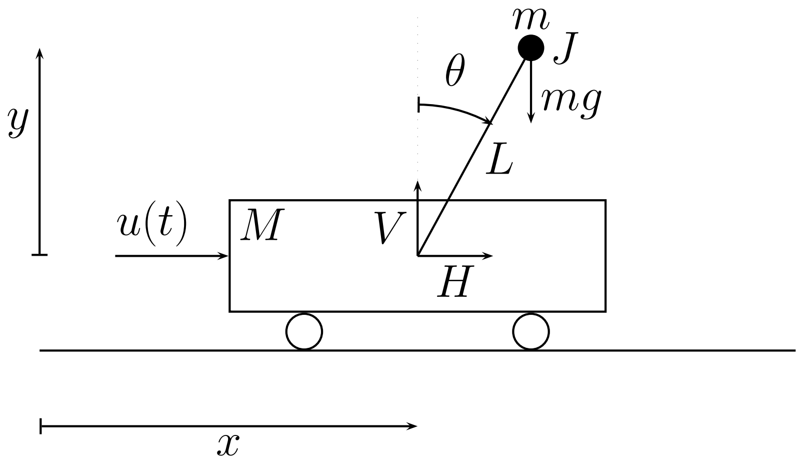
Controllo del pendolo inverso

Esempio. Sia dato il seguente sistema fisico.



Calcolare una retroazione dinamica dell'uscita θ che stabilizzi il sistema nell'intorno del punto $\theta = 0$.

Introdotte le variabili ausiliarie V ed H che descrivono l'interazione tra l'asta e il carrello, le equazioni dinamiche del sistema sono le seguenti:

$$\text{Asta :}\quad \begin{cases} H(t) = m\frac{d^2}{dt^2}(x + L\sin\theta) \\ V(t) - mg = m\frac{d^2}{dt^2}(L\cos\theta) \\ J\ddot{\theta} = VL\sin\theta - HL\cos\theta \end{cases}$$

$$\text{Carrello :}\quad M\ddot{x} = u(t) - H(t)$$

Se si trascura l'azione dell'asta sul carrello, $H(t) \simeq 0$, l'accelerazione $\ddot{x}$ risulta proporzionale alla forza di ingresso $u(t)$:

$$H(t) \simeq 0 \qquad \rightarrow \qquad \ddot{x} = \frac{u(t)}{M}$$

Eliminando le variabili ausiliarie H e V dal precedente sistema, si trova un'equazione differenziale che esprime l'equilibrio del movimento attorno al punto di cerniera tra asta e carrello:

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} = mgL\sin\theta - m\ddot{x}L\cos\theta$$

Esplicitando $\ddot{\theta}$ e sostituendo $u(t)/M$ al posto si $\ddot{x}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{mL}{(J+mL^2)} g \sin\theta - \frac{mL}{(J+mL^2)} \frac{u}{M} \cos\theta \\ &= \alpha g \sin\theta - \frac{\alpha}{M} u \cos\theta\end{aligned}$$

dove, per brevità, si è posto

$$\alpha = \frac{mL}{(J+mL^2)}$$

Utilizzando il seguente vettore di stato:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad x_1 = \theta, \qquad x_2 = \dot{\theta}, \qquad y = \theta = x_1$$

il sistema dato può essere descritto nello spazio degli stati nel modo seguente

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha g \sin x_1 - \frac{\alpha}{M} u \cos x_1 \end{cases}$$

Quando $u = 0$, i punti di equilibrio del sistema sono $\mathbf{x} = k\,\pi$ con $k \in \mathcal{Z}$. Linearizzando nell'intorno del punto di equilibrio $\mathbf{x} = 0$ si ha:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{(0,0)} \mathbf{x} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right]_{(0,0)} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha g \cos x_1 + \frac{\alpha}{M} u \sin x_1 & 0 \end{bmatrix}_{(0,0)} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{M} \cos x_1 \end{bmatrix}_{(0,0)} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha g & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{M} \end{bmatrix} u = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}\end{aligned}$$

