

Løsningsforslag eksamen i TTK4105 Reguleringssteknikk

9. juni 2011

Oppgave 1

Gitt systemet i oppgavesettet og transferfunksjonen

$$\frac{y}{u}(s) = h_u(s) = \frac{K}{s \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right)} \quad (1)$$

a) Posisjonen avhenger av væskemengden i cylinderen som igjen avhenger væsketransport inn og ut av pressen. Endring av volumet i cylinderen er proporsjonalt med volumstrømmene, dvs $\dot{V} = q_{inn} - q_{ut} \Leftrightarrow sV = q_{inn} - q_{ut}$. Stempelets posisjon y vil typisk avhenge lineært av volumet og væskestrømmen avhenger av strømpådraget u . Dermed vil det være en ren integrator i transferfunksjonen $h_u(s)$.

Alternativ forklaring: Stempelet drives av oljestrømmen inn og ut av cylinderen. Dersom man antar at oljen er inkompressibel, så vil stempelhastighet bli proporsjonal med strømningshastighet av oljestrømmen inn. Siden posisjon er integralet av hastigheten, vil det være en ren integrator i systemet.

Forklaring med enheter eller strømspole vil gi noe uttelling.

b) Med en ren P-regulator blir sløyfetransferfunksjonen $h_0(s) = K_p h_u(s)$ og dermed

$$h_0(j\omega) = \frac{K_p K}{j\omega \left(1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)} = \frac{K_p K}{-2\zeta \frac{\omega^2}{\omega_0} + j\omega \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)} \quad (2)$$

Faseverdien $\angle h_0(j\omega)$ er gitt av $-\angle n_0(j\omega)$ der $n_0(j\omega)$ er nevneren i (2). Med andre ord, av bidraget fra resonansleddet og integratoren. Ved å sette inn $\omega = \omega_0$ i (2), blir

$$h_0(j\omega) = -\frac{K_p K}{2\zeta \omega_0} \quad (3)$$

ser vi at $h_0(j\omega_0)$ er rent reell og dermed ligger langs den *negative* reelle halvakse. Dermed blir fasebidraget $\angle h_0(j\omega_0) = -180^\circ$.

c) Fra deloppgave b) har vi at $\omega_{180} = \omega_0$, dvs lik resonansfrekvensen. Forsterkning ved $\omega = \omega_{180}$ som plasserer systemet på stabilitetsgrensa er gitt av

$$|h_0(j\omega_0)| = \frac{K_p K}{\left| -2\zeta \frac{\omega^2}{\omega_0} + j\omega \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) \right|_{\omega=\omega_0}} = \frac{K_p K}{2\zeta \omega_0} \quad (4)$$

Siden $|h_0(j\omega_{180})| = |h_0(j\omega_0)| = 1$ når systemet har stående svingning og er på stabilitetsgrensa, så blir kritisk forsterkning K_{pk} gitt av

$$K_{pk} = \frac{2\zeta \omega_0}{K} = 1 \quad (5)$$

med innsatt tallverdiene $K = 4$, $\zeta = 0.2$ og $\omega_0 = 10$.

d) Stempelhastigheten v er gitt av den deriverte av stempelposisjonen $y(t)$. Dermed er $v(s) = sy(s)$. Følgelig blir

$$v(s) = \frac{K}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} u(s) \quad (6)$$

Sluttverditeoremet gir da at maksimal stasjonær stempelhastighet i uregulert form (åpen sløyfe) blir

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sv(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(s h_u(s) u_{max} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K}{s \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \right)} \frac{0.1}{s} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= 0.1K \\ &= 0.4 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (8)$$

e) Feilen $e = y_0 - y$ er gitt av

$$e(s) = N(s)y_0(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)} \frac{k}{s^2} \quad (9)$$

Sluttverditeoremet gir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{(1 + h_0(s))} \frac{k}{s^2} \quad (10)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s \left(1 + \frac{K_p K}{s \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \right)} \right)} \quad (11)$$

$$= \frac{k}{K_p K} \quad (12)$$

Dermed vil det bli stasjonært avvik når referansen er en rampefunksjon.

