Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Per Hag
Telefon: 73 59 17 43

TMA4175 Kompleks analyse

20. mai, 2009
Tid: 9:00 - 13:00
Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator HP30S
Under eksamen er det tillatt å bruke et A5-notatark stemplet på forhånd av institutt for matematiske fag.
Norsk - bokmål
Sensurdato: 10. juni, 2009

Oppgave 1 Anta at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ har konvergensradius R, $0 < R < \infty$, og at $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ har konvergensradius $R = \infty$. Vis at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ har konvergensradius ∞.

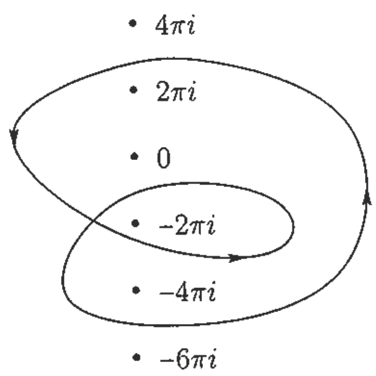
Oppgave 2

a) Finn nullpunktene til $f(z) = e^z - 1$. Hva er ordenen til disse?

b) Finn

$$\int_{\gamma} \frac{z}{e^z - 1}\, dz$$

når γ er følgende kurve:



Oppgave 3 Forklar hvorfor alle løsninger av ligningen

$$2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$$

ligger i disken $|z| < 2$.

Oppgave 4 La f være en holomorf (analytisk) funksjon på et område D. Anta at det eksisterer et polynom p av positiv grad slik at $p \circ f$ bare tar reelle verdier. Vis at f er konstant.

Oppgave 5 La f være en holomorf funksjon på $|z| \leq 1$ slik at $f(z) \neq 0$ for alle z. Forklar hvorfor $|f(z)|$ antar sitt minimum på $|z| = 1$.

Oppgave 6 La f være en hel funksjon slik at $v = \operatorname{Im} f$ er begrenset. Vis at v er konstant.

Oppgave 7 Vis at de eneste univalente (en - en) holomorfe avbildninger av $\mathbb{C}$ på seg selv er av typen $f(z) = az + b$ der $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Oppgave 8 Anta riktigheten av Riemanns avbildningssats: Ethvert enkeltsammenhengende område G som ikke utgjør hele planet, kan avbildes på enhetsdisken $\mathbb{D}$ ved en univalent holomorf avbildning f. La $z_0 \in G$ og vis at f kan velges slik at $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$. Er funksjonen f entydig?