Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for teknisk kybernetikk

Faglig kontakt under eksamen

Navn: Tu Duc Nguyen
Telefon: 73594359

Jose Marcal
Telefon: 73594391

EKSAMEN I TTK4130
MODELLERING OG SIMULERING

25. mai 2007
Tid: 09:00-13:00

Hjelpemidler:
A: Alle kalkulatorer, trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Sensur:
Sensuren vil bli avsluttet i henhold til gjeldende regelverk.

Dette eksamensettet består av totalt 8 sider.

Oppgave 1) (20 %)

a) Gitt matrisen

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & * \\ * & * & * \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$$

Fyll ut de manglende elementene markert med * slik at $\mathbf{R} \in SO(3)$. Er den entydig bestemt ut fra elementene som er oppgitt?

b) Gitt koordinat system a med koordinatakser $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ og koordinatsystem b med koordinatakser $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ (Figur 1). Betrakt vektoren

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{3}\vec{a}_2$$

Bestem $\mathbf{r}^a$ og $\mathbf{r}^b$.

c) La $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^\top$. Det er kjent at matrisen $\mathbf{R}_{k,\theta} \in SO(3)$ tilfredstille ligningen $\mathbf{R}_{k,\theta}\mathbf{d} = \mathbf{d}$. Bestem $\mathbf{R}_{k,\theta}$ når $\theta = \pi/3$. Er svaret entydig bestemt?

d) La $\mathbf{q}_1$ og $\mathbf{q}_2$ være enhetskvarternion vektorer. Finn en matrise $\mathbf{A}(\mathbf{q}_1)$ slik at

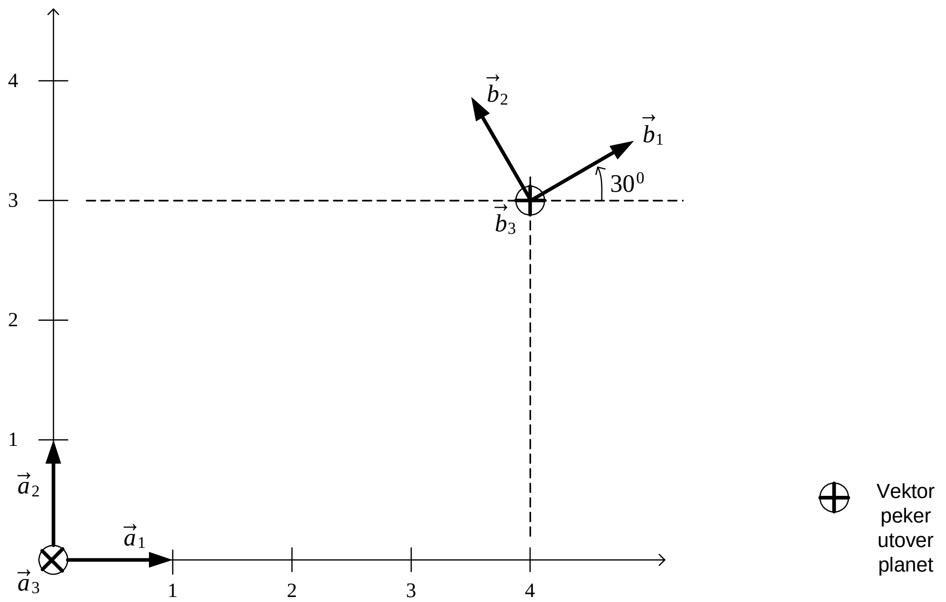
$$\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_2$$

hvor $\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2$ er kvarternion produktet av $\mathbf{q}_1$ og $\mathbf{q}_2$.

e) Gitt rotasjonsmatrisen

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

Finn Eulerparametrene η og $\boldsymbol{\epsilon}$ som svarer til $\mathbf{R}$.


4
3
2
1
$\vec{b}_2$
$\vec{b}_1$
30^0
$\vec{b}_3$
$\vec{a}_2$
$\vec{a}_1$
$\vec{a}_3$
1
2
3
4
Vektor peker utover planet

Figur 1

Oppgave 2) (20 %)

a) Er transferfunksjonene

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{1}{s+1} \\ H_2(s) &= \frac{1}{s^2+s+1} \end{aligned}$$

positivt reelle?

b) Gitt masse-fjær-demper systemet (Figur 2),

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx + f(\dot{x}) = F \tag{1}$$

hvor $m, d, k > 0$ er konstanter, og funksjonen f representerer ulinære friksjonskrefter i systemet. La f tilfredsstille ulikheten

$$f(v)\, v \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Vis at systemet (1) med inngang F og utgang $\dot{x}$ er passivt.

