Oppgave 1

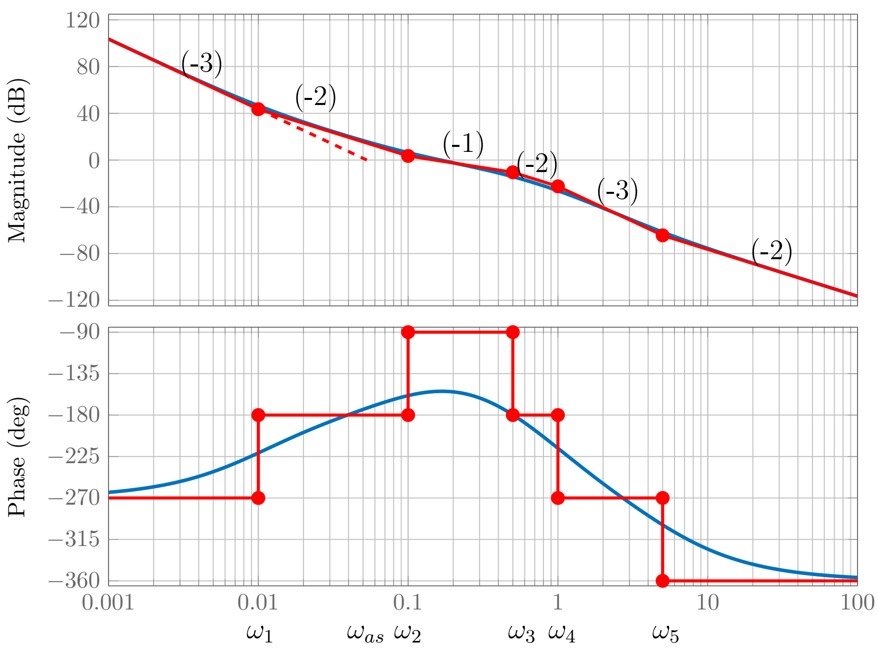
a) Dette er en PID-regulator med begrenset derivat virkning. Den høyre delen $(\frac{1+T_d s}{1+\alpha T_d s})$ er en begrenset derivat regulator, PD, denne skal stabilisere systemet. Den venstre delen $(\frac{1+T_i s}{T_i s})$ er en integral regulator, PI, denne skal fjerne stasjonært avvik.

b) Vi har $h_0 = \frac{t_0}{n_0}$, vi får dermed $M(s) = \frac{t_0}{n_0+t_0}$. Grad$(n_0) = 5$. Grad$(t_0) = 3$. Grad$(n_0 + t_0)$ $=$ max(5,3) $= 5$.

c) Prosessen, h_u, har to poler i origo. Ved Z-N skal man øke K_p i lukket sløyfe med proporsjonal regulator til man når stabilitetsgrensa. Men dette lukkede systemet er på stabilitetsgrensa for alle $K_p \Rightarrow$ Z-N kan ikke brukes.

SIMC-metoden forutsetter åpent stabil prosess, h_u, slik at vi kan få en sprang respons på den. Men prosessen h_u er ustabil (to poler i origo) $\Rightarrow$ SIMC kan ikke brukes.

d) Prosessen, h_u, har meget negativt faseforløp. Integral-virkningen gir et ekstra bidrag på -90^o i gal retning. Ved å sette T_i svært stor, kan man begrense dette bidraget til bare lave frekvenser. Ulempen er at det tar lang tid før stasjonært avvik blir fjerna.



Figur 1: Oppgave 1e Bode-diagram

e) Vi har merket de forskjellige knekkfrekvensene i figur 1, med målingene er oppgitt her

Merkelapp	Frekvens	Periode	Parameter
ω_1	0.01	100	T_i
ω_{as}	0.053	-	-
ω_2	0.1	10	T_d
ω_3	0.5	2	αT_d
ω_4	1	1	T_1
ω_5	5	0.2	T_2

Vi har kommet frem til parameterne som følger. Først så har vi oppgitt at $T_2 = 0.2$. Videre så vet vi at vi skal ha to perioder der den ene skal være lik den andre multiplisert med $\alpha = 0.2$. Vi ser at dette tilsvarer frekvensene ω_3 og ω_4, hvilket gir $T_d = 10$. Da gjenstår det to perioder $\frac{1}{\omega_1} = 100$ og $\frac{1}{\omega_4} = 1$ som tilsvarer T_i og T_1. Vi vet at T_i må være stor, og vi får dermed $T_i = 100$ og $T_1 = 1$.

