Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for teknisk kybernetikk

Faglig kontakt under eksamen
Navn:
Erlend Kristiansen
Telefon: 99501741

LØSNINGSFORSLAG
EKSAMEN I TTK4130
MODELLERING OG SIMULERING
26. mai 2006
Tid: 09:00-13:00

Hjelpemidler:
C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Sensur:
Sensuren vil bli avsluttet i henhold til gjeldende regelverk.

Oppgave 1) (xx %)

a)

$$\begin{aligned} H_a(j\omega) &= K\frac{j\omega + a}{(j\omega+1)^2} \\ &= K\frac{(j\omega + a)(-j\omega+1)^2}{(-j\omega+1)^2(j\omega+1)^2} \\ &= K\frac{a+(2-a)\,\omega^2}{(1+\omega^2)^2} + jK\frac{\omega\left(1-2a-\omega^2\right)}{(1+\omega^2)^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Siden $H_a(s)$ har alle poler i venstre halvplan er $H_a(s)$ positiv reell hvis og bare hvis $\mathrm{Re}(H_a(j\omega)) \geq 0$ for alle ω. Dette betyr at $H_a(s)$ er positiv reell hvis og bare hvis

$$0 \leq a \leq 2 \tag{2}$$

b) $H_b(s)$ er irrasjonal og kan uttrykkes

$$\frac{1}{\tanh s} = \frac{\cosh s}{\sinh s} \tag{3}$$

som har singulariteter for

$$\begin{aligned} 0 &= \sinh s = \frac{e^s - e^{-s}}{2} \\ &\iff e^{2s} = 1 \\ &\iff s = jk\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

Dette betyr at alle singularitetene ligger på imaginæraksen. Transferfunksjonen er derfor positiv reell hvis og bare hvis $H_b(s)$ er reell for reelle s i $\mathrm{Re}(s) > 0$, og i tillegg $\mathrm{Re}(H_b(s)) \geq 0$ for alle $\mathrm{Re}(s) > 0$. La $s = \sigma + j\omega$. Da er

$$\sinh s = \sinh\sigma\cos\omega + j\cosh\sigma\sin\omega \tag{4}$$

$$\cosh s = \cosh\sigma\cos\omega + j\sinh\sigma\sin\omega \tag{5}$$

som gir

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\tanh s}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{\cosh(\sigma+j\omega)}{\sinh(\sigma+j\omega)}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{\cosh\sigma\cos\omega + j\sinh\sigma\sin\omega}{\sinh\sigma\cos\omega + j\cosh\sigma\sin\omega}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{(\cosh\sigma\cos\omega + j\sinh\sigma\sin\omega)(\sinh\sigma\cos\omega - j\cosh\sigma\sin\omega)}{(\sinh\sigma\cos\omega)^2 + (\cosh\sigma\sin\omega)^2}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{\cosh\sigma\sinh\sigma\cos^2\omega + \sinh\sigma\cosh\sigma\sin^2\omega + j\left(\sinh^2\sigma\sin\omega\cos\omega - \cosh^2\sigma\cos\omega\sin\omega\right)}{(\sinh\sigma\cos\omega)^2 + (\cosh\sigma\sin\omega)^2}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{\cosh\sigma\sinh\sigma - j\sin\omega\cos\omega}{(\sinh\sigma\cos\omega)^2 + (\cosh\sigma\sin\omega)^2}\right) \\
&= \frac{\cosh\sigma\sinh\sigma}{(\sinh\sigma\cos\omega)^2 + (\cosh\sigma\sin\omega)^2} > 0 \quad \text{når} \quad \sigma > 0
\end{aligned}
$$

Dette gir at $H_b(s)$ er positiv reell.

