第一届 ΣPho 物理竞赛试题

2023 年 11 月

第一题、简单光学题 (40 分)

(1) 一宽平行光束正入射到折射率为 n 的平凸透镜左侧平面，汇聚到平凸透镜主轴上的 F 点，已知 $\overline{OF}=r_0$ 给出凸面型状，并给出其在直角坐标系下的标准方程，（需声明原点）。

(2) 磁场透镜

一宽束质量，速度，电荷量分别为 m, v, q 入射到 $x=0$ 平面。已知在第一、四象限存在大小为 B，方向相反的磁场区域，出射后汇聚于 $F(f,0)$ 处，给出磁场区域边界方程。

(3) 电场透镜

一宽束质量，速度，电荷量分别为 m, v, q 入射到 $x=0$ 平面。全空间中分布着如下电场

$$\vec{E}=\begin{cases}-ky^{\alpha}\hat{y}(y>0)\\ ky^{\alpha}\hat{y}(y<0)\end{cases}$$

出射后汇聚于 $F(f,0)$ 处，通过一些性质给出 α，并给出 k 的定量表达式。

(4) 正经光学题

一束光平行于 x 轴方向入射，第一、四象限存在折射率只与 y 有关的介质，其边界是锯齿状的，使得光能垂直接着入射，出射后汇聚于 $F(f,0)$ 处，在 $(0,0)$ 处折射率为 n_0，类比 (3) 给出折射率分布与边界方程.

(1) 由费马原理

$$nx(\theta)+r(\theta)=nx_0+r_0 \tag{1}$$

由长度约束

$$x(\theta)+r(\theta)\cos\theta=x_0+r_0 \tag{2}$$

$(1)-n(2)$

$$(-1+n\cos\theta)\,r(\theta)=(n-1)\,r_0 \tag{3}$$

可得

$$r(\theta)=\frac{(n-1)\,r_0}{-1+n\cos\theta} \tag{4}$$

与极坐标下的圆锥曲线标准方程类比

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{5}$$

得

$$e = n = \frac{c}{a} \tag{6}$$

$$(n-1)\, r_0 = \frac{b^2}{a} = \left(e^2 - 1\right) a \tag{7}$$

$$a = \frac{r_0}{n+1} \tag{8}$$

$$c = \frac{n r_0}{n+1} \tag{9}$$

$$b = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} r_0 \tag{10}$$

有

$$\frac{x^2}{\left(\frac{r_0}{n+1}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{n-1}{n+1} r_0^2} = 1 \tag{11}$$

原点在 O 右侧 $\frac{r_0}{n+1}$

(2)

$$r_0 \cos\theta + \frac{mv}{qB}\sin\theta = f \tag{12}$$

$$y = r\sin\theta \tag{13}$$

$$\sin\theta = \frac{xqB}{mv} \tag{14}$$

带入 (12)

$$x + r\sqrt{1 - \left(\frac{xqB}{mv}\right)^2} = f \tag{15}$$

$$r = \frac{f - x}{\sqrt{1 - \left(\frac{xqB}{mv}\right)^2}} \tag{16}$$

$$y = \frac{x\,(f - x)}{\sqrt{\left(\frac{mv}{qB}\right)^2 - x^2}} \tag{17}$$

(3) 利用简谐运动周期与振幅无关的特点，可得电场力是线性恢复力

$$\alpha = 1 \tag{18}$$

$$-kyq = m\ddot{y} \tag{19}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{kq}{m}} \tag{20}$$

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{kq}} \tag{21}$$

$$\left(\frac{2f}{\pi v}\right)^2 = \frac{m}{kq}$$

$$k=\frac{m}{q}\left(\frac{\pi v}{2f}\right)^2 \tag{22}$$

(4) 类比力学中的莫培督原理与光学的费马原理

$$\delta\int p\cdot dq=0\leftrightarrow\delta\int n\cdot dl=0$$

取 $p\leftrightarrow n, q\leftrightarrow l, m=1$

在 y 处进入电场的速度为

$$v=n(y) \tag{23}$$

时间

$$t=\frac{f-x}{n\left(y\right)}=\frac{f}{n_0} \tag{24}$$

$$E_p=-\frac{1}{2}n^2 \tag{25}$$

$$\omega=\frac{\pi n_0}{2f}=\sqrt{k} \tag{26}$$

$$F=-ky=-\left(\frac{\pi n_0}{2f}\right)^2 y \tag{27}$$

$$\int F\cdot \mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(n^2-n(0)^2\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi n_0}{2j}\right)^2 y^2 \tag{28}$$

$$n=\sqrt{n_0^2-\left(\frac{\pi n}{2f}\right)^2 y^2} \tag{29}$$

$$x=f\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{\pi y}{2f}\right)^2}\right] \tag{30}$$

