Løsningsforslag TTK4105 reguleringsteknikk 22/5 - 14

1a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{c}^T = [1\ 0\ 0]$

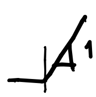
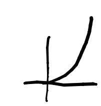
1b) $e^{At} = I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} t^2 =$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1c) Formel (V.3) gir $h(t) = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2}{ds^2}\left\{\cancel{\frac{s^3}{s^3}} e^{st}\right\}\right]\Big|_{s=0} =$

$$\frac{1}{2}\left[t^2 e^{st}\right]\Big|_{s=0} = \frac{1}{2} t^2$$

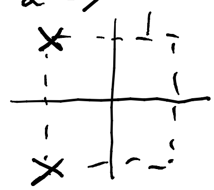
1d) Hvis $u(t) = \delta(t)$ er $x_3 = \mu_1(t) =$  , $x_2 = \int_0^t x_1(\alpha)\, d\alpha =$

$\mu_2(t) =$  , og $x_3 = \int_0^t x_2(\alpha)\, d\alpha = \mu_3(t) = \frac{1}{2} t^2 =$ 

Kan også finnes ~~som~~ $\underline{c}^T e^{At} \underline{b}$.

1e) Tre egenverdier/poler oppå hverandre $\Rightarrow$ ustabilt eller ganske enkelt $|h(t)| \to \infty$ når $t \to \infty$

$n = 2 \Rightarrow$ kvadrat

2) Polene:  $\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 100\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \lambda_2 &= 100\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ (V.16) gir

$$h(s) = \frac{K}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{K}{s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2} = \frac{10^4}{s^2 + 100\sqrt{2}\, s + 10^4}$$

K blir 10^4 fordi vi krever $|h(j\omega)|_{\omega=0} = 1$

(3) Z-N forutsetter at man øker forsterkningen i regulatoren til systemet oscillerer på stabilitetsgrensa. Dette kan være risikabelt eller skadelig. SIMC krever ikke dette, bare et sprangresponsforsök med åpen slöyfe.

(4a) Uten indre slöyfe blir det 3 integratorer i serie. Sjöl med derivatvirkning i h_{r1} blir det ikke mulig å löfte fasen over $-180° \Rightarrow$ Systemet kan ikke gjöres stabilt.

(4b)
$$M_2 = \frac{K_{p2}\frac{1}{s(1+s)}}{1+K_{p2}\frac{1}{s(1+s)}} = \frac{K_{p2}}{s^2+s+K_{p2}} = \frac{1}{\frac{s^2}{K_{p2}}+\frac{1}{K_{p2}}s+1}$$

(4.1) gir da $\omega_0^2 = K_{p2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{K_{p2}}$

(4c) Stor K_{p2} gir stor båndbredde for M_2, noe som øker stabiliteten for den ytre slöyfen, p.g.a bedre faseforlöp opp til höyere frekvens.

$K_{p2} = 4$ gir $\omega_0 = 2$. (4.1) gir $\frac{2\zeta}{\omega_0} = \frac{1}{4} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{4}$

$\varphi = \arcsin(0.25) = 0.253 \text{ rad} = 14.5°$

4d overdempet, kritisk dempet, underdempet (oscillatorisk)

4e $h_0 = h_{r1} M_2 \frac{1}{s^2} = k_p \frac{(1+T_i s)(1+T_d s)}{T_i s (1+0.1 T_d s)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s^2}{4} + \frac{1}{4}s + 1\right)} \cdot \frac{1}{s^2}$

