

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**

Det blir to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1150.

Eksamen i TTK4105 reguleringsteknikk

lørdag 10. juni 2017

Tid: 0900 - 1300

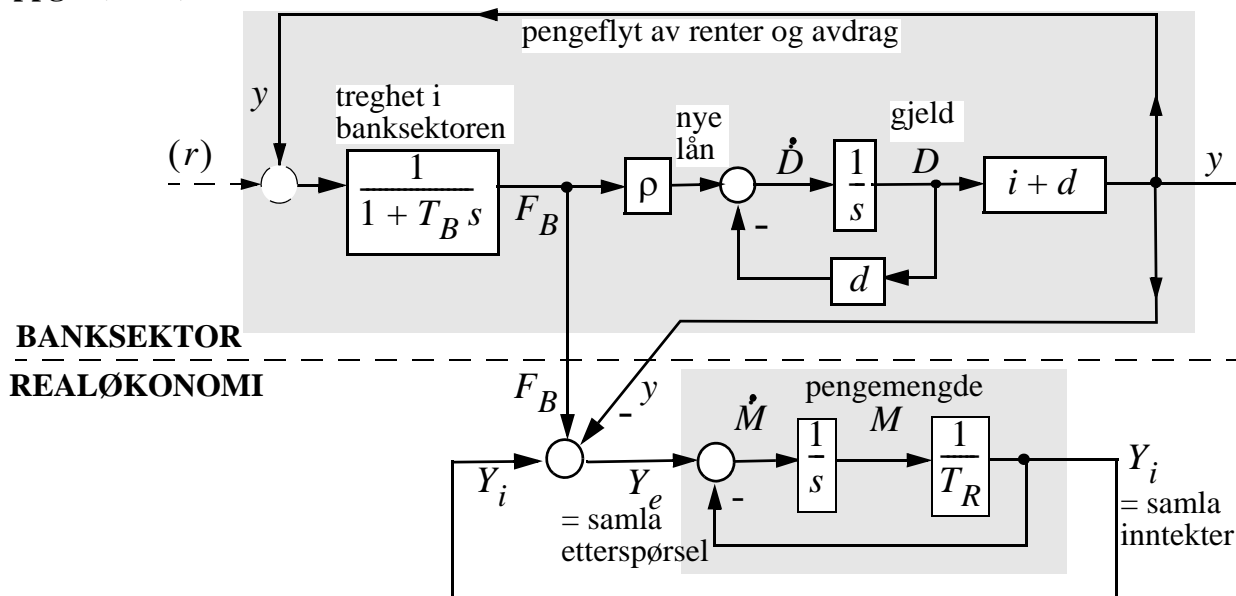
Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt og raskt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må kort forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga.

Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet".

Oppg 1 (34 %)



figur 1.1

Figur 1.1 viser en enkel samfunnsøkonomisk modell (du trenger ikke å ha tatt noen økonomifag for å løse denne oppgaven, det holder å betrakte dette som et generelt dynamisk system). Øverst er banksektoren, som tar inn renter og avdrag og låner ut penger igjen. Nederst er realøkonomien, hvor summen av individer og eiere i samfunnet mottar samla inntekt $Y_i(t)$ [\$/år] ("dollar per år", en strøm av penger), og bruker dette til forbruk og investeringer. For dette formål befinner det seg en total mengde penger M [\$] i realøkonomien, som sirkulerer der.

I tillegg låner realøkonomien (alle individer og bedriftseiere) penger av banksektoren, og banksektoren bruker også penger for å betale sine utgifter. Til sammen utgjør dette en pengestrøm fra banksektoren til realøkonomien F_B [\$\text{\\$/\text{år}}\$]. En andel $\rho < 1$ av F_B brukes til å gi nye lån, resten til å betale bankenes utgifter.

F_B , fratrullet $y = \text{renter} + \text{avdrag på lån, gir} - \text{summert med } Y_i - \text{en total etterspørsel } Y_e$.

Total gjeld for realøkonomien er D ("debt"), rentesatsen er i [$1/\text{år}$] (her er 6% rente $= 0.06$), og lån nedbetales med en faktor d [$1/\text{år}$] (slik at 0.05 her betyr at 5% av gjelda nedbetales pr. år).

Realøkonomien belastes med en pengestrøm y [\$\text{\\$/\text{år}}\$] tilbake til banksektoren for å betale renter og avdrag på gjeld, vi har $y = (i + d)D$. Pengestrømmen y passerer gjennom banksektoren med en treghet gitt av T_B , og kommer ut derfra som F_B .

(Til venstre i banksektoren er plassert en hjelpe-inngangsvariabel $r = 0$. Den er ikke nødvendig for å løse det meste av denne oppgaven, men vi bruker den blant annet for å lage et Nyquist-diagram lenger nede.)

