



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

lørdag 30. mai 2015

Tid: 0900 - 1300

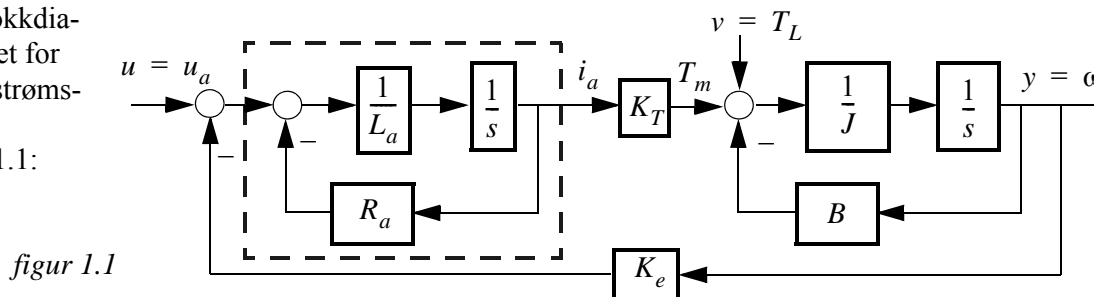
Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Tips: bruk blyant!

Oppgave 1 (22 %)

Gitt blokkdiagrammet for en likestrømsmotor i figur 1.1:



- a) (6 %) Sett først $v = T_L = 0$.

Finn matrisene A , b , c^T i en tilstandsrommodell med $\dot{x} = Ax + bu$, $y = c^T x$.

- b) (6 %) Vis at transferfunksjonen fra det eksternt påsatte belastningsmoment T_L til ankerstrøm i_a

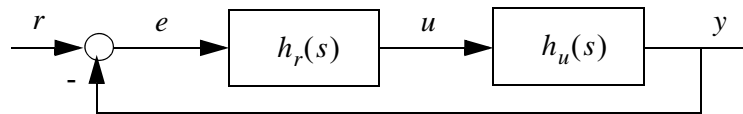
$$\text{er } \frac{i_a}{T_L}(s) = h_{iT}(s) = \frac{-K_e}{JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + K_T K_e + BR_a} \quad (1.1)$$

(Merk notasjon: T_L er ikke en tidskonstant; T brukes ofte for "Torque" = dreiemoment.)

- c) (4 %) Du antar at tidskonstanten i motorens elektriske del (innrammet) er så liten at den kan ignoreres. Hva blir da den forenklede utgave av ligning (1.1)?
- d) (4 %) Vi tar igjen utgangspunkt i den opprinnelige ligning (1.1). Finn uttrykk for likestrømsmotorens udempede resonansfrekvens ω_0 og relative dempningskonstant ζ .
- e) (2 %) Hvis motoren skulle vært helt tapsfri, måtte to parametre vært = 0. Hvilke? Hvordan ville da motoren da ha oppført seg ved et sprang i u_a ? Kort, kvalitativt og verbalt svar.

Oppgave 2 (32 %)

En prosess beskrevet ved transferfunksjonen $h_u(s)$ skal reguleres som vist i figuren til høyre.



$$\text{Vi har } h_u(s) = \frac{2(1 - 0.5s)}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} \quad (2.1)$$

- a) (6 %) Hva kaller vi en prosess med en teller av denne typen i transferfunksjonen? Hva er problematisk med en slik prosess? Hva er karakteristisk for dens sprangrespons? Er prosessen åpent stabil?

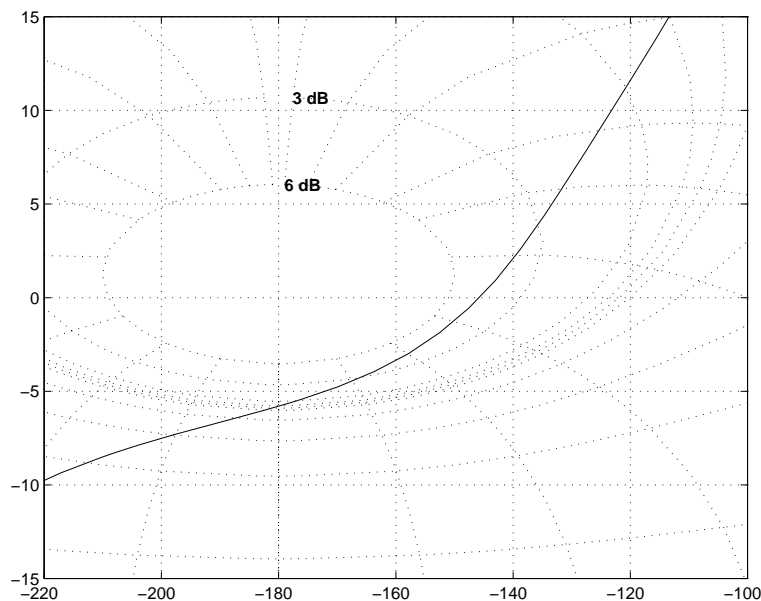
I figur 2.1 neste side (+ en ekstra kopi bakerst hvis du trenger den) er vist Bode-diagram for $h_u(s)$.

