Eksamen i TTK4105 Reguleringsteknikk

Løsningsforslag

lørdag 10. juni 2017

Oppgave 1

a)

Det er to integratorer, og en 1. ordens blokk som inneholder en integrator. Det gir orden $n = 3$.

b)

Nedre del av modellen er bare påvirka av øvre del, men virker ikke tilbake på øvre del. $D(t)$ er altså ikke påvirket av nedre del.

c)

Finn først h_0:

$$h_0(s) = \frac{1}{1 + T_B s}\rho\frac{1}{s + d}(i + d) = \frac{\rho(i + d)}{(1 + T_B s)(s + d)} \tag{1.1}$$

og deretter (minustegnet i nevneren kommer av positiv tilbakekobling av y):

$$\begin{aligned}\frac{y}{r}(s) &= \frac{h_0(s)}{1 - h_0(s)} = \frac{t_0(s)}{n_0(s) - t_0(s)} = \frac{\rho(i + d)}{(1 + T_B s)(s + d) - \rho(i + d)} \\ &= \frac{\rho(i/d + 1)}{(T_B/d)s^2 + (T_B + 1/d)s + 1 - \rho(1 + i/d)}\end{aligned} \tag{1.2}$$

d)

Formel (V.18) i formelsamlinga sier at for et 2.ordens polynom er alle røttene i vhp. hvis alle koeffisentene har samme fortegn. Koeffisenten $1 - \rho(1 + i/d)$ er den eneste som ikke alltid er positiv. Løses ulikheten $1 - \rho(1 + i/d) < 0$ for ρ får man (1.2) i oppgavesettet.

e)

For å få negativ tilbakekobling må vi putte inn et negativt fortegn i forovergreina, noe vi gjorde allerede i deloppgave c). Nyquist forutsetter negativ enhetstilbakekobling, det oppnår vi på denne måten.

h_0 er åpent stabilt, $N_p = 0$. Da skal vi ikke ha omslutting av -1 for stabilitet. Det har vi her, og det lukkede systemet er ustabilt.

For $s = j\omega$ med $\omega = 0$ skjærer grafen x-aksen i -1.1. $h_0|_{s=j0} = \rho(i + d)/d = -1.1$. For å komme på stabilitetsgrensa kan vi minke ρ til $\bar{\rho} = \rho/1.1$. Setter dette inn i formelen fra deloppgave d) for å sjekke:

$$\bar{\rho} = \frac{0.5}{1.1} = \frac{0.05}{0.05 + 0.06} = \frac{d}{i + d} \tag{1.3}$$

De er like, og dermed stemmer det grafiske og algebraiske kriteriet overens.

f)

Med $T_B = 0$ får vi

$$\dot{D} = \rho(i+d)D - dD = (\rho(i+d) - d)D \tag{1.4}$$

Setter vi så $\lambda = \rho(i+d) - d$ har vi $\dot{D} = \lambda D$ med $D(0) = D_0$ som gir løsningen $D(t) = D_0 e^{\lambda t}$ fra linje 3, kolonne 2, side 4 i formelsamlinga.

g)

Når $T_B = 0$ vil de to pilene fra øvre del kansellere hverandre, da $F_B = y$. Da har vi $\dot{M} = Y_i - Y_i = 0$, og $M(t) = M_0$, altså konstant.

h)

$$x = \frac{D(t)}{M(t)\frac{1}{T_R}} = \frac{D_0 T_R}{M_0} e^{\lambda t}, \quad \lambda = \rho(i+d) - d \tag{1.5}$$

Oppgave 2

a)

$$K_r = \frac{\dot{\psi}[\cancel{\text{rad}}/\cancel{\text{s}}]}{V[\text{m}/\cancel{\text{s}}]u[\cancel{\text{rad}}]} \Rightarrow K_r[1/\text{m}] \tag{2.1}$$

b)

Fra oppgaveteksten har vi $\dot{x}_2 = K_r V u$, og linearisering av (2.1) gir $\dot{x}_1 = V x_2$. Det gir matrisene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_r V \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

c)

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t = \begin{bmatrix} 1 & Vt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

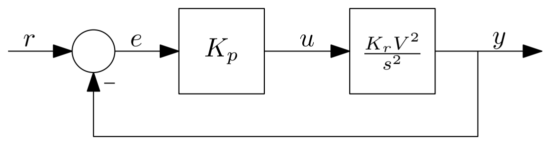
Fordi $\mathbf{A}^i = \mathbf{0}$ for $i > 1$.

