



Tarea 3

Autor: Carlos Estuardo Solares Gonzalez

Fecha: 31/10/2025

Contents

0.1	Introducción	2
0.2	Inciso 1 — Simetría de la autocovarianza	2
0.3	Inciso 2 — Estacionariedad: motivación, ejemplo con tendencia y transformación	4
0.4	Resumen rápido	5
0.5	Inciso 3 — Ruido Blanco y Función de Autocorrelación	6
0.6	Inciso 4 - Regresión lineal vs. AR(1) y el supuesto de independencia	8
0.7	Inciso 5 — AR(1): media, varianza, estacionariedad y ACF	10
0.8	Inciso 6 — Simulación de un Proceso AR(1)	11
0.9	Conclusiones	13
0.10	Archivos generados	13
0.11	Referencias	13

0.1 Introducción

En esta práctica se estudian conceptos fundamentales de los procesos estocásticos y su aplicación a las **series de tiempo**.

Una serie de tiempo puede entenderse como una realización de un proceso aleatorio, y su análisis permite modelar fenómenos dependientes del tiempo, como temperatura, precios, o señales financieras.

Se implementaron dos simulaciones en Python para observar de forma empírica: 1. El comportamiento del **ruido blanco** y su función de autocorrelación.

2. Un proceso **autoregresivo AR(1)** y cómo estimar su parámetro ϕ mediante regresión lineal.

0.2 Inciso 1 — Simetría de la autocovarianza

0.2.1 1) Partimos de la definición de covarianza

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)].$$

Análogamente,

$$\gamma(-h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)].$$

0.2.2 2) Reindexamos el tiempo en $\gamma(-h)$

Hacemos el cambio de variable de índice $s = t - h$ (equivalente a “correr” la línea de tiempo). Entonces $t = s + h$ y:

$$\gamma(-h) = \mathbb{E}[(X_{s+h} - \mu)(X_s - \mu)].$$

0.2.3 3) Usamos commutatividad del producto dentro de la esperanza

El producto de reales commute:

$$(X_{s+h} - \mu)(X_s - \mu) = (X_s - \mu)(X_{s+h} - \mu).$$

Por tanto,

$$\gamma(-h) = \mathbb{E}[(X_s - \mu)(X_{s+h} - \mu)].$$

0.2.4 4) Invocamos estacionariedad (depende solo del desfase)

Para un proceso débilmente estacionario, la cantidad $\mathbb{E}[(X_s - \mu)(X_{s+h} - \mu)]$ **no depende de s** , solo del lag h . Es precisamente $\gamma(h)$. Luego:

$$\gamma(-h) = \mathbb{E}[(X_s - \mu)(X_{s+h} - \mu)] = \gamma(h).$$

Con esto queda probado que $\gamma(h) = \gamma(-h)$, es decir, la función de autocovarianza es **par** (simétrica respecto a 0).

0.2.5 Observación alternativa (propiedad básica de covarianza)

Otra forma muy corta (pero misma idea):

1. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ siempre (definición simétrica).
2. Entonces

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t).$$

3. Si el proceso es débilmente estacionario, $\text{Cov}(X_{t+h}, X_t)$ depende solo de la diferencia $(t) - (t+h) = -h$, y por definición es $\gamma(-h)$.

Así, $\gamma(h) = \gamma(-h)$.

0.2.6 Nota sobre la hipótesis

- La **simetría** $\text{Cov}(X_s, X_t) = \text{Cov}(X_t, X_s)$ es siempre cierta.
 - Para poder llamar a esa cantidad “ $\gamma(h)$ ” sin mencionar t , necesitamos **estacionariedad débil**, que garantiza que la covarianza solo depende del desfase h y no del tiempo absoluto. Bajo esa hipótesis, la conclusión $\gamma(h) = \gamma(-h)$ es inmediata.
-

0.3 Inciso 2 — Estacionariedad: motivación, ejemplo con tendencia y transformación

0.3.1 (a) ¿Por qué nos “conviene” que una serie sea estacionaria?