Til slutt skal vi finne K_p. Vi vet at asymptoten ved lave frekvenser skjærer 0-db linjen i $\omega_{as} = K^{\frac{1}{q}}$, der q er antall integrasjoner og vi har $K = \frac{K_p}{T_i}$. Dermed får vi $K_p = T_i \omega_{as}^3 = 100 \times 0.053^3 = 0.15$. (Her godtar vi måleunøyaktigheter på $\omega_{as} \in [0.045, 0.06]$ hvilket tilsvarer $K_p \in [0.009, 0.021]$.)

f) Se figur 1. Legg merke til siste knekk: $|h_0|$ opp, $\angle h_0$ ned. Dette skyldes leddet $(1 - T_2 s)$ i teller, hvilket gjør at vi har et ikke-minimum fase system, "negativt nullpunkt".

g) Den er for oscillatorisk. ψ er under 30°, skulle gjerne vært over 45°. $|N|_{\max}$ er godt over 6 dB, burde vært max 6 dB. Det vil si vi er for nært stabilitetsgrensa, noe den oscillatoriske responsen også indikerer.

h) Av bode og nichols-diagrammet ser vi at systemet kan bli ustabilt ikke bare for en stor K_p, men også en liten K_p.

i) Det er 3 integratorer i $h_0 \Rightarrow y$ får null stasjonært avvik for sprang, rampe og parabel.

j) Det er bare en integrator foran angrepspunktet til v, dermed får vi kun null stasjonært-avvik ved sprang. Ikke for rampe og parabel. (Oppgave i) og j) kan også løses ved bruk av sluttverditeoremet)

k) Leser av $\omega_c \approx 0.15$. Vi har da kravet $\omega_c \frac{T}{2} < 1^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}}$. Dermed får vi tastetid

$$T < \frac{2}{\omega_c} \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{0.15} \times \frac{\pi}{180} = 0.23. \tag{1}$$

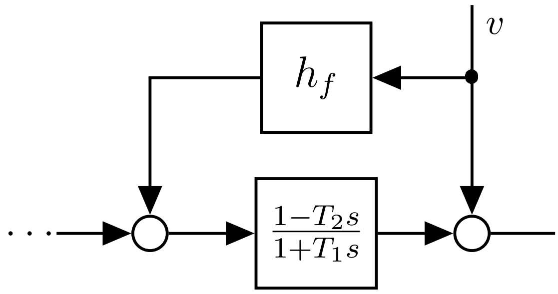
l) Se figur 2 for plassering av foroverkoblingen. En ideell foroverkobling krever

$$h_{f,i}\frac{1-T_2s}{1+T_1s}+1=0 \tag{2}$$

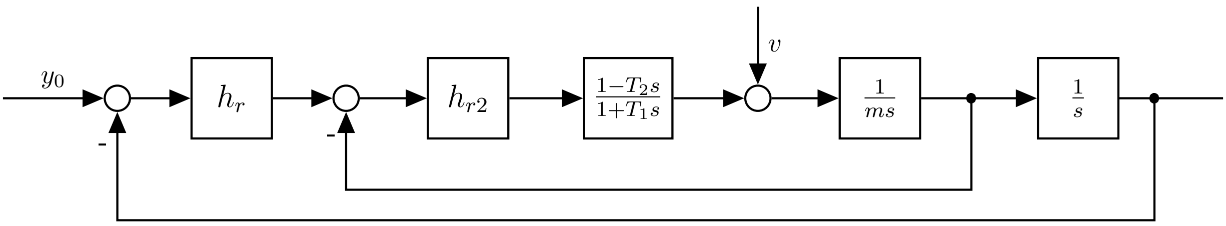
siden vi kun er ute etter en statisk foroverkobling kan vi sett $s=0$ i uttrykket over, og vi får dermed en konstant foroverkobling

$$h_{f,i}=K_{f,i}=-1. \tag{3}$$

Denne foroverkoblingen kan kun motvirke konstante forstyrrelser.



Figur 2: Oppgave 1 l, foroverkobling



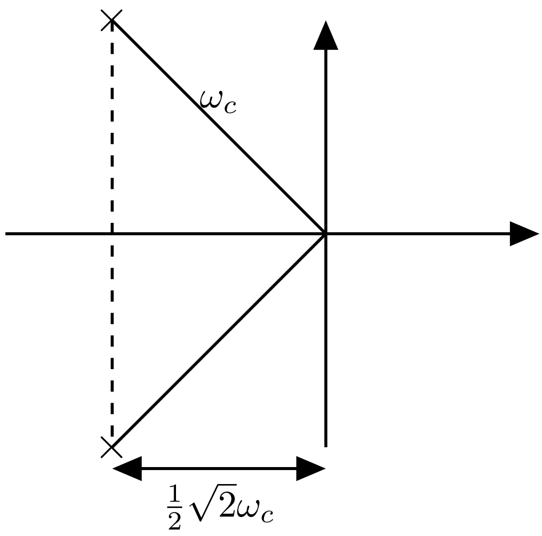
Figur 3: Oppgave 1 m, tilbakekobling

m) Se figur 3 for plassering av tilbakekoblingen. Fordeler med en slik løsning

- Raskere motvirkning av forstyrrelsen
- Raskere regulering ⇒ høyere båndbredde
- Økt stabilitetsmargin.

