Løsningsforslag SIE3005 Reguleringsteknikk 29/7-2002

OPPGAVE 1

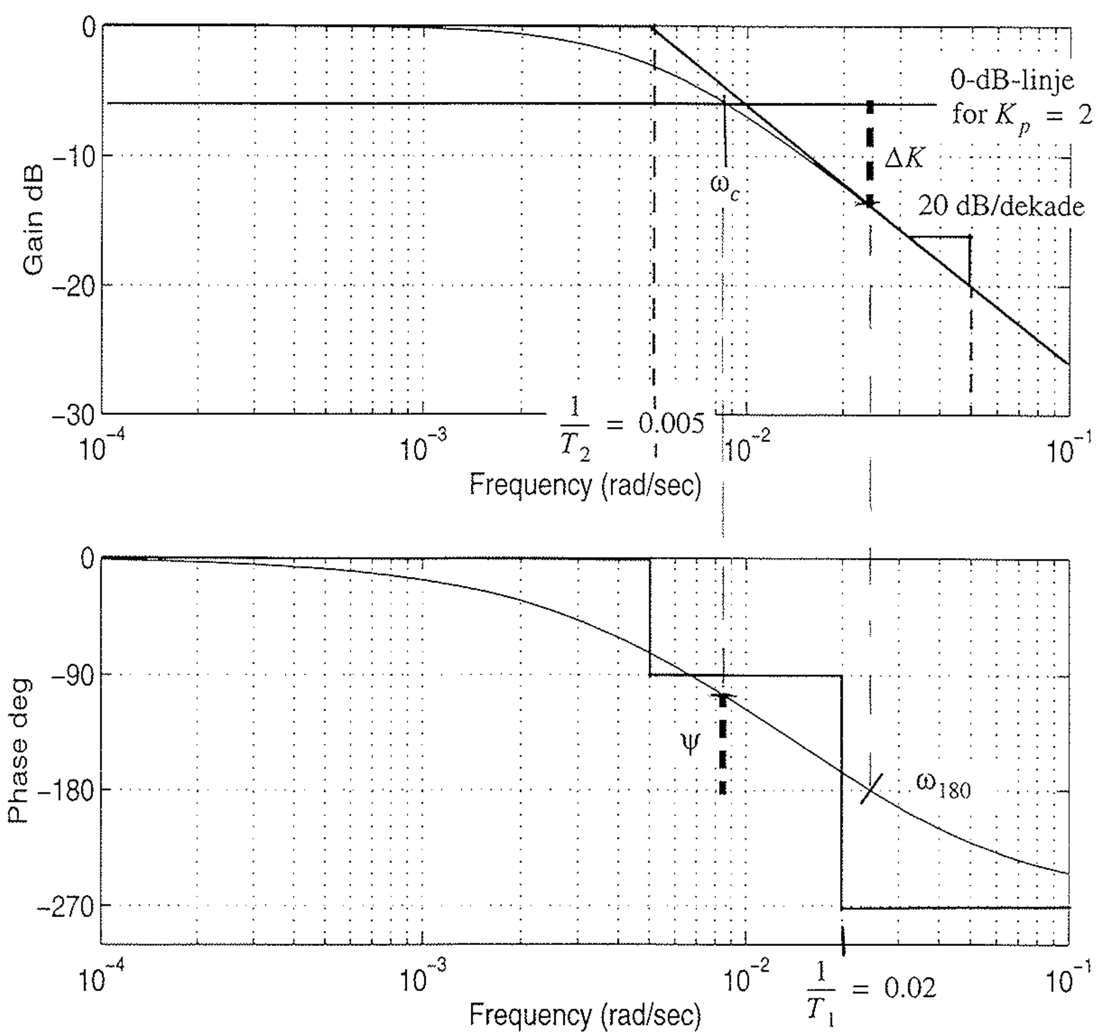
a) Vi må få $h(s)$ på formen

$$h(s) = \frac{(1-50s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} = \frac{(1-50s)}{1+(T_1+T_2)s+T_1 T_2 s^2} \tag{1}$$

Vi har $T_1 T_2 = 10000$ og $T_1 + T_2 = 250$. Dette gir ligninga $T_{1,2}^2 - 250T_{1,2} + 10000 = 0 \Rightarrow T_{1,2} = 125 \pm \sqrt{125^2 - 10000} \Rightarrow T_{1,2} = 125 \pm 75$ som gir $T_1 = 50$ og $T_2 = 200$. Dermed har vi transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{(1-50s)}{(1+50s)(1+200s)}$$

Merk at $|h(s)| = \left|\frac{1}{1+200s}\right|$.