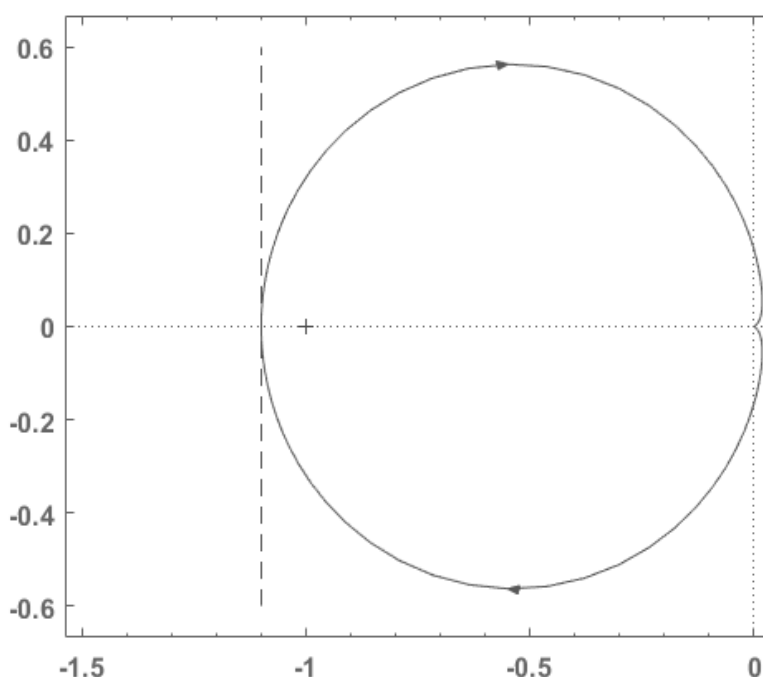
- a) (3%) Hva slags orden (n) har denne modellen? Begrunnet svar!
- b) (2%) Ved $t = 0$ har vi en gjeld D_0 . Vi ønsker å finne tidsforløpet $D(t)$. Ved å inspisere blokkdiagrammet ser vi at vi for dette formål kan ignorere realøkonomidelen av modellen. Forklar!
- c) (7 %) Vis at det karakteristiske polynom (nevneren i det lukkede systems transferfunksjon) for banksektor-modellen er $[1 - \rho(1 + i/d)] + (T_B + 1/d)s + (T_B/d)s^2$ (1.1)
- d) (4 %) Vis algebraisk, f.eks. ved å bruke rett uttrykk i formelsamling, at $D(t)$ vokser (= blir ustabil) hvis $\rho > \frac{d}{i+d}$ (du trenger altså ikke finne røtter i (1.1)). (1.2)

- e) (8 %) Vi bruker nå tallverdier
 $\rho = 0.5$, $d = 0.05$,
 $i = 0.06$, $T_B = 0.5$.
 Se Nyquist-diagrammet for h_0 til høyre.

Hvorfor må det her brukes et negativt fortegn i h_0 ?

Fra grafen: blir det lukkede system (u)stabil?

Sjekk stabilitetsgrense fra diagrammet opp mot kriteriet fra deloppgave d) og kommentér! Stemmer det?



Det oppgis at T_B er mye mindre enn $1/d$. **Bruk derfor fra nå av tilnærmelsen** $T_B = 0$.

f) (5 %) Finn løsningen $D(t)$ med startverdi $D(t=0) = D_0$.

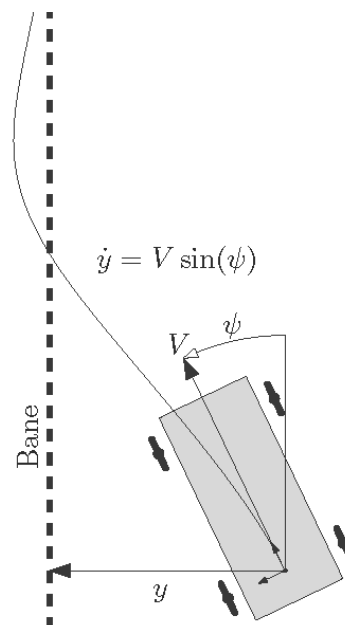
g) (3 %) Det oppgis at pengemengden i realøkonomien ved $t = 0$ er M_0 . Finn $M(t)$! (Tips: svaret er ekstreemt enkelt.)

h) (2 %) Ei gjeldskrise kan utvikle seg hvis $\rho > \frac{d}{i+d}$, for da øker $D(t)$ over tid.
Et uttrykk for at man nærmer seg krise, er et voksende forhold $x = \frac{D(t)}{Y_i(t)}$.
Finn x uttrykt blant annet ved D_0, M_0, T_R .

