Метод Рунге-Кутты
Задача №7.2.3

Игорь Степанов, ФРТК, 213

April 16, 2015

---

1 Постановка задачи

Для решения задачи Коши системы ОДУ используется численный метод Рунге-Кутты, заданный таблицей Бутчера.

$$\begin{aligned} u' &= -5u + 3\cdot 10^{-2}v + 2w, & u(0) &= 2, \\ v' &= -800v, & v(0) &= 4, \\ w' &= -u - 5\cdot 10^{-3}v - 2w, & w(0) &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cc} 1/6 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 4/6 & 1/6 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Получить для него функцию и условие устойчивости. Вычислите число жесткости.

2 Выкладки

2.1 Функция устойчисвости

Функция устойчивости имеет вид:

$$R(z) = 1 + z\,\overrightarrow{b}^{tr}(\mathbf{E} - z\mathbf{A})^{-1}\overrightarrow{1}. \tag{1}$$

Аналитически приводим эту функцию к виду:

$$R(z) = \frac{1 + z - \frac{5}{36}z^2}{(1 - \frac{z}{6})^2}. \tag{2}$$

Решение неравенства $|R(z)| \leq 1$ представляет из себя

$$z \in \left[3(1 - \sqrt{3}); 0\right] \bigcup \left[8; 3(1 + \sqrt{3})\right].$$

Следовательно для шага h получаем такое условие:

$$h \in \left(0; \frac{3(1 - \sqrt{3})}{\lambda_{min}}\right] \simeq \left(0; 2.745 \cdot 10^{-3}\right].$$

2.2 Число жесткости

Для нахождения числа жесткости $\mathbf{S}$ необходимо вычислить собственные числа матрицы Якоби:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \cdot 10^{-2} & 2 \\ 0 & -800 & 0 \\ -1 & -5 \cdot 10^{-3} & -2 \end{pmatrix}$$

Получаем: $\lambda \in \{-3, -4, -800\}$. Число жесткости рассчитывается:

$$S = \frac{|\lambda|_{max}}{|\lambda|_{min}} = \frac{800}{3} = 266.6(66) \tag{3}$$

2.3 Метод Рунге-Кутты

$$\overrightarrow{u_{n+1}} = \overrightarrow{u_n} + h \sum_{i=1}^{s} b_i \overrightarrow{k_i}, \tag{4}$$

где

$$\overrightarrow{k_i} = f\left(x_n + c_i h, \overrightarrow{u_n} + \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right), i = \overline{1, s}, s = 2. \tag{5}$$

2.3.1 Явный метод Рунге-Кутты

$$\overrightarrow{u_{n+1}} = \overrightarrow{u_n} + \frac{h}{2}\left(3\overrightarrow{f_n} - \overrightarrow{f_{n-1}}\right) \tag{6}$$

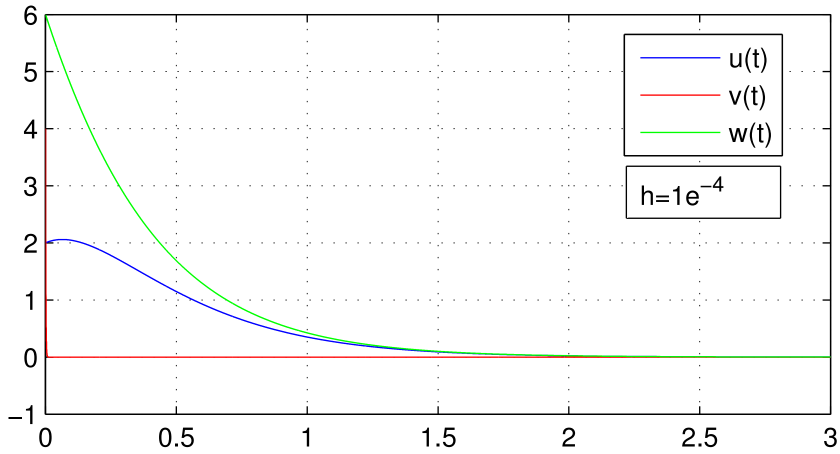
На Рис. 1b показано решение исходной задачи (раздел 1) двухстадийным явным методом Рунге-Кутты (формула 6). Сравнивая с Рис. 1a, видно, что решения практически повторяют друг друга, а так как среде Matlab можно доверять, то и наше решение будет верным.

При уменьшении шага примерно до $h \simeq 0.1$ двухстадийный метод становится непригодным для использования, а Matlab продолжает считать верно.

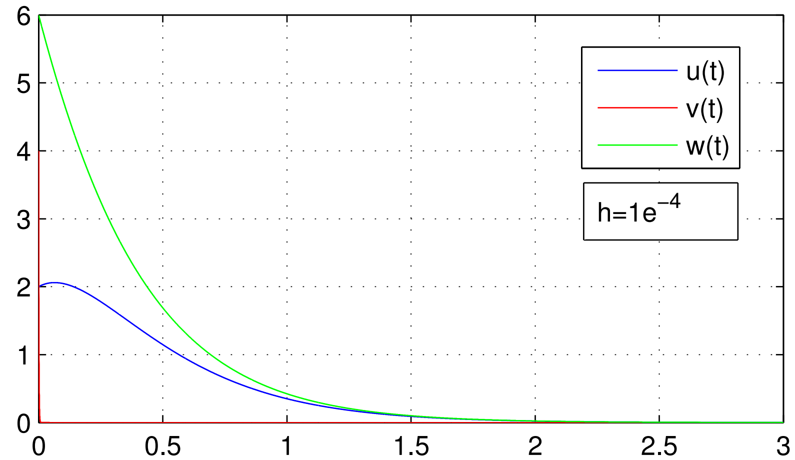
3 Заключение

Решить задачу указанным методом не получилось, т.к. коэффициенты преобретают слишком большие степени десяти, что приводит к переполнению стека программы. Так в **Matlab** результат даже после первой итерации получается *Inf*. При этом это происходит при любом начальном приближении коэффициентов.

Возможно это из-за того, что в условии не надо было решать саму задачу Коши, а только лишь найти функцию устойчивости и число жесткости. Однако получилось найти решение используя двухстадийный явный метод.



(a) Решение задачи, используя встроенный метод Рунге-Кутты в среде Matlab



(b) Решение задачи, используя двухстадийный явный метод Рунге-Кутты

Figure 1: Решения задачи