

第 5 章 静 电 场

电磁现象是自然界存在的一种极为普遍的现象，从人们的日常生活到各种科学技术的研究开发，涉及的范围非常广泛。关于电磁现象的研究深刻地改变了人们的生活方式，推动了人类社会的文明进步。电磁学也是理工科大学物理很重要的基础内容。

人类很早就接触和认识到电磁现象了，但是关于电磁学完整的经典理论经历了漫长的发展历史，直到 19 世纪末 20 世纪初才基本建立起来。早期人们对磁现象和电现象的研究仅限于定性描述和定性分析，如对磁石能够吸引铁、摩擦起电、电荷有正负之分等现象的认识等。直到 19 世纪初人们仍普遍认为电和磁是两种独立的现象。18 世纪中叶和后期莱顿瓶和伏打电池的发明为电磁学的迅速发展提供了良好的实验条件。丹麦物理学家奥斯特(Hans Christian Oersted, 1777—1851)于 1820 年发现了电流的磁效应，同年法国科学家安培(Andre Marie Ampere, 1775—1836)进行了载流螺线管和磁铁等效性的实验和两根平行载流导线相互作用力的实验，发现了磁铁对电流的作用。人们开始认识到电和磁的密切联系。1831 年英国物理学家法拉第(Michael Faraday, 1791—1867)发现的电磁感应现象和定律，使得人们对电和磁的关系有了更为深刻的认识。法拉第提出了电场和磁场的概念来解释电磁相互作用，为电磁现象的统一理论奠定了重要基础。英国物理学家麦克斯韦(James Clerk Maxwell, 1831—1879)在前人工作的基础上，提出了著名的麦克斯韦方程组，建立了关于电磁现象的统一理论。根据这一方程组他还预言了电磁波的存在，并且发现电磁波的理论传播速度与真空中的光速相同，从而大胆预言光也是一种电磁波。1888 年德国物理学家赫兹(Heinrich Hertz, 1857—1894)通过实验证实了电磁波的存在。到 19 世纪末经典的电磁学理论已经发展得相当成熟，理论框架基本建立完成，并且开辟了关于电磁波的应用和研究的全新领域。

本章将介绍静电的基本现象和基本规律以及静电荷在真空中激发的静电场的基本特性。首先介绍描述两个点电荷相互作用的库仑定律，并引入电场的概念，根据电场对电荷有力的作用的特征引入电场强度的概念。接着，根据力的叠加原理给出电场强度的叠加原理，讨论空间中各点电场强度 \boldsymbol{E} 对闭合曲面的积分，给出描述电场和电荷之间简洁关系的高斯定理，说明静电场是有源场；讨论电场强度 \boldsymbol{E} 对闭合回路的线积分，给出电场的环路定理，说明静电场是保守场。最后根据电场对处于其中移动的电荷做功的特点引入电势的概念，并讨论电势和电场强度之间关系的积分形式和微分形式。

5.1 静电现象 静电的基本规律

5.1.1 两种电荷

电学“electricity”起源于古希腊词汇“electron”，意思是“琥珀”。古时候人们发现毛皮摩擦过的琥珀能吸引毛发、羽毛、尘埃等轻小物体。后来发现，玻璃棒、橡胶棒、硫磺块用毛皮或丝绸摩擦后，也能产生“琥珀效应”，吸引轻小物体。在这些情形中，产生的吸引力都是由于物体在摩擦过程携带了电荷，产生了**静电**。用摩擦的方法使物体带电称为**摩擦起电**。静电现象在日常生活中也很常见，干燥的天气脱去人工纤维合成的衬衫，常会因为静电产生噼啪的响声和小火花；用手接触金属门把手，有时会感觉到突然的电击。