- b) (7 %) Tegn inn asymptoter for $|h_u|$ og $\angle h_u$ i Bode-diagrammet og legg arket ved besvarelsen. Det skal framgå av det påtegnede arket hvordan du har fastlagt asymptotene, det er ikke tilstrekkelig å bare "smyge dem inntil" de oppgitte kurver.

- c) (7 %) Regulatortransferfunksjonen er $h_r(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$.

Bestem regulatorparametrene ved hjelp av Bode-diagrammet og Ziegler-Nichols' metode.

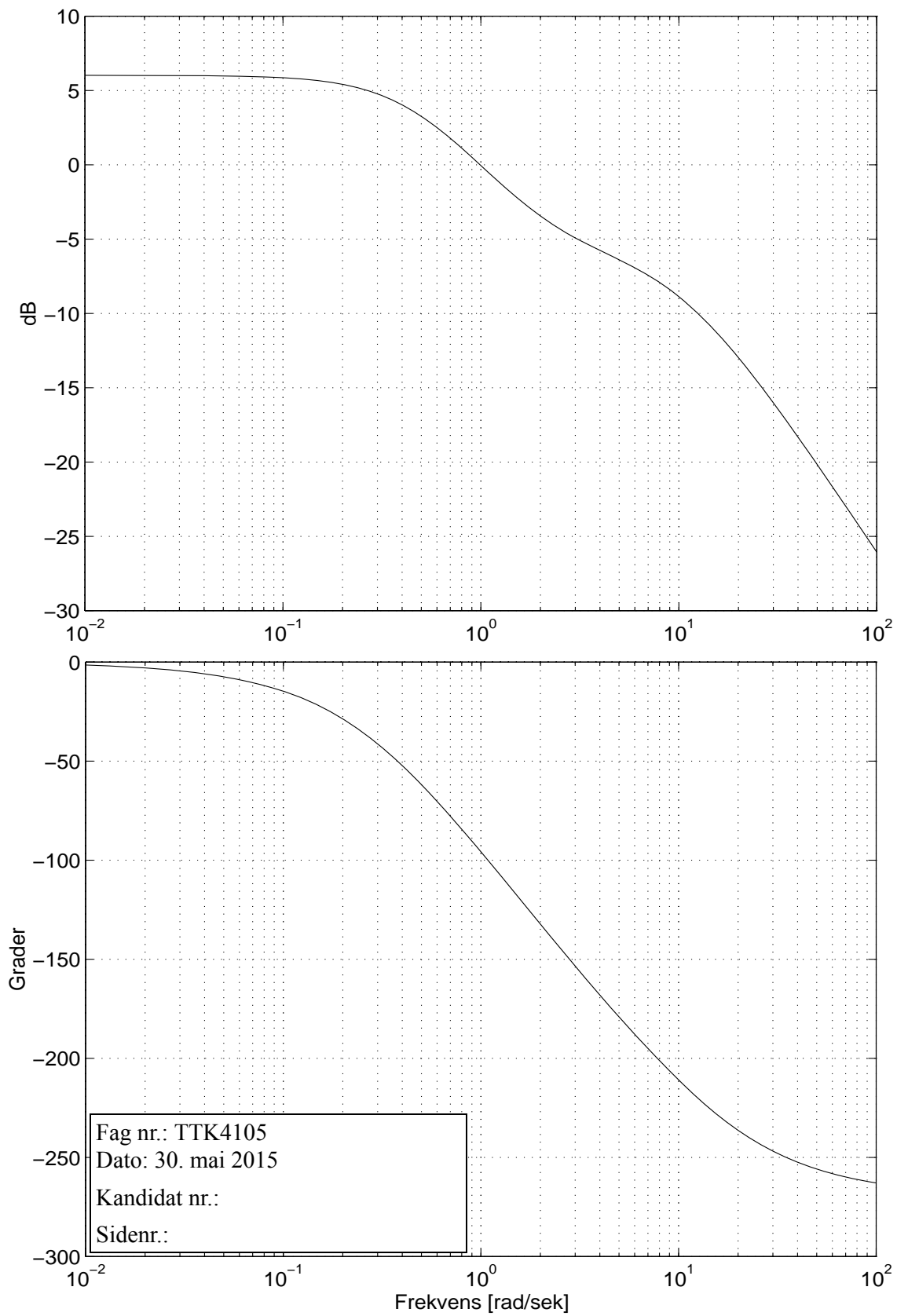
- d) (5 %) Gitt Nichols-diagrammet for prosessen med ferdig innstilt regulator, se figur til høyre. Les av fase- og forsterkningsmargin, og finn $|N(j\omega)|_{\max}$. Hvis vi i stedet godtar en $|N(j\omega)|_{\max} = 6 \text{ dB}$, hvor mye kan vi da øke forsterkningen K_p ? Les av og tegn i det vedlagte diagram og innlevér som en del av besvarelsen.



