Numerik 2: Abgabe 1

Knoll Alexander
Phillip Durry

April 23, 2016

Contents

1 Aufgabe 1

2 Aufgabe 2

2.1 Mehrschrittverfahren untersuchen

Untersuchen Sie für die folgenden Mehrschrittverfahren, ob sie mindestens von der Ordnung 2 sind (d. h. lokale Konsistenzordnung 3 besitzen) und ob sie stabil sind:

(a) $y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i$

(b) $y_{i+1} = 3y_i - 2y_{i-1} + \frac{h}{12}[7f_{i+1} - 8f_i - 11f_{i-1}]$

(c) $y_{i+1} = \frac{4}{3}y_i - \frac{1}{3}y_{i-1} + \frac{h}{9}[4f_{i+1} + 4f_i - 2f_{i-1}]$

Zunächst sollen die Verfahren auf Stabilität hin untersucht

2.2 Verfahren implementieren

Implementieren Sie das erste der drei Verfahren sowie das Verfahren

$$y_{i+1} = \frac{4}{3}y_i - \frac{1}{3}y_{i-1} + \frac{2h}{3}f_{i+1}$$

und verwenden Sie bei letzerem ein geeignetes Verfahren zum Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems.

2.3 Numerische Lösung

Berechnen Sie (mit Python) numerische Lösungen mit $h = 1; 10^{-1}; 10^{-2}, ...$ ausgehend von den exakten Startwerten für $y(0)$ und $y(h)$ für den Wert $y(10)$ und bestimmen Sie jeweils die Fehler.Bestimmen Sie daraus auch die Fehlerordnung und vergleichen Sie sie mit Ihrem theoretischenErgebnis.

2.4 Anfangswertproblem untersuchen

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = -2y(t) + 1, y(0) = 1 \tag{1}$$

Bestimmen sie die exakte Lösung des AWPs und vergleichen Sie sie mit der numerischen.

2.4.1 Analytische Lösung

Zunächste muss Gleichung (1) in Standart Notation gebracht werden, welche gegeben ist durch:

$$\dot{y} + p(t) = Q(t)$$

Somit kann Gleichung (1) überführt werden in

$$\dot{y} + 2y = 1 \tag{2}$$

Eine allgemeine lösung zu einer Gleichung in Standart Notation kann mithilfe folgender ausdrücke bestimmt werden

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\int p(x)dt} \\ \frac{d}{dt}(uy) &= Q(t) \end{aligned}$$

Angewandt auf Gleichung (2) erhält man einen Ausdruck welcher durch beidseitiges integrieren und weiterem umformen, die allgemeine Lösung des Problems beschreibt.

$$\begin{aligned} u &= e^{\int 2dt} \\ \frac{d}{dt}(e^{2t}y) &= e^{2t} && \mid \int \\ \int \frac{d}{dt}(e^{2t}y) &= \int e^{2t} \\ e^{2t}y &= \frac{1}{2}e^{2t} + C && \mid \div e^{2t} \\ y &= \frac{1}{2} + \frac{C}{e^{2t}} \\ y &= \frac{1}{2} + Ce^{-2t} \end{aligned}$$

Einbeziehen der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ liefert die exakte Lösung des Problems

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{2} + C * e^{-2*0} \\ 1 &= \frac{1}{2} + C && \mid -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} &= C \end{aligned}$$

Und somit die exakte Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \tag{3}$$

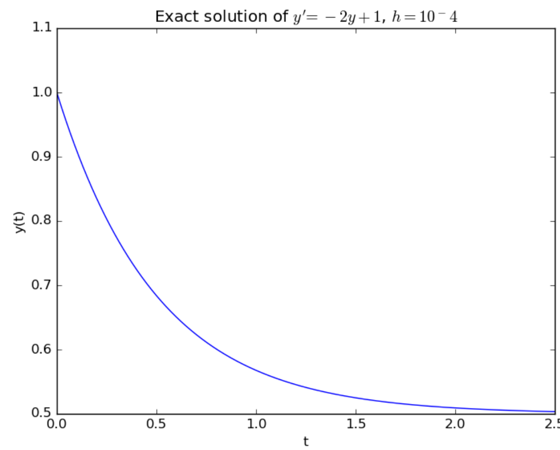

Figure 1: Analytische lösung im Intervall [0; 2,5]

Wenn nun Störungungen in die Anfangsbedingung eingeführt werden, kann man das Problem auf stabilität untersuchen. Hierfür wird ,ausgehend von der allgemeinen lösung, eine exakte Lösung unter verwendung von $y(0) = 1 + \epsilon$ bestimmt.

$$y_\epsilon(t) = (\frac{1}{2} + \epsilon)e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

Es ist leicht zu sehen dass für sehr kleine ϵ, die lösung keine größeren abweichungen erfährt. Somit kann die Lösung als Stabil bezeichnet werden.

