Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Peter Lindqvist (73 59 35 29)

EKSAMEN I MATEMATIKK 4K (TMA4120)

Mandag 8. august 2011
Tid: 09:00 - 13:00 Sensur innen 29. august 2011

Hjelpemidler (Kode C): Bestemt kalkulator (HP 30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal ha en begrunnelse.
Du finner et ark med Laplacetransformer etter oppgavene.

Oppgave 1 La $v(x, y)$ være imaginærdelen til funksjonen

$$f(z) = x^2 + y^2 + iv(x, y).$$

Er det mulig å velge $v(x, y)$ slik at $f(z)$ er en analytisk funksjon? I så fall, bestem hva $v(x, y)$ må være.

Oppgave 2 En isolert stokk der endepunktene $x = 0$ og $x = \pi$ holdes på temperatur null tilfredsstiller likningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

med initialbetingelser

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \qquad \text{og} \qquad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{1 + n^4}$$

Løs problemet ved å separere variablene. (Hint: Løsningen $u(x, t)$ kommer som en rekke.)

Oppgave 3 Det komplekse tallet z har modulus $|z| = 1$. Bestem

$$\left|\frac{2z - i}{2 + iz}\right|^2.$$

Oppgave 4 I følge d'Alemberts formel er

$$u(x,t) = \frac{e^{x-ct} + e^{x+ct}}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \frac{dy}{1+y^2}$$

en løsning til bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Hva er initialbetingelsene

$$u(x,0) \qquad \text{og} \qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}$$

til denne løsningen?

Oppgave 5 Bevis den grunnleggende formelen

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

for Laplacetransformen. (Du kan anta at $f(t)$ og $f'(t)$ er kontinuerlige og begrensede når $t \geq 0$, og at $s > 0$.)

Oppgave 6 Finn Fouriertransformen til funksjonen

$$f(x) = e^{-|x-2|}, \qquad -\infty < x < \infty$$

Oppgave 7 La C være sirkelen med sentrum i origo, radius $1/10$ og orientering mot klokka. Finn

$$\oint_C e^{2+z^{-1}}dz$$