

Løsningsforslag eksamen TTK 4105

Reguleringsteknikk 30/5-2013

1

Oppgave 1 Bruker (V.21) $s \rightarrow \frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1}$

$$h(z) = \frac{y_k}{u_k}(z) = \frac{1}{1 + T_1 \left[\frac{z}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right]} = \frac{T(z+1)}{T(z+1) + 2T_1(z-1)}$$

$$\Rightarrow y_k [T(z+1) + 2T_1(z-1)] = u_k T(z+1)$$

$$\Rightarrow y_k (T + 2T_1) = y_{k-1} (2T_1 - T) + T(u_k + u_{k-1})$$

$$\Rightarrow y_k = \underbrace{\frac{2T_1 - T}{2T_1 + T}}_{a_1} y_{k-1} + \underbrace{\frac{T}{2T_1 + T}}_{b_0 = b_1} (u_k + u_{k-1})$$

02) alle spørsmål, læreboka side 384-385
Men Obs: Feil i 02a): skulle stått

$y(s) = N(s)L(s)h_v v(s)$. Vil bli hensyntatt.
↑!

03 a) Slutttverdi-teoremet: $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (se(s))$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + h_0} \cdot y_0 \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{n_0}{n_0 + t_0} \cdot y_0 \right] =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \left[\frac{(1+Ts)(s-a)}{(1+Ts)(s-a) + K_p} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \right] = \frac{-a}{-a + K_p} = \underline{\underline{\frac{a}{K_p - a}}}$$

03b) Bytter ut K_p med $h_r = K_p \frac{1+T_1 s}{T_1 s}$

Når $s \rightarrow 0$ går $h_r \rightarrow \infty$. Altså går $e(t) \rightarrow 0$.

03c) Z-N og Skogestad forutsetter at prosessen er åpent stabil. Det er ikke tilfelle her, p.g. a pol i $+a$.

○ 3 d) (V.11) = Nyquist: $\Delta L(1+h_0) = -2\pi(N_n - N_p)$ ²

Fra figur 3.1 ser vi at $\Delta L(1+h_0) = +2\pi$
 h_0 har en pol i hhp $\Rightarrow N_p = 1$. Vi får
 $+2\pi = -2\pi(N_n - 1) \Leftrightarrow -1 = N_n - 1 \Rightarrow N_n = 0$
 \Rightarrow lukket system er stabilt.

○ 3 e) Da blir $\Delta L(1+h_0) = -2\pi$ i stedet.

$\Rightarrow 1 = N_n - 1 \Rightarrow N_n = 2$ pder i hhp

Målt: $\frac{1.6 \text{ cm}}{6.95} \cdot 0.5 \Rightarrow \text{ny } K_p = 0.115 \Leftrightarrow \text{stab. grense}$

○ 4) Avstand en periode T måles, $T \approx 0.63$, $\beta = \frac{2\pi}{T} = 9.97$

Damping måles som $\frac{A_2}{A_1}$, der toppen A_2 ligger T etter toppen A_1 .

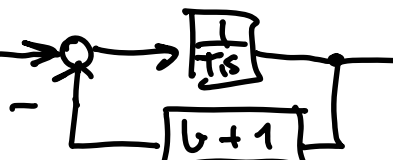
Vi har $e^{-\alpha T} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow -\alpha T = \ln\left(\frac{2.15}{4.05}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{0.63} \ln\left(\frac{4.05}{2.15}\right) \approx 1$

$\omega_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{1^2 + 9.97^2} = 10$, $\xi = \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right) = \frac{1}{10}$

\Rightarrow Alternativ C: $\xi = 0.1$, $\omega_0 = 10$

○ 5) $T_2 \ll T_1$. Venstre indre delsystem

blir da ≈ 1 i stedet for $\frac{1}{1+T_2 s}$. Reduserer

resten:  $\Rightarrow \frac{\frac{1}{T_1 s}}{1 + (b+1)\frac{1}{T_1 s}} =$

$\frac{1}{T_1 s + b + 1} = \left(\frac{1}{b+1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{T_1}{b+1} s} \Rightarrow K = \frac{1}{b+1}$, $T = \frac{T_1}{b+1}$

Ann en metode: Redusere diagrammet først, så sette $T_2 \approx 0$:

$h(s) = \frac{1}{1 + (\underbrace{T_1 + T_2}_{\approx 0} s + \underbrace{T_1 T_2}_{\approx 0} s^2 + b)} \approx \frac{1}{T_1 s + b + 1}$ / samme svar! ¹⁵⁰

Oppgave 6

a)

Benytter Newtons lov:

$$\sum F = ma = m\dot{w}. \quad (21)$$

I oppgaveteksten er sammenhengen mellom kreftene gitt slik at differensialligningen kan settes opp:

$$\sum F = C_1 g - C_2 w^2 = m\dot{w} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{C_1}{m} g - \frac{C_2}{m} w^2 = \dot{w} \quad (23)$$

$$\dot{w} = \underline{\underline{C_G g - C_W w^2}}, \text{ der } C_G = \frac{C_1}{m} \text{ og } C_W = \frac{C_2}{m}. \quad (24)$$

b)

Den maksimale hastigheten finnes ved stasjonære forhold, dvs $\dot{w} = 0$.

$$\dot{w} = 0 \Rightarrow C_G g_{\max} - C_W w_{\max}^2 \Rightarrow \underline{\underline{w_{\max} = \sqrt{\frac{C_G g_{\max}}{C_W}}}}. \quad (25)$$

c)

Vi har $\dot{g} = K_p(r - w)$, som gir $g(t) = K_p \int_0^t (r - w) d\tau$. Dette er en I-regulator. Etter innsvingningstiden blir $\dot{g} = 0$.

$$\dot{g} = 0 \Rightarrow K_p(r - w) = 0 \Rightarrow r = w, \quad (26)$$

altså, vi oppnår referansen til tross for forstyrrelse fra friksjon og luftmotstand.

d)

Finner g_0 som uttrykk av w_0 vha ligningen fra a):

$$0 = C_G g_0 - C_W w_0^2 \Rightarrow \underline{\underline{g_0 = \frac{C_W}{C_G} w_0^2}}. \quad (27)$$

Med $x_1 = w$ og $x_2 = g$ kan vi skrive

$$\dot{x}_1 = C_g x_2 - C_W x_1^2 = f_1(x, r) \quad (28)$$

Den lineariserte modellen finnes ved hjelp av formlene fra formelsamlingen in-satt arbeidspunktet (x_0, r_0) .

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} \end{bmatrix} \Delta r. \quad (30)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -2C_W w_0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = C_G \quad (32)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -K_p \quad (33)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = K_p. \quad (36)$$

Vi får dermed følgende modell når vi setter inn arbeidspunktet (x_0, r_0) :

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} -2C_W w_0 & C_G \\ -K_p & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \end{bmatrix} \Delta r. \quad (37)$$

e)

Eigenverdiene finnes fra $|\lambda I - A| = 0$:

$$\lambda(\lambda + 2C_W w_0) + K_p C_G = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_{1,2} = -C_W w_0 \pm \sqrt{C_W^2 w_0^2 - K_p C_G}}}. \quad (38)$$

Ved lave hastigheter (når $C_W w_0^2 < K_p C_G$) blir systemet marginalt stabilt med to poler på imaginæraksen. Ved høye hastigheter er systemet eksponensielt stabilt med to poler i venstre halvplan.

f)

Dersom bilen kjører langsomt har vi $w_0^2 \approx 0$. Da blir modellen (laPlace-transformert)

$$s\Delta w(s) = C_G \Delta g(s) \quad (39)$$

$$s\Delta g(s) = K_p (\Delta r(s) - \Delta w(s)). \quad (40)$$

Substituerer man for $\Delta g(s)$, får man

$$s\Delta w(s) = C_G \left(\frac{K_p}{s} \Delta r(s) - \frac{K_p}{s} \Delta w(s) \right) \quad (41)$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta r}(s) = \frac{C_G K_p}{s^2 + C_G K_p}. \quad (42)$$

Dette systemet har (formelsamlingen) sprangrespons $k(t) = K(1 - \cos(\omega_0 t))$, der $K = 1$ og $\omega_0 = \sqrt{C_G K_p}$. Altså, dersom spranget er på Δr , blir responsen

$$\underline{\underline{\Delta w(t) = \Delta r \left(1 - \cos(\sqrt{C_G K_p} t) \right)}}. \quad (43)$$

