

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**  
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

## Eksamen i TTK4105 reguleringssteknikk

fredag 28. mai 2010

Tid: 0900 - 1300

Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

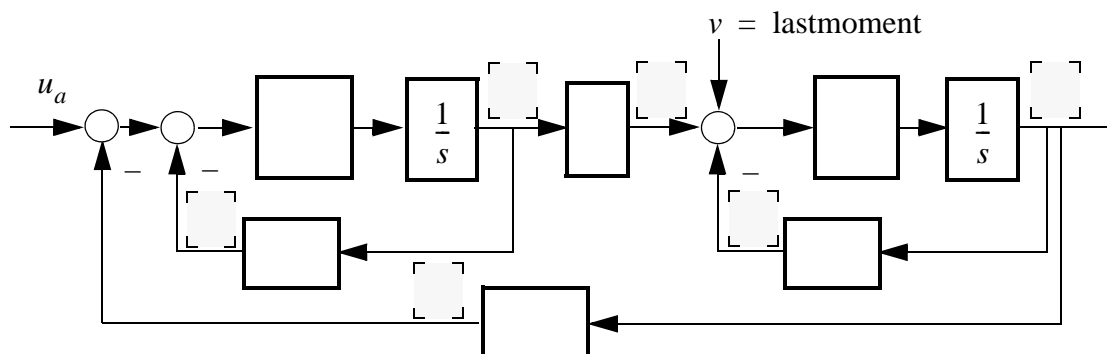
Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleuøyaktighet"! Der kan man tegne i figuren og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.

### Oppgave 1 ( 7 %)

Gitt et blokkdiagram for en modell av en likestrømsmotor i figur 1.1:



figur 1.1

Du skal tegne inn følgende størrelser på rett sted i figuren (se antydde posisjoner til hjelp):

Vinkelhastighet  $\omega$ , ankerstrøm  $i_a$ , motindusert spenning i rotor  $e_a$ , avgitt motormoment  $d_m$ , spenningsfallet over rotorens (ankerets) ohmske motstand  $e_R$ , motmoment p.g.a. friksjon i motoren  $d_\omega$ , treghetsmomentet  $J$ .

Den siste størrelsen inngår i et enkelt uttrykk som må skrives inn korrekt, *inne i riktig blokk*.

*Du kan, om du foretrekker det, tegne i blokkdiagrammet ovenfor og levere dette arket som del av din besvarelse. Fyll da også ut rubrikken til høyre.*

Fag nr.: TTK4105	28. mai 2010
Kandidat nr.:	
Side nr.:	

**Oppgave 2 ( 5 %)**

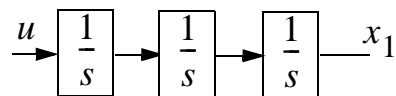
Likestrømsmotoren har transferfunksjonen

$$h_1(s) = \frac{1}{K_v \left( 1 + \frac{JR_a}{K_v K_T} s + \frac{JL_a}{K_v K_T} s^2 \right)} \quad \text{fra påsatt ankerspenning til vinkelhastighet.} \quad (2.1)$$

- a) (1 %) Hva blir transferfunksjonen fra påsatt ankerspenning til vinkelposisjon?
- b) (1 %) *Modellreduksjon I:* Forenkle transferfunksjonen til en 1. ordens transferfunksjon  $h_2(s)$ . Hva blir tidskonstanten? Når kan vi tillate oss denne kraftige forenklingen?
- c) (3 %) *Modellreduksjon II:* Finn en transferfunksjon  $h_3(s) \approx h_1(s)$  som er av 2.orden slik som  $h_1(s)$ , men som kan skrives som et produkt av to 1. ordens blokker. Hva blir  $T_m$ , den største tidskonstanten? (Tips: den minste blir  $T_a = L_a/R_a$ ).

**Oppgave 3 (6 %)**

Gitt et system som består av tre integratorer i serie:

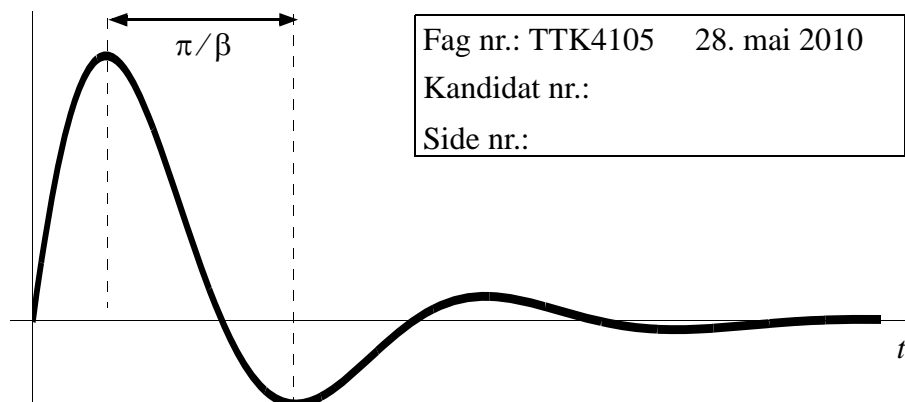


- a) (2 %) Hva blir matrisa  $A$  i tilstandsromformen  $\dot{x} = Ax + bu$  (Tips:  $A$  inneholder bare to enere, resten nuller.)
- b) (4 %) Hva blir transisjonsmatrisa  $\Phi(t)$ ? (Tips: Algebraisk løsning kan i dette spesielt enkle tilfellet finnes raskt ved potensrekke, fordi alle ledd blir null litt ute i rekka. Men også andre, enkle metoder fører fram. Riktig svar er ett av alternativene nedenfor. Det skal framgå hvordan du har kommet fram til svaret.)

1	$\begin{bmatrix} 1 & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 1 & t^2/2 & t \\ 0 & 1 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	3	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & t^2/2 \end{bmatrix}$	4	$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	5	$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t^2/2 & t & 1 \end{bmatrix}$
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

**Oppgave 4 (5 %)**

Gitt impulsresponsen til et 2. ordens system til høyre. Den relative demping  $\zeta$ , er én av disse størrelsene: 0.48, 0.35, 0.27, 0.20, 0.15, 0.09. Finn den riktige. Ta mål med linjal som grunnlag for utregninga. Det skal framgå hvordan du har kommet fram til svaret.



Fag nr.: TTK4105 28. mai 2010  
Kandidat nr.:  
Side nr.:

(Tips: Se formelsamling bak, og oppgitt uttrykk i figuren. Du kan hvis du vil tegne i figuren og legge ved dette arket i besvarelsen.)

**Oppgave 5 (21 %)**

En bil beveger seg på en horisontal vei. Anta at skyvekraften fra bilens motor er proporsjonal med gasspådraget  $g$ , og at samlede friksjonskrefter (luftmotstand dominerer) er proporsjonale med kvadratet av bilens hastighet  $w$ .

a) (2 %) Vis at en differensialligning for bilens hastighet er

$$\dot{w} = C_G g - C_W w^2, \quad \text{der } C_W \text{ og } C_G \text{ er konstanter.} \quad (5.1)$$

b) (2 %) Finn bilens maksimale hastighet  $w_{\max}$  når maksimalt gasspådrag er  $g_{\max}$ .

Automatisk hastighetsregulering, også kalt "cruise-control", er populært i amerikanske biler. Man har en referansehastighet  $r$  som man ønsker bilen skal holde. Anta at det er valgt en reguleringsstrategi som følger ligningen

$$\dot{g} = K_p(r - w) \quad (5.2)$$

c) (3 %) Hva slags regulator er dette? Hva oppnår man med denne regulatoren? (Verbalt svar tilstrekkelig.)

Vi innfører nå notasjonen  $\underline{x} = \begin{bmatrix} w \\ g \end{bmatrix}$ , og skriver systemet (5.1), (5.2) på tilstandsromform, med  $r$  som pådrag,  $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, r)$ .

d) (5 %) Anta konstant hastighet  $w_0$  og stasjonære forhold. Uttrykk  $g_0$  ved  $w_0$ . Du skal utlede  $A$  og  $\underline{b}$  i en linearisert modell  $\Delta \dot{\underline{x}} = A \Delta \underline{x} + \underline{b} \Delta r$  rundt denne stasjonære tilstand.

Modellen gjelder for små endringer  $\Delta \underline{x}$  og  $\Delta r$ . For den videre regning oppgis svaret:

$$A = \begin{bmatrix} -2C_W w_0 & C_G \\ -K_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

e) (5 %) Finn egenverdiene til det lineariserte system. Kommentér forskjellen i stabilitet for reguleringsystemet ved lave kontra høye hastigheter.

f) (4 %) Anta fra nå av at bilen kjører svært langsomt. Hastighetsresponsen  $\Delta w(t)$  fra stillstand når referansen økes som et sprang fra 0 til en liten verdi  $\Delta r$ , er  $\Delta w(t) = \Delta r[1 - \cos(?t)]$ . Hva skal stå der spørsmålsteget er?

