Интегрирование быстро осцилирующих функций

Варнавский Вадим, Степанов Игорь

17 декабря 2014 г.

1 Постановка задачи

Дан интеграл

$$\int_a^b f(x)\sin(\omega x)dx, \tag{1}$$

где $f(x)$ - гладкая функция, $\omega(b-a) \gg 1$. Предложить метод для вычисления данного интеграла и найти значение этого интеграла.

2 Метод вычисления

Зададимся узлами интегрирования

$$x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}d_j, \quad j = 1, 2, 3$$

Приблизим заданную функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом в форме Лагранжа $L_n(x)$, где многочлен имеет вид

$$L_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n \varphi_n^N(x), \tag{2}$$

$$\varphi_n^N = \prod_{i=0}^{N} \frac{x - x_i}{x_n - x_i} (i \neq n) \tag{3}$$

Здесь N - количество интервалов, на которые делится отрезок интегрирования узлами (в нашем случае $N = 2$). Поэтому

$$L_3(x) = P_1(x) f(x_1) + P_2(x) f(x_2) + P_3(x) f(x_3)$$

Интеграл $\int_a^b L_n(x) e^{\imath\omega x} dx$ может быть вычислен непосредственно

$$\int_a^b L_n(x) e^{\imath\omega x} dx = S_n^\omega(f) =$$
$$= \frac{b-a}{2} \exp\left(\imath\omega \frac{b+a}{2}\right) \sum_{j=1}^{n} D_j \left(\omega \frac{b-a}{2}\right) f(x_j),$$

$$\text{где} \quad D_j(p) = \int_{-1}^{1} \left(\prod_{i \neq j} \frac{\xi - d_k}{d_j - d_k} \right) \exp(\imath p \xi) d\xi. \tag{4}$$

Получилась квадратурная формула

$$\int_a^b f(x) \exp(\imath\omega x) dx \approx S_n^\omega(f) \tag{5}$$

Оценка погрешности полностью совпадает с оценкой погрешности квадратурной формулы Симпсона для интеграла лишь от одной функции $f(x)$, без быстро осцилирующего множителя:

$$|R(f)| = \left| \int_a^b (f(x) - L_3(x)) \exp(\imath \omega x) dx) \right| \leq$$
$$\leq \int_a^b |f(x) - L_3(x)| dx \leq \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \frac{(b-a)^5}{2880} \quad (6)$$

Из формулы (4) коэффициенты

$$D_1(p) = p^{-3}[2p\cos(p) - \sin(p)(2 - p^2) + \imath(p^2\cos(p) - p\sin(p))], \quad (7)$$
$$D_2(p) = p^{-3}[4\sin(p) - 4p\cos(p)], \quad (8)$$
$$D_3(p) = p^{-3}[2p\cos(p) + \sin(p)(p^2 - 2) + \imath(p\sin(p) - p^2\cos(p)]. \quad (9)$$

Очевидно, для интегрирования функции нашего вида, необходимо взять мнимую часть этих коэффициентов.

3 Результат

$a = 1$, $b = 5$ и отрезок для метода трапеций делиться на $N = 100$ частей. Ошибка для метода Филона составляет 0.003413, для метода трапеций — $2.13 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 1: Функция $f(x) = \ln(x)$ от 1 до 5

№	ω	Метод Филона	Метод трапеций	Matlab
1	50	-0.007725	-0.004935	-0.007722
2	100	0.014255	-0.012825	0.014267
3	150	0.007182	-0.135609	0.007195
4	200	-0.004508	-0.014904	-0.004500
5	250	-0.006029	0.009323	-0.006024
6	300	0.000598	-0.008134	0.000600
		...		

		...		
7	350	0.004563	0.037469	0.004565
8	400	0.001483	-0.001315	0.001485
9	450	-0.002909	0.059888	-0.002908
10	500	-0.002445	-0.037305	-0.002444
11	550	0.001311	-0.000048	0.001311
12	600	0.002617	-0.049350	0.002617
13	650	0.000055	0.001230	0.000055
14	700	-0.002219	-0.004488	-0.002219
15	750	-0.001047	0.017476	-0.001048
16	800	0.001467	0.073089	0.001467
17	850	0.001588	0.007355	0.001588
18	900	-0.000583	0.008637	-0.000583
19	950	-0.001688	-0.227555	-0.001689
20	1000	-0.000250	-0.002715	-0.000250

4 Обработка результатов

Из приведенной таблицы можно видеть, что результаты вычисления по формуле Филона очень близки к точным значениям интеграла, посчитанным с помощью MATLAB.