Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for teknisk kybernetikk

Faglig kontakt under eksamen

Navn: Tu Duc Nguyen
Telefon: 73594359

Jose Marcal
Telefon: 73590967

EKSAMEN I TTK4130
MODELLERING OG SIMULERING

02. juni 2008
Tid: 09:00-13:00

Hjelpemidler:
A: Alle kalkulatorer, trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Sensur:
Sensuren vil bli avsluttet i henhold til gjeldende regelverk.

Eksamensettet består av totalt 10 sider.

Alle svar **MÅ** begrunnes og nødvendige mellomregninger må føres!

Svar uten begrunnelser gir null poeng.

Oppgave 1 (20 %)

Gitt numeriske metoder:

Metode 1:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, t_n + \frac{h}{2}\right)\\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_1\end{aligned}$$

Metode 2:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_n, t_n\right)\\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_n + \frac{h}{3}\mathbf{k}_1, t_n + \frac{h}{3}\right)\\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_n + \frac{2h}{3}\mathbf{k}_2, t_n + \frac{2h}{3}\right)\\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + h\left(\frac{1}{4}\mathbf{k}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{k}_3\right)\end{aligned}$$

Metode 3:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) Bestem stabilitetsfunksjonen $R(\lambda h)$ til metodene. Er metodene A-stabile? L-stabile? Begrunn svarene.

Betrakt nå initialverdi problemet

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}(t) + \theta(t) &= 0, \quad t > 0 &(1)\\ \theta(0) &= 1 &(2)\\ \dot{\theta}(0) &= 0 &(3)\end{aligned}$$

b) Finn egenverdiene til systemet (1). Bestem stabilitetsegenskapen til systemet. Kan man si noe om $\left|\left[\theta(t), \dot{\theta}(t)\right]^\top\right|, \forall t \geq 0$?

c) Vi ønsker å finne numeriske løsninger på initialverdi problemet (1)-(3). For å bevare systemets egenskaper bl.a. stabilitet og energi, hvilken metode bør man velge (metode 1, 2 eller 3)? Begrunn svaret.

d) Antar at vi velger metode 3 med tidsskritt $h = 0.1$ sekunder. Gitt at den eksakte løsningen av initialverdiproblemet (1)-(3) ved tidspunkt $t = 0.2$ sekunder er $\left[\theta(0.2), \dot{\theta}(0.2)\right]^\top = [0.9801, -0.1987]^\top$. Bestem den globale avbruddsfeilen ved tidspunkt $t = 0.2$ sekunder med denne metoden. Er numeriske løsninger med denne metoden og med $h = 0.1$ sekunder stabile? Begrunn svaret.

Oppgave 2 (12%)

a) La rotasjonsmatrisen $\mathbf{R}$ består følgende rotasjoner: Rull (*roll*) med 30°, og trim (*pitch*) med 30°. Beregn $\mathbf{R}$.

b) La $\mathbf{a}_1$ være en vektor. Beskriv alle rotasjonsmatriser $\mathbf{R}$ som tilfredsstiller ligningen

$$\|\mathbf{R}\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1\| = 0 \tag{4}$$

(Hint: Bruk vinkel-akse parametrisering).

c) La rotasjonsmatrisen $\mathbf{R}_d^a$ være gitt av en vinkel-akse parametrisering med enhetsvektoren $\mathbf{k}$ og vinkelen θ. Vis at

$$\mathbf{R}_d^a - (\mathbf{R}_d^a)^{-1} = 2\mathbf{k}^\times \sin(\theta) \tag{5}$$

Oppgave 3 (8%)

a) La $\mathbf{a}^b = [\ 0 \quad 0 \quad 9.8\ ]^\top$. La $\mathbf{R}(\eta,\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{R}_a^b$ være en rotasjonsmatrise med $(\eta,\boldsymbol{\epsilon}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, [\ 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0\ ]^\top)$. Beregn $\mathbf{a}^a$ ved bruk av kvartertion produkt.

b) La rotasjonsmatrisen $\mathbf{R}_a^c$ være gitt av en enkel rotasjon på 60° om z-aksen. Beregn enhets kvartertionen assosiert med rotasjonsmatrisene $\mathbf{R}_a^c$ og $\mathbf{R}_b^c$.

