

Løsningsforslag til eksamen i TTK4105 Reguleringssteknikk

19. mai 2012

Oppgave 1 (18%)

Gitt transferfunksjon

$$h_0(s) = K_p \frac{1}{(1 + Ts)(s - a)}, \quad a > 0. \quad (1)$$

- a) (2%) Prosessen er åpent ustabil pga pol $s = a$ i høyre halvplan.
b) (4%) Totalt vinkelbidrag er gitt av

$$\Delta\angle(1 + h_0(s)) = -2\pi(N_n - N_p). \quad (2)$$

For at det lukkede systemet skal bli stabilt, dvs $N_n = 0$ må dermed vinkelbidraget bli 2π .

- (i) Tilfelle 1, $T < \frac{1}{a}$: Systemet er lukket stabilt dersom $\frac{K_p}{a} > 1$ siden kurven omslutter punktet $(-1,0)$ én gang i positiv vinkeltretning for dette tilfellet.
(ii) Tilfelle 2, $T > \frac{1}{a}$: Kurven omslutter punktet $(-1,0)$ i negativ vinkelretning. Systemet kan dermed ikke bli stabilt i dette tilfellet.
c) (4%) Tilfelle 2, $T > \frac{1}{a}$:
(i) $K_p < a$: Vinkelbidraget $\angle(1 + h_0(s)) = 0$. Fra (2) så blir dermed $N_n = 1$.
(ii) $K_p > a$: Vinkelbidraget $\angle(1 + h_0(s)) = -2\pi \Rightarrow N_n = 2$.
d) (3%) Nevnerpolynom i lukket sløyfe:

$$n_0(s) + t_0(s) = K_p + Ts^2 + s(1 - Ta) - a \quad (3)$$

$$= s^2 + \left(\frac{1}{T} - a\right)s + \frac{1}{T}(K_p - a) \quad (4)$$

For at alle røttene skal ligge i venstre halvplan, så må alle koeffesientene i andregradspolynomet ha samme fortegn. Altså $\frac{1}{a} > T$ og $K_p > a$ siden koeffesienten for s^2 (1) er positiv. Dermed er det kun tilfelle **b)(i)** hvor systemet er lukket stabilt.

- e) (5%) Tilstandsrom model, styrbar kanonisk form. Transferfunksjon (1) kan skrives om til

$$h_0(s) = \frac{K_p}{Ts^2 + s(1 - Ta) - a} = \frac{\frac{K_p}{T}}{s^2 + \left(\frac{1}{T} - a\right)s - \frac{a}{T}}. \quad (5)$$

Fra formelsamling (V.19 - V.20):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a}{T} & -(\frac{1}{T} - a) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \frac{K_p}{T} & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Oppgave 2 (20%)

Gitt Bode plot i oppgaveteksten

a) (6%) $h_1(s)$ starter med -180° fase. Pga. -2 asymptote er dette en dobbel integrator. Deretter nullpkt i $\omega = \frac{1}{T_1}$ og pol i $\omega = \frac{1}{T_2}$. Dette gir h_1 på formen

$$h_1(s) = K \frac{1 + T_1 s}{s^2(1 + T_2 s)} \quad (9)$$

For lave frekvenser er

$$|h_1(j\omega)| \approx \frac{K}{\omega^2} \quad (10)$$

Gitt $|h_1(j\omega)| = a$ ved $\omega = 2$, så blir $K = 4a$. Regulatoren er en begrenset PD-regulator. Systemet er åpent ustabilt pga dobbel integrator, og fasen må dermed løftes for at det lukkede systemet skal bli stabilt. Begrenset PD-virkning gir lavere forsterkning ved høye frekvenser enn ideell PD-regulator. Dette forhindrer mulig forsterkning av høyfrekvent støy.

b) (4%) Ut ifra symmetribetraktninger på asymptotene, ser vi at 0-dB linja burde legges slik at den krysser midt mellom $1/T_1$ og $1/T_2$ for å få størst mulig fasemargin. Dette gir geometrisk middelvei (logaritmisk skala) $\omega_c = \left(\frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{T_2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

c) (6%) $h_2(s)$ består av en forsterkning, én integrator, ett nullpunkt og et førsteordens ledd:

$$h_2(s) = \frac{K'(1 - T_1 s)}{s(1 + T_1 s)}, \quad (11)$$

hvor $|h_1(j\omega)| = a$ ved $\omega = 10$, og det kun er én integrator. Dermed blir $K' = 10a$.

Systemet er et ikke-minimum fase system, og er spesielt vanskelig å regulere.

d) (4%) Indikert i asymptotisk fasediagram er $\omega_{180} = 1/T_1$. Fra

$$\Delta K = \frac{1}{|h_2(j\omega_{180})|} = \frac{1}{\frac{10a}{1/T_1}} = 2 \quad (12)$$

som gir $a = 0.05/T_1$ (6dB ≈ 2).

