第二届 ΣPho 物理竞赛

试题部分

2023 年 12 月

命题: 胡锦浩、盛铖开、应佑、李骏亭、孙可名
审题: 胡锦浩、盛铖开、应佑、李骏亭、孙可名
组题: 胡锦浩

考生必读

1. **考生考试前请务必阅读本须知。**
2. **本试题共 8 题，满分 320 分。**
3. **如遇到试题印刷不清楚的情况，请向监考老师提出。**
4. **需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸相应题号后面的空白处；阅卷老师只评阅答题纸上的内容，写在试题纸和草稿纸上的内容一律不被评阅。**

第一题、功亏一篑 (40 分)

众所周知，台球先打彩球，最后打黑 8，但若打黑 8 时白球同时进洞，则直接判对方获胜。小 s 同学就经常干这类愚蠢之事，现建模分析。

若已知每个球的质量为 m，重力加速度为 g，桌面滑动摩擦系数为 μ，半径为 R。

(1) 求打击何处时，可以使其直接进入纯滚。(杆对球的力沿水平方向)

(2) 若小 s 同学用 (1) 方式击打白球，使其获得速度 v_0, 撞击与洞口距离为 l 的黑 8（弹性正碰，且白球，黑 8，洞口共线，忽略两球间摩擦）。

(2.1) 白球是否会进洞?

(2.2) 求白球在入洞前摩擦力做的功。

(2.3) 若白球进洞，求白球在黑球之后多久入洞。若白球不进洞，求白球停在距洞多远处。

第二题、打飞机奇遇 I(40 分)

小 s 同学一天看到天上飞过一架漂亮国的飞机，于是想设计一个电磁炮把它打下，现在来分析这一过程。

(1) 小 s 同学先设计了一个可以产生 $\vec{B}=k\cdot z^{3/2}\hat{z}$ 磁感应强度的线圈，然后以 v_0 从 $z=0$（以炮弹尾而言）处发射一枚炮身电导率为 σ 的金属圆柱壳，其厚度为 t，弹头为绝缘材料的炮弹，已知炮管长 L，不计重力，求出射时炮弹速度。炮身长 l，半径为 r，炮弹总质量为 m.

(2) 但是小 s 同学惊奇的发现（1）中的炮弹出射速度小于 v_0, 于是他重新进行设计，仅将电导率为 σ 的金属壳换成超导圆柱壳，初始磁通量为零, 磁感应强度改为 $\vec{B}=(B_0-kz)\hat{z}$，其他参量均不变，且 $B_0>k(L+\frac{l}{2})$ 将炮弹从 $z=0$ 处（相对弹尾而言）静止释放，不记重力，求出射速度。

(3) 设计完成后他还不满足，又设计了一新型炮弹，全部为绝缘材料，但体心有一微小的，通有恒流 I，半径为 R 的金属环（可视为磁偶极子）磁场改为 $\vec{B}=k\cdot z^{\alpha}\hat{z}$, 炮弹质量为 m，炮身长 L，初始时位于 $z=0$（相对金属环而言）处，求出射速度。

第三题、物质电导的经典理论 (40 分)

经典电子论的基础是由 P.K.L.Drude 在 1900 左右提出的。其模型如下：

1. 将金属分为固定不动（可在附近做振动）的原子核和自由移动的电子（自由电子气，满足能均分定理）。
2. 自由电子的运动决定了金属的导热性与导电性。
3. 自由电子与原子核碰撞来交换能量，从而达到热平衡。

(1) Ohm 定律，简单认为电子以平均速率 $\bar{u}$ 运动, 且与原子核相碰后完全失去定向移动速率，设平均自由程为 $\bar{\lambda}$, 电子热运动以热运动平均速率 $\bar{u}$ 运动。

试证明：

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}$$

并给出 σ, 用电子质量 m，电量绝对值 e，数密度 n（一价金属），平均自由程 $\bar{\lambda}$ 表示。

(2) Joule-Lenz 定律, 电子与原子核相碰后，其动能完全转化为原子核的热振动动能，给出热运动功率密度（单位体积内放出的热能）。用电场 $\vec{E}$ 与一个用上已知量表示的常数给出。

(3) Wiedemann-Frantz 定律，给出导热系数 κ 的微观表达式以及与电导率 σ 之间的关系

提示：傅里叶热传导定律

$$j_q=-\kappa\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$$

其中 j_q 为单位时间流过单位面积的能量。
注意：本题无需考虑 Maxwell 速率分布

第四题、打飞机奇遇 II(40 分)

