第一届 ΣPho 物理竞赛试题

2023 年 11 月

命题：胡锦浩，盛铖开、应佑、李骏亭
审题，组题：胡锦浩

考生必读

1. **考生考试前请务必阅读本须知。**
2. **本试题共 7 题，满分 320 分。**
3. **如遇到试题印刷不清楚的情况，请向监考老师提出。**
4. **需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸相应题号后面的空白处；阅卷老师只评阅答题纸上的内容，写在试题纸和草稿纸上的内容一律不被评阅。**

第一题、简单光学题 (40 分)

(1) 一宽平行光束正入射到折射率为 n 的平凸透镜左侧平面，汇聚到平凸透镜主轴上的 F 点，已知 $\overline{OF}=r_0$ 给出凸面型状，并给出其在直角坐标系下的标准方程，(需声明原点)。

(2) 磁场透镜

一宽束质量，速度，电荷量分别为 m,v,q 入射到 $x=0$ 平面。已知在第一、四象限存在大小为 B，方向相反的磁场区域，出射后汇聚于 $F(f,0)$ 处，给出磁场区域边界方程。

(3) 电场透镜

一宽束质量，速度，电荷量分别为 m,v,q 入射到 $x=0$ 平面。全空间中分布着如下电场

$$\vec{E}=\begin{cases}-ky^{\alpha}\hat{y}(y>0)\\ ky^{\alpha}\hat{y}(y<0)\end{cases}$$

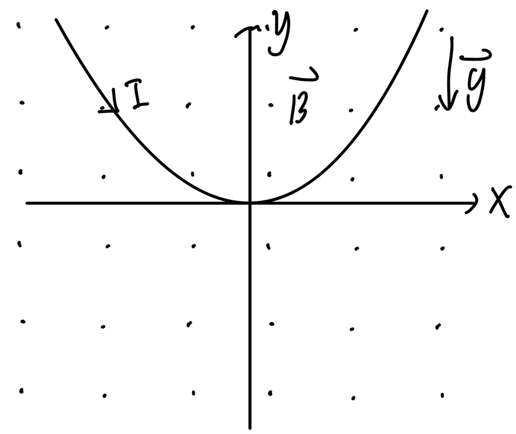
出射后汇聚于 $F(f,0)$ 处，通过一些性质给出 α，并给出 k 的定量表达式。

(4) 正经光学题

一束光平行于 x 轴方向入射，第一、四象限存在折射率只与 y 有关的介质，其边界是锯齿状的，使得光能垂直接着入射，出射后汇聚于 $F(f,0)$ 处，在 $(0,0)$ 处折射率为 n_0，类比 (3) 给出折射率分布与边界方程.

第二题、悬链线 (40 分)

竖直平面内挂有一根柔软的质量线密度为 λ 的均匀导线，其中通有电流 I, 存在如图所示的匀强磁场 B, 重力场 g 已知底部 $(x,y)=(0,0)$ 处张力为 T_0。试求其形状的微分方程，用 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 表示



(1) 取 $B=0$, 求其轨迹方程。

注：双曲函数定义

$$\cosh(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},\sinh(\theta)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

(2) 取 $g=0$, 求其轨迹方程。

(3) 试求其形状的微分方程，用 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 表示.

第三题、液体表面张力系数的确定 (40 分)

众所周知液体有表面张力，但是往往表面张力系数是由实验测定的，下尝试通过理论方式建立。

(1) 已知热力学第一定律的微分形式是 $\mathrm{d}U=Y\mathrm{d}y+T\mathrm{d}s$，其中 Y 是广义力，y 是广义坐标, 给出表面张力系统的热力学第一定律的微分形式。

液体内部的分子，其周围所受的力在平均后是各向同性的，但在液体表面，由于上面部分没有液体分子。用"作用力球"来说明，就是液体内部"作用力球"完整，而在表面"作用力球"少了一个球冠，从而导致了其受力并不为零，下给出定量分析的模型。

计液体内任意两个相邻的分子之间的相互作用能为 ε, 且液体内部一个分子与 n 个分子相邻，在表面与 ζn 个分子相邻.

(2) 给出内外分子势能的差值。

(3) 设表面的粒子面密度为 σ_n, 求形成 $\mathrm{d}A_S$ 面积的表面时做的功，并用 $\sigma_n,\varepsilon,n,\zeta$ 表示表面张力系数 σ。

下确定 ε. 考虑液体汽化过程，给出摩尔汽化热 L_m(认为是从内部分子汽化出去的).

