Formelsamling $\boxed{\text{til eksamen 10/6-17}}$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sf(s)\,,\ \text{og}\quad \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sf(s) \tag{V.1}$$

$$\mathcal{L}[\dot f(t)] = sf(s) - f(t)\big|_{t=0} \quad , \quad \mathcal{L}[\ddot f(t)] = s^2 f(s) - sf(t)\big|_{t=0} - \dot f(t)\big|_{t=0} \tag{V.2}$$

$$\text{Residueregning:}\quad f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\{(s-a_i)^m f(s)\mathrm{e}^{st}\}\right]\Bigg|_{s=a_i} \tag{V.3}$$

$$\text{Tidsforsinkelse:}\quad \mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \tag{V.4}$$

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \tag{V.5}$$

Rettlinja bevegelse: $f = ma$, Rotasjon: $d = J\dot\omega$; med masse på vektløs stang har vi $J = ml^2$ (V.6)

Ohms lov: $u = Ri$, kondensator (kapasitans): $i = C\frac{du}{dt}$; induktans: $u = L\frac{di}{dt}$ (V.7)

Folding (konvolusjon): $y(t) = h(t)*u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$, $\mathcal{L}[h(t)*u(t)] = h(s)u(s)$ (V.8)

Linearisering:

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}^p,\,\mathbf{u}^p}\Delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\bigg|_{\mathbf{x}^p,\,\mathbf{u}^p}\Delta\boldsymbol{u}\quad ,\mathbf{A} = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}^p,\,\mathbf{u}^p} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}^p,\,\mathbf{u}^p} \tag{V.9}$$

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\boldsymbol{u}$$

$$x[\mathrm{dB}] = 20\cdot\log_{10}(x),\qquad x = 10^{(x[\mathrm{dB}])/20} \tag{V.10}$$

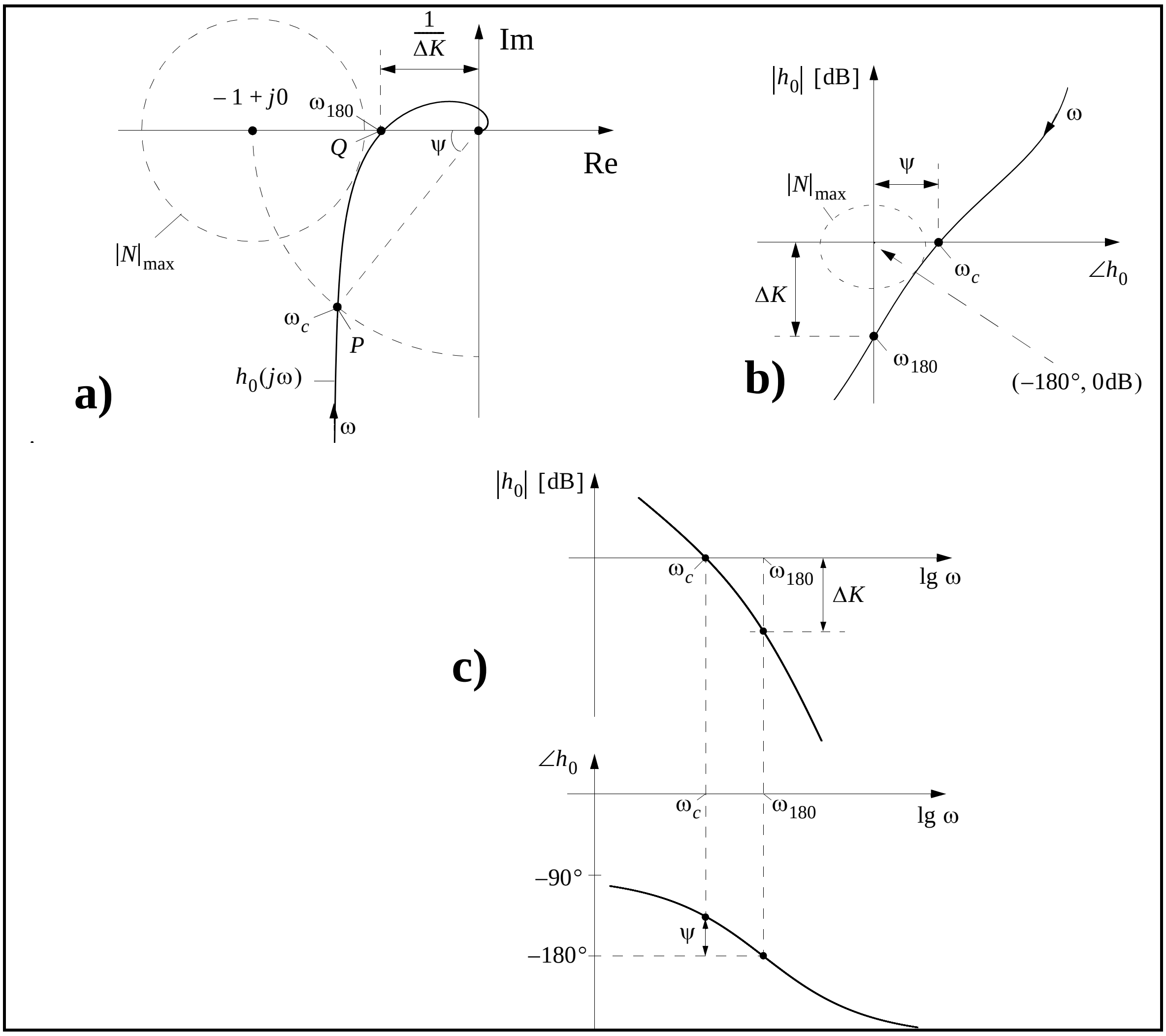
$$N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)},\quad M(s) = \frac{h_0}{1+h_0(s)},\quad M(s)+N(s) = 1,\quad \frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) \tag{V.11}$$

