Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for teknisk kybernetikk

Faglig kontakt under eksamen
Navn:
Anne Karin Bondhus
Telefon: 73594360
Yilmaz Türkyilmaz
Telefon: 99575030

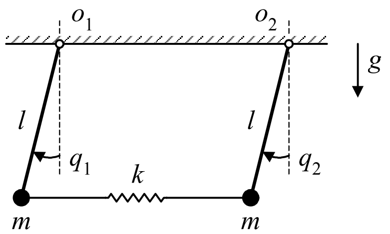
LØSNINGSFORSLAG
EKSAMEN I TTK4130
MODELLERING OG SIMULERING
30. mai 2005
Tid: 09:00-13:00

Hjelpemidler:
A: Alle kalkulatorer, trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Sensur:
Sensuren vil bli avsluttet i henhold til gjeldende regelverk.

Oppgave 1) (25 %)

Vi ønsker å studere dynamikken til det systemet som er vist i Figur 1. Systemet består av to enkle pendler som er koblet sammen ved hjelp av en fjær med fjærkonstant k. Pendlene roterer fritt om punktene o_1 og o_2 i planbevegelse. Hver pendel har masse m på den ene enden. Hver pendelstav har en lengde l og ingen masse. Vinklene mellom hver enkel pendelstav og vertikalen er gitt av q_1 og q_2. Anta små vinkler i pendelbevegelser.



Figur 1: To enkle pendler koblet sammen med en fjær.

a) Den kinetiske energien er gitt av

$$T = \frac{1}{2}ml^2q_1^2 + \frac{1}{2}ml^2q_2^2$$

Den potensielle energien i fjæra er gitt som

$$V_f = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

der Δx er lengden fjæra er strukket. Om vi antar små vinkler strekkes fjæra mest i horisontal retning og vi kan se bort fra lengden den strekkes i vertikal retning.

Vi har da

$$\Delta x \approx l(\sin q_1 - \sin q_2)$$

For små vinkler har vi også at $\sin q_i \approx q_i$ og man kan derfor også bruke

$$\Delta x \approx l(q_1 - q_2)$$

Vi bruker her det første uttrykket for å vise hvordan det blir om man bruker det mest kompliserte uttrykket. Det blir noe enklere om man bruker det siste uttrykket.

Den potensielle energien er gitt av

$$V = mgl\,(1 - \cos q_1) + mgl\,(1 - \cos q_2) + \frac{1}{2}kl^2\,(\sin q_1 - \sin q_2)^2$$

Definerer Lagrangian L

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}ml^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{q}_2^2 \\
&\quad -mgl\left(1-\cos q_1\right) - mgl\left(1-\cos q_2\right) - \frac{1}{2}kl^2\left(\sin q_1 - \sin q_2\right)^2
\end{aligned}
$$

Beregner først

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_1} &= -mgl\sin q_1 - kl^2\left(\sin q_1 - \sin q_2\right)\cos q_1 \\
\frac{\partial L}{\partial q_2} &= -mgl\sin q_2 + kl^2\left(\sin q_1 - \sin q_2\right)\cos q_2 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= ml^2\dot{q}_1 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= ml^2\dot{q}_2
\end{aligned}
$$

som gir systemet

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= ml^2\ddot{q}_1 + mgl\sin q_1 + kl^2\left(\sin q_1 - \sin q_2\right)\cos q_1 = 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= ml^2\ddot{q}_2 + mgl\sin q_2 - kl^2\left(\sin q_1 - \sin q_2\right)\cos q_2 = 0 \quad (1)
\end{aligned}
$$

b) Vi kan linearisere et andre ordens system ved å skrive systemet på formen

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u})$$

Vi kan definere $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$ og da ser vi ved å dividere (1) med ml^2 og flytte de to siste leddene over til høyre side at:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -\frac{g}{l}\sin q_1 - \frac{k}{m}\left(\sin q_1 - \sin q_2\right)\cos q_1 \\ -\frac{g}{l}\sin q_2 + \frac{k}{m}\left(\sin q_1 - \sin q_2\right)\cos q_2 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Vi skal lineariser om $\mathbf{q}_0 = 0$ og $\dot{\mathbf{q}}_0 = 0$. Vi definerer

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Siden vi ikke har noen inngang $\mathbf{u}$ får vi da