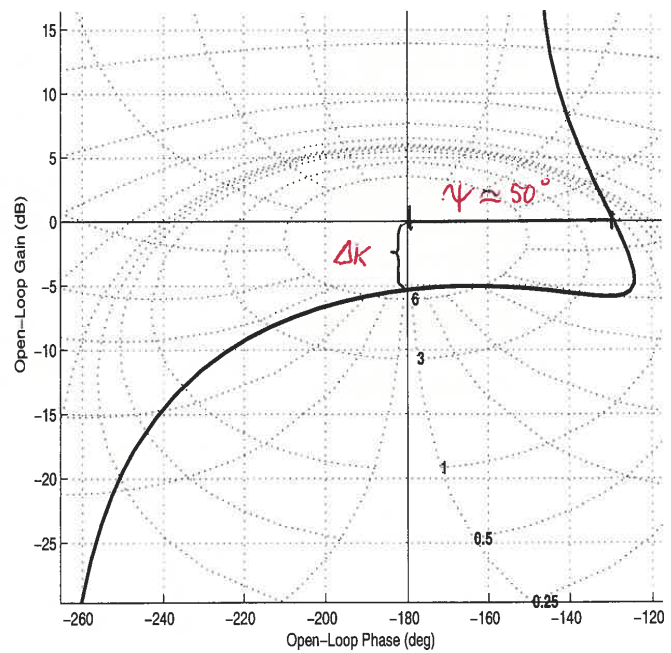
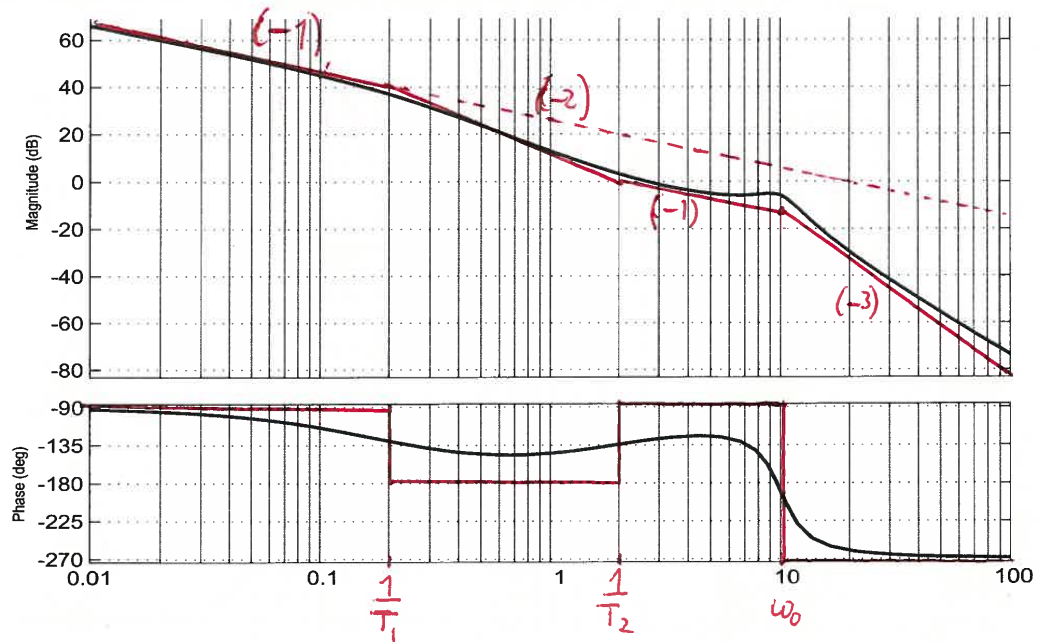
Alternativt svar: Referansen/rampefunksjonen er i s -planet $\frac{k}{s^2}$. For å oppnå null stasjonært avvik må det være *minst* like mange rene integrasjoner i $h_0(s)$ som i referansen. Siden det kun er én ren integrasjon i $h_0(s)$, vil det dermed bli stasjonært avvik.