n) Ja. Foroverkobling kan velges uavhengig av tilbakekoblings-valg.

Oppgave 2



Figur 4: Plassering av polene i Butterworth lavpassfilter med orden 2

Polene i filteret ligger med avstand ω_c fra origo, plassert som en regulær mangekant med 4 sider symmetrisk om den imaginære aksen. Vi har $\omega_c = 100$ og $\xi = \sin\varphi = sin 45^{\text{o}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

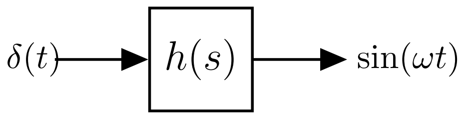
$$
\begin{aligned}
h(s) &= \frac{1}{(\frac{s}{\omega_c})^2 + 2\xi\frac{s}{\omega_c} + 1} \\
&= \frac{1}{(\frac{s}{100})^2 + \sqrt{2}\frac{s}{100} + 1} \\
&= \frac{100^2}{s^2 + 100\sqrt{2}s + 100^2}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

En anvendelse av lavpassfilteret er støyfiltrering i reguleringssystem.

Oppgave 3 Otto Smith-regulator er gunstig når vi har en tidsforsinkelse, $e^{-\tau s}$, inne i lukket sløyfe. Den store fordelen er at Otto Smith-regulatoren gjør om dette til et reguleringsproblem hvor tidforsinkelsen, $e^{-\tau s}$, flyttes ut av lukket sløyfe (v.27).

Vi ser at prosessmodellen inngår i Otto Smith-regulatoren, hvilket er det vi mener med modellbasert regulator.

Oppgave 4



Figur 5: Oppgave 4a

a) Fra formelsamlingen har vi at impulsresponsen til $\frac{K\omega_0^2}{s^2+\omega_0^2}$ er $h(t) = K\omega_0 sin(\omega_0 t)$. Dersom vi sammenlikner uttrykket $h(t)$ med $\sin \omega t$ får vi at $\omega_0 = \omega$ og $K = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{\omega}$. Det gir transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{\frac{1}{\omega}\omega^2}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{5}$$

b) Her finnes det flere løsninger. Dersom vi bruker (V2.23) får:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ og } c = \begin{bmatrix} \omega & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Løsning 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \text{ og } c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Løsning 3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ og } c = \begin{bmatrix} 0 & \omega \end{bmatrix} \tag{8}$$

Løsning 4:

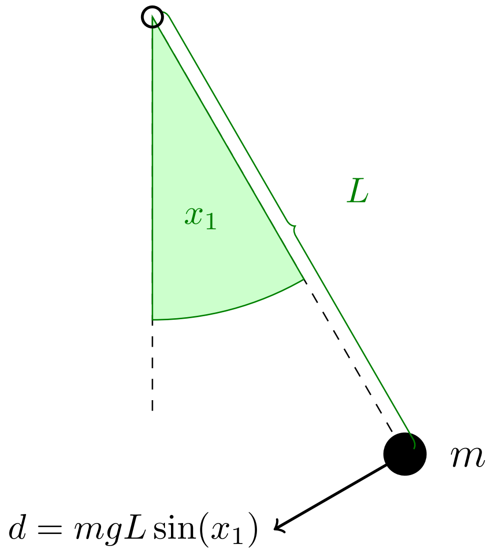
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ og } c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

c) Først, må vi finne en modell for pendelen. Vi starter med Netwons lov for rotasjon $d = J\dot{\omega}$, der d er dreiemoment (kraft til å forandre et legemes rotasjon om sin egen akse), J er tregheten til massen og $\dot{\omega}$ er den deriverte av vinkelhastigheten. Videre har vi oppgitt i formelsamlingen at tregheten til en masse på en vektløs stang er $J = mL^2$ (V.6). Til slutt vet vi at dreiemomentet om pendelen er gitt som kraft multiplisert med arm, hvilket gir $d = mg\sin(x_1) \times L$, se figur 6. Setter vi sammen disse likningene får vi

$$\begin{aligned} d &= J\ddot{x}_1 \\ -mgL\sin(x_1) &= mL^2\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 &= -\frac{g}{L}\sin(x_1) \end{aligned} \tag{10}$$