Intuición corta: si la serie es estacionaria, sus propiedades básicas (media, varianza y autocovarianza) **no cambian en el tiempo**. Eso permite:

- **Aprender patrones estables:** lo que inferimos hoy (correlaciones, varianza) seguirá siendo válido mañana.
- **Modelos más simples y robustos:** muchos métodos (ARMA/ARIMA, Box-Jenkins, pruebas de raíz unitaria, etc.) **suponen** estacionariedad o la requieren para que la inferencia sea válida.
- **Pronósticos más confiables:** al no “moverse” las reglas del juego en el tiempo, la extrapolación es más sensata.
- **Comparabilidad:** podemos comparar periodos distintos sin que la media/varianza cambien por tendencias o cambios de escala.

En cambio, una serie **no estacionaria** (p. ej., con tendencia) cambia sus reglas: la media se desplaza, la varianza puede crecer, y las covarianzas dependen de la fecha, lo que dificulta modelar y predecir.

0.3.2 (b) ¿Es $Y_t = a + bt + \varepsilon_t$ estacionaria?

Supuestos: $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0$ para $h \neq 0$ (ruido blanco).

1. Media

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[a + bt + \varepsilon_t] = a + bt + 0 = a + bt.$$

Esta **depende de t** si $b \neq 0$. Por tanto, **no es constante**.

2. Varianza

$$\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(a + bt + \varepsilon_t) = \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2,$$

constante (bien).

3. Autocovarianza

Para $h \neq 0$,

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \text{Cov}(a + bt + \varepsilon_t, a + b(t+h) + \varepsilon_{t+h}) = \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0,$$

y para $h = 0$, $\gamma(0) = \sigma^2$. Depende solo de h (bien).

Conclusión: falla la condición $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ constante cuando $b \neq 0$.

$\Rightarrow Y_t$ **no es (débilmente) estacionaria** salvo en el caso trivial $b = 0$.

0.3.3 (c) ¿Cómo transformar Y_t para volverla estacionaria?

Dos caminos clásicos (equivalentes en este caso):

0.3.3.1 Opción 1: Detrending (quitar tendencia)

Si restamos la tendencia determinista $a + bt$:

$$Z_t = Y_t - (a + bt) = \varepsilon_t.$$

ε_t es **ruido blanco**: media 0, varianza σ^2 constante y autocovarianza 0 para $h \neq 0$.

$\Rightarrow Z_t$ **sí es estacionaria**.

En la práctica no conocemos a, b . Se **estiman** por MCO en la regresión $Y_t \sim 1 + t$, y usamos los **residuales** $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - (\hat{a} + \hat{b}t)$, que suelen comportarse aproximadamente estacionarios.

0.3.3.2 Opción 2: Diferenciación de primer orden

Tomamos la primera diferencia:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (a + bt + \varepsilon_t) - (a + b(t-1) + \varepsilon_{t-1}) = b + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}).$$

- **Media:** $\mathbb{E}[\Delta Y_t] = b$ (constante). Si deseamos media cero, restamos b estimado (o simplemente centramos la serie).

- **Varianza:** $\text{Var}(\Delta Y_t) = \text{Var}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + \sigma^2 - 2 \cdot 0 = 2\sigma^2$ (constante).

- **Autocovarianza:**

$$\gamma_\Delta(1) = \text{Cov}(\Delta Y_t, \Delta Y_{t+1}) = \text{Cov}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t) = -\sigma^2;$$

$$\gamma_\Delta(h) = 0 \text{ para } |h| > 1.$$

Es decir, ΔY_t es un **MA(1)** con parámetro -1 (más un término constante b). Es **estacionaria**.

