受限三体问题与拉格朗日点 (60 分)

对于任意给定的 m_1, m_2, m_3，仅在万有引力的作用下运动，在任意给定初值的条件下求解 m_1, m_2, m_3 的运动的问题称作三体问题，时至今日依旧没有解析解，但对于 $m_1, m_2 \gg m$ 的情况下，且完全忽略 m 对 m_1, m_2 运动的影响，称为受限三体问题。

在这类问题中，有一些点满足在 m_1, m_2 公转系中静止的条件，这些点称为拉格朗日点。

下认为 m_1, m_2 均作圆周运动，以质心为原点，$(r_1, 0)$ 表示 m_1 的位置，$(-r_2, 0)$ 表示 m_2 的位置，且 $r = r_1 + r_2$。

（1） 给出任意 (x, y) 处的有效势.（单位质量势能，m_1, m_2 除外）

（2） 给出拉格朗日点满足的方程（无需求解）给出 $y = 0$ 拉格朗日点的个数，并定性描述其位置.

在一定近似下，我们可以求解，如令

$$\varepsilon = \frac{m_1}{m_2} \to 0.$$

（3） 给出 $y = 0$ 时的零阶解，并进一步描述位置.

（4） 给出 $y = 0$ 时的一阶解，并给出坐标.

（5） 求出剩下的点，并指出其特殊几何关系.