实验证实，**自然界只存在两种电荷；且同种电荷互相排斥，不同种电荷互相吸引**。美国科学家富兰克林（Benjamin Franklin, 1706—1790）将这两种不同类型的电荷分别记为正电荷和负电荷，规定丝绸摩擦过的玻璃棒上的电荷视为正电荷，毛皮摩擦过的硬橡胶棒上的电荷视为负电荷。这一约定沿用至今。

5.1.2 电荷守恒定律

大量实验证实，一切过程中某个物体上带有一定量的电荷，则另一物体上必定带有等量异号的电荷。电荷的正负用代数方法计算，则可表述为如下的**电荷守恒定律**：

电荷既不能被创造，也不能被消灭，它只能从一个物体转移到另一个物体，或者从一个区域转移到另一个区域。也就是说，在任何物理过程中，孤立系统电荷的代数和是守恒的。

电荷守恒定律和能量守恒定律、动量守恒定律、角动量守恒定律一样，是自然界的最基本定律，不仅适用于一切宏观过程，也适用于一切微观过程。

5.1.3 电荷的量子化

物体所带电荷常用 Q （或 q ）表示，电荷数量的多少称为**电量**。在 SI 单位制中，电量的单位是库仑（符号 C）。库仑不是国际单位制基本单位，而是导出单位。库仑的基本定义为：若导线中载有 1 安培的稳定电流，则 1 秒内通过导线横截面积的电量为 1 库仑。库仑是一个很大的单位，普通物体之间摩擦产生的电量大约为 1 微库仑（ $1\mu\text{C}=10^{-6}\text{C}$ ）甚至更少。

到目前为止，所有的实验都证明，电子或质子是自然界带有最小电荷量的粒子，这一最小电荷量的绝对值称为元电荷，用符号 e 表示。任何微观粒子甚至宏观物体所携带的电量都是元电荷 e 的整数倍。电量的这种不连续、只能取分立数值的性质，称为**电荷的量子化**。实验测定，元电荷电量的近似值为

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

e 定义为正值，所以电子的电量为 $-e$ ，质子的电量为 $+e$ 。由于 e 的值很小（ $1\mu\text{C}$ 约需要 10^{13} 个电子），所以宏观带电体可不考虑电荷的量子化，仍把电荷看成是连续的。

1964 年，美国物理学家盖尔曼提出了夸克模型，认为中子、质子等强子由称为夸克的更小粒子组成，夸克带有的电量为 $\pm e/3$ 或 $\pm 2e/3$ ，即夸克带有分数电荷。虽然夸克模型在解释物

质微观结构方面取得了很大成功, 不过到目前为止, 分数电荷仍然是一个悬而未决的命题, 实验上还未观察到自由状态的夸克。

5.1.4 库仑定律

电荷之间有相互作用力, 那么该作用力受哪些因素影响呢? 法国物理学家库仑 (Charles Coulomb, 1736—1806) 于 1785 年用扭称实验研究了电荷之间的相互作用力, 总结出点电荷之间相互作用的静电力所服从的基本规律, 称为**库仑定律**, 可表述为: 在真空中, 两个静止的点电荷之间相互作用静电力的**大小正比于它们的带电量 q_1 和 q_2 的乘积, 反比于两者之间距离 r 的平方, 作用力的方向总是沿着两点电荷的连线, 同号相互排斥, 异号相互吸引** (见图 5.1.1), 用数学形式可表示为

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} \quad (5.1.1)$$

式中, F_{12} 表示 q_2 对 q_1 的作用力; $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ 表示从 q_2 指向 q_1 的单位矢量。上式同时给出了静电力的大小和方向。当 q_1 和 q_2 同号时, $F_{12} > 0$, 表示其方向背离 q_2 , 即 q_1 和 q_2 之间为排斥力; 当 q_1 和 q_2 异号时, $F_{12} < 0$, 表示其方向指向 q_2 , 即 q_1 和 q_2 之间为吸引力。根据牛顿第三定律, q_1 对 q_2 的作用力大小相等, 方向相反。