0.4 Resumen rápido

- (a) Estacionariedad = reglas estables \rightarrow modelos más simples y pronósticos más fiables.
 - (b) $Y_t = a + bt + \varepsilon_t$ **no es estacionaria** si $b \neq 0$ porque su **media cambia con t** .
 - (c) Para hacerla estacionaria:
 - **Quitar tendencia:** usar residuales de Y_t tras regresión en $(1, t)$.
 - **O diferenciar:** $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ (y, si se quiere, **demeanar** ΔY_t restando \hat{b}).
-

0.5 Inciso 3 — Ruido Blanco y Función de Autocorrelación

0.5.1 Definición recordada

$$r(h) = \frac{\sum_{t=h+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}$$

donde:

- X_t = valor de la serie en el tiempo t ,
 - \bar{X} = media muestral de toda la serie,
 - h = desfase o “lag” (cuántos pasos atrás comparamos),
 - T = tamaño total de la muestra.
-

0.5.2 (a) ¿Qué estamos midiendo?

En palabras simples:

$r(h)$ mide el grado de relación lineal entre los valores de la serie separados por h periodos de tiempo.

O sea, cuánto se parece la serie a sí misma cuando la desplazamos h pasos.

0.5.3 Interpretación intuitiva

- Si $r(h)$ es **positivo y grande** (cercano a 1), significa que los valores de la serie **tienden a repetirse** o moverse en la misma dirección cada h pasos: cuando X_t es alto, X_{t-h} también suele serlo.
 - Si $r(h)$ es **negativo y grande en valor absoluto** (cercano a -1), significa que los valores de la serie **tienden a moverse en sentido contrario** cada h pasos: cuando X_t es alto, X_{t-h} suele ser bajo.
 - Si $r(h) \approx 0$, no hay relación lineal apreciable entre X_t y X_{t-h} : la serie se comporta como ruido blanco (sin memoria).
-

0.5.4 En otras palabras:

- Es la versión estandarizada de la autocovarianza muestral, por eso siempre:

$$-1 \leq r(h) \leq 1$$

- Nos dice qué tanta “memoria” o dependencia temporal tiene la serie.
 - Es la herramienta básica para:
 - Detectar tendencias o periodicidades,
 - Identificar modelos AR(p) o MA(q) (por ejemplo, mediante el gráfico ACF).
-

0.5.5 (b) Simule las realizaciones de una serie de tiempo de ruido blanco

Objetivo.

Simular un proceso de ruido blanco $X_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y calcular su función de autocorrelación muestral (ACF) para comprobar que los valores son prácticamente cero para todos los lags $h \geq 1$.

Pasos realizados.

1. Configuración del entorno:

```

cd "Inciso 3"
python -m venv .venv
.venv\Scripts\Activate.ps1 # En Windows
pip install numpy matplotlib

```

2. Ejecución del script:

```
python simulate_white_noise_acf.py --n 1000 --lags 40 --mean 0 --std 1 --seed 42
```

3. Acciones del script:

- Genera una serie aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Calcula la ACF muestral mediante:

$$r(h) = \frac{\sum_{t=h+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}$$

- Traza dos gráficos:
 - Serie simulada `white_noise_series.png`
 - ACF muestral `white_noise_acf.png` con bandas de confianza $\pm 1.96/\sqrt{T}$.

Resultados.

Figura 1. Serie de tiempo simulada (ruido blanco):