评分标准:

共 60 分

(1) 共 9 分 (1), (2), (3), (6), (7), (8), (9), (10), (11) 各 1 分

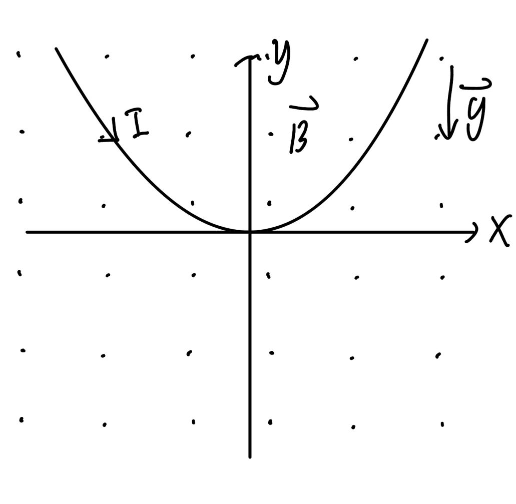
(2) 共 8 分 (12), (13), (14), (15) 各 1 分,(16), (17) 各 2 分

(3) 共 11 分 (19), (20), (21), (22) 各 2 分 (18)3 分

(4) 共 12 分 (24), (25), (26), (27), (29), (30) 各 2 分

第二题、悬链线 (40 分)

竖直平面内挂有一根柔软的质量线密度为 λ 的均匀导线，其中通有电流 I, 存在如图所示的匀强磁场 B, 重力场 g 已知底部 $(x,y)=(0,0)$ 处张力为 T_0。试求其形状的微分方程，用 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 表示



(1) 取 $B=0$, 求其轨迹方程。

注：双曲函数定义

$$\cosh(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}, \sinh(\theta)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

(2) 取 $g=0$, 求其轨迹方程。

(3) 试求其形状的微分方程，用 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 表示.

(1)

取微元受力分析

$$\begin{cases} T\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)\sin\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)=\lambda g\mathrm{d}l+T(\theta)\sin\theta \\ T\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)\cos\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)=T(\theta)\cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

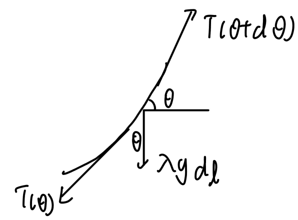


图 1

可得

$$\begin{cases} \mathrm{d}(T\sin(\theta))=\lambda g\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}(T\cos(\theta))=0 \end{cases} \tag{2}$$

对 (2) 积分得:

$$T\cos(\theta)=T_0 \tag{3}$$

$$T\sin(\theta)=T_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{4}$$

联立 (2)(4)

$$T_0\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\lambda g\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{5}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u$, 得

$$T_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\lambda g\sqrt{1+u^2} \tag{6}$$

$$T_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}u=\lambda g\sqrt{1+u^2} \tag{7}$$

$$T_0\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\lambda g\mathrm{d}y \tag{8}$$

注意到:$\mathrm{d}\left(\sqrt{1+u^2}\right)=\dfrac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}$

$$T_0\mathrm{d}\left(\sqrt{1+u^2}\right)=+\lambda g\mathrm{d}y$$

$$T_0\sqrt{1+u^2}-T_0=\lambda g\mathrm{d}y$$

$$\sqrt{\left(\frac{T_0+\lambda gy}{T_0}\right)^2-1}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

为了解上面的微分方程, 注意到:

$$\cosh^2x-\sinh^2x=1 \tag{9}$$

令

$$\frac{T_0+\lambda gy}{T_0}=\cosh\xi \tag{10}$$

则上述方程化为

$$\sinh\xi=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{11}$$

对 (10) 求导

$$\frac{\lambda g}{T_0} = \sinh \xi \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}y} \tag{12}$$

带入 (11)

$$\frac{\lambda g}{T_0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{13}$$

得到

$$\xi = \frac{\lambda g}{T_0}x \tag{14}$$

可得

$$y = \frac{T_0\left(\cosh\left(\frac{\lambda g}{T_0}x\right) - 1\right)}{\lambda g} \tag{15}$$

(2)

取微元受力分析，可得起沿着径向, 有

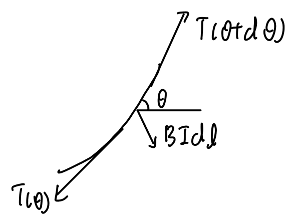


图 2

$$2T_0\frac{1}{2}\mathrm{d} = BI\mathrm{d}l \tag{16}$$

可得

$$R = \frac{T_0}{BI} \tag{17}$$

可得方程

$$x^2 + \left(y - \frac{T_0}{BI}\right)^2 = \left(\frac{T_0}{BI}\right)^2 \tag{18}$$