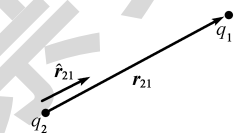


图 5.1.1 库 仑 定 律

关于库仑定律, 有几点需要说明:

(1) 式 (5.1.1) 只适用于描述点电荷之间的相互作用力。点电荷也是一种理想模型, 指带电体自身的尺寸远小于它们之间的距离, 则带电体可看作带有电荷的点。对有限大小的带电体, 特别是带电体上的电荷分布不均匀时, r 的值并不十分明确。若两个带电体为电荷均匀分布的球体, 则 r 就是两球心间的距离。

(2) 库仑定律描述的是两个静止电荷之间的相互作用力。当电荷运动时, 两者之间还会有其他性质的作用力, 后面的章节将会讨论这一问题。

(3) 在 SI 单位制中, 式 (5.1.1) 中的比例系数 k 写为 $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, 常数 ϵ_0 为真空电容率, 其值为 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$, 则 $k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ 。

库仑定律是直接来自实验总结出来的规律, 是静电场理论的基础。与万有引力十分相似, 库仑定律也是平方反比定律 ($F \propto 1/r^2$), 而平方反比的规律是许多其他重要的电学方程的基础。现代更精密的实验测得库仑定律中的幂指数 2 的误差不超过 $1/10^{16}$ ($2 \pm 1 \times 10^{-16}$)。

应用库仑定律时, 通常可先忽略电荷的符号, 再根据作用力是吸引力还是排斥力来判断力的方向。

例 5.1.1 (电子与质子间的静电力) 如图 5.1.2 所示, 氢原子中核外电子绕核运动的“轨道”平均半径 $r = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$, 求构成原子核的单个质子 ($q_2 = +e$) 与电子之间静电力的大小。

解: 由库仑定律

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} = 9.0 \times 10^9 \times \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(0.53 \times 10^{-10})^2} \\ &= 8.2 \times 10^{-8} (\text{N}) \end{aligned}$$

电子与质子带电异号, 作用力为吸引力, 电子受力方向指向质点。由万有引力定律, 可

得电子与质子间的万有引力大小为

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 1.67 \times 10^{-27}}{(0.53 \times 10^{-10})^2} = 3.63 \times 10^{-47} \text{ (N)}$$

由此得静电力与万有引力大小之比为

$$F_e / F_g = 2.26 \times 10^{39}$$

可见，在原子尺度的范围内，电子和质子、基本粒子之间的静电力远大于万有引力，因此在考虑基本粒子之间的相互作用时，只需考虑静电力，万有引力可忽略不计。

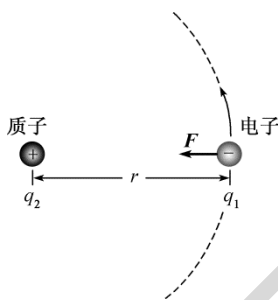


图 5.1.2 电子与质子间的静电力

在日常生活中，静电力扮演着重要的角色。根据原子理论，原子和分子间的电作用力使得它们聚集在一起形成液体或固体，电作用力也存在于人体内新陈代谢的过程中。常见的许多力，如弹性力、压力以及其他接触力都可视为电磁力在原子尺度上作用的效果。

5.2 电场 电场强度

5.2.1 电场

静电力和万有引力一样，都是所谓“超距作用”的力，即两个物体并不接触而存在相互作用力，而且这种“超距作用”看起来既不需要时间，也不需要中间物质作为介质。

为了理解这种超距作用的力，英国科学家法拉第提出了场的概念。在法拉第看来，每个电荷都激发延伸向外的电场，并且能穿透所有空间，如图 5.2.1 所示。电场对处于其中的电荷有力的作用，这种力称为**电场力**。

