

제 5 회

한국주니어수학올림피아드

2023년 8월 26일

제한시간 2시간

- 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 **세 자리수**로 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007” 이라고 기입해야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 “1007” 일 경우 “007” 이라고 기입해야 합니다.
- 각 문항의 점수는 5점입니다.

1. 물통의 $\frac{1}{4}$ 을 물로 채웠을 때 무게를 재었더니 200g이고, 물통의 $\frac{1}{3}$ 을 물로 채웠을 때 무게를 재었더니 250g이었다. 물이 없을 때, 이 물통의 무게는 몇 g인가?

050

2. 자연수 a, b, c, d 에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 곱 $abcd$ 의 값을 구하십시오.

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{29}{24}$$

016

3. 다음 조건을 만족하는 두 자리 자연수 n 의 개수를 구하십시오.

n 의 십의 자릿수와 일의 자릿수를 바꾸면 n 보다 작은 두 자리 자연수 m 을 얻으며, 두 수의 차 $n-m$ 은 어떤 자연수의 제곱이다.

013

4. 네 개의 두 자리 자연수 중 두 개씩 골라 평균을 계산하였더니 각각 79, 84, 85, 89, 90, 95이었다. 네 개의 수 중 가장 큰 수는 무엇인가?

096

5. 다음 조건을 만족하는 두 자연수 m 과 n 의 순서쌍 (m, n) 은 모두 몇 개인가?

m 과 n 의 곱은 $990^2 = 990 \times 990$ 이다.

135

6. 연속된 열 개의 자연수 중 하나를 제외한 아홉 개를 더하였더니 3000이었다. 제외한 수는 무엇인가?

335

제 5 회

한국주니어수학올림피아드

7. 자연수 $1, 2, 3, \dots, 99$ 가 적힌 99개의 카드가 들어있는 상자에 다음 과정을 수행하였다.

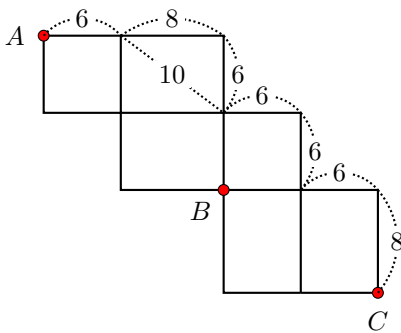
- 상자에서 세 장의 카드를 꺼내어 버리고, 세 카드에 적힌 수가 a, b, c 였다면 $a+b+c-1$ 이 적힌 새로운 카드를 상자에 추가한다.
- 상자에 세 장 이상의 카드가 남아있다면 위 과정을 반복하고, 그렇지 않다면 종료한다.

과정이 종료된 후, 상자에 한 장의 카드가 남았다. 이 카드에 적힌 수를 구하시오.

(답안에는 1000으로 나눈 나머지를 쓰시오.)

901

8. 그림의 전개도로 만든 직육면체에서 세 점 A, B, C 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하시오.



030

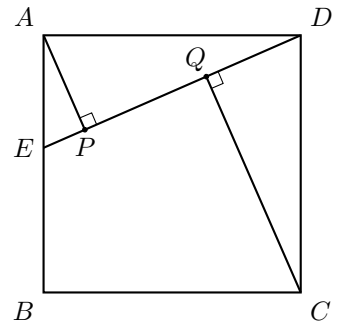
9. 자연수 $1, 2, 3, \dots, 20$ 을 차례로 이어 붙여 얻은 다음 자연수를 생각하자.

$$N = 1234567891011121314151617181920$$

이제 N 을 이루는 31개 숫자에서 20개를 지운 후 남은 11개의 숫자들을 적힌 순서대로 이어 붙여 얻을 수 있는 가장 큰 자연수를 M 이라 하자. 이때 M 의 각 자릿수의 합을 구하시오.

049

10. 정사각형 $ABCD$ 의 한 변 AB 에서 점 E 를 잡고, 점 A 와 점 C 에서 선분 DE 에 내린 수선의 발을 각각 P 와 Q 라 하자. $\overline{AP} = 7, \overline{CQ} = 16$ 일 때, 정사각형 $ABCD$ 의 넓이는 얼마인가?



305

11. 아래의 그림과 같이 36개의 네모칸이 기억자 모양으로 배치되어 있으며, 가장 외 줄에는 0과 1이 번갈아 들어가 있다.

0	1	0	1	0	1

남은 칸마다 0 또는 1을 넣되, \boxplus 모양의 네 칸에 있는 수의 합이 항상 2가 되도록 하려고 한다. 아래의 그림은 각각 올바른 예와 잘못된 예이다.

0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	
	0	1	0	1	
	0	1	0	1	

올바른 예

0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
	1	0	0	1	
	0	1	1	0	
	1	0	0	1	

잘못된 예

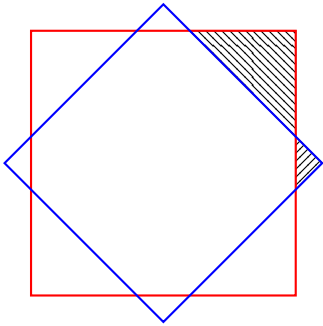
이러한 규칙을 지키면서 남은 칸에 0 또는 1을 채워 넣을 수 있는 방법은 몇 가지인가?