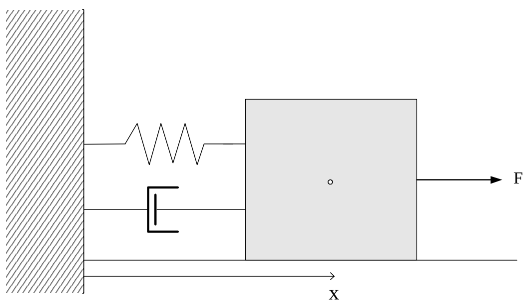
c) Gitt et inertielt system i og et koordinatsystem b. Forholdet mellom den tidsderiverte av Euler-vinkler-vektoren $\dot{\mathbf{\Theta}} = \frac{^i d}{dt} [\phi \quad \theta \quad \psi]^\top$ og vinkelhastighetsvektoren $\boldsymbol{\omega}^b = [p \quad q \quad r]^\top$ er gitt ved

$$\dot{\mathbf{\Theta}} = \mathbf{T}(\mathbf{\Theta})\, \boldsymbol{\omega}^b \tag{3}$$

hvor

$$\mathbf{T}(\mathbf{\Theta}) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi)\tan(\theta) & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi)/\cos(\theta) & \cos(\phi)/\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Lineariser modellen (3) om $(\phi^*, \theta^*) = (0, 0)$.



Figur 2

Oppgave 3) (25 %)

Gitt systemet

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad t > 0 \tag{4}$$

med starttilstanden

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

a) Vis at den eksakte løsningen av (4)-(5) er gitt ved

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \tag{6}$$

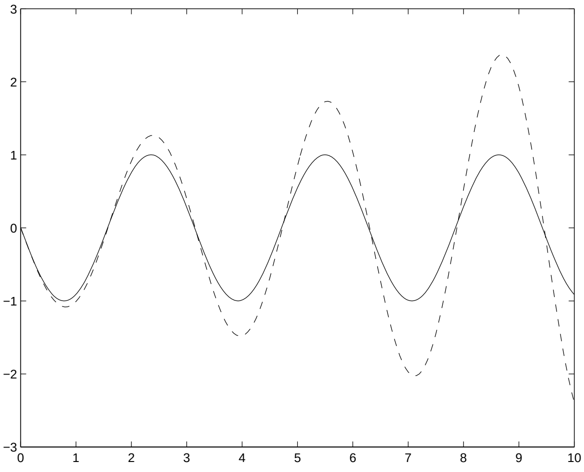
b) Systemet skal løses numerisk. Sett opp uttrykkene for integrasjon av systemet ved bruk av

- Eksplisitt Eulers metode
- Implisit Eulers metode
- Implisitt midtpunkts-metode.

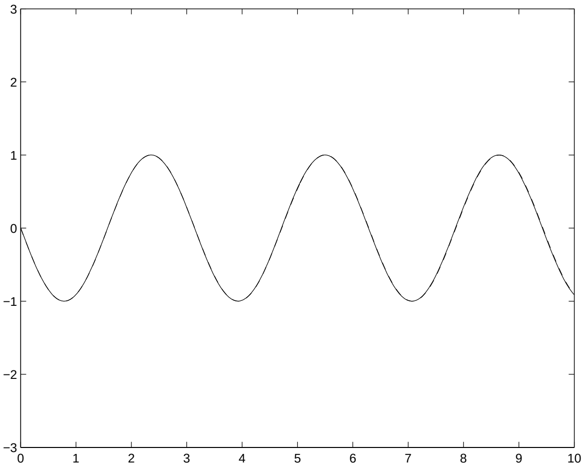
c) Bestem stabilitietsfunksjon $R(h\lambda)$ for de metodene angitt i **b**).

d) Numeriske løsninger for *to* av metodene i deloppgave **b**) er vist i figurene nedenfor (Figur 3 - 4). I figurene viser den heltrukket linjen den eksakte løsningen og den striplet linjen den numeriske løsningen. Bestem hvilke metoder har blitt brukt, og hvilken metode som svarer til figurene. Svaret skal begrunnes.

e) Vi ønsker å studere avbruddsfeil ved bruk av *eksplisitt Eulers* metode. Finn lokal avbruddsfeil ved tidspunktet $t = 1$ sekunder når $h = 0.1$ sekunder.