Oppgave 3 (23%)

Pendelystem med friksjon i festepunktet

a) (7%) Systemet har ingen pådrag er dermed autonomt. Momentbalanse gir

$$I\ddot{\theta} = LG_x - F_D, \quad (13)$$

hvor $I = mL^2$ (V.6) er treghetsmomentet til kula, $G_x = mg \sin \theta$ er tyngdekomponenten ortogonalt på armen med lengde L og F_D er dempeleddet fra friksjonen. Fra masse-fjær-demper er $F_D = D\dot{\theta}$. Dermed blir modellen

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \sin \theta - \frac{D}{mL^2} \dot{\theta}. \quad (14)$$

Systemet er ulineært pga sinus-leddet.

b) (4%) Definerer

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Dette gir

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (16)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{D}{mL^2} x_2 \quad (17)$$

c) (4%) Likevektspunkt finnes ved $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Dette gir $x_2 \equiv 0$ og $x_1 = \pi n, n = 0, 1, \dots$. Betrakter likevektspunktet $(0,0)$. Bruker (V.8) i formelsamlinga:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} \cos x_1 & -\frac{D}{mL^2} \end{array} \right] \Big|_{x=(0,0)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & -\frac{D}{mL^2} \end{array} \right] \quad (18)$$

d) (8%) $(sI - \mathbf{A})^{-1}$ er gitt av

$$\left[\begin{array}{cc} s & -1 \\ -\frac{g}{L} & s + \frac{D}{mL^2} \end{array} \right]^{-1} = \frac{1}{s(s + \frac{D}{mL^2}) - \frac{g}{L}} \left[\begin{array}{cc} s + \frac{D}{mL^2} & 1 \\ \frac{g}{L} & s \end{array} \right] \quad (19)$$

Måling $y = \theta(t)$, dermed er $c^T = [1 \ 0]$ og kun første rad av (19) er interessant. Initialtilstand for det lineariserte systemet er gitt av $\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0 = [0 \ \omega_0]^T$. Dermed vil kun element (1,2) bidra i uttrykket for $\theta(s)$ som blir gitt av

$$\theta(s) = \frac{1}{(s^2 + s\frac{D}{mL^2} - \frac{g}{L})} \omega_0 \quad (20)$$

Oppgave 4 (6%)

To alternative løsningsmetoder: enten ved bruk av regler for antall rene integrasjoner mellom forstyrrelse/referanse, eller ved bruk av sluttverditeoremet

- (i) Rampefunksjon på referansen $r(s)$: Rampefunksjon har transferfunksjon $\frac{k}{s^2}$. Det er to rene integrasjoner i $h_0(s)$, det vil derfor ikke være stasjonæravvik i dette tilfellet.

- (ii) Sprang i forstyrrelsen $v(s)$: integrator mellom forstyrrelsen og $e(s)$. Feilen er gitt av (V.10 i form)

$$e(s) = -N(s)v(s)\frac{1}{s}, \quad N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)} \quad (21)$$

$$= -\frac{1}{s} \frac{T_i s^2 (1+Ts)}{(1+T_i s + T_i s^2 (1+Ts))} v(s) \quad (22)$$

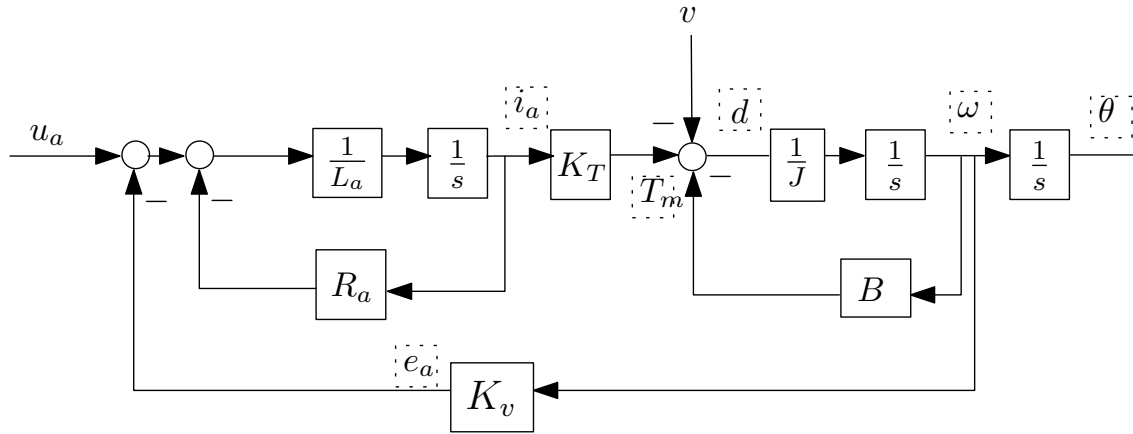
Sluttverditeoremet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -s \frac{1}{s} \frac{T_i s^2 (1+Ts)}{(K_p(1+T_i s) + T_i s^2 (1+Ts))} \frac{k}{s} = 0 \quad (23)$$

pga av s^3 utenfor parentes i teller og s^2 utenfor parentes i nevner. Altså null stasjonæravvik også i dette tilfellet.

