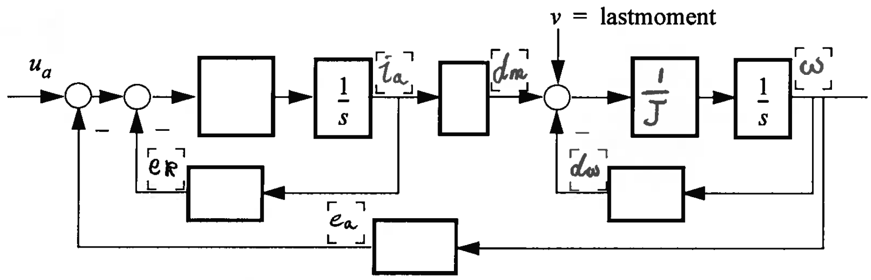
Løsningsforslag eksamen TTK4105, Vår 2010

Oppgave 1

Se side 347 i læreboka.



Oppgave 2

a)

Fra vinkelhastighet til vinkelposisjon er det én integrasjon. Da er $\theta = \frac{1}{s}\omega$, og

$$\underline{\underline{\frac{\theta}{u_a}(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega}{u_a}(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{K_v\left(1 + \frac{JR_a}{K_vK_t}s + \frac{JL_a}{K_vK_t}s^2\right)}}}. \tag{1}$$

b)

Hvis $L_a \ll R_a$ kan vi se bort fra s^2-leddet i nevneren til $h_1(s)$ og skrive en $h_2(s) \approx h_1(s)$ der

$$h_2(s) = \frac{1}{k_v\left(1 + \frac{JR_a}{K_vK_t}s\right)}. \tag{2}$$

Dermed blir tidskonstanten $T = \frac{JR_a}{K_vK_t}$.

c)

Vi ønsker en tilnærming $h_3(s)$ som er et produkt av to førsteordensblokker. Hvis vi har $R_a \gg L_a$ kan vi skrive

$$1 + \frac{JR_a}{K_v K_t} s + \frac{JL_a}{K_v K_t} s^2 \approx 1 + \left(\frac{JR_a}{K_v K_t} + \frac{L_a}{R_a} \right) s + \frac{JL_a}{K_v K_t} s^2, \tag{3}$$

og dermed løse ligningen

$$1 + \left(\frac{JR_a}{K_v K_t} + \frac{L_a}{R_a} \right) s + \frac{JL_a}{K_v K_t} s^2 = (1 + T_m s)(1 + T_a s) \tag{4}$$

$$= 1 + (T_m + T_a)s + T_m T_a s^2. \tag{5}$$

For å "matche" høyre og venstre side av likhetstegnet, velger vi $T_m T_a = \frac{JL_a}{K_v K_t}$ og $T_m + T_a = \left(\frac{JR_a}{K_v K_t} + \frac{L_a}{R_a} \right)$. Da kommer vi fram til

$$T_m = \frac{JR_a}{K_v K_t} \tag{6}$$

$$T_a = \frac{L_a}{R_a}. \tag{7}$$

Oppgave 3

a)

Vi har

$$\dot{x_1} = x_2 \tag{8}$$

$$\dot{x_2} = x_3 \tag{9}$$

$$\dot{x_3} = u. \tag{10}$$

Dette kan skrives som

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u. \tag{11}$$

b)

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}. \tag{12}$$

Rekkeutvikling av matriseeksponensialfunksjon:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \dots \tag{13}$$

Finner $\mathbf{A}^2$ og $\mathbf{A}^3$:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

og

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Altså er

$$\underline{\underline{\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{16}$$

Oppgave 4

Impulsresponsen til 2. ordens systemet gitt i formelsamlingen er

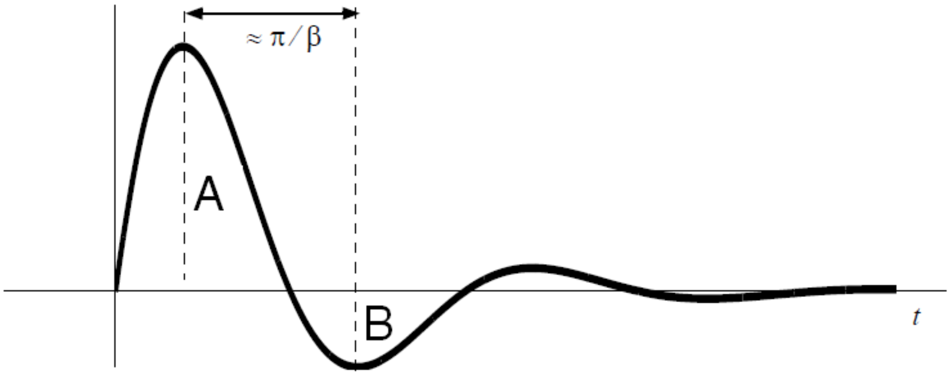
$$h(t) = K\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t}sin(\beta t). \tag{17}$$

Vi henter også fra formelsamlingen at for et slikt system er

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{18}$$

Vi måler følgende størrelser på figuren:

1. halvperioden $\frac{\pi}{\beta}$
2. høyden av den toppen A
3. høyden av bunnen B.