(4) 给出 ε，用 L_m,N_A,n 表示表面张力系数。

(5) 认为一个分子占据半径为 d 的空间，给出液体分子的摩尔质量 μ 和密度 ρ，用 ζ,L_m,N_A,ρ,μ 表示表面张力系数 σ

现考虑混合液体的表面张力系数，设液体的两种组分为 $\mu_1,\rho_1,d_1,n_1,\zeta_1,\sigma_{n_1}$ 和 $\mu_2,\rho_2,d_2,n_2,\zeta_2,\sigma_{n_2}$, 其中 n 数密度，液体内两种组分每个分子与均与 x_1,x_2 个分子相邻。两种组分之间的相互作用能为 $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12}$，并假设 $|\varepsilon_{12}|=\sqrt{|\varepsilon_{11}||\varepsilon_{22}|}$

(6) 给出混合液体的表面张力系数 σ_{12}, 用 $\mu_1,\rho_1,d_1,n_1,\zeta_1,\sigma_{n_1},x_1,\mu_2,\rho_2,d_2,n_2,\zeta_2,\sigma_{n_2},x_2$

第四题、受限三体问题与拉格朗日点 (60 分)

对于任意给定的 m_1, m_2, m_3，仅在万有引力的作用下运动，在任意给定初值的条件下求解 m_1, m_2, m_3 的运动的问题称作三体问题，时至今日依旧没有解析解，但对于 $m_1, m_2 \gg m$ 的情况下，且完全忽略 m 对 m_1, m_2 运动的影响，称为受限三体问题。

在这类问题中，有一些点满足在 m_1, m_2 公转系中静止的条件，这些点称为拉格朗日点。

下认为 m_1, m_2 均作圆周运动，以质心为原点，$(r_1, 0)$ 表示 m_1 的位置，$(-r_2, 0)$ 表示 m_2 的位置，且 $r = r_1 + r_2$。

(1) 给出任意 (x, y) 处的有效势.（单位质量势能，m_1, m_2 除外）

(2) 给出拉格朗日点满足的方程（无需求解）给出 $y = 0$ 拉格朗日点的个数，并定性描述其位置.

在一定近似下，我们可以求解，如令

$$\varepsilon = \frac{m_1}{m_2} \to 0.$$

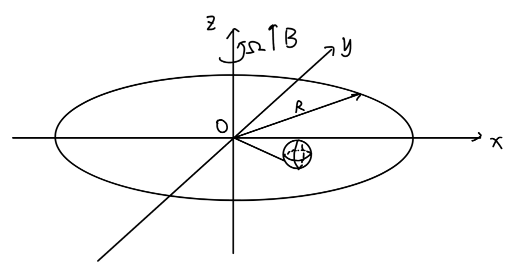
(3) 给出 $y = 0$ 时的零阶解，并进一步描述位置.

(4) 给出 $y = 0$ 时的一阶解，并给出坐标.

(5) 求出剩下的点，并指出其特殊几何关系.

第五题、匀强磁场中带电小球在圆盘上的运动 (50 分)

考虑一个沿 z 轴以匀角速度 Ω 转动的薄圆盘半径为 R，质量为 M。有一半径为 r，均匀带电量为 Q，质量为 m 的小球，小球与圆盘间无滑动。全空间存在竖直向上的匀强磁场，大小为 B.



初始将小球静止放在 $(r_0, 0, 0)$ 处，考虑其运动。

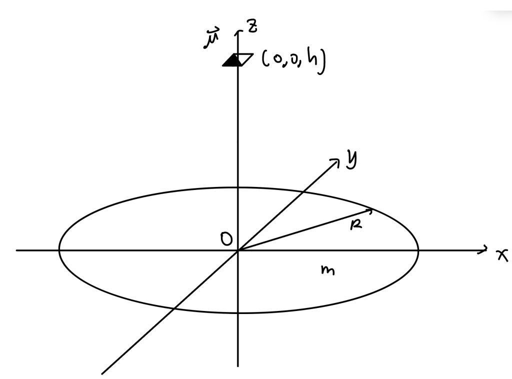
(1) 当带电小球以 $\vec{\omega}$ 转动时, 求带电小球的总磁矩 $\vec{\mu}$。

注：磁矩定义 $\vec{\mu} = I\vec{S}$

(2) 初始 $t = 0$，求解之后的运动。

第六题、Arago 圆盘 (40 分)

高二这次期中考考了一个有关于 Arago 圆盘的选择题，小 H 同学对 J 老师的解释不是很满意，于是他尝试自己着手计算一下。



将小磁针认为是一个磁偶极子，大小为 μ。下方 h 处有一个带电薄圆盘质量为 m, 半径为 R, 以 ω 转动。

(1) 现固定小磁针，将下方带电薄圆盘以 Ω 恒定速度转动，求小磁针受到的力矩。

(2) 现释放小磁针，并解除下方维持带电薄圆盘匀速转动的力矩，求两者共速后的共同角速度 Ω.

补充：磁偶极子的场

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{(3(\vec{\mu}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{\mu})}{|\vec{r}|^3}$$

第七题、“简单力学题”(50 分)

光滑水平面上有一木块，匀质质量为 M, 在左端中间固定有一档板，其上有一绳，一侧系有一质量为 m 得质点。其中各参数如图所示，初态均静止，细绳水平释放质点。试就 $\frac{M}{m} = 1, \frac{1}{2}$ 时, 求木块右侧是否会离开地面。若会，其第一次离开时的 θ .