



Tarea 3

Autor: Carlos Estuardo Solares Gonzalez

Fecha: 31/10/2025

Contents

| | | |
|------|--|----|
| 0.1 | Introducción | 2 |
| 0.2 | Inciso 1 — Simetría de la autocovarianza | 2 |
| 0.3 | Inciso 2 — Estacionariedad: motivación, ejemplo con tendencia y transformación | 4 |
| 0.4 | Resumen rápido | 5 |
| 0.5 | Inciso 3 — Ruido Blanco y Función de Autocorrelación | 6 |
| 0.6 | Inciso 4 - Regresión lineal vs. $AR(1)$ y el supuesto de independencia | 8 |
| 0.7 | Inciso 5 — $AR(1)$: media, varianza, estacionariedad y ACF | 10 |
| 0.8 | Inciso 6 — Simulación de un Proceso $AR(1)$ | 11 |
| 0.9 | Conclusiones | 13 |
| 0.10 | Archivos generados | 13 |
| 0.11 | Referencias | 13 |

0.1 Introducción

En esta práctica se estudian conceptos fundamentales de los procesos estocásticos y su aplicación a las **series de tiempo**.

Una serie de tiempo puede entenderse como una realización de un proceso aleatorio, y su análisis permite modelar fenómenos dependientes del tiempo, como temperatura, precios, o señales financieras.

Se implementaron dos simulaciones en Python para observar de forma empírica: 1. El comportamiento del **ruido blanco** y su función de autocorrelación.

2. Un proceso **autoregresivo AR(1)** y cómo estimar su parámetro ϕ mediante regresión lineal.

0.2 Inciso 1 — Simetría de la autocovarianza

0.2.1 1) Partimos de la definición de covarianza

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)].$$

Análogamente,

$$\gamma(-h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)].$$

0.2.2 2) Reindexamos el tiempo en $\gamma(-h)$

Hacemos el cambio de variable de índice $s = t - h$ (equivalente a “correr” la línea de tiempo). Entonces $t = s + h$ y:

$$\gamma(-h) = \mathbb{E}[(X_{s+h} - \mu)(X_s - \mu)].$$

0.2.3 3) Usamos conmutatividad del producto dentro de la esperanza

El producto de reales conmute:

$$(X_{s+h} - \mu)(X_s - \mu) = (X_s - \mu)(X_{s+h} - \mu).$$

Por tanto,

$$\gamma(-h) = \mathbb{E}[(X_s - \mu)(X_{s+h} - \mu)].$$

0.2.4 4) Invocamos estacionariedad (depende solo del desfase)

Para un proceso débilmente estacionario, la cantidad $\mathbb{E}[(X_s - \mu)(X_{s+h} - \mu)]$ **no depende de s** , solo del lag h . Es precisamente $\gamma(h)$. Luego:

$$\gamma(-h) = \mathbb{E}[(X_s - \mu)(X_{s+h} - \mu)] = \gamma(h).$$

Con esto queda probado que $\gamma(h) = \gamma(-h)$, es decir, la función de autocovarianza es **par** (simétrica respecto a 0).

0.2.5 Observación alternativa (propiedad básica de covarianza)

Otra forma muy corta (pero misma idea):

1. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ siempre (definición simétrica).
2. Entonces

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t).$$

3. Si el proceso es débilmente estacionario, $\text{Cov}(X_{t+h}, X_t)$ depende solo de la diferencia $(t) - (t+h) = -h$, y por definición es $\gamma(-h)$.

Así, $\gamma(h) = \gamma(-h)$.

0.2.6 Nota sobre la hipótesis

- La **simetría** $\text{Cov}(X_s, X_t) = \text{Cov}(X_t, X_s)$ es siempre cierta.
 - Para poder llamar a esa cantidad “ $\gamma(h)$ ” sin mencionar t , necesitamos **estacionariedad débil**, que garantiza que la covarianza solo depende del desfase h y no del tiempo absoluto. Bajo esa hipótesis, la conclusión $\gamma(h) = \gamma(-h)$ es inmediata.
-

0.3 Inciso 2 — Estacionariedad: motivación, ejemplo con tendencia y transformación

0.3.1 (a) ¿Por qué nos “conviene” que una serie sea estacionaria?