c) Setter opp modellen elementvis og bruker Newton. Kaller motorvinkelen for θ_0, vinkelen for last 1 er θ_1 og vinkelen for last 2 er θ_2. Vinkelhastighetene og akselerasjonene for henholdsvis motoren og de to lastene er dermed $\dot\theta_0, \dot\theta_1, \dot\theta_2$ og $\ddot\theta_0, \ddot\theta_1, \ddot\theta_2$, evt. $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ og $\dot\omega_0, \dot\omega_1, \dot\omega_2$. Modellen er dermed

$$
\begin{aligned}
J_0\ddot\theta_0 &= T_0 - T_1 && (6)\\
J_1\ddot\theta_1 &= T_1 - T_2 && (7)\\
J_2\ddot\theta_2 &= T_2 && (8)
\end{aligned}
$$

hvor T_0 er motormomentet og lastmomentene er gitt av

$$
\begin{aligned}
T_1 &= D_1\left(\dot\theta_0 - \dot\theta_1\right) + K_1(\theta_0 - \theta_1) && (9)\\
T_2 &= D_2\left(\dot\theta_1 - \dot\theta_2\right) + K_2(\theta_1 - \theta_2) && (10)
\end{aligned}
$$

hvor D_1, D_2 er dempekonstantene og K_1, K_2 er fjærkonstantene.

d) Energien til systemet er gitt av den kinetiske energien i motoren og i de to lastene, samt den potensielle energien i "fjærene" for de to elastiske lastene. Vi velger dermed å betrakte energifunksjonen for systemet, som er

$$
V = \frac{1}{2}J_0\dot\theta_0^2 + \frac{1}{2}J_1\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot\theta_2^2 + \frac{1}{2}K_1\theta_{1e}^2 + \frac{1}{2}K_2\theta_{2e}^2 \tag{11}
$$

hvor

$$
\begin{aligned}
\theta_{1e} &= \theta_0 - \theta_1 && (12)\\
\theta_{2e} &= \theta_2 - \theta_1 && (13)
\end{aligned}
$$

Får da

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= J_0\dot{\theta}_0\ddot{\theta}_0 + J_1\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 + J_2\dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2 + K_1\theta_{1e}\dot{\theta}_{1e} + K_2\theta_{2e}\dot{\theta}_{2e} \\
&= \dot{\theta}_0\left(T_0 - T_1\right) + \dot{\theta}_1\left(T_1 - T_2\right) + \dot{\theta}_2 T_2 + K_1\theta_{1e}\dot{\theta}_{1e} + K_2\theta_{2e}\dot{\theta}_{2e} \\
&= \dot{\theta}_0\left(T_0 - \left(D_1\dot{\theta}_{1e} + K_1\theta_{1e}\right)\right) + \dot{\theta}_1\left(D_1\dot{\theta}_{1e} + K_1\theta_{1e} - \left(D_2\dot{\theta}_{2e} + K\theta_{2e}\right)\right) + \dot{\theta}_2\left(D_2\dot{\theta}_{2e} + K_2\theta_{2e}\right) + K_1\theta_{1e} \\
&= \dot{\theta}_0 T_0 - D_1\dot{\theta}_{1e}^2 - K_1\dot{\theta}_{1e}\theta_{1e} - D_2\dot{\theta}_{2e}^2 - K_2\dot{\theta}_{2e}\theta_{2e} + K_1\theta_{1e}\dot{\theta}_{1e} + K_2\theta_{2e}\dot{\theta}_{2e} \\
&= \dot{\theta}_0 T_0 - D_1\dot{\theta}_{1e}^2 - D_2\dot{\theta}_{2e}^2
\end{aligned}
$$

som viser at systemet med inngang T_0 og utgang $\dot{\theta}_0 = \omega_0$ er passivt. Dette impliserer at $H_0(s) = \frac{\omega_0}{T_0}(s)$ er positiv reell, som igjen medfører at $|\angle H_0(j\omega)| \leq 90°$. Passivitet betyr kort sagt at systemet bare kan lagre og dissipere energi (står mer forklart i boka). Dette kan i dette tilfellet sees direkte fra uttrykket for $\dot{V}$ som er utrykket for forandringen av den totale energien til systemet (dette siden vi for dette systemet valgte energifunksjonen som lagringsfunksjon). Det positive energibidraget til systemet er effekten $\dot{\theta}_0 T_0$ levert av motoren og de negative bidragene $D_1\dot{\theta}_{1e}^2 + D_2\dot{\theta}_{2e}^2$ er energi dissipert i demperne.