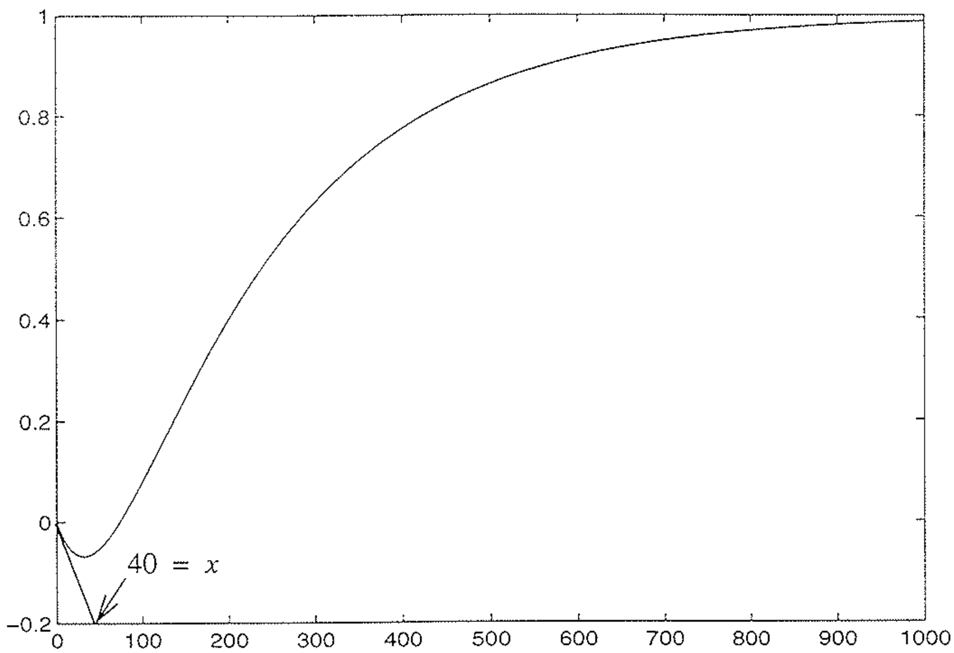


Figur 1: Bodediagram for prosess.

Vi ser i figur 1 at $\angle h_{as}$ knekker $-90° + (-90°)$ ved $\omega = \frac{1}{T_2}$ pga. nullpunktet $-\frac{1}{T_2}$ og polen $\frac{1}{T_2}$. $\angle h_{as}$ knekker $-90°$ til ved $\omega = \frac{1}{T_1}$ pga. den andre polen.

Prosessen er ikke-minimum fase pga. det negative nullpunktet (nullpunktet i høyre halvplan).

b)



Figur 2: Enhetssprangresponsen til prosessen

Nullpunktet i høyre halvplan gir et transient forløp som svinger seg ned først. Responsen $\longrightarrow 1$ når $t \longrightarrow \infty$ fordi statisk forsterkning = 1 ($h(0) = \frac{1}{1}$). Tangenten finnes ved at en bruker (V.2): $\lim_{t \to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \to \infty}\left(sh(s)\frac{1}{s} \cdot s\right) = \lim_{s \to \infty}(sh(s)) = \frac{-50}{50 \cdot 200} = -0.005$

Størrelsen x på figur 2 finnes slik: $-\frac{0.2}{x} = -0.005 \Rightarrow x = 40$.

