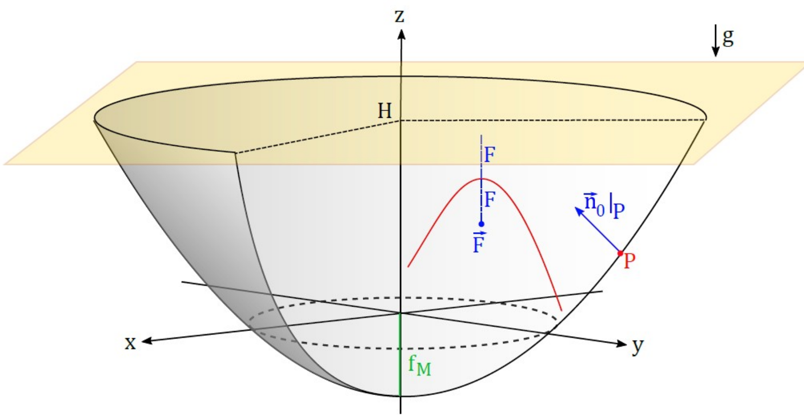
重力弹球 (80 分)

弹球可以用来解决理论力学、拓扑、数论、几何问题。假设碰撞是弹性的。在这个系统中，粒子可以在边界上无限次弹跳。在本题中，我们将考虑在存在重力场的情况下粒子在抛物面上的弹跳。这种系统出现在科学仪器的设计中，例如带有超冷中子的中子显微镜和用于捕获冷原子的存储腔。在这两种情况下，粒子的能量都很低，以至于要考虑重力的作用。

下假设旋转抛物面为

$$M(x,y,z) = z - \frac{x^2+y^2}{4f} + f = 0$$



PART.A 一些准备工作

(A.1) 对于旋转抛物面 M 上一点 $P(x,y,z)$，请写出其单位法向量 $\vec{n}|_P$.

(A.2) 请写出以速度 $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ 起跳的质点的运动轨迹的半焦距 F.

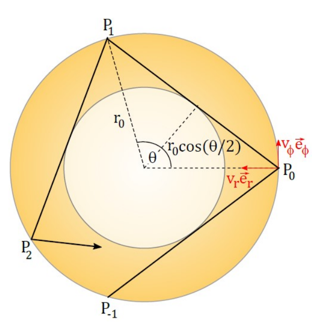
(注：抛物线的标准方程为 $x^2=2py$，其中 p 是焦距).

(A.3) 设在 $P(x,y,z)$ 发生碰撞。用碰撞前的速度 $\vec{v}$ 与单位法向量 $\vec{n}|_P$，写出碰撞后速度.

(A.4) 证明：碰撞前后 $\hat{z}$ 方向角动量守恒.

PART.B 一种特殊情况

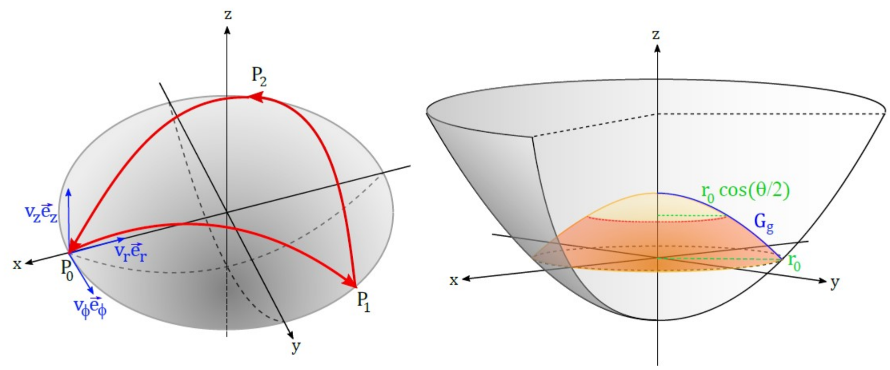
下面考虑碰撞点在一个固定的水平圆上的情况. 为方便起见，现我们在极坐标系下考虑这个问题。如图将其投影在 $xO'y$ 平面上。



(B.1) 写出 θ, v_r, v_ϕ 之间的关系.

(B.2) 用 r_0, f_m, θ, 写出 v_r, v_ϕ, v_z.

(B.3) 写出轨迹的包络面 (以 O' 为原点)



PART.C 二维抛物线内的弹球

由于在三维中计算过于复杂，这里我们退而求其次，在二维中分析这个问题。

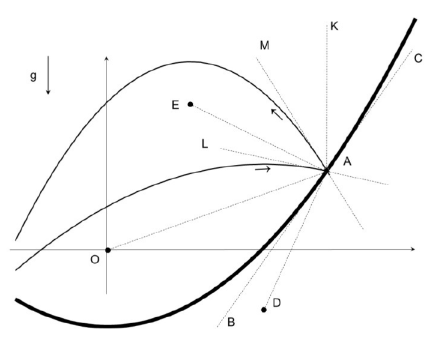
此时, 抛物线方程可写作

$$M(x,z) = z - \frac{x^2}{4f} + f = 0$$

(C.1) 写出从同一点，以相同速度 v 抛出的粒子运动轨迹的焦点所构成的曲线.

(C.2) 考虑在 A 点发生的碰撞，LA 为入射轨迹切线，LM 为出射轨迹切线。D，E 分别为入射出射轨迹的焦点，BAC 为 M 在 A 处的切线，KA 为竖直线.

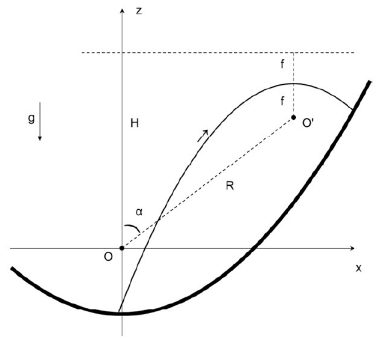
请证明：$\angle EAO = \angle OAD$(提示：利用抛物线的光学性质)



(C.3) 接上问，写出准线方程，并说出你的发现.

(C.4) 证明: 运动轨迹的焦点到 O 的距离为定值

(C.5) 给定准线方程 $y = H$，上问中的定值为 R，写出包络线方程.(提示：有两条)



(C.6) 证明: 相邻两次碰撞点在以 O 与轨迹焦点为焦点的椭圆上.