**Oppgave 6 (4 %)**

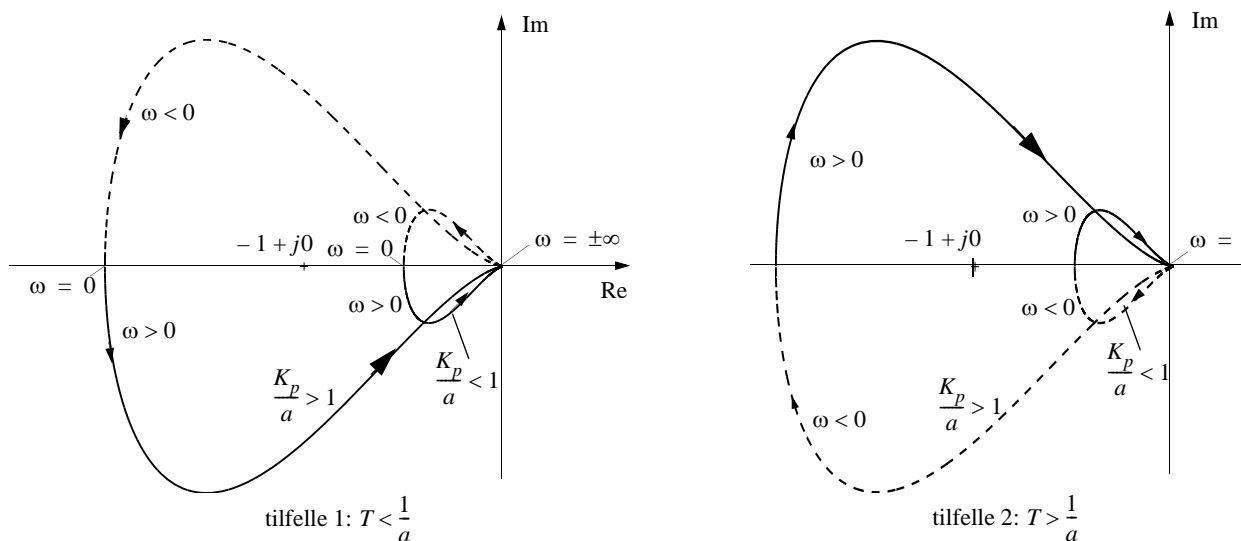
Hva er den viktigste negative bivirkning ved bruk av diskret regulator i forhold til kontinuerlig? Forklar kort hvordan du kan kompensere for dette problemet når du skal stille inn en diskret regulator!

**Oppgave 7 (18 %)**

Figur 7.1 viser polardiagrammer (Nyquist-diagrammer) for en prosess med proporsjonalregulator,

$$h_0(s) = h_r(s)h_u(s) = K_p \frac{1}{(1 + Ts)(s - a)}, \quad a > 0 \quad (7.1)$$

Polardiagrammene for  $h_0(j\omega)$  er vist i to del-figurer, avhengig av innbyrdes forhold mellom prosessparametrene  $T$  og  $a$ .

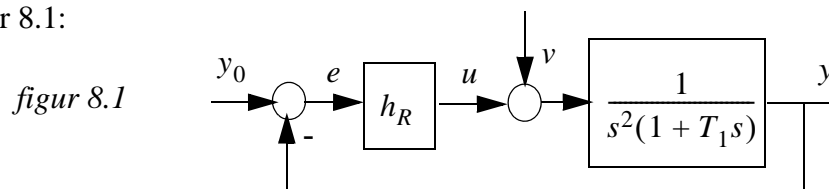


figur 7.1

- (2 %) Er denne prosessen åpent stabil (dvs. når man ikke har tilbakekopling), eller er den åpent ustabil? Begrunn svaret!
- (6 %) Finn v.h.a. Nyquists stabilitetskriterium hvilke krav som må stilles for at det lukkede systemet skal bli stabilt i tilfelle 1. Kan det lukkede system bli stabilt i tilfelle 2? Begrunn svaret!
- (5 %) Sjekk det lukkede systems stabilitet v.h.a. Rouths kriterium.
- (5 %) Finn antall poler i høyre halvplan for det lukkede system i tilfelle 2 for  $K_p < a$  og  $K_p > a$ , og både v.h.a. Rouths kriterium og Nyquists kriterium.

**Oppgave 8 (34 %)**

Gitt reguleringsstrukturen i figur 8.1:



- a) (4 %) Vi velger  $h_R(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Hva kalles en slik regulator?

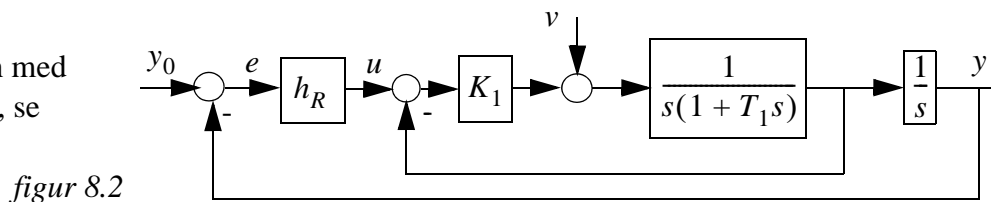
Hvorfor bør vi velge en slik i dette tilfellet?

- b) (5 %) Sett  $y_0 = 0$  og anta at forstyrrelsen  $v$  er et enhetssprang ( $v(s) = 1/s$ ). Finn det stasjonære avvik  $e(t \rightarrow \infty)$ .