f)

$$h_0(s) = h_u(s)h_r(s) = \frac{K(1 + T_2 s)}{s(1 + T_1 s) \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \right)} = \frac{20(1 + 0.5s)}{s(1 + 5s) \left(1 + 2\zeta \frac{s}{10} + \left(\frac{s}{10}\right)^2 \right)} \quad (13)$$

Dvs, $T_1 = 5$ og $T_2 = 0.5$. Assymptotisk amplitude og fase er tegnet inn i figur 1. Amplitude diagrammet starter med $|h_o(j\omega)|_{\omega \ll 1} = 20/\omega$ siden vi har én ren integrator. Asymptotene er da -1 per dekad og starter i $20 \log(20/0.01) = 66 \text{ dB}$. Alternativt kan man finne punktet $\omega = 20$ der asymptoten krysser 0 dB som den stiplede linjen indikerer. Neste knekk kommer ved $\omega = 1/T_1 = 0.2$ (tidskonstant) som gir -1 per dekad i bidrag, deretter en positiv knekk +1 per dekad for nullpunktet ved $\omega = 1/T_2 = 2$ og tilslutt en knekk ved $\omega = \omega_0 = 10$ fra resonansleddet som bidrar med -2 per dekad fra denne frekvensen. Asymptoten heller derfor -3 per dekad for frekvenser $\omega > \omega_0$.

En ekstra side hvis du trenger det for tegning:



Figur 1: Assymptotisk amplitude og fasediagram i oppgave 1

g) Fasemarginen Ψ leses av Nicholsdiagrammet og er ca 50° . Tilsvarende kan forsterkningsmarginen ΔK leses av til å være litt mindre enn 6 dB. Avlesning av $|N_{max}(j\omega)|$ gir at denne er litt større enn 6 dB. Ut ifra “normale” krav for forsterkning, fasemargin og $|N_{max}(j\omega)|$, henholdsvis 6 dB og 45° og 6 dB så vil regulatorforsterkningen med fordel kunne reduseres med 1 – 3 dB for å oppnå litt bedre marginer. (Hvis man kun ser på fasemargin og forsterkningsmargin og sier at disse er OK tilsammen, vil man få uttelling men ikke full score.)

Oppgave 2

To integratorer i serie

a) Definerer

$$\dot{x}_1 = u \quad (14)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \quad (15)$$

Definerer tilstandsvektoren $x = [x_1 \ x_2]^T$ som gir tilstandsrommodellen

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (16a)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} x \quad (16b)$$

Hvis man istedenfor definerer rekkefølgen av tilstandene x_1 og x_2 motsatt, dvs med x_2 som utgangen av den første integratoren og x_1 som utgangen av den andre, så blir

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (17)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (18)$$

og tilstandsrom representasjonen

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (19a)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} x \quad (19b)$$

Begge disse representasjonene gir full score, og hvilken man benytter har ikke påvirkning for det videre resultatet.

I delspørsmål b),c) og d) benyttes representasjonen (16).

b) Egenverdiene for systemet (16) fremgår av determinanten

$$|\mathbf{A} - \lambda I| = 0 \quad (20)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 0 \quad (21)$$

Altså, systemet har en dobbel egenverdi i origo (som også klart fremgår av blokkdiagrammet).

c) Transisjonsmatrisen $\Phi(t)$ finnes enklest ved rekkeutvikling av $e^{\mathbf{A}t}$:

$$\Phi(t) = I + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \dots \quad (22)$$

$$= I + \mathbf{A}t \quad (23)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

siden $\mathbf{A}^2 \equiv 0$ og dermed er også alle høyere ordens ledd i (22) identisk lik 0.

d) Systemet er ustabilt pga dobbel egenverdi i origo. Fasen vil være konstant -180° , og av (24) fremgår det av tilstand x_2 vil vokse ubegrenset.