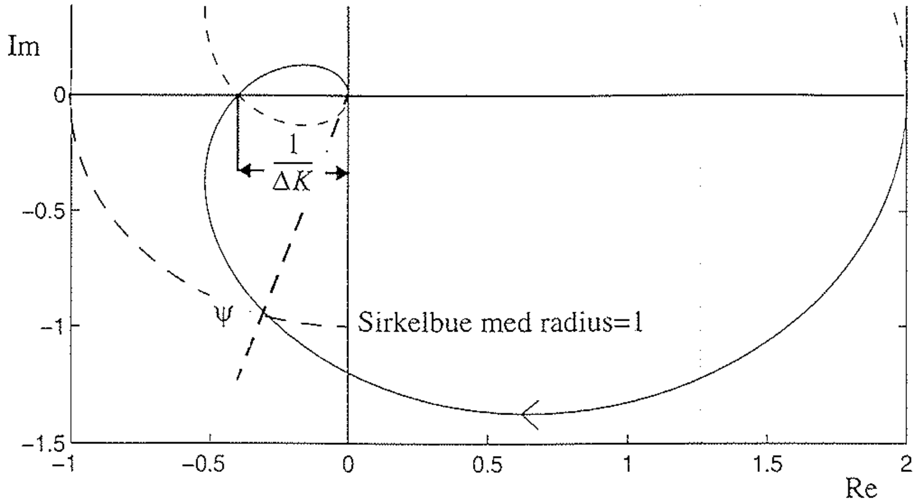
c) 0-dB-linja er tegna på inn på figur 1. Vi leser av $\psi = 76°$ og $\Delta K = 7.8$ dB.

d) På stabilitetsgrensa har vi $\omega_c = \omega_{180}$, dvs. $|h(j\omega_{180})| = 1$ og $\angle h(j\omega_{180}) = -180°$, dvs. at $h(j\omega_{180}) = -1$.

Det lukkede systemet på stabilitetsgrensa er gitt ved: $\frac{h(j\omega_{180})}{1 + h(j\omega_{180})}$.

$1 + h(j\omega_{180}) = 0 \Rightarrow \pm j\omega_{180}$ er poler i det lukkede systemet. Svingefrekvensen blir ω_{180}, avleses som $\omega_{180} \approx 0.022$ rad/s.

e)



Figur 3: Nyquistkurve for prosessen

f) Vi bruker tabell 1.1, linje 2. Ser at vi trenger K_{pk} og T_k. Fra c) har vi at $K_{pk} = K_p + \Delta K = 6 + 7.8 = 13.8$ dB=4.9. T_k er periodetida for stående svingning: $\omega_{180} = \frac{2\pi}{T_k} \Rightarrow T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \approx \frac{6.28}{0.022} = 285$. Tabell 1.1 gir da $K_p = 0.45 \cdot 4.91 = 2.2$ og $T_i = \frac{285}{1.2} = 237.5$.

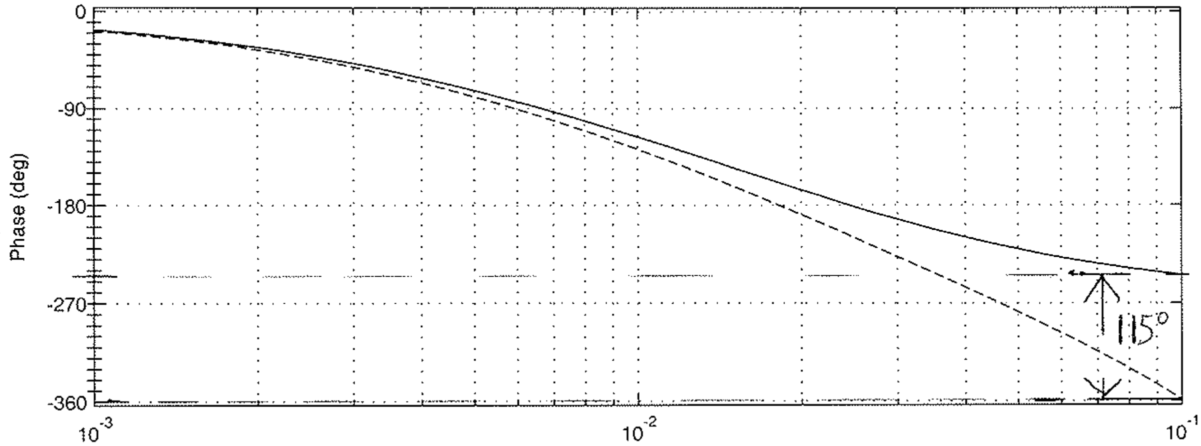
g) Vi må finne $\frac{e}{v}(s) = \frac{h(s)}{1 + h_r(s)h(s)}$. $v(t)$ er en rampefunksjon. Dermed har vi $L(v(t)) = \frac{1}{s^2}$. Får følgende grenseverdi:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0}\left(se(s)\frac{1}{s^2}\right) = \lim_{s \to 0}\left(\frac{1}{s}\frac{-1}{\frac{1}{h(s)} + h_r(s)}\right) = \lim_{s \to 0}\left(\frac{1}{s}\frac{-1}{\frac{(\dots)(\dots)}{(\dots)} + K_p\frac{T_i s + 1}{T_i s}}\right)$$

$$= \lim_{s \to 0}\left(\frac{1}{s}\frac{-T_i s}{\frac{(\dots)(\dots)(T_i s)}{(\dots)} + K_p(T_i s + 1)}\right) = -\frac{T_i}{K_p}$$

Hvis $v(t)$ i stedet hadde vært lik $\mu_1(t)$, forsvinner $\frac{1}{s}$ i formelen over, og $\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$.

