Semestre de printemps 2008

TP de Traitement du signal.
Séance 2 : Echantillonnage
IN41 : Traitement du signal

Introduction

a) Contexte

Le deuxième volet des TP de IN41 propose de mettre en place le concept d'échantillonnage qui est très utilisé pour la transmission de donnée et par conséquent conversion analogique numérique. Dans la réalité, les capteurs prélèvent un signal analogique. On numérise ensuite le signal de façon à le traiter ou à l'envoyer plus facilement. Enfin, la dernière étape consiste à retourner le signal en analogique dans la chaîne de traitement.

Capteur → Echantillonnage → Reconstruction → Traitement des données

b) Objectifs pratiques

Dans ce deuxième TP, la pratique de l'échantillonnage idéal et réel sera détaillée. Puis, une fois l'échantillonnage réalisé, on reconstruira le signal avec la méthode de l'extrapolation d'ordre 0 et 1.

Exercices

1) Considérons un signal à temps continu donné par : $X(t) = A \cos(\theta(t))$ avec t réel. On appelle fréquence instantanée la fonction dépendant du temps définie par : $Fi(t)=1/(2*Pi)*d\theta/dt$. Dans le cas d'une sinusoïdal de fréquence F0, la fréquence instantanée est constante et égale à F0.

Le programme ci-dessous engendre les échantillons, pris à la fréquence Fe=8000 Hz, du signal x(t) pendant une durée de T=2s, pour une valeur de F0=1000 Hz et pour une valeur de λ donné.

```
lambda=1000;                           % Parametre (1000 ou 2000)
Fe=8000;                               % Freq. echantillonnage
F0=1000;                               % Freq. de depart
T=2;                                   % Duree d'observation
it=(0:Fe*T-1)/Fe;                      % Vecteur temps
theta=2*pi*F0*it+pi*lambda*(it .^2);
x=cos(theta);
soundsc(x,Fe)                          % Ecoute
```

Quelle est la fonction du facteur λ ?
Ecouter le signal pour λ = 1000 et décrire le signal entendu ?
Ecouter le signal pour λ = 2000 Hz et expliquer le son entendu et le principe sous-jacent ?

Thème d'étude

I) Représentation d'un signal réel :

La première étape de cette étude consiste à construire la fonction suivante.

$$x(t) = \sin(\pi*f0*t)/(\pi*t).$$

Cette fonction peut se simplifier avec l'utilisation du sinus cardinal : $x(t) = f0*\mathrm{sinc}(\pi*f0*t)$.
Le fichier sincard,m (fichier joint) donne la définition de cette fonction.

a) Construisez cette fonction (on prendra f0=10Hz)
b) Représenter la fonction x(t) sur intervalle [-2,2]

II) Echantillonnage idéal :

On discrétise le signal x(t) défini précédemment par un échantillonneur idéal, à savoir un peigne de Dirac. La théorie dit que :

$$\mathbf{x_e(t) = \Sigma\, x(nT_e) * \delta(t-nT_e)}$$

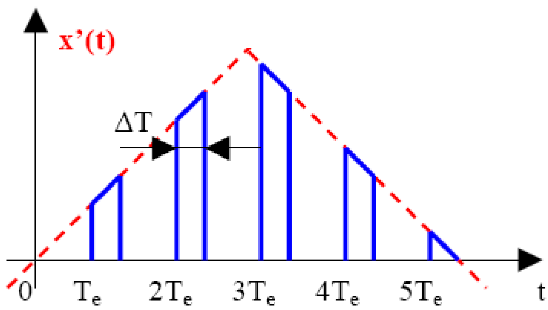
Avec Matlab, l'échantillonnage idéal est réalisé par le choix de la variable t (le « pas »). Comme nous l'avons déjà dit précédemment, Matlab ne peut pas créer & travailler avec des signaux continus : nous sommes donc obligés de discrétiser le domaine temporel « t » pour générer x(t). Le signal x(t) est donc déjà échantillonné idéalement. Mais cela ne se « voit » pas car le « pas » est très fin.

