\{4\}$; (b) es una función de y y tiene dominio $\{2, 3, 4\}$ y rango $\{2, 3, 4\}$

6. (a) Cierto, ya que $1 - 13 = -12$ y -12 es divisible por 3
   (c) Cierto, ya que $1 - 4 = -3$ y -3 es divisible por 3
   (e) Cierto, ya que $a \, Ⓡ \, b$ implica $a - b = k \cdot 3$, $k \in W$. Entonces $b - a = (-k) \cdot 3$, ó $b \, Ⓡ \, a$

Ejercicios 4.4

1. (a) 11 (c) 19 (e) Aquéllos con uniformes completos

3. $132 + 97 - 43 = 186$ 4. (a) 0 (c) Sí 5. (a) 1 (c) $R = Q$

6. (a) 8 (c) 25 7. (a) $n(A \cup \emptyset) = n(A) = 3$

8. (a) El conjunto puede ser colocado en una correspondencia "1–1" con el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$

9. Cardinal: Hay tres muchachos en el grupo
   Ordinal: El es el tercero en línea
   Cardinal: Yo he leído 10 páginas
   Ordinal: Yo he parado de leer en la página 10

10. (b) Naranja

11. Clases de equivalencia

0	12	24	36	48	...
1	13	25	37	49	...
2	14	26	38	50	...
3	15	27	39	51	...
4	16	28	40	52	...
5	17	29	41	53	...
6	18	30	42	54	...
7	19	31	43	55	...
8	20	32	44	56	...

11. Clases de equivalencia (continúa)

9	21	33	45	57	...
10	22	34	46	58	...
11	23	35	47	59	...

Ejercicios 4.5

1. Ver sección 1.3
3. Letras para símbolos en lugar de caracteres especiales; use los símbolos "intermedios"; use el principio multiplicativo aplicado a números grandes.
5. 21_{tres} (c) 20_{tres} (e) 12_{tres}
6. (a) Igual (c) $10^{(10^{10})}$
7. (a) Por ejemplo, ambos son juegos al aire libre, ambos usan bolas, ambos incluyen el patear de la pelota, y ambos tienen goles.
   (b) Por ejemplo, bolas de diferente hechura, diferentes reglas para mover la bola, y diferentes formas de marcar puntos.

Ejercicios 4.6

1. (a) Si $A \subset B$ y $B \subset A$
2. (a) (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)
3. $(2, 3) \equiv (3, 4)$ ya que $2 + 4 = 3 + 3$
   Reflexiva: $(2, 3) \equiv (2, 3)$ ya que $2 + 3 = 3 + 2$
   Simétrica: $(2, 3) \equiv (3, 4)$ implica $2 + 4 = 3 + 3$ ó $3 + 3 = 4 + 2$ que implica $(3, 4) \equiv (2, 3)$
   Transitiva: Si $(2, 3) \equiv (3, 4)$ y $(3, 4) \equiv (4, 5)$, ¿es $(2, 3) \equiv (4, 5)$?
   Sí, ya que $2 + 5 = 3 + 4$.

Ejercicios 4.8

1. (a) Sí, el 0 (c) No, hay un número entero x tal que $6 + x = 0$.
2. (a) No (c) No
3. (a) No hay elemento para la adición, 1 es la identidad para la multiplicación
   (c) No hay inversos para la adición o multiplicación
4. (a) 0 es la identidad aditiva. No hay identidad multiplicativa.
   (c) No hay inversos para la adición o multiplicación
5. (a) $5^3 = 125$ (c) 64 (e) 3^{27} (g) Un 1 seguido de 100 ceros
   (i) No, ya que $2 \oplus 3 = 2^3 = 8$, $3 \oplus 2 = 3^2 = 9$
6. (a) 3 (c) No. $3 \odot 7 = 3$,
pero $7 \odot 3 = 7$
7. (a) Sí (c) No
8. (a) Sí. $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\} \in S$
   (c) Sí. $(\{a, b\} \cup \{b, c\}) \cup \{d\} = \{a, b, c\} \cup \{d\} = U$
   $\{a, b\} \cup (\{b, c\} \cup \{d\}) = \{a, b\} \cup \{b, c, d\} = U$
9. (a) Sí. $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \in S$
   (c) Sí. $(\{a, b\} \cap \{b, c\}) \cap \{c, d\} = \{c\} \cap \{c, d\} = \{c\}$
   $\{a, c\} \cap (\{b, c\} \cap \{c, d\}) = \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}$

Ejercicios 4.10d

1. Ley conmutativa
3. Ley conmutativa
5. Ley conmutativa
7. Ley asociativa
9. Cero es usado como el número cardinal del conjunto vacío. Como un elemento de un sistema numérico, el cero es el elemento idéntico aditivo.

12. Suponga que hay un $\overline{0} \in W$, $\overline{0} \neq 0$, tal que para cualquier $n \in W$, $\overline{0} + n = n + \overline{0} = n$; es decir, suponga que hay más que una identidad aditiva en W. Entonces $\overline{0} + 0 = \overline{0}$ ya que 0 es un elemento idéntico aditivo; y $\overline{0} + 0 = 0$ por la suposición anterior. Entonces $\overline{0} = 0$ por la propiedad transitiva de igualdades. Esto es contradictorio con $\overline{0} \neq 0$, es decir, la consideración debe ser falsa. En otras palabras, 0 es la única identidad aditiva en W.

13. (a) $A \cup B = \{u, v, w, a, b, c\}$. $B \cup A = \{a, b, c, u, v, w\} = A \cup B$

(c) $A \cup \emptyset = \{u, v, w\} \cup \emptyset = \{u, v, w\} = A$
$\emptyset \cup A = \emptyset \cup \{u, v, w\} = \{u, v, w\} = A$

Ejercicios 4.11b

1. Para cualquier $(a, b) \in (A \times B)$, $(b, a) \in (B \times A)$. Sea $(a, b) \leftrightarrow (b, a)$
3. Para cualquier $w \in A$ sea $w \leftrightarrow (e, w) \in \{e\} \times A$
5. $\emptyset \times A = \{(x, y) | x \in \emptyset \text{ y } y \in A\}$. Ya que no hay niguna x tal que $x \in \emptyset$, $\emptyset \times A = \emptyset$

Ejercicios 4.11e

1. (a) Ley conmutativa de la multiplicación
(b) Ley conmutativa de la multiplicación
(e) Ley asociativa de la multiplicación

3. (a) Ley conmutativa de la adición
(c) Ley conmutativa de la multiplicación
(e) Ley conmutativa de la multiplicación
(g) Ley asociativa de la adición

Ejercicios 4.11h

1. $ab + a \cdot 2$ ó $ab + 2a$
3. $23 \cdot 2 + 23 \cdot 1 = 69$
5. $(30 + 2)10$
7. $ac + bc + ad + bd$
9. $xy + x \cdot 2$
11. $(2a + 3)x$
13. $(3 \cdot 10 + 2)10$

15. $(2xb + 1)a$

17. $a \triangle b = b \triangle a$

19. $(a \triangle b) \triangle c = a \triangle (b \triangle c)$

21. $a \triangle (b \oplus c) = (a \triangle b) \oplus (a \triangle c)$

Ejercicios 4.12

1. Suponga que 1 representa al elemento idéntico multiplicativo y que hay otro, llamado 1'. Entonces $1 \cdot 1' = 1'$ porque 1 es el idéntico multiplicativo; también $1 \cdot 1' = 1$ ya que estamos suponiendo que 1' es otro elemento idéntico multiplicativo. Entonces $1' = 1$ por la propiedad transitiva de igualdades Por lo tanto, el elemento idéntico multiplicado es único.

4. (a) No

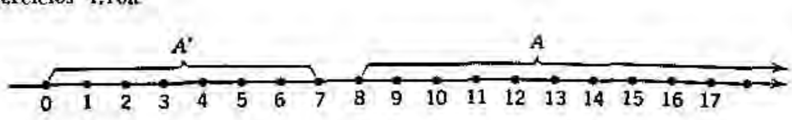
5. (a) Sí, 5 "divide" 0 porque $0 = 5 \cdot 0$.

8.