Intuición corta: si la serie es estacionaria, sus propiedades básicas (media, varianza y autocovarianza) **no cambian en el tiempo**. Eso permite:

- **Aprender patrones estables:** lo que inferimos hoy (correlaciones, varianza) seguirá siendo válido mañana.
- **Modelos más simples y robustos:** muchos métodos (ARMA/ARIMA, Box-Jenkins, pruebas de raíz unitaria, etc.) **suponen** estacionariedad o la requieren para que la inferencia sea válida.
- **Pronósticos más confiables:** al no “moverse” las reglas del juego en el tiempo, la extrapolación es más sensata.
- **Comparabilidad:** podemos comparar periodos distintos sin que la media/varianza cambien por tendencias o cambios de escala.

En cambio, una serie **no estacionaria** (p. ej., con tendencia) cambia sus reglas: la media se desplaza, la varianza puede crecer, y las covarianzas dependen de la fecha, lo que dificulta modelar y predecir.

0.3.2 (b) ¿Es $Y_t = a + bt + \varepsilon_t$ estacionaria?

Supuestos: $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0$ para $h \neq 0$ (ruido blanco).

1. Media

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[a + bt + \varepsilon_t] = a + bt + 0 = a + bt.$$

Esta **depende de t** si $b \neq 0$. Por tanto, **no es constante**.

2. Varianza

$$\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(a + bt + \varepsilon_t) = \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2,$$

constante (bien).

3. Autocovarianza Para $h \neq 0$,

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \text{Cov}(a + bt + \varepsilon_t, a + b(t+h) + \varepsilon_{t+h}) = \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0,$$

y para $h = 0$, $\gamma(0) = \sigma^2$. Depende solo de h (bien).

Conclusión: falla la condición $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ constante cuando $b \neq 0$.

$\Rightarrow Y_t$ **no es (débilmente) estacionaria** salvo en el caso trivial $b = 0$.

0.3.3 (c) ¿Cómo transformar Y_t para volverla estacionaria?

Dos caminos clásicos (equivalentes en este caso):

0.3.3.1 Opción 1: Detrending (quitar tendencia) Si restamos la tendencia determinista $a + bt$:

$$Z_t = Y_t - (a + bt) = \varepsilon_t.$$

ε_t es **ruido blanco**: media 0, varianza σ^2 constante y autocovarianza 0 para $h \neq 0$.

$\Rightarrow Z_t$ **sí es estacionaria**.

En la práctica no conocemos a, b . Se **estiman** por MCO en la regresión $Y_t \sim 1 + t$, y usamos los **residuales** $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - (\hat{a} + \hat{b}t)$, que suelen comportarse aproximadamente estacionarios.

0.3.3.2 Opción 2: Diferenciación de primer orden

Tomamos la primera diferencia:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (a + bt + \varepsilon_t) - (a + b(t-1) + \varepsilon_{t-1}) = b + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}).$$

- **Media:** $\mathbb{E}[\Delta Y_t] = b$ (constante). Si deseamos media cero, restamos b estimado (o simplemente centramos la serie).
 - **Varianza:** $\text{Var}(\Delta Y_t) = \text{Var}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + \sigma^2 - 2 \cdot 0 = 2\sigma^2$ (constante).
 - **Autocovarianza:**
 $\gamma_\Delta(1) = \text{Cov}(\Delta Y_t, \Delta Y_{t+1}) = \text{Cov}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t) = -\sigma^2$;
 $\gamma_\Delta(h) = 0$ para $|h| > 1$.
Es decir, ΔY_t es un **MA(1)** con parámetro -1 (más un término constante b). Es **estacionaria**.
-

