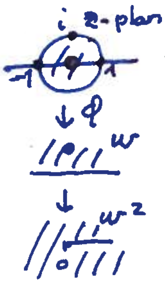
LØSNINGER TMA4175 vår 2010

<u>Oppgave 1</u> En ikke-konstant analytisk funksjon er en åpen avbilding, dvs. $f(D)$ er en åpen mengde i planet og ikke en sirkelbue! (Andre forklaringer baserer seg på Cauchy-Riemann, Maksimum modulusprinsippet, ...)



<u>Oppgave 2</u> $f(z) = \phi(z)^2 - \frac{1}{4}$ der $\phi(\mathbb{D}) = \{w : w > 0\}$ da $\phi(-1) = 0$, $\phi(1) = \infty$, $\phi(i) = i$ og $\phi(0) = 1$. (Sirkler avbildes på generaliserte sirkler.) Altså $w^2 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, og $\underline{\underline{f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]}}$.

<u>Oppgave 3</u> Dersom $p(z)$, grad $m \geq 1$, <u>ikke</u> har en rot, vil $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ være en analytisk funksjon i $\mathbb{C}$.

$$f(z) = \frac{1}{z^m\left(\underset{\neq 0}{a_m} + a_{m-1}\frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^m}\right)}$$

$f(z) \to 0$ når $z \to \infty$. Spesielt er f begrenset og må være en konstant ved Liouville. Altså $f(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Motsigelse! $\left(p(z) = \frac{1}{f(z)} = \infty\right)$ $p(z)$ må ha minst en rot.

<u>Oppgave 4</u>

a) $g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z - z_0)^{m-1} + \cdots$ for $|z - z_0| < r$, og

$$f(z) = \frac{g(z_0)}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!(z - z_0)} + \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} + \cdots$$

$\mathrm{Res}[f(z), z_0]$ er koeff. for $(z - z_0)^{-1}$ og påstanden følger.

b)

$1+z^2=0 \iff z=\pm i$

Residueteoremet gir $\displaystyle\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), i]$ (*)

Her er $f(z) = \dfrac{\operatorname{Log} z}{(z^2+1)^2} = \dfrac{\operatorname{Log} z}{(z+i)^2(z-i)^2}$ slik at

$g(z) = \dfrac{\operatorname{Log} z}{(z+i)^2}$, $m=2$, i (a); $g'(i) = \dfrac{\pi+2i}{8}$.

$\operatorname{Res}[f(z), i] = g'(i) \underset{(*)}{\Longrightarrow} \displaystyle\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \underline{-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}}$

Ved ML-ulikheten følger $I_R = \displaystyle\int_{\frown_R} f(z)\,dz \to 0$ når $R\to\infty$.

Ser litt nærmere på $J = \displaystyle\int_{\frown_\varepsilon} f(z)\,dz$ for ε tilstrekkelig liten:

$$|J| \underset{ML}{\le} \pi\varepsilon \frac{\sqrt{(\log\varepsilon)^2+\pi^2}}{(1-\varepsilon^2)^2} \le \pi\varepsilon\frac{-2\log\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \to 0 \text{ når } \varepsilon\to 0.$$

Altså har vi alt i alt

$$-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4} = \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\log(-x)+i\pi}{(1+x^2)^2}\,dx + E$$

der $E \to 0$ når $\varepsilon\searrow 0$ og $R\nearrow\infty$. Tar vi realdelen på begge sider, får vi

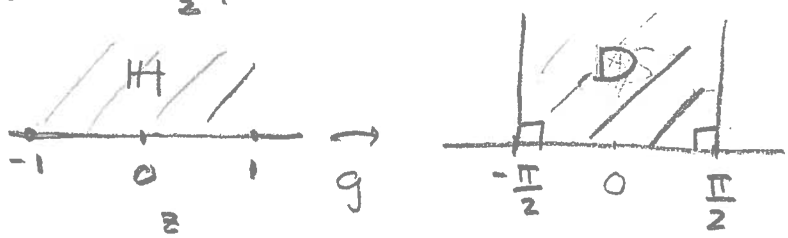
$$-\frac{\pi}{2} = 2\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx \Rightarrow \underline{\underline{\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}}}$$

Kommentar. Til tross for rådet "La $\operatorname{Log} z = \log|z| + i\theta$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$", opererte flere med nøkkelhullkurve som integrasjonsvei. Leder til $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$ som vi også får ved å ta imaginærdel i stedet for realdel i b).

<u>Oppgave 5</u> $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{z-a_k}$ da $P'(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{P(z)}{z-a_k}$, og

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^n \oint_{|z|=R} dz/(z-a_k) = \sum_{k=1}^n 1 = \underline{\underline{n}}$$

Oppgave 6 Dette er den siste øvingsoppgaven med $a = \frac{\pi}{2}$.



$$g(z) = A\int_0^z (t+1)^{-\frac{1}{2}}\,(t^0)\,(t-1)^{-\frac{1}{2}} + B \quad \text{der } \underline{B=0} \ (g(0)=0)$$

$$\left.\begin{aligned} A'\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= A'\arcsin(1) = A'\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \\ A'\int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= A'\arcsin(-1) = -A'\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} A' = 1 \text{ passer}$$

$$\underline{\underline{g(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin z}}$$

<u>Alternativt</u>: f.eks. $z = \sin w$ avbilder D konformt på $\mathbb{H}$. Dette krever litt begrunnelse!

<u>Oppgave 7</u>

La $f(z) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{3^n}\right)$.

Det uendelige produktet konvergerer lokalt uniformt i $\mathbb{C}$. For $|z| \le R$ har vi nemlig

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|}{3^n} \le R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = R\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}R,$$

og det uendelige produktet konvergerer uniformt på alle begrensede mengder. Da $f(z) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N}\left(1-\frac{z}{3^n}\right)$ der $\prod_{n=0}^{N}\left(1-\frac{z}{3^n}\right)$ er analytiske, er f analytisk.

Per definisjon er produktet $f(z)$ lik 0 hvis og bare hvis en av faktorene er lik 0.

Framme!