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$	por definición de exponentes
$= a(a + b) + b(a + b)$	por la ley distributiva
$= a^2 + ab + ba + b^2$	por la ley distributiva
$= a^2 + ab + ab + b^2$	por la ley conmutativa de la mulmultiplicación
$= a^2 + (ab + ab) + b^2$	por la ley asociativa de la adición
$= a^2 + (1 \cdot ab + 1 \cdot ab) + b^2$	1 es la identidad de la multiplicación
$= a^2 + (1 + 1)ab + b^2$	por la ley distributiva
$= a^2 + 2ab + b^2$	por la tabla de datos elementales

9. (a) $2^{(3^9)}$

Ejercicios 4.16a



1. $A' = \{n \in W | n \leq 7\}$ $A' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
3. $Y \cap Z = \{7, 8, 9\}$ $Y \cap Z' = \{4, 5, 6\}$
5. $3 \cdot n < 7 \cdot n$ si $n \neq 0$, $3 \cdot n = 7 \cdot n$ si $n = 0$

Ejercicios 4.16b

1. (a) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; l.u.b. 11; g.l.b. 4

   (b) $B = \{1, 2, 3\}$; por ejemplo, 3 y 4

3. $A \cap B = \phi$

5. $C = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; el supremo es 12; $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

7. (a) $\{n|0 \leqq n < 7\}$ (b) $\{n|0 \leqq n < 4\}$ (c) $\{n|0 \leqq n < 4\}$

12.
$$\begin{aligned}
(x+3)+(y+2) &= x+(3+y)+2 && \text{Ley asociativa de la adición}\\
&= x+(y+3)+2 && \text{Ley conmutativa de la adición}\\
&= (x+y)+(3+2) && \text{Ley asociativa de la adición}\\
&= (3+2)+(x+y) && \text{Ley conmutativa de la adición}\\
&= (2+3)+(x+y) && \text{Ley conmutativa de la adición}\\
(x+3)+(y+2) &= (2+3)+(x+y) && \text{Propiedad transitiva de las igualdades}
\end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned}
(3b)^2 &= (3b)(3b) && \text{Definición de exponente}\\
&= 3(b3)b && \text{Ley asociativa de la multiplicación}\\
&= 3(3b)b && \text{Ley conmutativa de la multiplicación}\\
&= (3\cdot 3)(bb) && \text{Ley asociativa de la multiplicación}\\
&= 9b^2 && \text{Definición de exponente y tablas}\\
(3b)^2 &= 9b^2 && \text{Propiedad transitiva de las igualdades}
\end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned}
3\cdot 10^0 + 4\cdot 10^0 &= (3+4)10^0 && \text{Ley distributiva}\\
&= 7\cdot 10^0 && \text{Tablas}
\end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned}
13\cdot 10^2 &= (1\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0)10^2 && \text{Sistema de numeración}\\
&= (1\cdot 10^1)10^2 + (3\cdot 10^0)10^2 && \text{Ley distributiva}\\
&= 1(10^1\cdot 10^2) + 3(10^0\cdot 10^2) && \text{Ley asociativa de la multiplicación}\\
&= 1\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 && \text{Ley de exponentes}\\
13\cdot 10^2 &= 1\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 && \text{Propiedad transitiva de las igualdades}
\end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned}
(3+x)(2+y) &= 3(2+y) + x(2+y) && \text{Ley distributiva}\\
&= 3\cdot 2 + 3y + x\cdot 2 + xy && \text{Ley distributiva}\\
&= 6 + 3y + x\cdot 2 + xy && \text{Tablas}\\
&= 6 + 3y + 2x + xy && \text{Ley conmutativa de la multiplicación}
\end{aligned}$$

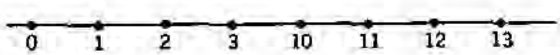
Ejercicios 5.3

1. (a) 2342_{cinco} 347_{diez}

3. (a) $3\cdot 5^2 + 2\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 = 85_{\text{diez}}$
(c) $2\cdot 5^2 + 0\cdot 5^1 + 3\cdot 5^0 = 53_{\text{diez}}$
(e) $1\cdot 5^0 + 1\cdot 5^{-1} + 1\cdot 5^{-2} = 1.24_{\text{diez}}$

4. (a) 24_{cinco} (c) 2302_{cinco}

5. (a)



6. 233.1332_{cuatro} onzas.

7. (a) Dos dens, cuatro quens, un fen, y un sen. (c) Cuatro mens, tres dens, dos quens, un fen, y dos sens.

9. *TE*.

11. Impar, ya que no es múltiplo de 2.

13. (a) $T9$; $T9 - 9T = E$ (c) $E1$; $E1 - 9E = 12$

15. 10

Ejercicios 5.4

2. (a) 1144 (c) 22,010
3. (a) 13,131 (c) 1,130,011
4. (a) 132 (c) 302
5. (a) 232 (c) 20,432
7. (a) 1202; 1110 (c) 20,211; 122,120,021
8. 4 pesos: 1 onza, 3 onzas, 9 onzas y 27 onzas. Use pesos en ambos platos, tal como los necesite.

Ejercicios 5.5

2. (a) 1100 (c) 11,101 (e) 1,001,110
3. (a) 1,001,101 (c) 101,011,111 (e) 1001

Ejercicios 5.6

1. Menos símbolos; menos factores elementales; y adaptable a todos los tipos de problemas.
3. (a) 123 (c) $935E8$ (e) 526 (g) 13,096 (i) 4646 (k) $13T0874$ (m) 49 (o) 239—15 rem
4. (a)

$$
\begin{aligned}
27 + 9 &= (2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0) + 9 \cdot 10^0 && \text{Sistema de numeración}\\
&= 2 \cdot 10^1 + (7 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^0) && \text{Ley asociativa de la adición}\\
&= 2 \cdot 10^1 + (7 + 9)10^0 && \text{Ley distributiva}\\
&= 2 \cdot 10^1 + 16 \cdot 10^0 && \text{Tablas}\\
&= 2 \cdot 10^1 + (1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0)10^0 && \text{Sistema de numeración}\\
&= 2 \cdot 10^1 + (1 \cdot 10^1)10^0 + (6 \cdot 10^0)10^0 && \text{Ley distributiva}\\
&= 2 \cdot 10^1 + 1(10^1 \cdot 10^0) + 6(10^0 \cdot 10^0) && \text{Ley asociativa de la multiplicación}\\
&= 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 && \text{Ley de los exponentes}\\
&= (2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1) + 6 \cdot 10^0 && \text{Ley asociativa de la adición}\\
&= (2 + 1)10^1 + 6 \cdot 10^0 && \text{Ley distributiva}\\
&= 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 && \text{Tablas}\\
&= 36 && \text{Sistemas de numeración}\\
27 + 9 &= 36 && \text{Propiedad transitiva de las igualdades}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
379 + 96 &= (3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0) + (9 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) && \text{Sistema de numeración}\\
&= 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + (9 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1) + 6 \cdot 10^0 && \text{Ley asociativa de la adición}\\
&= 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + (9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0) + 6 \cdot 10^0 && \text{Ley conmutativa de la adición}
\end{aligned}
$$

$= 3 \cdot 10^2 + (7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^1) + (9 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la adición
$= 3 \cdot 10^2 + (7 + 9) \cdot 10^1 + (9 + 6) \cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 3 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10^1 + 15 \cdot 10^0$	Factores elementales
$= 3 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0)10^1 + (1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0) \cdot 10^0$	Sistema de numeración
$= 3 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10^1)10^1 + (6 \cdot 10^0)10^1 + (1 \cdot 10^1)10^0 + (5 \cdot 10^0)10^0$	Ley distributiva
$= 3 \cdot 10^2 + 1(10^1 \cdot 10^1) + 6 \cdot (10^0 \cdot 10^1) + 1(10^1 \cdot 10^0) + 5(10^0 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación
$= 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$	Leyes de los exponentes
$= (3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2) + (6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1) + 5 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición
$= (3 + 1)10^2 + (6 + 1)10^1 + 5 \cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$	Factores elementales
$= 475$	Sistema de numeración
$379 + 96 = 475$	Propiedad transitiva de las igualdades

5. (a)

$(36)(9) = (3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0)(9 \cdot 10^0)$	Sistema de numeración
$= (3 \cdot 10^1)(9 \cdot 10^0) + (6 \cdot 10^0)(9 \cdot 10^0)$	Ley distributiva
$= 3(10^1 \cdot 9)10^0 + 6(10^0 \cdot 9)10^0$	Ley asociativa de la multiplicación
$= 3(9 \cdot 10^1)10^0 + 6(9 \cdot 10^0)10^0$	Ley conmutativa de la multiplicación
$= (3 \cdot 9)(10^1 \cdot 10^0) + (6 \cdot 9)(10^0 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación
$= (3 \cdot 9)(10^1) + (6 \cdot 9)(10^0)$	Ley de los exponentes
$= 27 \cdot 10^1 + 54 \cdot 10^0$	Factores elementales
$= (2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0)10^1 + (5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0)10^0$	Sistema de numeración
$= (2 \cdot 10^1)(10^1) + (7 \cdot 10^0)(10^1) + (5 \cdot 10^1)(10^0) + (4 \cdot 10^0)(10^0)$	Ley distributiva
$= 2(10^1 \cdot 10^1) + 7(10^0 \cdot 10^1) + 5(10^1 \cdot 10^0) + 4(10^0 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación
$= 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$	Ley de los exponentes
$= 2 \cdot 10^2 + (7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^1) + 4 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición

$= 2 \cdot 10^2 + (7 + 5)10^1 + 4 \cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 2 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$	Factores elementales
$= 2 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0)(10^1) + 4 \cdot 10^0$	Sistema de numeración
$= 2 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10^1)10^1 + (2 \cdot 10^0)10^1 + 4 \cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 2 \cdot 10^2 + 1(10^1 \cdot 10^1) + 2(10^0 \cdot 10^1) + 4 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la multiplicación
$= 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$	Leyes de los exponentes
$= (2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2) + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la multiplicación
$= (2 + 1)10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$	Factores elementales
$= 324$	Sistema de numeración
$(36)(9) = 324$	Propiedad transitiva de las igualdades

(c) $(36)(45) = (3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0)(4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0)$	Sistema de numeración
$= (3 \cdot 10^1)(4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0) + (6 \cdot 10^0)(4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0)$	Ley distributiva
$= (3 \cdot 10^1)(4 \cdot 10^1) + (3 \cdot 10^1)(5 \cdot 10^0) + (6 \cdot 10^0)(4 \cdot 10^1) + (6 \cdot 10^0)(5 \cdot 10^0)$	Ley distributiva
$= 3(10^1 \cdot 4)10^1 + 3(10^1 \cdot 5)10^0 + 6(10^0 \cdot 4)10^1 + 6(10^0 \cdot 5)10^0$	Ley asociativa de la multiplicación
$= 3(4 \cdot 10^1)10^1 + 3(5 \cdot 10^1)10^0 + 6(4 \cdot 10^0)10^1 + 6(5 \cdot 10^0)10^0$	Ley conmutativa de la multiplicación
$= (3 \cdot 4)(10^1 \cdot 10^1) + (3 \cdot 5)(10^1 \cdot 10^0) + (6 \cdot 4)(10^0 \cdot 10^1) + (6 \cdot 5)(10^0 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación
$= (3 \cdot 4)10^2 + (3 \cdot 5)10^1 + (6 \cdot 4)10^1 + (6 \cdot 5)10^0$	Leyes de los exponentes
$= 12 \cdot 10^2 + 15 \cdot 10^1 + 24 \cdot 10^1 + 30 \cdot 10^0$	Factores elementales
$= 12 \cdot 10^2 + (15 \cdot 10^1 + 24 \cdot 10^1) + 30 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición
$= 12 \cdot 10^2 + (15 + 24)10^1 + 30 \cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 12 \cdot 10^2 + 39 \cdot 10^1 + 30 \cdot 10^0$	Algoritmo de la adición
$= (1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0)10^2 + (3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0)10^1$	

$+ (3 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0)10^0$	
$= (1 \cdot 10^1)10^2 + (2 \cdot 10^0)10^2 + (3 \cdot 10^1)10^1$	Sistema de numeración
$+ (9 \cdot 10^0)10^1 + (3 \cdot 10^1)10^0 + (0 \cdot 10^0)10^0$	Ley distributiva
$+ 9(10^0 \cdot 10^1) + 3(10^1 \cdot 10^0) + 0(10^0 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación
$= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$	Leyes de los exponentes
$= 1 \cdot 10^3 + (2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2) + (9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^1) + 0 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición
$= 1 \cdot 10^3 + (2 + 3)10^2 + (9 + 3)10^1 + 0 \cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$	Factores elementales
$= 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0)10^1 + 0 \cdot 10^0$	Sistema de numeración
$= 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10^1)10^1 + (2 \cdot 10^0)10^1 + 0 \cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1(10^1 \cdot 10^1) + 2(10^0 \cdot 10^1) + 0 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la multiplicación
$= 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$	Ley de los exponentes
$= 1 \cdot 10^3 + (5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2) + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición
$= 1 \cdot 10^3 + (5 + 1)10^2 + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$	Factores elementales
$= 1620$	Sistema de numeración
$(36)(45) = 1620$	Propiedad transitiva de las igualdades

7. (a) $9E7 + T = (9 \cdot 10^2 + E \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0) + T \cdot 10^0$	Sistema de numeración

Observar que la base tiene el mismo símbolo, pero $10)_{12} = 12)_{10}$.

$= 9 \cdot 10^2 + E \cdot 10^1 + (7 \cdot 10^0 + T \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la adición
$= 9 \cdot 10^2 + E \cdot 10^1 + (7 + T)10^0$	Ley distributiva
$= 9 \cdot 10^2 + E \cdot 10^1 + 15 \cdot 10^0$	Tablas
$= 9 \cdot 10^2 + E \cdot 10^1 + (1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0)10^0$	Sistema de numeración

	$= 9 \cdot 10^2 + E \cdot 10^1 + (1 \cdot 10^1)10^0 + (5 \cdot 10^0)10^0$	Ley distributiva
	$= 9 \cdot 10^2 + E \cdot 10^1 + 1(10^1 \cdot 10^0) + 5(10^0 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación
	$= 9 \cdot 10^2 + E \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$	Leyes de los exponentes
	$= 9 \cdot 10^2 + (E \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1) + 5 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición
	$= 9 \cdot 10^2 + (E + 1)10^1 + 5 \cdot 10^0$	Ley distributiva
	$= 9 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$	Tablas
	$= 9 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0)10^1 + 5 \cdot 10^0$	Sistema de numeración
	$= 9 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10^1)10^1 + (0 \cdot 10^0)10^1 + 5 \cdot 10^0$	Ley distributiva
	$= 9 \cdot 10^2 + 1(10^1 \cdot 10^1) + 0(10^0 \cdot 10^1) + 5 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la multiplicación
	$= 9 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$	Leyes de los exponentes
	$= (9 + 1)10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición
	$= (9 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2) + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$	Ley distributiva
	$= T \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$	Tablas
	$= T05$	Sistema de numeración
$9E7 + T = T05$		Propiedad transitiva de las igualdades
(c) $EE + E$	$= (E \cdot 10^1 + E \cdot 10^0) + E \cdot 10^0$	Sistema de numeración
	$= E \cdot 10^1 + (E \cdot 10^0 + E \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la adición
	$= E \cdot 10^1 + (E + E)10^0$	Ley distributiva
	$= E \cdot 10^1 + 1T \cdot 10^0$	Elementos factoriales
	$= E \cdot 10^1 + (1 \cdot 10^1 + T \cdot 10^0)10^0$	Sistema de numeración
	$= E \cdot 10^1 + (1 \cdot 10^1)10^0 + (T \cdot 10^0)10^0$	Ley distributiva
	$= E \cdot 10^1 + 1(10^1 \cdot 10^0) + T(10^0 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación
	$= E \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1 + T \cdot 10^0$	Leyes de los exponentes
	$= (E \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1) + T \cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición
	$= (E + 1)10^1 + T \cdot 10^0$	Ley distributiva
	$= 10 \cdot 10^1 + T \cdot 10^0$	Elementos factoriales

$= (1\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0)10^1 + T\cdot 10^0$	Sistema de numeración
$= (1\cdot 10^1)10^1 + (0\cdot 10^0)10^1 + T\cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 1(10^1\cdot 10^1) + 0(10^0\cdot 10^1) + T\cdot 10^0$	Ley asociativa de la multiplicación
$= 1\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + T\cdot 10^0$	Leyes de los exponentes
$= 10T$	Sistema de numeración
$EE + E = 10T$	Propiedad transitiva de las igualdades
8. (a) $(EE)(9) = (E\cdot 10^1 + E\cdot 10^0)(9\cdot 10^0)$	Sistema de numeración
$= (E\cdot 10^1)(9\cdot 10^0) + (E\cdot 10^0)(9\cdot 10^0)$	Ley distributiva
$= E(10^1\cdot 9)10^0 + E(10^0\cdot 9)10^0$	Ley asociativa de la multiplicación
$= E(9\cdot 10^1)10^0 + E(9\cdot 10^0)10^0$	Ley conmutativa de la multiplicación
$= (E\cdot 9)(10^1\cdot 10^0) + (E\cdot 9)(10^0\cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación
$= (E\cdot 9)10^1 + (E\cdot 9)10^0$	Leyes de los exponentes
$= 83\cdot 10^1 + 83\cdot 10^0$	Tablas
$= (8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0)10^1 + (8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0)10^0$	Sistema de numeración
$= (8\cdot 10^1)10^1 + (3\cdot 10^0)10^1 + (8\cdot 10^1)10^0 + (3\cdot 10^0)10^0$	Ley distributiva
$= 8(10^1\cdot 10^1) + 3(10^0\cdot 10^1) + 8(10^1\cdot 10^0) + 3(10^0\cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación
$= 8\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0$	Leyes de los exponentes
$= 8\cdot 10^2 + (3\cdot 10^1 + 8\cdot 10^1) + 3\cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición
$= 8\cdot 10^2 + (3 + 8)10^1 + 3\cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 8\cdot 10^2 + E\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0$	Tablas
$= 8E3$	Sistema de numeración
$(EE)(9) = 8E3$	Propiedad transitiva de las igualdades
(c) $(7E)(T5) = (7\cdot 10^1 + E\cdot 10^0)(T\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0)$	Sistema de numeración
$= (7\cdot 10^1 + E\cdot 10^0)(T\cdot 10^1) + (7\cdot 10^1 + E\cdot 10^0)(5\cdot 10^0)$	Ley distributiva
$= (7\cdot 10^1)(T\cdot 10^1) + (E\cdot 10^0)(T\cdot 10^1) + (7\cdot 10^1)(5\cdot 10^0) + (E\cdot 10^0)(5\cdot 10^0)$	Ley distributiva