Nyquists stabilitetskriterium: Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining (dreieretning er definert positiv *mot* urviseren) lik

$$\Delta\angle(1+h_0) = -2\pi(N_n - N_p)\qquad \text{når } \omega \text{ går fra} -\infty \text{ til } \infty \tag{V.12}$$

N_n er antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoplede) system. $N_n = 0$ kreves for stabilt system.

(V.13)



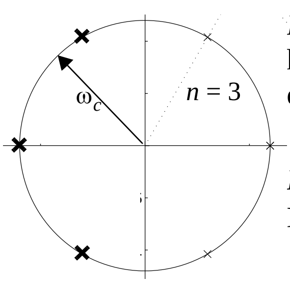
$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180°), \qquad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})| \quad , \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \tag{V.14}$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2} \tag{V.15}$$

Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-regler:

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$0.85T_k$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$

$$, \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \tag{V.16}$$



Butterworth lavpassfilter av orden n: De *n* polene i $h(s)$ ligger på hjørnene i venstre halvdel av en regulær mangekant med *2n* sider, der mangekanten er plassert slik at den ligger symmetrisk om Im-aksen, og hvor avstanden fra origo og ut til hvert hjørne (= pol) er filterets knekkfrekvens ω_c. (V.17)

Høypassfilter med knekkfrekvens ω_c: Lag først lavpassfilter med ω_c. Erstatt så alle *s* i transferfunksjonen med ω_c^2/s . (V.18)

Røtter er bare i v.h.p. for polynom $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$, hvis og bare hvis alle koeffisienter har samme fortegn.

For 3. ordens polynom $\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ kreves *i tillegg* $\alpha_1\alpha_2 > \alpha_0\alpha_3$ (V.19)

Skogestads "SIMC" åpen-sløyfe-metode for PI-innstilling:

Sett på et sprang. Anta at prosessen $\approx h_u = \dfrac{Ke^{-\tau s}}{1 + T_1 s}$. Mål (dvs. anslå) T_1, K og τ ut fra responsen.

Velg så $K_p = \dfrac{T_1}{K(\tau + T_L)}$ og $T_i = \min(T_1, 4(T_L + \tau))$, hvor T_L er ønsket tidskonstant i responsen til det lukkede systemet. T_L bør velges som $T_L > 0.3\tau$, f. eks. $T_L = \tau$. (V.20)

PI-regulator: $h_r = K_p \dfrac{1 + T_i s}{T_i s}$ (V.21)

begrenset PD-regulator: $h_r = K_p \dfrac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}$ (V.22)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdot & \cdot & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(V.23)}$$