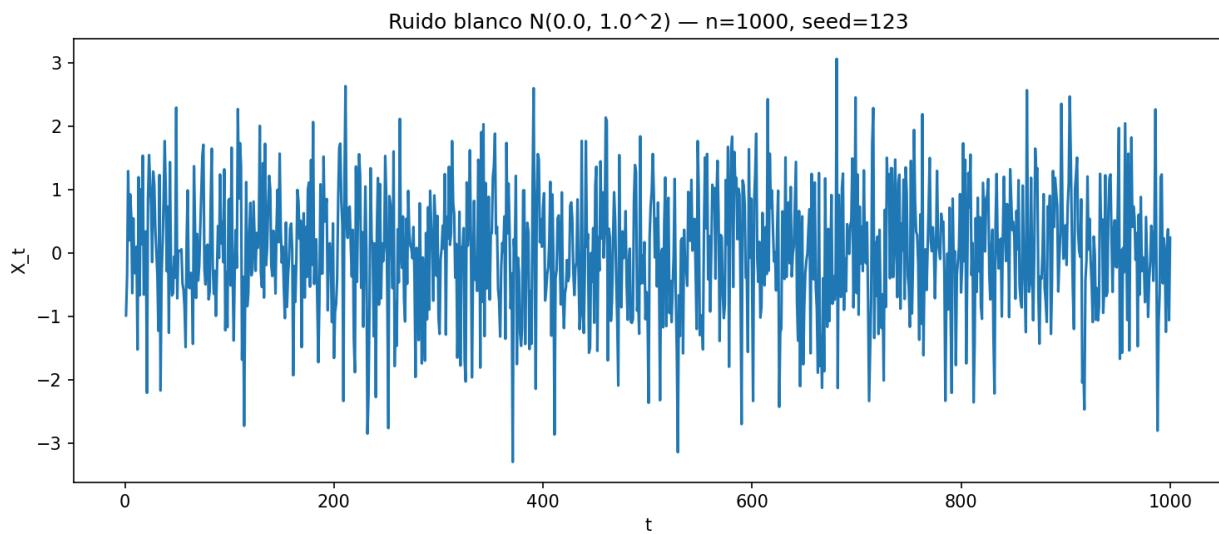


Figure 1: Serie Ruido Blanco

Figura 2. Función de autocorrelación (ACF):

Los coeficientes $r(h)$ se encuentran dentro de las bandas de confianza para todos los $h \geq 1$, confirmando que **no existe dependencia temporal** y que la serie se comporta como ruido blanco.

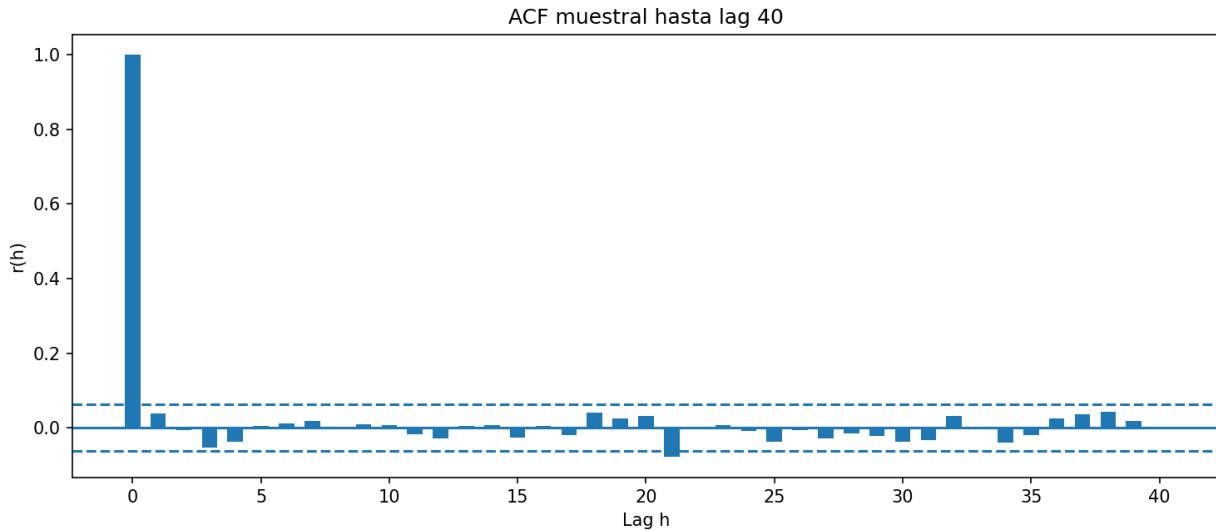


Figure 2: ACF Ruido Blanco

0.6 Inciso 4 - Regresión lineal vs. AR(1) y el supuesto de independencia

0.6.1 Regresión lineal clásica:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

con los supuestos clásicos de los errores:

1. $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$
 2. $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$ (homocedasticidad e independencia)
 3. $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$ (**no autocorrelación**)
-

0.6.2 Modelo autoregresivo de orden 1 (AR(1)):

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{ruido blanco}$$

Aquí, cada valor depende **del anterior** → hay **dependencia temporal**.