$= 7(10^1 \cdot T)10^1 + E(10^0 \cdot T)10^1 + 7(10^1 \cdot 5)10^0 + E(10^0 \cdot 5)10^0$	Ley asociativa de la multiplicación
$= 7(T \cdot 10^1)10^1 + E(T \cdot 10^0)10^1 + 7(5 \cdot 10^1)10^0 + E(5 \cdot 10^0)10^0$	Ley conmutativa de la multiplicación
$= (7 \cdot T)(10^1 \cdot 10^1) + (E \cdot T)(10^0 \cdot 10^1) + (7 \cdot 5)(10^1 \cdot 10^0) + (E \cdot 5)(10^0 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación
$= (7 \cdot T)10^2 + (E \cdot T)10^1 + (7 \cdot 5)10^1 + (E \cdot 5)10^0$	Leyes de los exponentes
$= 5T \cdot 10^2 + 92 \cdot 10^1 + 2E \cdot 10^1 + 47 \cdot 10^0$	Factores elementales
$= 5T \cdot 10^2 + (92 \cdot 10^1 + 2E \cdot 10^1) + 47 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición
$= 5T \cdot 10^2 + (92 + 2E)10^1 + 47 \cdot 10^0$	Ley distributiva
$= 5T \cdot 10^2 + 101 \cdot 10^1 + 47 \cdot 10^0$	Algoritmo de la adición
$= (5 \cdot 10^1 + T \cdot 10^0)10^2 + (1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0)10^1 + (4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0)10^0$	Sistema de numeración
$= (5 \cdot 10^1)10^2 + (T \cdot 10^0)10^2 + (1 \cdot 10^2)10^1 + (0 \cdot 10^1)10^1 + (1 \cdot 10^0)10^1 + (4 \cdot 10^1)10^0 + (7 \cdot 10^0)10^0$	Ley distributiva
$= 5(10^1 \cdot 10^2) + T(10^0 \cdot 10^2) + 1(10^2 \cdot 10^1) + 0(10^1 \cdot 10^1) + 1(10^0 \cdot 10^1) + 4(10^1 \cdot 10^0) + 7(10^0 \cdot 10^0)$	Ley asociativa de la multiplicación
$= 5 \cdot 10^3 + T \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$	Ley de los exponentes
$= 5 \cdot 10^3 + (T \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3) + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición
$= 5 \cdot 10^3 + (1 \cdot 10^3 + T \cdot 10^2) + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$	Ley conmutativa de la adición
$= (5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3) + (T \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^2) + (1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^1) + 7 \cdot 10^0$	Ley asociativa de la adición
$= (5 + 1)10^3 + (T + 0)10^2 + (1 + 4)10^1 + 7 \cdot 10^0$	Ley distributiva

	$= 6 \cdot 10^3 + T \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$	Factores elementales
	$= 6T57$	Sistema de numeración
$(7E)(T5)$	$= 6T57$	Propiedad transitiva de las igualdades

Ejercicios 6.3

1. No; Cero no es ni positivo ni negativo.
3. Sí; $0 + {}^-0 = 0$ por la propiedad del elemento inverso de la adición $0 + {}^-0 = {}^-0$ por propiedad de la identidad de la adición. Por lo tanto, $0 = {}^-0$ por la propiedad transitiva de las igualdades.
5. Para cualesquiera dos enteros m y n, siempre $m = n$, o $m < n$, o $n < m$.
7. ${}^-(m + n)$ es el inverso aditivo de $(m + n)$; también ${}^-(m + n) = {}^-m + {}^-n$
9. ${}^-({}^-m) = m$

Ejercicios 6.4a

1. | | |
|---|---|
| $9 + {}^-3 = (6 + 3) + {}^-3$ | Tablas |
| $= 6 + (3 + {}^-3)$ | Ley asociativa de la adición |
| $= 6 + 0$ | Inverso aditivo |
| $= 6$ | Idéntico aditivo |

2. | | |
|---|---|
| ${}^-7 + 4 = {}^-(3 + 4) + 4$ | Tablas |
| $= ({}^-3 + {}^-4) + 4$ | A-1 |
| $= {}^-3 + ({}^-4 + 4)$ | Ley asociativa de la adición |
| $= {}^-3 + 0$ | Inverso aditivo |
| $= {}^-3$ | Idéntico aditivo |

4. | | |
|---|---|
| $(m + n) + {}^-(m + n) = 0$ | Inverso aditivo |
| $(m + n) + ({}^-m + {}^-n) = m + (n + {}^-m) + {}^-n$ | Ley asociativa de la adición |
| $= m + ({}^-m + n) + {}^-n$ | Ley conmutativa de la adición |
| $= (m + {}^-m) + (n + {}^-n)$ | Ley asociativa de la adición |
| $= 0 + 0$ | Inverso aditivo |
| $= 0$ | Idéntico aditivo |

Por lo tanto ${}^-(m + n) = ({}^-m + {}^-n)$ ya que el elemento inverso de la adición es único.

5. (a) ${}^-12$ (c) 3 (e) 0 (g) a (i) ${}^-({}^-2 + a) = 2 + {}^-a$
   (k) ${}^-({}^-3 + 3) = 3 + {}^-3 = 0$ (m) $a + b + {}^-2$ (o) $a + {}^-b + {}^-3$
6. (a) ${}^-8$ (c) $a + {}^-4$ (e) ${}^-22$ (g) 8
7. (a)

$3 + n = 10$	Dado
${}^-3 + 3 + n = {}^-3 + 10$	Unidad de las sumas
$({}^-3 + 3) + n = {}^-3 + 10$	Ley asociativa de la adición
$0 + n = {}^-3 + 10$	Inverso aditivo
$n = {}^-3 + 10$	Identidad de la adición
$n = 7$	Adición de enteros

(c) $a + x = b$	Dado
$^-a + a + x = {}^-a + b$	Unidad de las sumas
$(^-a + a) + x = {}^-a + b$	Ley asociativa de la adición
$0 + x = {}^-a + b$	Inverso aditivo
$x = {}^-a + b$	Identidad de la adición
$x = b + {}^-a$	Ley conmutativa de la adición
$x = b - a$	A-2

9. $372 - 176 = 372 + {}^-176$	A-2
$= (196 + 176) + {}^-176$	Principio de sustitución
$= 196 + (176 + {}^-176)$	Ley asociativa de la adición
$= 196 + 0$	Inverso aditivo
$= 196$	Identidad de la adición
$372 + 176 = 196$	Propiedad transitiva de las igualdades

11. A 9 pulgadas ó 27 pulgadas.

13. No. $(12 - 5) - 2 = 7 - 2 = 5$; $12 - (5 - 2) = 12 - 3 = 9$

14. $0 + 0 = 0$	Identidad de la adición
$m(0 + 0) = m \cdot 0$	Unicidad de los productos
$m \cdot 0 + m \cdot 0 = m \cdot 0$	Ley distributiva
$m \cdot 0 + m \cdot 0 + {}^-m \cdot 0 = m \cdot 0 + {}^-m \cdot 0$	Unicidad de las sumas
$m \cdot 0 + (m \cdot 0 + {}^-m \cdot 0) = (m \cdot 0 + {}^-m \cdot 0)$	Ley asociativa de las sumas
$m \cdot 0 + 0 = 0$	Inverso aditivo
$m \cdot 0 = 0$	Identidad de la adición

Ejercicios 6.4b

3. $(-2)(-3) = (2)(3)$ por M-2

5. $(-2)(-3)(-4) = [(-2)(-3)](-4)$	Ley asociativa de la multiplicación
$= [(2)(3)](-4)$	M-2
$= (6)(-4)$	Tablas
$= -(6)(4)$	M-1
$= -24$	Tablas

7. $(^-3)(^-4 + {}^-5) = (^-3)(^-4) + (^-3)(^-5)$	Ley distributiva
$= (3)(4) + (3)(5)$	M-2
$= 12 + 15$	Tablas
$= 27$	Algoritmo de la adición

o

$(^-3)(^-4 + {}^-5) = (^-3)[^-(4 + 5)]$	A-1
$= (^-3)(^-9)$	Tablas
$= (3)(9)$	M-2
$= 27$	Tablas