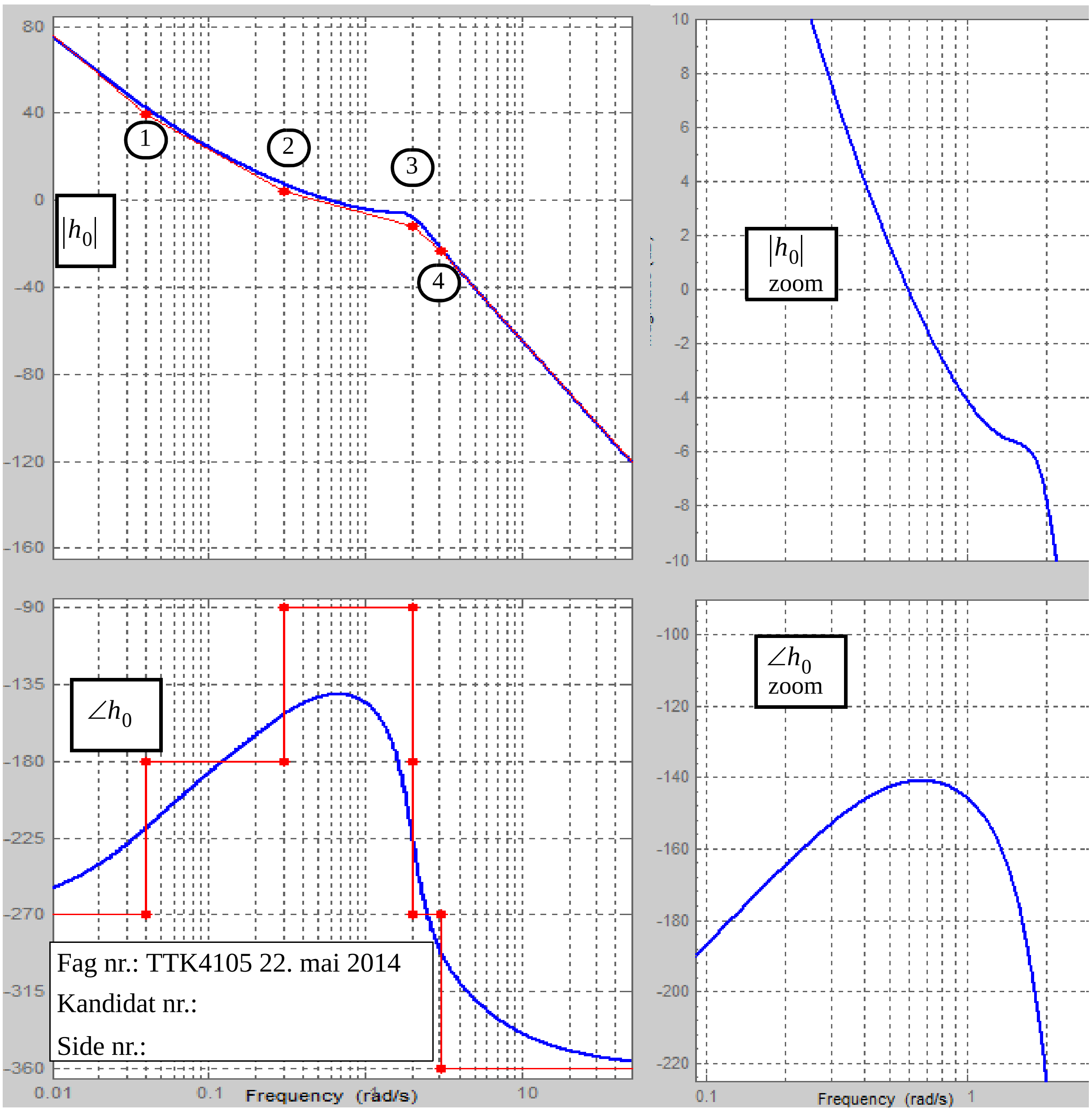
Polene ligger enten i vhp eller på den imaginære akse $\Rightarrow N_p = 0$.

4f God fasemargin på tross av ellers vanskelig faseforløp. Betinget stabilt fordi det også blir ustabilt ved lav k_p, ikke bare ved stor k_p. Se ellers ~~bodediagram~~ bodediagram neste side med ΔK og ψ, som blir 5.7 dB og 36.8^0

4g knekkpunkt ① svarer til $\frac{1}{T_i} = 0.04 \Rightarrow T_i = 25$
Knekkpunkt ② svarer til $\frac{1}{T_d} = 0.3 \Rightarrow T_d = 3.3$
Knekkpunkt ③ svarer til $\omega_0 = 2$.
Det siste, ④, svarer til $\frac{1}{aT_d} = 3 \Rightarrow a = 0.1$
Se ellers bodediagrammet neste side for hvordan finne k_p.

4h Målt med linjal, og basert på (V.12)(a):
$\frac{1}{\Delta K} \approx \frac{3.1}{5.87} \approx 1.9$, stemmer bra med $10^{\frac{5.7}{20}} = 1.92$

4i Se påtegnet Nichols-diagram lenger bak.
$|N|_{max} \approx 7$ dB, vanskelig å avlese $\angle h_0$ der, men $\angle h_0 \approx -170°$, og i bodediagrammet svarer det til ca. $\omega = 1.5$



figur 4.2

h) (3 %) Figur 4.3(b) viser et utsnitt av Nyquistkurven for h_0 med de valgte regulatorparametre. Finn forsterkningsmarginen v.h.a. denne grafen. Sammenlign med svaret fra deloppgave f).