- e) (5 %) Referansen $r(t)$ er nå en rampefunksjon med Laplacetransform $y_0(s) = 1/s^2$. Finn det stasjonære avviket $e(t = \infty)$.

Fag nr.: TTK4105
Dato: 30. mai 2015
Kandidat nr.:
Sidenr.:

- f) (2 %) h_r skal realiseres som en diskret regulator. Det oppgis at kryssfrekvensen til $h_r h_u$ ligger fast, $\omega_c = 1.3$. Finn en tastetid T som gir 2° mindre fasemargin. Er 2° akseptabelt?

*figur 2.1*

Oppgave 3 (9 %)

En konstant befolkning av N individer utsettes for en smittsom sykdom. Ingen dør av den, men ingen blir friske når de først har fått den. De som er syke (antallet kaller vi x), forblir smittsomme. En modell for sykdomsutvikling i et slikt system er den såkalte *logistiske ligninga*,

$$\dot{x} = c(N - x)x, \text{ hvor } c \text{ er en konstant} \quad (3.1)$$

- a) (2 %) Hvorfor er dette et ulineært system? Er det et autonomt system? Begrunn svarene.
- b) (3%) Anta at x er liten, dvs. svært få personer er smittet. Lineariser systemet for det tilfellet. Hva slags tidsforløp får du for små x ?
- c) (4 %) Hva skjer med $x(t)$ når $t \rightarrow \infty$?
Benytt dette og svaret fra b) til å tegne en grov skisse av tidsforløpet (du skal *ikke* løse (3.1)). Sett begynnelsesverdien ved $t = 0$ til en x_0 som forutsettes « N », altså bare noen få syke individer.

Oppgave 4 (16%)

Et fartøy med masse m utsettes for et press fra vinden, en forstyrrelse v [N]. Vi betrakter bare bevegelse i én dimensjon. Fartøyet skal holdes fast på posisjonen $y = y_0$ tross vinden. Det brukes et sett med propeller, som gir en motkraft u [N]. Vi forutsetter så lave hastigheter at vi kan se bort fra friksjon i vannet. Vi skal regulere med både tilbakekopling (seriekompensasjon) og foroverkopling.

- a) (4 %) Du skal tegne et blokkdiagram for reguleringsystemet. I dette inngår blokkene h_f , h_r , h_v , h_u .
- b) (4 %) Det er en viss treghet i pådragsorganet. Det må da inkorporeres i prosessmodellen h_u . Pådragsorganet modelleres som en 1. ordens prosess med forsterkning K og tidskonstant T . Hva blir h_u ? (Tips: det er blant annet to integratorer i nevner.) Hva blir h_v ?
- c) (5 %) Finn den ideelle forverkopling $h_{fi}(s)$. Hva blir en mer realistisk $h_f(s)$? Hva blir den *statistiske* (og enda enklere) foroverkopling, og hva slags forstyrrelse v kan den motvirke?
- d) (3 %) Seriekompensatoren h_u i tilbakekoplinga kan verken være en proporsjonalregulator eller en PI-regulator. Hvorfor ikke? Hva må til?