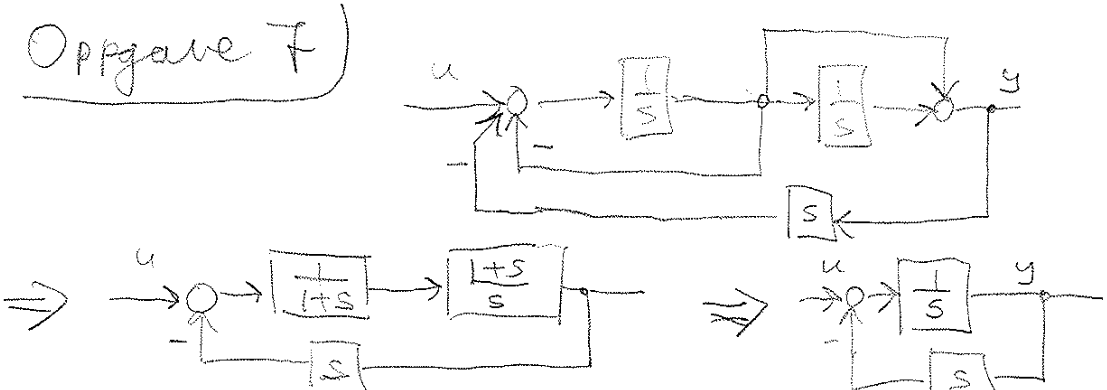
1h)



Tidsforsinkelsens fasebidrag ved frekvensen 0.1 er $-115°$, avlest i Bodediagram. Vi har $-\omega\tau = -115 \cdot \frac{\pi}{180}$ med $\omega = 0.1$. Dette gir $\tau = \frac{1150}{180} \cdot \pi = 20.07 \Rightarrow \underline{\underline{\tau = 20}}$

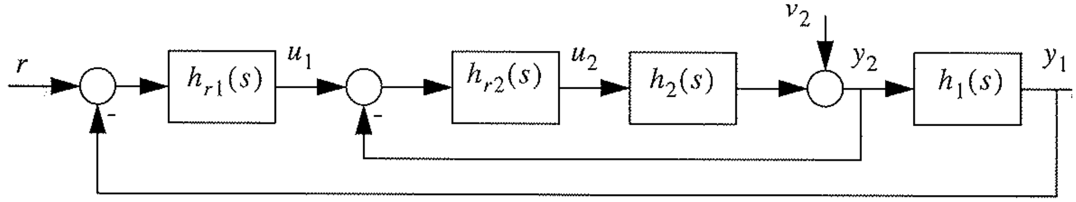
1i) Ved diskret regulering ivaretar vi virkninga av holdeelementet i en tilnærmet kontinuerlig analyse ved å introdusere en blokk med en tidsforsinkelse lik halve tastetida. Fra 1h) veit vi at $\frac{T}{2} = 20$ i dette tilfellet $\Rightarrow T = 40$. Den minste tidskonstanten i prosessen er 50. T bør være flere ganger mindre enn denne, og er derfor for stor.

Oppgave 7



$$\Rightarrow \; u \rightarrow \boxed{\frac{\frac{1}{s}}{1 + s \cdot \frac{1}{s}}} \rightarrow y \;\Rightarrow\; \frac{y}{u}(s) = \underline{\underline{\frac{1}{2s}}}$$

Oppgave 3 a)



3 b) Ved riktig valg av $h_{r2}(s)$ kan man oppnå en reguleringsgrad $N_2(s) = \dfrac{1}{1+h_2(s)h_{r2}(s)} \ll 1$ for den indre sløyfen, noe som undertrykker forstyrrelsen kraftig <u>før</u> den virker på den ytre sløyfen. Riktig $h_{r2}(s)$ gir også $M_2(s) = \dfrac{h_2(s)h_{r2}(s)}{1+h_2(s)h_{r2}(s)} \approx 1$ med stor båndbredde, noe som bedrer egenskapene til den ytre sløyfen. Dermed: Høyere båndbredde, (og/eller) bedre stabilitets-egenskaper for det samlede system.