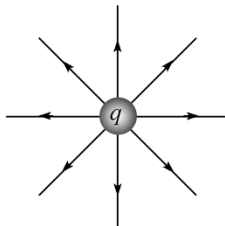


图 5.2.1 点电荷周围的电场

现代物理理论和大量实验都证明了场的观点的正确性。场的观点表明，所谓的“超距作用”实质上还是近距离作用，只不过是电荷激发的电场与电荷直接相互作用，而且这种力的作

用是需要一定的时间的。当电荷静止时,产生的静电场具有稳定的分布,对处于其中的电荷的力的作用传递所需的时间显现不出来。但若电荷发生移动,在周围空间激发的就是交变的电磁场,实验和理论都证实,这种交变电磁场的传播需要一定的时间,某处电磁扰动,需要一段时间才能影响到空间中另一处。由此可见,“超距作用”的观点是不正确的。场的概念和方法是整个电磁场理论的重要基础。

电磁场(电场与磁场)是物质存在的一种特殊形态,和实物物质一样具有动量、能量、质量等属性。不过,电磁场的物质性只有在它处于迅速变化的情况下,才能明显地表现出来。相对于观察者静止的电荷在周围空间所激发的电场是稳定分布的静电场,本章仅研究静电场的分布规律和特性,后面的章节将会讨论到磁场以及交变的电磁场的规律。

5.2.2 电场强度

可根据电场与处于其中电荷的相互作用力的特性,引入电场强度的概念来表征电场的力学性质。利用**试验电荷**的受力来研究电场中任一点的电场强度。试验电荷要满足的条件是:体积充分小,可视为点电荷;带电量充分小,不会显著改变场源电荷在该处的电场分布。如图 5.2.2 所示,带正电的试验电荷 q_0 在电场中

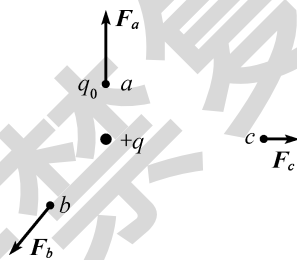


图 5.2.2 电场对试验电荷 q_0 的作用力

受力的大小和方向随位置的变化而变化。在某一点,试验电荷 q_0 受力的方向确定不变,而大小与电量成正比;若改变电量的符号,则受力方向相反。由此可见,试验电荷在电场中的受力,不仅与电场的性质有关,还与试验电荷本身的带电量和符号有关。但实验表明,比值 F/q_0 与试验电荷无关,仅与试验电荷所在位置电场本身的性质有关,则空间中某点的**电场强度 E** 可定义为

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (5.2.1)$$

由式(5.2.1)可知,电场强度是矢量,大小等于单位电荷受到的电场力大小,方向为正的试验电荷在该点受到的电场力方向。在 SI 单位制中,电场强度 E 的单位为牛顿/库仑(N/C)或伏特/米(V/m)。

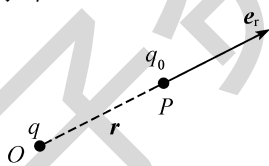


图 5.2.3 点电荷电场强度的计算

5.2.3 电场强度的计算

1. 点电荷的电场强度

设真空中有一个静止的点电荷 q , 其激发的电场强度分布可根据式(5.2.1)直接进行计算。如图 5.2.3 所示,以点电荷 q 所在位置为原点 O , 距离 q 为 r 的 P 点有试验电荷 q_0 , 由库仑定律可得 q_0 受力为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} e_r$$

式中, e_r 为从 O 点指向 P 点的单位矢量。根据定义式(5.2.1), P 点的场强为

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} e_r \quad (\text{单个点电荷}) \quad (5.2.2)$$

可见,电场强度 E 与试验电荷 q_0 无关,仅取决于场源电荷 q 的值。若 q 为正电荷,则 E

沿 \mathbf{e}_r 方向; 若 q 为负电荷, 则 \mathbf{E} 沿 \mathbf{e}_r 反方向。由于 P 点的选择是任意的, 所以上述计算结果已经反映了点电荷 q 产生的电场在空间内的分布特点: ① \mathbf{E} 的方向处处沿着以 q 为中心的径向 \mathbf{e}_r 的方向 ($q > 0$) 或其反方向 ($q < 0$); ② \mathbf{E} 的大小只与到 q 的距离 r 有关, 与 r^2 成反比, 呈现出球对称的特点, 如图 5.2.1 所示。