Oppgave 5 (21 %)

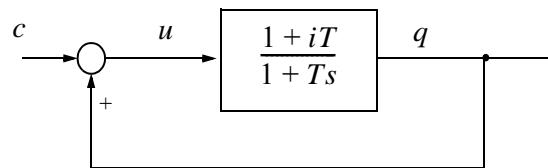
Betrakt et lån x [\$] med rentesats i [1/år] (dvs. 5% rente uttrykkes her som 0.05) og tilbakebetalingstid T [år]. Låntaker betaler da en kontinuerlig pengestrøm q [\$/\$år], *gjeldsbetjeninga*:

$$q(t) = \left(i + \frac{1}{T}\right)x(t) \quad (5.1)$$

Lånet avtar gjennom nedbetaling i følge ligninga $\dot{x} = -\frac{1}{T}x$ (5.2)

Vi skal anvende disse enkle sammenhengene til å lage en modell av et finansielt pyramidespill. En skurk låner kontinuerlig en pengestrøm $u(t)$ [\$/\$år] for å finansiere sitt eget forbruk $c(t)$ [\$/\$år] pluss gjeldsbetjening på sine allerede eksisterende lån $x(t)$. Vi har $u = c + q$.

- a) (4 %) Vis at da får vi følgende blokkdiagram:



- b) (4 %) Nyquistkurven for dette systemet blir enkel: en sirkel. Tegn den riktig plassert i det komplekse plan. Angi skjæringspunkt med Re-aksen og dreieretning for økende ω . (Tips: Nyquist forutsetter negativ tilbakekopling, så her må blokkdiagrammet omformes noe, ved å bytte fortegn på den åpne sløyfes transferfunksjon.)

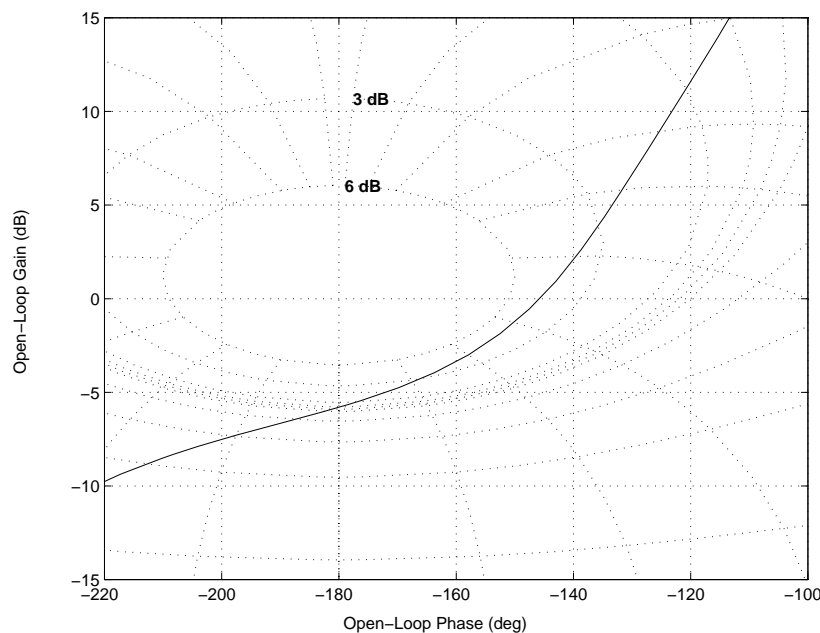
- c) (3 %) Er systemet åpent stabilt?
Vis ved hjelp av grafen og Nyquists stabilitetskriterium at det lukkede systemet er ustabilt for alle $i > 0$. Hva betyr dreieretninga (for økende ω) i dette tilfellet?

- d) (3 %) Vis at transferfunksjonen

$$\frac{x}{c}(s) = h(s) = \frac{1}{s - i} \quad (5.3)$$

- e) (3.5 %) Anta at skurken har et voksende personlig forbruk $c(t) = e^{\alpha t}$, der $0 < \alpha < i$. Finn $x(t)$ når det oppgis at $x(0) = 0$, altså ingen gjeld ved start.

- f) (3.5 %) Finn den samme $x(t)$ når $\alpha = i$.