Vi får at $A = 3.5$, $B = 1.1$ og $\frac{\pi}{\beta} = 2.5$. Fra impulsresponsen ser vi at det er leddet $e^{-\alpha t}$ som står for "decay"en i responsen. Fra målingene har vi at

$$e^{-\alpha \cdot 2.5} = \frac{1.1}{3.5} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2.5} ln(\frac{1.1}{3.5}) = 0.463. \tag{19}$$

Fra $\frac{\pi}{\beta} = 2.5$ har vi $\beta = 1.2566$, og fra $\frac{\beta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ har vi at $\zeta = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}$. Altså er

$$\underline{\underline{\zeta = \sqrt{1 - \frac{1.2566^2}{0.463^2 + 1.2566^2}} = 0.3457.}} \tag{20}$$

Oppgave 5

a)

Benytter Newtons lov:

$$\sum F = ma = m\dot{w}. \tag{21}$$

I oppgaveteksten er sammenhengen mellom kreftene gitt slik at differensialligningen kan settes opp:

$$\sum F = C_1 g - C_2 w^2 = m\dot{w} \tag{22}$$

$$\Rightarrow \frac{C_1}{m} g - \frac{C_2}{m} w^2 = \dot{w} \tag{23}$$

$$\dot{w} = \underline{\underline{C_G g - C_W w^2, \text{ der } C_G = \frac{C_1}{m} \text{ og } C_W = \frac{C_2}{m}.}} \tag{24}$$

b)

Den maksimale hastigheten finnes ved stasjonære forhold, dvs $\dot{w} = 0$.

$$\dot{w} = 0 \Rightarrow C_G g_{\text{max}} - C_W w_{\text{max}}^2 \Rightarrow \underline{\underline{w_{\text{max}} = \sqrt{\frac{C_G g_{\text{max}}}{C_W}}}}. \tag{25}$$

c)

Vi har $\dot{g} = K_p(r - w)$, som gir $g(t) = K_p \int_0^t (r - w)\mathrm{d}\tau$. Dette er en I-regulator. Etter innsvingningstiden blir $\dot{g} = 0$.

$$\dot{g} = 0 \Rightarrow K_p(r - w) = 0 \Rightarrow r = w, \tag{26}$$

altså, vi oppnår referansen til tross for forstyrrelse fra friksjon og luftmotstand.

d)

Finner g_0 som uttrykk av w_0 vha ligningen fra a):

$$0 = C_G g_0 - C_W w_0^2 \Rightarrow \underline{\underline{g_0 = \frac{C_W}{C_G} w_0^2}}. \tag{27}$$

Med $x_1 = w$ og $x_2 = g$ lan vi skrive

$$\dot{x_1} = C_g x_2 - C_W x_1^2 = f_1(\underline{x}, r) \tag{28}$$
$$\dot{x_2} = -K_p x_1 + K_p r = f_2(\underline{x}, r). \tag{29}$$

Den lineariserte modellen finnes ved hjelp av formlene fra formelsamlingen insatt arbeidspunktet $(\underline{x}_0, r_0)$.

$$\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Delta\underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} \end{bmatrix} \Delta r. \tag{30}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -2C_W x_1 \tag{31}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = C_G \tag{32}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -K_p \tag{33}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \tag{34}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0 \tag{35}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = K_p. \tag{36}$$

Vi får dermed følgende modell når vi setter inn arbeidspunktet $(\underline{x}_0, r_0)$:

$$\underline{\underline{\Delta\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2C_W w_0 & C_G \\ -K_p & 0 \end{bmatrix} \Delta\underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \end{bmatrix} \Delta r.}} \tag{37}$$

e)

Egenverdiene finnes fra $|\lambda I - A| = 0$:

$$\lambda(\lambda + 2C_W w_0) + K_p C_G = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_{1,2} = -C_W w_0 \pm \sqrt{C_W^2 w_0^2 - K_p C_G}.}} \tag{38}$$