Oppg 2 (30 %)

Selvkjørende biler er i rask utvikling og reguleringssteknikk spiller en sentral rolle. Denne oppgaven ser på en viktig funksjon; evnen til å følge en bane ved hjelp av automatisk styring. Figur viser illustrerer de viktigste variablene. Bilen holder en hastighet V [m/s] som kan antas konstant. Normalavstanden til banen angis ved y [m] og vinkelen som dannes med banen gis ved ψ [rad]. Målet er å styre y ved hjelp av et automatisk ratt. Rattvinkelen u [rad] bestemmer svingekurvaturen.

figur 2.1



I denne oppgaven antas V konstant, og ψ liten. Newtons 2. lov ($F = ma$) inngår ikke, den trengs ikke her.
Det oppgis at vi kan sette $\dot{\psi}(t) = K_r V u(t)$, der K_r er en konstant.

a) (2%) Finn benevnninga til K_r !

Vinkelrett avstand y fra bilen til referansebanen finnes ved å dekomponere bilens hastighet.

Dette gir $\dot{y}(t) = V \sin[\psi(t)]$ (2.1)

b) (5%) Som nevnt er ψ liten. Vi antar at y og u er det også (vi er nær midtlinja og kjører langs denne med små justeringer). Og V er altså konstant. Finn matrisa A og pådragsvektor b i en linearisert tilstandsrommodell for systemet. Velg $x_1 = y$ og $x_2 = \psi$.

c) (4%) I dette spesielle tilfellet kan du finne transisjonsmatrisa *eksakt* ved rekkeutvikling, fordi alle ledd fra og med det tredje, forsvinner. Finn $\Phi(t)$.

d) (3%) Vis at linearisering av systemet gir følgende transferfunksjon fra rattvinkel u til avstand y :

$$\frac{y}{u}(s) = h_u(s) = \frac{K_r V^2}{s^2} \quad (2.2)$$

(... egentlig Δy og Δu , siden modellen gjelder for små utslag, men vi kan skrive u og y her siden variasjonene i u og tilstandsvektoren x er rundt arbeidspunkt 0).

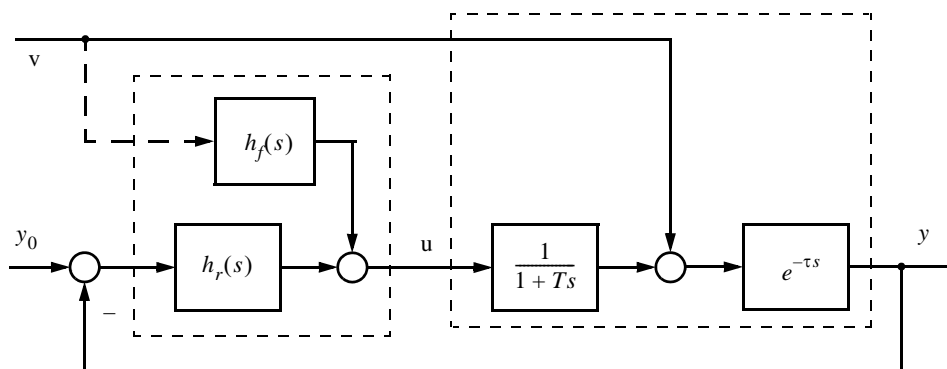
- e) (5 %) Vi prøver oss med proporsjonalregulering, $u = K_p(r - y)$. Vi har $r = 0$. Tegn en enkel skisse av bilens bane langs referansen (tips: bilsyke!). Begrunnet svar!
- f) (5%) Velg en bedre regulator enn $h_r = K_p$ og forklar hvilket problem den løser!
- g) (6%) Denne regulatoren vil gi null stasjonært avvik for en konstant referanse, og til og med for en referanse som endrer seg lineært (rampefunksjon). Vis det siste.

Oppg 3 (4 %)

Du har en prosess som skal reguleres med diskret regulator (tasting og holdeelement). Du har først regna på dette som om du har kontinuerlig regulator, og har laga et bodediagram som viser amplitude og fase for sløyfetransferfunksjonen h_0 . Kryssfrekvensen for h_0 i bodediagrammet med kontinuerlig regulator er ω_c . Du krever at fasemarginen ψ ikke skal bli mer enn 3 grader dårligere med diskret regulator. Finn den maksimale tastetid T du da kan ha!

