

可爱的杆 (60 分)

一根杆位于太空中绕一质量为 M 的中心天体旋转。杆质地坚硬，长为 $2l$ ，质量为 m ，杆质心距离中心天体 r ，角度 φ 如图所示，已知 $r \gg l$

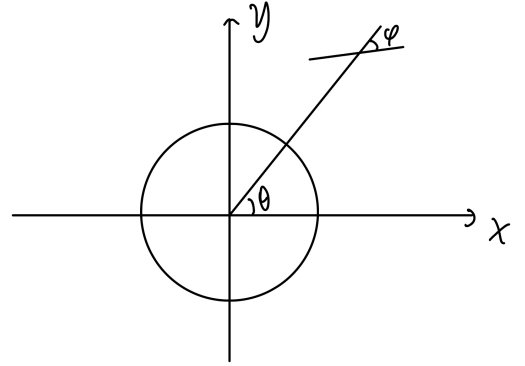


图 1

- (1) 求使 $r, \dot{\theta}, \varphi$ 不随时间变化的**稳定的** φ 值。并求出此时 $r, \dot{\theta}$ 应满足的关系，保留至 $\frac{l^2}{r^2}$ 阶。
- (2) (i) 设系统原来以 (1) 中稳定的运动方式运动，现给杆微扰，使其具有一定的 $\dot{r}, \dot{\varphi}$ 初始值，试求有关 r, θ, φ 的运动微分方程
- (ii) 令 $r = r_0 + \Delta r, \dot{\theta} = \omega_0 + \Delta\omega$ ，其中满足 $\frac{\Delta r}{r_0} \sim \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sim \varphi \sim \frac{l^2}{l_0^2} \ll 1$ ，试求 φ 具有的两种频率（不必求出特解），并判断两频率是否与 l 相关。试就两频率的来源分别简述原因
- (iii) 求此时杆质心运动的旋进角速度。（原运动完成一个周期后，矢径转过的角度与原运动得到周期比值）