Oppgave 5 (12%)

- a) (7%) Se figur 1



Figur 1: Blokkdiagram for oppgave 5a

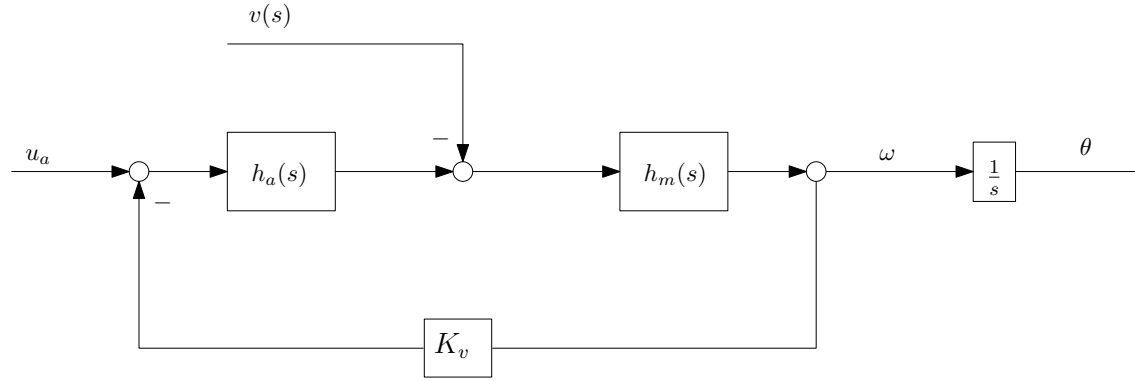
- b) (5%) Reduserer blokkdiagramet i figur 1 til blokkdiagram i figur 2. Merk at tilbakekoblingen er en del av prosess (motor) modellen, og ikke en tilbakekoblingssløyfe fra utgangen. De to transferfunksjonene i figur 2 er gitt av

$$h_a(s) = \frac{K_T}{R_a + L_a s} \quad (24)$$

$$h_m(s) = \frac{1}{B + J s} \quad (25)$$

Foroverkoblingen h_{fv} må være slik at den motvirker forstyrrelsen v . Transferfunksjonen fra v til ω i åpen sløyfe blir

$$\frac{T_m}{v} = (h_{fv} h_a - 1) \quad (26)$$



Figur 2: Reduksjon av blokkdiagram.

Merk fortegnet (minus) i summasjonspunktet hvor forstyrrelsen kommer inn i systemet. Kravet for ideell foroverkobling blir at

$$h_{fvi}h_a - 1 = 0 \quad (27)$$

Dette gir ideell foroverkobling

$$h_{fvi}(s) = \frac{1}{h_a(s)} = \frac{R_a + L_a s}{K_T}. \quad (28)$$

Statisk foroverkobling er følgelig gitt av

$$h_{fvs} = h_{fvi}(s)|_{s=0} = \frac{R_a}{K_T}. \quad (29)$$

Den statiske foroverkoblingen motvirker konstante forstyrrelser forskjellig fra null. Den statiske foroverkoblingen fra forstyrrelsen innvirker ikke på stabilitetsegenskapene til den lukkede sløyfen.

Oppgave 6 (21%)

Gitt bodediagram og prosessen (faktorisert):