Oppgave 2) (xx %)

a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_d^a &= \mathbf{R}_z(\psi)\,\mathbf{R}_y(\theta)\,\mathbf{R}_x(\phi) \qquad (15)\\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & 0 & \sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{4} & 0 & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{3}{8}\sqrt{2}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{8}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{8}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{8}\sqrt{2}-\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0.612\,37 & 0.280\,33 & 0.739\,20 \\ 0.353\,55 & 0.739\,20 & -0.573\,22 \\ -0.707\,11 & 0.612\,37 & 0.353\,55 \end{pmatrix} \qquad (16)
\end{aligned}$$

b) Når vi skal finne vinkel-akse representasjonen går vi Euler-rotasjonsvektoren **e**. Vi har at

$$\mathbf{e} = \mathbf{k}\sin\theta \qquad (17)$$

hvor

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{pmatrix} \qquad (18)$$

Setter inn i (18) fra $\mathbf{R}_d^a$ og får dermed

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0.612\,37-(-0.573\,22) \\ 0.739\,20-(-0.707\,11) \\ 0.353\,55-0.280\,33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.592\,80 \\ 0.723\,16 \\ 0.036\,61 \end{pmatrix} = \mathbf{k}\sin\theta \qquad (19)$$

Siden $\mathbf{k}$ er en enhetsvektor må $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2} = 1$. Dermed må

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{0.592\,80^2+0.723\,16^2+0.036\,61^2} &= 1 \qquad (20)\\
\sin\theta &= 0.935\,80 \qquad (21)
\end{aligned}$$

som da gir

$$\theta = 1.\,210\,5 \qquad (22)$$

Dermed blir

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} 0.592\,80 \\ 0.723\,16 \\ 0.036\,61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.633\,47 \\ 0.772\,77 \\ 0.03912 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

c) Vinkelhastighetsvektoren $\boldsymbol{\omega}_{ad}^{a}$ for $\psi = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{\pi}{4}, \phi = \frac{\pi}{3}$ og $\dot{\psi} = 1, \dot{\theta} = 2, \dot{\phi} = -1$ er gitt av

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{ad}^{a} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \mathbf{R}_z(\psi)\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_z(\psi)\,\mathbf{R}_y(\theta)\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && (24) \\
&= \begin{pmatrix} -\sin\psi\dot{\theta} + \cos\psi\cos\theta\dot{\phi} \\ \cos\psi\dot{\theta} + \sin\psi\cos\theta\dot{\phi} \\ \dot{\psi} - \sin\theta\dot{\phi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} \\ 2\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} \\ 1 + \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3} - 1 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.6124 \\ 1.3785 \\ 1.7071 \end{pmatrix} && (25)
\end{aligned}$$

d) Har at posisjonen til punkt p i a-koordinater er gitt av

$$\mathbf{r}_p^i = \mathbf{r}_o^i + \mathbf{R}_b^i \mathbf{r}_{op}^b \tag{26}$$

der $\mathbf{r}_o^i$ er vektoren fra origo i i-systemet til origo i b-systemet. Deriverer og får hastighetsvektoren

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_p^i &= \mathbf{v}_o^i + \dot{\mathbf{R}}_b^i \mathbf{r}_{op}^b + \mathbf{R}_b^i \dot{\mathbf{r}}_{op}^b \\
&= \mathbf{v}_o^i + \mathbf{R}_b^i \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \mathbf{r}_{op}^b + \mathbf{R}_b^i \dot{\mathbf{r}}_{op}^b && (27)
\end{aligned}$$