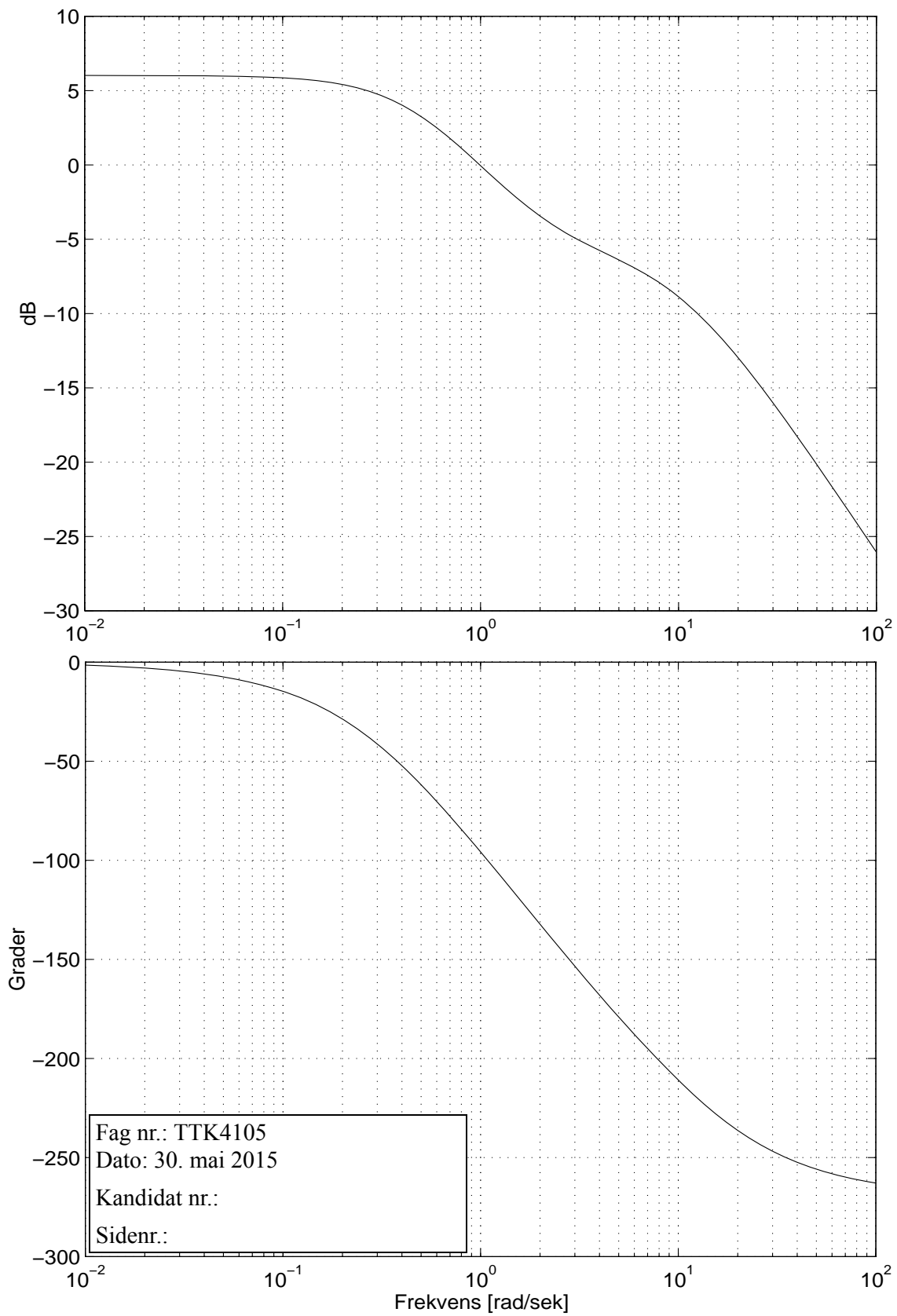
(Ekstra Nicholsdiagram til oppgave 2)

Fag nr.: TTK4105

Dato: 30. mai 2015

Kandidat nr.:

Sidenr.:



(Ekstra Bode-diagram til oppgave 2)

Formelsamling

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \text{ og } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{ (s-a_i)^m f(s) e^{st} \} \right] \bigg|_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma, \text{ Rotasjon: } d = J\dot{\omega}; \text{ med masse p a vektlos stang har vi } J = ml^2 \quad (\text{V.6})$$

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t) * u(t)] = h(s) u(s) \quad (\text{V.7})$$

$$\begin{aligned} \text{Linearisering: } \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u} \\ \mathbf{A} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right] \bigg|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x), \quad x = 10^{(x[\text{dB}])/20} \quad (\text{V.9})$$