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}\right)_{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=(\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0)} \Delta\mathbf{q} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)_{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=(\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0)} \Delta\dot{\mathbf{q}}$$

Vi har

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}\right)_{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=(\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{bmatrix}_{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=(\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0)} = \begin{bmatrix} -\frac{g}{l} - \frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{g}{l} - \frac{k}{m} \end{bmatrix} \quad (2)$$

fordi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial q_1} &= -\frac{g}{l}\cos q_1 - \frac{k}{m}\cos q_1 \cos q_1 + \frac{k}{m}(\sin q_1 - \sin q_2)\sin q_1 \\
\frac{\partial f_1}{\partial q_2} &= \frac{k}{m}\cos q_2 \cos q_1 \\
\frac{\partial f_2}{\partial q_1} &= \frac{k}{m}\cos q_1 \cos q_2 \\
\frac{\partial f_2}{\partial q_2} &= -\frac{g}{l}\cos q_2 - \frac{k}{m}\cos q_2 \cos q_2 - \frac{k}{m}(\sin q_1 - \sin q_2)\sin q_1
\end{aligned}
$$

som gir matrisen i (2) når vi setter inn $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

$$
\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)_{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=(\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0)} = \mathbf{0}
$$

siden $\mathbf{f}$ ikke er avhengig av $\dot{\mathbf{q}}$. Vi har også $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q}$ og $\Delta\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}$ siden vi

lineariserer om origo

Dermed får vi at de lineariserte ligningene blir:

$$
\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= \left(-\frac{g}{l} - \frac{k}{m}\right) q_1 + \frac{k}{m} q_2 = -\frac{g}{l} q_1 - \frac{k}{m}(q_1 - q_2) \\
\ddot{q}_2 &= \frac{k}{m} q_1 + \left(-\frac{g}{l} - \frac{k}{m}\right) q_2 = -\frac{g}{l} q_2 + \frac{k}{m}(q_1 - q_2)
\end{aligned}
$$

Man kan også linearisere ligningene ved først å skrive systemet om til et første ordens system.

Oppgave 2) (15 %)

a)

$$
\begin{aligned}
x_{1,n+1} &= x_{1,n} + h x_{2,n} \\
x_{2,n+1} &= x_{2,n} + h\left[x_{1,n} - 2\tan^{-1}(x_{1,n} + x_{2,n})\right]
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
x_{1,n+1} &= x_{1,n} + \frac{h}{2}\left[-2x_{1,n} + x_{2,n}\sin t_n - 2x_{1,n+1} + x_{2,n+1}\sin t_{n+1}\right] \\
x_{2,n+1} &= x_{2,n} + \frac{h}{2}\left[x_{1,n}\sin t_n - 2x_{2,n} + x_{1,n+1}\sin t_{n+1} - 2x_{2,n+1}\right]
\end{aligned}
$$

c) Systemet skrives først om til et første ordens system. Ved å definere $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$ og $z_3 = \ddot{x}$ får vi:

$$\begin{aligned}\dot z_1 &= z_2\\ \dot z_2 &= z_3\\ \dot z_3 &= -5z_1-(2-\sin t)z_2-10z_3\end{aligned}$$

Dette er et system på formen $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z},t)$,med

$$\mathbf{f}(\mathbf{z},t) = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ -5z_1-(2-\sin t)z_2-10z_3 \end{bmatrix}$$

Lobatto IIIC orden 2 metode har Butcher array som gitt s. 540, med

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$b^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

og

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette vil si at integrasjonsmetoden er gitt av

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{z}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), t_n) \qquad (3)\\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{z}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), t_n)\end{aligned}$$

og

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$$

Ligningene i (3) er et sett med ligninger som må løses for å finne elementene i $\mathbf{k}_1$ og $\mathbf{k}_2$, der $\mathbf{k}_1$ og $\mathbf{k}_2$ er vektorer med 3 elementer hver. Det er ikke nødvendig å ta med løsningen av ligningene, men man må vise hvordan ligningene for å finne k-elementene blir for det oppgitte systemet. Vi må da sette argumentene i (3) inn i den oppgitte $\mathbf{f}$- funksjonen.