2.4.2 Numerische Lösung

Als folge der stabilität des AWPs, ist es sehr wahrscheinlich dass Einschrittverfahren für ausreichend kleine h gegen die Lösung des Problems konvergieren. Deshalb soll im folgend der vergleich dreier Verfahren, die Schrittweite $h = 0,5$ genutzt werden. Dies liefert eine bessere visuelle darstellung der tatsächlichen unterschiede der genutzen Verfahren. Genutzt werden dass implizite und explizite Euler-Verfahren als auch dass Adams-Moultan-Verfahren (Ordnung 2).

Expliziter Euler

Das Verfahren wird beschrieben durch

$$u_{i+1} = u_i + hf_i$$

angewandt auf Gleichung (1) erhält man

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h(-2y_i + 1) \\ y_{i+1} &= (1 - 2h)y_i + h \end{aligned}$$

Impliziter Euler

Das implizite verfahren lautet wie folgt.

$$u_{i+1} = u_i + hf_{i+1}$$

Da $y' = f(t, y)$ bekannt ist es möglich dass verfahren durch umformungen auf eine einfach auswertbare Form zu bringen. Andernfalls wäre es notwendig in jedem iterations-schritt ein passendes Lösungsverfahren anzuwenden, wie beispielsweise dass Newton-Verfahren oder dass Sekanten-Verfahren.

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h(-2y_{i+1} + 1) & \\ y_{i+1} &= y_i - 2hy_{i+1} + h & | + 2hy_{i+1} \\ (1 + 2h)y_{i+1} &= y_i + h & | \div (1 + 2h) \\ y_{i+1} &= \frac{y_i + h}{1 + 2h} & \end{aligned}$$

Adams-Moultan

Dieses Verfahren existieren in verschiedenen Variationen. In diesem Fall wird die Methode der 2. Ordnung verwendet.

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}[f_{i+1} + f_i]$$

Wie bereits beim implizieten Euler Verfahren, ist es möglich die gleichung in eine einfach auswertbare form zu bringen.

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[-2y_{i+1} + 1 - 2y_{i+1} + 1] & \\ y_{i+1} &= y_i - hy_{i+1} - hy_i + h & | + hy_{i+1} \\ (1 + h)y_{i+1} &= (1 - h)y_i + h & | \div (1 + h) \\ y_{i+1} &= \frac{(1 - h)y_i + h}{1 + h} & \end{aligned}$$

Vergleich

Unter einbezug von Python werden die resultate visualisiert.

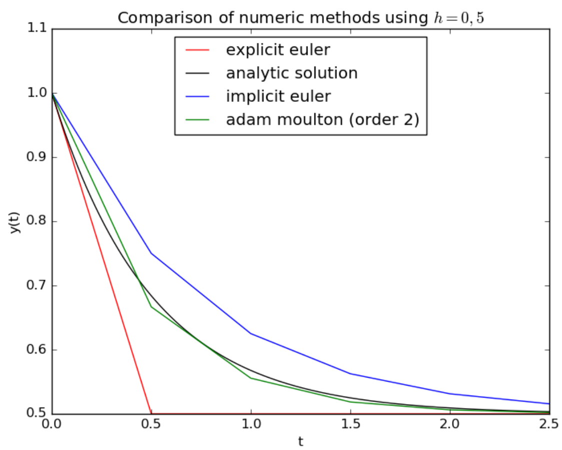

Figure 2: Vergleich der Numerischen Lösungen mit der Analytischen

Die Grafik zeigt deutlich, dass jedes der angewandten Verfahren letztendlich gegen die Lösung konvergiert. Jedoch konvergieren die Einschritt-Verfahren wesentlich langsamer als das Adams-Moultan-Verfahren, welches selbst für recht große h einen guten eindruck macht. Weiterhin scheint es so als würde dass expliziete Euler-Verfahre direkt nach dem ersten iterations schritt auf 0 fallen, wodurch es unbrauchbar wird. Abhilfe schafft eine kleinere Wahl von h.

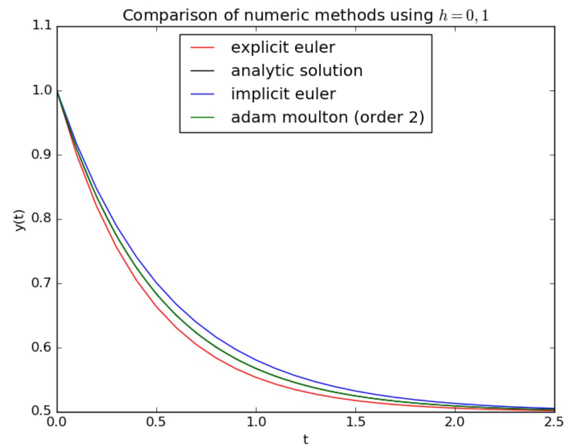

Figure 3: Numerische Lösungen mit kleinerem h

In der obigen Abbildung wird deutlich, wie gut das Adams-Moultan-Verfahren für das AWP geeignet ist.