Gli autovalori $s_{1,2}$ della matrice $\mathbf{A}$ sono reali e distinti:

$$\Delta_A(s) = s^2 - \alpha g = (s + \sqrt{\alpha g})(s - \sqrt{\alpha g}) \qquad \rightarrow \qquad s_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha g}$$

<u>*Retroazione statica dell'uscita*</u>. Posto:

$$u(t) = \bar{k}\, y = \bar{k}\, \mathbf{C}\, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{k} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

la matrice del sistema retroazionato è:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{k}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha g - \bar{k}\frac{\alpha}{M} & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è:

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\bar{k}\mathbf{C}}(s) = s^2 - \left(\alpha g - \bar{k}\frac{\alpha}{M}\right)$$

Per $\bar{k}$ grande gli autovalori sono immaginari; per $\bar{k}$ piccolo gli autovalori sono reali ed uno dei due è a parte reale positiva. Ne segue che il sistema non è stabilizzabile mediante una retroazione statica dell'uscita.

<u>*Retroazione statica dello stato*</u>. La matrice di raggiungibilità del sistema è a rango pieno

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{M} \\ -\frac{\alpha}{M} & 0 \end{bmatrix}$$

per cui mediante una retroazione statica dello stato deve essere possibile posizionare a piacere gli autovalori λ_1 e λ_2 del sistema retroazionato. Sia $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ la matrice di retroazione. I polinomi caratteristici della matrice $\mathbf{A}$ e della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ sono:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = s^2 - \alpha g, \qquad \Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{BK}}(s) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$$

La sintesi della matrice $\mathbf{K}$ può essere fatta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \mathbf{K}_c \{\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}\}^{-1} = \mathbf{K}_c \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{M} \\ -\frac{\alpha}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -\alpha g - \lambda_1\lambda_2 & (\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{M}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{M}{\alpha} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{M}{\alpha}(\alpha g + \lambda_1\lambda_2) & -\frac{M}{\alpha}(\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

<u>*Osservatore asintotico di ordine pieno*</u>. La matrice di osservabilità del sistema è a rango pieno

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per cui è possibile posizionare a piacere gli autovalori β_1 e β_2 dell'osservatore asintotico di ordine pieno: $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}+\mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} - \mathbf{Ly}$. Sia $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}^T$ la matrice dei guadagni. I polinomi caratteristici della matrice $\mathbf{A}$ e della matrice $\mathbf{A}+\mathbf{LC}$ sono:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = s^2 - \alpha g, \qquad \Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{LC}}(s) = s^2 - (\beta_1+\beta_2)s + \beta_1\beta_2$$

La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ può essere fatta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \left\{(\mathcal{O}_c^-)^{-1}\mathcal{O}^-\right\}^{-1}\mathbf{L}_c = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}^{-1}\mathbf{L}_c \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\alpha g - \beta_1\beta_2 \\ \beta_1+\beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1+\beta_2 \\ -\alpha g - \beta_1\beta_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

<u>*Osservatore asintotico di ordine ridotto*</u>. La trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{x}}$ porta il sistema ad assumere la forma

$$\bar{\mathbf{P}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] = \bar{\mathbf{P}}^{-1} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \alpha g \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} -\frac{\alpha}{M} \\ \hline 0 \end{array}\right]u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