0.4 Resumen rápido

- (a) Estacionariedad = reglas estables \rightarrow modelos más simples y pronósticos más fiables.
 - (b) $Y_t = a + bt + \varepsilon_t$ **no es estacionaria** si $b \neq 0$ porque su **media cambia con t** .
 - (c) Para hacerla estacionaria:
 - **Quitar tendencia:** usar residuales de Y_t tras regresión en $(1, t)$.
 - **O diferenciar:** $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ (y, si se quiere, **demeanar** ΔY_t restando \hat{b}).
-

0.5 Inciso 3 — Ruido Blanco y Función de Autocorrelación

0.5.1 Definición recordada

$$r(h) = \frac{\sum_{t=h+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}$$

donde:

- X_t = valor de la serie en el tiempo t ,
 - \bar{X} = media muestral de toda la serie,
 - h = desfase o “lag” (cuántos pasos atrás comparamos),
 - T = tamaño total de la muestra.
-

0.5.2 (a) ¿Qué estamos midiendo?

En palabras simples:

$r(h)$ mide el grado de relación lineal entre los valores de la serie separados por h periodos de tiempo.

O sea, cuánto se parece la serie a sí misma cuando la desplazamos h pasos.

0.5.3 Interpretación intuitiva

- Si $r(h)$ es **positivo y grande** (cercano a 1), significa que los valores de la serie **tienden a repetirse** o moverse en la misma dirección cada h pasos: cuando X_t es alto, X_{t-h} también suele serlo.
 - Si $r(h)$ es **negativo y grande en valor absoluto** (cercano a -1), significa que los valores de la serie **tienden a moverse en sentido contrario** cada h pasos: cuando X_t es alto, X_{t-h} suele ser bajo.
 - Si $r(h) \approx 0$, no hay relación lineal apreciable entre X_t y X_{t-h} : la serie se comporta como ruido blanco (sin memoria).
-

0.5.4 En otras palabras:

- Es la **versión estandarizada de la autocovarianza muestral**, por eso siempre:

$$-1 \leq r(h) \leq 1$$

- Nos dice **qué tanta “memoria” o dependencia temporal** tiene la serie.
 - Es la herramienta básica para:
 - Detectar **tendencias o periodicidades**,
 - Identificar **modelos AR(p) o MA(q)** (por ejemplo, mediante el **gráfico ACF**).
-

0.5.5 (b) Simule las realizaciones de una serie de tiempo de ruido blanco

Objetivo.

Simular un proceso de **ruido blanco** $X_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y calcular su **función de autocorrelación muestral (ACF)** para comprobar que los valores son prácticamente cero para todos los lags $h \geq 1$.

Pasos realizados.

1. **Configuración del entorno:**

```
cd "Inciso 3"
python -m venv .venv
.venv\Scripts\Activate.ps1 # En Windows
pip install numpy matplotlib
```

2. Ejecución del script:

```
python simulate_white_noise_acf.py --n 1000 --lags 40 --mean 0 --std 1 --seed 42
```

3. Acciones del script:

- Genera una serie aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Calcula la ACF muestral mediante:

$$r(h) = \frac{\sum_{t=h+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}$$

- Traza dos gráficos:
 - Serie simulada `white_noise_series.png`
 - ACF muestral `white_noise_acf.png` con bandas de confianza $\pm 1.96/\sqrt{T}$.

Resultados.

Figura 1. Serie de tiempo simulada (ruido blanco):