Deriverer igjen og får akselerasjonsvektoren

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_p^i &= \mathbf{a}_o^i + \dot{\mathbf{R}}_b^i \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \mathbf{r}_{op}^b + \mathbf{R}_b^i \left(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right)^{\times} \mathbf{r}_{op}^b + \mathbf{R}_b^i \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \dot{\mathbf{r}}_{op}^b + \dot{\mathbf{R}}_b^i \dot{\mathbf{r}}_{op}^b + \mathbf{R}_b^i \ddot{\mathbf{r}}_{op}^b \\
&= \mathbf{a}_o^i + \mathbf{R}_b^i \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \mathbf{r}_{op}^b + \mathbf{R}_b^i \left(\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b\right)^{\times} \mathbf{r}_{op}^b + \mathbf{R}_b^i \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \dot{\mathbf{r}}_{op}^b + \mathbf{R}_b^i \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \dot{\mathbf{r}}_{op}^b + \mathbf{R}_b^i \ddot{\mathbf{r}}_{op}^b \\
&= \mathbf{a}_o^i + \mathbf{R}_b^i \ddot{\mathbf{r}}_{op}^b + 2\mathbf{R}_b^i \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \dot{\mathbf{r}}_{op}^b + \mathbf{R}_b^i \left(\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b\right)^{\times} \mathbf{r}_{op}^b + \mathbf{R}_b^i \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \mathbf{r}_{op}^b \\
&= \mathbf{R}_b^i \left(\mathbf{a}_o^b + \ddot{\mathbf{r}}_{op}^b + 2\left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \dot{\mathbf{r}}_{op}^b + \left(\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b\right)^{\times} \mathbf{r}_{op}^b + \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^{\times} \mathbf{r}_{op}^b\right) && (28)
\end{aligned}$$

som er svaret vi søker.

d) Tar utgangspunkt i ligninga gitt i oppgaven

$$\vec{a}_p = \vec{a}_0 + \frac{{}^b d^2}{dt^2}\vec{r} + 2\vec{\omega}_{ib} \times \frac{{}^b d}{dt}\vec{r} + \vec{\alpha}_{ib} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{ib} \times (\vec{\omega}_{ib} \times \vec{r}) \tag{29}$$

Det første leddet $\vec{a}_0$ angir lineærakselerasjonen til origo av b-systemet, mens det andre leddet $\frac{{}^b d^2}{dt^2}\vec{r}$ angir lineærakselerasjonen (gitt i b-systemet) til punktet

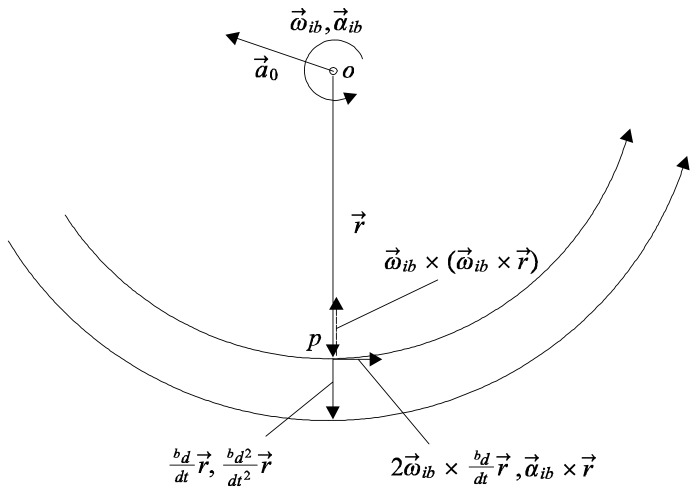

Figure 1: Totalakselerasjonen for et (mulig) ikke-fast punkt p i et system b som roterer i forhold til det inertielle systemet i. Også kjent som "sykkeleike-eksempelet".