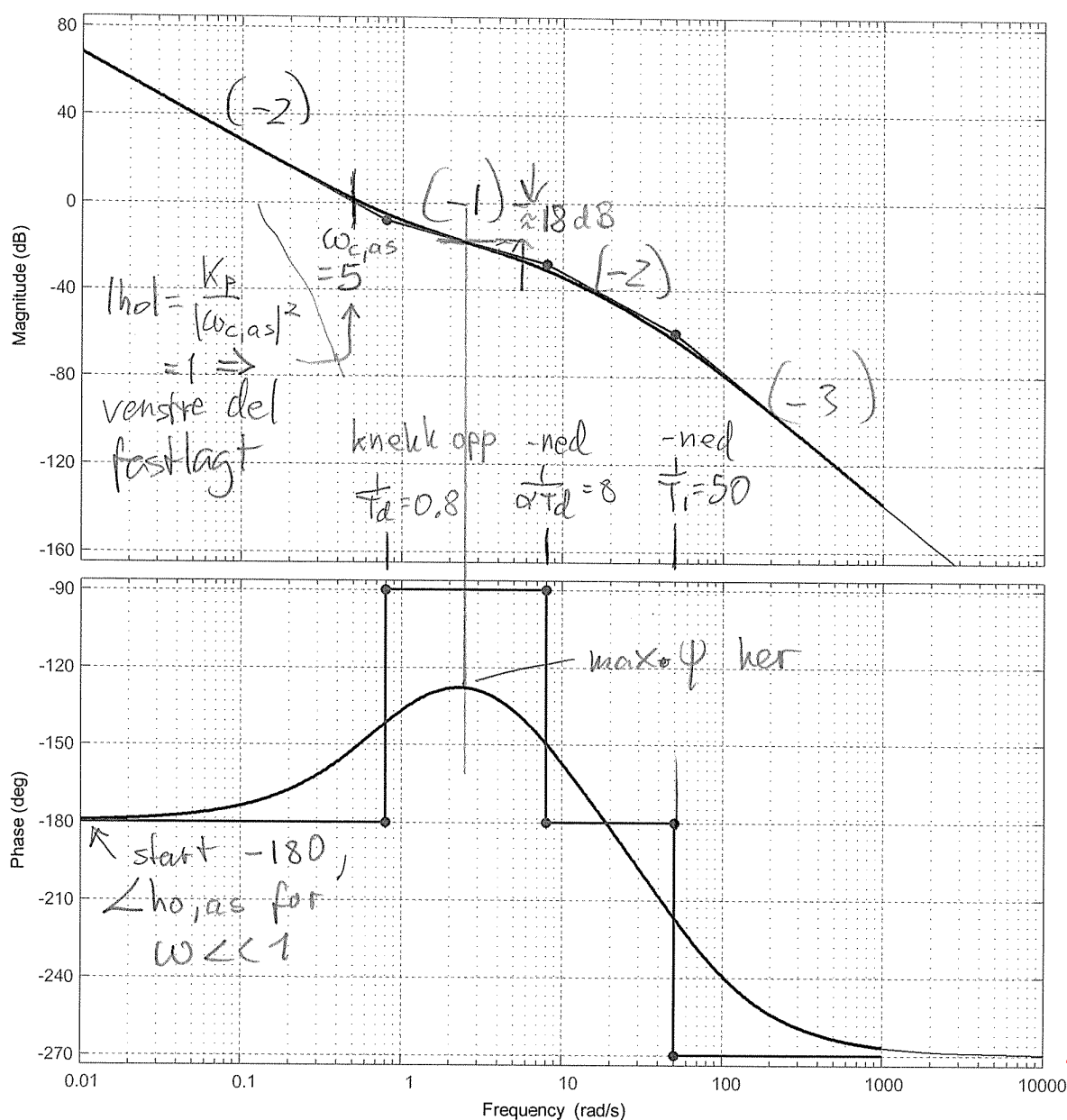
Oppgave

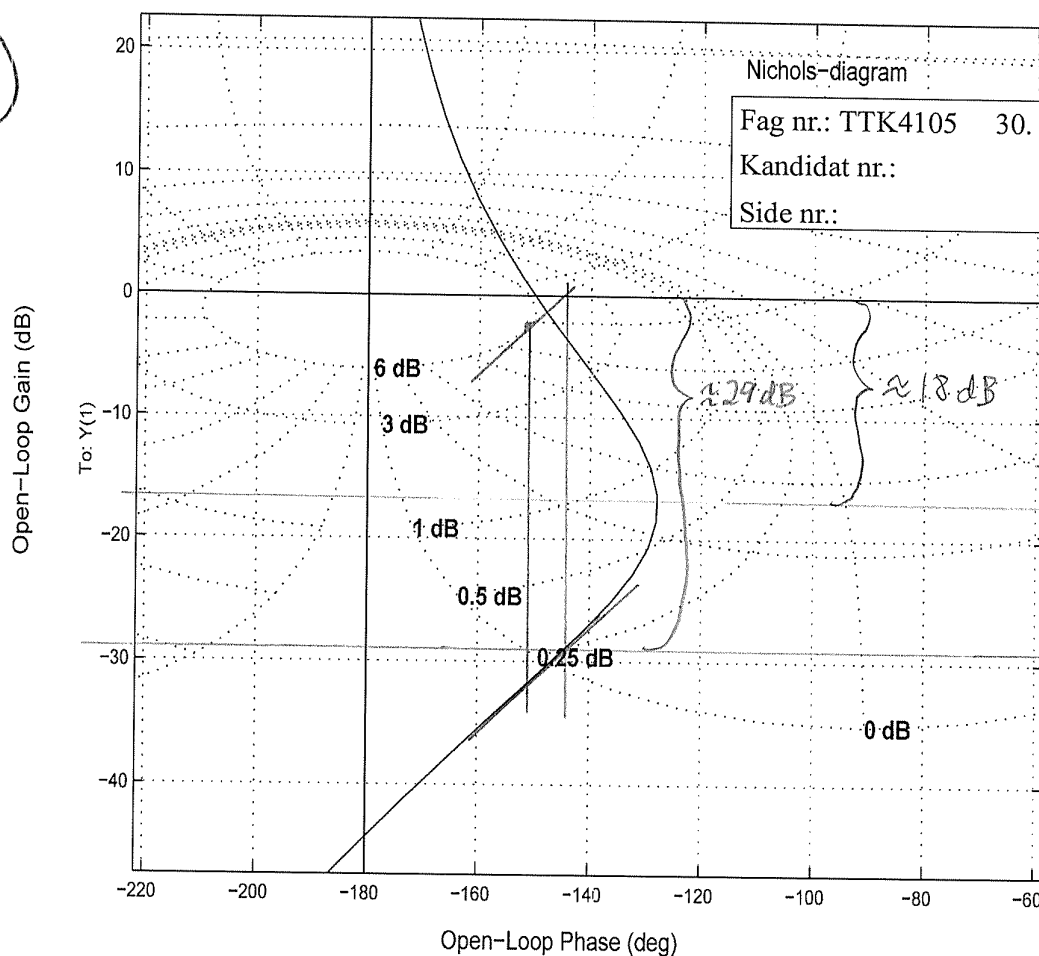
a)

Dette er en begrenset PD-regulator. Denne er nødvendig her da prosessen $h_u(s)$ har to rene integratorer i seg. Dermed blir faseresponsen -180° fra starten av, og vi trenger et tidlig nullpunkt for å løfte den opp.

b) Se på tegnet diagram under

c) $K_{p1} [dB] = K_p [dB] + 18 = -12 + 18 = 6 \text{ dB}$





figur 7.4

7d)

Den interne sløyfen har åpen-sløyfetransferfunksjon $h_{01} = \frac{K_1}{s(1+T_1s)}$. Vi har at feilforholdet $N_1(s) = \frac{1}{1+h_{01}(s)}$. Altså er

$$N_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{s(1+T_1s)}} = \frac{s(1+T_1s)}{s(1+T_1s) + K_1}. \quad (51)$$

Av figuren ser vi at $h_v(s) = \frac{1}{s(1+T_1s)}$.

$$M_1(s) = \frac{h_{01}(s)}{1 + h_{01}(s)} = \frac{\frac{K_1}{s(1+T_1s)}}{1 + \frac{K_1}{s(1+T_1s)}} = \frac{K_1}{s(1+T_1s) + K_1}. \quad (52)$$

7e) Flere fordeler kan nevnes, nok med to for full pott:

- V_i kan nå ha integralvirkning i h_R , for den indre sløyfa har fjernet en integrator og dermed bedret faseforløpet til den ytre sløyfetransferfunksjonen.
- K_1 kan økes kraftig, dette gir hurtigere respons fra y_0 til y
- virkningen av v blir mindre på y , p-g-a. N_1 liten for K_1 stor