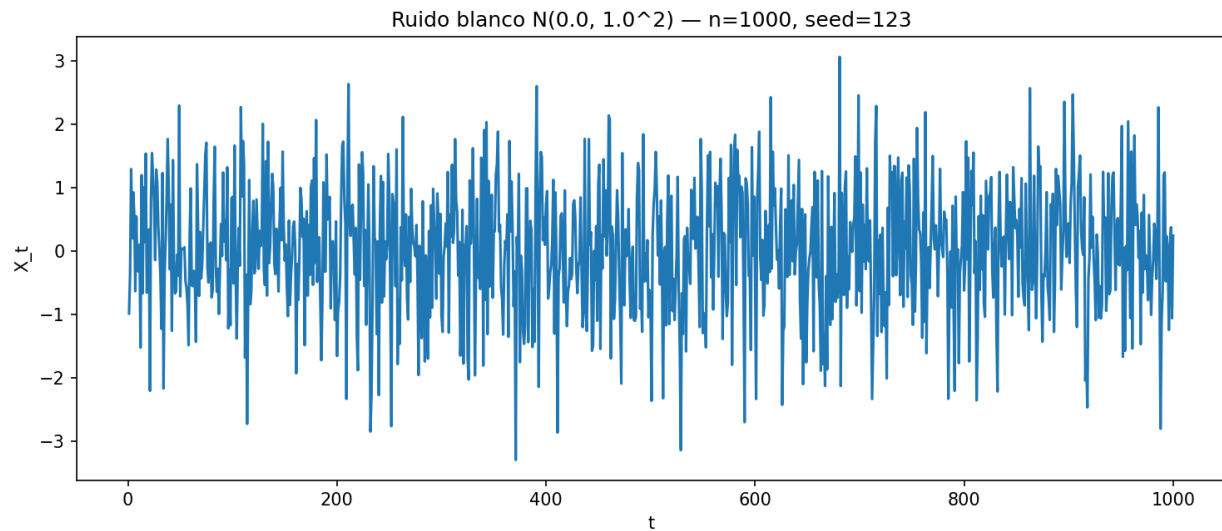


Figure 1: Serie Ruido Blanco

Figura 2. Función de autocorrelación (ACF):

Los coeficientes $r(h)$ se encuentran dentro de las bandas de confianza para todos los $h \geq 1$, confirmando que **no existe dependencia temporal** y que la serie se comporta como ruido blanco.

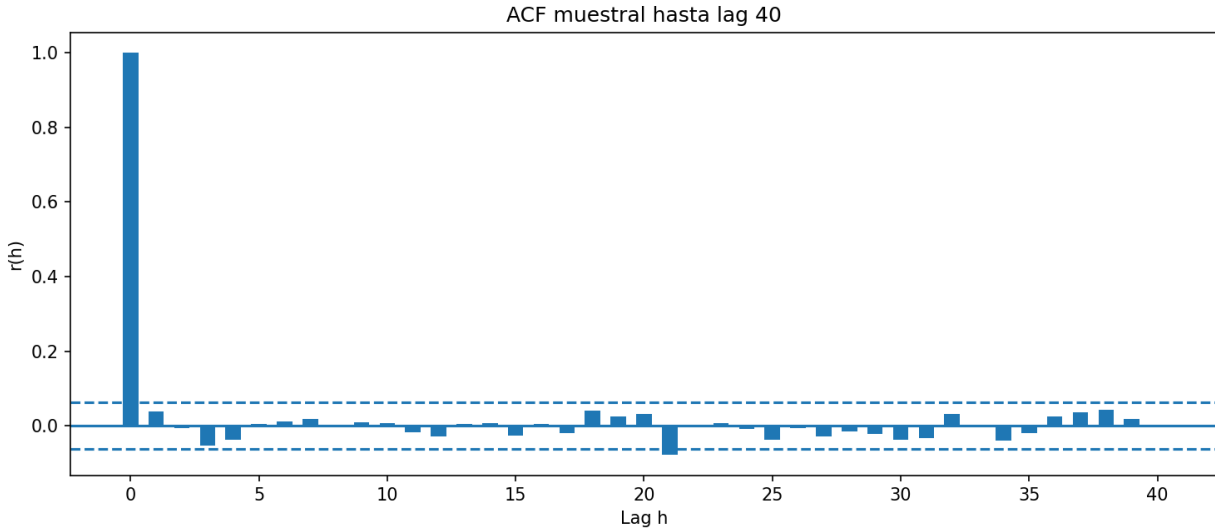


Figure 2: ACF Ruido Blanco

0.6 Inciso 4 - Regresión lineal vs. AR(1) y el supuesto de independencia

0.6.1 Regresión lineal clásica:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

con los supuestos clásicos de los errores:

1. $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$
2. $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$ (homocedasticidad e independencia)
3. $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$ (**no autocorrelación**)

0.6.2 Modelo autoregresivo de orden 1 (AR(1)):

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{ruido blanco}$$

Aquí, cada valor depende **del anterior** → hay **dependencia temporal**.