p i forhold til origo i b-systemet. Det tredje leddet $2\vec{\omega}_{ib} \times \frac{^b d}{dt}\vec{r}$ angir Coriolis-akselerasjonen, som kommer av at hvis man beveger seg lineært i radiell retning (sett i b) i et roterende system b vil hastigheten i den nye "banen" bli større/mindre, siden man skifter "bane" i det roterende systemet b, sett fra i. Det fjerde leddet $\vec{\alpha}_{ib} \times \vec{r}$ er vinkelakselerasjonen for rotasjonen mellom i- og b-systemet, mens det siste leddet $\vec{\omega}_{ib} \times (\vec{\omega}_{ib} \times \vec{r})$ er sentripetalakselerasjonen som kommer av at punktet p går i en sirkulær bane (sett i i-systemet) rundt origo i b-systemet selv om det står i ro i b-systemet. Newton's lov angir da at siden den da i i-systemet ikke går i en rett linje eller står i ro så er den påvirket av en akselerasjon. Retningene på disse akselerasjonsleddene er angitt på Figur (1) (finnes gjennom høyrehåndsregel for kryssprodukt og ved å anta at all bevegelse for p, dvs endring i $\vec{r}$ skjer radielt ut fra origo i b-systemet i forhold til rotasjonen). For enkelhets skyld lar vi $\vec{\omega}_{ib}$ og $\vec{\alpha}_{ib}$ peke ut av papirplanet, mens alle andre vektorer ligger i papirplanet.

Oppgave 3) (xx %)

a) Vi velger de generaliserte koordinatene

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} \tag{30}$$

Systemets kinetiske energi er gitt av klossens hastighet i radiell og transversal retning som

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left(y\dot{\theta}\right)^2 \tag{31}$$

Systemets potensielle energi kan skrives

$$U = -mgy\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(y - y_0\right)^2 \tag{32}$$

Dette gir Lagrange-funksjonen

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left(y\dot{\theta}\right)^2 + mgy\cos\theta - \frac{1}{2}k\left(y - y_0\right)^2 \tag{33}$$

For $q_1 = \theta$ har vi

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgy\sin\theta \tag{34}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = my^2\dot{\theta} \tag{35}$$

og for $q_2 = y$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = m\dot{\theta}^2 y + mg\cos\theta - k\left(y - y_0\right) \tag{36}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \tag{37}$$

Lagrange-ligninga er

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \tag{38}$$

hvor den eneste eksterne kraften er dempekraften for $q_2 = y$, altså $\tau_2 = -d\dot{y}$. Setter inn og får modellen

$$my^2\ddot{\theta} + 2my\dot{\theta}\dot{y} + mgy\sin\theta = 0 \tag{39}$$

$$m\ddot{y} - m\dot{\theta}^2 y + d\dot{y} - mg\cos\theta + k\left(y - y_0\right) = 0 \tag{40}$$

Oppgave 4) (20 %)

a) Skal sette opp differensialligningene for trykket og temperaturen i de to tankene. Dette gjøres ved å sette opp massebalansene og energibalansene for de to tankene samt å bruke egenskaper for isentropisk strømning for en ideell gass. Antar at det er ingen varmeledning mellom tankene og omgivelsene. Definerer positiv massestrøm w til å gå fra tank 2 til tank 1, altså til høyre i figuren. Massebalansen for tank 1 er da

$$\frac{d}{dt}(\rho_1 V_1) = V_1\dot{\rho}_1 + A_1\rho_1\dot{x} = w \tag{41}$$

og for tank 2

$$\frac{d}{dt}(\rho_2 V_2) = V_2\dot{\rho}_2 = -w \tag{42}$$

Energibalansen for tank 1 er

$$\frac{d}{dt}(\rho_1 V_1 u_1) = V_1 u_1\dot{\rho}_1 + A_1\rho_1 u_1\dot{x} + \rho_1 V_1\dot{u}_1 = w h_v - p_1 A_1\dot{x} \tag{43}$$

hvor $h_v = u + \frac{p}{\rho}$ er entalpien for massestrømmen gjennom ventilen. Energibalansen for tank 2 er

$$\frac{d}{dt}(\rho_2 V_2 u_2) = V_2 u_2\dot{\rho}_2 + V_2\rho_2\dot{u}_2 = -w h_v \tag{44}$$

