

## 受限三体问题与拉格朗日点 (60 分)

(1) 先求公转角速度

$$\begin{aligned}\frac{Gm_1m_2}{r^2} &= \Omega^2 r_1 m_1 = \Omega^2 \frac{m_1 m_2 r}{m_1 + m_2} \\ \Rightarrow \Omega^2 &= \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\end{aligned}\quad (1)$$

$$V_{\text{eff}}(x, y) = \frac{-Gm_1}{\sqrt{(x-r_1)^2 + y^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{(x+r_2)^2 + y^2}} - \frac{1}{2} \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} (x^2 + y^2) \quad (2)$$

(2)

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial x} = 0 = \frac{Gm_1(x-r_1)}{[(x-r_1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2(x+r_2)}{[(x+r_2)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} x \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial y} = 0 = \frac{Gm_1 y}{[(x-r_1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2 y}{[(x+r_2)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} y \quad (4)$$

对于  $y = 0$ , (4) 易知满足, 对于 (3), 同除  $\frac{G(m_1 + m_2)}{r}$ , 得

$$\frac{r_2(x-r_1)}{|x-r_1|^3} + \frac{r_2(x+r_2)}{|x+r_2|^3} = \frac{x}{r^2} \quad (3')$$

令  $f(x) = \frac{r_2(x-r_1)}{|x-r_1|^3} + \frac{r_2(x+r_2)}{|x+r_2|^3}$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^- \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-r_2)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-r_2)^+} f(x) = +\infty \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow (r_1)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (r_1)^+} f(x) = +\infty \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+ \quad (8)$$

$$\text{可见, 有3根} \quad (9)$$

$$L_1(-\infty, -r_2), L_2(-r_2, r_1), L_3(r_1, \infty) \quad (10)$$

(3) 在  $\frac{m_2}{m_1} = \epsilon \rightarrow 0$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r = \frac{\epsilon}{\epsilon + 1} r \approx \epsilon(1 - \epsilon)r \quad (11)$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r = \frac{1}{\epsilon + 1} r \approx (1 - \epsilon)r \quad (12)$$

保留零阶, 代入 (4) 式

$$\frac{rx}{|x|^3} = \frac{x}{r^2} \quad (13)$$

$$\Rightarrow x = \pm r \quad (14)$$

$$\text{可得 } L_1, L_2 \text{ 在 } m_2 \text{ 附近, } L_3 \text{ 在离原点 } r \text{ 附近} \quad (15)$$

(4) 对于  $L_1, L_2$ , 令  $x = -r + \delta_{1,2}r$ , 带入 (4) 式, 保留一阶

$$-\frac{(1-\epsilon)r}{(-r + \delta_{1,2}r - \epsilon r)^2} \pm \frac{\epsilon r}{(-r + \delta_{1,2}r + (1-\epsilon)r)^2} = \frac{-r + \delta_{1,2}r}{r^2} \quad (16)$$

$$\pm \frac{\epsilon}{(\delta_{1,2} - \epsilon)^2} = 3(\delta_{1,2} - \epsilon)$$

由于两边小量阶数一致，取  $1 \gg \delta_{1,2} \gg \epsilon$ ，带入有

$$\begin{aligned} \pm \frac{\epsilon}{\delta_{1,2}^2} \left( 1 + \frac{2\epsilon}{\delta_{1,2}} \right) &= 3(\delta_{1,2} - \epsilon) \\ \Rightarrow \pm \frac{\epsilon}{\delta_{1,2}^2} &= 3\delta_{1,2}^2 \\ \Rightarrow \delta_{1,2} &= \pm \left( \frac{\epsilon}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (17)$$

对于  $L_3$ ，令  $x = r + \delta_3$

$$\frac{1 - \epsilon}{(1 + \delta_3 - \epsilon)^2} + \frac{\epsilon}{(1 + \delta_3 + 1 - \epsilon)^2} = 1 + \delta_3 \quad (18)$$

得

$$\delta_3 = \frac{5}{12}\epsilon \quad (19)$$

故

$$L_1 \left( -r - \left( \frac{\epsilon}{3} \right)^{\frac{1}{3}} r, 0 \right) \quad (20)$$

$$L_2 \left( -r + \left( \frac{\epsilon}{3} \right)^{\frac{1}{3}} r, 0 \right) \quad (21)$$

$$L_3 \left( r + \frac{5}{12}\epsilon r, 0 \right) \quad (22)$$

(5) 由 (4)  $\times \frac{x}{y}$  与 (3) 相减得

$$\frac{-r_1 r_2}{[(r_1 - x)^2 + y^2]^{\frac{2}{3}}} + \frac{r_1 r_2}{[(r_2 + x)^2 + y^2]^{\frac{2}{3}}} = 0 \quad (23)$$

由 (4)  $\times \frac{1}{y}$  得

$$\frac{r_2}{[(r_1 - x)^2 + y^2]^{\frac{2}{3}}} + \frac{r_1}{[(r_2 + x)^2 + y^2]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{r^2} \quad (24)$$

(23), (24) 可看作关于分母的一元二次方程组，解得

$$(r_1 - x)^2 + y^2 = (r_2 + x)^2 + y^2 = r^2 \quad (25)$$

$$x = \frac{r_1 - r_2}{2}, y = \pm \frac{\sqrt{3}r}{2} \quad (26)$$

$$\text{可得 } L_4, L_5 \text{ 与 } m_1, m_2 \text{ 构成两个等边三角形} \quad (27)$$

**评分标准:**

共 60 分

(1) 共 4 分 (1), (2) 各 2 分

(2) 共 16 分 (3), (4) 各 2 分, (5), (6), (7), (8) 各 2 分 (9) 各 2 (10) 2 分

(3) 共 8 分 (11), (12), (13) 各 1 分 (14) 3 分 (15) 2 分

(4) 共 20 分 (16) 2 分 (17) 6 分 (18) 2 分 (19) 各 4 分 (20), (21), (22) 各 2 分

(5) 共 12 分 (23) 2 分 (25) 4 分 (26) 4 分 (27) 2 分