- c) (7 %) Figur 8.5 viser Bode-diagram for  $h_0$  med  $T_1 = 0.02$ ,  $T_d = 1.25$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $K_p = 0.25 = -12.04 \text{ [dB]} \approx -12 \text{ [dB]}$ . Tegn inn asymptotene til  $h_0(j\omega)$ , amplitude og fase. Det skal framgå tydelig, om nødvendig med forklaring i tillegg til tegning, hvordan asymptotene er fastlagt – det er ikke nok å bare "smyge dem inntil" de to oppgitte grafer. Ta arket med figur 8.5 ut av oppgavesettet og lever det som en del av besvarelsen.

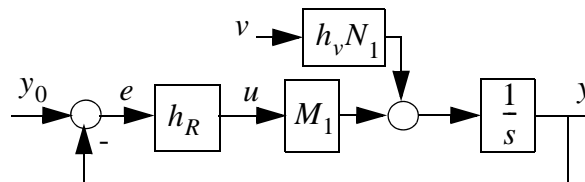
- d) (8 %) Finn i Bode-diagrammet en ny 0-dB-linje og den tilsvarende nye verdi  $K_{p1} \text{ [dB]}$ , som gir størst fasemargin  $\psi$ . Videre: Bruk Nichols-diagrammet (gitt i figur 8.4 for  $h_0$  med de samme parameterverdier som i punkt c) ) til å finne den  $K_{p2} \text{ [dB]}$ , som gir resonanstopp 6 dB i avviksforholdet  $N$ . Og hvordan finner du  $K_{p1} \text{ [dB]}$  ut fra Nichols-diagrammet? (Tips:  $K_{p2} > K_{p1}$ .) Tegn inn, og ta arket med figur 8.4 ut av oppgavesettet og lever det som en del av besvarelsen.

Vi modifiserer nå reguleringsstrukturen med intern tilbakekopling, se figur 8.2.



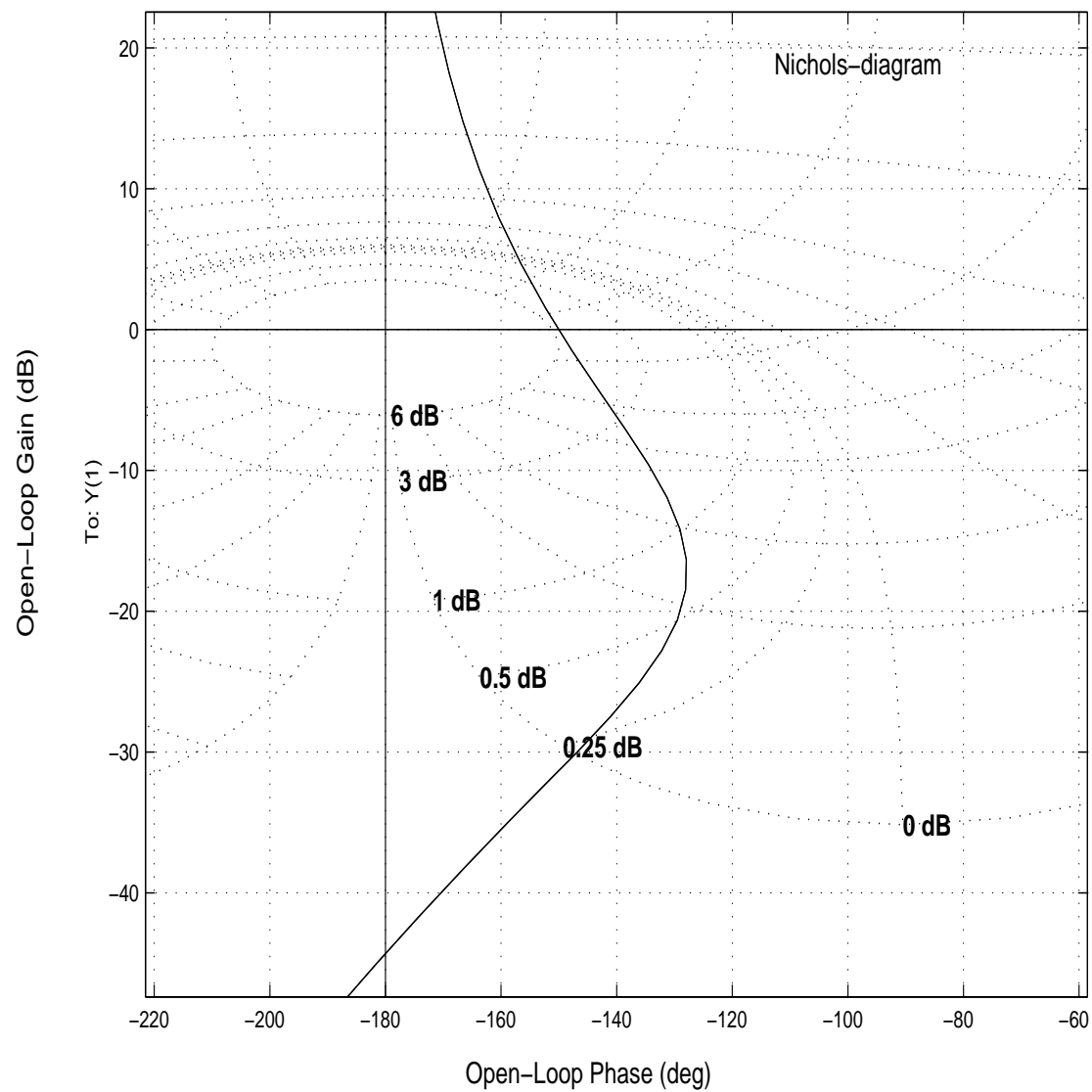
$K_1$  er nå en "stor" konstant forsterkning.

