Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Espen R. Jakobsen tlf. 73 59 35 12

EKSAMEN I TMA4120 MATEMATIKK 4K

OG

MA2105 KOMPLEKS FUNKSJONSTEORI MED DIFFERENSIALLIKNINGER.

Bokmål
15. desember 2008
kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 15.01.2009

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Hvilke av disse funksjonene er analytiske i $z = 1$?

$$(i) \quad z\,\mathrm{Re}(z) \qquad\qquad (ii) \quad z^2 \qquad\qquad (iii) \quad \frac{1}{z}$$

Oppgave 2 Bruk Laplace-transformen til å løse differensiallikningen

$$y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2t} + \delta(t-1), \quad t > 0,$$

med intitialverdiene $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$, og der δ er deltafunksjonen.

Oppgave 3 Funksjonen f er definert ved at følgende betingelser er oppfylt.

i) $f(x) = f(-x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) $f(x) = f(x+4)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

iii) $f(x) = 1 - x$ for $0 < x < 2$.

Skisser grafen til f for $-2 < x < 6$.

Finn Fourierrekka til f.

Oppgave 4

a) Regn ut integralet
$$\oint_C \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3} dz$$
der C er sirkelen $|z| = 1$ orientert mot klokka.

b) Regn ut det reelle integralet
$$\int_0^{\pi} \frac{2}{3\sin(2x) + 5}\, dx.$$
Obs: Legg merke til integrasjonsgrensene.

Oppgave 5 Gitt ei partiell differensiallikning

(1) $$u_t - u_x = u_{xxx}, \qquad t > 0,\ 0 < x < \tfrac{2\pi}{\sqrt{7}},$$

og rand- og initialbetingelser

(2) $$u(0,t) = 0 = u(\tfrac{2\pi}{\sqrt{7}}, t), \qquad t \geq 0,$$

(3) $$u(x,0) = 2e^{-\frac{x}{2}} \sin(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x), \qquad 0 \leq x \leq \tfrac{2\pi}{\sqrt{7}}.$$

a) La $u(x,t) = F(x)G(t)$ være en løsning av randverdiproblemet (1) og (2).
Anta at $F(x)G(t) \not\equiv 0$ og utled differensiallikninger og randbetingelser for F og G.
Løs differensiallikningen for G.

b) Finn en løsning på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ av rand- og initialverdiproblemet (1), (2) og (3).

Oppgave 6 Finn residyen i $z = 1$ til funksjonen
$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2} + e^{\frac{1}{1-z}}(z-1)^2.$$

Table of Laplace transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$