经过巨长时间，小 s 同学终于造好了电磁炮，准备开始打飞机了。

(1) 小 s 同学想先检验自己的力量，于是先用手扔炮弹，已知此速度下空气阻力为 $\vec{f}=-k\vec{v}=-m\beta\vec{v}$, 小 s 同学抛出炮弹的速度为 v_0，与竖着方向夹角为 θ_0，质量为 m，重力加速度为 g，以抛出点为原点，求 $x(t),y(t)$

(2) 没上过几节体育课的小 s 同学力量不够，炮弹打不到飞机，于是他启用了新建的电磁炮，在此速度下阻力近似为 $\vec{f} = -m\beta|\vec{v}|\vec{v} = -c|\vec{v}|\vec{v}$, 已知初速度为 v_0, **角度为 θ_0(与上题不同，此为与水平方向夹角)**，重力加速度为 g，质量为 m。

(2.1) 列出自然坐标系下的动力学方程（可带曲率半径 ρ）

(2.2) 以 v，θ 为变量列出微分方程并积分得 $v(\theta)$，并得到炮弹最高点的速度，再代入 $\beta = 0$ 检验你的结果.

提示：用 ρ 的自然坐标表示式，并用 $v\cos\theta$ 换元.

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

(2.3) 若用电磁炮直接轰击漂亮国的首都，（不考虑地球弯曲），且出射速度极大 $\theta_0 = 0$ 轨道近似为直线，在此条件下求解 x 关于 t 的函数，并求出轨迹方程 $y(x)$ (提示：用 ρ 的直角坐标表示)

第五题、简单热力学 (40 分)

本题探究热力学方程得出热力学参量。

补充:Maxwell 关系

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$
$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = +\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = +\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

(1) 对于气体系统

(1.1) 试证:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

(1.2) 试证: 对于任意系统，均有

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V$$

(1.3) 给出 1 mol 气体的 Van der Waals 方程

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

试证明其定容摩尔热容仅是温度的函数，并在温度变化不大时，求出其内能与熵的表达式，可含积分常数。

(1.4) Redlich-Kwong 方程考虑了温度及密度对分子间作用力的影响.

1mol 的 R-K 方程为

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{\sqrt{T}V(V + b)}$$

给定 $V \to 0$ 时，其定容摩尔热容 $C_{V_0}(T)$. 试求任意状态时其 C_V 的值.

(2) 对于表面系统，给定表面的张力系数 $\sigma(T)$. 液体表面积用 A 表示

(2.1) 已知自由能 $F=U-TS$ 是求表面系统的内能与自由能的微分表达式.

提示: 需要考虑温度的影响

(2.2) 在等温条件下，对 F 进行积分. 求出 F 的表达式.(积分常量由自己定需符合实际)

(2.3) 前两问进行对比得出表面系统熵和内能的表达式.

第六题、虚光子与作用力 (40 分)

近代物理认为，粒子之间碰撞时的能量变化是通过交换粒子完成的, 本题对此种物理过程作一些简单的计算与分析 (**送分题，不要跳过——出题人**)

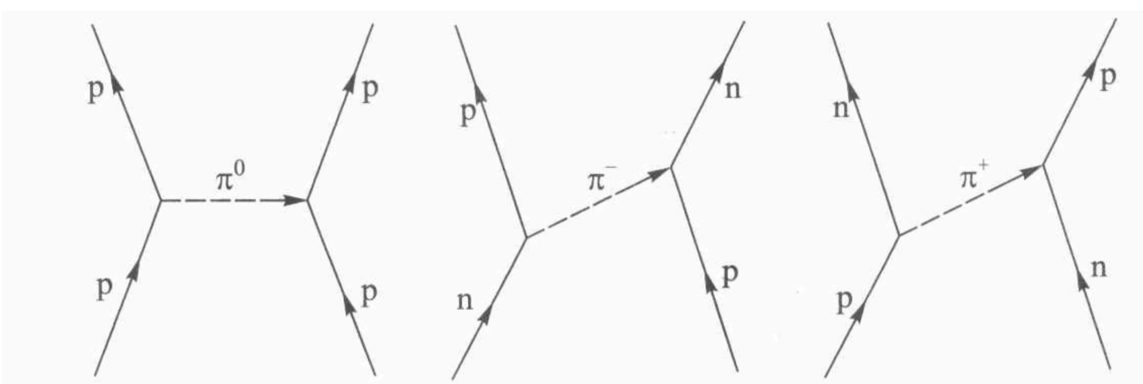
(1) 试就两粒子以任意大小、方向的动量发生碰撞，证明此过程若是为两粒之间传递一个粒子，该粒子的质量不可能为非零实数。（仅就正碰情况下讨论的不得分）