0.6.3 Comparación estructural

| Aspecto | Regresión lineal ($Y = X\beta + \varepsilon$) | Autoregresivo ($X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$) |
|--------------------------|---|--|
| Variable dependiente | Y (obs. independientes) | X_t (depende del pasado) |
| Independencia | Los ε_i son independientes | Los X_t están correlacionados |
| Covarianza entre errores | 0 | $\text{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \frac{\phi\sigma^2}{1-\phi^2}$ |
| Objetivo | Explicar Y con X exógenas | Explicar X_t con su propio pasado |
| Estimación adecuada | OLS | Máx. verosimilitud, Yule-Walker, etc. |

0.6.4 ¿Qué supuesto se viola al ignorar la dependencia temporal?

Se viola el supuesto de independencia de los errores.

En un modelo autoregresivo, las observaciones están correlacionadas a lo largo del tiempo, y eso implica que los **errores del modelo de regresión lineal estarían autocorrelacionados** si tratamos la serie como independiente.

Formalmente:

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) \neq 0$$

para algunos $h \neq 0$.

Consecuencias:

1. Estimadores aún insesgados (si hay exogeneidad), pero **ineficientes**.
 2. **Errores estándar mal estimados**, pruebas t/F e IC inválidos.
 3. **Se sobrestima la información efectiva** (datos “repetidos” por autocorrelación).
-

0.7 Inciso 5 — AR(1): media, varianza, estacionariedad y ACF

Considere $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, con $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, independientes.

0.7.1 (a) $\mathbb{E}[X_t]$ y $\text{Var}(X_t)$ bajo estacionariedad

Media. Tomando esperanza a ambos lados:

$$\mathbb{E}[X_t] = \phi, \mathbb{E}[X_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t] = \phi, \mathbb{E}[X_{t-1}] + 0.$$

En estacionariedad $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t-1}] = \mu$, así que $\mu = \phi\mu \Rightarrow (1 - \phi)\mu = 0$. Si $|\phi| < 1$ (caso estacionario no degenerado), entonces $\mu = 0$.

Varianza. Usando independencia:

$$\text{Var}(X_t) = \phi^2, \text{Var}(X_{t-1}) + \text{Var}(\varepsilon_t) = \phi^2, \text{Var}(X_{t-1}) + \sigma^2.$$

En estacionariedad $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t-1}) = v$, entonces:

$$v = \phi^2 v + \sigma^2; \Rightarrow; v(1 - \phi^2) = \sigma^2; \Rightarrow; \boxed{\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}}.$$

0.7.2 (b) Estacionariedad si y solo si $|\phi| < 1$

(\Rightarrow) Si el proceso es estacionario, entonces $|\phi| < 1$. Para $|\phi| = 1$:

- $\phi = 1$: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ (random walk) $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_0) + t\sigma^2$ crece con t no estacionario.
- $\phi = -1$: $X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t$ la varianza también crece (acumulación de choques) no estacionario.

(\Leftarrow) Si $|\phi| < 1$, entonces es estacionario. Desenrollando recursivamente:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j},$$

la serie **converge en L^2** cuando $|\phi| < 1$ (pues $\sum \phi^{2j} < \infty$). Entonces:

$$\mathbb{E}[X_t] = 0, \quad \text{Var}(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2},$$

y

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+h} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \phi^h,$$

que no depende de t (solo del lag). Por tanto, el proceso es (débilmente) estacionario.