0.6.3 Comparación estructural

Aspecto	Regresión lineal ($Y = X\beta + \varepsilon$)	Autoregresivo ($X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$)
Variable dependiente	Y (obs. independientes)	X_t (depende del pasado)
Independencia	Los ε_i son independientes	Los X_t están correlacionados
Covarianza entre errores	0	$\text{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \frac{\phi\sigma^2}{1-\phi^2}$
Objetivo	Explicar Y con X exógenas	Explicar X_t con su propio pasado
Estimación adecuada	OLS	Máx. verosimilitud, Yule–Walker, etc.

0.6.4 ¿Qué supuesto se viola al ignorar la dependencia temporal?

Se viola el supuesto de independencia de los errores.

En un modelo autoregresivo, las observaciones están correlacionadas a lo largo del tiempo, y eso implica que los **errores del modelo de regresión lineal estarían autocorrelacionados** si tratamos la serie como independiente.

Formalmente:

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) \neq 0$$

para algunos $h \neq 0$.

Consecuencias:

1. Estimadores aún insesgados (si hay exogeneidad), pero **ineficientes**.
 2. **Errores estándar mal estimados**, pruebas t/F e IC inválidos.
 3. **Se sobreestima la información efectiva** (datos “repetidos” por autocorrelación).
-

0.7 Inciso 5 — AR(1): media, varianza, estacionariedad y ACF

Considere $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, con $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, independientes.

0.7.1 (a) $\mathbb{E}[X_t]$ y $\text{Var}(X_t)$ bajo estacionariedad

Media. Tomando esperanza a ambos lados:

$$\mathbb{E}[X_t] = \phi, \mathbb{E}[X_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t] = \phi, \mathbb{E}[X_{t-1}] + 0.$$

En estacionariedad $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t-1}] = \mu$, así que $\mu = \phi\mu \Rightarrow (1 - \phi)\mu = 0$. Si $|\phi| < 1$ (caso estacionario no degenerado), entonces $\mu = 0$.

Varianza. Usando independencia:

$$\text{Var}(X_t) = \phi^2, \text{Var}(X_{t-1}) + \text{Var}(\varepsilon_t) = \phi^2, \text{Var}(X_{t-1}) + \sigma^2.$$

En estacionariedad $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t-1}) = v$, entonces:

$$v = \phi^2 v + \sigma^2; \Rightarrow; v(1 - \phi^2) = \sigma^2; \Rightarrow; \boxed{\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}}.$$

0.7.2 (b) Estacionariedad si y solo si $|\phi| < 1$

(\Rightarrow) Si el proceso es estacionario, entonces $|\phi| < 1$. Para $|\phi| = 1$:

- $\phi = 1$: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ (random walk) $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_0) + t\sigma^2$ crece con t no estacionario.
- $\phi = -1$: $X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t$ la varianza también crece (acumulación de choques) no estacionario.

(\Leftarrow) Si $|\phi| < 1$, entonces es estacionario. Desenrollando recursivamente:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j},$$

la serie converge en L^2 cuando $|\phi| < 1$ (pues $\sum \phi^{2j} < \infty$). Entonces:

$$\mathbb{E}[X_t] = 0, \quad \text{Var}(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2},$$

y

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+h} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}, \phi^h,$$

que no depende de t (solo del lag). Por tanto, el proceso es (débilmente) estacionario.