Oppgave 4 (10 %)

Gitt systemet

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})]\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \boldsymbol{\tau} \tag{6}$$

hvor

- $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ og $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$.
- $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

La matrisene $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, og $\mathbf{K}$ har egenskapene

- $\mathbf{K} = \mathbf{K}^\top > 0$.
- $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})^\top > 0,\ \forall \mathbf{q} \neq 0$.
- $\dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{D}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \geq 0,\ \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$.
- $\dot{\mathbf{M}} - \mathbf{2C}$ er skevsymmetrisk, dvs.

$$\left(\dot{\mathbf{M}} - \mathbf{2C}\right)^\top = -\left(\dot{\mathbf{M}} - \mathbf{2C}\right)$$

  hvor $\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \dot{\mathbf{M}}$.

Vis at systemet (6) er passivt med inngangsvektoren $\boldsymbol{\tau}$ og utgangsvektoren $\dot{\mathbf{q}}$.

Oppgave 5 (15 %)

Betrakt systemet i Figur . Systemet består av et indre volum og et ytre volum. Det strømmer væsker i begge volumene. Variablene angitt i figuren har følgdende betydning:

Indre volum:

- ρ_1: massetetthet [kg/m^3]
- v_1: absoluttverdien av hastighet [m/s]
- T_1: temperatur [K]
- c_1: spesifikk varmekapasitet [Js/(kg·K)]
- r_1 : radius av indre rør [m]

Ytre volum:

- ρ_2 : massetetthet [kg/m^3]
- v_2 : absoluttverdien av hastighet [m/s]
- T_2: temperatur [K]
- c_2: spesifikk varmekapasitet [Js/(kg·K)]
- r_2: radius av ytre rør [m]

Omgivelse:

- T_3: temperatur av omgivelsen [K].

La

- L : lengden av røret [m]
- κ_{12} : varmeoverganstall mellom det indre- og det ytre-volumet [W/m^2K].
- κ_{23} : varmeoverganstall mellom det ytre volumet og omgivelsen [W/m^2K].

Antar at

- $T_1 > T_2 > T_3$.
- Konduksjon skjer radielt i rørene.
- c_1, c_2, v_1, v_2, og trykket i det indre og det ytre volumet er konstante.
- Potensielle og kinetiske energien i systemet kan neglisjeres.

a) Sett opp partielle differensial ligningene for $T_1(x,t)$ og $T_2(x,t)$.

Oppgave 6 (15 %)

Betrakt Figur . Systemet består av en tank og en ventil. Variablene angitt i figuren har følgende betydning:

- q_{inn} : volumstrøm inn [m$^3/s$]
- q_{ut} : volumstrøm gjennom ventilen [m$^3/s$]
- p_{atm}: atmosfæretrykk [N/m^2]
- p: bunntrykket i tanken [N/m^2]
- ρ: massetetthet [kg/m^3]
- h: væskenivået i tanken [m]
- A: bunnareal av tanken [m^2]

Antar at væsken er inkompressibel, og at trykket på inngangen til ventilen er lik bunntrykket i tanken. La

$$q_{ut} = C_v u \sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta p}$$

hvor C_v er ventilkonstanten, u er ventilåpningen ($0 \leq u \leq 1$), og Δp er trykkfallet over ventilen.

a) Bestem bunntrykket i tanken.

b) Vis at den dynamisk modellen for væskenivået h er gitt ved

$$\frac{d}{dt}h = \alpha q_{\mathrm{inn}} - \beta\sqrt{h} \tag{7}$$

Bestem α og β.

c) Linearisere systemet (7) om arbeidspunktet $(q^*_{\mathrm{inn}}, h^*)$, hvor $h^* \neq 0$.

d) Finn egenverdiene av den lineariserte modellen i **c**). Bestem stabilitetsegenskapen til det lineariserte systemet om likevektspunktet, og det ulineære systemet (7). Stemmer det med den fysiske betraktningen?