Formelsamling

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{ (s-a_i)^m f(s) e^{st} \} \right] \bigg|_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma, \text{ Rotasjon: } d = J\dot{\omega}; \text{ med masse p  vekt  s stang har vi } J = ml^2 \quad (\text{V.6})$$

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t) * u(t)] = h(s) u(s) \quad (\text{V.7})$$

$$\begin{aligned} \text{Linearisering: } \Delta \mathbf{x} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \bigg|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \\ \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

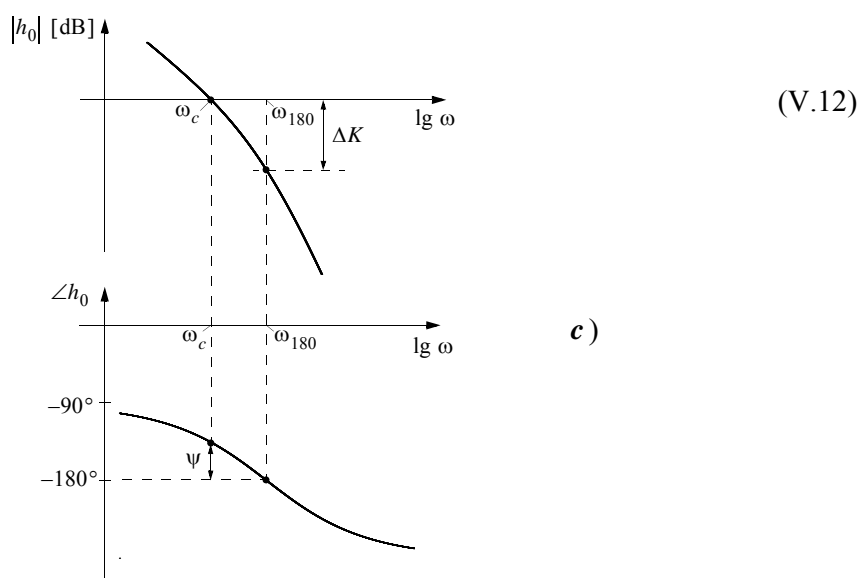
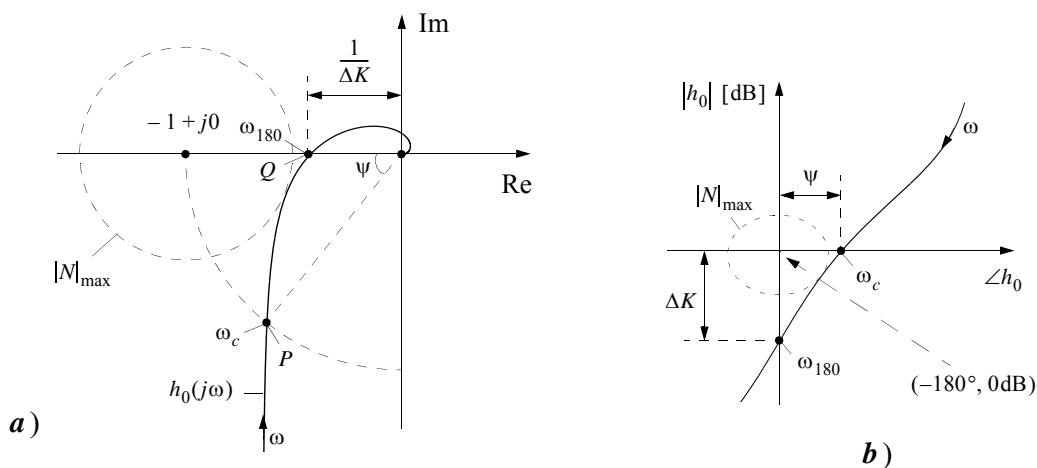
$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x), \quad x = 10^{(x[\text{dB}])/20} \quad (\text{V.9})$$

$$N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)}, \quad M(s) = \frac{h_0}{1+h_0(s)}, \quad M(s) + N(s) = 1, \quad \frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) \quad (\text{V.10})$$

Nyquists stabilitetskriterium: Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ f  r en netto vinkeldreining lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.11})$$

N_n blir da antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoplede) system. Merk: Dreieretning er definert positiv mot urviseren.