(3)

取微元受力分析

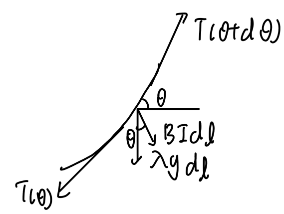


图 3

$$\begin{cases} T\left(\theta + \mathrm{d}\theta\right)\sin\left(\theta + \mathrm{d}\theta\right) = BI\mathrm{d}l\cos\theta + \lambda g\mathrm{d}l + T(\theta)\sin\theta \\ T\left(\theta + \mathrm{d}\theta\right)\cos\left(\theta + \mathrm{d}\theta\right) + BI\mathrm{d}l\sin\theta = T(\theta)\cos\theta \end{cases} \tag{19}$$

可得

$$\begin{cases} \mathrm{d}(T\sin(\theta)) = BI\mathrm{d}x + \lambda g\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}(T\cos(\theta)) - BI\mathrm{d}y \end{cases} \tag{20}$$

对 (20) 积分得:

$$T\cos(\theta) = T_0 - BIy \tag{21}$$

$$T\sin(\theta) = (T_0 - BIy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{22}$$

联立 (20)(22)

$$T_0\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - BI\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - BIy\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = BI + \lambda g\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{23}$$

令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u$, 得

$$T_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - BIu^2 - BIy\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = BI + \lambda g\sqrt{1 + u^2} \tag{24}$$

$$T_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}u = BI\left(1 + u^2\right) + BIyu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \lambda g\sqrt{1 + u^2} \tag{25}$$

$$T_0\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=BI\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}y+BIy\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}+\lambda g\mathrm{d}y \tag{26}$$

注意到:$\mathrm{d}\left(\sqrt{1+u^2}\right)=\dfrac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}$

$$T_0\mathrm{d}\left(\sqrt{1+u^2}\right)=BI\mathrm{d}\left(y\sqrt{1+u^2}\right)+\lambda g\mathrm{d}y \tag{27}$$

$$T_0\sqrt{1+u^2}-T_0=BI\mathrm{d}\left(y\sqrt{1+n^2}\right)+\lambda g\mathrm{d}y \tag{28}$$

$$\sqrt{\left(\frac{T_0+\lambda gy}{T_0-BIy}\right)^2-1}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{29}$$

评分标准:

共 40 分

(1) 共 15 分 (1),(2),(3),(4),(5),(6),(7),(8),(9),(10),(11),(12),(13),(14),(15) 各 1 分

(2) 共 5 分 (16) 各 1 分,(17),(18) 各 2 分

(3) 共 20 分 (19),(20),(21),(22),(23),(24),(25),(26),(27),(28),(29),(30),(31),(32),(33) 各 2 分

第三题、液体表面张力系数的确定 (40 分)

众所周知液体有表面张力，但是往往表面张力系数是由实验测定的，下尝试通过理论方式建立。

(1) 已知热力学第一定律的微分形式是 $\mathrm{d}U=Y\mathrm{d}y+T\mathrm{d}s$，其中 Y 是广义力，y 是广义坐标, 给出表面张力系统的热力学第一定律的微分形式。

液体内部的分子，其周围所受的力在平均后是各向同性的，但在液体表面，由于上面部分没有液体分子。用“作用力球”来说明，就是液体内部“作用力球”完整，而在表面“作用力球”少了一个球冠，从而导致了其受力并不为零，下给出定量分析的模型。

计液体内任意两个相邻的分子之间的相互作用能为 ε, 且液体内部一个分子与 n 个分子相邻，在表面与 ζn 个分子相邻.

(2) 给出内外分子势能的差值。

(3) 设表面的粒子面密度为 σ_n, 求形成 $\mathrm{d}A_S$ 面积的表面时做的功，并用 $\sigma_n,\varepsilon,n,\zeta$ 表示表面张力系数 σ。

下确定 ε. 考虑液体汽化过程，给出摩尔汽化热 L_m(认为是从内部分子汽化出去的).

