Løsningsforslag TTK4105 reguleringsteknikk 25/5 – 09

1a) Når r = konstant og det allerede er en integrator i prosessen, trengs det ingen i h_r. Se tabell 9.1 i læreboka med $q=0, p=1$. Sluttverditeoremet, se regning side 307.

1b) Grafer neste side.

1c) Uten derivatvirkning vil $\angle h_0 < -180° \;\forall \omega$.
Derfor ustabilt uansett verdi av K_p.
Modellen burde egentlig inneholdt et ekstra ledd i h_r: $\frac{1}{1+T_i s}$ fordi pådragsorganet har en viss treghet, og dessuten kan ikke h_r ha ∞ forsterkning når $\omega \to \infty$.

1d) Se neste side. $\Delta K = 11\,dB > 6\,dB$ er bra. $\psi = 40° < 45°$ er litt under grensa. Men "akseptabelt" godtas også.

1e)
$$\frac{x_2^n}{x_2^{n-1}}(s) = \frac{s\,x_1^n}{s\,x_1^{n-1}}(s) = \frac{x_1^n}{x_1^{n-1}}(s) = \frac{h_0}{1+h_0}$$
$$= \frac{t_0}{n_0+t_0} \left(\text{der } h_0 = \frac{t_0}{n_0}\right) = \frac{K_p e^{-\tau s}(1+T_d s)}{m s^2 + K_p e^{-\tau s}(1+T_d s)}$$

1f) Forsterkninga gjennom fem ledd ved $\omega = 0.17$:
$\omega = 0.17$ er ved resonanstoppen til $|M(j\omega)|$ som er 3.8 dB. Fem ledds forsterkning $= 5 \cdot 3.8\,[dB] = 19\,[dB]$. I absolutt verdi er dette $10^{\frac{19}{20}} = 8.91$.
Amplituden på sinussvingning til "5" blir da
$0.5 \cdot 8.91 = \underline{4.45}$