Diagrammet i figur 8.2 kan bringes på formen som er vist i figur 8.3:



- e) (5 %) Velg  $K_1 = 1/T_1$ . Finn  $h_v$  og  $N_1$ .

- f) (5 %) Finn  $M_1$ . Du kan nå ha integralvirkning i  $h_R(s)$ . Hvorfor? Hva er fordelen med det? (Tips: Det har med forstyrrelsen  $v$  å gjøre). Nevn minst én annen fordel ved denne løsningen med intern tilbakekopling!

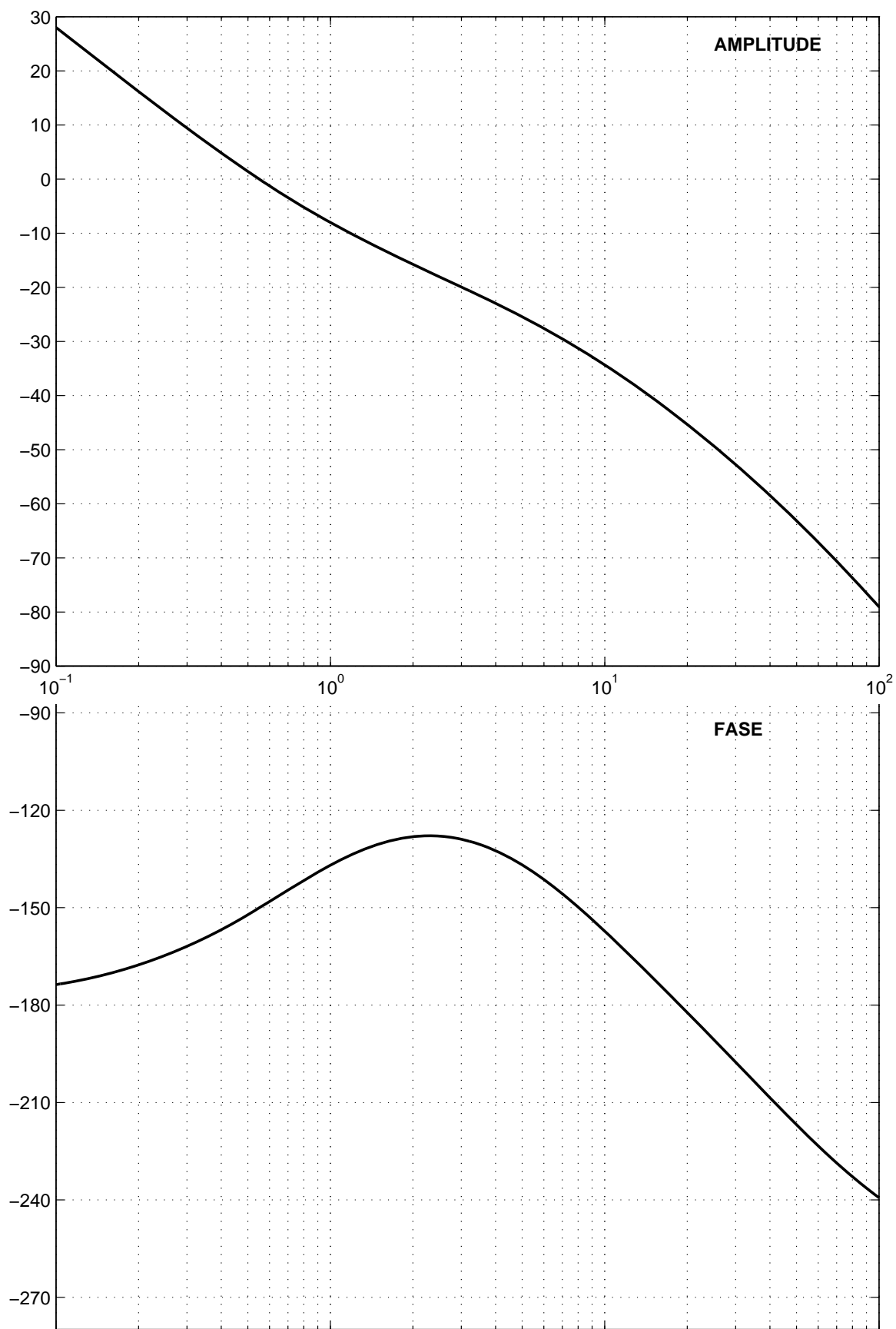


figur 8.4

Fag nr.: TTK4105 28. mai 2010

Kandidat nr.:

Side nr.:

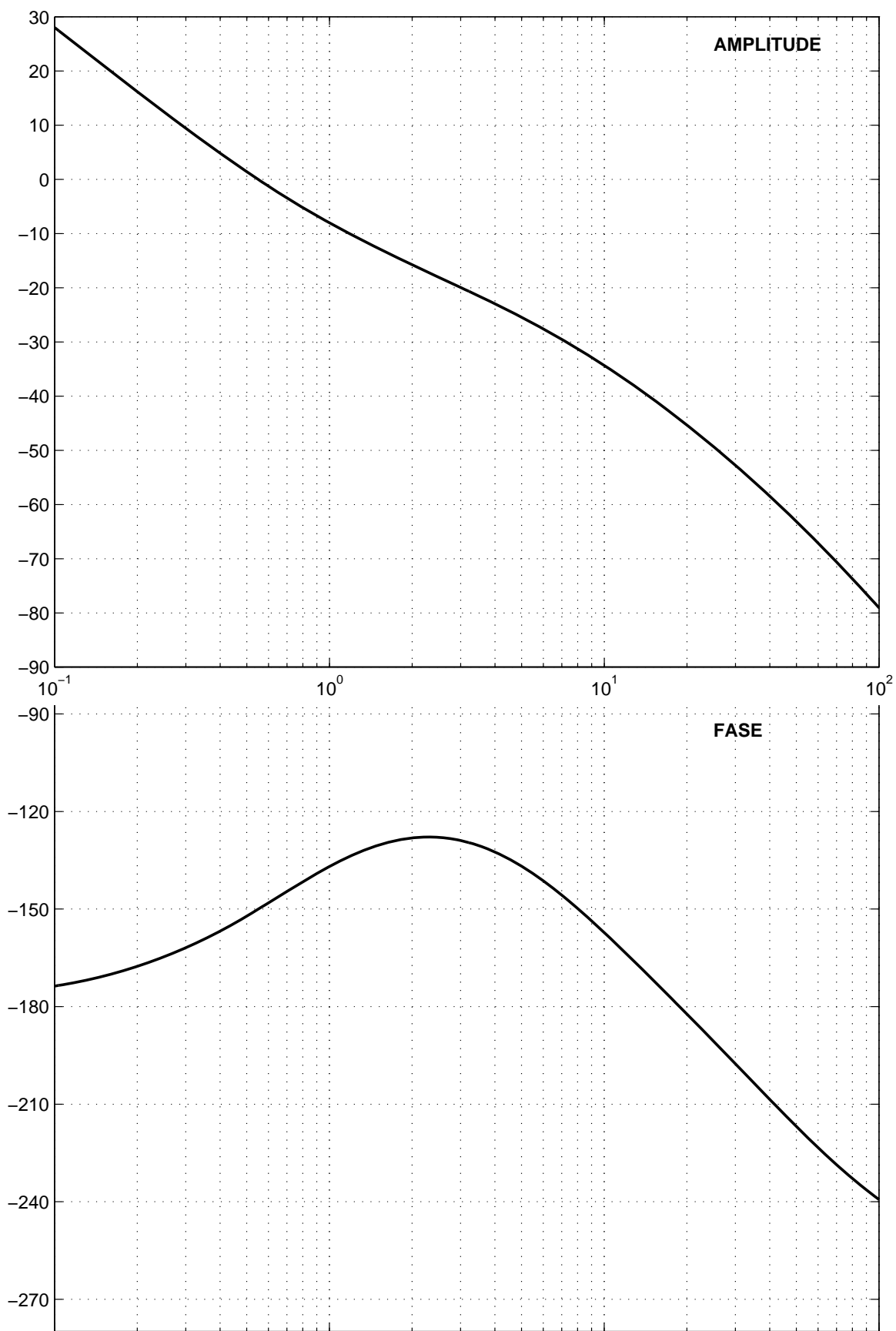


figur 8.5 (ekstra kopi på neste side)

Fag nr.: TTK4105 28. mai 2010

Kandidat nr.:

Side nr.:



Fag nr.: TTK4105 28. mai 2010

Kandidat nr.:

Side nr.:



# Formelsamling

(6 sider, noe av dette trenger du kanskje...)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$


---

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.2})$$


---

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{ (s - a_i)^m f(s) e^{st} \} \right] \bigg|_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$


---

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t - \tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$


---

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$


---

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma, \text{ Rotasjon: } d = J\dot{\omega}; \text{ med masse p\aa vektlos stang har vi } J = ml^2 \quad (\text{V.6})$$