Oppgave 4)

$$h_0(s) = \frac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)} = \frac{t_0(s)}{n_0(s)}$$

som leder til (det karakteristiske) polynomet

$$n_0(s) + t_0(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K$$

Rouths kriterium brukt på dette polynomet gir følgende talltabell

$$\begin{array}{ll}
T_1 T_2 & ,\quad 1 \\
T_1 + T_2 & ,\quad K \\
\dfrac{T_1 + T_2 - K T_1 T_2}{T_1 + T_2} & \\
K &
\end{array}$$

Alle elementene i først kolonne av Rouths talltabell skal ha samme fortegn. Antar vi at både T_1 og T_2 er positive, blir betingelsen for stabilitet

$$0 < K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$$

(Dette er et eksempel fra læreboka; eks. 8.9 i 2002-utgaven)

Oppgave 5

a) For roterende bevegelser har vi momentbalansen

$$T = I\ddot{\theta} \tag{1}$$

der T er moment, I er treghetsmoment og $\ddot{\theta}$ er vinkelakselerasjon.

Tyngdens komponent langs sirkelbua er: $mg\sin\theta$. Momentbidraget blir da: $Lmg\sin\theta$ $(\text{kraft} \cdot \text{arm})$. Når vi tar med friksjonen blir summen av momentene som virker mot bevegelsen:

$$-D\dot{\theta} - Lmg\sin\theta \tag{2}$$

I dette tilfellet er treghetsmomentet i likning (1) $I = mL^2$. Dermed gir likning (1) og (2) følgende:

$$mL^2\ddot{\theta} = -D\dot{\theta} - Lmg\sin\theta \tag{3}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta - \frac{D}{mL^2}\dot{\theta}$$

Dette kan også modelleres ved bruk av Newtons 2. lov Akselerasjonen blir $a = L\ddot{\theta}$. Kraft som følge av dreiemomentet blir $-\frac{D\dot{\theta}}{L}$. Dermed: $F = ma \Leftrightarrow -mg\sin\theta - \frac{D\dot{\theta}}{L} = mL\ddot{\theta}$.

Leddet med $\sin\theta$ gjør likning (3) ulineær.

b) Setter $x_1(t) = \theta(t)$ og $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$. Dermed kan likning (3) skrives på formen:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{D}{mL^2}x_2$$

Her er $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ og $\underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{D}{mL^2}x_2 \end{bmatrix}$.

c) Vi skal linearisere rundt likevektspunktet $x_1 = 0$. Det gir modellen på formen $\underline{\dot{x}} = A\underline{x}$

$$\text{med } A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x_1=0} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos x_1 & -\frac{D}{mL^2} \end{bmatrix}\right|_{x_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{D}{mL^2} \end{bmatrix}.$$

d) Laplacetransformen med bruk av formel (V.3) gir:

$$s\underline{x}(s) - \underline{x}_0 = A\underline{x}(s)$$
$$(sI - A)\underline{x}(s) = \underline{x}_0$$
$$\underline{x}(s) = (sI - A)^{-1}\underline{x}_0$$

$$\text{Her er } (sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{L} & s + \frac{D}{mL^2} \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} s + \frac{D}{mL^2} & 1 \\ -\frac{g}{L} & s \end{bmatrix}.$$

Vi har $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_0}{L} \end{bmatrix}$. Merk at vi må regne om til vinkelhastighet. Målinga blir: $\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}$.

Dette gir:

$$\theta(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{D}{mL^2} & 1 \\ -\frac{g}{L} & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_0}{L} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}}$$

$$\theta(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} s + \frac{D}{mL^2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_0}{L} \end{bmatrix} = \frac{v_0/L}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \qquad (5)$$

e) Vi skriver likning (5) som et andre ordens system, se side 10 i eksamensoppgava:

$$\theta(s) = \frac{v_0/L}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Dette gir udempet resonansfrekvens $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ og relativ dempningsfaktor

$$\zeta = \frac{D}{mL^2 \cdot 2\omega_0} = \frac{D}{2mgL}\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{D}{2mg^{1/2}L^{3/2}}$$