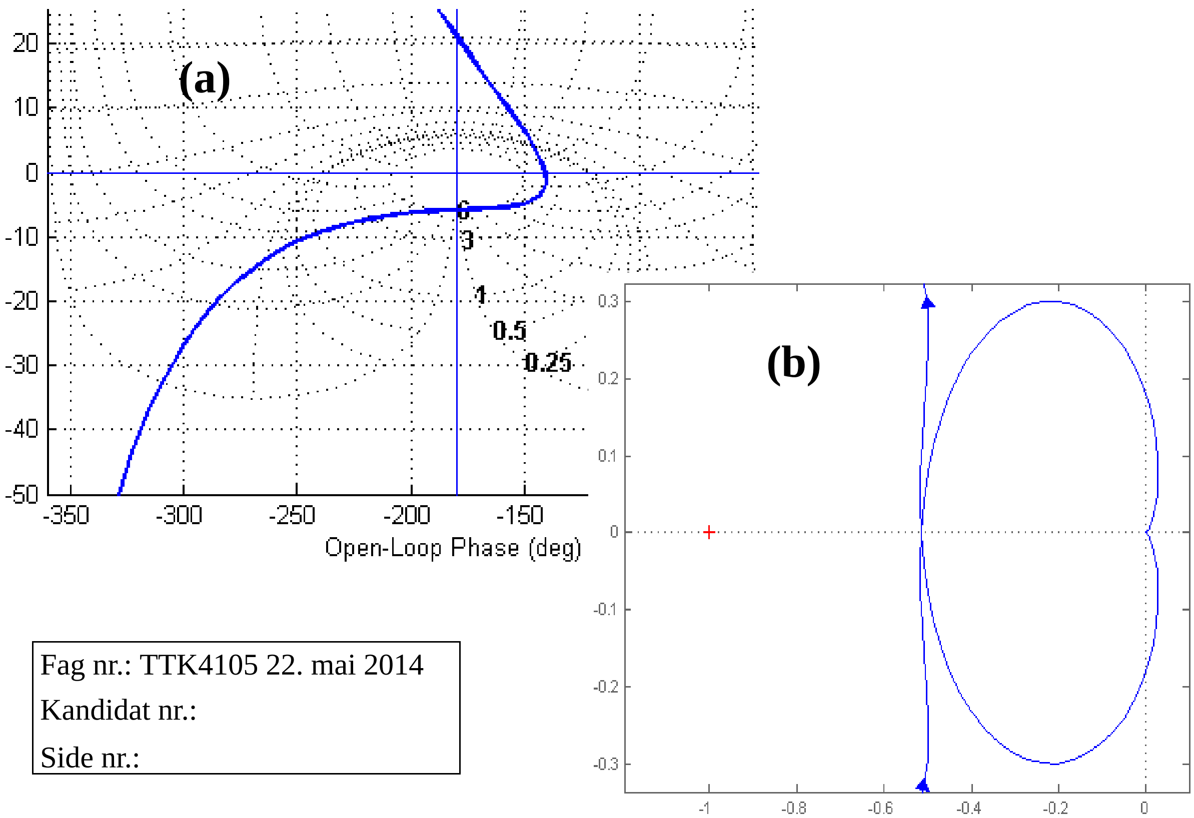
i) (4 %) Finn ved hjelp av Nichols-diagrammet i figur 4.3(a) resonanstoppen i avviksforholdet. Omtrent ved hvilken frekvens inntreffer den? Tegn i diagrammet.

j) (3 %) Nå til forstyrrelsen v i figur 4.1. Hva blir transferfunksjonen h_v for den ytre sløyfa?

173

k) (6 %) Forstyrrelsen v er konstant. Finn det stasjonære avviket $e(\infty)$ med regulatoren (4.2). Finn også $e(\infty)$ med PD-regulering (arbeidsbesparende tips: det svarer til å sette $T_i = \infty$). Kommentér

m) (5 %) PID-regulatoren (4.2) skal realiseres diskret. Det betyr at holdeelementets virkning må tas med i betraktning. Finn en tastetid (samplingstid) T som er akkurat så liten at den ikke forverrer fasemarginen med mer enn 2 grader (Tips: husk skalering mellom radianer og grader her!) Hva er det *første* trinn i det du må gjøre med regulatortransferfunksjonen (4.2) for gjennom noen flere trinn å regne deg fram til den diskrete regulatoralgoritmen?



