



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. **7359 4358**, mobil **9189 7045**  
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0945 - 1015 og ca. kl. 1115 - 1145

## Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

tirsdag 24. mai 2005

Tid: 0900 - 1300

### Denne besvarelse teller 70% på karakteren

**Sensur** vil foreligge innen tre uker. Følg med på fagets nettsted for mulig tidligere resultat.

**Hjelpemiddelkombinasjon D:** Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann.

**Prosenttallene** angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

### Oppgave 1 (46 %)

Figur 1.2 viser frekvensresponsen i Bodediagram for en prosess  $h_u(s)$ , med heltrukken linje.

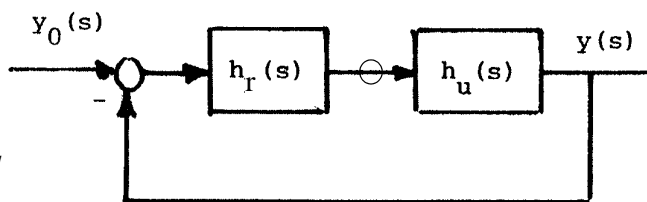
- a) (5 %) Du skal foreslå en transferfunksjon for  $h_u(s)$ . Det oppgis at den inneholder tre ledd med tidskonstanter  $T_1, T_2, T_3$  og en forsterkning  $K$ .

Angi en tallverdi for  $K$ . Tidskonstantene trenger du ikke angi tallverdier for, men du skal oppgi hvilken som er minst, middels og størst. (Tips: Det er to første ordens ledd i nevner, og ett i teller, dessuten er  $h_u(s)$  ikke-minimum-fase.)

NB: Du kan løse resten av oppgave 1 sjøl om du ikke greier dette punktet. :-)

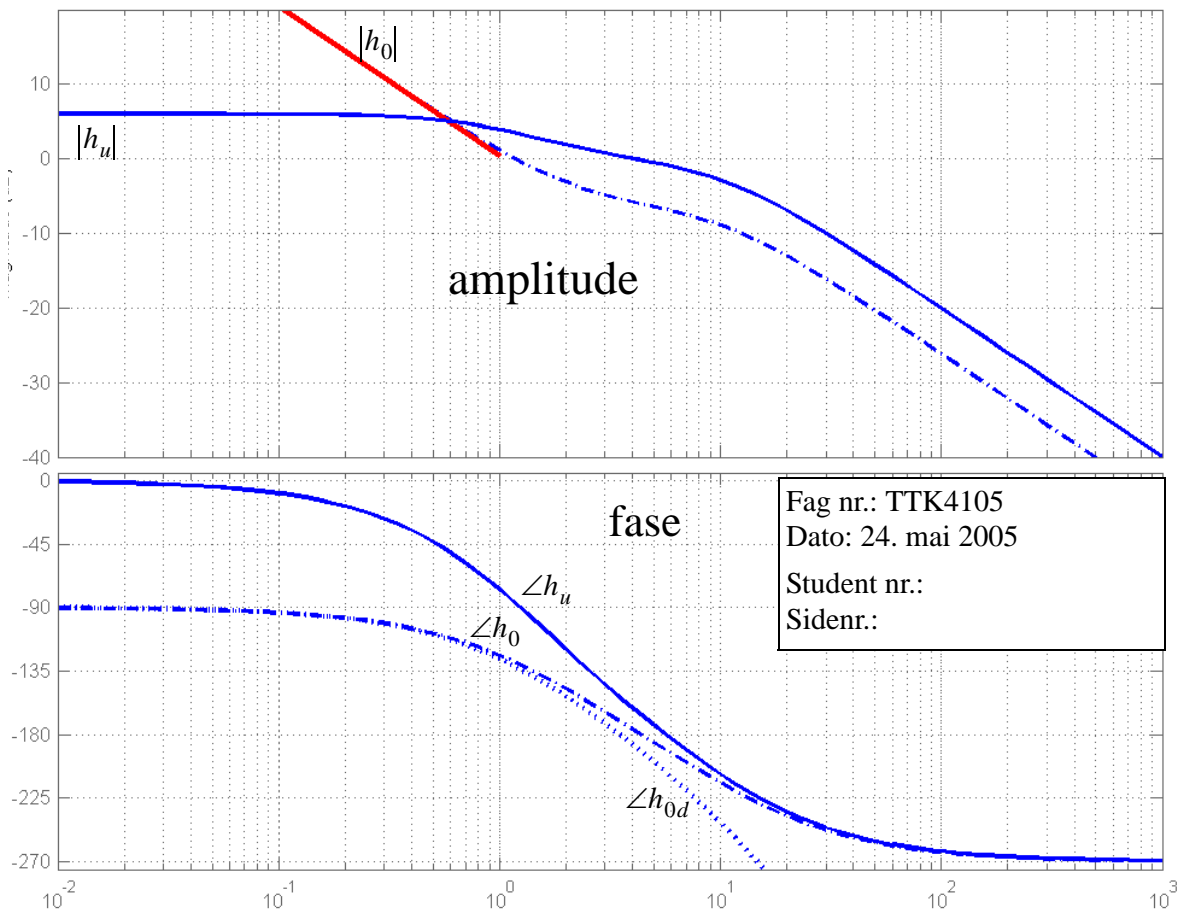
Prosessens ønskes regulert med seriekompensasjon som vist i figur 1.1 .  
(Ignorer inntil videre summasjonspunktet som er antydnet foran  $h_u(s)$ .)