Setter massebalansen inn i energibalansen og får

$$\begin{aligned} \rho_1 V_1\dot{u}_1 &= w(h_v - u_1) - p_1 A_1\dot{x} && (45)\\ \rho_2 V_2\dot{u}_2 &= -w(h_v - u_2) && (46) \end{aligned}$$

Vi har videre at

$$\begin{aligned} u_1 &= c_v T_1 && (47)\\ u_2 &= c_v T_2 && (48)\\ h_v &= c_p T_v && (49) \end{aligned}$$

og i tillegg at temperaturen for gassen som strømmer gjennom ventilen med massetrøm w er gitt av

$$T_v = \begin{cases} T_1, & p_1 > p_2 \\ T_2, & p_2 > p_1 \end{cases} \tag{50}$$

Disse settes inn i (45)-(46) og vi får et utrykk for temperaturendringene

$$\begin{aligned} \rho_1 V_1 c_v\dot{T}_1 &= w(h_v - u_1) - p_1 A_1\dot{x} && (51)\\ \rho_2 V_2 c_v\dot{T}_2 &= -w(h_v - u_2) && (52) \end{aligned}$$

Isentropiske forhold gir $dp = \kappa RT d\rho$. Dette settes inn i massebalansene og vi får

$$\begin{aligned} V_1\dot{p}_1 &= \kappa RT_1 w - \kappa RT_1 A_1\rho_1\dot{x} && (53)\\ V_2\dot{p}_2 &= -\kappa RT_2 w && (54) \end{aligned}$$

Den ideelle gassloven gir

$$pV = mRT \Longrightarrow \frac{RT}{V} = \frac{p}{m}, \quad p = \rho RT \tag{55}$$

Dermed blir den ferdige modellen for trykket

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \kappa p_1 \frac{w}{m_1} - \kappa p_1 \frac{\dot{x}}{x} && (56) \\ \dot{p}_2 &= -\kappa p_2 \frac{w}{m_2} && (57) \end{aligned}$$

For en ideell gass har vi at $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$, $\frac{R}{c_v} = \kappa - 1$ og $\frac{R}{c_p} = \frac{\kappa-1}{\kappa}$. Bruker (55) i (51)-(52) og får for $p_1 > p_2$

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= \frac{1}{\rho_1 V_1 c_v}\left(w\frac{p_1}{\rho_1} - p_1 A_1 \dot{x}\right) \\ &= \frac{1}{m_1 c_v}\left(wRT_1 - p_1 A_1 \dot{x}\right) \\ &= \frac{(\kappa - 1)\, wT_1}{m_1} - \frac{p_1 A_1 \dot{x}}{m_1 c_v} && (58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_2 &= -\frac{w}{\rho_2 V_2 c_v}\left(c_p T_1 - u_2\right) \\ &= -\frac{w}{\rho_2 V_2 c_v}\left(c_p T_1 - c_v T_2\right) \\ &= -\frac{w}{m_2}\left(\kappa T_1 - T_2\right) && (59) \end{aligned}$$

For $p_2 > p_1$ får vi

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= \frac{1}{\rho_1 V_1 c_v}\left(w\left(c_p T_2 - u_1\right) - p_1 A_1 \dot{x}\right) \\ &= \frac{1}{m_1 c_v}\left(w\left(c_p T_2 - c_v T_1\right) - p_1 A_1 \dot{x}\right) \\ &= \frac{w}{m_1}\left(\kappa T_2 - T_1\right) - \frac{p_1 A_1 \dot{x}}{m_1 c_v} && (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_2 &= -\frac{w}{\rho_2 V_2 c_v}\frac{p_2}{\rho_2} \\ &= -\frac{w}{m_2 c_v} R T_2 \\ &= -\frac{(\kappa - 1)\, w}{m_2} T_2 && (61) \end{aligned}$$