2. 点电荷系的电场强度 电场强度的叠加原理

电场力和其他矢量一样, 也满足矢量叠加原理。若电场由多个点电荷产生, 则试验电荷 q_0 受到的电场力等于各点电荷单独存在时试验电荷受到的电场力的矢量和, 由定义式 (5.2.1) 可得

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (5.2.3)$$

式中, \mathbf{E}_i 表示各点电荷单独存在时在该处产生的电场强度。上式说明, 点电荷系在空间中任意一点所激发的电场强度等于各个点电荷单独存在时在该点所激发的电场强度的矢量和, 这称为**电场强度的叠加原理**。实验也证实了电场强度叠加原理的有效性。

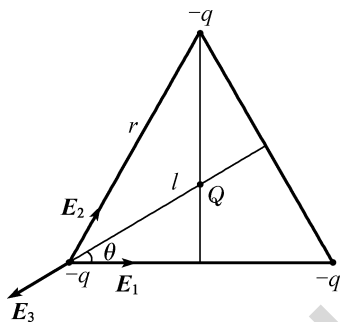


图 5.2.4 例 5.2.1 图

例 5.2.1 如图 5.2.4 所示, 3 个带有等量电量 $-q$ 的点电荷分别位于边长为 r 的等边三角形的 3 个顶点上, 正点电荷 Q 位于等边三角形的中心。欲使每个 $-q$ 受力为零, 求 Q 值大小。

解: 欲使每个 $-q$ 受力为零, 则等边三角形各顶点处的电场强度必为 0。如图所示, 由电场强度的叠加原理可得

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = 0$$

将上式改写为分量式, 并考虑到 $E_1 = E_2$, 则

$$2E_1 \cos \theta + E_3 = 2 \times \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times \cos 30^\circ + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)^2} = 0$$

可得

$$Q = \sqrt{3}q / 3$$

3. 连续分布的电荷的电场强度

如果带电体的形状不能近似为一个点, 则该带电体产生的电场计算要复杂一些。宏观带电体的电荷可视为连续分布, 其电量可分解为许多电荷元 dq , 每个电荷元可视为点电荷, 该电荷元在某点 P 产生的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5.2.4a)$$

式中, r 为电荷元到 P 点的距离; \mathbf{e}_r 为从电荷元指向 P 点的单位矢量。 P 点的电场强度 \mathbf{E} 由所有电荷元的贡献求和得到, 即

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5.2.4b)$$

这里的 $d\mathbf{E}$ 为矢量, 积分时要注意对被积函数的处理。

一般而言,电荷在带电体上的分布是不均匀的,为了表征电荷在任一点附近的分布情况,引入电荷密度的概念。根据电荷分布的几何特征,电荷密度可分为体密度、面密度和线密度。若电荷分布在一定的体积内,在带电体内任取一点,作一包含该点的体积元 ΔV ,设该体积元中的电荷量为 Δq ,则该点的电荷体密度定义为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (5.2.5a)$$

若电荷分布在导体或电介质的表面层里,呈现面分布的特征,则在带电面上任取一点,选择一包含该点的面积元 ΔS ,设该面积元中的电荷量为 Δq ,则该点的电荷面密度定义为

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (5.2.5b)$$

若电荷分布在细长的线上,则可定义电荷的线密度为

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (5.2.5c)$$

式中, Δl 为包含某点的线微元; Δq 为该线微元上的带电量。

由式(5.2.5)可知,根据带电体上电荷体分布、面分布或线分布等的不同特征,式(5.2.4)中的 dq 可分别取为 $dq = \rho dV$, $dq = \sigma dS$ 或 $dq = \lambda dl$ 。