(2) 在该类过程中较短时间 Δt 内, 交换的粒子允许的能量守恒的微小偏离 ΔE，若满足 Heisenberg 不确定关系, 即 $\Delta E\cdot\Delta t\leq\dfrac{\hbar}{2}$ 此问取 $\Delta E\cdot\Delta t\sim\hbar$，作用力程为 Δr，试估计交换粒子的静能，用 Δr 与若干常数表示。

(3) 对于核力，其力程约为 $\Delta x\approx 2\text{fm}$ 试估计核力中交换粒子的静能.

(4) 基于此种思想,Y.Yukawa 通过核力与电磁力的类比提出核力的介子理论. 认为核力的作用是通过交换 π 介子完成的，π 介子的存在于 12 年后得到证实。

该粒子分为 π^0,π^+,π^- 分别带电 $0,e,-e$, 质子中子利用其产生作用的方式，如下图



并在以上过程可保持初末粒子几乎静止，已知 $|m_p-m_n|\ll m_\pi$. 粒子波函数为复数形式的球面波（与光波相同），试证明 π 介子的动量为虚数并给出核子间相互作用势能（与波函数成正比）与 r 的依赖关系.

(5) 请回答电磁相互作用中交换粒子是？

第七题、Kerr 盒 (40 分)

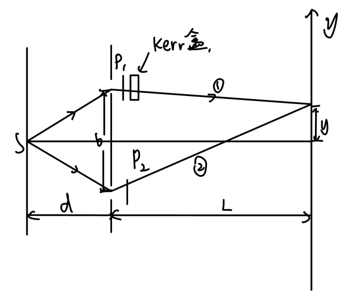


图 1

已知 Kerr 盒相当于一波晶体片，因其导致 o 光,e 光间光程差满足下式

$$\frac{\Delta}{2\pi} = \frac{|n_o - n_e|d}{2\pi} = B\frac{E^2 d}{\lambda}$$

其中 d 为 Kerr 盒长。

如图偏振片 P_1, P_2 偏振方向夹角为 θ，o 振动光矢量垂直于主平面. Kerr 盒对应光轴方向垂直于 P_2 偏振方向，双缝干涉参数如图。

(1) 试求光线 ① 通过 Kerr 盒后椭圆偏振光的椭圆参数. 即长轴大小, 方向（用通过偏振片后振幅 A 表示）

(2) 试求屏上光强分布

$$T(y) = \frac{1}{T}\int_0^T |\vec{E}|^2 \mathrm{d}t$$

(3) 试求衬比度

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

第八题、可爱的杆 (40 分)

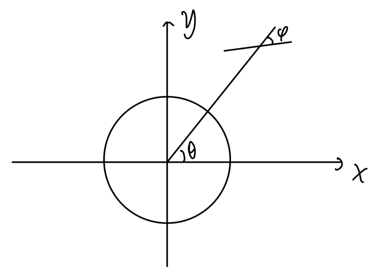


图 2

一根杆位于太空中绕一质量为 M 的中心天体旋转。杆质地坚硬，长为 $2l$，质量为 m，杆质心距离中心天体 r，角度 φ 如图所示，已知 $r \gg l$

(1) 求使 $r, \dot{\theta}, \varphi$ 不随时间变化的**稳定的** φ 值。并求出此时 $r, \dot{\theta}$ 应满足的关系，保留至 $\frac{l^2}{r^2}$ 阶。

(2) (i) 设系统原来以 (1) 中稳定的运动方式运动，现给杆微扰，使其具有一定的 $\dot{r}, \dot{\varphi}$ 初始值，试求有关 r, θ, φ 的运动微分方程

(ii) 令 $r = r_0 + \Delta r$，$\dot{\theta} = \omega_0 + \Delta\omega$, 其中满足 $\dfrac{\Delta r}{r_0} \sim \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} \sim \varphi \sim \dfrac{l^2}{l_0^2} \ll 1$，试求 φ 可以具有的两种频率（不必求出特解），并判断两频率是否与 l 相关。试就两频率的来源分别简述原因

(iii) 求此时杆质心运动的旋进角速度 (进动角速度)。(原运动完成一个周期后, 矢径转过的角度与原运动得到周期比值)