Figur 3

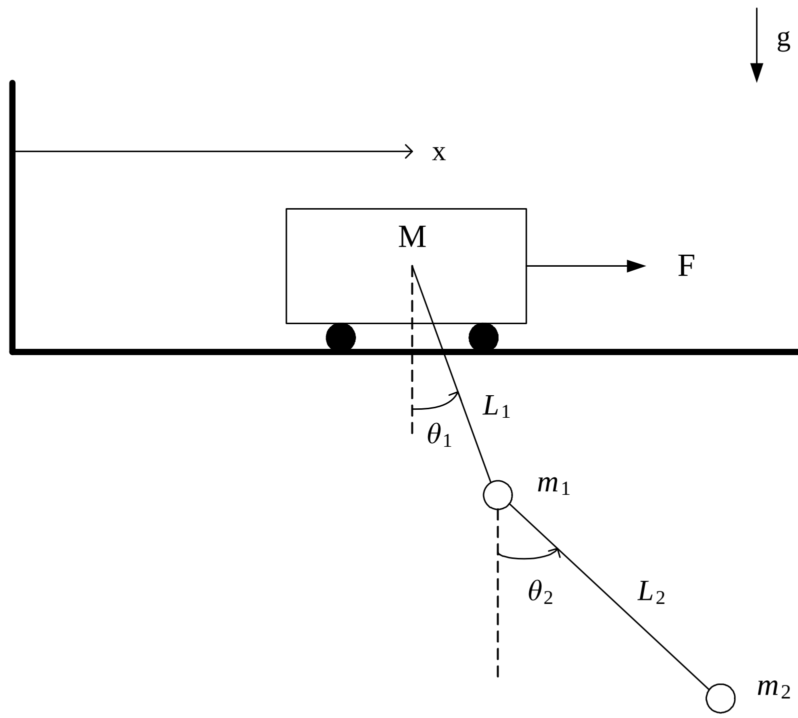


Figur 4

Oppgave 4) (20 %)

Betrakt systemet i Figur 5. Massen av vognen er M, posisjonen til vognen er x, og kraften på vognen er F. Pendel 1 har en punktmasse m_1 på enden av en masseløs stang av lengde L_1. Pendel 2 har en punktmasse m_2 på enden av en masseløs stang av lengde L_2. Vinkelen mellom vertikalen og pendel 1 er θ_1, mens vinkelen mellom vertikalen og pendel 2 er θ_2. Tyngdeakselerasjonen er g.

Sett opp bevegelsesligningene for systemet.



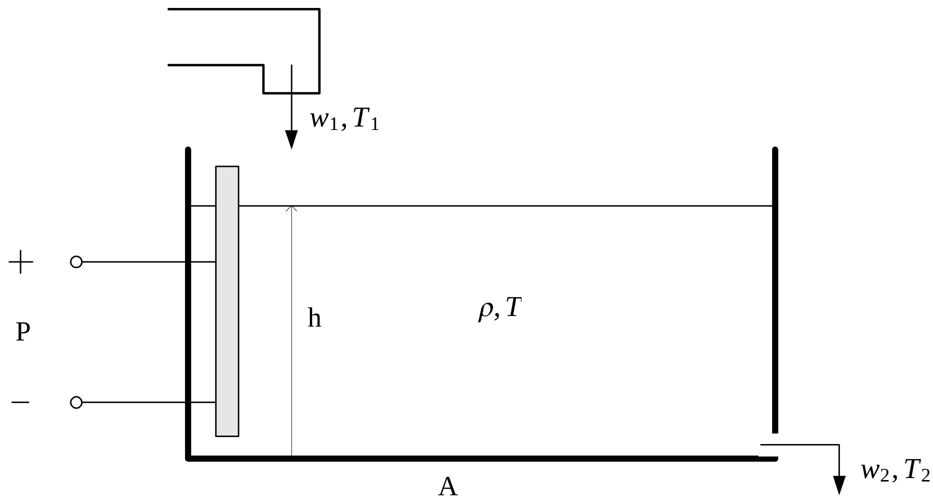
Figur 5

Oppgave 5) (15 %)

Betrakt systemet i Figur 6. Vi har en tank med areal A og vann-nivå h. Vann strømmer inn med en massestrøm w_1 og ut med en massestrøm w_2. Temperaturen på vannet som strømmer inn er T_1, mens vannet som strømmer ut har en temperatur T_2. Vannet i tanken varmes opp med en effekt $P = P_0 h/\beta$ hvor P_0 og β er konstanter. Vannet har spesifikk varmekapasitet c_p og masse tetthet ρ.

a) Sett opp en differensialligning for vann-nivået h i tanken.

b) Sett opp differensial ligning for temperatur T i tanken.



Figur 6