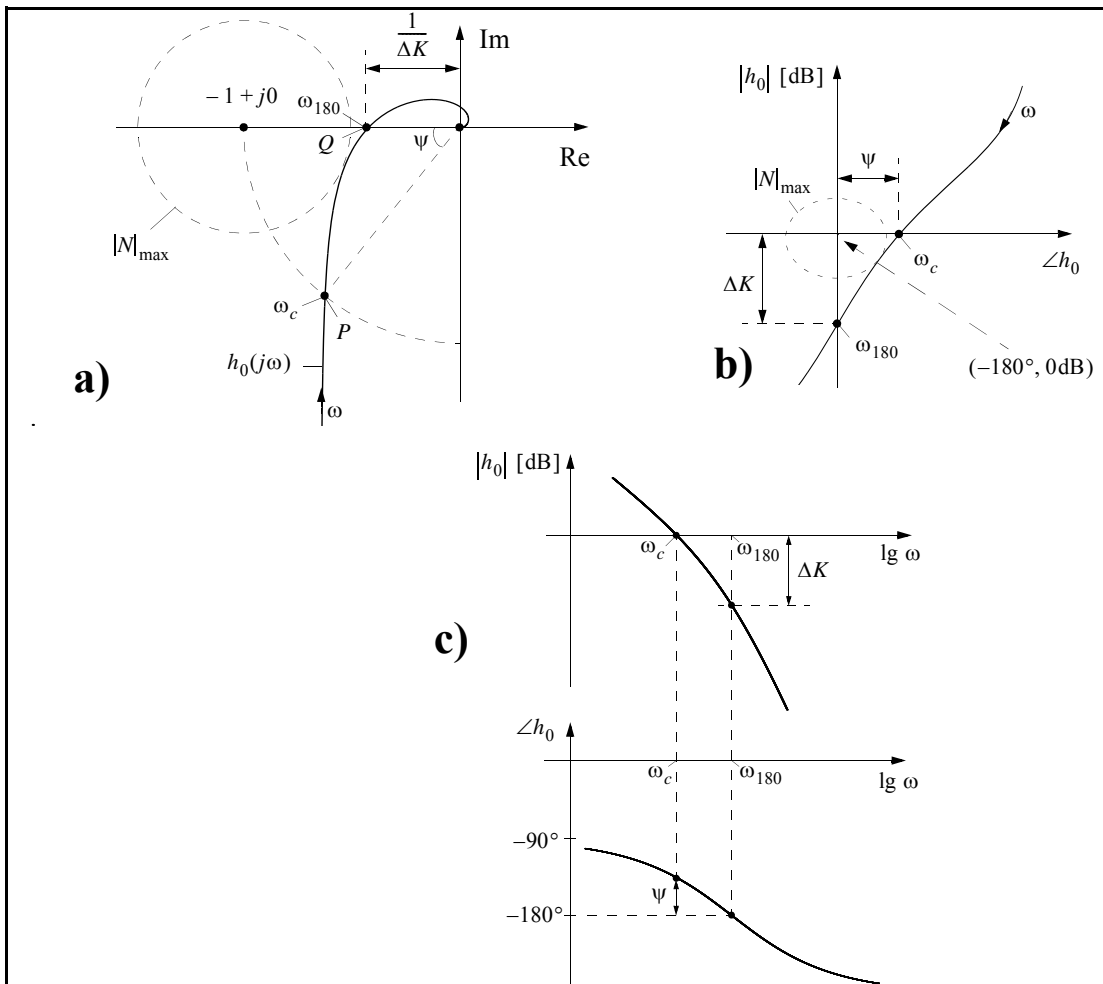
$$N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)}, \quad M(s) = \frac{h_0}{1+h_0(s)}, \quad M(s) + N(s) = 1, \quad \frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) \quad (\text{V.10})$$

Nyquists stabilitetskriterium: Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ f r en netto vinkeldreining (dreieretning er definert positiv *mot* urviseren) lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.11})$$

N_n er antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoplete) system. $N_n = 0$ kreves for stabilt system.

(V.12)



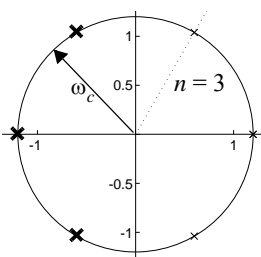
$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180^\circ), \quad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})|, \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \quad (V.13)$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2} \quad (V.14)$$

Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-regler:

| Regulator | K_p | T_i | T_d |
|------------|--------------|-----------|-----------|
| P | $0.5K_{pk}$ | ∞ | 0 |
| PI | $0.45K_{pk}$ | $0.85T_k$ | 0 |
| PID | $0.6K_{pk}$ | $0.5T_k$ | $0.12T_k$ |

$$, \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \quad (V.15)$$



Butterworth lavpassfilter av orden n: De n polene i $h(s)$ ligger på hjørnene i venstre halvdel av en regulær mangekant med $2n$ sider, der mangekanten er plassert slik at den ligger symmetrisk om Im-aksen, og hvor avstanden fra origo og ut til hvert hjørne (= pol) er filterets knekkfrekvens ω_c . (V.16)

Høypassfilter med knekkfrekvens ω_c : Lag først lavpassfilter med ω_c . Erstatt så alle s i transferfunksjonen med ω_c^2/s . (V.17)

Røtter bare i v.h.p. for polynom $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$: hvis og bare hvis alle koeffisienter har samme fortegn.