Samlet blir dermed modellen

$$\dot{p}_1 = \kappa p_1 \frac{w}{m_1} - \kappa p_1 \frac{\dot{x}}{x} \tag{62}$$

$$\dot{p}_2 = -\kappa p_2 \frac{w}{m_2} \tag{63}$$

$$\dot{T}_1 = \begin{cases} \frac{(\kappa-1)wT_1}{m_1} - \frac{p_1 A_1 \dot{x}}{m_1 c_v}, & p_1 > p_2 \\ \frac{w}{m_1}\left(\kappa T_2 - T_1\right) - \frac{p_1 A_1 \dot{x}}{m_1 c_v}, & p_2 > p_1 \end{cases} \tag{64}$$

$$\dot{T}_2 = \begin{cases} -\frac{w}{m_2}\left(\kappa T_1 - T_2\right), & p_1 > p_2 \\ -\frac{(\kappa-1)w}{m_2} T_2, & p_2 > p_1 \end{cases} \tag{65}$$

Massestrømmen w er gitt av (tatt fra boka)

$$w = \begin{cases} \frac{A_v p_1}{\sqrt{\kappa R T_1}} \kappa \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \left(\frac{2}{\kappa-1} \sqrt{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}\right), & p_1 > p_2 \\ \frac{A_v p_2}{\sqrt{\kappa R T_2}} \kappa \left(\frac{p_1}{p2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \left(\frac{2}{\kappa-1} \sqrt{1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}\right), & p_1 > p_2 \end{cases} \tag{66}$$

b) Uttrykket for stempelet blir da en enkel kraftbalanse (Newton)

$$m\ddot{x} = A_1 p_1 - A_1 p_0 = A_1 p_1 \tag{67}$$

Oppgave 5) (20 %)

a) Stabilitetsfunksjonen er

$$R = 1 - h \tag{68}$$

og stabilitet oppnås for $|R| = |1 - h| \leq 1$. Dette er oppfylt for

$$h \leq 1 \tag{69}$$

b) (Sjekk mhp stabilitetsgrensa. Stabil for 1), marginal stabil for 2) og ustabil for 3). Vurder også om studenten har forstått hvordan metoden er "grafisk".)

c) Stabilitetsfunksjonen er

$$R = \frac{1 - \frac{h}{2}}{1 + \frac{h}{2}} \tag{70}$$

og vi finner at

$$\begin{aligned}
|R|^2 &= \frac{\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{h}{2}\right)^2} = \frac{1 - h + \frac{h^2}{4}}{1 + h + \frac{h^2}{4}} = \frac{1 + h + \frac{h^2}{4}}{1 + h + \frac{h^2}{4}} - \frac{2h}{1 + h + \frac{h^2}{4}} && (71)\\
&= 1 - \frac{2h}{1 + h + \frac{h^2}{4}} && (72)\\
&< 1 && (73)
\end{aligned}$$

Metoden er derfor stabil for alle h.

d) Metoden er her stabil for alle h. (Samme vurdering som for oppgave b).)

e) Har to metoder som beregner y_{n+1} av orden p og $\hat{y}_{n+1}$ av orden $p + 1$. En pseudo-kode for metoden er:

Initialiseringer.

Hovedløkke

1. Beregn $k_i, i = 1, \ldots, \sigma$
2. Beregn $\hat{y}_{n+1}, y_{n+1}$
3. Beregn lokalavbruddsfeilen $e_{n+1} = \hat{y}_{n+1} - y_{n+1}$
4. Hvis $|e_{n+1}| > eps$ (feilskranke) $\rightarrow$ ikke bruk den beregnede h-verdien, beregn ny $h_{ny} = 0.8h \left(\frac{eps}{|e_{n+1}|}\right)^{\frac{1}{p+1}}$ og gå til (1).
5. Hvis $|e_{n+1}| \leq eps \rightarrow$ bruk den beregnede h-verdien og sett den nye h (for neste tidsskritt) til $h_{ny} = 0.8h \left(\frac{eps}{|e_{n+1}|}\right)^{\frac{1}{p+1}}$
6. $n = n + 1$ % gå et tidsskritt videre ($t = t + h$) og gå til (1)