$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180^\circ), \quad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})|, \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \quad (\text{V.13})$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}} \quad (\text{V.14})$$

Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-regler:

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$0.85T_k$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$

$$, \text{ her er } T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \quad (\text{V.15})$$

Skogestads “SIMC” åpen-sløyfe-regel for PI-innstilling (bruker notasjonen fra notatet om dette):

Sett på et sprang. Anta at prosessen $\approx h_u = \frac{Ke^{-\theta s}}{1 + T_1 s}$. Mål (anslå) T_1 , K og θ ut fra responsen.

$$\text{Velg så } K_p = \frac{T_1}{K(\theta + \tau_c)} \quad \text{og} \quad T_i = \min(T_1, 4(\theta + \tau_c)), \text{ hvor } \tau_c \text{ er} \quad (\text{V.16})$$

ønsket tidskonstant i responsen til det lukkede systemet, bør velges som $\tau_c > 0.3\theta$, f. eks. $\tau_c = \theta$.

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.17})$$

$$\text{begrenset PD-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (\text{V.18})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdot & \cdot & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.19})$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdot \ \cdot \ \rho_{n-1}]$$

$$\text{gir } \frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1}s^{n-1} + \dots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (\text{V.20})$$

Diskret regulator *eller filter*: Alle s erstattes med $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator. (V.21)

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører tilnærma en ekstra tidsforsinkelse = $T/2$ i sløyfetransferfunksjonen. (V.22)

Sammenhenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

	1. orden	(eks.: RC-krets)	Høyere orden
1. Differensiallikning	$\dot{x} = ax + bu$	$(\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$
2. Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(0) + \frac{b}{s-a}u(s)$		$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$
3. Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$		$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$
4. Dekopling	(Trivielt:) $A = a = \lambda = \text{skalar}$		$A = M\Lambda M^{-1}, \quad e^{\mathbf{A}t} = M e^{\Lambda t} M^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5. Rekkeutvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots$		$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$
6. $(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (s)$	$e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad (\frac{1}{T}e^{-t/T} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1+Ts})$		$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$
7. Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \quad y(s) = c \frac{b}{s-a}u(s) \quad h(s) = \frac{cb}{s-a}$		$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s) \quad H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$
8. Impulsrespons	$h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(s) \quad h(t) = cbe^{at}$		${}^3) h(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \quad {}^4) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$

1) $\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau)d\tau = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{u}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s)$

2) NB: $e^{\mathbf{A}t} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$, bortsett fra når $A = \Lambda$ er diagonal.

3) Antar nå at u og y er skalare.

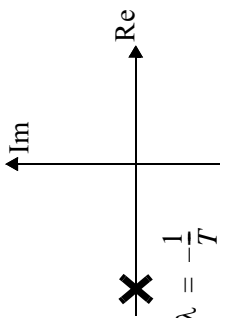
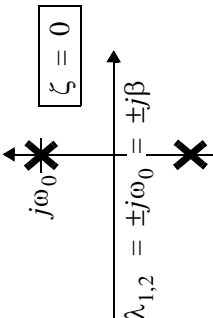
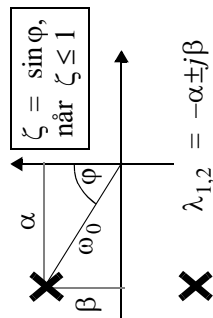
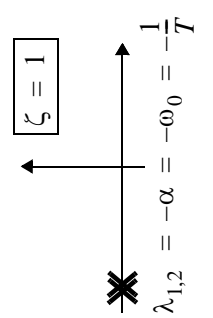
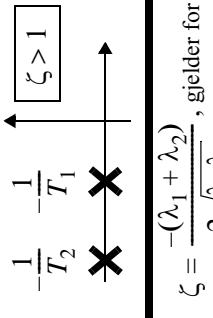
4) Hvis y og u er skalare og $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ så har vi fra 3. linje at $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

Tilstandsrom: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u.$

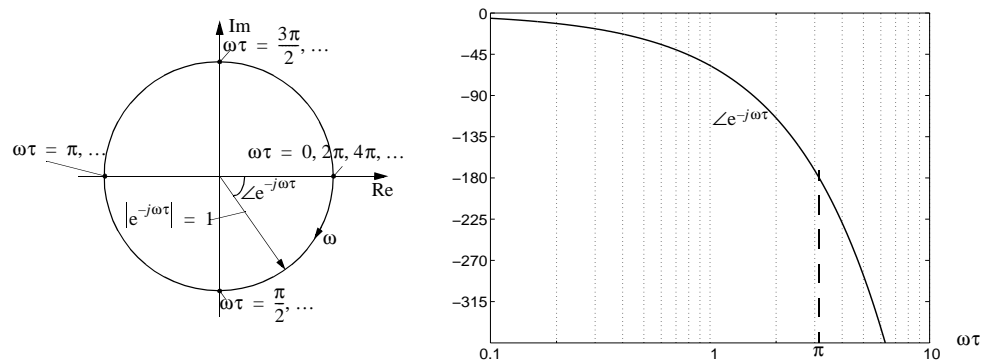
Eigenverdier følger av: $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$

