Распределение тепла в пластине
Метод Якоби

Игорь Степанов, ФРТК, 213

15 мая 2015 г.

---

1 Постановка задачи

Для уравнения

$$\triangle U = -f(x,y), f(x,y) = -2(x^2+y^2) + 2(x+y), U|_{\delta\Omega} = 0 \qquad (1)$$

в области $\Omega = [0,1] \cap [0,1]$ найти распределение тепла в пластине численно. При решении СЛАУ использовать итерационный метод Якоби для равномерной сетки с шагом по обоим направлениям $h \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-7}\}$

Точное решение имеет вид:

$$U(x,y) = xy(1-x)(1-y) \qquad (2)$$

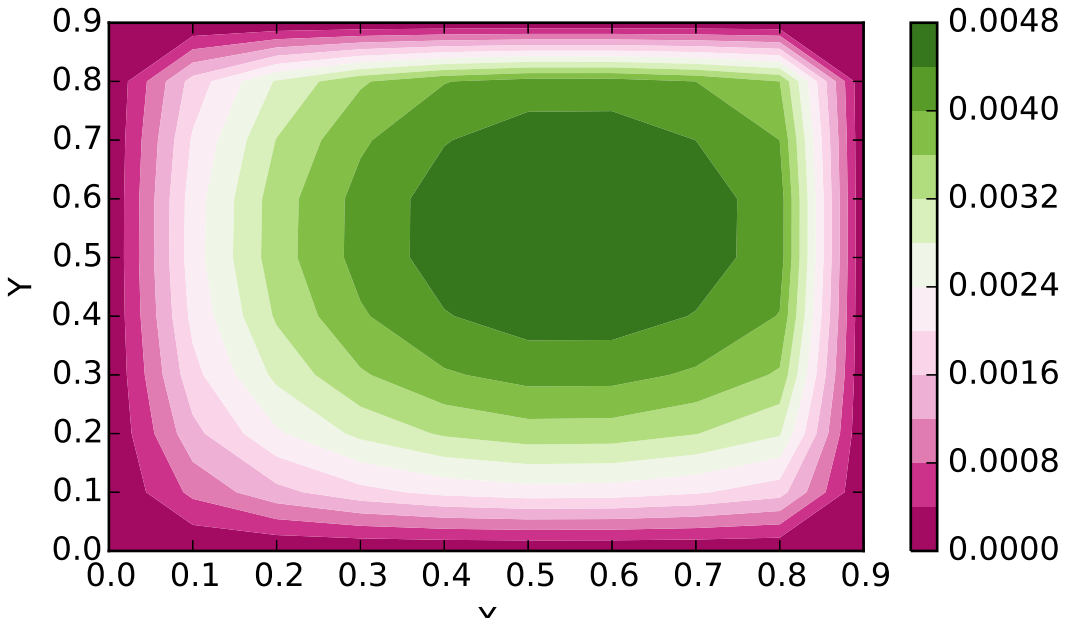
2 Метод Якоби

Для метода Якоби используется разностная схема:

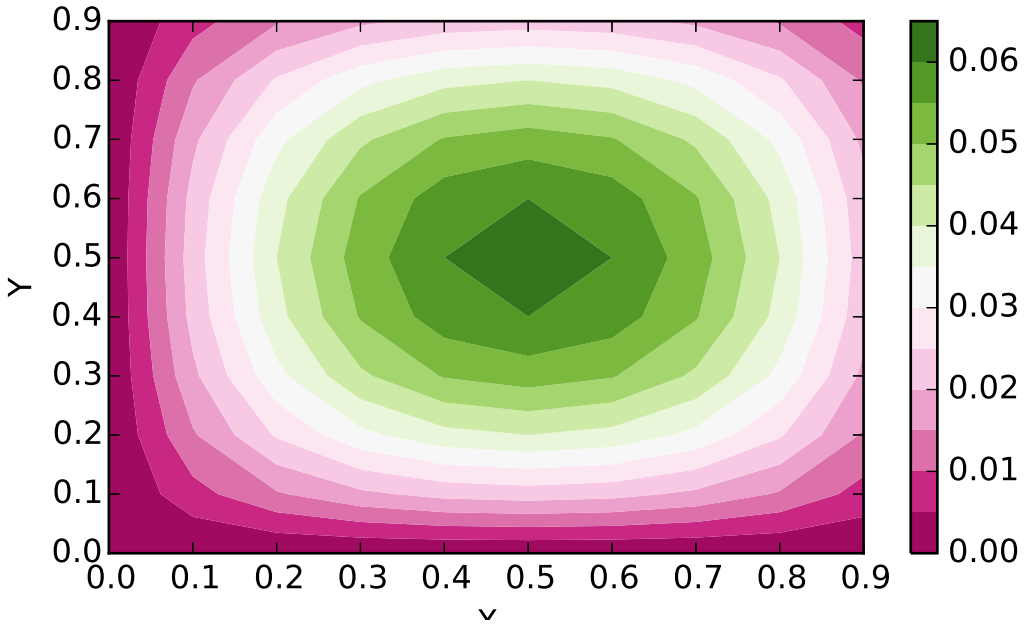
$$U_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(U_{i-1,j}^{(k)} + U_{i+1,j}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k)} + U_{i,j+1}^{(k)} - h^2 f_{i,j}\right) \qquad (3)$$