8. $8(7 - 3) = (8)(7 + {}^-3)$	A-2
$= (8)(7) + (8)(^-3)$	Ley distributiva
$= (8)(7) + {}^-(8)(3)$	M-1
$= 56 + {}^-24$	Tablas
$= (32 + 24) + {}^-24$	Sustitución

$$\begin{array}{ll}
= 32 + (24 + {}^-24) & \text{Ley asociativa de la adición} \\
= 32 + 0 & \text{Inverso aditivo} \\
= 32 & \text{Identidad de la adición}
\end{array}$$

o

$$\begin{array}{rll}
8(7 - 3) & = 8(7 + {}^-3) & \text{A-2} \\
& = 8[(4 + 3) + {}^-3] & \text{Tablas y sustitución} \\
& = 8[4 + (3 + {}^-3)] & \text{Ley asociativa de la adición} \\
& = 8(4 + 0) & \text{Inverso aditivo} \\
& = 8(4) & \text{Identidad de la adición} \\
& = 32 & \text{Tablas}
\end{array}$$

11.
$$\begin{array}{rll}
(m - n) & = {}^-(m + {}^-n) & \text{A-2} \\
& = {}^-m + {}^-({}^-n) & \text{A-1} \\
& = {}^-m + n & \text{I-1} \\
& = n + {}^-m & \text{Ley conmutativa de la adición} \\
& = n - m & \text{A-2}
\end{array}$$

13. M-1

15. Ver problema 14, 6.4a

Ejercicios 6.5

1. Ya sea $x = 3$ ó $x = 7$. El producto $(x - 3)(x - 7) = 0$, si y solamente si $(x - 3) = 0$, en cuyo caso $x = 3$, ó $(x - 7) = 0$, en cuyo caso $x = 7$.
3. $x \neq 1$. Si $x = 1$ se sustituye en la expresión, debemos tener $y = \frac{}{0}$. Si la expresión $\frac{}{0}$ es interpretada como división, será indefinida.
5. Identidad aditiva; Inverso aditivo; Sustitución; Ley asociativa de la adición; Ley distributiva; Inverso aditivo; $0 \cdot m = 0$ para cualquier m; Idéntico aditivo.
7. ${}^-({}^-a)$ es el inverso aditivo de ${}^-a$; ${}^-({}^-a) = a$
9. Sí, si $m \neq 0$
11. Unicidad de las sumas; Ley asociativa de la adición; Inverso aditivo e Identidad aditiva.
13. Si $a \cdot x = a \cdot y$ y $a \neq 0$, entonces $x = y$

Ejercicios 6.6

1. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
3. 1, 2, 4, 13, 26, 52; primos 2, 13
5. 1, 3, 13, 39; primos 3, 13
7. Ver sección 6.7
9. (a) $2^3 \cdot 3^2$ (b) $2^2 \cdot 89$ (c) 2^9 (d) $2^5 \cdot 5^3$

Ejercicios 6.7

1. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72
3. (a) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ (c) $3 \cdot 5^2 \cdot 13$ (e) $3^4 \cdot 5 \cdot 11$
5. 1, 3, -1, -3
7. $2^3 \cdot 19 \cdot 29$
9. (a) Ninguno (c) 2 y 4

Ejercicios 6.9a

1. 6; 18
3. 12; 48
5. 18
7. 3
9. Si $n = 0$ entonces el m.c.d. es $(p, n) = |p|$. Si n es un múltiplo de p entonces el m.c.d. es $(p, n) = |p|$. Si $n \neq 0$ y no es un múltiplo de p, entonces el m.c.d. es $(p, n) = 1$.

Ejercicios 6.9b

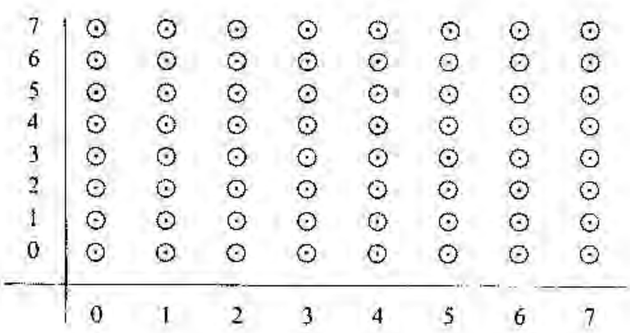
1. (a) 6 (c) 18
2. (a) 2 (b) 42
3. (a) Sí (b) Sí (c) Sí (d) Sí, el 0
5. (a) 9 (c) 9
7. 1

Ejercicios 6.10

1. (a) 160 (c) 504
2. (a) 252 (c) 672
3. (a) 1 (c) 6 (e) 6 (g) 13 (i) 62 (k) 216
4. (a) 144 (c) 210 (e) 630 (g) 12,220 (i) 14,508 (k) 43,200
5. (a) Sí (b) Sí (c) Sí (d) Sí, 1, puesto que el m.c.m. es $(m, 1) = m$.

Ejercicios 6.11

1. (a) El conjunto A consiste de los enteros $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (c) El conjunto C es el conjunto de los enteros negativos (e) El conjunto O es el conjunto $\{0\}$.
2. (a) $A' = \{m \mid m \leq -3 \text{ ó } n > 5\}$
   (c) $C' = \{m \mid m \geqq 0\}$
   (e) $O' = \{m \mid m \neq 0\} = \{m \mid m < 0 \text{ ó } m > 0\}$
3. $\{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (4,7), (5,0), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (5,7), (6,0), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (6,7), (7,0), (7,1), (7,2), (7,3), (7,4), (7,5), (7,6), (7,7)\}$



5. $N \times N = \{(m, n) \mid m > 0 \text{ y } n > 0\}$, $N \times N$ es el conjunto de todos los pares ordenados de enteros positivos.

7. No; sí, el 1

9. Sí, el -1

11. $a < b$ si y solamente si $b - a > 0$. Debemos usar este hecho para demostrar que $(b + c) - (a + c) > 0$ ó que $a + c < b + c$. Pero $(b + c) - (a + c) = b + c + {}^-a + {}^-c = b + {}^-a + c + {}^-c = b + {}^-a + 0 = b + {}^-a = b - a > 0$. Esto es, $(b + c) - (a + c) > 0$, es decir $a + c < b + c$.

13. Si $a < b$, entonces $b - a > 0$. Si $c < 0$, entonces $0 - c = -c > 0$. $-c(b - a) > 0$ ya que el producto de dos enteros postivos es positivo. Pero $-c(b - a) = {}^-c(b + {}^-a) = -cb + ca = ca - cb > 0$, lo cual significa que $ca > cb$.

15. 15

17. $\dfrac{10 \cdot 11}{2} = 55$

19. $\dfrac{50 \cdot 51}{2} = 1275$

21. 9

23. 25

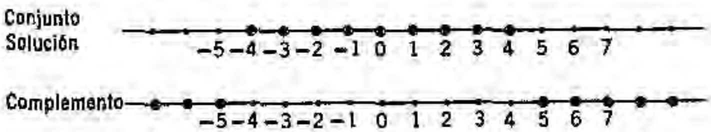
25. Cada uno es el cuadrado del número de términos en la suma indicada, cada uno difiere del siguiente por el $(n + 1)$ésimo término de la suma.

27. $11^2 = 121$

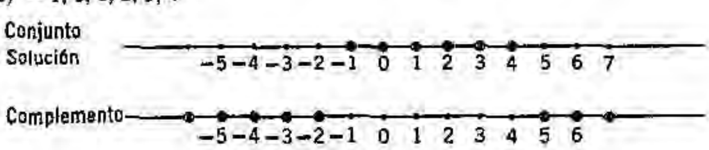
28. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, donde n es el número de términos en la suma.

Ejercicios 6.12

1. (a) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$



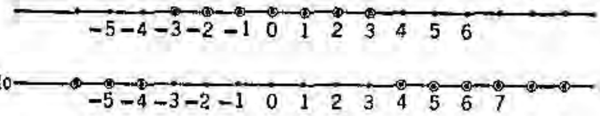
(c) $-1, 0, 1, 2, 3, 4$



2. (a) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

Conjunto Solución

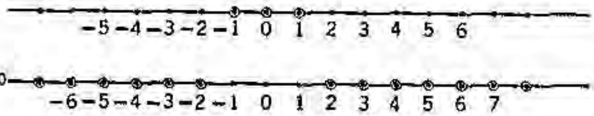
Complemento



(c) $-1, 0, 1$

Conjunto Solución

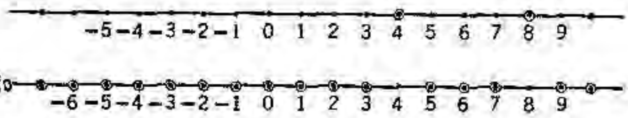
Complemento



(e) 4, 8

Conjunto Solución

Complemento



3. $a < b$, entonces $ac < bc$ si $c > 0$. $a < b$, entonces $ac > bc$ si $c < 0$.

