

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
 Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1150.

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

mandag 23. mai 2016

Tid: 0900 - 1300

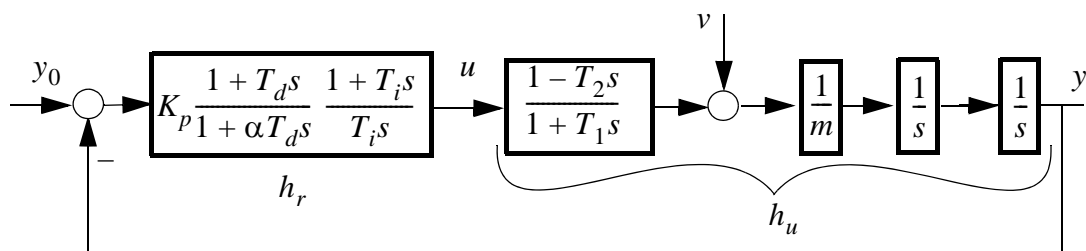
Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt og raskt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Tips: bruk blyant!

Oppg 1 (59 %)

Gitt blokk-diagrammet for et regulerings-system i figur 1.1:



figur 1.1

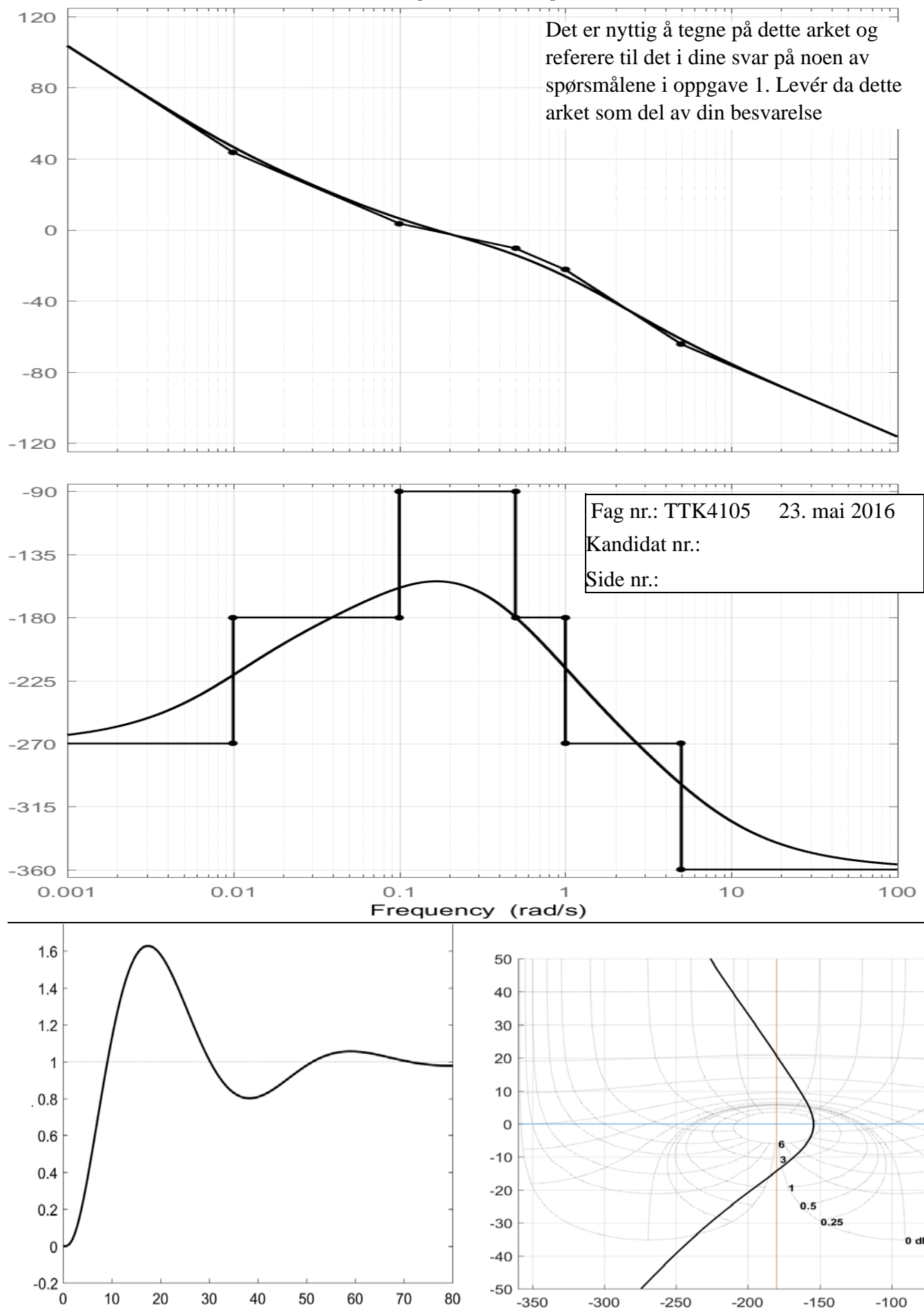
(Dette er en stor oppgave. Men den er laget slik at du kan svare fullt ut på seinere spørsmål sjøl om du ikke greier ett eller flere av de tidlige.)