figur 1.1



- b) (2 %) Man prøver seg med en proporsjonalregulator  $h_r(s) = K_p$ , og setter  $K_p = 1$ . Hva er den viktigste grunn til at verdien  $K_p = 1$  er helt uakseptabel? Begrunnet, kort og verbalt svar, som kan finnes ved å studere figur 1.2!

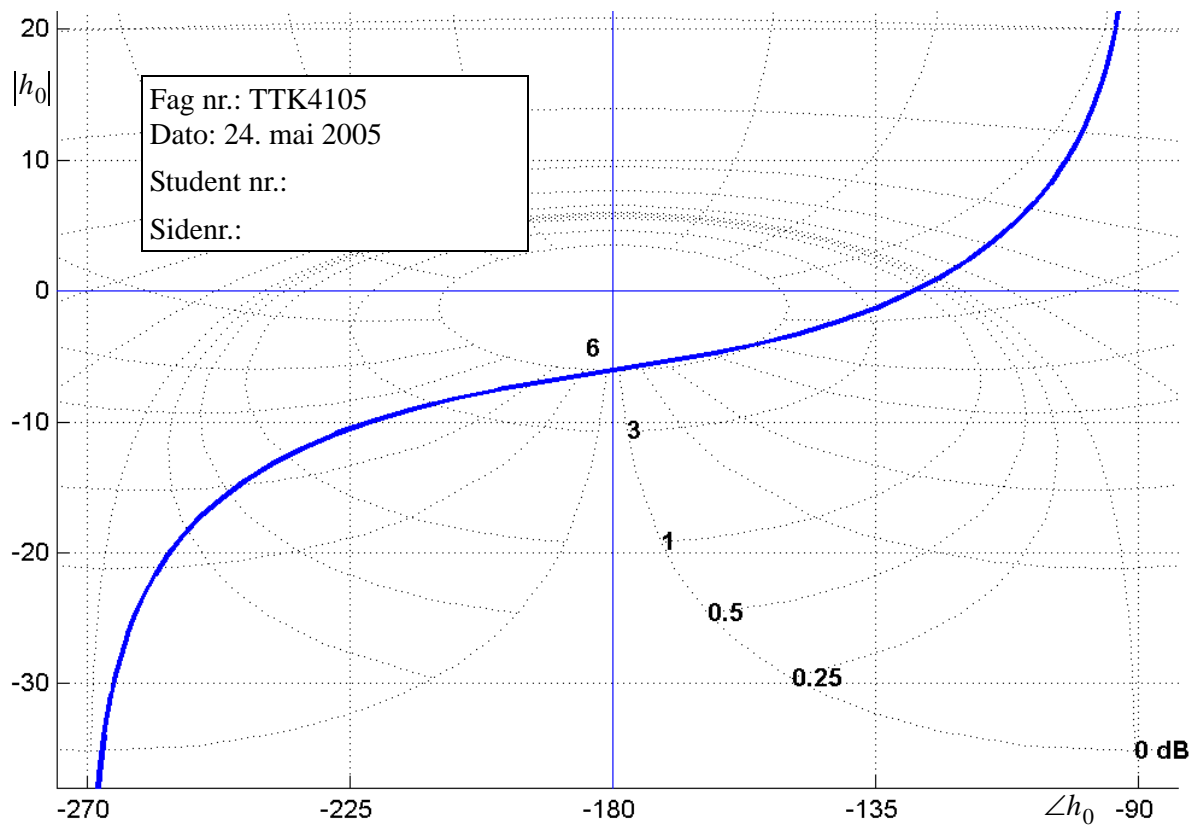
- c) (5 %) Det velges en PI-regulator  $h_r(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$ . Forklar kort prosedyren for å finne  $K_p$  og  $T_i$  ved hjelp av Ziegler-Nichols' regler. Finn så  $K_p$  og  $T_i$ .