To integratorer i parallell:

e) Med utgangene av integratorene definert som tilstander, blir

$$\dot{x}_1 = u \quad (25)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (26)$$

og dermed tilstandsrommodellen

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_p} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_p} u \quad (27a)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_p} x \quad (27b)$$

hvor indeksen p er brukt for å skille systemet fra det i serie.

f) Karakteristisk likning for (27b) er $\lambda^2 = 0$ og systemet har dermed dobbel egenverdi i origo.

g) På tilsvarende fremgangsmåte som i punkt c) blir transisjonsmatrisen for systemt (27b)

$$\Phi(t) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

h) Dette systemt vil være marginalt stabilt, selv om det er en dobbel egenverdi i origo. Av transisjonsmatrisen (28) fremgår det at ingen tilstander vil vokse ubegrenset. En impulsrespons vil føre til konstant verdi på utgangen, og det autonome systemet vil ikke konvergere mot null.

i) Oppgaven viser at sammenfallende egenverdier på den imaginære akse ikke nødvendigvis betyr at systemet er ustabilt.

Oppgave 3

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 x_3 \quad (29a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_3 \quad (29b)$$

$$\dot{x}_3 = x_1^2 \quad (29c)$$

a) Likevektspunktene til systemet (29) fås ved å sette

$$0 = -x_1 - x_2 x_3 \quad (30a)$$

$$0 = x_1 x_3 \quad (30b)$$

$$0 = x_1^2 \quad (30c)$$

Likning (30c) gir at $x_1 \equiv 0$. Derimot vil likningsettet (30) være oppfylt så lenge *minst* én av tilstandene x_2, x_3 er identisk lik 0. Dermed får vi likevektspunkter $(0, x_2, 0)$ og $(0, 0, x_3)$.

b) Gitt likevektspunktet $\tilde{x} = (0, 0, c)$, der $c \neq 0$. \mathbf{A} -matrisen i det lineariserte system rundt likevektspunktet \tilde{x} fremgår av Jacobien til likningssystemet (29):

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -x_3 & -x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ 2x_1 & 0 & 0 \end{array} \right] \bigg|_{x=\tilde{x}} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (31)$$

c) Egenverdiene for (31) fremgår av løse $|\mathbf{A} - \lambda I| = 0$. Dette gir karakteristisk polynom

$$\lambda(\lambda^2 + \lambda + c^2) = 0 \quad (32)$$

Av polynomet (32) får vi

$$\lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda^2 + \lambda + c^2 = 0 \quad (33)$$

Det er flere måter å undersøke plasseringene av røttene til andregradspolynomet i (33).

(i) Ved hjelp av Rouths kriterium: For et andregradspolynom $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ vil koeffesientene i venstre kolonne i Rouths talltabell være koeffesientene til selve polynomet, altså

$$\begin{array}{cc} a_2 & , \quad a_0 \\ a_1 & , \quad 0 \\ a_0 & \end{array}$$

Siden alle koeffisientene i andregradspolynomet i (33) er *positive* og $c \neq 0$, ligger begge røttene i venstre halvplan (se evt side 262 i Reguleringssteknikkboka).

(ii) Resultatet kan finnes ved å undersøke røttene av andregradspolynomet direkte:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4c^2} \quad (34)$$

Vi må undersøke røttenes plassering for forskjellige verdier av konstanten c for å avgjøre om systemet er stabilt. Dvs, vi må undersøke røttene for fortegn av diskriminanten $1 - 4c^2$:

- (a) Dersom $1 - 4c^2 = 0$ blir systemet stabilt med to poler i venstre halvplan og i origo.
- (b) Dersom $1 - 4c^2 < 0$ vil polene være komplekskonjugerte med negativ realdel og systemet er fortsatt stabilt.
- (c) Dersom $1 - 4c^2 > 0$, dvs $0 < |c| < 1/2$ vil rota være mindre enn 1, og begge røttene vil fortsatt være i venstre halvplan. Med kun én pol i origo, vil systemet fortsatt være stabilt.