- a) (5 %) Hva slags regulator er h_r ? Hva kaller vi de to delene av den? Hvilken hensikt har henholdsvis den venstre delen, og den høyre delen, av h_r ?

Prosessen som skal følge eller holdes på en referanseposisjon y_0 , er en gjenstand med masse $m = 1 \text{ [kg]}$ som glir tilnærmet friksjonsløst på et horisontalt underlag. Pådragsorganet med tidskonstanter T_1 og T_2 har en dynamikk vi må ta hensyn til, og som vi derfor inkluderer i prosessmodellen. Tidsenheten i denne oppgaven er sekunder.

- b) (2 %) Hva slags orden har det lukkede system, dvs. transferfunksjonen $M(s) = \frac{y}{y_0}(s)$? (Tips: dette er raskt å svare på, du trenger ikke finne $M(s)$.)
- c) (4 %) Du kan ikke bruke Ziegler-Nichols' eller SIMC-metoden for å stille inn regulator her. Hvorfor ikke?
- d) (3 %) T_i må velges svært stor for dette systemet. Hvorfor? Hva er ulempen med å ha en stor T_i ?

Vi har nå etter beste evne forsøkt å stille inn regulatorparametre, og resultatet er vist i tre diagrammer nedenfor; bode av h_0 , nichols av h_0 , og sprangrespons lukket system:



- e) (7 %) Det oppgis at $m = 1$, $\alpha = 0.2$ og $T_2 = 0.2$. Ut fra bode-diagrammet for h_0 med asymptoter: Finn T_i , T_d , T_1 og K_p . (Tips: alle størrelser er noenlunde runde tall.) Tegn i diagrammet og lever det med besvarelsen.
- f) (4 %) Oppgi stigningstallet på asymptotene for $|h_0|$ fra venstre mot høyre. Bruk notasjonen (-1) , (-2) osv. Forklar siste knekk for amplitude og fase, til høyre.
- g) (5 %) Betrakt responsen ved sprang i y_0 . Kommentér den, og se den i sammenheng med fase- og forsterkningsmarginer.
- h) (3 %) Dette systemet er *betinget stabilt*. Hvordan ser du det og hva betyr det?
- i) (5 %) Hva slags inngangssignal (sprang, rampe, parabel) vil utgangen kunne følge uten stasjonært avvik? Du kan regne her, men kan også begrunne svaret kort og verbalt.
- j) (5 %) Hva slags forstyrrelse v (sprang, rampe, parabel) kan elimineres helt på utgangen uten stasjonært avvik? Du kan regne her, men kan også begrunne svaret kort og verbalt.
- k) (4 %) Regulatoren skal realiseres diskret (men du skal ikke finne den her). Vi aksepterer 1° dårligere fasemargin, og skal velge taste(samplings-)tida T basert på dette. Finn T .
- l) (4 %) Vi vil nå også ha en foroverkopling fra forstyrrelsen, med en blokk h_f . Tegn denne inn i et modifisert blokkdiagram basert på figur 1.1. Kall bare regulatoren i figur 1.1 for h_r . Finn den *statistiske* foroverkopling fra v , altså en konstant forsterkning $h_f = K_f$ (tips: den blir ekstremt enkel). Hva slags v kan denne motvirke?
- m) (6 %) Vi er ikke fornøyd med seriekompensasjon i dette tilfellet, og innfører derfor en intern tilbakopling. Tegn en slik i blokkdiagrammet fra forrige punkt, eller tegn et separat diagram. Nevn to fordeler med denne løsningen.
- n) (2 %) Kan vi beholde den valgte foroverkoblingen sjøl om vi innfører intern tilbakekobling? Kort begrunnelse.