Oppg 4 (21 %)

Gitt et reguleringssystem som vist i figur 4.1:



figur 4.1

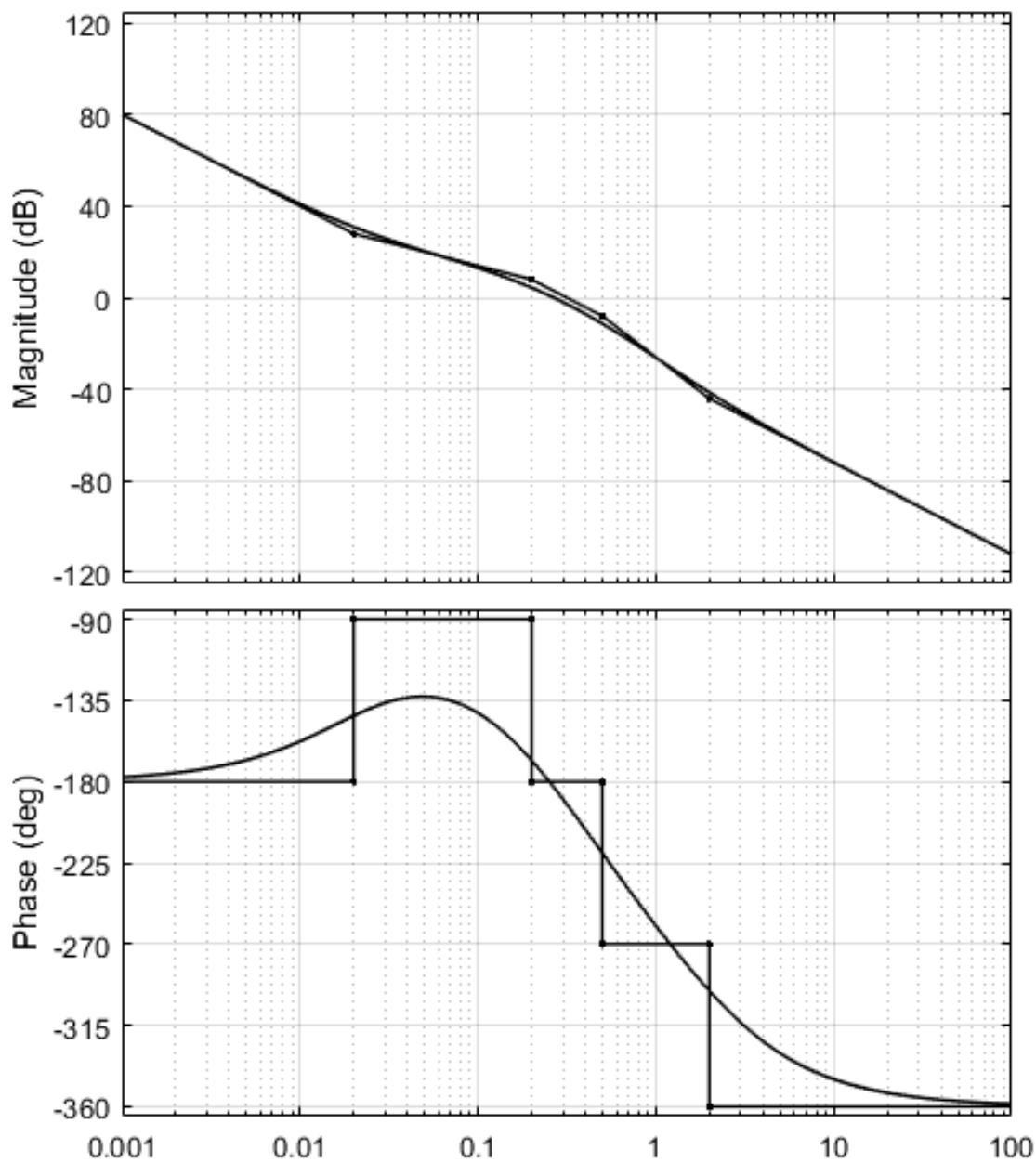
Problemstillingen er å holde y på referansen y_0 , på tross av (for det meste) en konstant forstyrrelse v . Det oppgis at $\tau = 50$ [s] og $T = 5$ [s].

- a) (3 %) **Anta først at forstyrrelsen ikke kan måles**, dette indikert med stiplet pil oppe til venstre i figuren. Du vil bruke en PI-regulator her. Hvorfor? Kort, verbalt svar tilstrekkelig.
- b) (4 %) Finn et par, K_p og T_i , ved å benytte reglene i SIMC-metoden.
- c) (2 %) Du kan få en bedre PI-løsning ved å la denne inngå i en Otto-Smith-regulator. Hvorfor?
- d) (4 %) Finn denne Otto-Smith-regulatoren $h_{r,os}(s)$, uttrykt blant annet ved K_p og T_i . Du skal ikke sette inn noen tallverdier for disse to, eller for τ og T , som også inngår i $h_{r,os}(s)$.
- e) (2 %) **Fra nå av: Du har greid å få til en måling av v** , og skal realisere en foroverkopling. Hva trenger du da å gjøre med regulatorløsninga? Kort, begrunnet svar!
- f) (4 %) Finn den ideelle foroverkopling $h_{fi}(s)$. Finn en mer realiserbar foroverkopling $h_f(s)$. Vis at den motvirker v 100% effektivt når v er en forstyrrelse med konstant verdi!