Merk at siden vi krever at $c \neq 0$, vil rota aldri bli 1 og vi vil derfor aldri kunne få sammenfallende egenverdier i origo.

Det lineariserte systemet med \mathbf{A} -matrisen i (31) vil derfor være marginalt stabilt for alle verdier av $c \neq 0$, siden det er én pol i origo og to i venstre halvplan.

Oppgave 4

Systemet har transferfunksjon

$$h_0(s) = K_p \frac{s + 0.04}{s(s + 2)(s - 0.1)} \quad (35)$$

a) Systemet er åpent ustabilt med én pol i høyre halvplan. Dermed er $N_p = 1$. Det totale vinkelbidraget for vektoren $1 + h_0(s)$,

$$\Delta\angle(1 + h_0(s)) = -2\pi(N_n - N_p)$$

må da være 2π for at det lukkede systemet skal bli stabilt. Nyquist diagrammet viser at Nyquistkurven omslutter punktet $(-1, 0)$ én gang i positiv vinkelretning når $K_p = 1$, altså vinkelbidraget er 2π . Det lukkede systemet vil derfor være *stabilt* for dette valget av K_p .

b) Når K_p minkes vil radien i Nyquistkurven minkes. Punktet $(-1, 0)$ vil da omsider havne utenfor den høyreliggende sløyfen i Nyquistkurven i oppgavesettet. Vinkelbidraget $\Delta\angle(1 + h_0(s)) = -2\pi(N_n - N_p) = -2\pi$. Siden $N_p = 1$ blir dermed $N_n = 2$, og det lukkede systemet vil derfor ha to poler i høyre halvplan når K_p blir liten, men fortsatt positiv. Resultatet kan også finnes ut fra Rouths tabell ved å sette opp karakteristisk polynom for lukket sløyfe transferfunksjon,

$$s^3 + 1.9s^2 + (K_p - 0.2)s + 0.04K_p = 0 \quad (36)$$

og se på antall fortegnskift i venstre kolonne:

$$\begin{array}{ccc} 1 & , & K_p - 0.2 \\ 1.9 & , & 0.04K_p \\ \frac{1.9(K_p - 0.2) - 0.04K_p}{1.9} & & \\ 0.04K_p & & \end{array}$$

Når $0 < K_p < 0.2$ vil venstre kolonne i Rouths tabell få 2 fortegnskift, og det lukkede systemet vil derfor få to poler i høyre halvplan.

Oppgave 5

Fasit:

Sprangrespons	A	B	C	D	E	F
Nullpkt/pol konfigurasjon	2	5	4	3	6	1

Oppgave 6

Gitt

$$h_{u1}(s) = \frac{1}{(s + a)^2} \quad (37)$$

a) Forstyrrelsens bidrag på prosessen finnes ved å sette $h_r(s) = 0$, dvs, tilbakekoblingen er inaktiv. Hvis vi kaller punktet i summasjonspunktet rett før $h_{u2}(s)$ for \tilde{y} , så blir

$$\tilde{y}(s) = \frac{K}{1 + Ts} v(s) + h_{u1}(s) h_f(s) v(s) \quad (38)$$

og dermed

$$h_{fi}(s) = -\frac{K}{1 + Ts} \frac{(s + a)^2}{1} = -\frac{K(s + a)^2}{1 + Ts} \quad (39)$$

b) Transferfunksjonen $h_{yv}(s) = 0$ med ideell foroverkobling.

c) Ideell foroverkobling i likning (39) er ikke proper og dermed ikke fysisk realiserbar.