---

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t) * u(t)] = h(s) u(s) \quad (\text{V.7})$$


---

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad , \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \bigg|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \quad (\text{V.8})$$


---

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x) \quad (\text{V.9})$$


---

$$N(s) = \frac{e}{r}(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)}, \quad M(s) = \frac{y}{r}(s), \quad M(s) + N(s) = 1, \quad \frac{e}{v}(s) = h_v(s)N(s) \quad (\text{V.10})$$

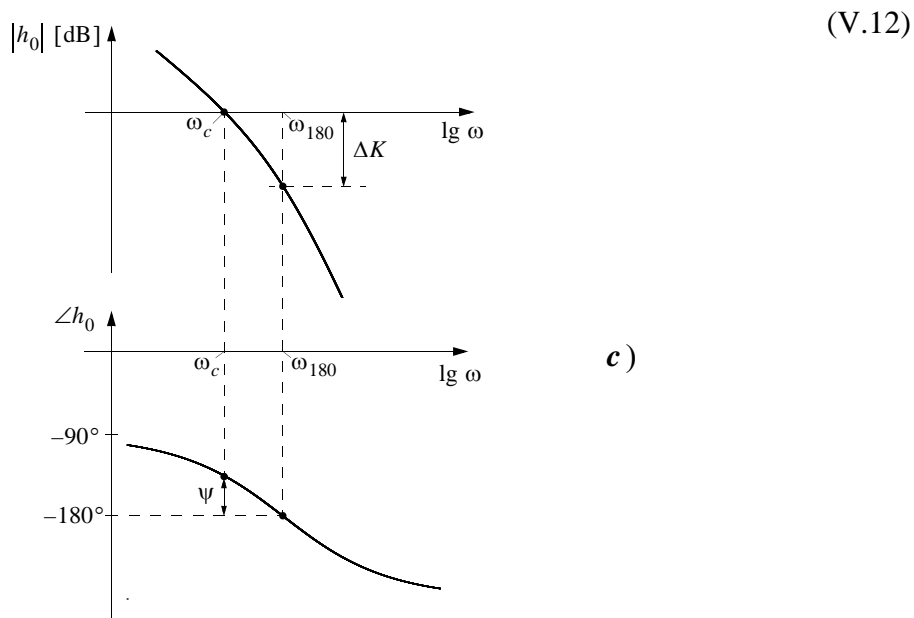
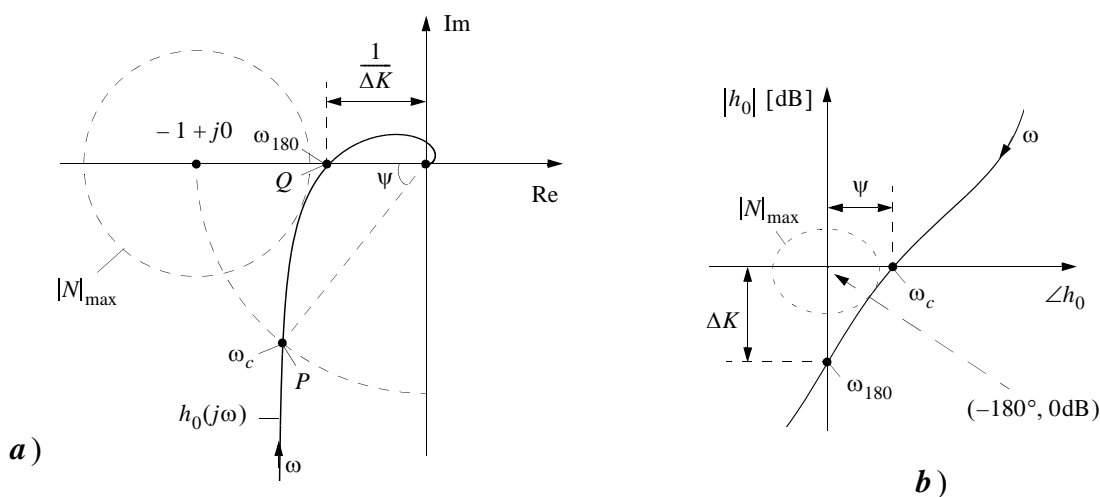
Gitt en åpen prosess  $h_0(s)$  med  $N_p$  poler i høyre halvplan.

Vektoren  $1 + h_0(j\omega)$  får en netto vinkeldreining lik

$$\Delta\angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.11})$$

$N_n$  blir da antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekopplede) system.

Merk: Dreieretning er definert positiv *mot* urviseren.