Oppgave 7 (20 %)

Figur viser en vogn i bevegelse. På enden av en fastmontert stang plasses en vippemekanisme bestående av en stang med to massepunkt på hver sider. Den fastmonterte stangen er plassert i vognens massenter.

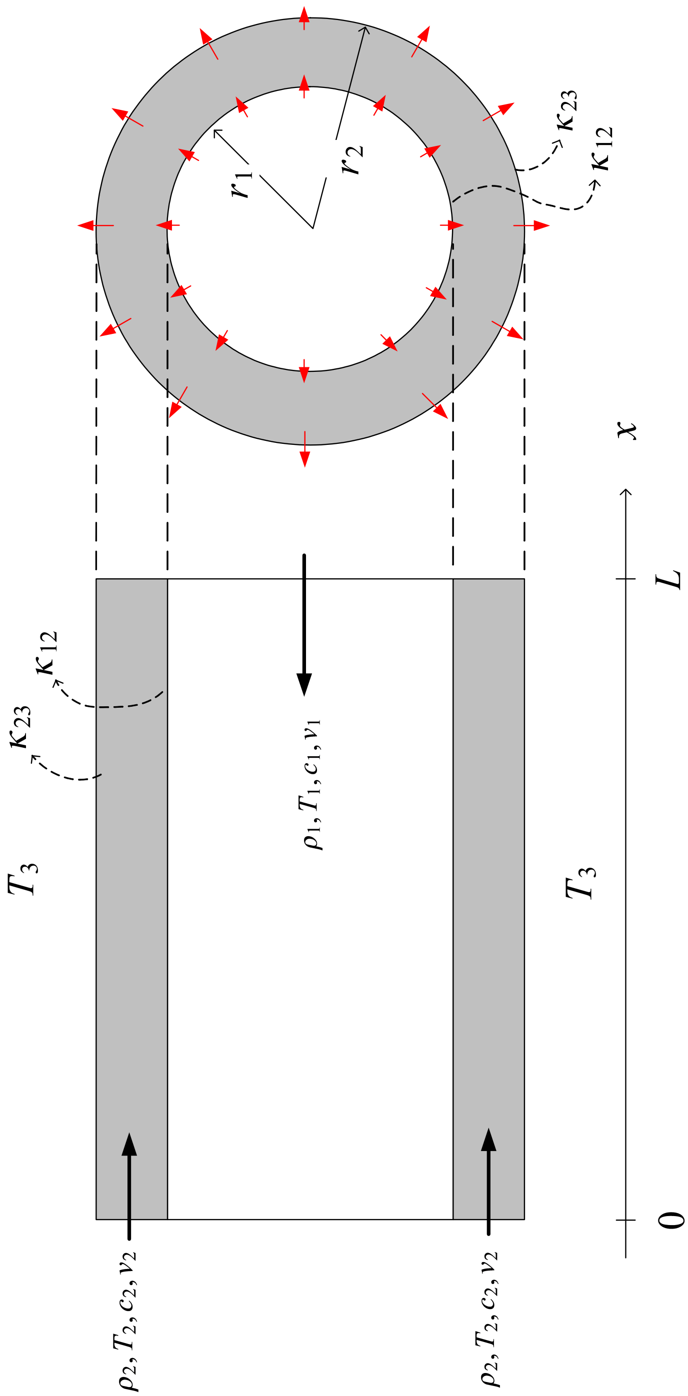
Følgende antagelser gjelder:

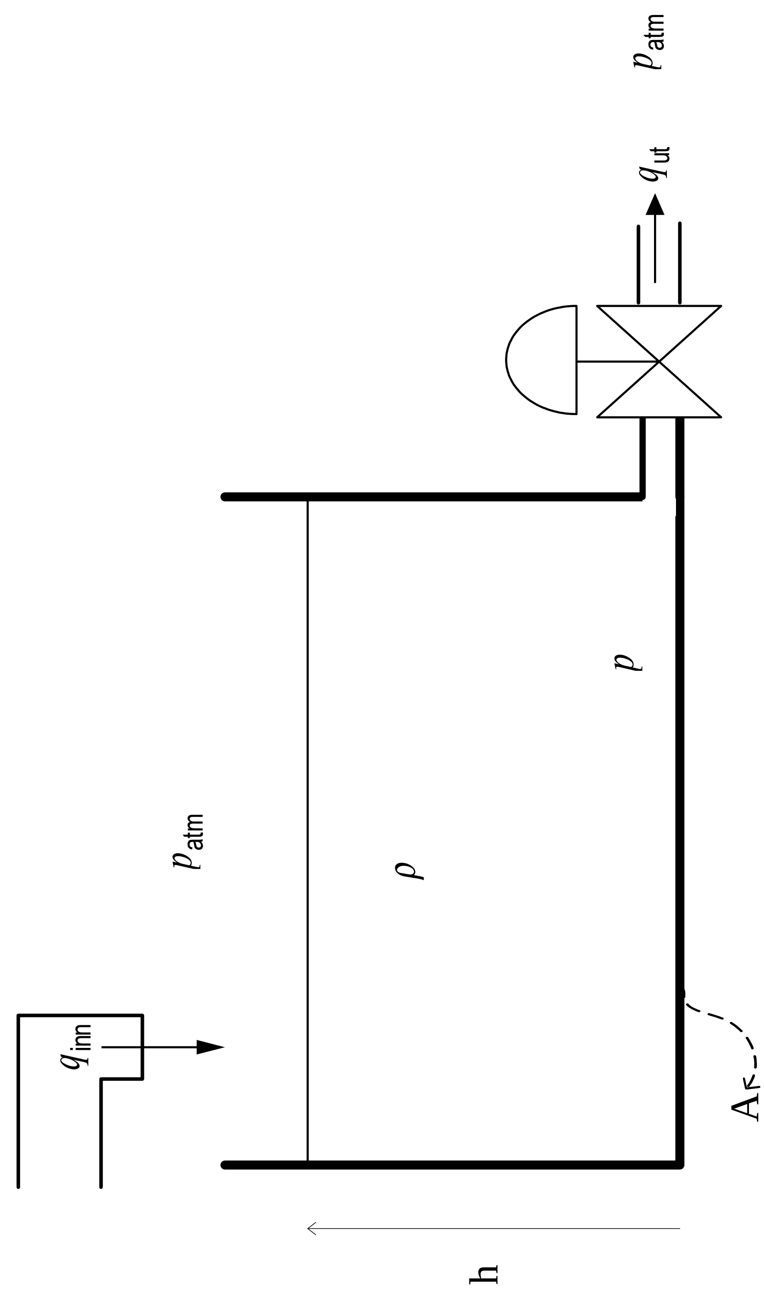
- vognen har masse M. Massepunktene har masse m. <u>Alle</u> andre komponenter antas masseløs.
- vognen er festet til en fjær med fjærkonstant k.
- det virker en kraft F på vognen.
- vognens massesenter har avstand x fra veggen.
- det er ingen strekk i fjære når vognen har posisjon x_0.
- den fastmonterte stangen har lengde L. Vinkelen mellom horisontallinjen og den fastmonterte stangen er θ_0.
- stangen av vippemekanismen har lengde l. Vinkelen mellom horisontallinjen og vippe-stangen er θ.
- tyngdeakselerasjonen er g.
- ingen friksjon i systemet.

a) Velg passende generaliserte koordinater og sett opp et uttrykk for systemets totale potensielle energy U.