例 5.2.2 (均匀带电的圆环) 如图 5.2.5 所示,半径为 R 的圆环均匀带电 Q ,求圆环的轴线上距离中心点 x 处点 P 的电场强度。

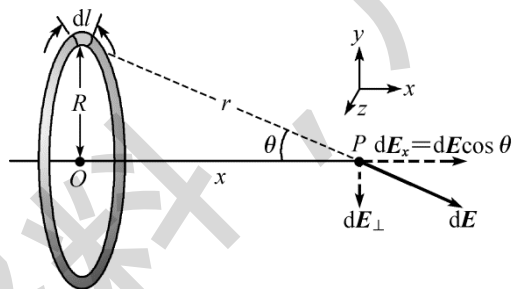


图 5.2.5 均匀带电圆环轴线上的电场强度

解: 建立如图 5.2.5 所示坐标系,圆环的中心为原点 O ,其轴线为 x 轴,圆环位于 yz 平面内,环上微元长度 dl 产生的电场强度 dE 大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

设电荷的线密度为 λ , dl 长度上的电荷量为 $dq = \lambda dl$, 其中 $\lambda = Q / 2\pi R$, 则 dE 可写为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2}$$

矢量 dE 分为沿 x 轴方向的分量 dE_x , 沿垂直于 x 轴方向的分量 dE_{\perp} 。由对称性分析可知,环上各电荷元产生的 dE_{\perp} 互相抵消,总的电场强度 E 沿 x 轴方向,只需对 x 方向分量 dE_x 进行求和,则

$$E = E_x = \int dE_x = \int dE \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dl}{r^2} \cos \theta$$

其中 $\cos \theta = x / r$, $r = (x^2 + R^2)^{1/2}$, 得

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x (2\pi R)}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

若 $x \gg R$, 上式近似为 $E = Q / (4\pi\epsilon_0 x^2)$, 表明在远离环心处, 圆环可视为点电荷; 若 $x = 0$, 则 $E = 0$, 即环心处场强为 0。

计算电荷连续分布的带电体产生的电场强度, 基本步骤可总结为: ①建立坐标系, 取电荷元 dq , 并将其视为点电荷, 根据带电体电荷分布特征求出 dq 与电荷密度关系式, 写出 dE ; ②通过对称性分析降低问题的复杂程度; ③统一积分变量, 对各分量值 (标量) 进行积分; ④对结果作一些特殊值研究, 可以进一步验证其正确性。

例 5.2.3 (电荷均匀分布的长直线) 如图 5.2.6 所示, 较长的直线上均匀带电, 电荷的线密度为 λ , 设点 P 到直线的垂直距离 x 远小于直线的长度, 求 P 点的电场强度。

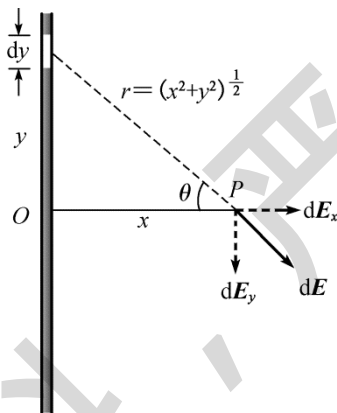


图 5.2.6 均匀带电长直线附近的电场强度

解: 建立如图所示坐标系, 原点为 O , 直线位于 y 轴, P 点位于 x 轴。直线上微元 dy 的带电量为 $dq = \lambda dy$, 在 P 点产生的电场强度 dE 大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{(x^2 + y^2)}$$

矢量 dE 具有 x 分量 $dE_x = dE \cos \theta$ 和 y 分量 $dE_y = dE \sin \theta$, 若直线在两个方向都很长, 或 O 点位于直线的中点, 则 O 点上方和下方电荷对电场强度 y 分量的贡献就大小相等, 符号相反, 互相抵消, 即

$$E_y = \int dE \sin \theta = 0$$

于是

$$E = E_x = \int dE \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\cos \theta dy}{x^2 + y^2}$$