Vi definerer

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \\ k_{1,3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \\ k_{1,3} \end{bmatrix}$$

Argumentet som skal inn til $\mathbf{f}$-funksjonen i uttrykket for $\mathbf{k}_1$ blir da

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} := \mathbf{z}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} z_{n,1} + \frac{h}{2}(k_{1,1} - k_{2,1}) \\ z_{n,2} + \frac{h}{2}(k_{1,2} - k_{2,2}) \\ z_{n,3} + \frac{h}{2}(k_{1,3} - k_{2,3}) \end{bmatrix} \tag{4}$$

og

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} := \mathbf{z}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} z_{n,1} + \frac{h}{2}(k_{1,1} + k_{2,1}) \\ z_{n,2} + \frac{h}{2}(k_{1,2} + k_{2,2}) \\ z_{n,3} + \frac{h}{2}(k_{1,3} + k_{2,3}) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Dermed blir ligningene for å finne elementene i k-ene:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \\ k_{1,3} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{w}, t_n) = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ -5w_1 - (2 - \sin t)w_2 - 10w_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_{n,2} + \frac{h}{2}(k_{1,2} - k_{2,2}) \\ z_{n,3} + \frac{h}{2}(k_{1,3} - k_{2,3}) \\ -5\left\{z_{n,1} + \frac{h}{2}(k_{1,1} - k_{2,1})\right\} - (2 - \sin t_n)\left\{z_{n,2} + \frac{h}{2}(k_{1,2} - k_{2,2})\right\} - 10\left\{z_{n,3} + \frac{h}{2}(k_{1,3} - k_{2,3})\right\} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

og

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2 &= \begin{bmatrix} k_{2,1} \\ k_{2,2} \\ k_{2,3} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{v}, t_n) = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ -5v_1 - (2 - \sin t)v_2 - 10v_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_{n,2} + \frac{h}{2}(k_{1,2} + k_{2,2}) \\ z_{n,3} + \frac{h}{2}(k_{1,3} + k_{2,3}) \\ -5\left\{z_{n,1} + \frac{h}{2}(k_{1,1} + k_{2,1})\right\} - (2 - \sin t_n)\left\{z_{n,2} + \frac{h}{2}(k_{1,2} + k_{2,2})\right\} - 10\left\{z_{n,3} + \frac{h}{2}(k_{1,3} + k_{2,3})\right\} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

Noen har sett at $\mathbf{k}_2 = f(\mathbf{z}_{n+1}, t_n)$ også for denne metoden, og løst for k-elementene, slik at man får $k-$ ene uttrykt ved $\mathbf{z}_n$ og $\mathbf{z}_{n+1}$. Dette blir også riktig, men man vinner ikke så mye på det, for

da får man bare et ligningssett å løse for elementene i z_n og z_{n+1} , i stedet for et ligningssett for $k-$elementene, og det er mye mer komplisert å gjøre det enn for metoden i punkt b).

Oppgave 3) (20 %)

Et koordinatsystem a med ortonormale enhetsvektorer $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ roteres slik at det sammenfaller med et ønsket koordinatsystem b med ortonormale enhetsvektorer $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. De to koordinatsystemene er gitt i forhold til et inertielt system i ved hjelp av rotasjonsmatrisene R_a^i og R_b^i. Avviket i orientering er gitt av $\tilde{R}$ som er definert ved

$$\tilde{R} = R_a^i \left(R_b^i\right)^T$$

Alternativt, vi skriver

$$\tilde{R} = R_{k,\theta} = \{\tilde{r}_{ij}\}$$

og definerer

$$\mathbf{e} = \mathbf{k}\sin\theta$$

a) Har

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{k,\theta} &= \mathbf{e}^{\times} + \cos\theta\mathbf{I} + \mathbf{k}\mathbf{k}^T(1-\cos\theta) \\
\mathbf{R}_{k,\theta}^T &= -\mathbf{e}^{\times} + \cos\theta\mathbf{I} + \mathbf{k}\mathbf{k}^T(1-\cos\theta)
\end{aligned}$$