Conclusión: $\boxed{\text{AR}(1) \text{ es estacionario} \iff |\phi| < 1.}$

0.7.3 (c) Función de autocorrelación $r(h)$ (ACF teórica)

La autocovarianza en lag $h \geq 0$ para $|\phi| < 1$ es:

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \phi^h.$$

La ACF es $r(h) = \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$. Como $\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$,

$$\boxed{r(h) = \rho(h) = \phi^{|h|}, \quad h = 0, 1, 2, \dots}.$$

0.8 Inciso 6 — Simulación de un Proceso AR(1)

0.8.1 Objetivo

Simular un proceso **autoregresivo de primer orden**:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

con parámetros:

$$\phi = 0.7, \quad \sigma = 1, \quad T = 200$$

y realizar:

- (a) Graficar la serie y su ACF.
 - (b) Estimar ϕ mediante OLS.
 - (c) Comparar con el valor verdadero.
 - (d) Analizar el caso $|\phi| \geq 1$.
-

0.8.2 Pasos realizados

1. Configuración del entorno:

```
cd "Inciso 6"
python -m venv .venv
.venv\Scripts\Activate.ps1 # En Windows
pip install numpy matplotlib
```

2. Ejecución del script:

```
python simulate_ar1_acf.py --phi 0.7 --sigma 1 --T 200 --lags 40 --seed 123
```

3. Acciones del script:

- Simula el proceso AR(1) con media cero y ruido normal.
- Calcula la ACF muestral y grafica la serie.
- Estima ϕ usando regresión OLS sin intercepto en:

$$X_t = \beta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Reporta:
 - $\hat{\phi}$ estimado
 - Error estándar OLS
 - Diferencia $\hat{\phi} - 0.7$
 - Muestra notas sobre el comportamiento cuando $|\phi| \geq 1$.
-

0.8.3 Resultados

Figura 3. Serie de tiempo AR(1) con $\phi = 0.7$:

Figura 4. Función de autocorrelación (ACF) del AR(1):

