Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for teknisk kybernetikk

Faglig kontakt under eksamen
Navn:
Erlend Kristiansen
Telefon: 99501741

EKSAMEN I TTK4130
MODELLERING OG SIMULERING
26. mai 2006
Tid: 09:00-13:00

Hjelpemidler:
C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Sensur:
Sensuren vil bli avsluttet i henhold til gjeldende regelverk.

Dette eksamensettet består av totalt 6 sider.

Oppgave 1) (20 %)

a) Gitt transferfunksjonen

$$H_a(s) = K\frac{s+a}{(s+1)^2} \tag{1}$$

hvor $K > 0$. For hvilke a er $H_a(s)$ positiv reell? Begrunn svaret med utregning.

b) Gitt transferfunksjonen

$$H_b(s) = \frac{1}{\tanh s} \tag{2}$$

Er $H_b(s)$ positiv reell? Begrunn svaret med utregning.

c) En motor driver to elastiske laster. Motorparameteren er i dette tilfellet J_0 og parametrene for de elastiske lastene er henholdsvis J_1, K_1, D_1 og J_2, K_2, D_2. Velg variable og sett opp en modell (uten å eliminere portvariable).

d) Gitt transferfunksjonen mellom motormomentet T_0 og motorhastigheten ω_0

$$H_0(s) = \frac{\omega_0}{T_0}(s) \tag{3}$$

Vis ved å bruke energibasert analyse at $H_0(s)$ er positiv reell. Hva vil dette si om fasen til $H_0(j\omega)$? Gi en kort fysisk forklaring på hva slags egenskap passivitet beskriver, og relater det til systemet gitt i c). (Hint: Det er ikke nødvendig å regne ut (3) for å løse denne oppgaven.)

Oppgave 2) (20 %)

En rotasjon fra a til d er gitt ved en rotasjon $\psi = 30°$ fra a til b om z_a-aksen, deretter en rotasjon $\theta = 45°$ fra b til c om y_b-aksen, og til slutt en rotasjon $\phi = 60°$ fra c til d om x_c-aksen.
a) Finn rotasjonmatrisen $\mathbf{R}_d^a$.

b) Finn vinkel-akseparametrene $\mathbf{k}, \theta$ som svarer til $\mathbf{R}_d^a$.

c) Anta at $\dot{\psi} = 1, \dot{\theta} = 2$ og $\dot{\phi} = -1$. Finn $\boldsymbol{\omega}_{ad}^a$.

Gitt et inertielt system i og et legemefast system b. Orienteringa mellom disse kan beskrives av rotasjonsmatrisa $\mathbf{R}_b^i$. Videre anta at det er gitt et punkt o som er fast i b-systemet og et annet punkt p som ikke nødvendigvis ligger fast i b-systemet. Akselerasjonen til punktet p kan skrives på koordinatfri form som

$$\vec{a}_p = \vec{a}_0 + \frac{{}^b d^2}{dt^2}\vec{r} + 2\vec{\omega}_{ib} \times \frac{{}^b d}{dt}\vec{r} + \vec{\alpha}_{ib} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{ib} \times (\vec{\omega}_{ib} \times \vec{r}) \tag{4}$$

hvor $\vec{\omega}_{ib}$ og $\vec{\alpha}_{ib}$ er de koordinatfrie vektorene for henholdsvis vinkelhastighet og vinkelakselerasjon mellom i-systemet og b-systemet.
d) Utled akselerasjonsvektoren $\mathbf{a}_p^i$ som er representasjonen av (4) på koordinatform i i-systemet.

e) Gi en kort fysisk forklaring på de enkelte leddene i (4) og angi deres retning (Hint: Tegn figur og la $\vec{\omega}_{ib}$ og $\vec{\alpha}_{ib}$ peke ut av papirplanet).