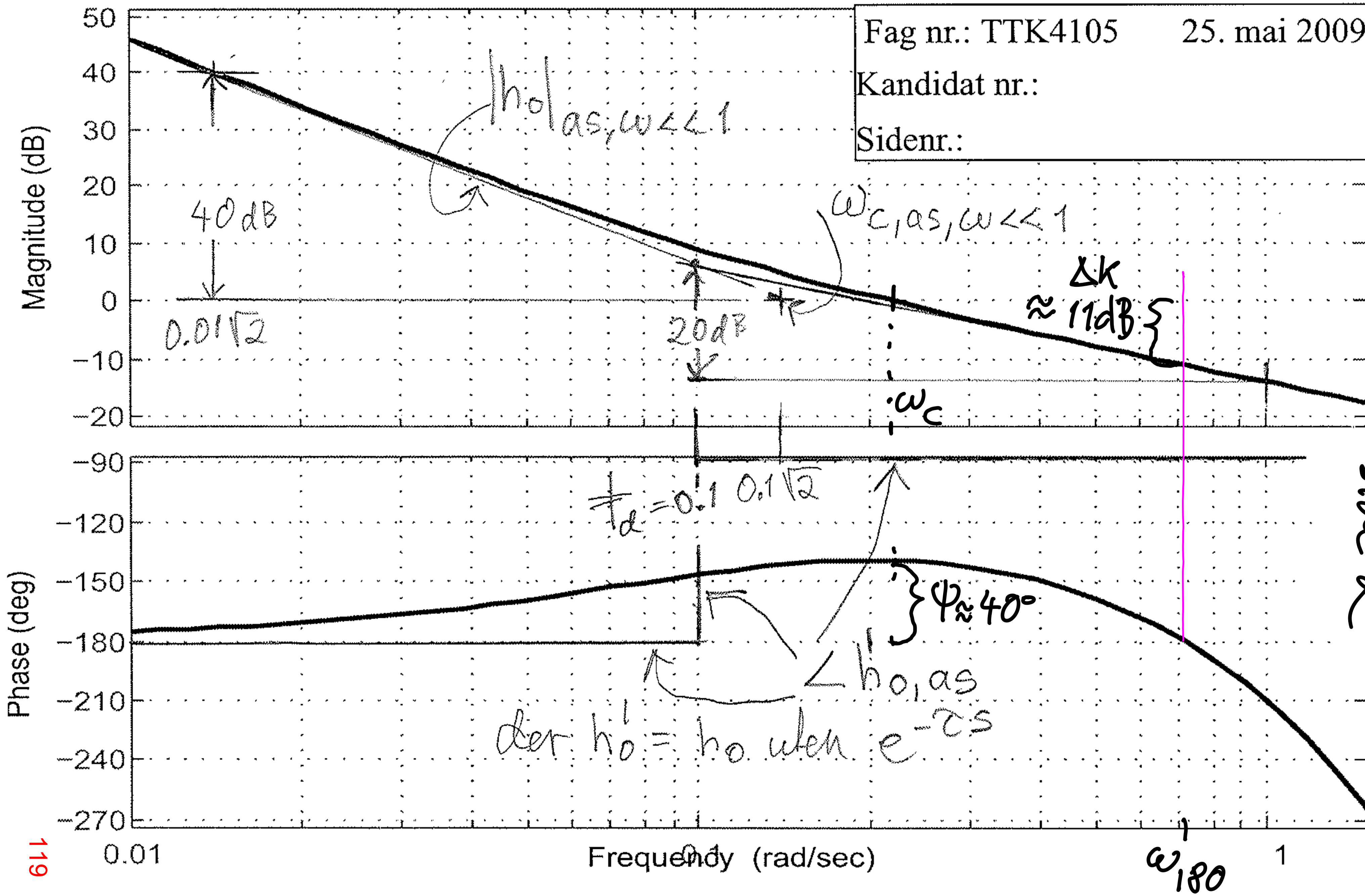
1g) Se side 3

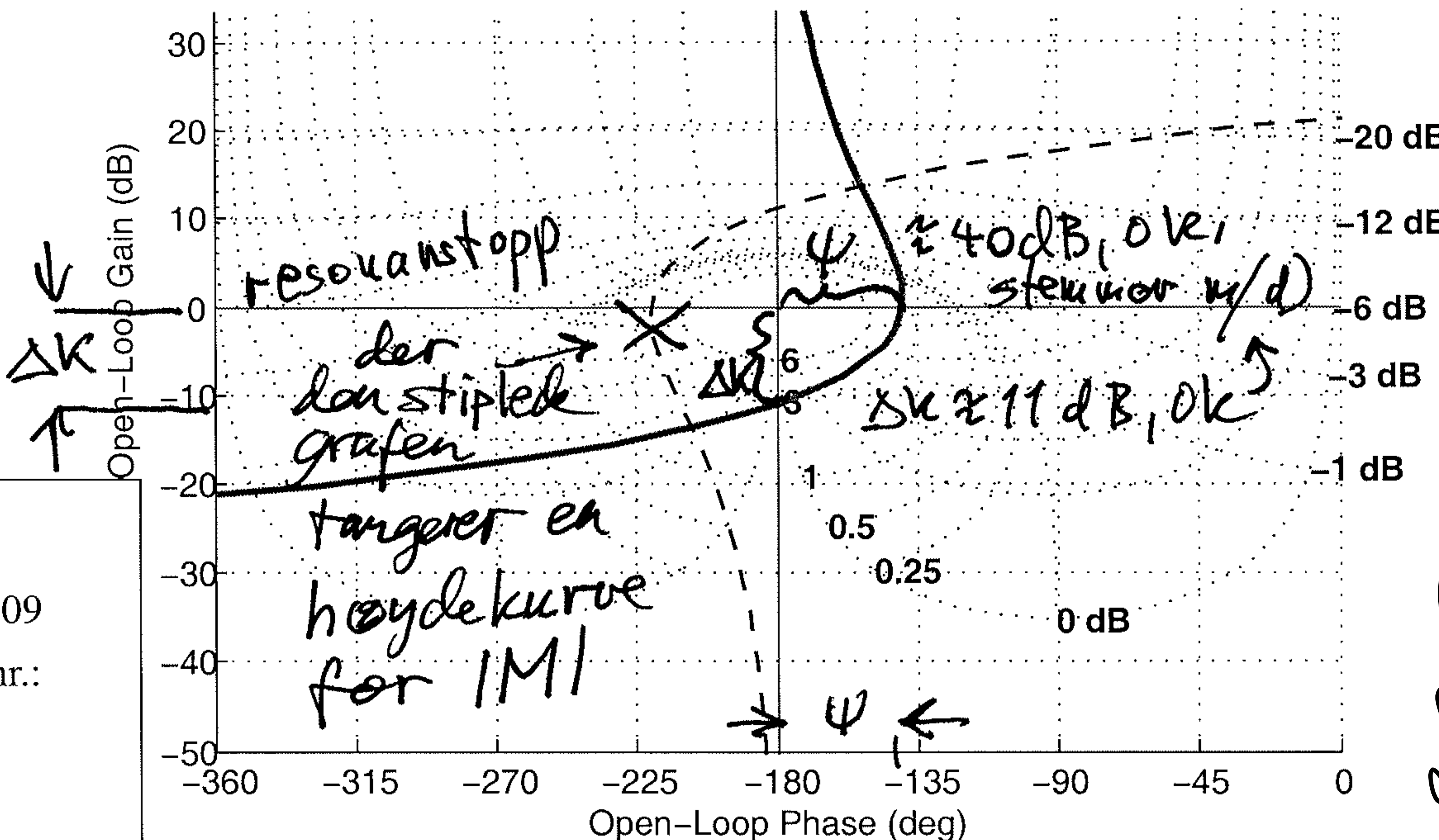
Fag nr.: TTK4105 25. mai 2009

Kandidat nr.:

Sidenr.:

side 2





Fag nr.:
TTK4105,
25. mai 2009

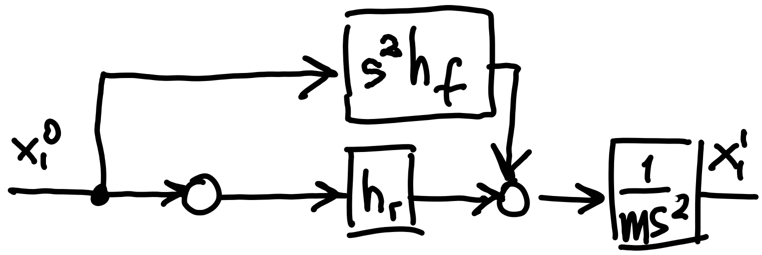
Kandidat nr.:

Sidenr.:

Side 3

side 4

1h) Figur 1.1 $\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow$ foroverkopling fra referansen. Da må

$$s^2 h_f \cdot \frac{1}{ms^2} = 1 \Rightarrow h_f = \underline{\underline{m}}$$

1 i) $M(s) = 1$. Alle biler følger på perfekt.

side 5

2 a) "Væske" (penge) balanse bedriftes: $\dot{m}_f = c - w$ (1)

" " hushold.: $\dot{m}_h = w - c$ (2)

Med $x_1 = m_f$, $x_2 = m_h$, $w = \frac{m_f}{T_f}$, $c = \frac{m_h}{T_h}$ blir dette

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{T_f} x_1 + \frac{1}{T_h} x_2 \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{T_f} x_1 - \frac{1}{T_h} x_2 \quad (4),$$

eller $\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$, med $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_f} & \frac{1}{T_h} \\ \frac{1}{T_f} & -\frac{1}{T_h} \end{bmatrix}$

Systemet er autonomt, fordi det ikke påvirkes utenfra, verken av pådrag eller forstyrrelser.