Den siste likningen får vi ved å transponere den første fordi første ledd er skjevsymmetrisk og de to siste leddene er symmetriske. Vi får da

$$\mathbf{e}^{\times} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{R}_{k,\theta} - \mathbf{R}_{k,\theta}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \tilde{r}_{12}-\tilde{r}_{21} & \tilde{r}_{13}-\tilde{r}_{31} \\ \tilde{r}_{21}-\tilde{r}_{12} & 0 & \tilde{r}_{23}-\tilde{r}_{32} \\ \tilde{r}_{31}-\tilde{r}_{13} & \tilde{r}_{32}-\tilde{r}_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Vi har at $\mathbf{e}^{\times}$ er definert som

$$\mathbf{e}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

når $\mathbf{e}^T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$. Ved å sammenligne elementene i (8) og (9) ser vi at

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{r}_{32}-\tilde{r}_{23} \\ \tilde{r}_{13}-\tilde{r}_{31} \\ \tilde{r}_{21}-\tilde{r}_{12} \end{pmatrix}$$

b) Skriver

$$R_a^i = R_b^i R_a^b \quad \Rightarrow \quad R_a^b = \left(R_b^i\right)^T R_a^i \quad \Rightarrow \quad R_a^b = \left(R_b^i\right)^T \tilde{R} R_b^i = R_i^b \tilde{R} R_b^i$$

c) Gitt

$$\begin{aligned}
R_a^i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.76604 & -0.64279 \\ 0 & 0.64279 & 0.76604 \end{bmatrix} && (10) \\
R_b^i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.73135 & -0.68200 \\ 0 & 0.68200 & 0.73135 \end{bmatrix} && (11)
\end{aligned}$$

Vi finner

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= R_a^i \left(R_b^i\right)^T \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.76604 & -0.64279 \\ 0 & 0.64279 & 0.76604 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.73135 & -0.68200 \\ 0 & 0.68200 & 0.73135 \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.998\,63 & 5.233\,5\times10^{-2} \\ 0 & -5.233\,5\times10^{-2} & 0.998\,63 \end{bmatrix} && (12)
\end{aligned}$$

som gir

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{r}_{32}-\tilde{r}_{23} \\ \tilde{r}_{13}-\tilde{r}_{31} \\ \tilde{r}_{21}-\tilde{r}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.2335\times 10^{-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Bruker $\mathbf{e} = \mathbf{k}\sin\theta$ deretter til å finne θ

$$\theta = \frac{360}{2\pi}\arcsin\left(-5.2335\times 10^{-2}\right) \cong -3^\circ \tag{14}$$

hvor $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

d) Vi setter inn

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ \cos\theta &= 1-2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

og bruker at $\boldsymbol{\epsilon} = \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{k}$, $\eta = \cos\frac{\theta}{2}$ ved definisjon. Siden $\mathbf{k}^x$ er lineær i elementene har vi $\mathbf{k}^x\sin\theta = \boldsymbol{\epsilon}^x$. Vi får nå

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k,\theta} &= \mathbf{k}^\times\sin\theta + \mathbf{k}\mathbf{k}^T(1-\cos\theta)+\cos\theta\mathbf{I} \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}(\mathbf{k}^x\sin\frac{\theta}{2}) + \mathbf{k}\mathbf{k}^T(1-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}) + (1-2\sin^2\frac{\theta}{2})\mathbf{I} \\ &= 2\eta\boldsymbol{\epsilon}^x + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T + (1-2\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} \\ &= 2\eta\boldsymbol{\epsilon}^x + \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T - 2\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{I} \\ &= 2\eta\boldsymbol{\epsilon}^x + \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}^x\boldsymbol{\epsilon}^x \end{aligned}$$

fordi $\boldsymbol{\epsilon}^x\boldsymbol{\epsilon}^x = \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T - \mathbf{2}\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{I}$ (Dette er behøver man ikke vise. Dette er en grunnleggende matematisk sammenheng som kan brukes i utledninger)

Alternativt kan man først bruke $\mathbf{k}^x\mathbf{k}^x = \mathbf{k}\mathbf{k}^T - 2\mathbf{k}^T\mathbf{k}\mathbf{I} = \mathbf{k}\mathbf{k}^T - \mathbf{I}$ (fordi $\mathbf{k}$ er enhetsvektor).som gir $\mathbf{k}\mathbf{k}^T = \mathbf{k}^x\mathbf{k}^x + \mathbf{I}$.