figur 1.2

- d) (4 %) De stiplede linjene viser Bodediagram for  $h_0 = h_r h_u$ , med parametre valgt i følge punkt c) ovenfor. Hva blir forsterknings- og fasemargin  $\Delta K$  og  $\psi$  for reguleringssystemet?  $\Delta K$  skal oppgis i [dB].
- e) (4 %) Forklar hvorfor  $\angle h_0$  har  $90^\circ$  dårligere faseforløp enn  $\angle h_u$  ved lave frekvenser. Forklar hvorfor  $\angle h_0$  og  $\angle h_u$  faller sammen ved høye frekvenser.
- f) (4 %) Den venstre del av asymptoten for  $|h_0|$  er vist i figur 1.2. Finn frekvensen hvor denne skjærer 0-dB-linja, uttrykt ved  $K_p$ ,  $T_i$ , og  $K$ . (Den skal altså ikke leses av numerisk.)
- g) (4 %) Tegn inn i figur 1.2 asymptoten for forløpet til  $|N(j\omega)|$  ved frekvenser noe mindre enn  $h_0$ 's kryssfrekvens  $\omega_c$ . (Tips:  $N = 1/(1 + h_0)$ .) Tegn inn asymptoten for frekvenser noe over  $\omega_c$ . Levér dette påtegnede ark som en del av besvarelsen.

- h) (6 %) Se Nichols-diagrammet med  $h_0$  inntegnet, i figur 1.3. Markér hva som er forsterknings- og fasemargin  $\Delta K$  og  $\psi$ . Levér også dette påtegnede ark som en del av besvarelsen. Hva blir maksimalverdien av  $|N(j\omega)|$ ? Er dette en rimelig verdi? Markér verdien, og ved hvilken frekvens den inntreffer, med et tydelig punkt i Bodediagrammet i figur 1.2. Skissér inn  $|N(j\omega)|$  grovt i figur 1.2 basert på dette og asymptotene fra punkt g) ovenfor.