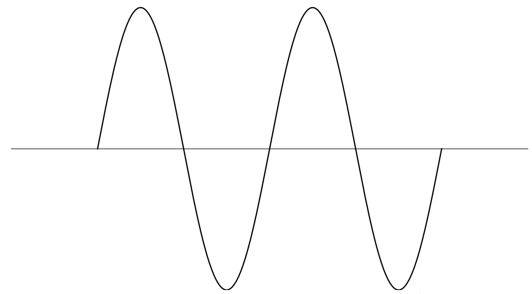
d)

Velger vi $y = x_1$ som utgang blir målevektoren $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Da får vi

$$h_u(s) = \frac{y}{u}(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -V \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K_r V \end{bmatrix} = \frac{K_r V^2}{s^2} \tag{2.4}$$

e)





Blokkdiagram og respons med proposjonalkontroller er vist over. Følgeforholdet $M(s)$ er gitt av

$$M(s) = \frac{\frac{K_p K_r V^2}{s^2}}{1 + \frac{K_p K_r V^2}{s^2}} = \frac{K}{s^2 + K}, \quad K = K_p K_r V^2 \tag{2.5}$$

som vi kjenner igjen som laplacetransformasjon av en sinussvingning $\sqrt{K}\sin(\sqrt{K}t)$.

f)

Vi velger en begrenset PD-regulator på formen

$$h_r(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \tag{2.6}$$

som flytter polene i det lukkede systemet fra imaginæraksen og inn i vhp, og gir et asymptotisk stabilt system.

g)

Med regulatoren fra forrige deloppgave får vi

$$h_0(s) = K_P \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \frac{K_r V^2}{s^2} = K \frac{1 + T_d s}{s^2(1 + \alpha T_d s)}, \quad K = K_p K_r V^2 \tag{2.7}$$

som gir avviksforholdet

$$N(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)} = \frac{n_0}{n_0 + t_0} = \frac{s^2(1 + \alpha T_d s)}{s^2(1 + \alpha T_d s) + K(1 + T_d s)} \tag{2.8}$$

og sluttverditeoremet gir til slutt

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sN(s)r(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^3(1 + \alpha T_d s)}{s^2(1 + \alpha T_d s) + K(1 + T_d s)} \frac{1}{s^2} = 0 \tag{2.9}$$

Oppgave 3

Fasen til h_0 forverres med $\omega_c T/2$ ved kryssfrekvensen. Med 3 grader fasemargin får man

$$\omega_c \frac{T}{2} = 3\frac{\pi}{180} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\pi}{30\omega_c} \tag{3.1}$$

Oppgave 4

a)

For å fjerne stasjonært avvik når $v = $konstant$\neq 0$.

b)

Bruker (V.20), og velger $T_L = \tau$:

$$K_p = \frac{T}{2K\tau} = \frac{1}{20} \tag{4.1}$$
$$T_i = \min(T, 8\tau) = 5 \tag{4.2}$$

c)

Da flyttes tidsforsinkelsen utafor den lukkede sløyfen. Dette tillater mye større K_p/mindre T_i, som gir raskere regulering.

d)

Bruker (V.27):

$$h_{r,os} = \frac{K_p \frac{1+T_i s}{T_i s}}{\frac{1}{1+Ts}(1 - e^{-\tau s})} = K_p \frac{(1 + T_i s)(1 + Ts)}{T_i s(1 - e^{-\tau s})} \tag{4.3}$$

e)

Ingenting. Valg av foroverkobling har ingen innflytelse på egenskapene i tilbakekoblinga.

f)

$$h_{fi}\left(\frac{1}{1+Ts}\right) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{fi} = -(1 + Ts) \tag{4.4}$$

Denne er ikke proper (Kap. 4.4.2 og eks. 6.2), og dermed ikke realiserbar. Velger derfor

$$h_f(s) = -\frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}, \quad 0 < \alpha \ll 1 \tag{4.5}$$

For en konstant forstyrrelse får vi

$$h_f(s)\frac{1}{1+Ts} + 1\bigg|_{s=0} = -1 \cdot \frac{1}{1 + T \cdot 0} + 1 = 0 \tag{4.6}$$

g)

Foroverkoblinga blir viktigere. Den virker før τ, mens tilbakekoblinga kan først virke etter τ.

Oppgave 5

a)

Venstre asymptote synker med 40dB/dekade, og fasen er -180°. Dermed har vi $h_0 \approx \frac{K}{s^2}$. Denne krysser 0dB-linja i $\omega_{c,as} = 0.1$. Dette gir forsterkning

$$\frac{K}{\omega_{c,as}^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \omega_{c,as}^2 = 0.01 \tag{5.1}$$

Videre leser vi av følgende endringer i asymptotisk forsterkning og fase:

ω	$\lvert h_0 \rvert$	$\angle h_0$	$T = 1/\omega$	Type ledd
0.02	knekk opp	+90°	50	teller $1 + T_1 s$
0.2	knekk ned	-90°	5	nevner $1 + T_2 s$
0.5	knekk ned	-90°	2	nevner $1 + T_3 s$
2	knekk opp	-90°	0.5	teller $1 - T_4 s$

som til sammen gir

$$h_0(s) = 0.01 \frac{(1 + 50s)(1 - 0.5s)}{s^2(1 + 5s)(1 + 2s)} \tag{5.2}$$

b)

I bodediagrammet ser vi at $\omega_c \approx \omega_{180}$, vi er på stabilitetsgrensa $\Rightarrow$ K må reduseres. Et godt valg er å redusere så mye at vi får maks fasemargin, som her er omtrent 45°. Dette oppnår vi med ny $\omega_c \approx 0.05$, og det får vi ved å flytte 0-dB linja 20dB oppover, dvs. K bør reduseres med 20dB.