Fag nr.: TTK4105 22. mai 2014
Kandidat nr.:
Side nr.:

figur 4.3

Oppgave 5 (7 %)

Vi skal betrakte en befolkning på N personer, hvor en smittsom sjukdom brer seg, etter hvert til alle. Dette er en sjukdom hvor man ikke blir frisk, men hvor ingen dør. Kall antall sjuke x. En mye brukt modell for slikt er:

$$\dot{x} = cx\left(1 - \frac{x}{N}\right) \quad \text{, der } c \text{ er en positiv konstant.} \tag{5.1}$$

a) (1 %) Hvorfor er denne modellen ulineær?

b) (1 %) Dette er et *autonomt* system. Hva menes med det?

c) (3 %) Finn en lineær modell som gjelder når få personer er smittet. Kall antall personer ved starttidspunktet $t_0 = 0$ for x_0. Hva blir den tilnærmede formelen for $x(t)$ når det fortsatt er få smittede personer?

4j $h_v = \frac{1}{s^2}$

4k $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} e(s)\cdot\frac{s}{1}... = \lim_{s\to 0}(-h_v N)\cdot \cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}} =$

$= \lim_{s\to 0}\left(-h_v\left(\frac{1}{1+h_0}\right)\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{-1}{s^2}\left(\frac{n_0}{n_0+t_0}\right)\right) =$

$-\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{\cancel{s^2}}\left(\frac{T_i s\,(1+\dots)(1+\dots)\cancel{s^2}}{T_i s\,(1+\dots)(1+\dots)s^2 + K_p(1+T_i s)(1+\dots)}\right)\right) = 0$

(her betyr "1+..." ledd → 1 når s → 0)

PD: $\lim_{\substack{t\to\infty \\ \text{og } T_i\to\infty}} e(t) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{T_i s}{K_p T_i s}\right) = \frac{1}{K_p} \Rightarrow$ stasjonært avvik

4l Nei. For det er mer enn null integratorer i h_0.

4m Bruker (V.24).

Den ekstra negative fasekomponenten ved kryssfrekvensen $\omega_c \frac{T}{2} = \frac{\pi}{180}\cdot 2 \Rightarrow T = \frac{2}{\omega_c}\cdot\frac{\pi}{180}\cdot 2$

$\approx \frac{\pi}{0.59\cdot 45} = 0.12$

Første trinn er å erstatte alle s i (4.2) med $\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$, jfr. (V.23)

5a $\dot{x} = cx\left(\dots - \frac{x}{N}\right) = -\frac{c}{N}x^2 + \dots$

x^2 på høyre side gjør den ulineær

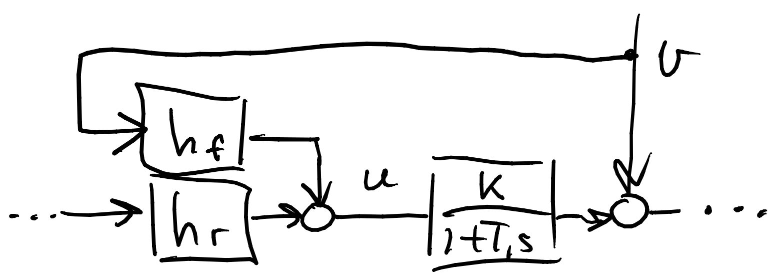
5b Det er ingen ytre påvirkninger (ingen u eller v)

5c Da får vi ≈ $\dot{x} = cx \Rightarrow x(t) = e^{ct}x_0$

5d Når $x(t) \to N$ vil $\dot{x}(t) \to 0 \Rightarrow$
$x(t) < N$

6a Når v kan måles.

6b



6c $h_{fi}\frac{K}{1+Ts} - 1 = 0 \Rightarrow h_{fi} = -\frac{1+Ts}{K}$

Mer realistisk: $h_f = -\frac{1+T_1 s}{1+aT_1 s}\cdot\frac{1}{K}$, med $0 < a \ll 1$

6d Fordi da vil tilbakekoplinga virke mye seinere enn foroverkoplinga.

6e $h_{fs} = -\frac{1}{K}$. Eliminerer virkninga av konstant v.

6f Fordi det er en tidsforsinkelse τ i prosessen

6g Tullprat. Valg av h_f og h_r kan gjøres helt uavhengig av hverandre.

6h

Bruker (V.25):

$$h_r' = \frac{K_p \frac{1+T_i s}{T_i s}}{1 + K_p \frac{1+T_i s}{T_i s} \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}(1-e^{-\tau s})}$$

$$= K_p \frac{(1+T_i s)(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{T_i s(1+T_1 s)(1+T_2 s) + K_p K (1+T_i s)(1-e^{-\tau s})}$$