Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for teknisk kybernetikk

Faglig kontakt under eksamen
Navn:
Anne Karin Bondhus
Telefon: 73594390
Yilmaz Türkyilmaz
Telefon: 99575030

EKSAMEN I TTK4130
MODELLERING OG SIMULERING
30. mai 2005
Tid: 09:00-13:00

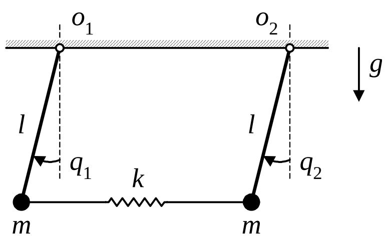
Hjelpemidler:
A: Alle kalkulatorer, trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Sensur:
Sensuren vil bli avsluttet i henhold til gjeldende regelverk.

Dette eksamensettet består av totalt 6 sider.

Oppgave 1) (25 %)

Vi ønsker å studere dynamikken til det systemet som er vist i Figur 1. Systemet består av to enkle pendler som er koblet sammen ved hjelp av en fjær med fjærkonstant k. Fjæren regnes som masseløs. Pendlene roterer fritt om punktene o_1 og o_2 i plan bevegelse. Hver pendel har masse m på den ene enden. Hver pendelstav har en lengde l og ingen masse. Vinklene mellom hver enkel pendelstav og vertikalen er gitt av q_1 og q_2. Tyngdeakselerasjonen er g. Vi antar små vinkler i pendelbevegelsene, slik at avstanden mellom massene kan tilnærmes med horisontalkomponenten av avstanden.



Figur 1: To enkle pendler koblet sammen med en fjær.

a) Sett opp bevegelsesligningene for systemet ved bruk av Lagranges ligning.

b) Lineariser modellen om $(q_1 = 0, \dot{q}_1 = 0, q_2 = 0, \dot{q}_2 = 0)$.

Oppgave 2) (15 %)

a) Gitt systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2\tan^{-1}(x_1 + x_2)\end{aligned}$$

Sett opp uttrykkene for integrasjon av systemet ved bruk av *Eksplisitt Euler.*

b) Gitt systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 \sin t\\ \dot{x}_2 &= x_1 \sin t - 2x_2\end{aligned}$$

hvor t er tidsvariabelen i systemet. Sett opp uttrykkene for integrasjon av systemet ved bruk av *trapesmetoden.*

c) Gitt systemet

$$\dddot{x} + 10\ddot{x} + (2 - \sin t)\dot{x} + 5x = 0$$

Sett opp uttrykkene for integrasjon av systemet ved bruk av *Lobatto IIIC orden 2.*

Oppgave 3) (20 %)

Et koordinatsystem a med ortonormale enhetsvektorer $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ roteres slik at det sammenfaller med et ønsket koordinatsystem b med ortonormale enhetsvektorer $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. De to koordinatsystemene er gitt i forhold til et inertielt system i ved hjelp av rotasjonsmatrisene R_a^i og R_b^i. Avviket i orientering er gitt av $\tilde{R}$ som er definert ved

$$\tilde{R} = R_a^i \left(R_b^i\right)^T$$

Alternativt, vi skriver

$$\tilde{R} = R_{k,\theta} = \{\tilde{r}_{ij}\} \tag{1}$$

og definerer

$$\mathbf{e} = \mathbf{k} \sin\theta$$

$\tilde{R}$ er rotasjonsmatrisen for rotasjon en vinkel θ om aksen gitt av enhetsvektoren $\mathbf{k}$.

a) Utled uttrykket for $\mathbf{e}$ som funksjon av $\{\tilde{r}_{ij}\}$.