(punkt g) i oppgaven, se neste side)

- g) (2 %) Anta nå at τ er større i forhold til T . Vil foroverkoblinga være mer effektiv sammenligna med tilbakekoblinga, ved stor τ ? Begrunnet, verbalt svar!

Oppg 5 (11 %)



figur 5.1

Figur 5.1 viser bodediagram for en sløyfetransferfunksjon $h_0 = h_r h_u$ i et reguleringsystem, med asymptoter.

- a) (7 %) Finn h_0 ved hjelp av asymptotene!
(Tips: h_0 skal uttrykkes ved en forsterkning K og noen tidskonstanter. Regulatorens forsterkning er tatt med i K . Alle parametre som inngår er “runde” tall.)
- b) (4 %) Er det lukkede system med h_0 som sløyfetransferfunksjon stabilt? Begrunnet svar! Du må justere forsterkninga en god del. Hvor mye synes du er passe, og hvorfor?

Formelsamling

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \text{ og } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_i \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{ (s-a_i)^m f(s) e^{st} \} \right] \bigg|_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma, \text{ Rotasjon: } d = J\dot{\omega}; \text{ med masse p a vekt  s stang har vi } J = ml^2 \quad (\text{V.6})$$

$$\text{Ohms lov: } u = Ri, \quad \text{kondensator (kapasitans): } i = C \frac{du}{dt}; \quad \text{induktans: } u = L \frac{di}{dt} \quad (\text{V.7})$$

$$\text{Folding (konvolusjon): } y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t) * u(t)] = h(s) u(s) \quad (\text{V.8})$$

$$\begin{aligned} \text{Linearisering: } \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \bigg|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x), \quad x = 10^{(x[\text{dB}])/20} \quad (\text{V.10})$$

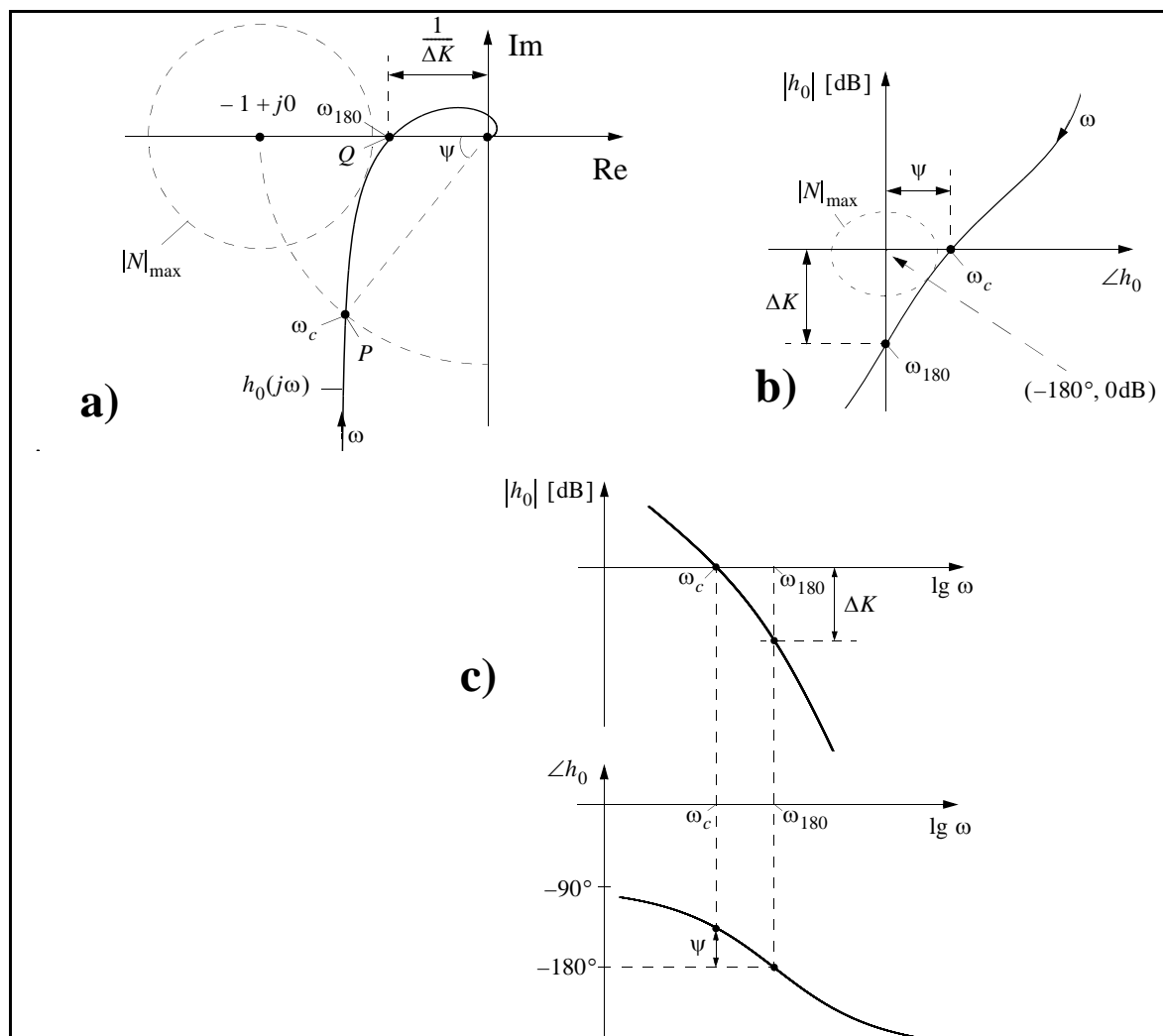
$$N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)}, \quad M(s) = \frac{h_0}{1+h_0(s)}, \quad M(s) + N(s) = 1, \quad \frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) \quad (\text{V.11})$$