进行变量代换, $y = x \tan \theta$, $dy = x d\theta / \cos^2 \theta$, 且 $x^2 + y^2 = x^2 / \cos^2 \theta$, 则

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x}$$

式中, 设直线在两个方向无限长 ($y \rightarrow \pm\infty$), 对应着极限 $\theta = \pm\pi/2$ 。计算结果表明, 均匀带电长直线产生的电场与到直线的垂直距离 x 的一次方成反比。

例 5.2.4 (电荷均匀分布的圆盘) 如图 5.2.7 所示, 电荷均匀分布在半径为 R 的薄圆盘上, 电荷面密度为 σ 。计算圆盘轴线上距离中心点 z 处 P 点的电场强度。

解: 将圆盘视为一系列同心圆环, 然后对这些圆环产生的电场强度求和。图中所示半径为 r 的环, 在 P 点产生的电场强度由例 5.2.2 结果可得

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

圆环的面积为 $2\pi r dr$, 则 $dq = \sigma 2\pi r dr$, σ 为电荷面密度, 上式改写为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z \sigma 2\pi r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{z \sigma r dr}{2\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

每个圆环产生的电场强度 dE 均沿 z 轴方向, 故对上式直接积分得圆盘在 P 点产生的电场强度为

$$E = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

若 σ 为正, 则 E 沿 z 轴从圆盘指向外侧, 若 σ 为负, 则 E 沿 z 轴指向圆盘。特别地:

①若 P 点到圆盘的距离远小于圆盘的半径 ($z \ll R$), 则上式近似为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (5.2.6)$$

可见, 无限大带电平面附近的电场强度与距离 z 无关, 平面两侧各点电场强度大小相等, 方向垂直于平面, 为匀强电场。②若 P 点到圆盘的距离远大于圆盘的半径 ($z \gg R$), 则式中第二项可按二项式定理进行级数展开

$$\left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{R^2}{z^2} \right)^2 - \dots$$

略去高阶小量, 可得 P 点的电场强度为

$$E = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

可见, 当 P 点到圆盘的距离远大于圆盘自身的尺寸时, 圆盘可视为点电荷。

例 5.2.5 (两个平行的带电极板) 如图 5.2.8 所示, 两个很薄的均匀带电极板互相平行, 电荷面密度分别为 σ 和 $-\sigma$, 相隔距离为 d , d 远小于它们的长度和宽度。求两极板间的电场强度。

解: 由于 d 远小于极板的线度, 极板附近的场强可由式 (5.2.6) 计算, 则每个极板产生的电场强度大小为: $E = \sigma / 2\epsilon_0$ 。带正电极板两侧的电场强度 E_+ 垂直于极板并指向离开极板的方向, 带负电极板两侧的电场强度 E_- 垂直并指向极板。由电场强度叠加原理, 两极板之间区域的电场强度为