Conclusión: $\boxed{\text{AR}(1) \text{ es estacionario} \iff |\phi| < 1.}$

0.7.3 (c) Función de autocorrelación $r(h)$ (ACF teórica)

La autocovarianza en lag $h \geq 0$ para $|\phi| < 1$ es:

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \phi^h.$$

La ACF es $r(h) = \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$. Como $\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$,

$$\boxed{r(h) = \rho(h) = \phi^{|h|}, \quad h = 0, 1, 2, \dots}.$$

0.8 Inciso 6 — Simulación de un Proceso AR(1)

0.8.1 Objetivo

Simular un proceso **autoregresivo de primer orden**:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

con parámetros:

$$\phi = 0.7, \quad \sigma = 1, \quad T = 200$$

y realizar:

- (a) Graficar la serie y su ACF.
 - (b) Estimar ϕ mediante OLS.
 - (c) Comparar con el valor verdadero.
 - (d) Analizar el caso $|\phi| \geq 1$.
-

0.8.2 Pasos realizados

1. Configuración del entorno:

```
cd "Inciso 6"  
python -m venv .venv  
.venv\Scripts\Activate.ps1 # En Windows  
pip install numpy matplotlib
```

2. Ejecución del script:

```
python simulate_ar1_acf.py --phi 0.7 --sigma 1 --T 200 --lags 40 --seed 123
```

3. Acciones del script:

- Simula el proceso AR(1) con media cero y ruido normal.
- Calcula la ACF muestral y grafica la serie.
- Estima ϕ usando regresión OLS sin intercepto en:

$$X_t = \beta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Reporta:
 - $\hat{\phi}$ estimado
 - Error estándar OLS
 - Diferencia $\hat{\phi} - 0.7$
 - Muestra notas sobre el comportamiento cuando $|\phi| \geq 1$.
-

0.8.3 Resultados

Figura 3. Serie de tiempo AR(1) con $\phi = 0.7$:

Figura 4. Función de autocorrelación (ACF) del AR(1):