Nyquists stabilitetskriterium: Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ f  r en netto vinkeldreining (dreieretning er definert positiv *mot* urviseren) lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.12})$$

N_n er antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoblede) system. $N_n = 0$ kreves for stabilt system.

(V.13)



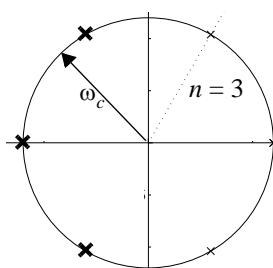
$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180^\circ), \quad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})|, \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \quad (\text{V.14})$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2} \quad (\text{V.15})$$

Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-regler:

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$0.85T_k$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$

$$, \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \quad (\text{V.16})$$



Butterworth lavpassfilter av orden n : De n polene i $h(s)$ ligger på hjørnene i venstre halvdel av en regulær mangekant med $2n$ sider, der mangeanten er plassert slik at den ligger symmetrisk om Im-aksen, og hvor avstanden fra origo og ut til hvert hjørne (= pol) er filterets knekkfrekvens ω_c . (V.17)

Høypassfilter med knekkfrekvens ω_c : Lag først lavpassfilter med ω_c . Erstatt så alle s i transferfunksjonen med ω_c^2/s . (V.18)

Røtter er bare i v.h.p. for polynom $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$, hvis og bare hvis alle koeffisienter har samme fortegn.

For 3. ordens polynom $\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ kreves *i tillegg* $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3$ (V.19)

Skogestads “SIMC” åpen-sløyfe-metode for PI-innstilling:

Sett på et sprang. Anta at prosessen $\approx h_u = \frac{K e^{-\tau s}}{1 + T_1 s}$. Mål (dvs. anslå) T_1 , K og τ ut fra responsen.

Velg så $K_p = \frac{T_1}{K(\tau + T_L)}$ og $T_i = \min(T_1, 4(T_L + \tau))$, hvor T_L er ønsket tidskonstant i

responsen til det lukkede systemet. T_L bør velges som $T_L > 0.3\tau$, f. eks. $T_L = \tau$. (V.20)

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.21})$$

$$\text{begrenset PD-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (\text{V.22})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdot & \cdot & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.23})$$

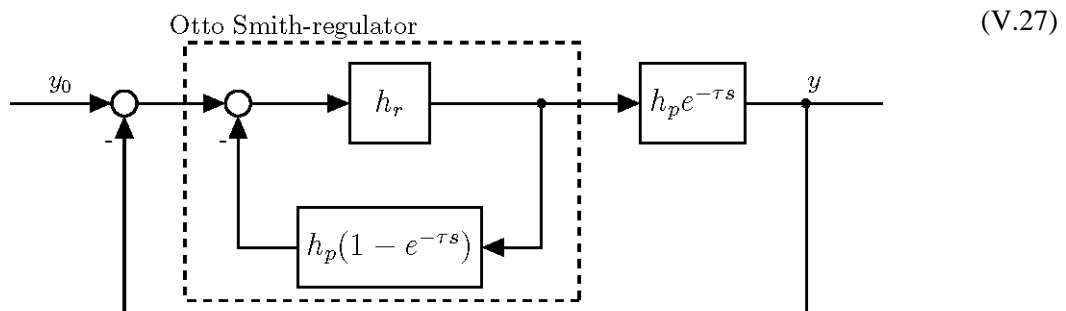
$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdot \cdot \cdot \ \rho_{n-1}]$$

$$\text{gir } \frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1} s^{n-1} + \dots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (\text{V.24})$$