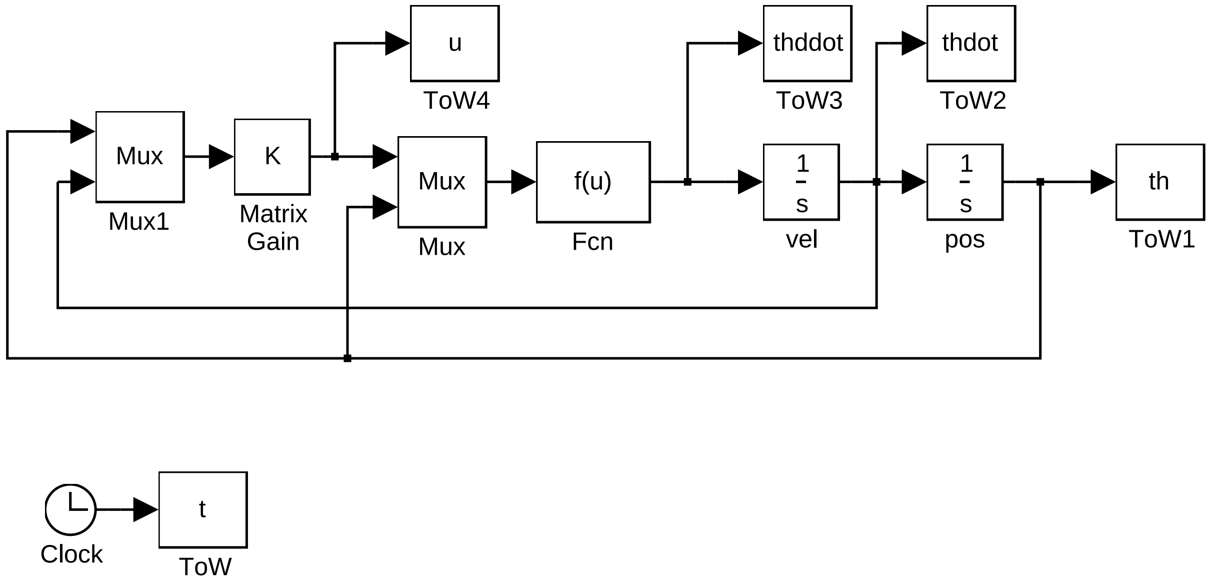
Dalla relazione $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \mathbf{L} = \beta$ si ricava $\mathbf{L} = \beta$. L'osservatore di ordine ridotto assume quindi la forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{P}}\begin{bmatrix} \hat{v}(t) - \mathbf{L}y(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{v}(t) - \beta y(t) \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned}\dot{\hat{v}}(t) &= (\mathbf{A}_{11}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{21})\hat{v}(t) + [(\mathbf{A}_{12}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{22}) - (\mathbf{A}_{11}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{21})\mathbf{L}]y(t) + (\mathbf{B}_1+\mathbf{L}\mathbf{B}_2)u(t) \\ &= \beta\hat{v}(t) + (\alpha g - \beta^2)y(t) - \frac{\alpha}{M}u(t)\end{aligned}$$

Simulazione del sistema retroazionato. In ambiente Simulink si è definito il seguente schema a blocchi (pendmdl.mdl):



I parametri che caratterizzano il sistema sono i seguenti:

$$M = 2, \qquad m = 0.5, \qquad L = 0.4, \qquad J = 0.02$$

La funzione f(u) è definita come segue:

$$f(u) = \alpha[g\sin(u(2)) - \frac{u(1)}{M}\cos(u(2))]$$

La matrice K è:

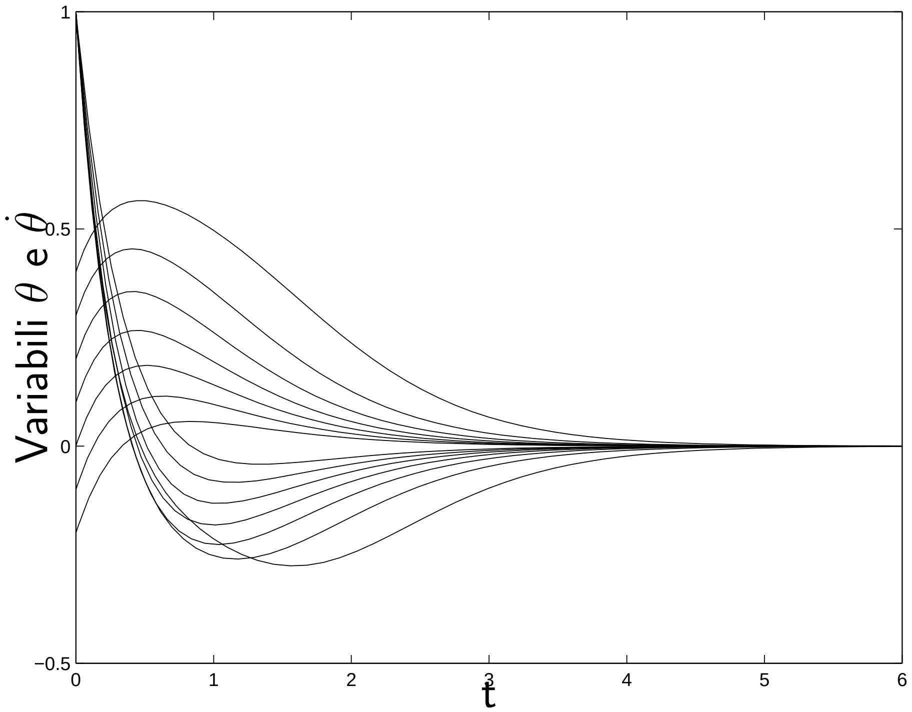
$$\left[\ \tfrac{M}{\alpha}(\alpha g + \lambda_1\lambda_2) \quad -\tfrac{M}{\alpha}(\lambda_1 + \lambda_2)\ \right]$$

Invece di simulare direttamente in ambiente Simulink, si è preferito attivare la simulazione da Matlab. A tale scopo è stato scritto il file comandi pendolo.m:

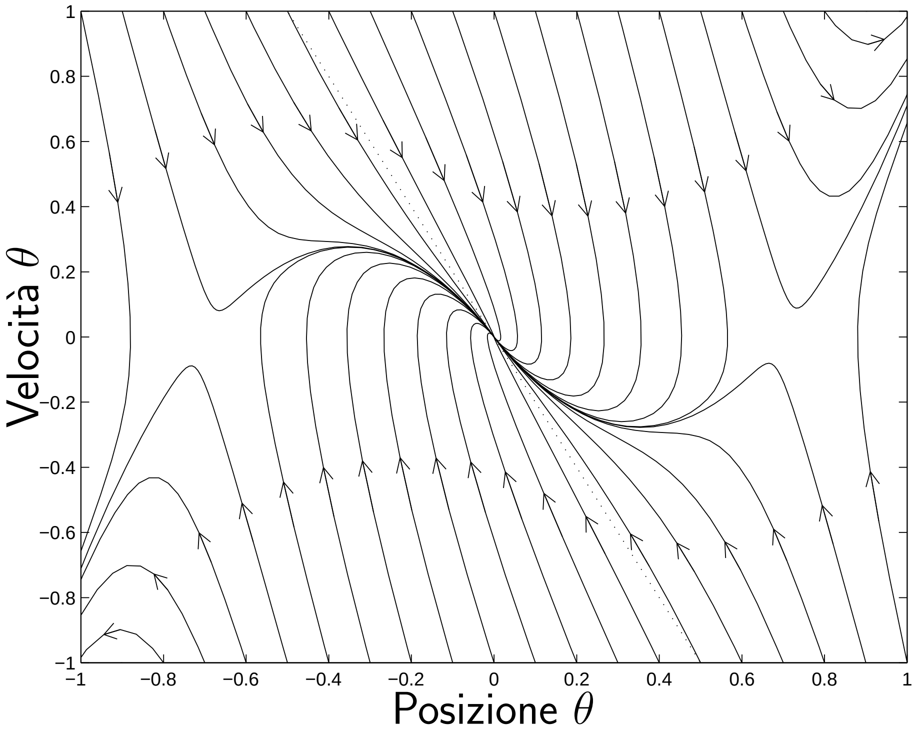
```
%%%%%%%%%%%%%% Parametri del sistema %%%%%%%%%%%%%%%%%
M=2;               % massa carrello
m=0.5;             % massa asta
L=0.4;             % lunghezza asta
g=9.81;            % accelerazione
J=0.02;            % momento di inerzia
%%%%%%%%%%%%%% Simulazione e graficazione %%%%%%%%%%%%
tfin=6;            % istante finale
th00=1;            % condizione iniziale di posizione
thdot0=th00;           % condizione iniziale di velocita'
lam1=-2+0*j;           % autovalore di progetto
lam2=conj(lam1);       % autovalore complesso coniugato
alpha=m*L/(J+m*L^2);       % variabile ausiliaria