Oppg 2 (7 %)

Finn transferfunksjonen $h(s)$ for et 2. ordens Butterworth lavpassfilter, med knekkfrekvens 100 rad/s. Nevn en anvendelse av lavpassfilter i et reguleringsystem.

Oppg 3 (5 %)

Forklart verbalt når det er aktuelt å anvende en Otto-Smith-regulator, og hva som er den store fordelene med en slik regulator.

Dette er en *modellbasert regulator*. Hva mener vi med det?

Oppg 4 (19 %)

En sinussvingning $y = \sin(\omega_0 t)$, $t > 0$, og 0 for $t < 0$, kan oppfattes som utgangen på en transferfunksjon $h(s)$ som utsettes for en impulsfunksjon $\delta(t)$.

- a) (2 %) Finn $h(s)$.

- b) (4 %) Finn A , \underline{b} , \underline{c}^T i en tilstandsrommodell for $h(s)$, $\dot{x} = Ax + \underline{b}u$, $y = \underline{c}^T x$.
- c) (7 %) Den autonome (dvs. uten pådrag) versjonen av denne modellen er gyldig for en friksjonsløs pendel nær likevektspunktet. Du skal lage en linearisert modell med likevektspunktet som arbeidspunkt. Pendelen har lengde L og masse m . Du trenger også tyngdens akselerasjon g . Tilstandene er pendelens utslagsvinkel x_1 fra likevektspunktet, og dennes deriverte x_2 . (Tips: Bruk Newtons 2. lov for rotasjon, ikke rettlinja bevegelse.)
- d) (6 %) Finn $x_1(t)$ med linearisert modell når pendelen starter i likevektsposisjonen $x_1 = 0$, men med en initiell vinkelhastighet x_{20} .
(Tips: en måte å løse dette på er å bruke $(sI - A)^{-1}$, og det oppgis da at øvre høyre element i denne er $\frac{1}{s^2 + g/L}$.
Men hvis du ikke har greidd oppgave b) og c) over, kan du faktisk, og raskt, finne svaret bare med utgangspunkt i opplysninger gitt i a) og c) og her i d).

Oppg 5 (10 %)

Vi har et åpent system med proporsjonalregulator

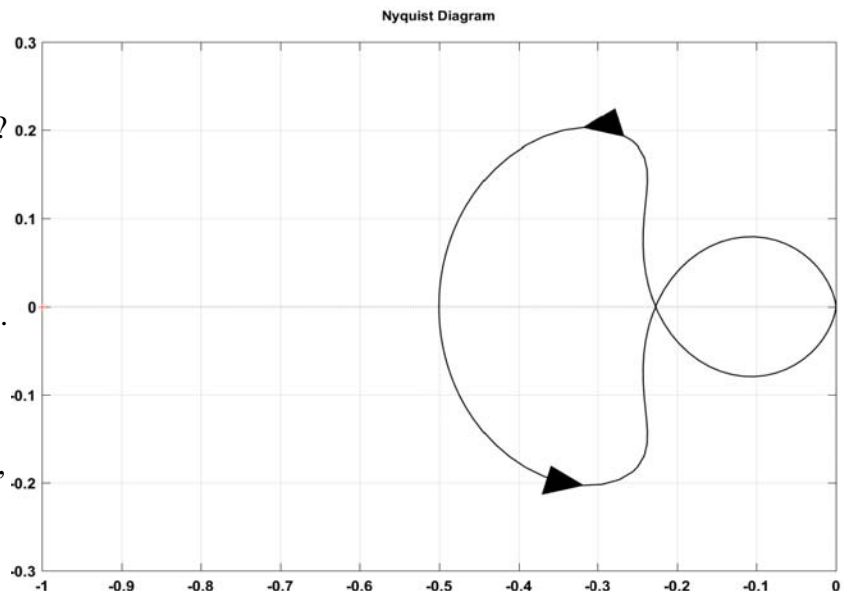
$$h_0 = h_r h_u = K_p \frac{1}{(1 + 0.1s + 0.02s^2)(s - 2)} \quad (5.1)$$