b) Finn et uttrykk som relaterer $\tilde{R}$ til R_a^b når R_a^b oppfyller

$$R_a^i = R_b^i R_a^b$$

c) Gitt

$$R_a^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.76604 & -0.64279 \\ 0 & 0.64279 & 0.76604 \end{bmatrix}, \qquad R_b^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.73135 & -0.68200 \\ 0 & 0.68200 & 0.73135 \end{bmatrix}$$

finn $\mathbf{e}, \mathbf{k}, \theta$ for matrisen $\tilde{R}$ definert ved (1).

d) Vis at rotasjonsmatrisen

$$\mathbf{R}_{k,\theta} = \mathbf{k}^\times \sin\theta + \mathbf{k}\mathbf{k}^T (1 - \cos\theta) + \cos\theta \mathbf{I}$$

kan skrives på formen

$$\mathbf{R}_e(\eta, \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{I} + 2\eta\boldsymbol{\epsilon}^\times + 2\boldsymbol{\epsilon}^\times\boldsymbol{\epsilon}^\times$$

der η er realdelen, og $\boldsymbol{\epsilon}$ er vektordelen for kvaternionet til $R_{\mathbf{k},\theta}$.

e) Gitt

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Beregn Eulerparametrene η og $\boldsymbol{\epsilon}$ som svarer til $\mathbf{R}$.

Oppgave 4) (20 %)

a) Gitt transferfunksjonen

$$H_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Er transferfunksjonen positiv reell ?

b) Gitt transferfunksjonen

$$H_1(s) = \frac{e^s + e^{-s}}{e^s - e^{-s}}$$

Er transferfunksjonen positiv reell ?

c) Forklar sammenhengen mellom passivitet og positiv reelle transferfunsjoner.

d) Gitt differensialligningen

$$a\dot{y} + y = u \tag{2}$$

hvor a er en positiv konstant. Vis at systemet i (2) med inngang u og utgang y er passivt.

e) Gitt differansialligningen

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

der

$$|\eta| = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \leq 1$$

Vis at systemet i (3) med inngang $\boldsymbol{\omega}$ og utgang $\boldsymbol{\epsilon}$ er passivt ($\boldsymbol{\epsilon}$ utvikler seg etter differensiallikningen for vektordelen $\boldsymbol{\epsilon}$ til et kvaternion, og η er realdelen)

Oppgave 5) (20 %)

a) Anta isentropiske folhold. Vis at for en ideell gass gjelder

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{K}{K-1}}$$

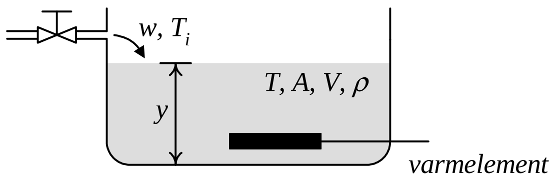
hvor (T_1, p_1) er temperatur og trykk ved tilstand 1, og (T_2, p_2) er temperatur og trykk for tilstand 2,og $K := \frac{c_p}{c_v}$.
b) En isolert tank med konstant volum V inneholder en gass. Det antas at det ikke er lekkasje ut av volumet. For denne tanken gjelder

$$\frac{D}{Dt} \int\int\int_V \rho s dV \geq 0 \tag{4}$$

Hva er den fysiske tolkningen av (4) ?

c) En varmetank med tversnittareal A fylles med en væske med massestrøm w og temperatur T_i. Væskens volum er V, tetthet er ρ og høyde er y. Væsken varmes opp i varmetanken ved hjelp av et varmelement med temperatur T_e. Varmeovergangskoeffisienten fra varmeelemetet til væsken er G per lengdeenhet, og lengden av varmelementet er L. Væsken regnes som inkomressibel, og man kan da vise at $c_v = c_p$. Spesifikk indre energi for væskestrømmen inn i tanken er gitt av $u_i = c_v T_i$.

Vi ser bort fra kinetisk energi og potensiell energi (den er liten i forhold til den indre energien). Sett opp tilstandsrommodellen for høyden y og temperaturen T til væsken. Forklar hva ligningene du bruker uttrykker.



Figur 2: Varmetank