(4) 给出 ε，用 L_m,N_A,n 表示表面张力系数。

(5) 认为一个分子占据半径为 d 的空间，给出液体分子的摩尔质量 μ 和密度 ρ，用 ζ,L_m,N_A,ρ,μ 表示表面张力系数 σ

现考虑混合液体的表面张力系数，设液体的两种组分为 $\mu_1,\rho_1,d_1,n_1,\zeta_1,\sigma_{n_1}$ 和 $\mu_2,\rho_2,d_2,n_2,\zeta_2,\sigma_{n_2}$, 其中 n 数密度，液体内两种组分每个分子与均与 x_1,x_2 个分子相邻。两种组分之间的相互作用能为 $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12}$，并假设 $|\varepsilon_{12}|=\sqrt{|\varepsilon_{11}||\varepsilon_{22}|}$

(6) 给出混合液体的表面张力系数 σ_{12}, 用 $\mu_1,\rho_1,d_1,n_1,\zeta_1,\sigma_{n_1},x_1,\mu_2,\rho_2,d_2,n_2,\zeta_2,\sigma_{n_2},x_2$

(1) 由表面张力公式

$$F = l\sigma \tag{1}$$

表面张力作功

$$đW = F \cdot \mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}A \tag{2}$$

$$\mathrm{d}A = l\mathrm{d}x \tag{3}$$

代入可得

$$\mathrm{d}U = \sigma \mathrm{d}S + T\mathrm{d}S \tag{4}$$

(2) 由题意

$$\Delta U = (1-\zeta)\frac{-\varepsilon}{2}n \tag{5}$$

(3) 由题意

$$đW = \sigma_n \mathrm{d}A_S (1-\zeta)\frac{-\varepsilon}{2}n \tag{6}$$

(4) 由题意

$$-\frac{n}{2}\varepsilon N_A = L_m \tag{7}$$

$$\varepsilon = \frac{-2L_m}{nN_A} \tag{8}$$

(5)

$$d^3 N_A = \frac{\mu}{\rho} \tag{9}$$

$$d = \left(\frac{\mu}{\rho N_A}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{10}$$

$$\sigma = (1-\zeta)\frac{L_m}{N_A}\left(\frac{\rho N_A}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{11}$$

(6) 类似于上面的方法

$$\Delta U_1 = (1-\zeta_1)x_1\frac{n_1}{n_1+n_2}\frac{-\varepsilon_{11}}{2} + (1-\zeta_1)x_1\frac{n_2}{n_1+n_2}\frac{-\varepsilon_{12}}{2} \tag{12}$$

$$\Delta U_2 = (1-\zeta_2)x_1\frac{n_1}{n_1+n_2}\frac{-\varepsilon_{12}}{2} + (1-\zeta_1)x_1\frac{n_2}{n_1+n_2}\frac{-\varepsilon_{22}}{2} \tag{13}$$

$$đW = \sigma_{n_1}\mathrm{d}A_S\Delta U_1 + \sigma_{n_2}\mathrm{d}A_S\Delta U_2 = \sigma_{12}\mathrm{d}A_S \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12} = &\left[(1-\zeta_1)x_1\frac{n_1}{n_1+n_2}\frac{-\varepsilon_{11}}{2} + (1-\zeta_1)x_1\frac{n_2}{n_1+n_2}\frac{-\sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}}}{2}\right]\sigma_{n_1} \\ &+ \left[(1-\zeta_2)x_1\frac{n_1}{n_1+n_2}\frac{-\sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}}}{2} + (1-\zeta_1)x_1\frac{n_2}{n_1+n_2}\frac{-\varepsilon_{22}}{2}\right]\sigma_{n_2}\end{aligned} \tag{15}$$

评分标准:

共 40 分

(1) 共 7 分 (1), (3) 各 1 分,(2)2 分,(4)3 分

(2) 共 3 分 (5)3 分

(3) 共 3 分 (6)3 分

(4) 共 6 分 (7), (8) 各 3 分

(5) 共 9 分 (9), (10), (11) 各 3 分

(5) 共 12 分 (12), (13), (14), (15) 各 4 分

第四题、受限三体问题与拉格朗日点 (60 分)

对于任意给定的 m_1, m_2, m_3，仅在万有引力的作用下运动，在任意给定初值的条件下求解 m_1, m_2, m_3 的运动的问题称作三体问题，时至今日依旧没有解析解，但对于 $m_1, m_2 \gg m$ 的情况下，且完全忽略 m 对 m_1, m_2 运动的影响，称为受限三体问题。

在这类问题中，有一些点满足在 m_1, m_2 公转系中静止的条件，这些点称为拉格朗日点。

下认为 m_1, m_2 均作圆周运动，以质心为原点，$(r_1, 0)$ 表示 m_1 的位置，$(-r_2, 0)$ 表示 m_2 的位置，且 $r = r_1 + r_2$。

（1） 给出任意 (x, y) 处的有效势.（单位质量势能，m_1, m_2 除外）

（2） 给出拉格朗日点满足的方程（无需求解）给出 $y = 0$ 拉格朗日点的个数，并定性描述其位置.

在一定近似下，我们可以求解，如令

$$\varepsilon = \frac{m_1}{m_2} \to 0.$$

（3） 给出 $y = 0$ 时的零阶解，并进一步描述位置.