- a) (2 %) Hvor mange poler N_p har h_u i høyre halvplan? Inkluder begge ledd i nevneren i din forklaring.

- b) (4 %) Figur 5.1 viser Nyquistkurven for h_0 med $K_p = 1$. Er det lukkede system stabilt? Begrunn svaret!

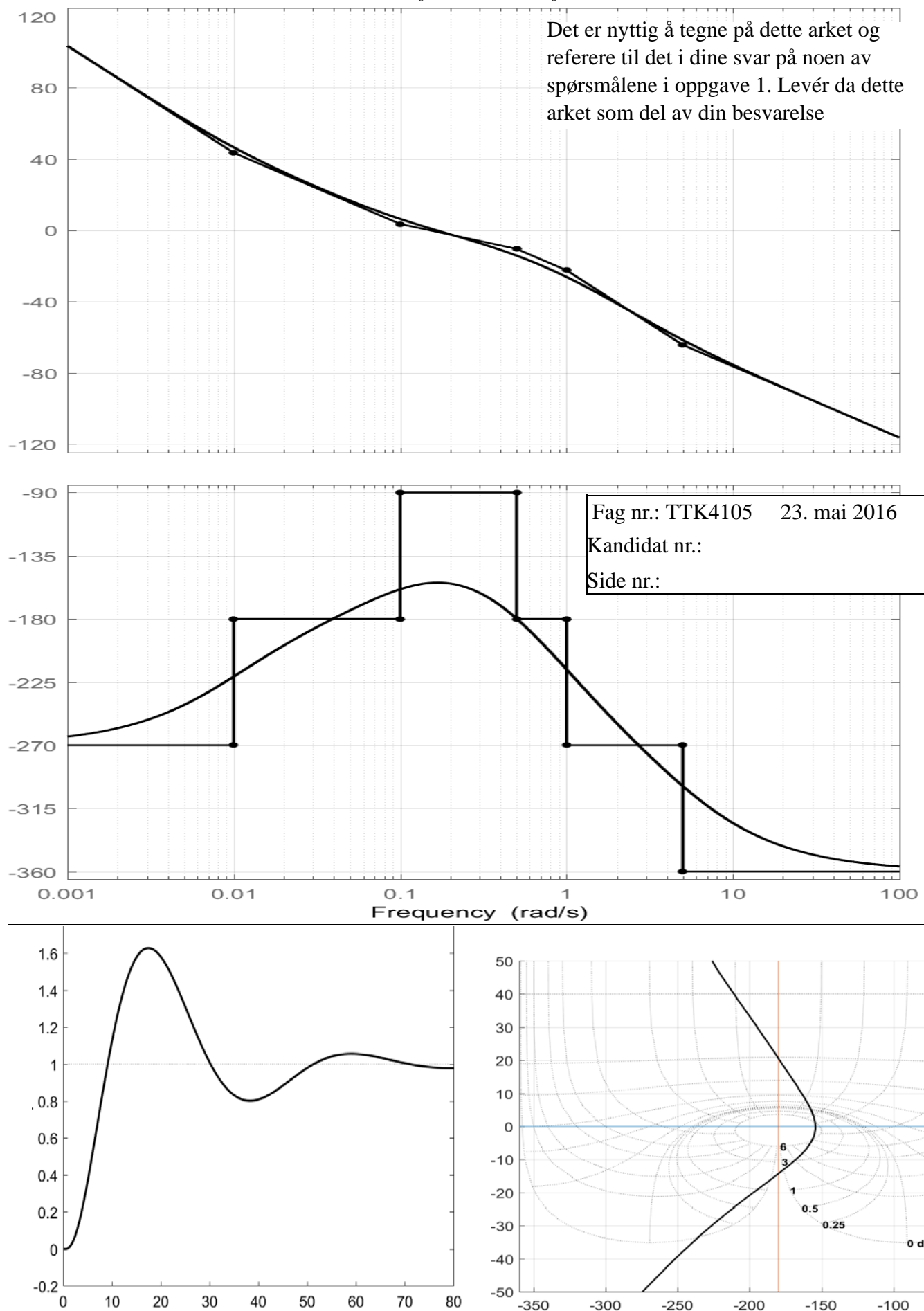
- c) (4 %) Finn det området for K_p som gjør det lukkede system stabilt.