K=M*[alpha*g+lam1*lam2 -(lam1+lam2)]/alpha;    % matrice dei guadagni
p=4;
figure(1); clf         % attiva una nuova figura
figure(2); clf
for th0=[-th00:th00/10:th00];  % ciclo al variare della condizione iniziale
  sim('pendmdl',tfin);     % si simula lo schema a blocchi 'pendmdl'
  if (th0>=-0.2)&(th0<=0.4)
    figure(1)
    plot(t,th); hold on    % graficazione della posizione
    plot(t,thdot)      % graficazione della  velocita'
  end
  figure(2)
  plot(th,thdot); hold on  % graficazione nel piano delle fasi
  plot(-th,-thdot)
  freccia(th(p),thdot(p),th(p+1),thdot(p+1),th00/30,thdot0/20)
  freccia(-th(p),-thdot(p),-th(p+1),-thdot(p+1),th00/30,thdot0/20)
  % freccia() e' una funzione creata ad hoc
end
figure(1)
axis([0 tfin -0.5*max(th00,thdot0) max(th00,thdot0)])
xlabel('time')
ylabel('th thdot')
title('traj')
figure(2)
if imag(lam1)==0
  plot([-1 1], lam1*[-1 1],':')
end
axis([-th00 th00 -thdot0 thdot0])
xlabel('th')
ylabel('thdot')
title('phase')
```