2 b) Dette kan gjöres på flere måter. Jeg bruker 2. linje i formelsamling, side 10: $\underline{x}(s) = (sI - A)^{-1} \underline{x}(t=0)$

Vi har $\underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} m_{f0} \\ m_{h0} \end{bmatrix}$. $(sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_f} & -\frac{1}{T_h} \\ -\frac{1}{T_f} & s + \frac{1}{T_h} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h}\right)s} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_h} & \frac{1}{T_h} \\ \frac{1}{T_f} & s + \frac{1}{T_f} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{x}(s) = \frac{1}{s\left(s + \left(\frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h}\right)\right)} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_h} & \frac{1}{T_h} \\ \frac{1}{T_f} & s + \frac{1}{T_f} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{f0} \\ m_{h0} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Jeg innfører $\alpha = \frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h}$, og får

$$x_1(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{T_h}\right) m_{f0} + \frac{1}{T_h} m_{h0}}{s(s+\alpha)}$$

Residuregning: $x_1(t) = \sum_i \text{res}\, x_1(s)$

$$= \left.\frac{\left(s + \frac{1}{T_h}\right) m_{f0} + \frac{1}{T_h} m_{h0}}{s+\alpha} e^{ts}\right|_{s=0} + \left.\frac{\left(s + \frac{1}{T_h}\right) m_{f0} + \frac{1}{T_h} m_{h0}}{s} e^{ts}\right|_{s=-\alpha}$$

Benytter $m = m_{f0} + m_{h0}$ og får

$$x(t) = \frac{m}{T_h \alpha} + \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\left(-\frac{1}{T_f} m_{f0} + \frac{1}{T_h}(m - m_{f0})\right) =$$

$$x_1(t) = \frac{m}{\alpha T_h} + e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\alpha m_{f0} - \frac{m}{T_h}\right) = \underline{\underline{m_{f0} e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha T_h}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}}$$

$m_f(\infty) = x_1(\infty) = \frac{m}{\alpha T_h}$. P.g.a symmetri må $m_h(\infty)$ da være

$$m_h(\infty) = \frac{m}{\alpha T_f} \Rightarrow \frac{m_f}{m_h}(\infty) = \underline{\underline{\frac{T_f}{T_h}}}$$

Dette kunne også finnes slik: Systemet er marginalt stabilt og uten ytre påvirkninger. Da vil $\underline{x(\infty)} = \underline{\text{konst}}$. Av f. ds. (3) følger da at $-\frac{1}{T_f} x_1 + \frac{1}{T_h} x_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{m_f(\infty)}{T_f} = \frac{m_h}{T_h}(\infty) \Rightarrow \underline{\frac{m_f}{m_h}(\infty) = \frac{T_f}{T_h}}$$

Resultatet er rimelig. Siden pengestrømmene ut av begge "kar" nå er like, vil "væskemengden" i karet bli proporsjonal med T for samme "kar".

2c) (3) får nå et ledd i tillegg: $\dot{x}_1 = \dots + u$,

$\Rightarrow \underline{b} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. A er som før. $\underline{c}^T = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$

fordi $y = m_f + m_h = x_1 + x_2 = \underline{c}^T \underline{x}$. Fra

formelsamling s. 8, linje 7, har vi:

2d) $h(s) = \underline{c}^T(sI-A)^{-1}\underline{b}$. Vi har allerede regnet ut $(sI-A)^{-1}$;

$$\Rightarrow h(s) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s(s+\alpha)} \begin{bmatrix} s+\frac{1}{T_h} & \frac{1}{T_h} \\ \frac{1}{T_f} & s+\frac{1}{T_f} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s+\alpha)} \begin{bmatrix} \left(s+\frac{1}{T_h}\right)+\frac{1}{T_f} & \frac{1}{T_h}+\left(s+\frac{1}{T_f}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s+\alpha)}\left(s+\frac{1}{T_h}\right)+\frac{1}{T_f} = \frac{s+\alpha}{s(s+\alpha)} = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$$