$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180^\circ)$$

$$\frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})|, \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \quad (\text{V.13})$$

$$\text{Ziegler-Nichols' regler :} \quad (\text{V.14})$$

Regulator	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$0.5K_{pk}$	$\infty$	0
<b>PI</b>	$0.45K_{pk}$	$T_k/1.2$	0
<b>PID</b>	$0.6K_{pk}$	$T_k/2$	$T_k/8$

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}}$$

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.15})$$

$$\text{begrenset PD-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (\text{V.16})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdot & \cdot & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.17})$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \rho_{n-1}]$$

$$\text{gir} \quad \frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1}s^{n-1} + \dots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (\text{V.18})$$

$$\text{Diskret regulator: Alle } s \text{ erstattes med } \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \text{ der } z \text{ er en tidsforskyvingsoperator.} \quad (\text{V.19})$$

$$\text{Diskret regulator medfører en ekstra tilnærma tidsforsinkelse} = \frac{T}{2} \text{ i sløyfetransferfunksjonen.} \quad (\text{V.20})$$

**Rouths kriterium:**

For stabilitet i det lukkede system kreves for det første at alle koeffisienter i det karakteristiske polynom (nevnerpolynomet i det lukkede system) må ha samme fortegn. Dessuten må alle koeffisienter i den venstre kolonne i Rouths tabell (nedenfor) ha samme fortegn. Antall fortegnsskift når man starter øverst i venstre kolonne og går nedover = antall poler i høyre halvplan.

Kall det karakteristiske polynom:  $\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$

Rouths tabell blir da (i tilfellet vist her er  $n$  et oddetall):

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_n & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \\
 \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_0 \\
 \beta_{n-1} & \beta_{n-3} & \dots & \\
 \zeta_{n-1} & \zeta_{n-3} & \dots & \\
 \cdot & & & \\
 \cdot & & & \\
 \cdot & & & \\
 \sigma_{n-1} & \sigma_{n-3} & & \\
 \eta_{n-1} & & & \\
 \omega_{n-1} & & &
 \end{array} \tag{V.21}$$

De nye koeffisientene i tabellen framkommer etter følgende regler:

$$\begin{aligned}
 \beta_{n-1} &= \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} \\
 \beta_{n-3} &= \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}} \\
 &\text{OSV.}
 \end{aligned} \tag{V.22}$$

---


$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}} \tag{V.23}$$

# Sammenhenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

	1. orden	(eks.: RC-krets)	Høyere orden
1. Differensiallikning	$\dot{x} = ax + bu$	$(\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$
2. Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(t=0) + \frac{b}{s-a}u(s)$		$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(t=0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$
3. Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$		$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$
4. Dekopling	(Trivielt:) $A = a = \lambda = \text{skalar}$		$A = M\Lambda M^{-1}, \quad e^{\mathbf{A}t} = Me^{\Lambda t}M^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5. Rekkeutvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots$		$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3\frac{t^3}{3!} + \dots$
6. $(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s)$	$e^{at} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad (\frac{1}{T}e^{-t/T} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1+Ts})$		$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$
7. Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \quad y(s) = c\frac{b}{s-a}u(s) \quad h(s) = \frac{cb}{s-a}$		$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s) \quad H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$
8. Impulsrespons	$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} h(s) \quad h(t) = cbe^{at}$		${}^3) \quad h(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \quad {}^4) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad h(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$

1)  $\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} * \mathbf{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s)$

2) NB:  $e^{\mathbf{A}t} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$ , bortsett fra når  $A = \Lambda$  er diagonal.

3) Antar nå at  $u$  og  $y$  er skalare.

4) Hvis  $y$  og  $u$  er skalare og  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  så har vi fra 3. linje at  $y(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

Tilstandsrom:  $\mathbf{\dot{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u.$

Eigenverdier følger av:  $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$

Laplace:  $H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}\frac{\text{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}\mathbf{B}$

$\Rightarrow$  Polene gitt av nevneren:  $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.$

$\Rightarrow$  poler = egenverdier

Orden	Transferfunksjon $h(s)$	Poler	Impuls- og sprangresponser
1. orden	$h(s) = \frac{K}{1 + Ts} = \frac{K}{s + \frac{1}{T}} = \frac{-K\lambda}{s - \lambda}$		<p>impulsresponss:</p> $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T}e^{-t/T}$ <p>sprangresponss:</p> $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau = K(1 - e^{-t/T})$
2. orden, $\zeta = 0$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$		$h(t) = K\omega_0 \sin \omega_0 t$ $k(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)$
2. orden, $\zeta < 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $= \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$	<p><math>\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta</math></p>	$h(t) = K \frac{\omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$ $k(t) = K \left( 1 - \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi) \right)$
2. orden, $\zeta = 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2}$		$h(t) = \frac{K}{T^2} t e^{-t/T}$ $k(t) = K \left( 1 - \left[ 1 + \frac{t}{T} \right] e^{-t/T} \right)$
2. orden, $\zeta > 1$	$\frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{K}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$		$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left( e^{\frac{t}{T_1}} - e^{\frac{t}{T_2}} \right)$ $k(t) = K \left( 1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$

$$\omega_0 = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}, \quad \zeta = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \text{ gjelder for alle } \lambda \neq 0$$