(Tips til denne oppgaven: Du kan måle ut mm med linjal, du trenger ikke regne om til skalaen langs aksene.)



figur 5.1

Vi har nå etter beste evne forsøkt å stille inn regulatorparametre, og resultatet er vist i tre diagrammer nedenfor; bode av h_0 , nichols av h_0 , og sprangrespons lukket system:



(Ekstra ark oppgave 1)

Formelsamling

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \text{ og } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuegning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{ (s-a_i)^m f(s) e^{st} \} \right] \bigg|_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma, \text{ Rotasjon: } d = J\dot{\omega}; \text{ med masse på vekt s stang har vi } J = ml^2 \quad (\text{V.6})$$

$$\text{Ohms lov: } u = Ri, \quad \text{kondensator (kapasitans): } i = C \frac{du}{dt}; \quad \text{induktans: } u = L \frac{di}{dt} \quad (\text{V.7})$$

$$\text{Folding (konvolusjon): } y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t) * u(t)] = h(s) u(s) \quad (\text{V.8})$$

$$\begin{aligned} \text{Linearisering: } \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \bigg|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x), \quad x = 10^{(x[\text{dB}])/20} \quad (\text{V.10})$$

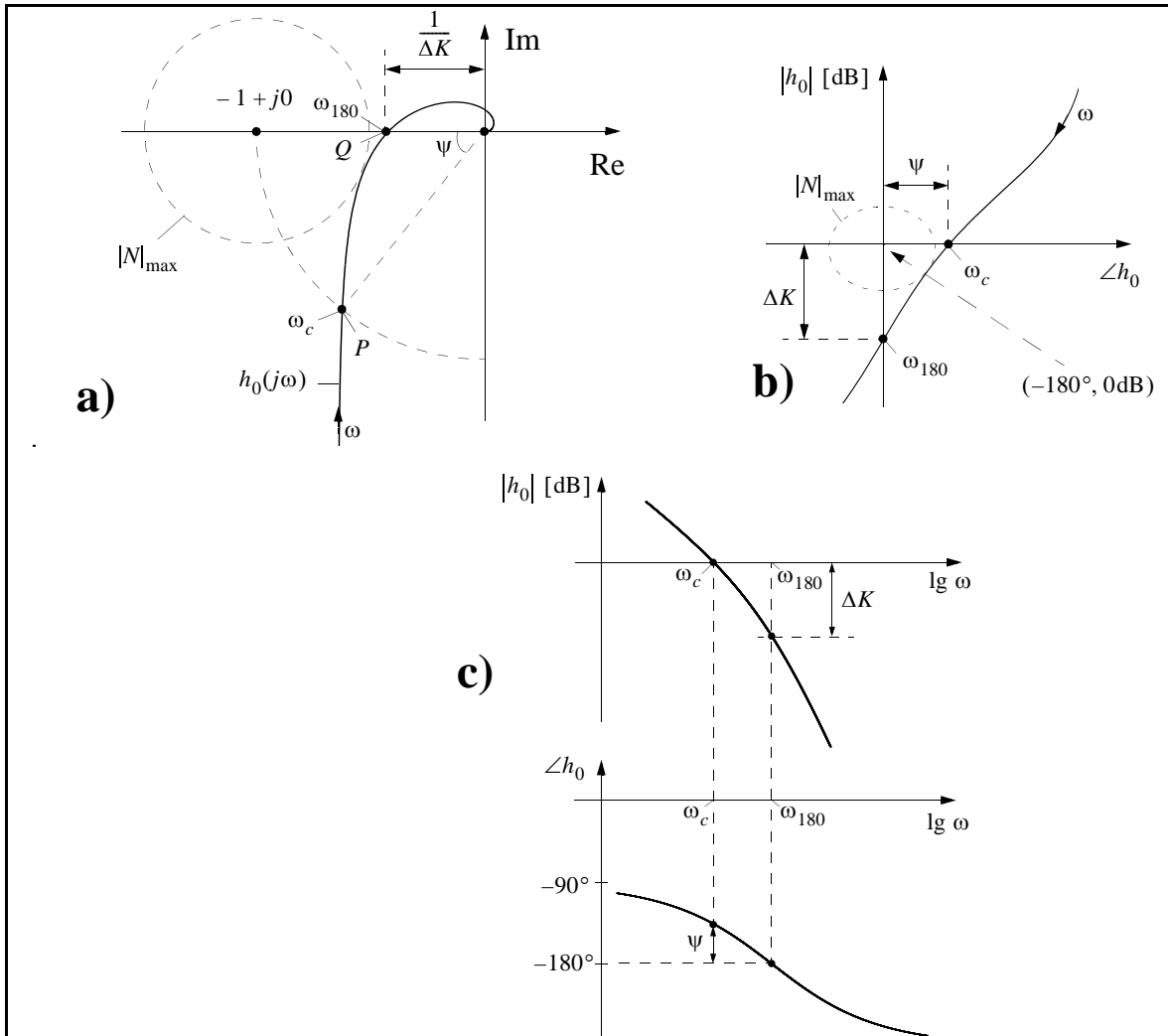
$$N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)}, M(s) = \frac{h_0}{1+h_0(s)}, M(s) + N(s) = 1, \frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) \quad (\text{V.11})$$

Nyquists stabilitetskriterium: Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ f r en netto vinkeldreining (dreieretning er definert positiv *mot* urviseren) lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.12})$$

N_n er antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoplede) system. $N_n = 0$ kreves for stabilt system.

(V.13)