（4） 给出 $y = 0$ 时的一阶解，并给出坐标.

（5） 求出剩下的点，并指出其特殊几何关系.

(1) 先求公转角速度

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = \Omega^2 r_1 m_1 = \Omega^2 \frac{m_1 m_2 r}{m_1 + m_2}$$

$$=> \Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \tag{1}$$

$$V_{\text{eff}}(x, y) = \frac{-Gm_1}{\sqrt{(x - r_1)^2 + y^2}} - \frac{Gm_2}{(\sqrt{(x + r_2)^2 + y^2}} - \frac{1}{2}\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}(x^2 + y^2) \tag{2}$$

(2)

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial x} = 0 = \frac{Gm_1(x - r_1)}{[(x - r_1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2(x + r_2)}{[(x + r_2)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}x \tag{3}$$

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial y} = 0 = \frac{Gm_1 y}{[(x - r_1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2 y}{[(x + r_2)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}y \tag{4}$$

对于 $y = 0, (4)$ 易知满足，对于 (3)，同除 $\dfrac{G(m_1 + m_2)}{r}$, 得

$$\frac{r_2(x - r_1)}{|x - r_1|^3} + \frac{r_2(x + r_2)}{|x + r_2|^3} = \frac{x}{r^2} \tag{3'}$$

令 $f(x) = \dfrac{r_2(x - r_1)}{|x - r_1|^3} + \dfrac{r_2(x + r_2)}{|x + r_2|^3}$, 有

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^- \tag{5}$$

$$\lim_{x \to (-r_2)^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to (-r_2)^+} f(x) = +\infty \tag{6}$$

$$\lim_{x \to (r_1)^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to (r_1)^+} f(x) = +\infty \tag{7}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+ \tag{8}$$

$$\text{可见，有3根} \tag{9}$$

$$L_1(-\infty, -r_2), L_2(-r_2, r_1), L_3(r_1, \infty) \tag{10}$$

(3) 在 $\dfrac{m_2}{m_1} = \varepsilon \to 0$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} r \approx \varepsilon(1-\varepsilon) r \tag{11}$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} r = \frac{1}{\varepsilon+1} r \approx (1-\varepsilon) r \tag{12}$$

保留零阶，代入 (4) 式

$$\frac{rx}{|x|^3} = \frac{x}{r^2} \tag{13}$$

$$=> x = \pm r \tag{14}$$

$$\text{可得}L_1, L_2\text{在}m_2\text{附近，}L_3\text{在离原点}r\text{附近} \tag{15}$$

(4) 对于 L_1, L_2, 令 $x = -r + \delta_{1,2} r$, 带入 (4) 式，保留一阶

$$-\frac{(1-\varepsilon)r}{(-r+\delta_{1,2}r-\varepsilon r)^2} \pm \frac{\varepsilon r}{(-r+\delta_{1,2}r+(1-\varepsilon)r)^2} = \frac{-r+\delta_{1,2}r}{r^2} \tag{16}$$

$$\pm\frac{\varepsilon}{(\delta_{1,2}-\varepsilon)^2} = 3(\delta_{1,2}-\varepsilon)$$

由于两边小量阶数一致，取 $1 \gg \delta_{1,2} \gg \varepsilon$, 带入有

$$\pm\frac{\varepsilon}{\delta_{1,2}^2}\left(1+\frac{2\varepsilon}{\delta_{1,2}}\right) = 3(\delta_{1,2}-\varepsilon)$$

$$=> \pm\frac{\varepsilon}{\delta_{1,2}^2} = 3\delta_{1,2}^2$$

$$=> \delta_{1,2} = \pm\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{17}$$

对于 L_3, 令 $x = r + \delta_3$

$$\frac{1-\varepsilon}{(1+\delta_3-\varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon}{(1+\delta_3+1-\varepsilon)^2} = 1+\delta_3 \tag{18}$$

得

$$\delta_3 = \frac{5}{12}\varepsilon \tag{19}$$

故

$$L_1\left(-r-(\frac{\varepsilon}{3})^{\frac{1}{3}}r, 0\right) \tag{20}$$

$$L_2\left(-r+(\frac{\varepsilon}{3})^{\frac{1}{3}}r, 0\right) \tag{21}$$

$$L_3\left(r+\frac{5}{12}\varepsilon r, 0\right) \tag{22}$$

(5) 由 $(4) \times \dfrac{x}{y}$ 与 (3) 相减得

$$\frac{-r_1 r_2}{[(r_1-x)^2+y^2]^{\frac{2}{3}}} + \frac{r_1 r_2}{[(r_2+x)^2+y^2]^{\frac{2}{3}}} = 0 \tag{23}$$