Laplace: $H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}^{\text{adj}}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} \Rightarrow$ Polene gitt av nevneren: $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.$

\Rightarrow poler = egenverdier

Orden	Transferfunksjon $h(s)$	Poler	Impuls- og sprangresponser
1. orden	$h(s) = \frac{K}{1 + Ts} = \frac{K}{s + \frac{1}{T}} = \frac{-K\lambda}{s - \lambda}$		<p>impulsrespons: $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T}e^{-t/T}$</p> <p>sprangrespons: $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau = K(1 - e^{-t/T})$</p>
2. orden, $\zeta = 0$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$		$h(t) = K\omega_0 \sin \omega_0 t$ $k(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)$
2. orden, $\zeta < 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $= \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$	 <p>$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$</p>	$h(t) = K \frac{\omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$ $k(t) = K \left(1 - \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi)\right)$
2. orden, $\zeta = 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2}$		$h(t) = \frac{K}{T^2} t e^{-t/T}$ $k(t) = K \left(1 - \left[1 + \frac{t}{T}\right] e^{-t/T}\right)$
2. orden, $\zeta > 1$	$\frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{K}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$	 <p>$\omega_0 = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}, \quad \zeta = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, \text{ gjelder for } \lambda \neq 0$</p>	$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$ $k(t) = K \left(1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$

FIGUR 6.17
Nyquist-diagram
og faseforløp i
Bode-diagram
for $e^{-j\omega\tau}$



6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(a + s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)(1 + T's)}$$

der $K' = K/a$ og $T' = 1/a$. Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i $h(s)$. Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(c + bs + as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)\left(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

der $K' = K/c$ og $\omega_0 = \sqrt{c/a}$. Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for $s = j0$. Forsterkning i alle ledd “samles” da i en felles K' , fra nå av bare kalt K .

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ($\omega \ll 1$). (Vi symboliserer “liten ω ” med å skrive $\omega \ll 1$.) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har q integrasjoner i $h(s)$, $q > 0$, har vi

$$h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad |h(j\omega)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q}, \quad \angle h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx (-q) \cdot 90^\circ$$

q kan selvsagt være lik 0, da er vi over i Tilfelle b) nedenfor.

Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning $-q$ og skjære 0-dB-linjen i $\omega = K^{\frac{1}{q}}$. Dermed kan vi fastlegge venstre del av $|h(j\omega)|_{as}$ og 0-dB-linjen (subskript $_{as}$ betyr “asymptotisk verdi av”). Se forøvrig figur 6.18).

Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i $(-q) \cdot 90^\circ$.

Tilfelle b): Ingen rene integrasjoner i $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi $|h(j\omega)|_{\omega \ll 1} = K$, dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i K [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i 0° .

3. Videre amplitudeforløp

Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen ω_0 i et resonansledd.

Finn helningen p på asymptoten til leddet du betrakter. $p = 1$ for nullpunktsledd, -1 for tidskonstantledd og -2 for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning $+ p$.

Sett “minste knekkfrekvens” = etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

Videre faseforløp

Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med $p \cdot 90^\circ$ målt fra forrige asymptote.

For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen $1 - T_i s$ gir 90° knekk *ned*, ikke opp.

EKSEMPEL 6.6 Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd

Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_4 s)^2} \quad (6.29)$$

der $K = 3$, $T_1 = 40$, $T_2 = 10$, $T_3 = 2$, $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg|h(j\omega)| &= \lg K + \lg|1 + j\omega T_2| + \lg|1 + j\omega T_3| \\ &\quad - \lg\omega - \lg|1 + j\omega T_1| - 2\lg|1 + j\omega T_4| \end{aligned} \quad (6.30)$$

FIGUR 6.18
Bodediagram for $h(s)$, eksakt diagram, og asymptotisk diagram