Utvider vi denne modellen med en ekstra tilsdand $x_2 = \dot{x}_1$ får vi

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\sin(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = f(x) \tag{11}$$



Figur 6: Oppgave 4c, pendel

Likevektspunktet til dette systemet kan vi finne ved å sette $\dot{x} = 0$. Vi ser da at vi får $x_2 = 0$ og $\sin(x_1) = 0$ hvilket gir $x_1 = 0$ eller $x_1 = \pi$. Likevektspunktet $(\pi, 0)$ er ustabilt og vi velger derfor likevektspunktet $(0, 0)$ som arbeidspunkt.

Vi kan nå linearisere modellen rundt arbeidspunktet $(0, 0)$.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix}_{x^*=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x_1) & 1 \end{bmatrix}_{x^*=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Det lineariserte autonome modellen blir dermed:

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x \tag{13}$$

med A gitt i likning (12), og Δx er x linearisert om arbeidspunktet x^*.

d) Vi finner først $x(s)$ og bruker invers laplace for å finne $x_1(t)$.

$$\begin{aligned} x(s) = (sI - A)^{-1}x_0 &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{L} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} x_{20} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{14}$$

Vi har dermed at $x_1(s) = \frac{x_{20}}{s^2+\frac{g}{L}}$, sammenlikner vi dette med impulsresponsen til $K\omega\sin(\omega t)$ (fra formelsamlingen) ser vi at $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ og $K = x_{20}\frac{L}{g}$. Vi får dermed

$$x_1(t) = x_{20}\sqrt{\frac{L}{g}}\sin(\sqrt{\frac{g}{L}}t). \tag{15}$$

Alternativ løsning (uten bruk av svaret fra forrige oppgave):

Vi vet har $x_2(t)$ har sitt maksimum ved $x_1(t) = 0$. Videre har vi at $x_1(t)$ er sinusformet. Da må $x_2(t)$ være en cosinus funksjon, siden $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$. Vi antar at pendelen svinger med frekvens ω. Dermed kan vi sette opp likningen:

$$x_2(t) = x_{20}\cos(\omega t) \tag{16}$$

Vi kan finne funksjonen for $x_1(t)$ ved å integrere dette uttrykket:

$$x_1(t) = \int x_2(t)dt = \frac{x_{20}}{\omega}\sin(\omega t) \tag{17}$$

Dette stemmer svaret fra likning (15) når vi vet at frekvensen pendelen svinger med er $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Oppgave 5

a) I 2. ordens leddet har alle koeffisienter samme fortegn (fra Rouths kriterium i formelsamlingen) hvilket vil si at alle røtter er i v.h.p. Dermed gjenstår kun 1. ordens leddet som har en pol i høyre halvplan. Systemet har dermed totalt en pol i høyre halvplan, $N_p = 1$.

b) Nei, systemet er ustabilt. Vektoren $1+h_0(j\omega)$ har en netto vinkeldreining lik null, $\Delta\angle(1+h_0) = 0$. Fra Nyquist stabilitetskriterium får vi da at antall poler i det lukkede systemet blir

$$N_n = N_p - \frac{\Delta\angle(1+h_0)}{2\pi} = 1. \tag{18}$$

Siden det lukkede systemet har en pol i høyre halvplan så er systemet ustabilt.

c) For at det lukkede systemet skal bli stabilt trenger vektoren $1 + h_0(j\omega)$ en positiv omdreining. Det får vi hvis den venstre løkken i figur 5.1 omslutter punktet (-1,0). Minimum forsterkning vi trenger for å omslutte (-1,0) med venstre løkke er $K_{p,\min} = K_p\frac{1}{0.5} = 2$. Maksimum blir $K_{p,\max} = K_p\frac{1}{0.227} = 4.4$. Stabilitetsgrensene for K_p blir dermed

$$2 < K_p < 4.4 \tag{19}$$

Formelsamling $\boxed{\text{til eksamen 10/6-17}}$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sf(s), \text{ og } \quad \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sf(s) \tag{V.1}$$

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)\big|_{t=0} \quad , \quad \mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)\big|_{t=0} - \dot{f}(t)\big|_{t=0} \tag{V.2}$$

Residuregning: $$f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{ (s-a_i)^m f(s) e^{st} \} \right] \Bigg|_{s=a_i} \tag{V.3}$$