Ved lave hastigheter (når $C_W w_0^2 < K_p C_G$) blir systemet marginalt stabilt med to poler på imaginæraksen. Ved høye hastigheter er systemet eksponensielt stabilt med to poler i venstre halvplan.

e)

Dersom bilen kjører langsomt har vi $w_0^2 \approx 0$. Da blir modellen (laPlace-transformert)

$$s\Delta w(s) = C_G \Delta g(s) \tag{39}$$
$$s\Delta g(s) = K_p \left(\Delta r(s) - \Delta w(s)\right). \tag{40}$$

Substituerer man for $\Delta g(s)$, får man

$$s\Delta w(s) = C_G \left(\frac{K_p}{s}\Delta r(s) - \frac{K_p}{s}\Delta w(s)\right) \tag{41}$$
$$\frac{\Delta w}{\Delta r}(s) = \frac{C_G K_p}{s^2 + C_G K_p}. \tag{42}$$

Dette systemet har (formelsamlingen) sprangrespons $k(t) = K(1 - cos(\omega_0 t)$, der $K = 1$ og $\omega_0 = \sqrt{C_G K_p}$. Altså, dersom spranget er på Δr, blir responsen

$$\underline{\underline{\Delta w(t) = \Delta r \left(1 - cos(\sqrt{C_G K_p} t)\right)}}. \tag{43}$$

Oppgave 6

Ved bruk av diskret regulator introduseres en tidsforsinkelse på ca. halve tastetiden. Dette må vi ta hensyn til ved regulatorsyntese, da tidsforsinkelse skyver fasen i negativ retning og vi må ta litt større marginer.

Oppgave 7

a)

Prosessen har en pol i høyrehalvplan (ved $s = a$) og er dermed åpent ustabil.

b)

Da den åpne sløyfes transferfunksjon $h_0(s)$ har én pol i høyre halvplan, tilsier Nyquists stabilitetskriterium at polarkurven må omslutte punktet $(-1, 0)$ én gang mot urviseren. Dermed ser vi at for tilfelle 1, der $T < \frac{1}{a}$, er prosessen stabil hvis $K_p > a$. I tilfelle 2 blir prosessen ikke stabil selv om K_p økes til $K_p > a$, da kurven går i feil retning, og introduserer dermed en ny pol i hhp.

c)

Her koker Routh's kriterium ned til å se på

$$n_0(s) + t_0(s) = Ts^2 + (1 - aT)s + K_p - a. \tag{44}$$

Her ser vi umiddelbart at dersom alle ledd skal ha samme fortegn (positivt), så er kriteriene

$$\underline{\underline{T < \frac{1}{a}}} \text{ og } \underline{\underline{K_p > a}}. \tag{45}$$

d)

I følge Nyquists kriterium er antall poler i høyre halvplan for det lukkede systemet (med tilbakekopling) lik antall poler i hhp for det åpne systemet minus antall omslutninger av punktet $(-1,0)$ mot urviseren. Vi ser i kurven for tilfelle 2 at for $K_p < a$ omslutter ikke kurven punktet -1, og dermed står vi igjen med 1 pol i hhp. Der $K_p > a$ får vi -1 omslutninger mot urviseren, altså er antall poler i hhp 2.

Ved bruk av Routh's kriterium ser vi på antall "skift" i fortegn til det karakteristiske polynom, når man ser på fortegne til alle ledd fra venstre til høyre. Ser vi på polynomet $Ts^2 + (1 - aT)s + K_p - a$, der $1 - aT < 0$, er det første leddet positivt, det andre leddet negativt, og det tredje leddet positivt hvis $K_p > a$. Da får vi mønsteret + - - for $K_p < a$, altså, et skift i fortegn, og én pol i hhp. Dersom $K_p > a$, får vi mønsteret + - + og dermed to skift $\Rightarrow$ to poler i hhp.

Oppgave 8

a)

Dette er en begrenset PD-regulator. Denne er nødvendig her da prosessen $h_u(s)$ har to rene integratorer i seg. Dermed blir faseresponsen $-180°$ fra starten av, og vi trenger et tidlig nullpunkt for å løfte den opp.

b)

Ved $y_0 = 0$ har vi

$$y(s) = \frac{1}{s^2(1 + T_1 s)}\Big(v(s) + h_R\big(-y(s)\big)\Big) \tag{46}$$

$$y(s)\Big(1 + h_R\frac{1}{s^2(1 + T_1 s)}\Big) = \frac{1}{s^2(1 + T_1 s)}v(s) \tag{47}$$

$$y(s) = \frac{\frac{1}{s^2(1+T_1 s)}}{1 + K_p\frac{1+T_d s}{1+\alpha T_d s}\frac{1}{s^2(1+T_1 s)}}v(s) \tag{48}$$