由 (4) $\times \frac{1}{y}$ 得

$$\frac{r_2}{[(r_1-x)^2+y^2]^{\frac{2}{3}}}+\frac{r_1}{[(r_2+x)^2+y^2]^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{r^2} \tag{24}$$

(23), (24) 可看作关于分母的一元二次方程组，解得

$$(r_1-x)^2+y^2=(r_2+x)^2+y^2=r^2 \tag{25}$$

$$x=\frac{r_1-r_2}{2}, y=\pm\frac{\sqrt{3}r}{2} \tag{26}$$

$$\text{可得}L_4, L_5\text{与}m_1, m_2\text{构成两个等边三角形} \tag{27}$$

评分标准:

共 60 分

(1) 共 4 分 (1), (2) 各 2 分

(2) 共 16 分 (3), (4) 各 2 分,(5), (6), (7), (8) 各 2 分 (9) 各 2 (10)2 分

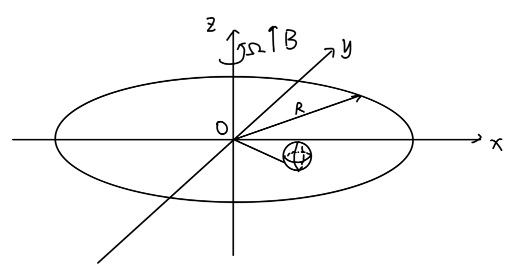
(3) 共 8 分 (11), (12), (13) 各 1 分 (14)3 分 (15) 2 分

(4) 共 20 分 (16)2 分 (17) 6 分 (18)2 分 (19) 各 4 分 (20), (21), (22) 各 2 分

(5) 共 12 分 (23) 2 分 (25) 4 分 (26) 4 分 (27) 2 分

第五题、匀强磁场中带电小球在圆盘上的运动 (50 分)

考虑一个沿 z 轴以匀角速度 Ω 转动的薄圆盘半径为 R，质量为 M。有一半径为 r，均匀带电量为 Q，质量为 m 的小球，小球与圆盘间无滑动。全空间存在竖直向上的匀强磁场，大小为 B.



初始将小球静止放在 $(r_0, 0, 0)$ 处，考虑其运动。

(1) 当带电小球以 $\vec{\omega}$ 转动时, 求带电小球的总磁矩 $\vec{\mu}$。

注：磁矩定义 $\vec{\mu}=I\vec{S}$

(2) 初始 $t=0$，求解之后的运动。

(1) 解：按定义

$$\vec{\mu}=\frac{1}{2}\int\rho\vec{r}\times\vec{v}dV \tag{1}$$

$$Q=\frac{4}{3}\pi R^3\rho \tag{2}$$

得

$$\vec{\mu}=\frac{1}{5}Q\vec{w}r^2 \tag{3}$$

(2) 解：由无相对滑动，故 $\omega_z=0$

$$\vec{v_c}+(-r\hat{z})\times\vec{w}=(x\hat{x}+y\hat{y})\times(\Omega\hat{z}) \tag{4}$$

$$\begin{cases}\dot{x}-\omega_y r=-\Omega y\\ \dot{y}+\omega_x r=\Omega x\end{cases} \tag{5}$$

质心运动定理

$$F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+Q\vec{v}_c\times(B\hat{z})=m\left(\ddot{x}\hat{x}+\ddot{y}\hat{y}\right) \tag{7}$$

质心转动定理

$$\frac{2}{5}mr^2\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}=(-r)\,\hat{z}\times\left(F_x\hat{x}+F_y\hat{y}\right)+\vec{\mu}\times\vec{B} \tag{8}$$

$$\begin{cases}rF_y+\mu_y B=\frac{2}{5}mr^2\dot{\omega}_x\\ -\left(rF_x+\mu_x B\right)=\frac{2}{5}mr^2\dot{\omega}_y\end{cases} \tag{9}$$

消去 $F_z,F_y,\omega_x,\omega_y$，得二阶二元线性微分方程组

$$\begin{cases}\frac{7}{5}mr\ddot{y}+\left(\frac{6}{5}QBr-\frac{2}{5}mr\Omega\right)\dot{x}+\frac{1}{5}QrB\Omega y=0\\ \frac{7}{5}mr\ddot{x}-\left(\frac{6}{5}QBr-\frac{2}{5}mr\Omega\right)\dot{y}+\frac{1}{5}QrB\Omega x=0\end{cases} \tag{10}$$

令 $\tilde{\xi}=x+y$, 将 (10) 式中两式相加，得

$$\frac{7}{5}mr\ddot{\tilde{\xi}}+\left(\frac{6}{5}QBr-\frac{2}{5}mr\Omega\right)\dot{\tilde{\xi}}+\frac{1}{5}QB\Omega r\tilde{\xi}=0 \tag{11}$$