Tidsforsinkelse: $$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \tag{V.4}$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \tag{V.5}$$

Rettlinja bevegelse: $f = ma$, Rotasjon: $d = J\dot{\omega}$; med masse på vektløs stang har vi $J = ml^2$ (V.6)

Ohms lov: $u = Ri$, kondensator (kapasitans): $i = C\frac{du}{dt}$; induktans: $u = L\frac{di}{dt}$ (V.7)

Folding (konvolusjon): $y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau$, $\mathcal{L}[h(t) * u(t)] = h(s)u(s)$ (V.8)

Linearisering:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\bigg|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \boldsymbol{u} \quad , \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots \; \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \tag{V.9}$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \boldsymbol{u}$$

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x), \qquad x = 10^{(x[\text{dB}])/20} \tag{V.10}$$

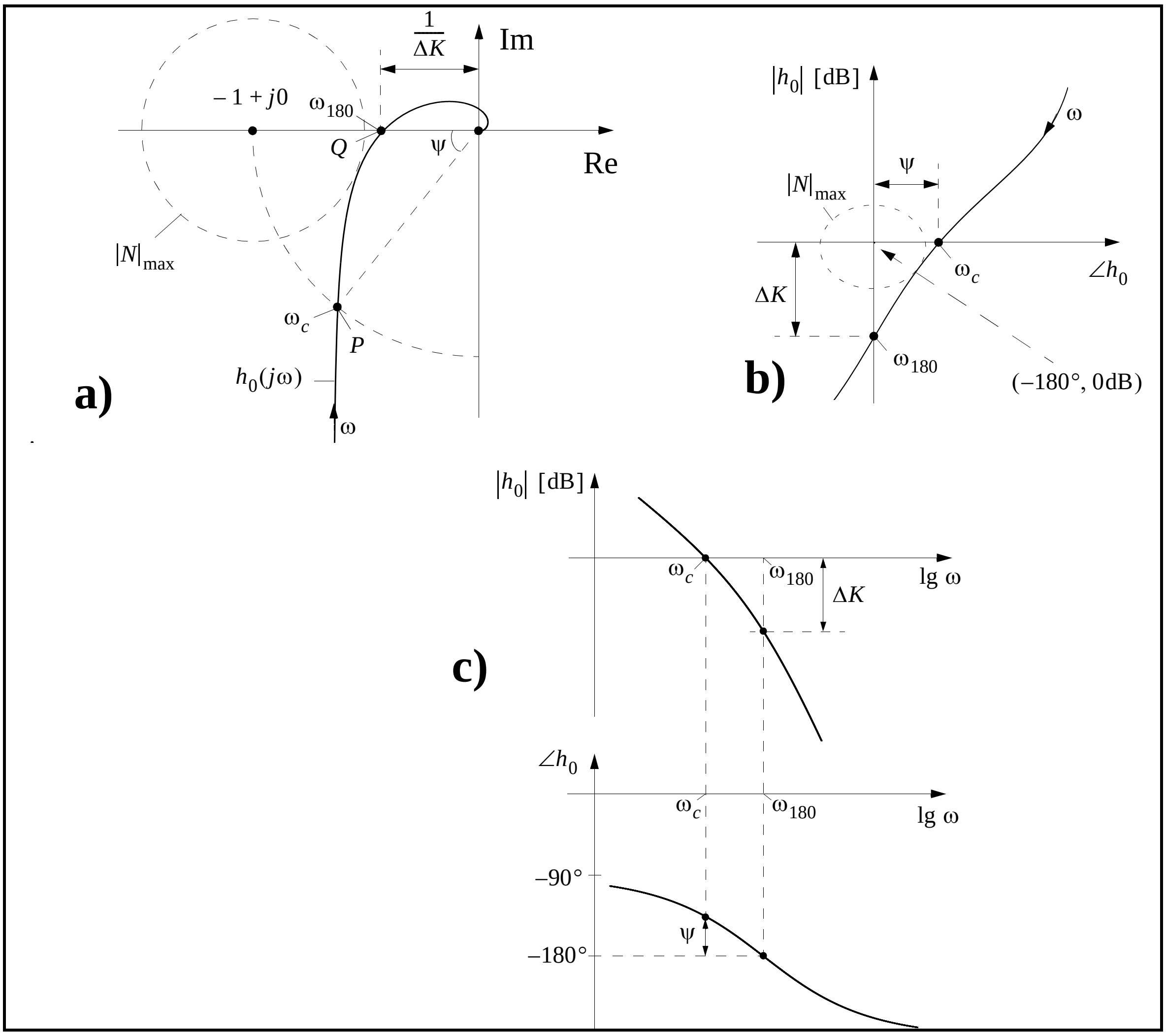
$$N(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)}, \quad M(s) = \frac{h_0}{1 + h_0(s)}, \quad M(s) + N(s) = 1, \quad \frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) \tag{V.11}$$

Nyquists stabilitetskriterium: Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining (dreieretning er definert positiv *mot* urviseren) lik

$$\Delta\angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \qquad \text{når } \omega \text{ går fra} -\infty \text{ til } \infty \tag{V.12}$$

N_n er antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoplede) system. $N_n = 0$ kreves for stabilt system.