Diskret regulator: Alle s erstattes med $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator. (V.25)

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører

tilnærma en ekstra tidsforsinkelse $= T/2$ i sløyfetransferfunksjonen. (V.26)



Sammenhenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

		1. orden (eks.: RC-krets)	Høyere orden
1.	Differensiallikning	$\dot{x} = ax + bu \quad (\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$
2.	Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(t=0) + \frac{b}{s-a}u(s)$	$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(t=0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$
3.	Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$	$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$ ¹⁾
4.	Dekopling	(Trivielt:) $A = a = \lambda = \text{skalar}$	$A = M\Lambda M^{-1} \quad , \quad e^{\mathbf{A}t} = Me^{\Lambda t}M^{-1} \quad , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5.	Rekkeutvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots$	$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3\frac{t^3}{3!} + \dots$ ²⁾
6.	$(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s)$	$e^{at} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad \left(\frac{1}{T}e^{-t/T} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1+Ts} \right)$	$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$
7.	Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \quad y(s) = c\frac{b}{s-a}u(s) \quad h(s) = \frac{cb}{s-a}$	$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s) \quad H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$
8.	Impulsrespons	$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} h(s) \quad h(t) = cbe^{at}$	³⁾ $h(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}$ ⁴⁾ $\xleftrightarrow{\mathcal{L}} h(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$

¹⁾ $\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} * \mathbf{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s)$

²⁾ NB: $e^{\mathbf{A}t} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$, bortsett fra når $A = \Lambda$ er diagonal.

³⁾ Antar nå at u og y er skalare.

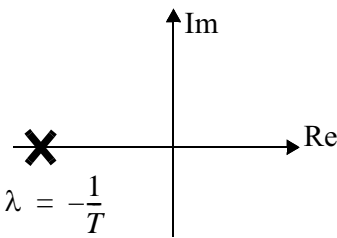
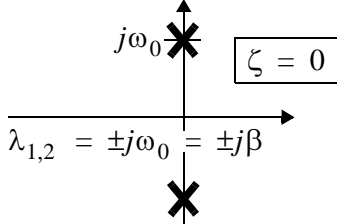
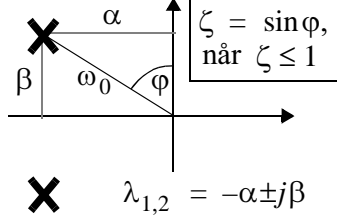
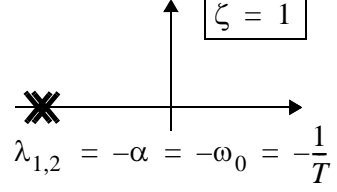
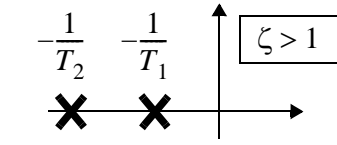
⁴⁾ Hvis y og u er skalare og $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ så har vi fra 3. linje at $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

Tilstandsrom: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u.$

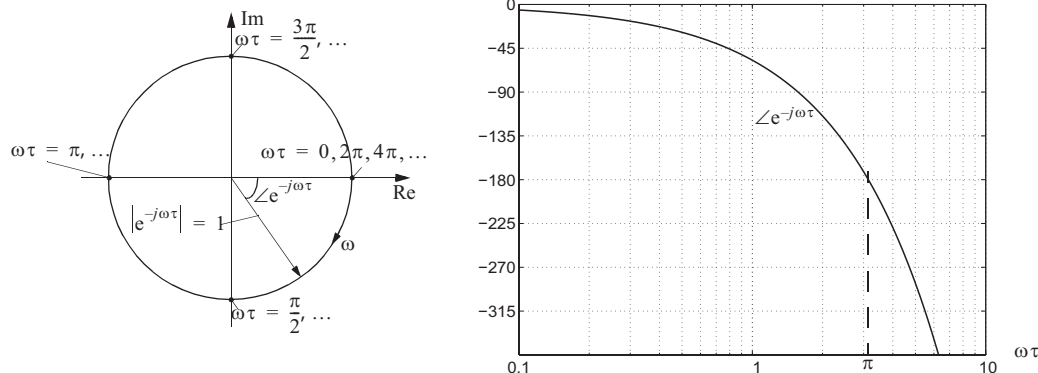
Eigenverdier følger av: $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$