064

제 5 회

한국주니어수학올림피아드

12. 그림과 같이 서로 다른 크기의 두 정사각형이 겹쳐져 있다. 두 정사각형의 중심은 일치하며, 빗금친 삼각형은 넓이가 각각 8과 1인 이등변 삼각형이다. 작은 정사각형의 넓이는 얼마인가?



072

13. 두 자연수 m 과 n 에 대하여 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{3}{10}$ 이 성립할 때, 가장 큰 m 의 값은?

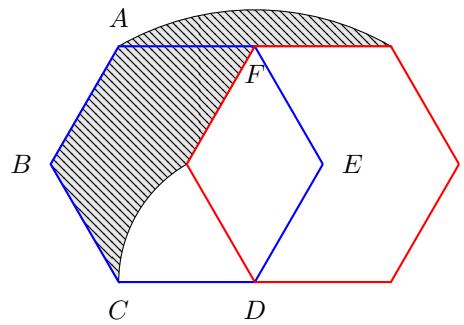
020

14. 다음과 같이 홀수를 차례대로 삼각형 모양으로 적었을 때, 2023은 위로부터 몇 번째 줄에서 나타날까?

1	첫 번째 줄
3 5	두 번째 줄
7 9 11	세 번째 줄
13 15 17 19	네 번째 줄
21 23 25 27 29	다섯 번째 줄
⋮	⋮

045

15. 한 변의 길이가 4인 정육각형 모양의 철판 $ABCDEF$ 를 점 D 를 중심으로 시계 방향으로 60° 회전하면 그림의 빨간색 정육각형으로 이동한다. 빗금친 부분은 회전 과정에서 선분 AB 와 선분 BC 가 지나간 부분을 그린 것이다. 이때 빗금친 부분의 넓이에 가장 가까운 정수는 무엇인가? (단, 원주율은 3.14로 한다.)



025

16. 자연수 19를 자연수의 합으로 표현한 뒤 합에 사용된 수를 모두 곱하여 새로운 수를 얻으려고 한다. 예를 들어 $19 = 1 + 18$ 이므로 $1 \times 18 = 18$ 을 얻을 수 있고, $19 = 2 + 3 + 14$ 이므로 $2 \times 3 \times 14 = 84$ 도 얻을 수 있다. 이렇게 하여 얻을 수 있는 가장 큰 수는 무엇인가?

972

제 5 회

한국주니어수학올림피아드

17. 네 팀이 모여 각 팀은 다른 세 팀과 한 번씩 경기를 하였다. 이때, 경기에서 이기면 승점 3점, 비기면 승점 1점을 얻고, 패하면 승점이 없다. 네 팀의 경기 결과, 각 팀의 최종 승점은 모두 홀수이고 서로 달랐다. 최종 승점이 가장 낮은 팀을 A라고 할 때, A팀에게 승리한 팀들의 최종 승점의 합을 구하시오.

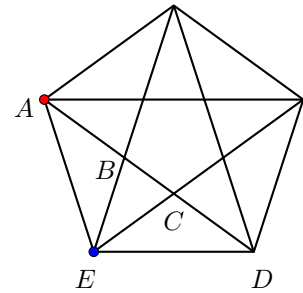
010

18. 다음 두 조건을 모두 만족하는 기약분수 $\frac{p}{q}$ 에 대하여, $p+q$ 의 값을 구하시오.

- 어떤 자연수를 $\frac{p}{q}$ 의 분모에는 곱하고 분자에는 더하여 얻은 분수가 $\frac{p}{q}$ 와 같다.
- $\frac{1}{4} < \frac{p}{q} < \frac{1}{3}$

009

19. 다음과 같이 정오각형의 꼭짓점을 이용해 별을 그리면, 등식 $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BC}$ 가 성립한다. 이 공통된 비율을 x 라 하면, 부등식 $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$ 가 성립한다.



위 그림에서 선분들을 따라 A에서 E까지 가려고 한다. 한 번 지난 점은 다시 지나지 않으면서 A에서 E까지 가는 가장 긴 경로의 길이를 ℓ 이라 할 때, ℓ 에 가장 가까운 정수를 구하시오. (단, $\overline{BC} = 1$ 이다.)

015

20. 어떤 자연수 N 의 자릿수를 둘로 적절히 나누었을 때 합이 같아진다면 N 을 “좋은 수”라 부르자. 예를 들어 9562의 자릿수를 9, 2와 5, 6으로 나누면 $9+2=5+6$ 이 성립하므로 9562는 좋은 수이다. 마찬가지로 1337도 $1+3+3=7$ 이 성립하므로 좋은 수이다.

다음 조건을 만족하는 가장 큰 자연수 N 을 구하시오.

(답안에는 N 을 1000으로 나눈 나머지를 쓰시오.)

- $1000 \leq N \leq 3000$ 이다.
- N 과 $N+1$ 은 둘 다 좋은 수이다.

749