5. (a) $|3 - 9|$

6. (a) $|4 - n|$

7. 4; 10

9. No necesariamente

Ejercicios 6.13

1. (a) 6:00 A.M. (c) 8:00 A.M.
2. (a) 2 (c) 11
3. (a) 7:00 A.M. (c) 11:00 A.M.

Ejercicios 6.14a

2. (a) [4] (c) [4] (e) [6]

Ejercicios 6.14c

3. En general, no; $[4] \cdot [x] = [3]$ no tiene solución
4. (a) $[x] = [0]$ ó $[x] = [6]$ (c) $[x] = [1]$ ó $[5]$ ó $[9]$
5. No; por ejemplo, $[3] \cdot [4] = [0]$

7.

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

·	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]
[2]	[2]	[1]

9. [1]

11. 210; 87,780

13. $a - b = 0$; no se puede dividir por 0

Ejercicios 7.2

1. (a) ordinal (b) cardinal (c) ordinal
3. 0 es el elemento identidad de la adición, es decir, $0 + a = a$
   1 es el elemento identidad de la multiplicación, esto es, $1 \cdot a = a$

Ejercicios 7.4

1. (a) $\frac{-2}{-3}, \frac{-4}{-6}, \frac{-6}{-9}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}$, etc. (c) $\frac{-2}{-2}, \frac{-1}{-1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}$, etc.

   (e) $\frac{-34}{38}, \frac{-17}{19}, \frac{34}{-38}, \frac{51}{-57}, \frac{68}{-76}$, etc. (g) $\frac{-18}{-2}, \frac{-9}{-1}, \frac{18}{2}, \frac{27}{3}, \frac{36}{4}$, etc.

   (i) $\frac{-9}{-12}, \frac{-6}{-8}, \frac{-3}{-4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}$, etc. (k) $\frac{-8}{12}, \frac{-4}{6}, \frac{8}{-12}, \frac{12}{-18}, \frac{16}{-24}$, etc.

2. Primero y tercero; cuarto y quinto

3. $\frac{33}{29} \doteq \frac{2 \cdot 33}{2 \cdot 29}$

4. (a) $(-2)(-3) = (2)(3)$ (c) $(-5)(-6) = +(5)(6) = +30$; $(3)(10) = 30$ (e) $(0)(6) = 0$; $(7)(0) = 0$ (g) $(0)(1) = 0$; $(-1)(0) = 0$

5. (a) $\frac{1982}{43{,}629}$ (c) $\frac{2}{7}$

6. (a) ¿Qué número multiplicado por 3 y aumentado en 1 da una suma de 7?
   (c) ¿Cuál es el número que multiplicado por 3 y al aumentarle 1 da 10?

7.

...,	−39,	−26,	−13,	0,	13,	26,	...
...,	−38,	−25,	−12,	1,	14,	27,	...
...,	−37,	−24,	−11,	2,	15,	28,	...
...,	−36,	−23,	−10,	3,	16,	29,	
...,	−35,	−22,	−9,	4,	17,	30,	
...,	−34,	−21,	−8,	5,	18,	31,	
...,	−33,	−20,	−7,	6,	19,	32,	...
...,	−32,	−19,	−6,	7,	20,	33,	...
...,	−31,	−18,	−5,	8,	21,	34,	...
...,	−30,	−17,	−4,	9,	22,	35,	...
...,	−29,	−16,	−3,	10,	23,	36,	...
...,	−28,	−15,	−2,	11,	24,	37,	
...,	−27,	−14,	−1,	12,	25,	38,	

Ejercicios 7.5

1. Si $a/b \doteq c/d$, entonces $ad = bc$; pero si $ad = bc$, entonces $bc = ad$ por la propiedad simétrica de las igualdades, y $cb = da$ por la ley conmutativa

de multiplicación; entonces $cb = da$ implica $c/d \doteq a/b$, por la definición de $\doteq$.

3. (a) $\left[\frac{2}{3}\right]$ (c) $\left[\frac{19}{2}\right]$ (e) $\left[\frac{0}{1}\right]$

4. (a) $\left[\frac{-1}{2}\right]$ (c) $\left[\frac{-2}{3}\right]$ (e) $\left[\frac{0}{1}\right]$ (g) $\left[\frac{-2}{3}\right]$ (i) $\left[\frac{4}{5}\right]$ (k) $\left[\frac{-4}{1}\right]$

5. (a) $\frac{2}{3} \doteq \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3}$ ya que $2(2 \cdot 3) = 2 \cdot 6 = 12$ y $3(2 \cdot 2) = 3 \cdot 4 = 12$

(c) $\frac{m}{n} \doteq \frac{2m}{2n}$ ya que $m(2n) = (m \cdot 2)n = (2m)n = 2(mn)$ y

$n(2m) = (n \cdot 2)m = (2n)m = 2(nm) = 2(mn)$

7. Las dos clases son iguales (igualdad entre conjuntos)

9. La clase a la cual pertenece $6/6$ es la misma clase a la cual pertenece $-3/-3$.

Ejercicios 7.7

1. a, b, c, y d son enteros; $ad + bc$ es un entero, puesto que el sistema de enteros es cerrado bajo la adición y la multiplicación; bd es también un entero; $bd \neq 0$ puesto que $b \neq 0$ y $d \neq 0$; por lo tanto $(ad + bc)/bd$ es un par ordenado de enteros.

3. $\frac{-3}{-4} + \frac{1}{6} = \frac{-18-4}{-24} = \frac{-22}{-24} = \frac{(-2)(11)}{(-2)(12)} \doteq \frac{11}{12}$

5. La clase de $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$ es la misma que clase de $\frac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 1}{4 \cdot 6}$

6. (a) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{0}{1}$

7. (a) $\frac{131}{72}$

9. $\left[\frac{m}{1}\right] + \left[\frac{n}{1}\right] = \left[\frac{m+n}{1}\right]; \frac{m+n}{1}$

Ejercicios 7.8

1. $\frac{14}{27}$

3. $\frac{1}{1}$

5. (a) $\left(\frac{7}{7}\right)\left(\frac{5}{7}\right)$ (b) $\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{11}{13}\right)$

7. $\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \cdot n \\ 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \cdot n \\ 1 \end{bmatrix}$ que corresponde a $m \cdot n$

8. (a) $\frac{80}{63}$ (c) $\frac{4}{3}$ (e) $\frac{7}{1}$ (g) $\frac{0}{1}$ (i) $\frac{4}{9}$ (k) $\frac{355{,}630{,}706{,}103}{4{,}031{,}419{,}203{,}605}$

9. (a) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{1}{1}$ (e) $\frac{7}{6}$ (g) $\frac{8}{1}$ (i) $\frac{7}{1}$ (k) $\frac{1{,}167{,}543{,}234}{4{,}031{,}419{,}203{,}605}$

10. (a) Cualquier miembro de la clase que contiene a $6/8$, sumado a cualquier miembro de la clase que contiene a $4/8$, da una suma que está en la clase $5/4$.

11. (a) Cualquier miembro de la clase que contiene a $9/18$, multiplicado por cualquier miembro de la clase que contiene a $6/3$, da un producto que es un miembro de la clase que contiene a $3/1$.

12. (a) por ejemplo, $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{10 + 6}{15} = \frac{16}{15}$;

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{6 + 10}{15} = \frac{16}{15}; \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}.$$

13. (a) por ejemplo, $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15}$; $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$; por lo tanto

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

14. (a) $\left[\frac{395}{84}\right]$

15. (a) $\left[\frac{64}{15}\right]$

16. (a) $\left[\frac{1}{1}\right]$

17. (a) $\frac{30{,}150{,}837{,}407{,}444}{5{,}954{,}621{,}431{,}472}$

Ejercicios 7.9

1. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{40,816}{688,527}$

5. $\frac{81}{104}$

7. $\frac{13}{18}$

9. $-\frac{2}{3}$

11. $\frac{0}{1}$

Ejercicios 7.10

3. (a) $\frac{29}{10}$ (c) $\frac{275}{68}$ (e) $\frac{8}{1}$

6. (a) $\frac{0}{1}$ (c) $\frac{1}{5}$

Ejercicios 7.10a

3. Sí

4. (a) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$ Definición de la adición de números racionales

$=\frac{d\cdot a+c\cdot b}{d\cdot b}$ Ley conmutativa de la multiplicación de enteros

$=\frac{c\cdot b+d\cdot a}{d\cdot b}$ Ley conmutativa de la adición de enteros

$=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ Definición de adición para números racionales

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ Propiedad transitiva de las igualdades

(b) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ Definición de la multiplicación para números racionales

$=\frac{c\cdot a}{d\cdot b}$ Ley conmutativa de la multiplicación de enteros

$=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$ Definición de la multiplicación para números racionales

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$ Propiedad transitiva de las igualdades

(c) $\dfrac{a}{b}\cdot\left(\dfrac{c}{d}+\dfrac{e}{f}\right)=\dfrac{a}{b}\cdot\left(\dfrac{cf+de}{df}\right)$	Definición de la adición
$=\dfrac{a(cf+de)}{b(df)}$	Definición de la multiplicación
$=\dfrac{a(cf)+a(de)}{b(df)}$	Ley distributiva de los enteros
$=\dfrac{a(cf)+a(de)}{b(df)}\cdot\dfrac{b}{b}$	Multiplicación por la identidad
$=\dfrac{[a(cf)+a(de)]\cdot b}{[b(df)]\cdot b}$	Definición de multiplicación
$=\dfrac{[a(cf)]\cdot b+[a(de)]\cdot b}{[b(df)]\cdot b}$	Ley distributiva de los enteros
$=\dfrac{(ac)(bf)+(bd)(ae)}{(bd)(bf)}$	Leyes asociativa y conmutativa de la multiplicación de enteros
$=\dfrac{ac}{bd}+\dfrac{ae}{bf}$	Definición de la adición
$=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}+\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{e}{f}$	Definición de la multiplicación
$\dfrac{a}{b}\cdot\left(\dfrac{c}{d}+\dfrac{e}{f}\right)=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}+\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{e}{f}$	Propiedad transitiva de las igualdades

6. Ley de cancelación para la multiplicación de números racionales:

Si $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{e}{f}$, entonces $\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$.