Retroazione statica dello stato: poli reali coincidenti

Nel caso di autovalori reali $\lambda_{1,2} = -2$ gli andamenti delle variabili $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ sono di tipo aperiodico:

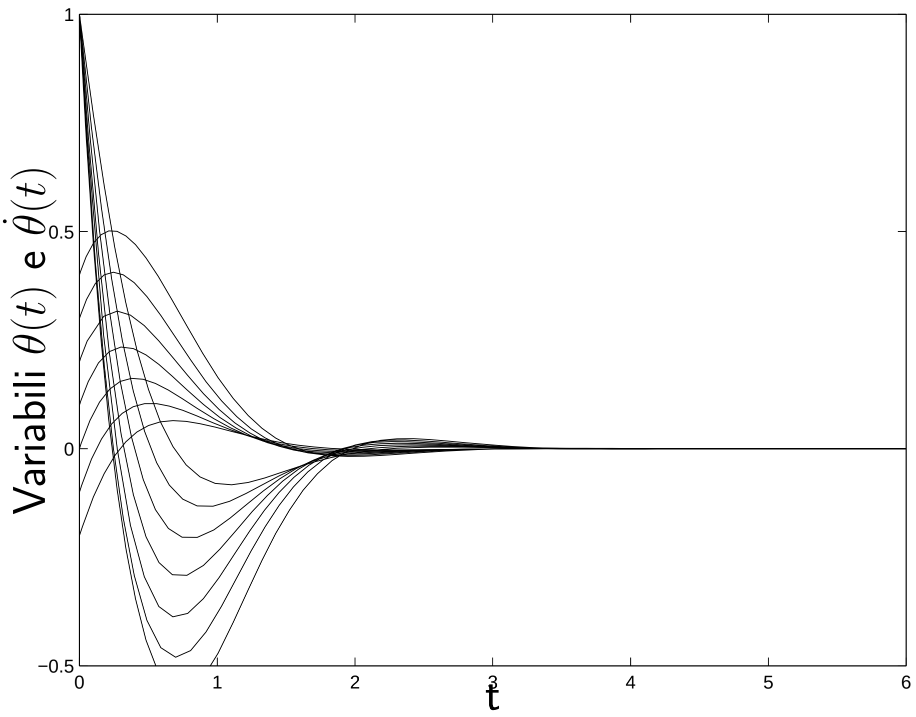


Le traiettorie nello spazio delle fasi (nodo stabile) tendono a zero appiattendosi lungo l'unico autovettore del sistema (linea tratteggiata):

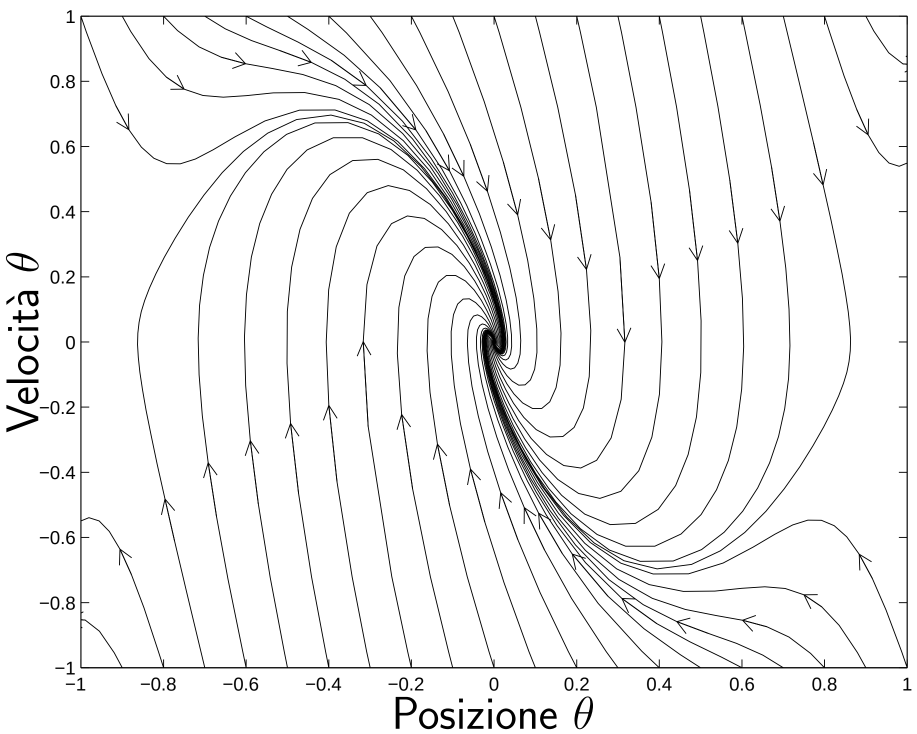


Retroazione statica dello stato: poli complessi coniugati

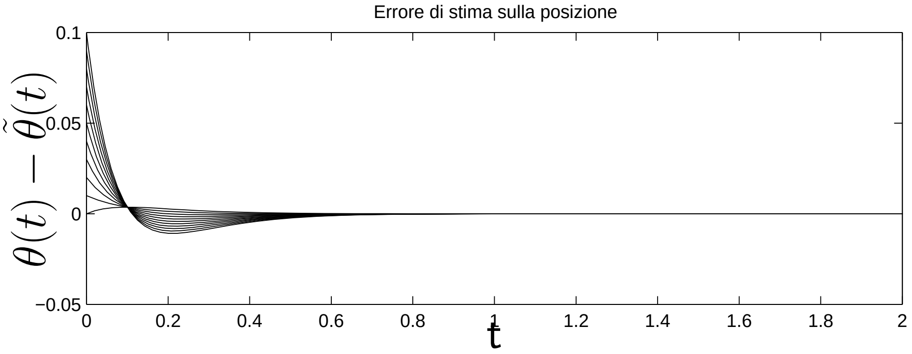
Nel caso di autovalori complessi coniugati $\lambda_{1,2} = -2 \pm 2j$, gli andamenti delle variabili $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ sono di tipo oscillatorio smorzato:

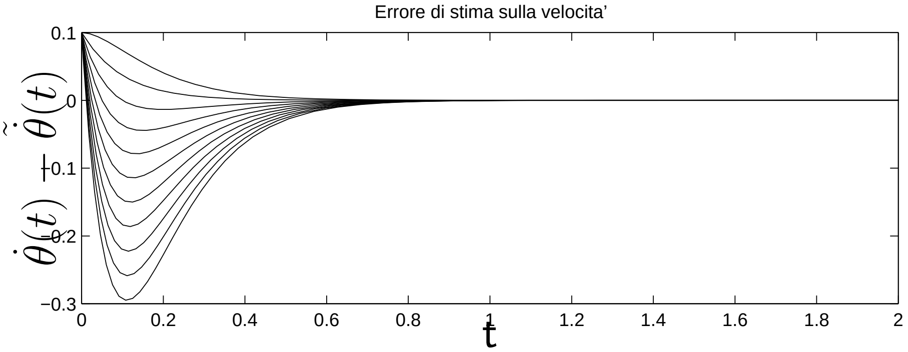


Gli andamenti delle traiettorie nello spazio delle fasi (fuoco stabile) tendono all'origine con andamento a "spirale":

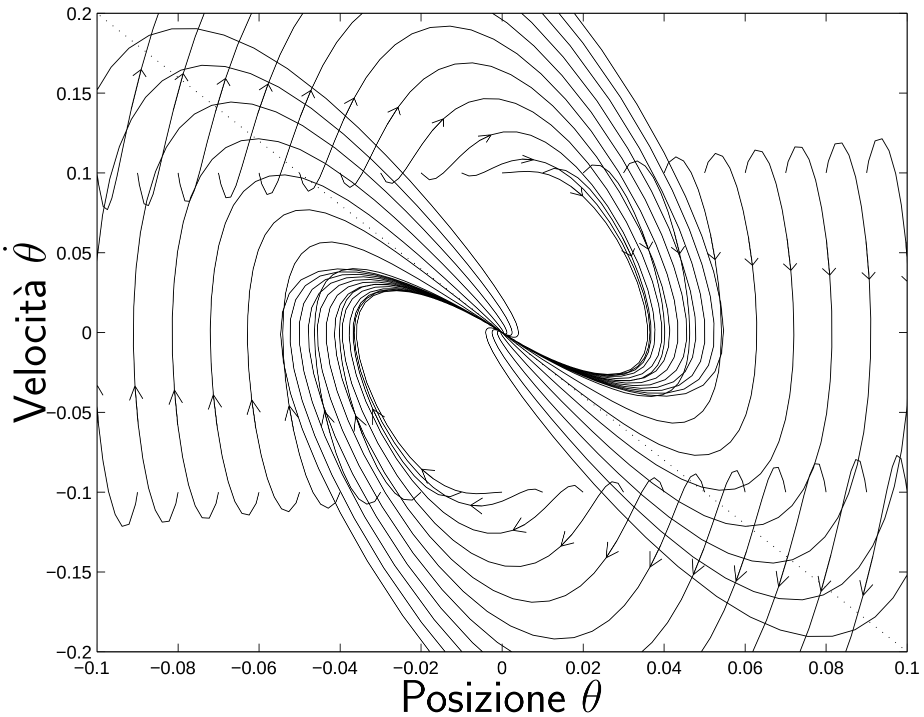


Utilizzando l'*osservatore asintotico di ordine pieno*, $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$, $\beta_1 = \beta_2 = -10$, si ottengono i seguenti andamenti temporali degli errori di stima:

