

## 打飞机奇遇 II(40 分)

经过巨长时间，小 s 同学终于早好了电磁炮，准备开始打飞机了。

- (1) 小 s 同学想先检验自己的力量，于是先用手扔炮弹，已知此速度下空气阻力为  $\vec{f} = -k\vec{v} = -m\beta\vec{v}$ ，小 s 同学抛出炮弹的速度为  $v_0$ ，与竖着方向夹角为  $\theta_0$ ，质量为  $m$ ，重力加速度为  $g$ ，以抛出点为远点，求  $x(t), y(t)$
- (2) 没上过几节体育课的小 s 同学力量不够，炮弹达不到飞机，于是他启用了新建的电磁炮，在此速度下阻力近似为  $\vec{f} = -m\beta|\vec{v}|\vec{v} = -c|\vec{v}|\vec{v}$ ，已知初速度为  $v_0$ ，角度为  $\theta_0$ (与上题不同，此为与水平方向夹角)，重力加速度为  $g$ ，质量为  $m$ 。

(2.1) 列出自然坐标系下的动力学方程（可带曲率半径  $\rho$ ）

(2.2) 以  $v, \theta$  为变量列出微分方程并积分的  $v(\theta)$ ，并得到炮弹最高点的速度，再代入  $\beta = 0$  检验你的结果。

提示：用  $\rho$  的自然坐标表示式，并用  $v \cos \theta$  换元。

$$\int \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \ln \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right)$$

(2.3) 若用电磁炮直接轰击漂亮国的首都，（不考虑地球弯曲），且出射速度极大  $\theta_0 = 0$  轨道近似为直线，在此条件下求解  $x$  关于  $t$  的函数，并求出轨迹方程  $y(x)$  (提示：用  $\rho$  的直角坐标表示)