令 $\tilde{\xi}=e^{\omega t}$, 带入 (11) 式

$$-\frac{7}{5}mr\omega^2-\left(\frac{6}{5}QBr-\frac{2}{5}mr\Omega\right)\omega+\frac{1}{5}QB\Omega r=0 \tag{12}$$

得

$$\omega_1=\frac{3QBr-mr\Omega+\sqrt{\left(3QBr-mr\Omega\right)^2+7mr^2\omega^2QB\Omega}}{-7mr} \tag{13}$$

$$\omega_2=\frac{3QBr-mr\Omega-\sqrt{\left(3QBr-mr\Omega\right)^2+7mr^2\omega^2QB\Omega}}{-7mr} \tag{14}$$

将两解线性叠加，并重新拆分为 x,y, 有

$$x=A\cos\left(\omega_1 t\right)+B\cos\left(\omega_2 t\right)$$

$$y=A\sin\left(\omega_1 t\right)+B\sin\left(\omega_2 t\right)$$

带入初值

$$\begin{cases}A+B=r_0\\ A\omega_1+A\omega_w=\Omega r_0\end{cases} \tag{15}$$

解得

$$\begin{cases}A=-\frac{r_0\left(\omega_2-\Omega\right)}{\omega_1-\omega_2}\\ B=\frac{r_0\left(\omega_1-\Omega\right)}{\omega_1-\omega_1}\end{cases} \tag{16}$$

评分标准:

共 50 分

(1) 共 5 分 (2) 各 1 分,(1),(3) 各 2 分

(2) 共 45 分 (4),(6) 各 2 分,(8),(12),(13),(14),(15),(16) 各 3 分,(5),(7),(9),(10),(11)4 分, 指出 $\omega_z=0$ 给 3 分

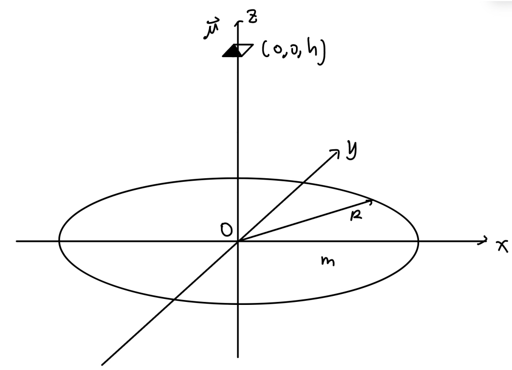
第六题、Arago 圆盘 (40 分)

高二这次期中考考了一个有关于 Arago 圆盘的选择题，小 H 同学对 J 老师的解释不是很满意，于是他尝试自己着手计算一下。

将小磁针认为是一个磁偶极子，大小为 μ。下方 h 处有一个带电薄圆盘质量为 m, 半径为 R, 以 ω 转动。

(1) 现固定小磁针，将下方带电薄圆盘以 Ω 恒定速度转动，求小磁针受到的力矩。

(2) 现释放小磁针，并解除下方维持带电薄圆盘匀速转动的力矩，求两者共速后的共同角速度 Ω.



补充：磁偶极子的场

$$\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{(3(\vec{\mu}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{\mu})}{|\vec{r}|^3}$$

(1)

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\left(\vec{\mu}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}-\vec{\mu}}{r^3} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}&=q\vec{v}\times\vec{B}=q(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\times\vec{B}\\&=q\left[\left(\vec{\omega}\cdot\vec{B}\right)\vec{\rho}-\left(\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}\right)\vec{B}\right]\\&=q\left(\vec{\omega}\cdot\vec{B}\right)\vec{\rho}\end{aligned} \tag{2}$$

$$\vec{\mu}=\mu\left(\cos\varphi,\sin\varphi,0\right) \tag{3}$$

$$\vec{r}=\left(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,-h\right) \tag{4}$$

$$B_z=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\mu\rho\cos(\varphi-\theta)(-h)}{r^5} \tag{5}$$

(2) 认为 $\vec{E}=\vec{v}\times\vec{B}$ 为等效电场

$$\begin{aligned}\vec{j}&=\sigma\vec{E}=\sigma(\vec{\omega}\cdot\vec{B})\vec{r}\\&=\frac{\sigma\mu_0\omega3\mu\rho\cos(\varphi-\theta)(-5)}{u\pi r^5}(\rho\cos\theta,\rho\sin\rho,0)\end{aligned} \tag{6}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\cdot\mathrm{d}V\times(-\vec{r})}{r^3} \tag{7}$$