Laplace: $H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}\frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}\mathbf{B} \Rightarrow$ Polene gitt av nevneren: $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.$

\Rightarrow poler = eigenverdier

Orden	Transferfunksjon $h(s)$	Poler	Impuls- og sprangresponser
1. orden	$h(s) = \frac{K}{1 + Ts} = \frac{\frac{K}{T}}{s + \frac{1}{T}} = \frac{-K\lambda}{s - \lambda}$	 <p>$\lambda = -\frac{1}{T}$</p>	<p>impulsrespons:</p> $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T}e^{-t/T}$ <p>sprangrespons:</p> $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau = K(1 - e^{-t/T})$
2. orden, $\zeta = 0$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$	 <p>$\zeta = 0$ $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0 = \pm j\beta$</p>	$h(t) = K\omega_0 \sin \omega_0 t$ $k(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)$
2. orden, $\zeta < 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $= \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$	 <p>$\zeta = \sin \varphi$, når $\zeta \leq 1$ $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$</p>	$h(t) = K\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t}\sin \beta t$ $k(t) = K\left(1 - \frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\cos(\beta t - \varphi)\right)$
2. orden, $\zeta = 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2} = \frac{\frac{K}{T^2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$	 <p>$\zeta = 1$ $\lambda_{1,2} = -\alpha = -\omega_0 = -\frac{1}{T}$</p>	$h(t) = \frac{K}{T^2}te^{-t/T}$ $k(t) = K\left(1 - \left[1 + \frac{t}{T}\right]e^{-t/T}\right)$
2. orden, $\zeta > 1$	$\frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{\frac{K}{T_1 T_2}}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$	 <p>$\zeta > 1$ $\frac{1}{T_2} \quad \frac{1}{T_1}$</p>	$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$ $k(t) = K\left(1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$
		$\omega_0 = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}, \quad \zeta = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, \text{ gjelder for alle } \lambda \neq 0$	

Figur 6.17
Nyquist-diagram
og faseforløp i
Bodediagram
for $e^{-j\omega\tau}$



6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram (= bode-diagram)

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(a+s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)(1+T's)}$$

der $K' = K/a$ og $T' = 1/a$. Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i $h(s)$. Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(c+bs+as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots) \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right)}$$

der $K' = K/c$ og $\omega_0 = \sqrt{c/a}$. Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for $s = j0$. Forsterkning i alle ledd “samles” da i en felles K' , fra nå av bare kalt K .

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ($\omega \ll 1$). (Vi symboliserer “liten ω ” med å skrive $\omega \ll 1$.) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har q integrasjoner i $h(s)$, $q > 0$, har vi

$$h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad |h(j\omega)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q}, \quad \angle h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx (-q) \cdot 90^\circ$$

q kan selvsagt være lik 0, da er vi over i Tilfelle b) nedenfor.

Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning $-q$ og skjære 0-dB-linjen i $\omega = K^{1/q}$. Dermed kan vi fastlegge venstre del av $|h(j\omega)|_{as}$ og 0-dB-linjen (subskript as betyr “asymptotisk verdi av”). Se forøvrig figur 6.18).

Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i $(-q) \cdot 90^\circ$.

Tilfelle b): Ingen reine integrasjoner i $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi $|h(j\omega)|_{\omega \ll 1} = K$, dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i K [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i 0° .

3. Videre amplitudeforløp

Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen ω_0 i et resonansledd.

Finn helningen p på asymptoten til leddet du betrakter. $p = 1$ for nullpunktsledd, -1 for tidskonstantledd og -2 for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning $+p$.

Sett “minste knekkfrekvens” = etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

Videre faseforløp

Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med $p \cdot 90^\circ$ målt fra forrige asymptote.

For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen $1 - T_i s$ gir 90° knekk *ned*, ikke opp.

EKSEMPEL 6.6: Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd

Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(1 + T_2s)(1 + T_3s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_4s)^2} \quad (6.29)$$

der $K = 3$, $T_1 = 40$, $T_2 = 10$, $T_3 = 2$, $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg |h(j\omega)| = & \lg K + \lg |1 + j\omega T_2| + \lg |1 + j\omega T_3| \\ & - \lg \omega - \lg |1 + j\omega T_1| - 2 \lg |1 + j\omega T_4| \end{aligned} \quad (6.30)$$

Figur 6.18
Bodediagram for
 $h(s)$, eksakt
diagram, og
asymptotisk
diagram