figur 1.3

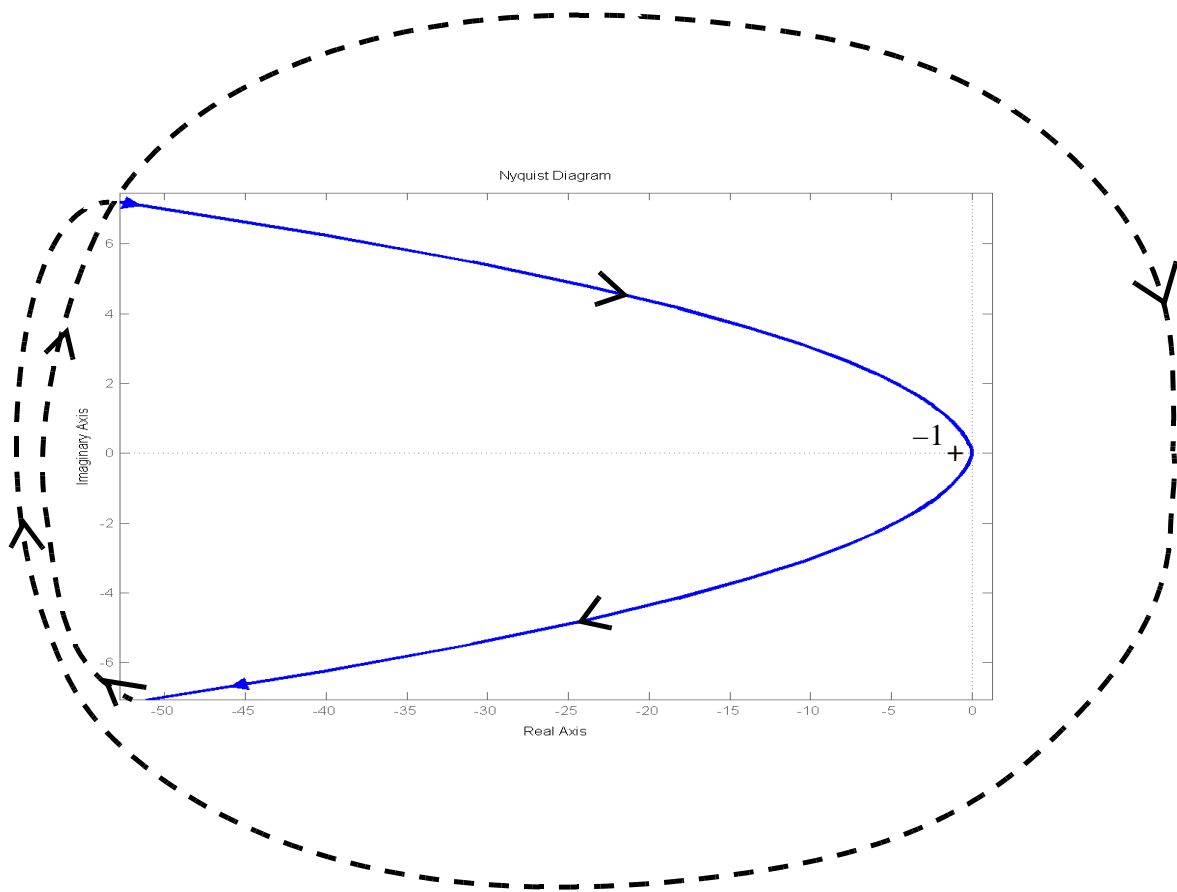
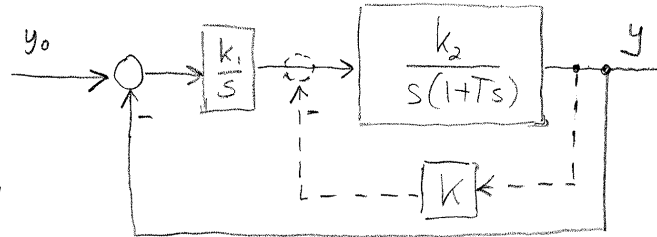
- i) (4 %) **(Generelt spørsmål, ikke knyttet spesielt til denne oppgaven:)**  
 $N$  har to forskjellige tolkninger: *Reguleringsgrad* og *avviksforhold*. Forklar begge begrep. Det kan f.eks. gjøres med utgangspunkt i et enkelt blokkdiagram som inneholder tre blokker, kalt  $h_r$ ,  $h_u$  og  $h_v$ .
- j) (4 %) PI-regulatoren skal implementeres diskret. Den prikkede grafen i figur 1.2 viser det nye faseforløpet  $\angle h_{0d}$  når virkninga av holdelementet er tatt med (tips: virkninga svarer omtrent til en tidsforsinkelse lik halve tastetida). Er tastetida akseptabelt liten? Finn ved hjelp av de oppgitte grafer for  $\angle h_0$  og  $\angle h_{0d}$ , tastetida  $T$  for den diskrete regulatoren. (Tips: det er enklest å måle den størrelsen du trenger ved frekvensen 10.)
- k) (4 %) Anta at det kommer inn en målbar forstyrrelse  $v$  i summasjonspunktet som er antydnet i figur 1.1. Hva blir den ideelle forverkopling  $h_{fi}$ ? (Tips: svaret er ytterst enkelt, og kan finnes meget raskt ...)