(V.13)



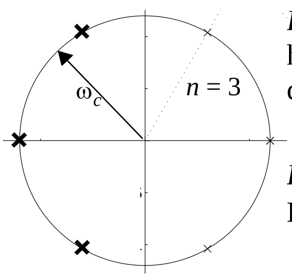
$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180°), \qquad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})| \quad , \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \tag{V.14}$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2} \tag{V.15}$$

Ziegler-Nichols’ lukket-sløyfe-regler:

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$0.85T_k$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$

$$, \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \tag{V.16}$$



Butterworth lavpassfilter av orden n: De n polene i $h(s)$ ligger på hjørnene i venstre halvdel av en regulær mangekant med *2n* sider, der mangekanten er plassert slik at den ligger symmetrisk om Im-aksen, og hvor avstanden fra origo og ut til hvert hjørne (= pol) er filterets knekkfrekvens ω_c. (V.17)

Høypassfilter med knekkfrekvens ω_c: Lag først lavpassfilter med ω_c. Erstatt så alle s i transferfunksjonen med ω_c^2/s . (V.18)

Røtter er bare i v.h.p. for polynom $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$, hvis og bare hvis alle koeffisienter har samme fortegn.

For 3. ordens polynom $\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ kreves *i tillegg* $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3$ (V.19)

Skogestads "SIMC" åpen-sløyfe-metode for PI-innstilling:

Sett på et sprang. Anta at prosessen $\approx h_u = \dfrac{Ke^{-\tau s}}{1 + T_1 s}$. Mål (dvs. anslå) T_1, K og τ ut fra responsen.

Velg så $K_p = \dfrac{T_1}{K(\tau + T_L)}$ og $T_i = \min(T_1, 4(T_L + \tau))$, hvor T_L er ønsket tidskonstant i responsen til det lukkede systemet. T_L bør velges som $T_L > 0.3\tau$, f. eks. $T_L = \tau$. (V.20)

PI-regulator: $h_r = K_p \dfrac{1 + T_i s}{T_i s}$ (V.21)

begrenset PD-regulator: $h_r = K_p \dfrac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}$ (V.22)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdot & \cdot & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(V.23)}$$

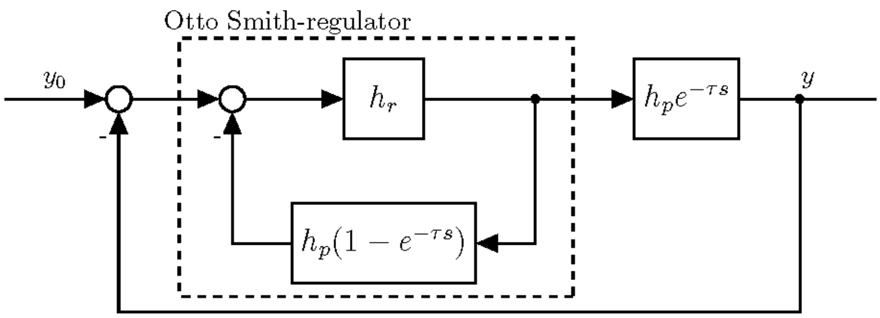
$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{n-1} \end{bmatrix}$$

gir $$\frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} \qquad \text{(V.24)}$$

Diskret regulator: Alle s erstattes med $\dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator. (V.25)

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører
tilnærma en ekstra tidsforsinkelse = $T/2$ i sløyfetransferfunksjonen. (V.26)

(V.27)



Sammenhenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

		1. orden (eks.: RC-krets)	**Høyere orden**
1.	Differensiallikning	$\dot{x} = ax + bu \qquad (\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$
2.	Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(t=0) \ + \ \frac{b}{s-a}u(s)$	$\mathbf{x}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(t=0) \ + \ (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)$
3.	Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) \qquad + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$	$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \qquad + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$ [1)
4.	Dekopling	(Trivielt:) $A = a = \lambda =$ skalar	$A = M\Lambda M^{-1} \quad , \quad e^{At} = Me^{\Lambda t}M^{-1} \quad , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5.	Rekkeutvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \ldots$	$e^{\boldsymbol{A}t} = \Phi(t) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!} + \boldsymbol{A}^3\frac{t^3}{3!} + \ldots$ [2)
6.	$(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} (s)$	$e^{at} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a} \qquad (\ \frac{1}{T}e^{-t/T} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+Ts})$	$e^{\boldsymbol{A}t} = \Phi(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$
7.	Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \qquad y(s) = c\frac{b}{s-a}u(s) \qquad h(s) = \frac{cb}{s-a}$	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) \qquad H(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$
8.	Impulsrespons	$h(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} h(s) \qquad h(t) = cbe^{at}$	[3) $h(t) = \boldsymbol{c}^T e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{b}$ [4) $\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} h(s) = \boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$

[1) $\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B} * \boldsymbol{u}(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}(s)$

[2) NB: $e^{\boldsymbol{A}t} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$, bortsett fra når $A = \Lambda$ er diagonal.

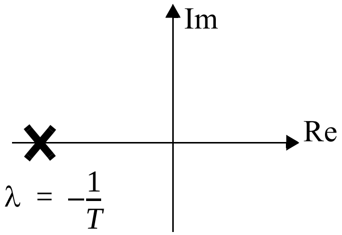
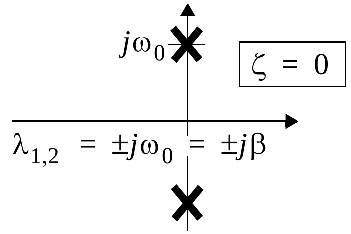
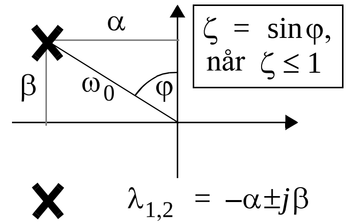
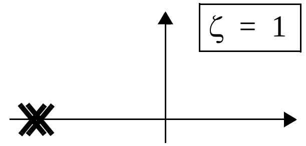
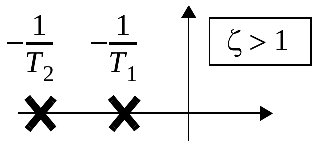
[3) Antar nå at u og y er skalare.

[4) Hvis y og u er skalare og $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ så har vi fra 3. linje at $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

Tilstandsrom: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$. Egenverdier følger av: $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$

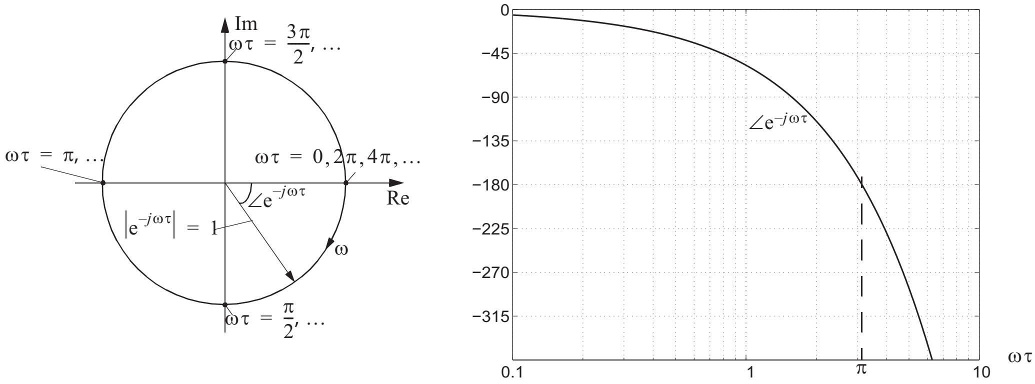
Laplace: $H(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\frac{\text{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{B} \quad \Rightarrow$ Polene gitt av nevneren: $|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$.