3 Результат

Шаг h	Точность ε	Кол-во итераций N	Ошибка err
0.1	0.1	1	0.05771015319824219
0.01	0.01	1977	0.009993698168278047
0.001	0.001	-	-
0.0001	0.0001	-	-

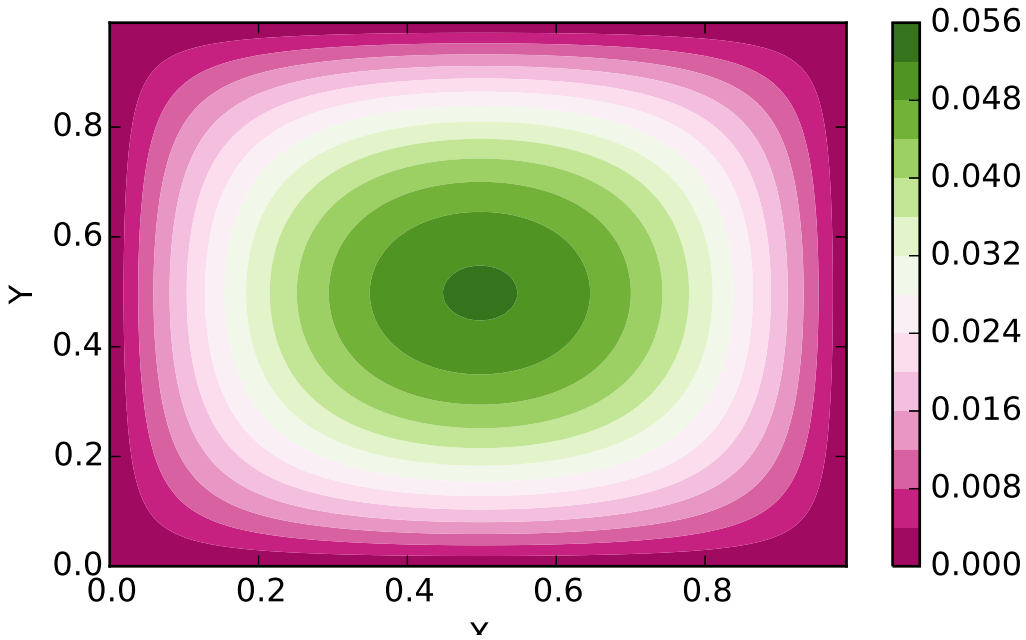


(a) Метод Якоби

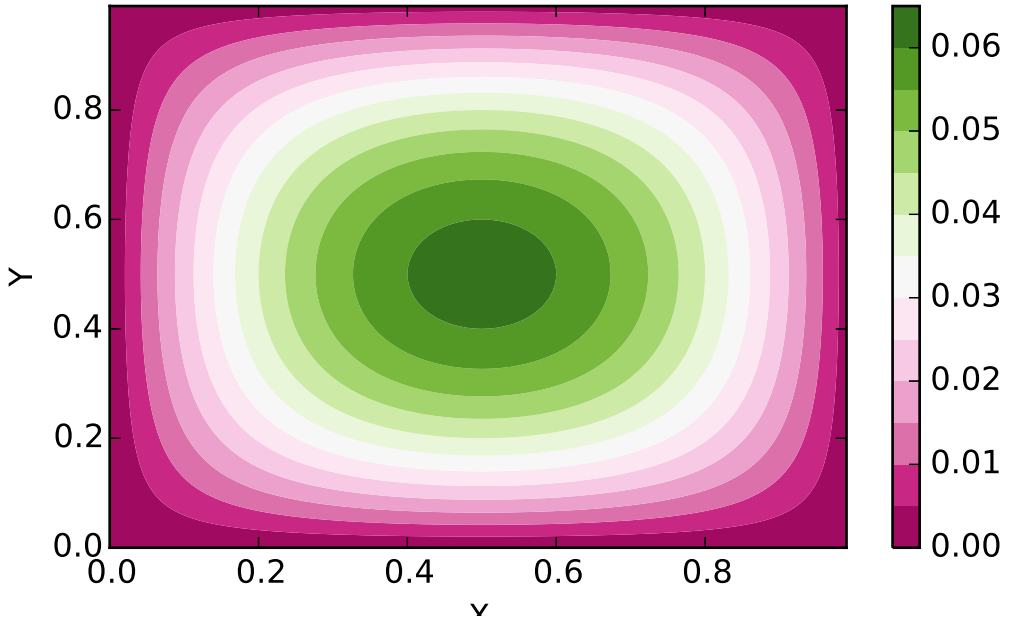


(b) Точное решение

Рис. 1: Шаг $h = 0.1$



(a) Метод Якоби



(b) Точное решение

Рис. 2: Шаг $h = 0.01$

4 Заключение

Из графиков видно, что метод Якоби хорошо приближает к точному решению. В моей имплиментации использовался язык программирования Python с библиотекой MatPlotLib для построения графиков. В программе можно сохранить результат в файл на диск, напечатать в терминале или же построить графики для самого метода и для точного решения задачи.

Однако данный метод слишком ресурсоемкий, т.к. для шагов $h = 0.001$ и $h = 0.0001$ результаты получить более чем за 12 часов не удалось. Возможно проблема в неоптимальном алгоритме и нехватки мощности компьютера. Так например для шага $h = 0.001$ требовалось более 3 Гб оперативной памяти.