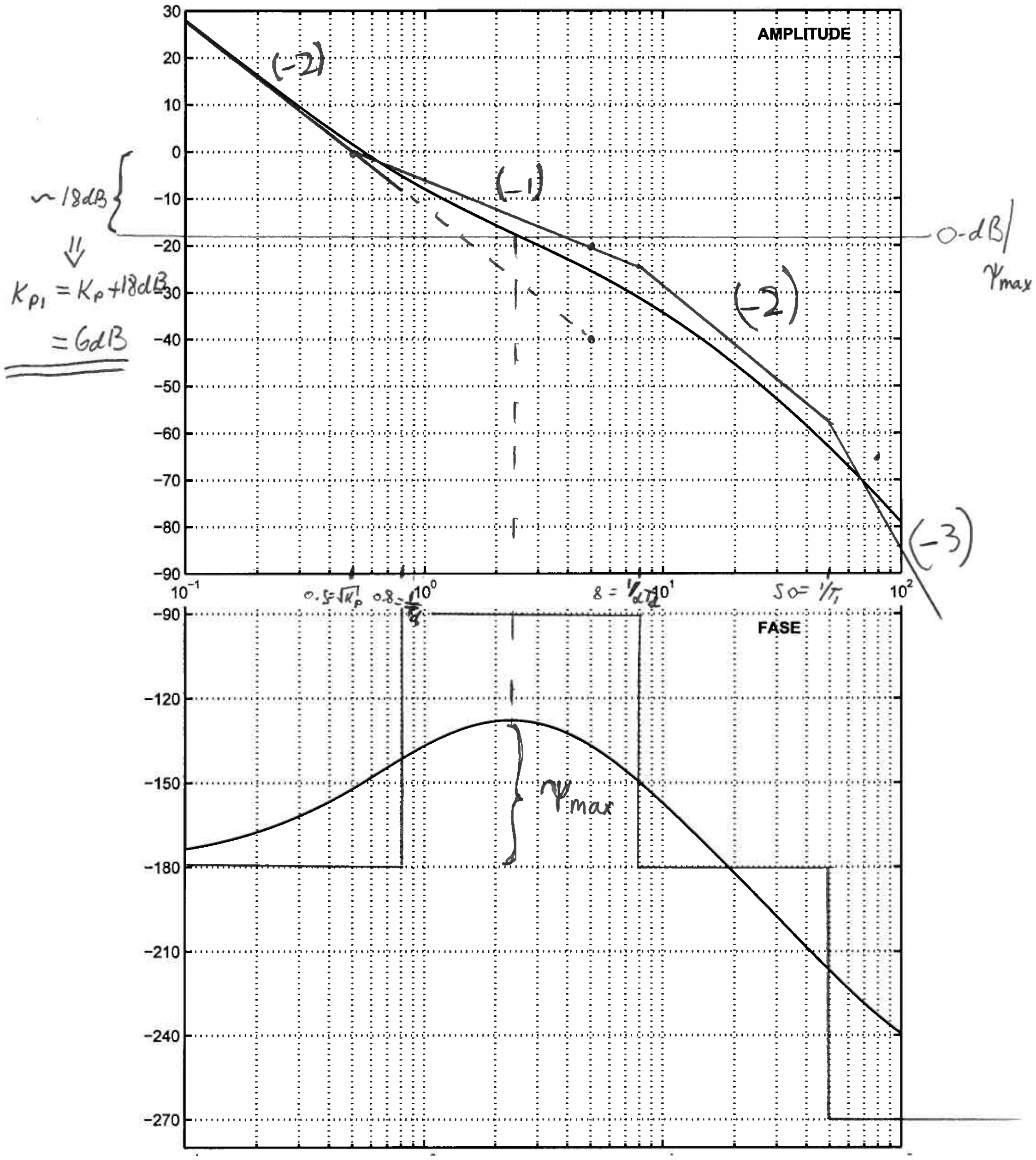
$$= \frac{1}{s^2(1 + T_1 s) + K_p\frac{1+T_d s}{1+\alpha T_d s}}v(s) \tag{49}$$

