# 受限三体问题与拉格朗日点 (60 分)(命题：HJH)

(1) 先求公转角速度

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = \Omega^2 r_1 m_1 = \Omega^2 \frac{m_1m_2r}{m_1+m_2}$$

$$=> \Omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{r^3} \tag{1}$$

$$V_{\text{eff}}(x,y) = \frac{-Gm_1}{\sqrt{(x-r_1)^2+y^2}} - \frac{Gm_2}{(\sqrt{(x+r_2)^2+y^2}} - \frac{1}{2}\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}(x^2+y^2) \tag{2}$$

(2)

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial x} = 0 = \frac{Gm_1(x-r_1)}{[(x-r_1)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2(x+r_2)}{[(x+r_2)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{G(m_1+m_2)}{r^3}x \tag{3}$$

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial y} = 0 = \frac{Gm_1y}{[(x-r_1)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2y}{[(x+r_2)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{G(m_1+m_2)}{r^3}y \tag{4}$$

对于 $y=0,(4)$ 易知满足，对于 (3)，同除 $\dfrac{G(m_1+m_2)}{r}$, 得

$$\frac{r_2(x-r_1)}{|x-r_1|^3} + \frac{r_2(x+r_2)}{|x+r_2|^3} = \frac{x}{r^2} \tag{3'}$$

令 $f(x) = \dfrac{r_2(x-r_1)}{|x-r_1|^3} + \dfrac{r_2(x+r_2)}{|x+r_2|^3}$, 有

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^- \tag{5}$$

$$\lim_{x\to(-r_2)^-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to(-r_2)^+} f(x) = +\infty \tag{6}$$

$$\lim_{x\to(r_1)^-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to(r_1)^+} f(x) = +\infty \tag{7}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+ \tag{8}$$

$$\text{可见，有3根} \tag{9}$$

$$L_1(-\infty,-r_2), L_2(-r_2,r_1), L_3(r_1,\infty) \tag{10}$$

(3) 在 $\dfrac{m_2}{m_1} = \varepsilon \to 0$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}r \approx \varepsilon(1-\varepsilon)r \tag{11}$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}r = \frac{1}{\varepsilon+1}r \approx (1-\varepsilon)r \tag{12}$$

保留零阶，代入 (4) 式

$$\frac{rx}{|x|^3} = \frac{x}{r^2} \tag{13}$$

$$=> x = \pm r \tag{14}$$

$$\text{可得}L_1,L_2\text{在}m_2\text{附近，}L_3\text{在离原点}r\text{附近} \tag{15}$$

(4) 对于 $L_1, L_2$, 令 $x = -r + \delta_{1,2}r$, 带入 (4) 式，保留一阶

$$-\frac{(1-\varepsilon)r}{(-r+\delta_{1,2}r-\varepsilon r)^2} \pm \frac{\varepsilon r}{(-r+\delta_{1,2}r+(1-\varepsilon)r)^2} = \frac{-r+\delta_{1,2}r}{r^2} \tag{16}$$

$$\pm\frac{\varepsilon}{(\delta_{1,2}-\varepsilon)^2}=3(\delta_{1,2}-\varepsilon)$$

由于两边小量阶数一致，取 $1\gg\delta_{1,2}\gg\varepsilon$ , 带入有

$$\pm\frac{\varepsilon}{\delta_{1,2}^2}\left(1+\frac{2\varepsilon}{\delta_{1,2}}\right)=3(\delta_{1,2}-\varepsilon)$$

$$=>\pm\frac{\varepsilon}{\delta_{1,2}^2}=3\delta_{1,2}^2$$

$$=>\delta_{1,2}=\pm\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{17}$$

对于 $L_3$, 令 $x=r+\delta_3$

$$\frac{1-\varepsilon}{(1+\delta_3-\varepsilon)^2}+\frac{\varepsilon}{(1+\delta_3+1-\varepsilon)^2}=1+\delta_3 \tag{18}$$

得

$$\delta_3=\frac{5}{12}\varepsilon \tag{19}$$

故

$$L_1\left(-r-(\frac{\varepsilon}{3})^{\frac{1}{3}}r,0\right) \tag{20}$$

$$L_2\left(-r+(\frac{\varepsilon}{3})^{\frac{1}{3}}r,0\right) \tag{21}$$

$$L_3\left(r+\frac{5}{12}\varepsilon r,0\right) \tag{22}$$

(5) 由 (4) $\times\frac{x}{y}$ 与 (3) 相减得

$$\frac{-r_1r_2}{[(r_1-x)^2+y^2]^{\frac{2}{3}}}+\frac{r_1r_2}{[(r_2+x)^2+y^2]^{\frac{2}{3}}}=0 \tag{23}$$

由 (4) $\times\frac{1}{y}$ 得

$$\frac{r_2}{[(r_1-x)^2+y^2]^{\frac{2}{3}}}+\frac{r_1}{[(r_2+x)^2+y^2]^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{r^2} \tag{24}$$

(23), (24) 可看作关于分母的一元二次方程组，解得

$$(r_1-x)^2+y^2=(r_2+x)^2+y^2=r^2 \tag{25}$$

$$x=\frac{r_1-r_2}{2},y=\pm\frac{\sqrt{3}r}{2} \tag{26}$$

$$\text{可得}L_4,L_5\text{与}m_1,m_2\text{构成两个等边三角形} \tag{27}$$

**评分标准:**

共 60 分

(1) 共 4 分 (1), (2) 各 2 分

(2) 共 16 分 (3), (4) 各 2 分,(5), (6), (7), (8) 各 2 分 (9) 各 2 (10)2 分

(3) 共 8 分 (11), (12), (13) 各 1 分 (14)3 分 (15) 2 分

(4) 共 20 分 (16)2 分 (17) 6 分 (18)2 分 (19) 各 4 分 (20), (21), (22) 各 2 分

(5) 共 12 分 (23) 2 分 (25) 4 分 (26) 4 分 (27) 2 分