Da får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k,\theta} &= \mathbf{k}^\times\sin\theta + \mathbf{k}\mathbf{k}^T(1-\cos\theta)+\cos\theta\mathbf{I} \\ &= \mathbf{k}^\times\sin\theta + (\mathbf{k}^x\mathbf{k}^x+\mathbf{I}.)(1-\cos\theta)+\cos\theta\mathbf{I} \\ &= \mathbf{k}^\times\sin\theta + \mathbf{k}^x\mathbf{k}^x(1-\cos\theta) + (1-\cos\theta)\mathbf{I}+\cos\theta\mathbf{I} \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}(\mathbf{k}^x\sin\frac{\theta}{2}) + \mathbf{k}^x\mathbf{k}^x(1-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}) + \mathbf{I} \\ &= 2\eta\epsilon^x + \mathbf{I} + \epsilon^x\epsilon^x \end{aligned}$$

NB ! På eksamen må man vise en utledning trinn for trinn selv om dette ikke er gjort i læreboka. Hvis man bare setter opp hva som skal brukes, og så setter opp ligning (6.163)-(6.165) i læreboka har man ikke vist særlig mye. Man må sette inn det som skal settes inn så det går klart fram hva som er gjort for å få en ligning.

e) Gitt

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bruker Shepperds algoritme for å finne Eulerparametere som svarer til $\mathbf{R}$

$$\operatorname{trace} R_1 = r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$T = \operatorname{trace} R_1 = r_{00} = 1$$

$$\begin{aligned} r_{ii} &= \max\{r_{00}, r_{11}, r_{22}, r_{33}\} \\ &= \max\{1, 1, 0, 0\} = 1 \\ &= r_{00} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{1 + 2r_{00} - T} \\ &= \sqrt{1 + 2(1) - (1)} \\ &= \sqrt{2} \\ z_1 &= \frac{r_{32} - r_{23}}{z_0} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ z_2 &= \frac{r_{13} - r_{31}}{z_0} = 0 \\ z_3 &= \frac{r_{21} - r_{12}}{z_0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{z_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \epsilon_1 &= \frac{z_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \epsilon_2 &= \frac{z_2}{2} = 0 \\ \epsilon_3 &= \frac{z_3}{2} = 0 \end{aligned}$$

Oppgave 4) (20 %)

a) Transferfunksjonene har en dobbel pol i $\mathbf{s} = -1$ som er i venstre halvplan. For $s = j\omega$ har vi

$$\begin{aligned} H_1(j\omega) &= \frac{1}{(1+j\omega)^2} = \frac{(1-j\omega)^2}{(1+j\omega)^2(1-j\omega)^2} = \frac{1 - 2j\omega + (j\omega)^2}{\{(1+j\omega)(1-j\omega)\}^2} \\ &= \frac{(1-\omega^2) - 2j\omega}{\{1+\omega^2\}^2} \end{aligned}$$

Realdelen er

$$\mathrm{Re}\,(H_1(j\omega)) = \frac{(1-\omega^2)}{\{1+\omega^2\}^2}$$

Realdelen er negativ hvis $\omega^2 > 1$,og dermed er ikke $\mathrm{Re}(H_1(j\omega)) \geq 0$ for alle $j\omega$ som den må være for at transferfunksjonen skal være positiv reell.

(Her er det ingen poler på den imaginære aksen, så derfor er det ingen punkt der dette ikke skal gjelde.).

Dermed er transferfunksjonen ikke positiv reell.

En annen måte man kan se det på er ved å tenke på fasen til funksjonen. En positiv reel transferfunksjon kan ha fase kun i intervallet $[-90^o, 90^o]$, for hvis ikke vil det finnes ω slik at kurven for $H_1(j\omega)$ havner i venstre halvplan, og da er $\mathrm{Re}(H_1(j\omega)) < 0$. Dette vil si at for en positiv reel transferfunksjon kan nevneren maksimum være av en grad høyre enn telleren.

For den oppgitte funksjonen nevneren av grad 2 og telleren av grad 0. Dermed går fasen til $H_1(j\omega)$ mot -180^o når $\omega \to \infty$, og da kan ikke transferfunksjonen være positiv reell.

Ekstra kommentar:

Merk at den oppgitte transferfunksjonen er en seriekobling av systemene med transferfunksjoner $h(s) = \frac{1}{s+1}$ som er en positiv reell transferfunksjon.