a) Discrétiser le signal x(t) pour 3 fréquences d'échantillonnage Fe = 5, 10 & 30 Hz
b) Expliquer la différence entre les trois courbes par rapport à la fréquence d'échantillonnage
c) Estimer d'après les exercices précédents la bonne valeur d'échantillonnage

III) Échantillonnage réel :

On souhaite réaliser un échantillonnage réel du signal x(t) à l'aide d'un échantillonneur moyenneur : on ne réalise plus la discrétisation avec une impulsion infiniment brève, mais on utilise au contraire une impulsion de largeur finie et on considère la valeur moyenne de x(t) pendant la durée de l'impulsion. En effet, dans la réalité, il est impossible d'utiliser un peigne de Dirac car chaque impulsion se caractérise par une durée ΔT qui correspond au temps de conversion analogique / numérique.

$$X(nT_e) = (1/\Delta T) \int_{nT_e}^{nT_e+\Delta T} x(t) \quad dt$$



Il est demandé :

a) De construire cet échantillonnage
b) De représenter graphiquement l'échantillonnage pour plusieurs valeurs de Te.
c) De commenter les résultats obtenus
d) Déduire la valeur de Te et par conséquent de Δt .

VI) Reconstruction

La reconstruction consiste à rétablir un signal analogique continu à partir d'un signal numérique discret. Le problème est de trouver les valeurs manquantes entre deux valeurs connues : on pratique l'extrapolation.
Nous allons donc comparer 2 méthodes de reconstruction (les extrapolations d'ordre 0 et 1) du signal s(t) à partir des signaux échantillonnés idéaux et réels en fonction de $F_{e.}$

1) **Extrapolation d'ordre 0 :**

L'extrapolation d'ordre 0 correspond à un échantillonnage blocage du signal x(t). Le principe de l'extrapoleur d'ordre 0 consiste en effet à bloquer le signal jusqu'à ce que l'échantillon suivant arrive. En clair, l'échantillon x(nTe) est maintenu tant que l'échantillon x(nTe+Te) n'est pas arrivé. Il est demandé :

a) Réaliser l'extrapolation d'ordre 0
b) Construire l'extrapolation d'ordre 0 pour un échantillonnage idéal puis réel
c) Commenter les deux différents résultats

2) **Extrapolation d'ordre 1 :**

L'extrapolation d'ordre 1 correspond à un échantillonnage blocage du signal x(t). Le principe consiste à interpréter les valeurs comprises entre deux points connus par une droite.
Il est demandé :

d) Réaliser l'extrapolation d'ordre 1
e) Construire l'extrapolation d'ordre 1 pour un échantillonnage idéal puis réel
f) Commenter les deux différents résultats

V) Bonus : Il existe d'autre façon de reconstituer un signal échantillonné, par exemple en utilisant un filtre :

On considère une fonction x(t) = sin(2*Pi*F0*t) échantillonnée à la fréquence Fe.

1. Quel signal obtient-on lors d'une reconstruction parfaite lorsque F0 = 200 Hz et Fe = 500 Hz ?
2. On échantillonne une sinusoïde de fréquence 200 Hz, à la fréquence Fe = 250 Hz. Quel signal obtient-on si on utilise la formule idéale de reconstruction parfaite ?
3. Ecrire un programme :
    a. Qui affiche une sinusoïde de fréquence 200 Hz.
    b. Qui affiche 10 de ses échantillons prélevés à la fréquence Fe.
    c. Qui affiche le signal reconstruit. La reconstruction sera effectuée à l'aide de la fonction *filter* de la facon suivante : xti = filter(hn,1,xtr), ou hn est la suite des échantillons h(nTe) de h(t) et xtr la suite des échantillons de la sinusoïde complétée avec des zéros.
    d. Et vérifie les résultats des questions 1) et 2).