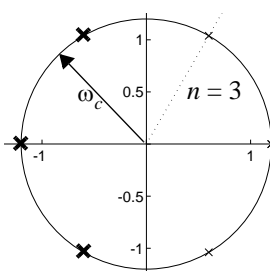
$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180^\circ), \quad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})|, \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \quad (\text{V.14})$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2} \quad (\text{V.15})$$

Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-regler:

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$0.85T_k$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$

$$, \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \quad (\text{V.16})$$



Butterworth lavpassfilter av orden n : De n polene i $h(s)$ ligger på hjørnene i venstre halvdel av en regulær mangekant med $2n$ sider, der mangekanten er plassert slik at den ligger symmetrisk om Im-aksen, og hvor avstanden fra origo og ut til hvert hjørne (= pol) er filterets knekkfrekvens ω_c . (V.17)

Høypassfilter med knekkfrekvens ω_c : Lag først lavpassfilter med ω_c . Erstatt så alle s i transferfunksjonen med ω_c^2/s . (V.18)

Røtter bare i v.h.p. for polynom $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$: hvis og bare hvis alle koeffisienter har samme fortegn.

For 3. ordens polynom $\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ kreves *i tillegg* $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3$ (V.19)

Skogestads “SIMC” åpen-sløyfe-regel for PI-innstilling (bruker notasjonen fra notatet om dette):

Sett på et sprang. Anta at prosessen $\approx h_u = \frac{K e^{-\theta s}}{1 + T_1 s}$. Mål (dvs. anslå) T_1 , K og θ ut fra responsen.

Velg så $K_p = \frac{T_1}{K(\theta + \tau_c)}$ og $T_i = \min(T_1, 4(\theta + \tau_c))$, hvor τ_c er (V.20)

ønsket tidskonstant i responsen til det lukkede systemet. τ_c bør velges som $\tau_c > 0.3\theta$, f. eks. $\tau_c = \theta$.

