

1 受限三体问题与拉格朗日点 (60 分)

对于任意给定的 m_1, m_2, m_3 , 仅在万有引力的作用下运动, 在任意给定初值的条件下求解 m_1, m_2, m_3 的运动的问题称作三体问题, 时至今日依旧没有解析解, 但对于 $m_1, m_2 \gg m$ 的情况下, 且完全忽略 m 对 m_1, m_2 运动的影响, 称为受限三体问题。

在这类问题中, 有一些点满足在 m_1, m_2 公转系中静止的条件, 这些点称为拉格朗日点。

下认为 m_1, m_2 均作圆周运动, 以质心为原点, $(r_1, 0)$ 表示 m_1 的位置, $(-r_2, 0)$ 表示 m_2 的位置, 且 $r = r_1 + r_2$ 。

- (1) 给出任意 (x, y) 处的有效势. (单位质量势能, m_1, m_2 除外)
- (2) 给出拉格朗日点满足的方程 (无需求解) 给出 $y = 0$ 拉格朗日点的个数, 并定性描述其位置.

在一定近似下, 我们可以求解, 如令

$$\epsilon = \frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0.$$

- (3) 给出 $y = 0$ 时的零阶解, 并进一步描述位置.
- (4) 给出 $y = 0$ 时的一阶解, 并给出坐标.
- (5) 求出剩下的点, 并指出其特殊几何关系.