



Abgabe bis zum 22. April, 23.55.

Aufgabe 1 Implementieren Sie ein explizites und ein implizites Euler-Verfahren, das geeignet ist, direkt die typischen bei Mehrkörpersystemen auftretenden Differentialgleichungssysteme 2. Ordnung der Form

$$M\ddot{p} = f(t, p, \dot{p})$$

zu lösen, das also bei Eingabe der positiv definiten, symmetrischen und konstanten Matrix M und der Python-Funktion f das Differentialgleichungssystem effizient löst. Die Anzahl der Gleichungen soll beliebig sein.

Tipp zur Effizienz: Die Matrix M sei zunächst konstant. Vermeiden Sie überflüssige LU -Zerlegungen und Gleichungssystemlösungen.

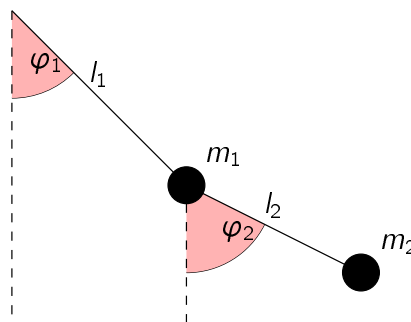
Impliziter Euler: Die entstehende implizite Gleichung soll mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst werden. Die notwendigen Ableitungen sollen numerisch durch Vorwärtsdifferenzen approximiert werden. Das Newton-Verfahren benötigt für die Konvergenz im Übrigen keine exakte immer aktuelle Jacobi-Matrix, so dass sie auch hier evtl. Matrixzerlegungen sparen können.

Testen Sie Ihre Implementation an

- Beispielen mit bekannter Lösung
- indem Sie testen, ob die Ordnung passt
- durch Vergleich mit der Lösung, den die in Python implementierten Verfahren, die ebenfalls Dgl. mit einer Matrix auf der linken Seite lösen können, liefern. Auch ein Aufwandsvergleich Ihrer Funktionen mit denen in Python gehört dazu (z.B. ein Plot Rechenzeit gegen erzielte Genauigkeit).

Was müssen Sie an Ihrer Implementation ändern, wenn $M = M(p)$ nicht konstant ist? Führen Sie dies durch.

Lösen Sie damit die Differentialgleichungen für das reibungsfreie Doppelpendel auf $[0; 10]$.



Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 &= -m_2l_1l_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 - (m_1 + m_2)gl_1\sin(\varphi_1) \\ m_2l_1l_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 &= m_2l_1l_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 - m_2gl_2\sin(\varphi_2) \end{aligned}$$

mit $g = 9.81, l_1 = 1, m_1 = 10, l_2 = 0.75, m_2 = 1$ und

$$\varphi_1(0) = 1, \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 1.5, \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

Aufgabe 2

1. Untersuchen Sie für die folgenden Mehrschrittverfahren, ob sie mindestens von der Ordnung 2 sind (d. h. lokale Konsistenzordnung 3 besitzen) und ob sie stabil sind:

(a) $y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i$



$$(b) \ y_{i+1} = 3y_i - 2y_{i-1} + \frac{h}{12}[7f_{i+1} - 8f_i - 11f_{i-1}]$$

$$(c) \ y_{i+1} = \frac{4}{3}y_i - \frac{1}{3}y_{i-1} + \frac{h}{9}[4f_{i+1} + 4f_i - 2f_{i-1}]$$

Die Verwendung von CAS (Mathematica oder das Python-Paket sympy) sind erlaubt.

2. Implementieren Sie das erste der drei Verfahren sowie das Verfahren

$$y_{i+1} = \frac{4}{3}y_i - \frac{1}{3}y_{i-1} + \frac{2h}{3}f_{i+1}$$

und verwenden Sie bei letzterem ein geeignetes Verfahren zum Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems.

3. Berechnen Sie (mit Python) numerische Lösungen mit $h = 1; 10^{-1}; 10^{-2}, \dots$ ausgehend von den exakten Startwerten für $y(0)$ und $y(h)$ für den Wert $y(10)$ und bestimmen Sie jeweils die Fehler. Bestimmen Sie daraus auch die Fehlerordnung und vergleichen Sie sie mit Ihrem theoretischen Ergebnis.
4. Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = -2y(t) + 1, \quad y(0) = 1$$

Bestimmen Sie die exakte Lösung des AWP's und vergleichen Sie sie mit der numerischen.

5. Plotten Sie die numerischen Lösungen und die exakte Lösung.
6. Finden Sie eine Erklärung für das Verhalten.

Hinweise zu den Abgaben:

Abzugeben sind:

- Eine Dokumentation mit Listings, Grafiken, Erklärungen (was ist die Idee, wie wurde sie realisiert, warum so und nicht anders, ...), Schlussfolgerungen, ... (als .pdf-Datei)
- Lauffähige Python-jupyter-Notebooks (.ipynb-files) oder .py -Files. Bitte beachten Sie die pep8-Konventionen.
- Dokumentation der Tests der Routinen
- Ein Statement "Mein Beitrag zur Lösung" für jedes Mitglied der Gruppe.

Bitte bringen Sie die Dinge auf den Punkt, d.h. geben Sie eine kurze, prägnante Zusammenfassung Ihrer Ergebnisse. Die Grafiken sollten Sie so gestalten, dass genau die wesentlichen Dinge entnommen werden können. Bitte keine Bilderbücher, sondern wählen Sie die Grafiken aus, die Ihre Aussage am besten unterstützen.

Alle Abgaben erfolgen in Gruppen von 2 Studierenden durch Hochladen einer zip-Datei in Moodle.