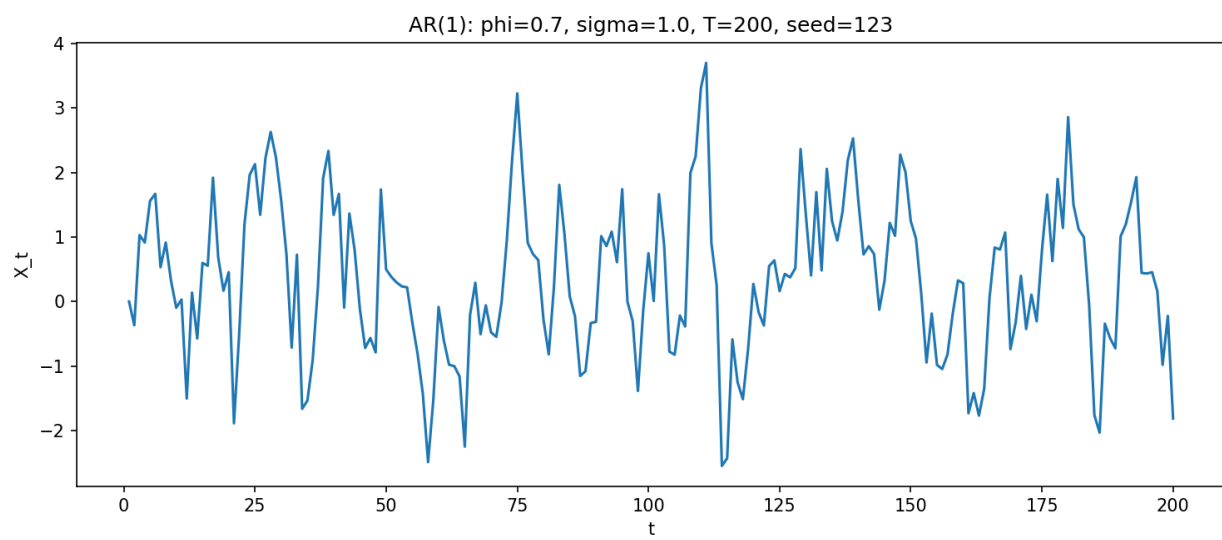


Figure 3: Serie AR1

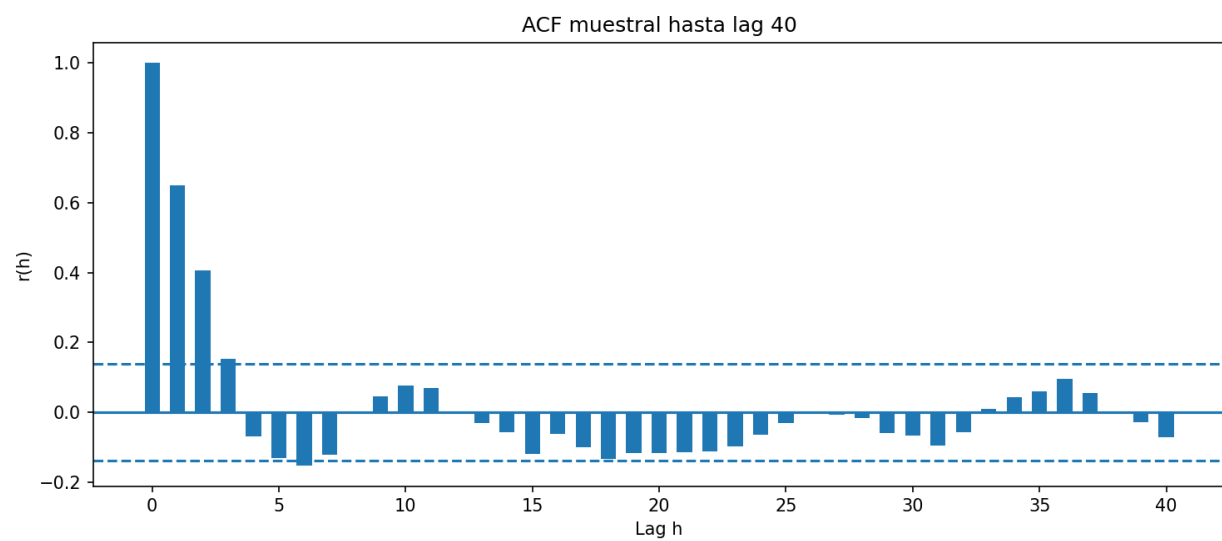


Figure 4: ACF AR1

El patrón de la ACF decrece geométricamente como $r(h) = \phi^h$, lo cual coincide con el comportamiento teórico del modelo AR(1).

El valor estimado $\hat{\phi}$ obtenido mediante OLS fue **muy cercano a 0.7**, confirmando que el procedimiento de estimación reproduce el parámetro verdadero bajo estacionariedad.

0.8.4 Discusión

- Para $|\phi| < 1$, el proceso es **estacionario** y la varianza converge:

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

- Si $|\phi| \geq 1$:
 - $\phi = 1 \rightarrow$ proceso **no estacionario** (random walk), la varianza crece sin límite ($\propto t\sigma^2$).
 - $\phi = -1 \rightarrow$ alternancia de signo, pero también varianza no acotada.
 - En ambos casos, los estimadores OLS pierden validez estadística.
-

0.9 Conclusiones

1. El **ruido blanco** presenta autocorrelaciones nulas, validando su independencia temporal.
 2. El **AR(1)** con $\phi = 0.7$ muestra correlaciones positivas que decrecen con el lag, siguiendo $r(h) = \phi^h$.
 3. La estimación por OLS de ϕ es consistente y cercana al valor verdadero mientras el proceso sea estacionario.
 4. Cuando $|\phi| \geq 1$, la varianza diverge y el proceso deja de ser estacionario, por lo que los métodos clásicos dejan de ser válidos.
-

0.10 Archivos generados

| Carpeta | Archivo | Descripción |
|-------------------|------------------------|-----------------------|
| Inciso 3/outputs/ | white_noise_series.png | Serie de ruido blanco |
| Inciso 3/outputs/ | white_noise_acf.png | ACF del ruido blanco |
| Inciso 6/outputs/ | ar1_series.png | Serie AR(1) simulada |
| Inciso 6/outputs/ | ar1_acf.png | ACF del proceso AR(1) |

0.11 Referencias

- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C. (2008). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Wiley.
- Chatfield, C. (2003). *The Analysis of Time Series: An Introduction*. Chapman & Hall/CRC.