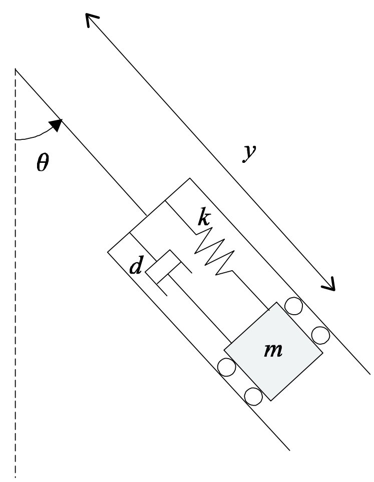

Figure 1: Kloss i rør

Oppgave 3) (15 %)

Figur (1) viser en kloss inne i et rør som svinger om et opphengspunkt. Anta at all masse bortsett fra klossen er neglisjerbar, og at klossens masse er m med massesenter gitt av y som er avtanden mellom massesenteret og opphengspunktet. Videre er fjærkonstanten k og dempekonstanten d. Fjæra er kraftløs når $y = y_0$. Det er ingen friksjon i systemet.

Velg passende generaliserte koordinater $\mathbf{q}$ og bruk Lagranges formulering for å sette opp en matematisk modell.

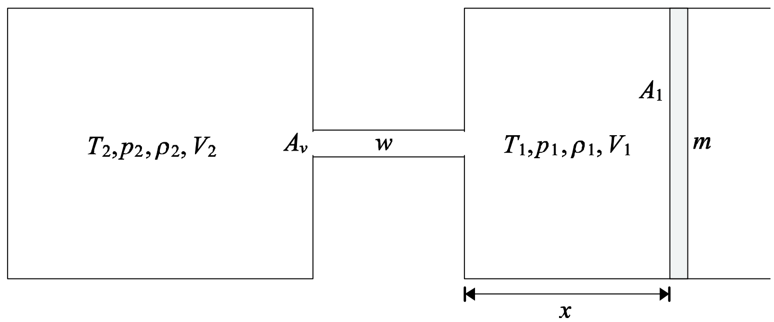

Figure 2: To trykktanker forbundet med en ventil

Oppgave 4) (25 %)

I figur (2) ser vi to trykktanker forbundet med en ventil, og hvor den ene tanken har et stempel med masse m ved posisjon x. Trykktankene er fylt med en ideell gass, og har isentropiske forhold. Gassen strømmer gjennom ventilen mellom de to tankene ved isentropisk strømning. Strømningsarealet i ventilen er A_v. Tank 1 har temperatur T_1, trykk p_1, tetthet ρ_1 og volum $V_1 = A_1 x$. Tank 2 har temperatur T_2, trykk p_2, tetthet ρ_2 og volum V_2.

a) Sett opp differensialligningene for T_1, p_1, T_2 og p_2.

b) Sett opp en differensialligning for stempelets posisjon x. Anta at trykket utenfor tankene er satt til $p_0 = 0$.

Oppgave 5) (20 %)

Det lineære systemet

$$\dot{y} = -y \tag{5}$$

er gitt.

a) Systemet diskretiseres ved bruk av Eulers metode med tidsskritt h. Angi stabilitetsgrensa for h.

b) Skisser den eksakte løsning og den beregnede løsning for

1. $h = 0.25$ s
2. $h = 1$ s
3. $h = 2$ s

Kommenter resultatene kort.

c) Systemet diskretiseres ved bruk av implisitt midtpunkts-metoden. Angi stabilitetsgrensa for h.

d) Skisser den eksakte løsning og beregnede løsning for

1. $h = 0.25$ s
2. $h = 1$ s
3. $h = 2$ s
4. $h = 200$ s

Kommenter resultatene kort.

e) I Matlab er standard metode for numerisk integrasjon Dormand-Prince 5(4), implementert i funksjonen `ode45`. Beskriv prinsipielt denne metoden med pseudokode med hensyn på metodens beregning av trinnene $\mathbf{k}_i$, $i = 1, \ldots, \sigma$, neste verdi $\mathbf{y}_{n+1}$, feilestimatet $\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{y}_{n+1} - \hat{\mathbf{y}}_{n+1}$ og steglengden h.