$\Rightarrow$ poler = egenverdier

Orden	Transferfunksjon *h(s)*	Poler	Impuls- og sprangresponser
1. orden	$h(s) = \dfrac{K}{1+Ts} = \dfrac{\frac{K}{T}}{s+\frac{1}{T}} = \dfrac{-K\lambda}{s-\lambda}$	 $\lambda = -\dfrac{1}{T}$	impulsrespons: $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \dfrac{K}{T}e^{-t/T}$ sprangrespons: $k(t) = L^{-1}\left[\dfrac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau$ $= K(1-e^{-t/T})$
2. orden, $\zeta = 0$	$\dfrac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2+1} = \dfrac{K\omega_0^2}{s^2+\omega_0^2} = \dfrac{K\lambda_1\lambda_2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}$	 $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0 = \pm j\beta$	$h(t) = K\omega_0\sin\omega_0 t$ $k(t) = K(1-\cos\omega_0 t)$
2. orden, $\zeta < 1$	$\dfrac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2+2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)+1} = \dfrac{K\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2} = \dfrac{K\lambda_1\lambda_2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}$ $= \dfrac{K(\alpha^2+\beta^2)}{s^2+2\alpha s+(\alpha^2+\beta^2)}$, $\boxed{\omega_0 = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$	 $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$	$h(t) = K\dfrac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t$ $k(t) = K\left(1-\dfrac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\cos(\beta t-\varphi)\right)$
2. orden, $\zeta = 1$	$\dfrac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2+2\left(\frac{s}{\omega_0}\right)+1} = \dfrac{K\omega_0^2}{(s+\omega_0)^2} = \dfrac{K\lambda^2}{(s-\lambda)^2} = \dfrac{\frac{K}{T^2}}{\left(s+\frac{1}{T}\right)^2}$	 $\lambda_{1,2} = -\alpha = -\omega_0 = -\dfrac{1}{T}$	$h(t) = \dfrac{K}{T^2}te^{-t/T}$ $k(t) = K\left(1-\left[1+\dfrac{t}{T}\right]e^{-t/T}\right)$
2. orden, $\zeta > 1$	$\dfrac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} = \dfrac{\frac{K}{T_1T_2}}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)} = \dfrac{K\lambda_1\lambda_2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}$		$h(t) = \dfrac{K}{T_1-T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}}-e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$ $k(t) = K\left(1+\dfrac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}-\dfrac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}\ ,\quad \zeta = \frac{-(\lambda_1+\lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\text{, gjelder for } \textit{alle } \lambda \neq 0}$$

Utdrag fra lærebok, tre sider



Figur 6.17 Nyquist-diagram og faseforløp i Bodediagram for $e^{-j\omega\tau}$

6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram (= bode-diagram)

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\ldots)}{(\ldots)(a+s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\ldots)}{(\ldots)(1+T's)}$$

der $K' = K/a$ og $T' = 1/a$. Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i $h(s)$. Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\ldots)}{(\ldots)(c+bs+as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\ldots)}{(\ldots)\left(1+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

der $K' = K/c$ og $\omega_0 = \sqrt{c/a}$. Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for $s = j0$. Forsterkning i alle ledd "samles" da i en felles K', fra nå av bare kalt K.

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ($\omega \ll 1$). (Vi symboliserer "liten ω" med å skrive $\omega \ll 1$.) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har q integrasjoner i $h(s)$, $q > 0$, har vi

$$h(j\omega)_{\omega\ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q} \quad , \quad |h(j\omega)|_{\omega\ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q} \quad , \quad \angle h(j\omega)_{\omega\ll 1} \approx (-q)\cdot 90^\circ$$

q kan selvsagt være lik 0, da er vi over i *Tilfelle b)* nedenfor.

Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning $-q$ og skjære 0-dB-linjen i $\omega = K^{1/q}$. Dermed kan vi fastlegge venstre del av $|h(j\omega)|_{as}$ og 0-dB-linjen (subskript $_{as}$ betyr "asymptotisk verdi av". Se forøvrig figur 6.18).

Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i $(-q)\cdot 90^\circ$.

Tilfelle b): Ingen reine integrasjoner i $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi $|h(j\omega)|_{\omega\ll 1} = K$, dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i K [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i 0°.

3. Videre amplitudeforløp

   Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

   Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen ω_0 i et resonansledd.

   Finn helningen p på asymptoten til leddet du betrakter. $p = 1$ for nullpunktsledd, -1 for tidskonstantledd og -2 for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning $+\,p$.

   Sett "minste knekkfrekvens" = etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

   Videre faseforløp

   Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med $p\cdot 90^\circ$ målt fra forrige asymptote.

   For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen $1 - T_i s$ gir 90° knekk *ned*, ikke opp.

EKSEMPEL 6.6: Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd

Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(1+T_2 s)(1+T_3 s)}{s(1+T_1 s)(1+T_4 s)^2} \tag{6.29}$$

der $K = 3$, $T_1 = 40$, $T_2 = 10$, $T_3 = 2$, $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg|h(j\omega)| = &\lg K + \lg|1+j\omega T_2| + \lg|1+j\omega T_3| \\ &- \lg\omega - \lg|1+j\omega T_1| - 2\lg|1+j\omega T_4| \end{aligned} \tag{6.30}$$

Figur 6.18 Bodediagram for $h(s)$, eksakt diagram, og asymptotisk diagram