Demostración: $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{e}{f}$	Hipótesis
$\dfrac{b}{a}\cdot\left(\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}\right)=\dfrac{b}{a}\cdot\left(\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{e}{f}\right)$	Unicidad del producto
$\left(\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}\right)\cdot\dfrac{c}{d}=\left(\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}\right)\cdot\dfrac{e}{f}$	Ley asociativa de la multiplicación
$\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{e}{f}$	Inverso multiplicativo
$\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$	Idéntico multiplicativo

Ejercicios 7.11b

1. (a) $8/9$ (c) $10/3$
2. (a) $10/9$ (c) $40/16$
3. (a) $3/2$ (c) $5/1$ (e) $1/31$
4. (a) $-4/5$ (c) $-(3/4 - 2/3) = -1/12$
6. (a) $3/40$ (c) $1/1$ (e) $1/10$
7. (a) $14/9$ (c) $2/5$

Ejercicios 7.11c

2. (a) $17/12$ ó $1\,5/12$ (c) $87/40$ ó $2\,7/40$
6. (a) $85/161$ (c) $94/39$ (e) $8/23$
7. (a) $70/33$
8. (a) $1827/60$
9. (a) $5/3$ (c) $7/2$ (e) $20/16$

Ejercicios 7.11d

4. 15
5. $2000
7. 40 pies
9. 40 pies

Ejercicios 7.11e

1. (a) 32% (c) 75% (e) 16% (g) 24%
2. (a) $1/4$ (c) $3/8$ (e) $5/4$ (g) $4/1$
3. (a) 12 (c) 12.5% (e) 400

Ejercicios 7.12a

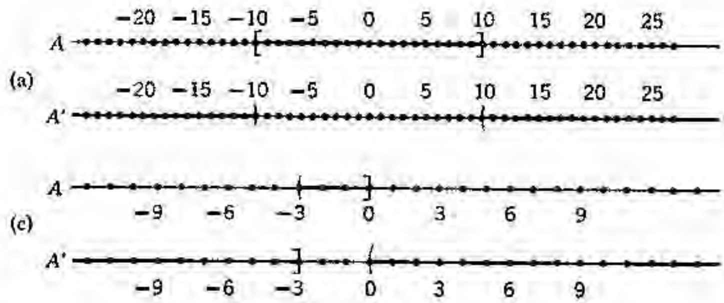
1. (a) $\dfrac{32}{51} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{32 \cdot 5 - 51 \cdot 3}{5 \cdot 51} = \dfrac{160 - 153}{255} = \dfrac{7}{255} > 0$; por lo tanto $\dfrac{3}{5} < \dfrac{32}{51}$
2. (a) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{-2}{3} = \dfrac{2 \cdot 3 - 3(-2)}{3 \cdot 3} = \dfrac{6 + 6}{9} = \dfrac{12}{9} > 0$; por lo tanto $\dfrac{-2}{3} < \dfrac{2}{3}$
3. $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
5. (a) $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (c) $-4 < x \leqq 3$

Ejercicios 7.12b

1. (a) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ (c) $-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2$
2. (a) 1
5. $a < a^2$
7. $a < a^2$

Ejercicios 7.12c

4. No. Los números racionales son densos
6. Sí.
8. $1/2^{n+1}$
10. No
12. -6
14. $7/1$
17. (a) 10 (c) 0
18.



Ejercicios 8.2

1. $6449/4560 \cong 1.4142$; 0.0306; 0.000115
3. La primera aproximación es 17; la segunda aproximación es 17.32; la tercera aproximación es 17.320508
5. La primera aproximación es 1.4; la segunda aproximación es 1.414; la tercera aproximación es 1.4142136

Ejercicios 8.2a

1. Supóngase que $5 + \sqrt{2} = p/q$, donde p/q es un número racional. Entonces $\sqrt{2} = p/q - 5 = (p - 5q)/q$. Pero $(p - 5q)/q$ es un número racional y $\sqrt{2}$ no es racional. Por lo tanto la suposición es falsa y $5 + \sqrt{2}$ es irracional.

3. 2; -1

5. (a) por ejemplo, 17, 20, 25 (c) por ejemplo, 2, 10, $\sqrt{2}$

7. Círculo con radio $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{5}$, etc.

Ejercicios 8.4

1. (a) $^{32}/_{100}$ (c) $^{79}/_{1000}$

2. (a) 0.32 (c) 0.079

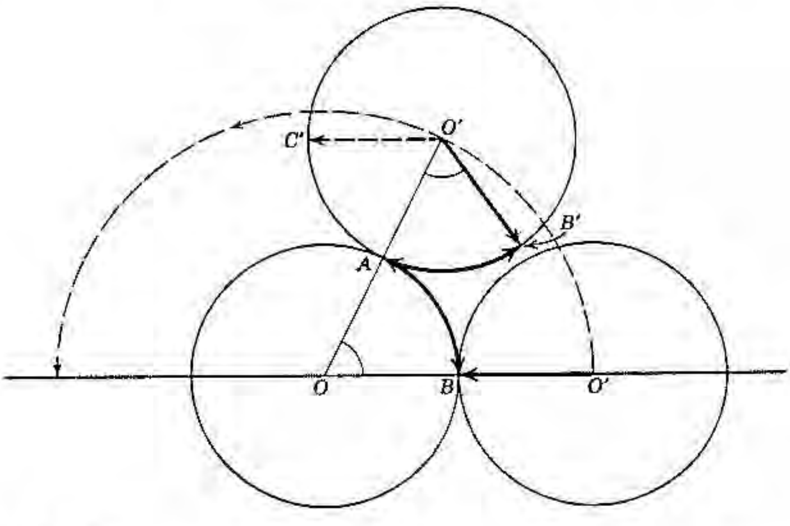
3. (a) $7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$
(c) $1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1}$
$+ 0 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-4}$
(e) $3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$

4. (a) 55.731984 (c) 0.1771 (e) 200,202.04 ó 200,000 con un dígito significativo.

5. (a) $(2.99776)(1.673)(10^{-14}) \cong (5.015)(10^{-14})$
(c) $(6.0228)(1.673)(10^{-1}) \cong 1.008$
(e) $(6.45 \div 2.4)(10^{-8}) \cong (2.7)(10^{-8})$

7. π unidades

8. (*Sugerencia:* $\widehat{AB} = \widehat{AB'}$, por lo tanto $\angle BOA = \angle B'O'A$. Ya que $OB' \| C'O'$, $\angle BOA = \angle AO'C$. $\angle B'O'C' = 2(\angle AOB)$.)



Ejercicios 8.5

1. $\frac{1}{2} = 0.5$; $\frac{1}{4} = 0.25$; $\frac{1}{8} = 0.125$; $\frac{1}{16} = 0.0625$; $\frac{1}{5} = 0.2$; $\frac{2}{5} = 0.4$; $\frac{3}{5} = 0.6$; $\frac{4}{5} = 0.8$; $\frac{5}{5} = 1.0$; $\frac{1}{10} = 0.1$; etc.

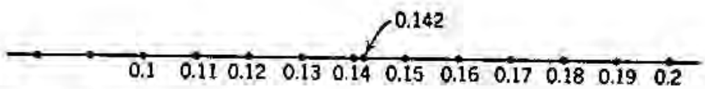
3. (a) 1,006,764 (b) 1,007,578.06 (c) 814.06
5. Use más subdivisiones.

Ejercicios 8.6

1. \$3.33
3. 6
5. 0.1428571429; 0.0909090909

Ejercicios 8.8

1.