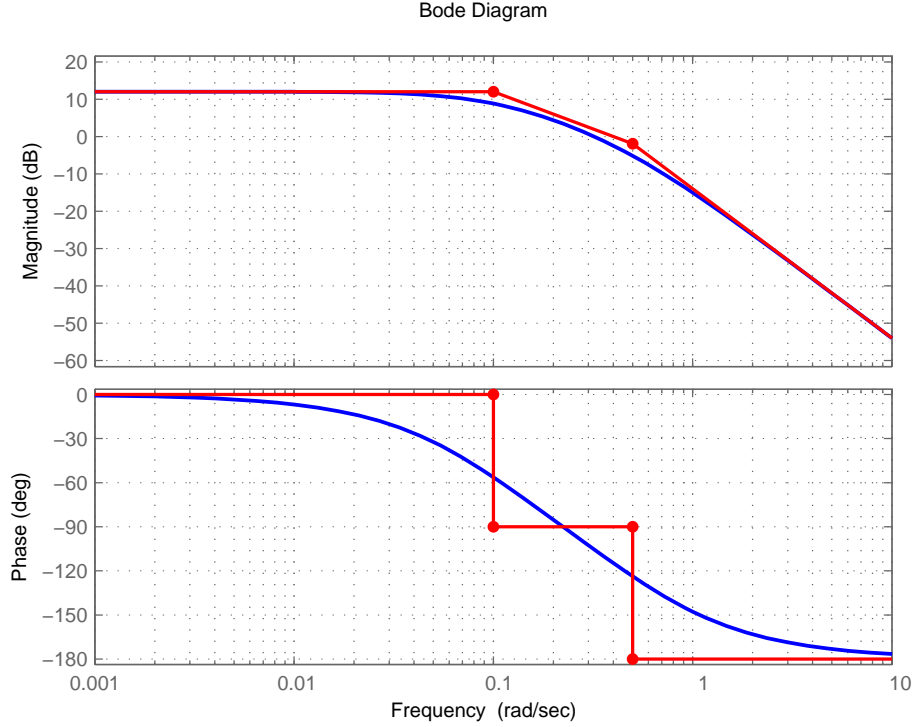
$$h_u(s) = \frac{4}{1 + 12s + 20s^2} = \frac{4}{(1 + 10s)(1 + 2s)} = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (30)$$

a) (6%) Transferfunksjon (30) gir følgende asymptotisk bodediagram:

1. Statisk forsterkning $K = 20 \log_{10}(4) \approx 12\text{dB}$, 0° fase.
2. Pol i $\omega = 1/T_1 = 0.1$, (-1) i asymptote, -90° fasebidrag.
3. Ny pol i $\omega = 1/T_2 = 0.5$, (-1) i asymptotebidrag, totalt (-2) , -90° fasebidrag, totalt -180° .

b) (5%) Identifiserer 1. ordens model med tidsforsinkelse,

$$h_s(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{1 + T_1 s} \quad (31)$$



Figur 3: Asymptotisk bodediagram for transferfunksjon (30)

Største tidskonstant dominerer prosessen. Fra forstørret vindu av sprangrespons approksimeres tidsforsinkelsen til $\theta = 1$ sekund. Fra oppgavebeskrivelsen og likning (30) vet vi at prosessen er 2.ordens med én liten og én stor tidskonstant. Den store tidskonstanten vil dominere prosessen. Dermed kan man ut ifra denne betraktning approksimere $T_1 = 10$. Normalt vil tidskonstanten leses av grafisk, enten som 63% av fullt utslag ($K = 4$), eller i skjæringen mellom fullt utslag og tangenten. Sistnevnte metode vil i dette tilfellet kunne gi betydelig større tidskonstant enn 10 sekund; en god avlesningsfeil godtas her.

Vi bruker kjent tidskonstant og finner 1. ordens, approksimert model med tidsforsinkelse:

$$h_p = \frac{4e^{-1s}}{1 + 10s} \quad (32)$$

Dersom vi velger en aggressiv regulering, er et rimelig valg for ønsket lukket-sløyfe tidskonstant $\tau_c = 0.5\theta = 0.5$. Normalt rask innstilling oppnås ved $\tau_c = \theta = 1$, mens konservativ (mer robust) regulering oppnås ved å velge $\tau_c = 2\theta = 2$. Alle svar godtas. Regulatorparametre for PI-regulator med SIMC tuningsregler med normalt rask innstilling gir (V.16)

$$K_p = \frac{10}{4(1 + 1)} = 1.25 \quad (33)$$

$$T_i = \min(10, 4(1 + 1)) = 8 \quad (34)$$

Tilsvarende gir SIMC tuningsregler med aggressiv regulering (V.16)

$$K_p = \frac{10}{4(1 + 0.5)} = 1.67 \quad (35)$$

$$T_i = \min(10, 4(1 + 0.5)) = 6. \quad (36)$$

c) (4%) Diskret regulering. Velger tastefrekvens dobbelt av høyste frekvens i prosessen ($1/T_2$). Dvs, tastetid $T = 1s$. Parameteren som må endres som er inngangsdata i SIMC tuningen er tidforsinkelsen θ som nå blir $\tilde{\theta} = \theta + \frac{T}{2} = 0.5 + 0.5 = 1$ sekund.

d) (6%)

- (i) ZN tuningsmetode i lukket sløyfe fungerer ikke i dette tilfellet da fasen aldri er lavere enn -180° , og systemet kan ikke plasseres på stabilitetsgrensa ved kun å øke forsterkning. Vi vil derfor ikke oppnå stående svingninger som er nødvendig i ZN metode.
- (ii) Fasen krysser aldri -180° , amplituden har (-2) i asymptote og synker monotont med denne raten for frekvenser over $1/T_2$. Forsterkningsmarginen blir derfor uendelig i dette tilfellet. Fasemarginen er endelig og kan leses av til ca 80° .