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.21})$$

$$\text{begrenset PD-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (\text{V.22})$$

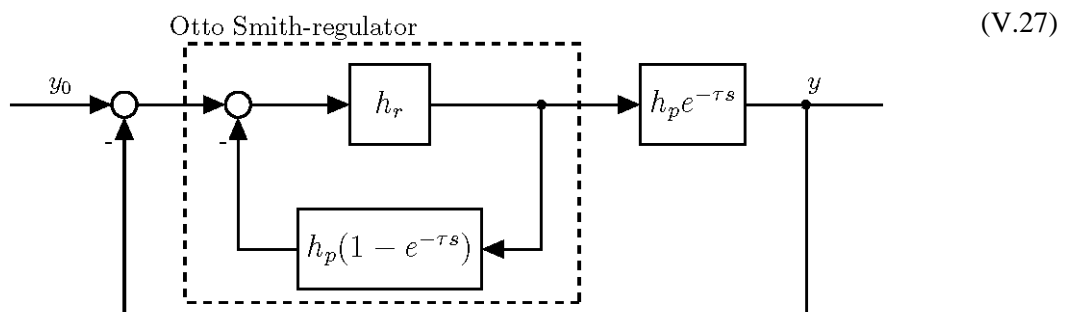
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdot & \cdot & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.23})$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdot \cdot \cdot \ \rho_{n-1}]$$

$$\text{gir } \frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1} s^{n-1} + \dots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (\text{V.24})$$

Diskret regulator: Alle s erstattes med $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator. (V.25)

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører tilnærma en ekstra tidsforsinkelse $= T/2$ i sløyfetransferfunksjonen. (V.26)



Sammenhenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

	1. orden	(eks.: RC-krets)	Høyere orden
1. Differensiallikning	$\dot{x} = ax + bu$	$(\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$
2. Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(t=0) + \frac{b}{s-a}u(s)$		$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(t=0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$
3. Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$		$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$
4. Dekopling	(Trivielt:) $A = a = \lambda = \text{skalar}$		$A = M\Lambda M^{-1}, \quad e^{\mathbf{A}t} = Me^{\Lambda t}M^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5. Rekkeutvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots$		$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \mathbf{A}^3\frac{t^3}{3!} + \dots$
6. $(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s)$	$e^{at} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad (\frac{1}{T}e^{-t/T} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1+Ts})$		$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$
7. Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \quad y(s) = c\frac{b}{s-a}u(s) \quad h(s) = \frac{cb}{s-a}$		$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s) \quad H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$
8. Impulsrespons	$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} h(s) \quad h(t) = cbe^{at}$		${}^3) \quad h(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \quad {}^4) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad h(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$

1) $\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} * \mathbf{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s)$

2) NB: $e^{\mathbf{A}t} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$, bortsett fra når $A = \Lambda$ er diagonal.

3) Antar nå at u og y er skalare.

4) Hvis y og u er skalare og $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ så har vi fra 3. linje at $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

Tilstandsrom: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u.$

Eigenverdier følger av: $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$

Laplace: $H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}^{\text{adj}}\frac{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}\mathbf{B} \Rightarrow$ Polene gitt av nevneren: $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.$