3. 1,41425; (tabla) 1.41421
5. $3.1416\overline{0}\ldots$; $3.141\overline{6}\ldots$; $3.141\overline{592}\ldots$; valor tabulado de π con 15 cifras decimales: $3.141592653589793\ldots$

Ejercicios 8.11

1. (a) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (c) $0.\overline{18}\ldots$
2. (a) 12 (c) $0.\overline{16}\ldots$
3. (a) 13 (c) $0.\overline{153846}\ldots$
4. (a) $^{1772}/_{9999}$ (c) $^{2906}/_{9900} = {}^{1453}/_{4950}$
5. (a) 0.1772 (c) 0.2935
6. (a) 5 (c) $^{9}/_{999}$ ó $^{1}/_{111}$

Ejercicios 8.13

1. $3.14 = \pi \pm 0.01$
3. $\dfrac{1}{3 \cdot 10^7}$ ó $0.00000003\ldots$

Ejercicios 8.14

1. Sí
3. Suma; $2\sqrt{a}$; producto: $a - b$; diferencia: $2\sqrt{b}$
5. 0.7071
7. 0.5720
9. 1; 1; 5.8284

Ejercicios 8.14a

1. 22.412

3. 31.6228
5. 0.7087

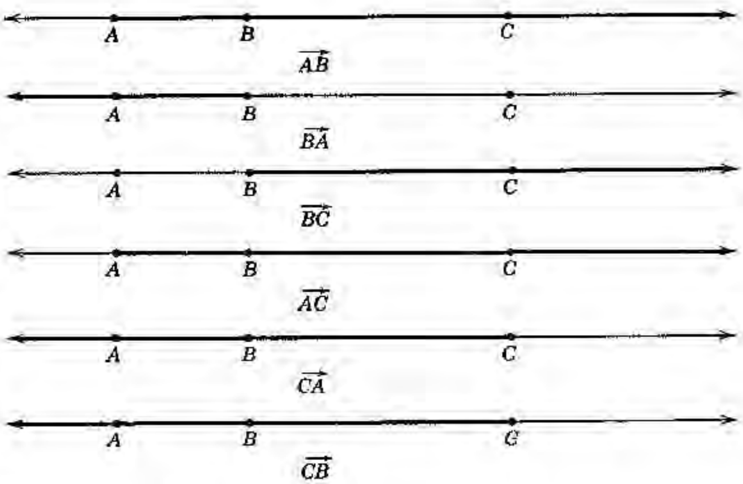
Ejercicios 8.14b

1. 1,7320508
3. 54,772256
5. 7.0710678
7. 1.843909

Ejercicios 9.7

1. (a) Una infinidad (b) Solamente uno
2. (a) Una infinidad (c) Solamente uno
3. (a) Solamente uno (b) Solamente una línea recta, pero una infinidad de puntos

4.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$

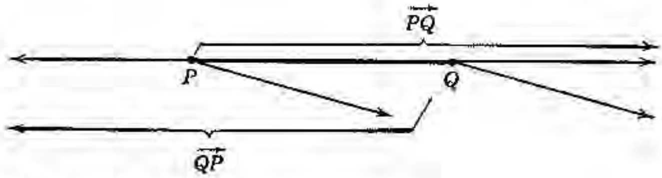
5.

Infinidad

6.

Una sola $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$ Infinidad

7.



8. (a) Ninguna (c) 2
9. (a) 6
10. (a) $\overrightarrow{AC}$ (c) $\overline{AD}$
11. (a)  (c) 

12. (a) $\angle BAC$, vértice A, lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$
 (c) $\angle XYZ$, vértice Y, lados $\overrightarrow{YX}$ y $\overrightarrow{YZ}$
13. (a) Sí
14. (a) No
15. (a) grados (c) 37°

Ejercicios 9.8

1. $l_2 = AC + CB$; $l_4 = AD + DC + CE + EB$; $AC \leqq AD + DC$ y $CB \leqq CE + EB$ por la desigualdad del triángulo. Por lo tanto $AC + CB \leqq AD + DC + CE + EB$ y $l_2 \leqq l_4$.
2. $l_{2^n} = 2^n \cdot AC$, donde AC es la longitud de $\overline{AC}$, uno de los segmentos iguales de la poligonal de longitud l_{2^n}. Sea B el punto medio de $\widehat{AC}$. Entonces $AC \leqq AB + BC$, por la desigualdad del triángulo. Por lo tanto, $2^n \cdot AC \leqq 2^n(AB + BC)$. Pero $l_{2^{n+1}} = 2^{n+1}(AB) = 2^n[2(ab)] = 2^n(AB + BC)$. Por lo tanto, $l_{2^n} \leqq l_{2^{n+1}}$.
3. 4.59 (Compare con la longitud del arco de aproximadamente 4.71, usando $^{22}\!/_{7}$ como una aproximación de π.)
6. $\dfrac{3\pi}{2}$

Ejercicios 9.9

1. (a) 10 pulgadas cuadradas (c) 28 yardas cuadradas (e) 65 pies cuadrados
2. (a) 12 pies cuadrados (c) 80 cm. cuadrados (e) 105 cm. cuadrados
3. (a) 15,000 pies cuadrados (c) 11,250 pies cuadrados
5. (a) 20 pulgadas cuadradas (c) 30 pies cuadrados
6. $(1.414)(1.732) \cong 2.449$

Ejercicios 9.10

1. (a) 240 pulgadas cúbicas; 256 pulgadas cuadradas (c) 22.5 pies cúbicos; 54 pies cuadrados

2. (a) 114 pulgadas cuadradas; 84 pulgadas cuadradas; 72 pulgadas cúbicas (c) 96 pies cuadrados; 60 pies cuadrados; 48 pies cúbicos (e) 156 unidades cuadradas; 126 unidades cuadradas; 84 unidades cúbicas

3. (a) $\frac{7024}{77}$ pulgadas cuadradras; $\frac{7024}{77}$ pulgadas cúbicas

   (c) 2464 pulgadas cuadradas; $\frac{34496}{3}$ pulgadas cúbicas

Ejercicios 9.11

1. 37.5 pies
3. $166\frac{2}{3}$ yardas
5. 2
7. ab

Ejercicios 9.12

1. (a) 2 pulgadas cuadradas
2. (a) $150\sqrt{3}$ pulgadas cuadradas
3. (a) $75\sqrt{3}$ pulgadas cuadradas
4. (a) 160 unidades cuadradas
5. (a) 162 unidades cuadradas

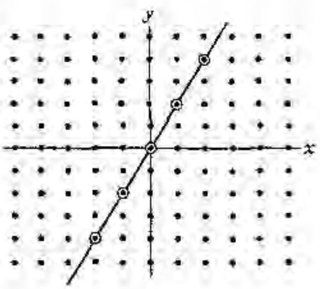
Ejercicios 9.13

3. $b \cong 0.195$; $\pi \cong 16(0.195) = 3.12$
5. Tercera aproximación de π : 3.1056

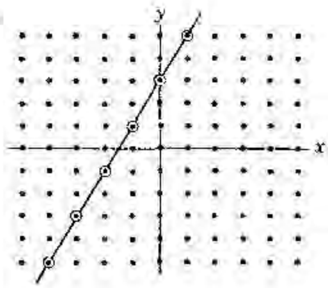
Ejercicios 9.14a

1. $J \times J = \{(m, n) | m$ y n son enteros$\}$.

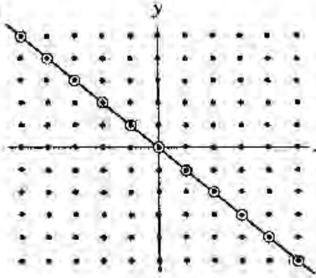
3. (a)



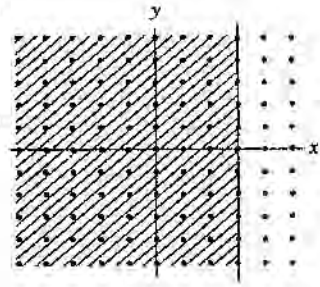
4. (a)



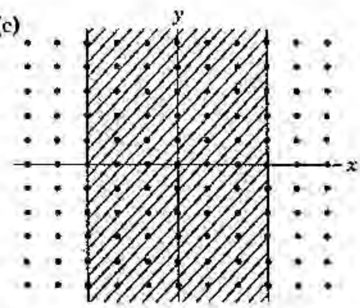
4. (c)



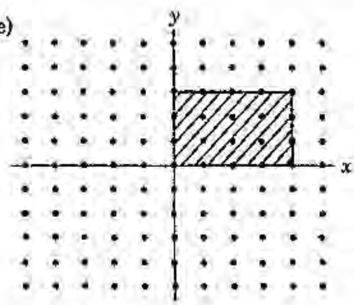
5. (a)



5. (c)



(e)



Ejercicios 9.14b

1. (a) 13 (b) 13 (d) $x^2 + y^2 = 13^2$
2. (a) $x^2 + y^2 = r^2$
3. (a) 7 (b) $|x| + |y|$

Indice