Aufgabe 1 Der Euler-Bernoulli-Balken ist ein einfaches Modell für eine Biegevorgang auf Grund von Spannung. Bezeichnet $y(x)$ für $0 \le x \le L$ die vertikale Auslenkung, so gilt

$$EIy''''(x) = f(x)$$

wobei E eine Material-Konstante und I das Trägheitsmoment ist. $f(x)$ beschreibt als Kraft pro Einheitslänge die Beladung des Balkens. Durch Diskretisierung erhält man aus der Differentialgleichung ein lineares Gleichungsystem, das hier iterativ gelöst werden soll.
Verwendet man 5 Punkte und bildet symmetrisch die 4. Ableitung (wie in Numerik I: Interpolationspolynom durch die Punkte legen und 4. Ableitung des Polynoms am mittleren Punkt als Ersatz für die 4. Ableitung verwenden), so erhält man

$$y''''(x) = \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h)}{h^4}$$

Nun sei $n \in N$ und $h = \dfrac{L}{n+1}$, so dass wir als Diskretisierung $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = L$ mit $h = x_i - x_{i-1}$ erhalten. Damit erhalten wir als Differenzengleichung

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI} f(x_i), \qquad i = 2, \dots, n-1$$

Zunächst betrachten wir einen an beiden Enden fest eingespannten Balken (beide Enden fest, Steigung dort 0)

$$y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0$$

Am Ende $x = 0$ erhält man wegen

$$y''''(x) \approx \frac{12y(x+h) - 6y(x+2h) + \frac{4}{3}y(x+3h)}{h^4}$$

wegen $y(x) = y'(x) = 0$. Am anderen Ende gilt dies analog.
Damit erhält man nach Diskretisierung als lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 12 & -6 & \frac{4}{3} & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & \frac{4}{3} & -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{h^4}{EI} \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Nun betrachten wir einen Stahlträger der Länge $L = 10m$ mit Tiefe $d = 5cm$ und Breite $b = 10cm$. Die Dichte von Stahl ist ungefähr 7850 kg/m^3, $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2. $I = \dfrac{bd^3}{12}$.
Zunächst betrachten wir den unbelasteten Balken, so dass $f(x)$ nur durch sein Eigengewicht entsteht. Das Gewicht pro Meter ist damit $7850 \cdot b \cdot d$ kg/m. Für die Karft f muss dies noch mit der Gravitationskonstanten $g = 9.81m/s^2$ multipliziert werden.

1. Schreiben Sie ein Python-Programm, um das Problem zu lösen. Lösen Sie das System für $n = 10$ mit Jacobi- bzw. Gauss-Seidel-Verfahren. Konvergieren sie? Wie viele Schritte werden benötigt, um eine Genauigkeit von 6 Nachkomma-Stellen zu erreichen? Schreiben Sie Ihre Routinen so, dass sie genau auf die obige Matrix angepasst sind (also keine allgemeinen Gauss-Seidel, Jacobi-Verfahren).

2. Stellen Sie Ihre Lösungen grafisch im Vergleich zur exakten Lösung $y(x) = \frac{fx^2(L-x)^2}{24EI}$ dar, wobei $f = f(x)$ die oben definierte konstante Funktion ist. (Vorzeichen anpassen: Die Auslenkung geht natürlich nach unten.) Wo ist der Fehler maximal und wie groß ist er dort?

3. Experimentieren Sie mit verschiedenen $n = 10 \cdot 2^k + 1, \quad k = 1, \ldots, 10$ und vergleichen Sie die Fehler in der Mitte des Balkens. Warum wächst der Fehler mit n? (Tipp: Kondition von A)

4. Nun soll ein 500kg-Gewicht gleichmäßig zwischen $x = 3$ und $x = 4$ auf den Balken gesetzt werden. Dieses muss zu f addiert werden. Wiederholen Sie Ihre obigen Rechnungen für dieses Problem. Wo hat der Balken nun seine größte Auslenkung?

5. Verwenden Sie Mathematica, um die obigen Formeln in der Mitte und am Ende des Balkens für die Diskretisierung herzuleiten. Zeigen Sie, dass die Ordnung 2 ist.

6. Nun betrachten wir einen einseitig links eingespannten Balken, der am rechten Ende frei ist. Er ist durch die Randbedingungen

$$y(0) = y'(0) = 0$$
$$y''(L) = y'''(L) = 0$$

   Berechnen Sie auch für diesen Fall mit Mathematica Näherungen für $y''''(L)$ und stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf (Exakte Lösung: $y(x) = \frac{f}{24EI}x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)$.)

7. Lösen Sie das Problem für den unbelasteten und wie oben belasteten Balken.

8. Welcher Balken trägt besser: der mit dem obigen Querschnitt oder ein um 90 Grad gedrehter (also mit $d = 10cm$ und $b = 5cm$)? Wie verhalten sich beide im Vergleich zu einem Balken mit rundem Querschnitt, bei dem die Fläche genauso groß ist wie die Rechtecksfläche oben ($I = \frac{\pi r^4}{4}$).

9. Für das SOR-Verfahren und $n = 10$ soll das annähernd beste ω durch Probieren gefunden werden.

10. Lösen Sie das Problem mit dem cg-Verfahren und vergleichen Sie es bzgl. Schrittzahl und Rechenzeit mit den obigen Verfahren.

[1, adapted from Reality Check 2.5]

[1] T. Sauer. *Numerical Analysis*. Pearson, 2006.

Hinweise zu den Abgaben:
Abzugeben sind:

- Eine Dokumentation mit Listings, Tests, Grafiken, Erklärungen (was ist die Idee, wie wurde sie realisiert, warum so und nicht anders, ...), Schlussfolgerungen, ... (als .pdf-Datei)
- Lauffähige Matlab (oder Scilab-) Notebooks (.m-files)
- Dokumentation der Tests der Routinen
- Ein Statement „Mein Beitrag zur Lösung“ für jedes Mitglied der Gruppe.

Bitte bringen Sie die Dinge auf den Punkt, d.h. geben Sie eine kurze, prägnante Zusammenfassung Ihrer Ergebnisse. Die Grafiken sollten Sie so gestalten, dass genau die wesentlichen Dinge entnommen werden können. Bitte keine Bilderbücher, sondern wählen Sie die Grafiken aus, die Ihre Aussage am besten unterstützen.
Alle Abgaben erfolgen in Gruppen von 2 Studierenden durch Hochladen einer zip-Datei in Moodle.