南京工业大学 高等数学 A-2 试题　（A）卷

试 题 标 准 答 案

2013 --2014　学年第 2 学期　使用班级　江浦大一学生

一、选择题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分)

1、(A)　　2、(D)　　3、(B)　　4、(D)　　5、(C)

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分)

1、$(1,1,2)$　2、$y''-4y'+4y=0$　3、4π　4、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n \quad (0<x<4)$　5、0

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分，每题要有必要的解题步骤)

1、**解**：$gradf=\{2x-4,4y-6,6z-8\}$;　　$gradf\big|_{(2,1,2)}=\{0,-2,4\}$　　……4 分

$\left|gradf\big|_{(2,1,2)}\right|=2\sqrt{5}$，函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(2,1,2)$ 处方向导数的最大值为 $2\sqrt{5}$　　……3 分

2、解：等式两边分别对 x 求偏导，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$　　……2 分

等式两边分别对 y 求偏导，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$　　……2 分

故　$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{z}{x+z}dx+\frac{z^2}{y(x+z)}dy$　　……3 分

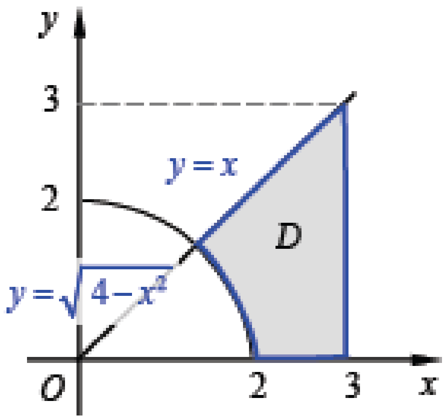
3、解：

$$\iint_D x\,dx\,dy=\iint_D r\cos\theta\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_2^{\frac{3}{\cos\theta}}r^2\cos\theta\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{9}{\cos^2\theta}-\frac{8}{3}\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\left[9\tan\theta-\frac{8}{3}\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=9-\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$



（本题也可先计算大的三角形区域积分，采用直角坐标，再计算扇形区域积分，采用极坐标，两者相减更简单）

4、**解**：$P=2xy-2y, Q=x^2-4x$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4, \frac{\partial P}{\partial y}=2x-2$　　……2 分

由格林公式 $\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$　　……2 分

$$=\iint_D(-2)dxdy=(-2)\cdot 9\pi=-18\pi$$　　……3 分

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、**解**：由条件可知 $\dfrac{dy}{dx}=2x+y$，且 $y\left(0\right)=0$ ……2 分

其通解为 $y=e^{\int dx}\left[\int 2xe^{-\int dx}dx+c\right]=e^{x}\left[2\int xe^{-x}dx+c\right]=ce^{x}-2x-2$ ……4 分

将 $y\left(0\right)=0$ 代入通解中，得 $c=2$，故所求曲线方程为 $y=2e^{x}-2x-2$ ……1 分

2、**解**：$f_x=2x$，$f_y=8y$；令 $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ 解得驻点：$(0,0)$，在区域内 $f(0,0)=9$ ……2 分

在边界上 $\boldsymbol{x^2=4-y^2}$ 代入, 得 $f=3y^2+13$ $\boldsymbol{(-2\le y\le 2)}$,

令 $\dfrac{df}{dy}=0$ 得 $y=0$，这时 $\boldsymbol{x=\pm 2}$；

$f(2,0)=13,\ f(-2,0)=13,\ f(0,-2)=f(0,2)=25$ ……3 分

比较得最大值：$f(0,-2)=f(0,2)=25$，最小值：$f(0,0)=9$ ……2 分

3、**解**：先考查 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{3^n\cdot n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n\cdot n}$，记 $u_n=\dfrac{1}{3^n\cdot n}$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\cdot n}{3^{n+1}\cdot(n+1)}=\dfrac{1}{3}<1$ ，故原级数绝对收敛； ……3 分

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$，易知收敛半径 $R=1$，当 $-1<x<1$ 时，

$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$，于是 $S(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$； ……3 分

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n\cdot n}=S(-\dfrac{1}{3})=-\ln\dfrac{4}{3}$。 ……1 分

4、**解**：$P=(y-z)x,Q=0,R=x-y$，$\dfrac{\partial P}{\partial x}=y-z,\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0,\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$ ……2 分

由高斯公式 $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(y-z)dxdydz$$ ……3 分

$$=\iiint\limits_{\Omega}(-z)dxdydz=-\frac{9}{2}\pi$$ ……2 分

（计算积分 $\iiint\limits_{\Omega}(-z)dxdydz$ 可以采用截面法或柱坐标）

五、应用题(本题 8 分)

五、解：记此均匀薄片的质心坐标为 $\mathrm{M}(\bar{x},\bar{y})$，由对称性知 $\bar{x}=0$， ……1 分

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}=\frac{2\int_0^1 dx\int_0^{a(1-x^2)} ydy}{2\int_0^1 a(1-x^2)dx}=\frac{2}{5}a$$ ……3 分

即质心坐标为 $\mathrm{M}(0,\frac{2}{5}a)$；

由条件可知，$\frac{2}{5}a=1$，得 $a=\frac{5}{2}$。 ……4 分

（问题等价于：当转 45° 时 M 在 $(1,0)$ 点的正上方，也就是此时 $\mathrm{OM}\perp x$ 轴，即转之前 OM 与 x 轴也是夹角 45°）

六、证明题(本题 6 分)

证明：由题目条件可知 $f'(0)=0$，将 $f(x)$ 在 $x=0$ 的小邻域内泰勒展开，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

将 $x=\frac{1}{n}$ 代入上式，得

$$f(\frac{1}{n})=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+\frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$f(\frac{1}{n})-1=\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

即当 $n\to\infty$ 时，$f(\frac{1}{n})-1>0$ 且与 $\frac{1}{n^2}$ 为等价无穷小； ……4 分

又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$ 也收敛。 ……2 分