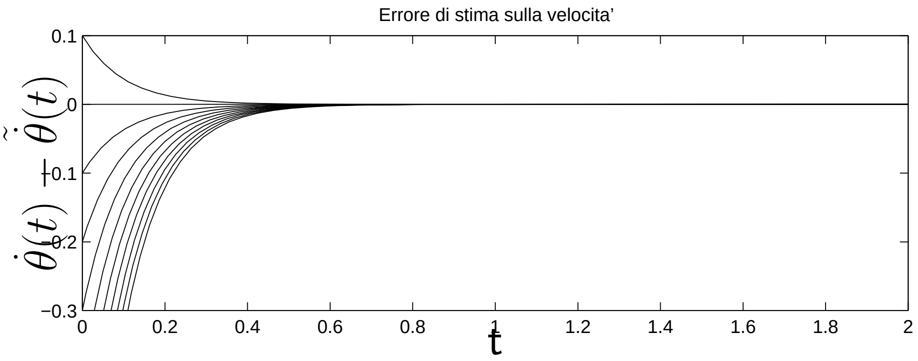




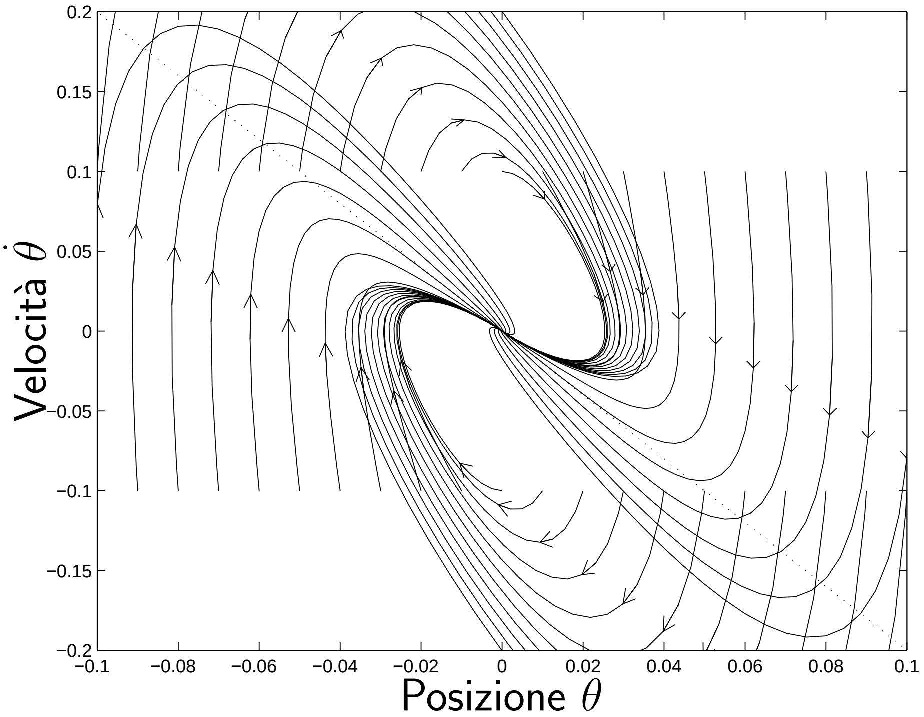
e le seguenti traiettorie nello spazio delle fasi:



Utilizzando l'*<u>osservatore asintotico di ordine ridotto</u>*, $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$, $\beta = -10$, si ottengono i seguenti andamenti temporali degli errori di stima:



e le seguenti traiettorie nello spazio delle fasi:



Rispetto al caso precedente si ha una più rapida convergenza a zero dell'errore di stima della velocità.

Nel caso non lineare l'utilizzo dell'osservatore di stato tipicamente riduce l'ampiezza della regione di asintotica convergenza a zero.