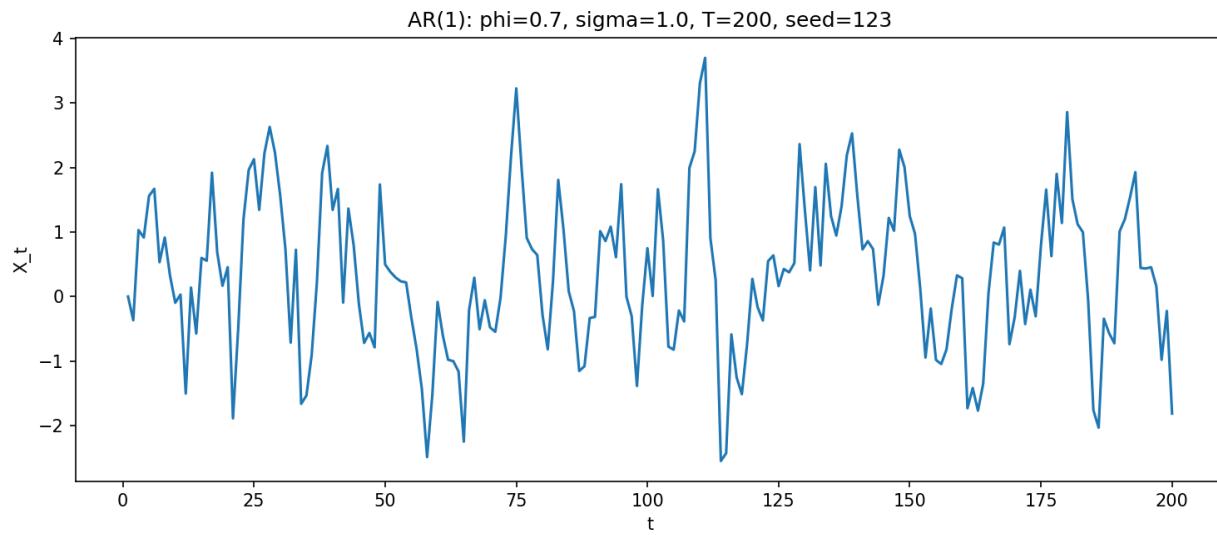


Figure 3: Serie AR1

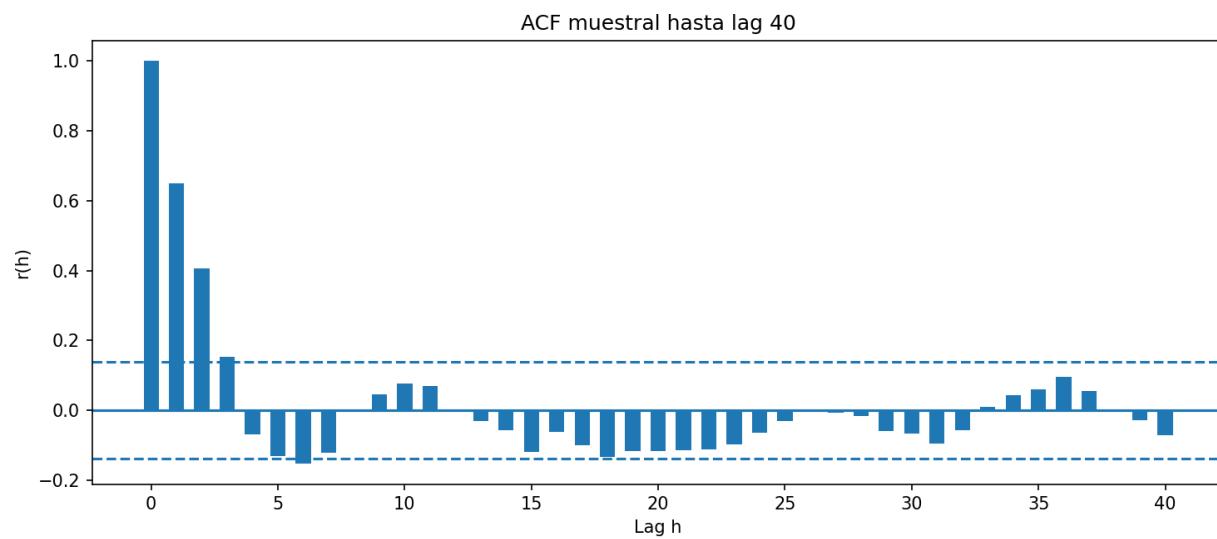


Figure 4: ACF AR1

El patrón de la ACF decrece geométricamente como $r(h) = \phi^h$, lo cual coincide con el comportamiento teórico del modelo AR(1).

El valor estimado $\hat{\phi}$ obtenido mediante OLS fue **muy cercano a 0.7**, confirmando que el procedimiento de estimación reproduce el parámetro verdadero bajo estacionariedad.

0.8.4 Discusión

- Para $|\phi| < 1$, el proceso es **estacionario** y la varianza converge:

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

- Si $|\phi| \geq 1$:

- $\phi = 1 \rightarrow$ proceso **no estacionario** (random walk), la varianza crece sin límite ($\propto t\sigma^2$).
 - $\phi = -1 \rightarrow$ alternancia de signo, pero también varianza no acotada.
 - En ambos casos, los estimadores OLS pierden validez estadística.
-

0.9 Conclusiones

1. El **ruido blanco** presenta autocorrelaciones nulas, validando su independencia temporal.
 2. El **AR(1)** con $\phi = 0.7$ muestra correlaciones positivas que decrecen con el lag, siguiendo $r(h) = \phi^h$.
 3. La estimación por OLS de ϕ es consistente y cercana al valor verdadero mientras el proceso sea estacionario.
 4. Cuando $|\phi| \geq 1$, la varianza diverge y el proceso deja de ser estacionario, por lo que los métodos clásicos dejan de ser válidos.
-

0.10 Archivos generados

Carpeta	Archivo	Descripción
Inciso 3/outputs/	white_noise_series.png	Serie de ruido blanco
Inciso 3/outputs/	white_noise_acf.png	ACF del ruido blanco
Inciso 6/outputs/	ar1_series.png	Serie AR(1) simulada
Inciso 6/outputs/	ar1_acf.png	ACF del proceso AR(1)

0.11 Referencias

- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C. (2008). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Wiley.
- Chatfield, C. (2003). *The Analysis of Time Series: An Introduction*. Chapman & Hall/CRC.