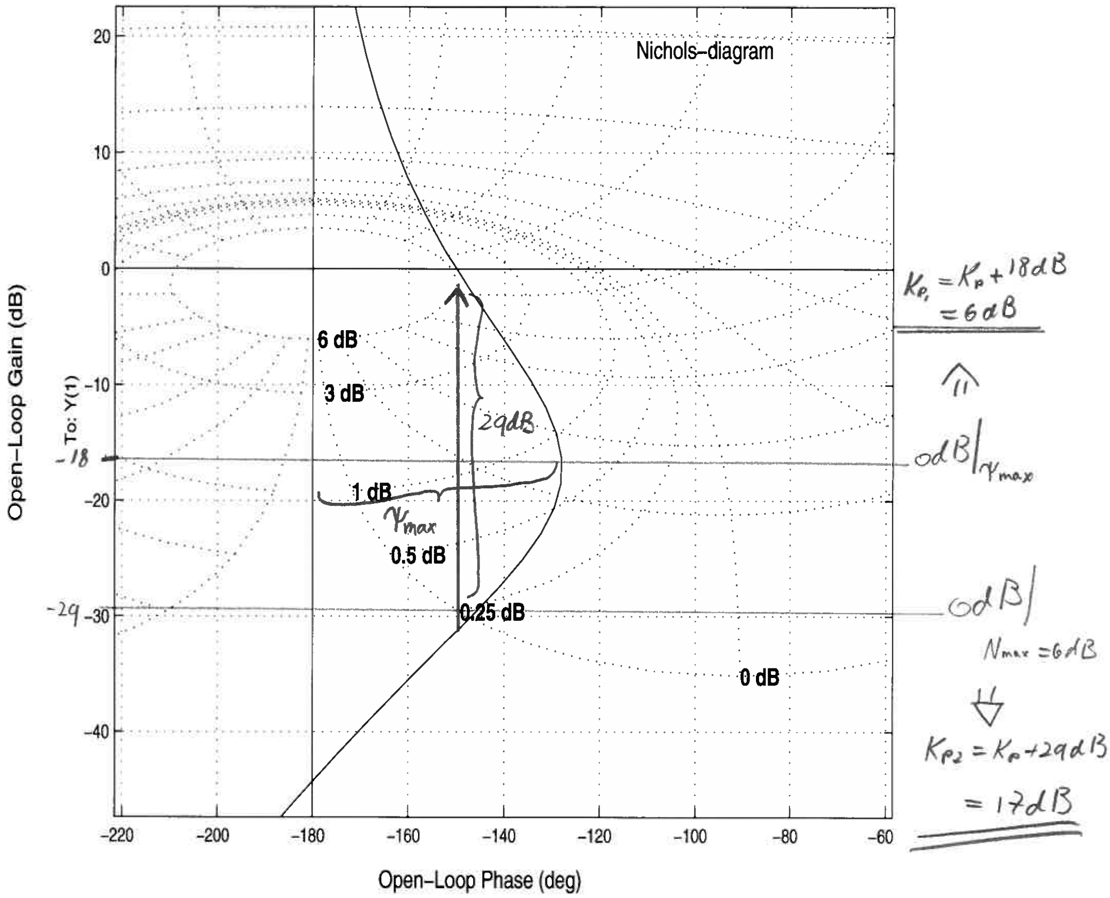
Ved å sette $v(s) = \frac{1}{s}$ og bruke sluttverditeoremet, får vi

$$y(t \to \infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2(1 + T_1 s) + K_p\frac{1+T_d s}{1+\alpha T_d s}}\frac{1}{s} = \frac{1}{K_p}, \tag{50}$$

altså blir $\underline{\underline{e(t \to \infty) = -\frac{1}{K_p}}}$.

c,d)





e)

Den interne sløyfen har åpen-sløyfetransferfunksjon $h_{01} = \frac{K_1}{s(1+T_1 s)}$. Vi har at feil-forholdet $N_1(s) = \frac{1}{1+h_{01}(s)}$. Altså er

$$\underline{\underline{N_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{s(1+T_1 s)}} = \frac{s(1+T_1 s)}{s(1+T_1 s)+K_1}}}. \tag{51}$$

Av figuren ser vi at $\underline{\underline{h_v(s) = \frac{1}{s(1+T_1 s)}}}$.

f)

$$M_1(s) = \frac{h_{01}(s)}{1+h_{01}(s)} = \frac{\frac{K_1}{s(1+T_1 s)}}{1 + \frac{K_1}{s(1+T_1 s)}} = \underline{\underline{\frac{K_1}{s(1+T_1 s)+K_1}}}. \tag{52}$$

Vi kan nå bruke integralvirkning i $h_R(s)$ da "prosessen" vi nå regulerer er $\frac{M_1(s)}{s}$, og den har bare én ren integrator i seg. Vi kan også skru opp forsterkningen K_1 i den interne blokken og dermed oppnå raskere respons.