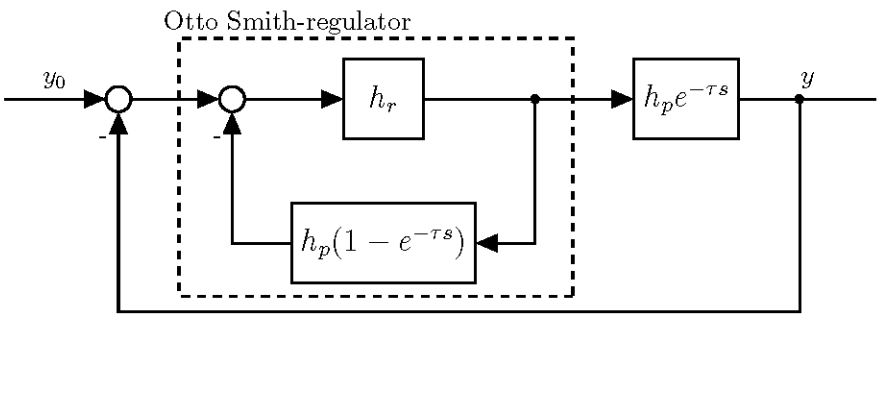
$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{n-1} \end{bmatrix}$$

gir $$\frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} \qquad \text{(V.24)}$$

Diskret regulator: Alle s erstattes med $\dfrac{2}{T}\,\dfrac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator. (V.25)

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører
tilnærma en ekstra tidsforsinkelse = $T/2$ i sløyfetransferfunksjonen. (V.26)

(V.27)



Sammenhenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

		1. orden (eks.: RC-krets)	**Høyere orden**
1.	Differensiallikning	$\dot{x} = ax + bu \qquad (\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$
2.	Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(t=0) + \frac{b}{s-a}u(s)$	$\mathbf{x}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(t=0) + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)$
3.	Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) \qquad + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$	$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \qquad + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$ [1]
4.	Dekopling	(Trivielt:) $A = a = \lambda =$ skalar	$A = M\Lambda M^{-1} \quad , \quad e^{At} = Me^{\Lambda t}M^{-1} \quad , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5.	Rekkeutvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \ldots$	$e^{\boldsymbol{A}t} = \Phi(t) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!} + \boldsymbol{A}^3\frac{t^3}{3!} + \ldots$ [2]
6.	$(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} (s)$	$e^{at} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a} \qquad (\frac{1}{T}e^{-t/T} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+Ts})$	$e^{\boldsymbol{A}t} = \Phi(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$
7.	Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \qquad y(s) = c\frac{b}{s-a}u(s) \qquad h(s) = \frac{cb}{s-a}$	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) \qquad H(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$
8.	Impulsrespons	$h(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} h(s) \qquad h(t) = cbe^{at}$	[3] $h(t) = \boldsymbol{c}^T e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{b}$ [4] $\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} h(s) = \boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$

[1] $\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B} * \boldsymbol{u}(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}(s)$

[2] NB: $e^{\boldsymbol{A}t} \neq \left\{e^{a_{ij}t}\right\}$, bortsett fra når $A = \Lambda$ er diagonal.

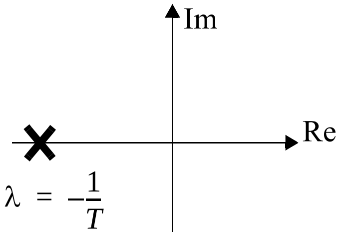
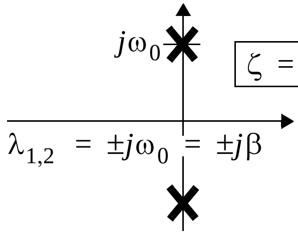
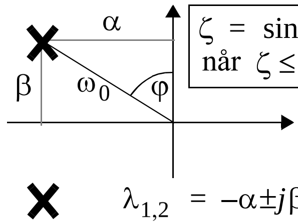
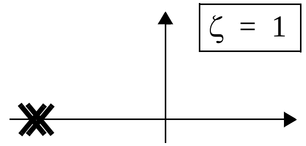
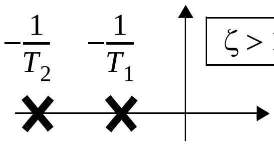
[3] Antar nå at u og y er skalare.

[4] Hvis y og u er skalare og $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ så har vi fra 3. linje at $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

Tilstandsrom: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$. Egenverdier følger av: $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$

Laplace: $H(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\frac{\text{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{B}$ $\Rightarrow$ Polene gitt av nevneren: $|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$.