积分得

$$\vec{B}=\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2\frac{3\sigma\omega\mu h^2\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h^4}-\frac{1}{\left(R^2+h^2\right)^2}\right)+\frac{h^2}{3}\left(-\frac{1}{h^6}+\frac{1}{\left(R^2+h^2\right)^3}\right)\right]\left(-\sin\varphi\hat{x}+\cos\varphi\hat{y}\right) \tag{8}$$

令

$$k=\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2\frac{3\sigma\mu h^2\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h^4}-\frac{1}{\left(R^2+h^2\right)^2}\right)+\frac{h^2}{3}\left(-\frac{1}{h^6}+\frac{1}{\left(R^2+h^2\right)^3}\right)\right] \tag{9}$$

由力矩公式

$$\vec{M}=\vec{v}\times\vec{B}=k\mu\omega\hat{z} \tag{10}$$

评分标准:

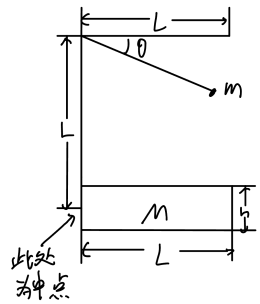
共 40 分

(1) 共 10 分 (1), (2), (3), (4), (5) 各 2 分

(2) 共 30 分 (6), (7), (8), (9), (10) 各 6 分

第七题、“简单力学题”(50 分)

光滑水平面上有一木块，匀质质量为 M, 在左端中间固定有一档板，其上有一绳，一侧系有一质量为 m 得质点。其中各参数如图所示，初态均静止，细绳水平释放质点。试就 $\frac{M}{m}=1,\frac{1}{2}$ 时, 求木块右侧是否会离开地面。若会，其第一次离开时的 θ .



由能动量定理

$$\begin{cases} Mv=m\left(L\dot{\theta}\sin\theta-v\right) \\ \dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}m\left(2\dot{\theta}\sin\theta-v\right)^2+\dfrac{1}{2}m\left(L\dot{\theta}\cos\theta\right)^2=mgL\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

解得

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{2\left(M+m\right)g\sin\theta}{L\left(M+m\cos^2\theta\right)}} \tag{2}$$

$$v=\frac{mL\sin\theta}{M+m}\sqrt{\frac{2\left(M+m\right)g\sin\theta}{L\left(M+m\cos^2\theta\right)}} \tag{3}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\frac{m\left[(3M+2m)\sin\theta\cos\theta+m\sin\theta\cos^3\theta\right]}{\left(M+m\cos^2\theta\right)^2}g \tag{4}$$

在木块系中 (F 为绳子拉力)

$$F\cos\theta=Ma \tag{5}$$

考虑临界情况

$$-Mg\frac{L}{2}-Ma\frac{h}{2}+F\cos\theta\left(L+\frac{h}{2}\right)-F\sin\theta L\geq 0 \tag{6}$$

化简得

$$a\geq\frac{g}{2(1-\tan\theta)} \tag{7}$$

即

$$\frac{2m\left[(3M+2m)\left(\sin\theta\cos\theta\right)+msin\theta\cos^3\theta\right]\left(1-\tan\theta\right)}{\left(M+m\cos^2\theta\right)^2}\geq 1 \tag{8}$$

令 $\frac{M}{m}=k$,$\tan\theta=t$

$$\alpha=\frac{2\left[\left(3k+2\right)\left(1+t^2\right)t+t\right]\left(1-t\right)}{\left[k\left(1+t^2\right)+1\right]^2}\geq 1 \tag{9}$$

对 (6) 左式求导取极值

$$\left[k\left(1+t^2\right)+1\right]\left\{\left[(3k+2)\left(1+3t^2\right)+1\right](1-t)-\left[(3k+2)\left(1+t^2\right)t+t\right]\right\}=4kt\,(1-t)\left[(3k+2)\left(1+t^2\right)t+t\right] \tag{10}$$

$$\left(3k^2+2k\right)t^4+\left(6k^2+14k+8\right)t^3-(6k+b)\,t^2+\left(6k^2+12k+6\right)t-\left(3k^2+6k+3\right)=0 \tag{11}$$

$$\text{代入}k=1\text{解得}t=0.4765453307 \tag{12}$$

$$\text{代入(11)解得}\alpha=0.7177259631<1,\text{故不会翻起} \tag{13}$$

$$\text{代入}k=\frac{1}{2}\text{解得}t=0.5043814407 \tag{14}$$

$$\text{代入(11)解得}\alpha=1.017831264>1,\text{故会翻起，可得}\theta=23.688^\circ \tag{15}$$

评分标准:

共 50 分

(1), (2), (3), (4), (5), (7), (8), (9), (10), (11) 各 3 分,(12), (13), (14), (15) 各 5 分