En seriekobling av to positiv reelle transferfunksjoner gir altsså ikke en positiv reell transferfunksjon. På grunn av sammenhengen mellom passivitet og positiv reell har vi da at en

seriekobling av to passive systemer heller ikke gir et passivt system, om vi definerer inngangen som inngangen til det første systemet og utgangen som utgangen til det siste systemet.

b)Transferfunksjonen $H_1(s)$ er irrasjonal og har singilariteter

$$0 = \sinh s = \frac{e^s - e^{-s}}{2} = 1 \quad \leftrightarrow \quad e^{2s} = 1 = e^{j(0+2k\pi)},\ k = 0, \pm 1, \pm 2,$$

som gir

$$2s = j2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2,$$

og dermed

$$s = jk\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Dette betyr at alle singularitetene ligger på den imaginære aksen. Transferfunksjonen er derfor positiv reel hvis og bare hvis $H_1(s)$ er reell for reelle s i $\mathrm{Re}\,[s] > 0$, og i tillegg $\mathrm{Re}\,[H_1(s)] \geq 0$ for alle $\mathrm{Re}\,[s] > 0$. La

$$s = \sigma + j\omega$$

Da er

$$\begin{aligned}
\sinh(\sigma + j\omega) &= \sinh\sigma\cos\omega + j\cosh\sigma\sin\omega \\
\cosh(\sigma + j\omega) &= \cosh\sigma\cos\omega + j\sinh\sigma\sin\omega
\end{aligned}$$

Siden $\cos -\omega = \cos\omega$ og $\sin -\omega = -\sin\omega$ ser vi at

$$\begin{aligned}
[\sinh(\sigma + j\omega)]^* &= \sinh\sigma\cos\omega - j\cosh\sigma\sin\omega = \sinh(\sigma - j\omega) \\
[\cosh(\sigma + j\omega)]^* &= \cosh\sigma\cos\omega - j\sinh\sigma\sin\omega = \cosh(\sigma - j\omega)
\end{aligned}$$

der * betegner kompleks konjugert.

$$\mathrm{Re}\,[H_1(s)] = \mathrm{Re}\left[\frac{\cosh(\sigma + j\omega)}{\sinh(\sigma + j\omega)}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{\cosh(\sigma + j\omega)}{\sinh(\sigma + j\omega)}\frac{\sinh(\sigma - j\omega)}{\sinh(\sigma - j\omega)}\right] = \frac{\mathrm{Re}\,[\cosh(\sigma + j\omega)\sinh(\sigma - j\omega)]}{|\sinh s|^2} \tag{15}$$

Uttrykket i nevneren fås fordi $zz^* = |z|^2$ for et komplekst tall z. Telleren blir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,[\cosh(\sigma + j\omega)\sinh(\sigma - j\omega)] &= \mathrm{Re}\,[(\cosh\sigma\cos\omega + j\sinh\sigma\sin\omega)(\sinh\sigma\cos\omega + j\cosh\sigma\sin\omega)] \\
&= \cosh\sigma\cos\omega\sinh\sigma\cos\omega + j^2\sinh\sigma\sin\omega\cosh\sigma\sin\omega \\
&= \cosh\sigma\sinh\sigma(\cos^2\omega + \sin^2\omega) = \cosh\sigma\sinh\sigma
\end{aligned} \tag{16}$$

Dermed har vi

$$\mathrm{Re}\,[H_1(s)] = \frac{\cosh\sigma\sinh\sigma}{|\sinh s|^2} > 0$$

når $\sigma > 0$. Dette betyr $H_1(s)$ positiv reell. e^{σ} og $e^{-\sigma}$ alltid positive, så $\cosh\sigma = \frac{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}{2}$ er positiv uansett hva σ er.