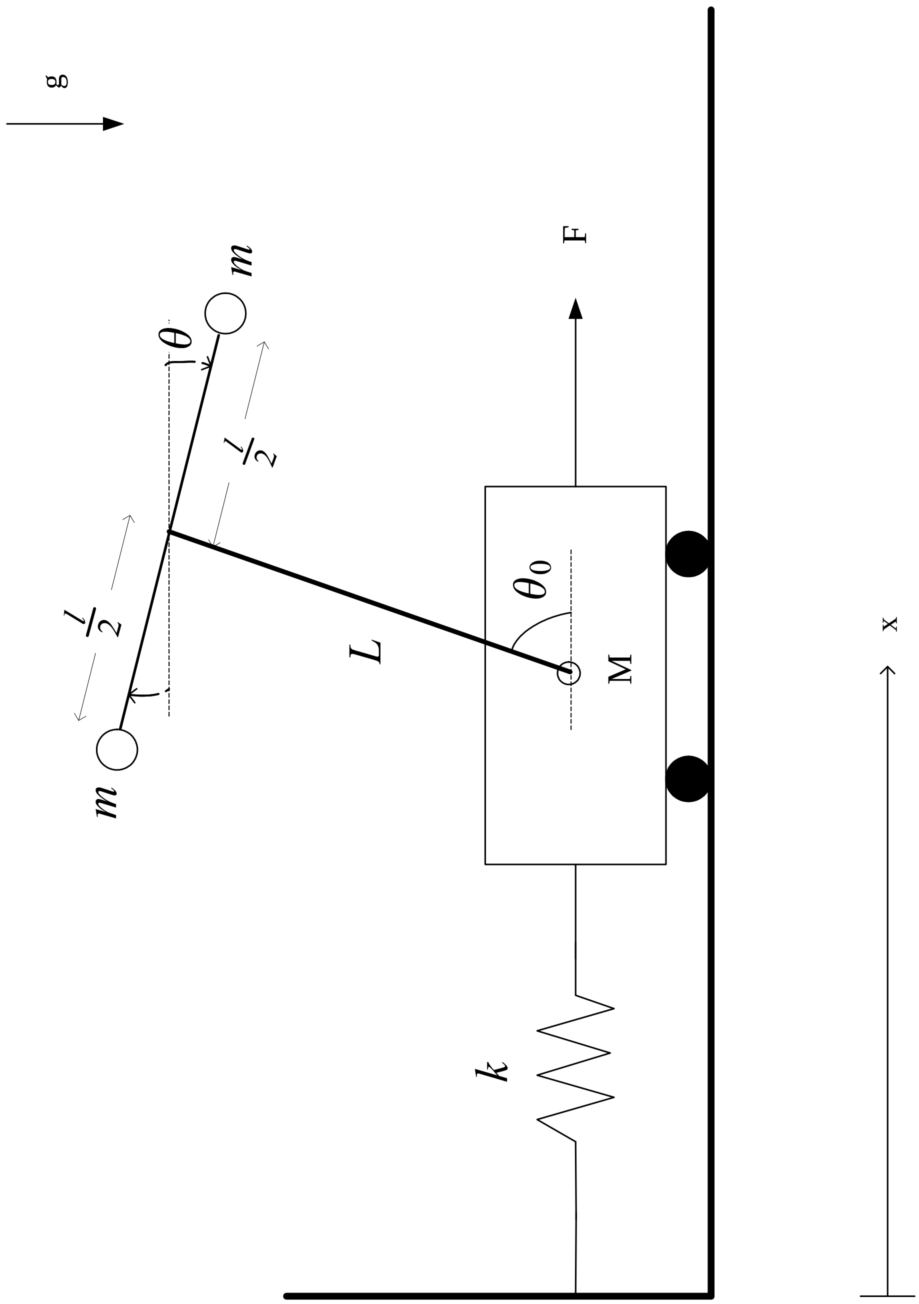
b) Sett opp et uttrykk for systemets totale kinetiske energy T.

c) Utledd bevegelsesligningene for systemet.


T_3
κ_{23}
κ_{12}
r_1
r_2
ρ_1, T_1, c_1, v_1
ρ_2, T_2, c_2, v_2
ρ_2, T_2, c_2, v_2
T_3
x
L
0



p_{atm}
q_{ut}
p_{atm}
ρ
p
q_{inn}
A
h


g
F
m
θ
l/2
l/2
m
L
θ0
M
k
x