**Oppgave 2 (24 %)**

Gitt systemet i figur 2.1. Ignorér den stiplede tilbakekoplinga inntil videre. Konstantene  $k_1$ ,  $k_2$  og  $T$  er alle positive. Vi har

$$h_0(s) = \frac{k_1 k_2}{s^2(1 + Ts)}$$

figur 2.1



figur 2.2

- a) (5 %) Figur 2.2 viser Nyquistkurven (polardiagrammet) for  $h_0$ , for ett sett av parametre  $k_1$ ,  $k_2$  og  $T$ . Grafen vil ha samme kvalitative forløp for alle  $k_1$ ,  $k_2$  og  $T > 0$ . Den stiplede delen av grafen indikerer en uendelig stor "sirkel". Forklar hvorfor det lukkede system i figur 2.1 er ustabilt. Hvor mange poler har det lukkede system i høyre halvplan!
- b) (5 %) Systemet kan stabiliseres ved å innføre en indre tilbakekopling som er indikert stiplet i figur 2.1. Finn ved hjelp av Rouths kriterium for hvilke  $K$  det blir stabilt! (Tips: Det blir stabilt bare  $K$  er stor nok!)

c) (5 %) Anta at  $K$  er slik at systemet er stabilt. Referansen er en rampefunksjon med Laplacetransform  $y_0(s) = 1/s^2$ . Finn det stasjonære avviket  $e(t = \infty)$ .

d) (5 %) Med  $K > 0$ , skal du formulere systemet i figur 2.1 på tilstandsromform. Finn  $A$ ,  $b$ ,  $c^T$  i

$$\dot{x} = Ax + by_0, \quad y = c^T x. \quad (2.1)$$

e) (4 %) Anta at blokka med  $K$  modifiseres slik at utgangen på blokka blir  $Ky|y|$ , ikke  $Ky$  som til nå. Reguleringsystemet er nå ulineært.

På referansen settes signalet  $y_0(t) = \delta(t)$  (en impuls).

Vil systemet noensinne komme til ro i  $y = 0$ ?

Vil  $y$  svinge seg ut mot uendelig amplitude?

(Du skal gjøre enkle verbale betraktninger her, uten linearisering. Se dette punktet i sammenheng med punkt b) ovenfor).

# Formelsamling

(5 sider, noe av dette trenger du kanskje...)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$


---

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf'(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.2})$$


---

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{ (s-a_i)^m f(s) e^{st} \} \right] \bigg|_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$


---

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$


---

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$


---

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma \quad \text{Rotasjon: } d = I\dot{\omega} \quad (\text{V.6})$$


---

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t) * u(t)] = h(s) u(s) \quad (\text{V.7})$$


---

$$\begin{aligned} \text{Linearisering: } \Delta \mathbf{x} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \bigg|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \\ \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$


---

Gitt en åpen prosess  $h_0(s)$  med  $N_p$  poler i høyre halvplan.

Vektoren  $1 + h_0(j\omega)$  får en netto vinkeldreining lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.9})$$

$N_n$  blir da antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoblede) system.

Merk: Dreieretning er definert positiv *mot* urviseren.

---


$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x) \quad (\text{V.10})$$


---

**Rouths kriterium:**

For stabilitet kreves for det første at alle koeffisienter i det karakteristiske polynom (nevnerpolynomet i det lukkede system) må ha samme fortegn. Dessuten må alle koeffisienter i den venstre kolonne i Rouths tabell (nedenfor) ha samme fortegn.

Kall det karakteristiske polynom:  $\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$

Rouths tabell blir da (i tilfellet vist her er  $n$  et oddetall):

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_n & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \\
 \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_0 \\
 \beta_{n-1} & \beta_{n-3} & \dots & \\
 \zeta_{n-1} & \zeta_{n-3} & \dots & \\
 \cdot & & & \\
 \cdot & & & \\
 \cdot & & & \\
 \sigma_{n-1} & \sigma_{n-3} & & \\
 \eta_{n-1} & & & \\
 \omega_{n-1} & & &
 \end{array}$$

(V.11)

De nye koeffisientene i tabellen framkommer etter følgende regler:

$$\beta_{n-1} = \frac{\begin{array}{cc} \alpha_n & \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} \end{array}}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_n\alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}$$

$$\beta_{n-3} = \frac{\begin{array}{cc} \alpha_n & \alpha_{n-4} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-5} \end{array}}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-4} - \alpha_n\alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}$$

osv.

---

Ziegler-Nichols' regler : (V.12)

Regulator	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$0.5K_{pk}$	$\infty$	0
<b>PI</b>	$0.45K_{pk}$	$T_k/1.2$	0
<b>PID</b>	$0.6K_{pk}$	$T_k/2$	$T_k/8$

---

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdot & \cdot & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdot \cdot \cdot \ \rho_{n-1}]$$

gir

$$\frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1}s^{n-1} + \dots + \rho_1s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

---