Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen: Kari Hag
Mobil 48301988

TMA4175 Kompleks Analyse

Torsdag 25. mai 2010
Tid 9-13
Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Et A5-ark stemplet fra Instituttet med valgfri påskrift av studenten.

Bokmål

Sensurfrist: 17. juni 2010.

Oppgave 1

La f være en analytisk (holomorf) funksjon på et område D slik at $|f(z)| = 1$ for alle i D. Forklar hvorfor f må være en konstant.

Oppgave 2 La

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Hva er bildet av $|z| < 1$ ved f?

Oppgave 3

Vis vha Liouvilles teorem at et polynom av grad større enn eller lik 1, har minst en rot.

Oppgave 4

a) Anta at $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, $m = 1, 2, 3, \cdots$, i $0 < |z - z_0| < r$ med g analytisk i $|z - z_0| < r$. Forklar hvorfor

$$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0)$$

b) Beregn

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx.$$

(La $log\ z = log\ |z| + i\ \theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Det er nok med en *kort* henvisning til hvordan ML-estimater brukes.)

Oppgave 5

Bevis argumentprinsippet

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = n$$

for polynomet $P(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$ der $|a_k| < R, k = 1, 2, 3, \cdots n$.

Oppgave 6

Finn en konform avbilding av det øvre halvplan på $\{w : Im\ w > 0, |Re\ w| < \pi/2\}$ slik at $g(1) = \pi/2, g(-1) = -\pi/2$ og $g(0) = 0$.

Oppgave 7

Finn en funksjon f som er analytisk i hele planet og har de enkle nullpunktene $1, 3, 3^2, 3^3, \cdots$ og ingen andre. (Det kreves en liten begrunnelse for at f er analytisk.)

Oppgave 8

Hvilket tema har du likt best i TMA4175? Gi en kort begrunnelse. (Maksimum 1/2 side.)