For 3. ordens polynom $\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ kreves i tillegg $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3$ (V.18)

Skogestads "SIMC" åpen-sløyfe-regel for PI-innstilling (bruker notasjonen fra notatet om dette):

Sett på et sprang. Anta at prosessen $\approx h_u = \frac{K e^{-\theta s}}{1 + T_1 s}$. Mål (dvs. anslå) T_1 , K og θ ut fra responsen.

Velg så $K_p = \frac{T_1}{K(\theta + \tau_c)}$ og $T_i = \min(T_1, 4(\theta + \tau_c))$, hvor τ_c er (V.19)

ønsket tidskonstant i responsen til det lukkede systemet. τ_c bør velges som $\tau_c > 0.3\theta$, f. eks. $\tau_c = \theta$.

PI-regulator: $h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$ (V.20)

begrenset PD-regulator: $h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}$ (V.21)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdot & \cdot & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.22})$$

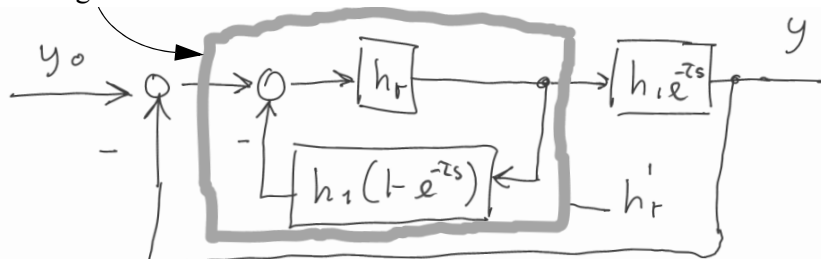
$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdot \cdot \cdot \ \rho_{n-1}]$$

$$\text{gir} \quad \frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1} s^{n-1} + \dots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (\text{V.23})$$

Diskret regulator *eller filter*: Alle s erstattes med $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator. (V.24)

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører tilnærma en ekstra tidsforsinkelse $= T/2$ i sløyfetransferfunksjonen. (V.25)

Otto Smith-regulator: (V.26)



Sammenhenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

| | 1. orden | (eks.: RC-krets) | Høyere orden |
|--|---|--|---|
| 1. Differensiallikning | $\dot{x} = ax + bu$ | $(\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$ | $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ |
| 2. Laplace | $x(s) = \frac{1}{s-a}x(0) + \frac{b}{s-a}u(s)$ | | $\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$ |
| 3. Løsning | $x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$ | | $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$ |
| 4. Dekopling | (Trivielt:) $A = a = \lambda = \text{skalar}$ | | $A = M\Lambda M^{-1}, \quad e^{\mathbf{A}t} = M e^{\Lambda t} M^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ |
| 5. Rekkeutvikling | $e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots$ | | $e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$ |
| 6. $(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (s)$ | $e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad (\frac{1}{T}e^{-t/T} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1+Ts})$ | | $e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ |
| 7. Fra $u(s)$ til $y(s)$ | $y = cx \quad y(s) = c \frac{b}{s-a}u(s) \quad h(s) = \frac{cb}{s-a}$ | | $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s) \quad H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ |
| 8. Impulsrespons | $h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(s) \quad h(t) = cbe^{at}$ | | ${}^3) h(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \quad {}^4) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$ |

${}^1) \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau)d\tau = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{u}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s)$

${}^2) \text{ NB: } e^{\mathbf{A}t} \neq \{e^{a_{ij}t}\}, \text{ bortsett fra når } A = \Lambda \text{ er diagonal.}$

${}^3) \text{ Antar nå at } u \text{ og } y \text{ er skalare.}$

${}^4) \text{ Hvis } y \text{ og } u \text{ er skalare og } \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \text{ så har vi fra 3. linje at } y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