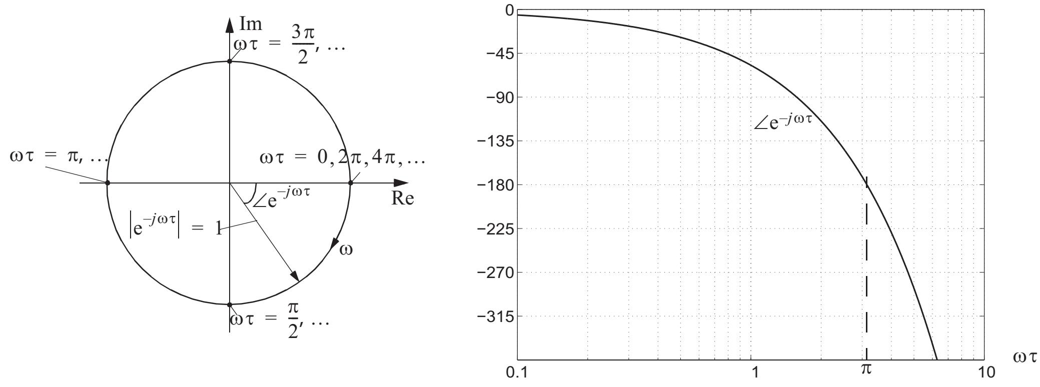
$\Rightarrow$ poler = egenverdier

Orden	Transferfunksjon $h(s)$	Poler	Impuls- og sprangresponser
1. orden	$h(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{\frac{K}{T}}{s+\frac{1}{T}} = \frac{-K\lambda}{s-\lambda}$	 $\lambda = -\frac{1}{T}$	impulsrespons: $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T}e^{-t/T}$ sprangrespons: $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau$ $= K(1-e^{-t/T})$
2. orden, $\zeta = 0$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2+1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2+\omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}$	 $\boxed{\zeta = 0}$ $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0 = \pm j\beta$	$h(t) = K\omega_0 \sin\omega_0 t$ $k(t) = K(1-\cos\omega_0 t)$
2. orden, $\zeta < 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2+2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)+1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}$ $= \frac{K(\alpha^2+\beta^2)}{s^2+2\alpha s+(\alpha^2+\beta^2)}$, $\boxed{\omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$	 $\boxed{\zeta = \sin\varphi, \text{ når } \zeta \le 1}$ $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$	$h(t) = K\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t$ $k(t) = K\left(1-\frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\cos(\beta t-\varphi)\right)$
2. orden, $\zeta = 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2+2\left(\frac{s}{\omega_0}\right)+1} = \frac{K\omega_0^2}{(s+\omega_0)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s-\lambda)^2} = \frac{\frac{K}{T^2}}{\left(s+\frac{1}{T}\right)^2}$	 $\boxed{\zeta = 1}$ $\lambda_{1,2} = -\alpha = -\omega_0 = -\frac{1}{T}$	$h(t) = \frac{K}{T^2}te^{-t/T}$ $k(t) = K\left(1-\left[1+\frac{t}{T}\right]e^{-t/T}\right)$
2. orden, $\zeta > 1$	$\frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} = \frac{\frac{K}{T_1T_2}}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}$	$-\frac{1}{T_2}$ $-\frac{1}{T_1}$  $\boxed{\zeta > 1}$	$h(t) = \frac{K}{T_1-T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}}-e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$ $k(t) = K\left(1+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}-\frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}\ ,\quad \zeta = \frac{-(\lambda_1+\lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\text{, gjelder for } \textit{alle } \lambda \ne 0}$$

Utdrag fra lærebok, tre sider

Figur 6.17
Nyquist-diagram og faseforløp i Bodediagram for $e^{-j\omega\tau}$



6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram (= bode-diagram)

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\ldots)}{(\ldots)(a+s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\ldots)}{(\ldots)(1+T's)}$$

der $K' = K/a$ og $T' = 1/a$. Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i $h(s)$. Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\ldots)}{(\ldots)(c+bs+as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\ldots)}{(\ldots)\left(1+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

der $K' = K/c$ og $\omega_0 = \sqrt{c/a}$. Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for $s = j0$. Forsterkning i alle ledd "samles" da i en felles K', fra nå av bare kalt K.

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ($\omega \ll 1$). (Vi symboliserer "liten ω" med å skrive $\omega \ll 1$.) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har q integrasjoner i $h(s)$, $q > 0$, har vi

$$h(j\omega)_{\omega\ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q} \quad , \quad |h(j\omega)|_{\omega\ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q} \quad , \quad \angle h(j\omega)_{\omega\ll 1} \approx (-q)\cdot 90^\circ$$

q kan selvsagt være lik 0, da er vi over i *Tilfelle b)* nedenfor.

Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning $-q$ og skjære 0-dB-linjen i $\omega = K^{1/q}$. Dermed kan vi fastlegge venstre del av $|h(j\omega)|_{as}$ og 0-dB-linjen (subskript $_{as}$ betyr "asymptotisk verdi av". Se forøvrig figur 6.18).

Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i $(-q)\cdot 90^\circ$.

Tilfelle b): Ingen reine integrasjoner i $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi $|h(j\omega)|_{\omega\ll 1} = K$, dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i K [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i 0°.

3. Videre amplitudeforløp

   Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

   Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen ω_0 i et resonansledd.

   Finn helningen p på asymptoten til leddet du betrakter. $p = 1$ for nullpunktsledd, -1 for tidskonstantledd og -2 for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning $+\,p$.

   Sett "minste knekkfrekvens" $=$ etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

   Videre faseforløp

   Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med $p\cdot 90^\circ$ målt fra forrige asymptote.

   For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen $1 - T_i s$ gir 90° knekk *ned*, ikke opp.

EKSEMPEL 6.6: Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd

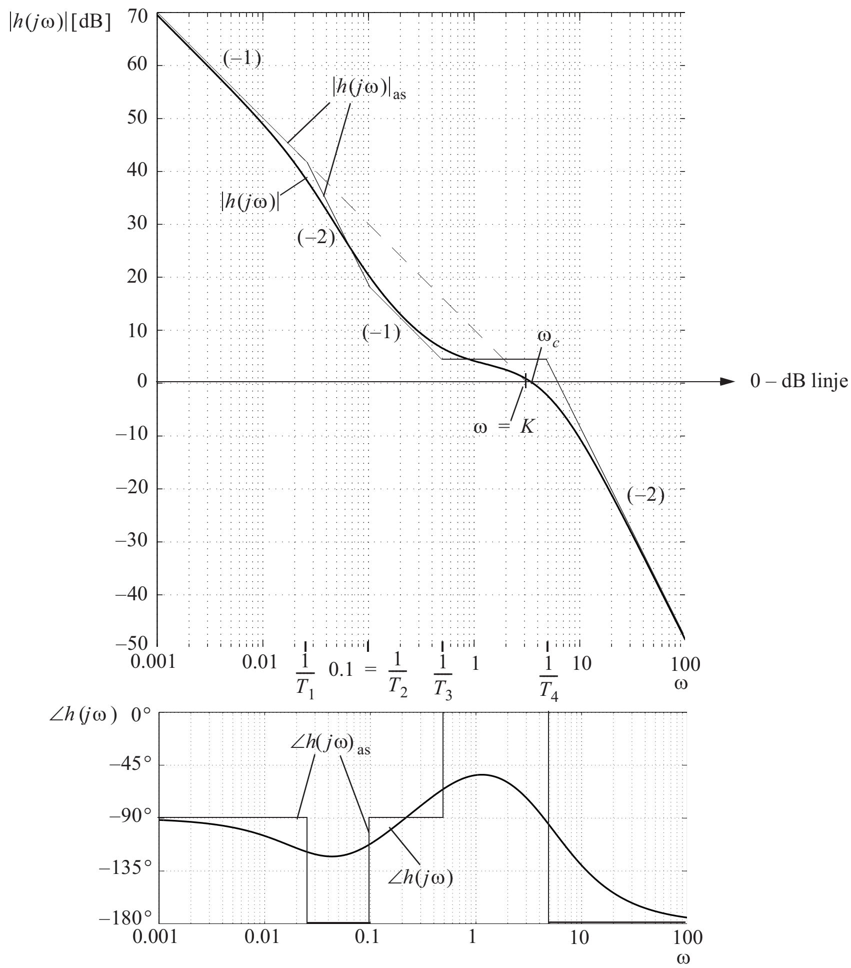
Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(1+T_2 s)(1+T_3 s)}{s(1+T_1 s)(1+T_4 s)^2} \tag{6.29}$$

der $K = 3$, $T_1 = 40$, $T_2 = 10$, $T_3 = 2$, $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg|h(j\omega)| = & \lg K + \lg|1+j\omega T_2| + \lg|1+j\omega T_3| \\ & - \lg\omega - \lg|1+j\omega T_1| - 2\lg|1+j\omega T_4| \end{aligned} \tag{6.30}$$



Figur 6.18 Bodediagram for $h(s)$, eksakt diagram, og asymptotisk diagram