Og når σ er positiv så er $e^{\sigma} > e^{-\sigma}$,som medfører at $\sinh\sigma = \frac{e^{\sigma}-e^{-\sigma}}{2} > 0$ for $\sigma > 0$.

c) En transferfunksjon $H(s)$ er passiv hvis og bare hvis den er positiv reell.

d) Transferfunksjonen $H(s)$ har pol i $s = -1/a$, og

$$\mathrm{Re}\,H(j\omega) = \mathrm{Re}\,\frac{1 - j\omega a}{(1 + j\omega a)(1 - j\omega a)} = \frac{1}{1 + \omega^2 a^2} > 0 \tag{17}$$

Dermed er det vist at $H(s)$ er positiv reell. Dette impliserer også at systemet med inngang u og utgang y er passivt.

e) Definerer funksjonen

$$V_\epsilon = 2\left(1-\eta\right) \geq 0$$

Finner den tidsderiverte av V

$$\dot{V}_\epsilon = -2\dot{\eta} = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\omega}$$

som viser at systemet er passivt med $\boldsymbol{\omega}$ som inngang og $\boldsymbol{\epsilon}$ som utgang.

Oppgave 5) (20 %)

a) Det er isentropiske forhold i volumet, $ds = 0$

$$Tds = dh - \hat{V}dp \quad \Rightarrow \quad dh = \hat{V}dp$$

der

$$dh = c_p\left(T\right)dT$$

For en ideell gass har vi sammenhengen $RT = p\hat{V}$ som gir

$$\begin{aligned} c_p\left(T\right)dT &= \frac{RT}{p}dp \\ &\Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p\left(T\right)}\frac{dp}{p} \end{aligned}$$

For en ideell gass gjelder

$$\frac{R}{c_p\left(T\right)} = \frac{K\left(T\right)-1}{K\left(T\right)}$$

som gir

$$\frac{dT}{T} = \frac{K\left(T\right)-1}{K\left(T\right)}\frac{dp}{p}$$

Hvis vi nå antar at $K\left(T\right)$ er konstant får vi videre

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &= \frac{K\left(T\right)-1}{K\left(T\right)}\frac{dp}{p} \\ \ln T &= \frac{K\left(T\right)-1}{K\left(T\right)}\ln p + \ln C \\ T &= Cp^{\frac{K-1}{K}} \\ \frac{T}{p^{\frac{K-1}{K}}} &= C = \text{konstant} \end{aligned}$$

for $T = T_1, T_2$ og $p = p_1, p_2$ gir dette

$$\frac{T_1}{p_1^{\frac{K-1}{K}}} = \frac{T_2}{p_2^{\frac{K-1}{K}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{K}{K-1}}$$

b) En isolert tank med konstant volum V inneholder en gass. Det antas at det ikke er lekkasje ut av volumet. For denne tanken gjelder

$$\frac{D}{Dt}\int\int\int_V \rho s dV \geq 0 \tag{18}$$

Den fysiske tolkningen er at den totale entropien i volumet er enten konstant eller økende.

c) Massebalansen:

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = w \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(y) = \frac{w}{\rho A}$$

Energibalansen:

$$\frac{d}{dt}(\rho V u) = w u_i + G y (T_e - T) \tag{19}$$

hvor $u_i = c_p T_i$ er væskens energi.

Skriver

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\rho V) c_p T + \rho V c_p \frac{d}{dt}(T) &= w c_p T_i + G y (T_e - T) \\
\rho V c_p \frac{d}{dt}(T) &= -w c_p T + w c_p T_i + G y (T_e - T) \\
\frac{d}{dt}(T) &= \frac{w}{\rho A y}(T_i - T) + \frac{G}{\rho A c_p}(T_e - T)
\end{aligned}$$

(NB! Strengt tatt så skal første ledd i (19) være wh_i etter energibalanselign-ing (11.172), der $h_i = u_i + \frac{p_i}{\rho_i}$ etter def. i ligning (12.5) med p_i trykk i strømmen inn og ρ_i tetthet til strømmen inn. Imidlertid er leddet $\frac{p_i}{\rho_i}$ veldig lite i forhold til u_i for væsker ved forholdsvis lave trykk, og man kan derfor sette $h_i \approx u_i$.

F. eks så har vann en varmekapasitet på 4182 J/(kgK), som gir at ved $20^o = 293,15$K så er den indre energien per kg $u_i = 4182 \cdot 293.15$ J/kg=1225953 J/kg, mens

tettheten er $\rho_i = 1000 kg/m^3$ og vanlig lufttrykk er $p_i = 1.013 \cdot 10^5$ Pa, som gir $\frac{p_i}{\rho_i} = 101.3$ som er veldig lite i forhold til u_i.

Merk også at vi ikke har $h_i = c_p T$ for væsker.)