Tilstandsrom: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u.$

Eigenverdier følger av: $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$

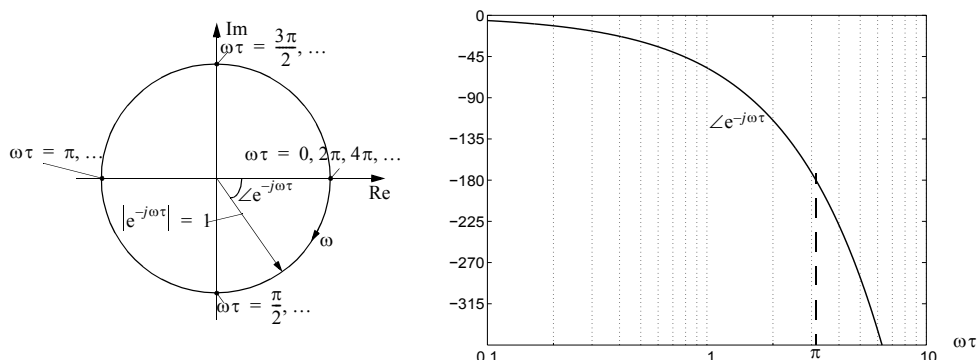
Laplace: $H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}^{\text{adj}}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} \Rightarrow \text{Polene gitt av nevneren: } |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.$

\Rightarrow poler = egenverdier

| Orden | Transferfunksjon $h(s)$ | Poler | Impuls- og sprangresponser |
|--------------------------|--|-------|---|
| 1. orden | $h(s) = \frac{K}{1 + Ts} = \frac{K}{s + \frac{1}{T}} = \frac{-K\lambda}{s - \lambda}$ | | <p>impulsrespons:</p> $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T}e^{-t/T}$ <p>sprangrespons:</p> $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau = K(1 - e^{-t/T})$ |
| 2. orden, $\zeta = 0$ | $\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ | | $h(t) = K\omega_0 \sin \omega_0 t$ $k(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)$ |
| 2. orden, $\zeta < 1$ | $\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $= \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ | | $h(t) = K\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t}\sin \beta t$ $k(t) = K\left(1 - \frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\cos(\beta t - \varphi)\right)$ |
| 2. orden, $\zeta = 1$ | $\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} = \frac{K}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$ | | $h(t) = \frac{K}{T^2}te^{-t/T}$ $k(t) = K\left(1 - \left[1 + \frac{t}{T}\right]e^{-t/T}\right)$ |
| 2. orden, $\zeta > 1$ | $\frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{K}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ | | $h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$ $k(t) = K\left(1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$ |

$$\omega_0 = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}, \quad \zeta = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, \text{ gjelder for } \lambda \neq 0$$

FIGUR 6.17
Nyquist-diagram
og faseforløp i
Bode-diagram
for $e^{-j\omega\tau}$



6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(a + s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)(1 + T's)}$$

der $K' = K/a$ og $T' = 1/a$. Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i $h(s)$. Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(c + bs + as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)\left(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

der $K' = K/c$ og $\omega_0 = \sqrt{c/a}$. Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for $s = j0$. Forsterkning i alle ledd “samles” da i en felles K' , fra nå av bare kalt K .

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ($\omega \ll 1$). (Vi symboliserer “liten ω ” med å skrive $\omega \ll 1$.) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har q integrasjoner i $h(s)$, $q > 0$, har vi

$$h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad |h(j\omega)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q}, \quad \angle h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx (-q) \cdot 90^\circ$$

q kan selvsagt være lik 0, da er vi over i Tilfelle b) nedenfor.

Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning $-q$ og skjære 0-dB-linjen i $\omega = K^{\frac{1}{q}}$. Dermed kan vi fastlegge venstre del av $|h(j\omega)|_{as}$ og 0-dB-linjen (subskript $_{as}$ betyr "asymptotisk verdi av". Se forøvrig figur 6.18).

Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i $(-q) \cdot 90^\circ$.

Tilfelle b): Ingen rene integrasjoner i $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi $|h(j\omega)|_{\omega \ll 1} = K$, dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i K [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i 0° .

3. Videre amplitudeforløp

Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen ω_0 i et resonansledd.

Finn helningen p på asymptoten til leddet du betrakter. $p = 1$ for nullpunktsledd, -1 for tidskonstantledd og -2 for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning $+ p$.

Sett "minste knekkfrekvens" = etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

Videre faseforløp

Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med $p \cdot 90^\circ$ målt fra forrige asymptote.

For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen $1 - T_i s$ gir 90° knekk *ned*, ikke opp.

EKSEMPEL 6.6 Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd

Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_4 s)^2} \quad (6.29)$$

der $K = 3$, $T_1 = 40$, $T_2 = 10$, $T_3 = 2$, $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg|h(j\omega)| &= \lg K + \lg|1 + j\omega T_2| + \lg|1 + j\omega T_3| \\ &\quad - \lg\omega - \lg|1 + j\omega T_1| - 2\lg|1 + j\omega T_4| \end{aligned} \quad (6.30)$$

FIGUR 6.18
Bodediagram for $h(s)$, eksakt diagram, og asymptotisk diagram