Dette kunne vi innsett straks, fordi den eneste strøm inn i systemet er u, og alt akkumuleres i "karene". Siden m er total pengemengde, må m være integralet av u, $\Rightarrow h(s) = \frac{m}{u}(s) = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$

side 8

3a) $h_0 = k_p \frac{1+T_i s}{T_i s} \frac{1}{s+a}$; $\angle h_0 = -\frac{\pi}{2} + \underbrace{\angle(1+T_i j\omega)}_{>0\ \forall\omega} - \underbrace{\angle(j\omega+a)}_{>-\frac{\pi}{2}\forall\omega}$

$\Rightarrow$ $\angle h_0$ vil aldri bli så negativ som som $-\pi \Rightarrow$ grafen til h_0 kan aldri omslutte $-1 \Rightarrow$ alltid stabilt.

3b) $h_0 \approx K_p \frac{1+\frac{s}{a}}{\frac{s}{a}} \frac{1}{s+a} e^{-\frac{T}{2}s} = \frac{K_p}{s} e^{-\frac{T}{2}s} = h_0'$

$\angle h_0' = -\frac{\pi}{2} - \frac{T}{2}\omega \Rightarrow -\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{T}{2}\omega_{180}$

$\Rightarrow \omega_{180} = \frac{\pi}{T}$

$|h_0| = \frac{K_p}{\omega} \Rightarrow 1 = \frac{K_p}{\omega_c} \Longrightarrow K_p = \omega_c$

Vi har ustabilt system når $\omega_c > \omega_{180} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_p > \frac{\pi}{T}}}$

3c) Bruker $e^{-\frac{T s}{2}} \approx \dfrac{1-\frac{T}{4}s}{1+\frac{T}{4}s}$ merk: 4!

$$\Rightarrow h_0 = \frac{t_0}{n_0} = \frac{K_p\left(1-\frac{T}{4}s\right)}{s\left(1+\frac{T}{4}s\right)}$$

Sjekker det karakteristiske polynom for det lukkede system:

$$h_0 + t_0 = s\left(1+\frac{T}{4}s\right) + K_p\left(1-\frac{T}{4}s\right)$$

$= \frac{T}{4}s^2 + \left(1 - K_p\frac{T}{4}\right)s + K_p$. For et 2. ordens polynom forenkles Routh til bare å kreve samme fortegn for alle koeffisienter (for stabilitet), $\Rightarrow$ systemet er ustabilt for $1 - K_p\frac{T}{4} < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{K_p > \frac{4}{T}}}$

K_p tillates å være større fordi approksimasjonen $\dfrac{1-\frac{T}{4}s}{1+\frac{T}{4}s}$ har mindre negativ fasegang enn $e^{-\frac{T}{2}s}$. Dette gir et for optimistisk bilde.

4) Integraldelen av regulatoren kobles ut når pådraget når en metning.

5) Når det er en tidsforsinkelse i prosessen. Vi kan da velge regulator som om tidsforsinkelsen ikke inngikk i den lukkede sløyfa.

6) Vi har med utgangspunkt i $\Delta K = 11$ dB som vi fant i 1d) at

K_{pk} = (kritisk K_p) = $K_p + 11$ [dB]

Så skal man ifølge Z.-N. redusere K_{pk} med 6 dB $\Rightarrow$ endelig K_p blir

$K_p = K_{pk} - 6$ [dB] = opprinnelig K_p + 5 dB

$$\Rightarrow \frac{K_p}{m} [dB] = 20 \log_{10}(0.02) + 5$$

eller $\frac{K_p}{m} = 0.02 \cdot 10^{\frac{5}{20}} = \underline{\underline{0.0356}}$