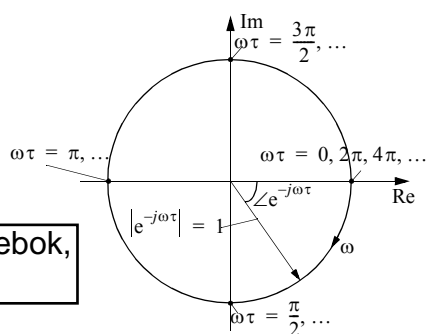
\Rightarrow poler = eigenverdier

Orden	Transferfunksjon $h(s)$	Poler	Impuls- og sprangresponser
1. orden	$h(s) = \frac{K}{1 + Ts} = \frac{K}{s + \frac{1}{T}} = \frac{-K\lambda}{s - \lambda}$		impulsrespons: $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T}e^{-t/T}$ sprangrespons: $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau = K(1 - e^{-t/T})$
2. orden, $\zeta = 0$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$		$h(t) = K\omega_0 \sin \omega_0 t$ $k(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)$
2. orden, $\zeta < 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $= \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$		$h(t) = K \frac{\omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$ $k(t) = K \left(1 - \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \phi) \right)$
2. orden, $\zeta = 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2}$		$h(t) = \frac{K}{T^2} t e^{-t/T}$ $k(t) = K \left(1 - \left[1 + \frac{t}{T} \right] e^{-t/T} \right)$
2. orden, $\zeta > 1$	$\frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{K}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$		$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$ $k(t) = K \left(1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$

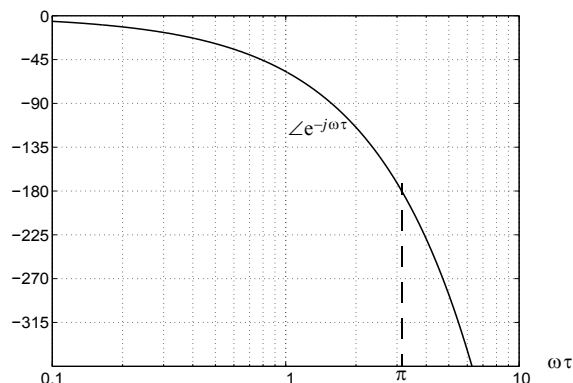
$\omega_0 = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$, $\zeta = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}$, gjelder for alle $\lambda \neq 0$

FIGUR 6.17

Nyquist-diagram
og faseforløp i
Bode-diagram
for $e^{-j\omega\tau}$



Utdrag fra lærebok,
tre sider



6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(a + s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)(1 + T's)}$$

der $K' = K/a$ og $T' = 1/a$. Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i $h(s)$. Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(c + bs + as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)\left(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

der $K' = K/c$ og $\omega_0 = \sqrt{c/a}$. Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for $s = j0$. Forsterkning i alle ledd “samles” da i en felles K' , fra nå av bare kalt K .

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ($\omega \ll 1$). (Vi symboliserer “liten ω ” med å skrive $\omega \ll 1$.) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har q integrasjoner i $h(s)$, $q > 0$, har vi

$$h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad |h(j\omega)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q}, \quad \angle h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx (-q) \cdot 90^\circ$$

q kan selvsagt være lik 0, da er vi over i Tilfelle b) nedenfor.

Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning $-q$ og skjære 0-dB-linjen i $\omega = K^{\frac{1}{q}}$. Dermed kan vi fastlegge venstre del av $|h(j\omega)|_{as}$ og 0-dB-linjen (subskript $_{as}$ betyr “asymptotisk verdi av”. Se forøvrig figur 6.18).

Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i $(-q) \cdot 90^\circ$.

Tilfelle b): Ingen rene integrasjoner i $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi $|h(j\omega)|_{\omega \ll 1} = K$, dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i K [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i 0° .

3. Videre amplitudeforløp

Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen ω_0 i et resonansledd.

Finn helningen p på asymptoten til leddet du betrakter. $p = 1$ for nullpunktsledd, -1 for tidskonstantledd og -2 for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning $+p$.

Sett “minste knekkfrekvens” = etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

Videre faseforløp

Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med $p \cdot 90^\circ$ målt fra forrige asymptote.

For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen $1 - T_i s$ gir 90° knekk *ned*, ikke opp.

EKSEMPEL 6.6 Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd

Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(1 + T_2s)(1 + T_3s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_4s)^2} \quad (6.29)$$

der $K = 3$, $T_1 = 40$, $T_2 = 10$, $T_3 = 2$, $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg|h(j\omega)| &= \lg K + \lg|1 + j\omega T_2| + \lg|1 + j\omega T_3| \\ &\quad - \lg\omega - \lg|1 + j\omega T_1| - 2\lg|1 + j\omega T_4| \end{aligned} \quad (6.30)$$

FIGUR 6.18

Bodediagram for $h(s)$, eksakt diagram, og asymptotisk diagram