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

在两带电极板的外侧

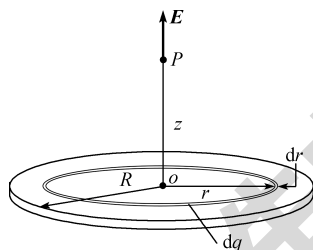


图 5.2.7 均匀带电圆盘轴线上的电场强度

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0$$

可见, 当两带电极板线度远大于极板间距时, 不存在边缘效应, 均匀电场完全集中在两极板之间。

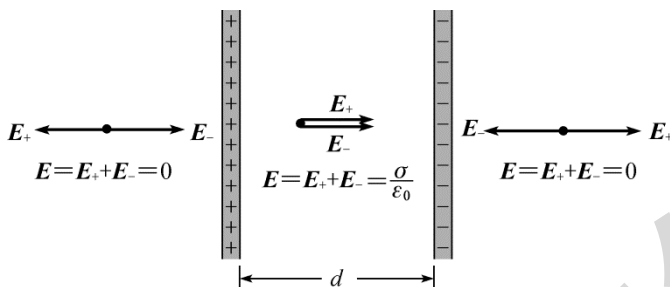


图 5.2.8 均匀带电平行板的场强

5.2.4 电场线

电场强度是矢量, 电场为矢量场。为了形象地描述电场强度在空间中的分布, 引入**电场线**的概念。所谓电场线, 就是人为地在电场中描绘一系列的曲线, 且曲线上每一点的切向都与该点电场强度 \mathbf{E} 的方向一致。并规定穿过垂直于某点电场强度 \mathbf{E} 的单位面积电场线的数目反映电场 \mathbf{E} 的大小 (即 $E = dN / dS$), 这样电场线的疏密程度反映该点电场强度的大小, 电场线稀疏的地方场强小, 电场线密集的地方场强大。如图 5.2.9 (a)、(b) 所示分别为单个正点电荷和负点电荷产生的电场线, 从图中可见, 越靠近电荷, 电场线越密集, 电场越强。如图 5.2.10 (a)、(b)、(c)、(d) 所示分别为另外几种常见的静电场分布。可以看到, 离开 $+2q$ 的电场线数目是进入 $-q$ 电场线数目的两倍; 两个带有等量异号电荷的无限大平面间的电场线彼此平行, 且均匀分布, 说明该电场为匀强电场。

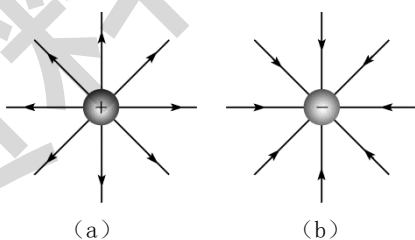


图 5.2.9 点电荷的电场线

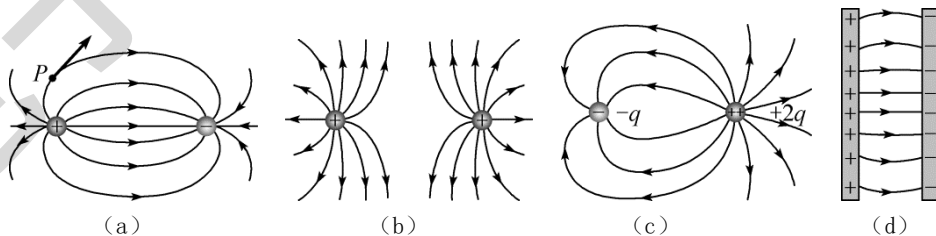


图 5.2.10 4 种不同电荷分布激发的电场线

静电场的电场线具有如下的性质: ①任意一点电场强度的方向沿该点电场线的切线方向; 电场强度的大小正比于垂直于电场线单位面积通过的电场线的数目, 电场线越密集, 电场越

强；②电场线起源于正电荷（或来自无穷远处），终止于负电荷（或伸向无穷远处），在没有电荷的地方不会中断或产生电场线，起源或终止于电荷的电场线数目正比于电荷电量的大小；③电场线不能形成闭合曲线；④任意两条电场线永不相交。其中性质①是电场线的基本规定；性质②和③反映了静电场的两条重要性质，后面两节将会介绍；性质④是因为电场中任一点的电场强度都具有确定的方向。但必须清楚，电场线只是描述电场特性的一种方法，客观上电场线并不存在。

*5.2.5 带电粒子在电场中的受力及其运动

电荷和电场的关系包括两个方面，一方面电荷产生电场，另一方面电场对电荷也会施加电场力。若已知某处的电场强度 E ，由式 (5.2.1) 可得电荷 q 在该处受到的静电力 F 为

$$F = qE \quad (5.2.7)$$

若 q 为正，则 F 和 E 方向一致；若 q 为负，则 F 和 E 方向相反。静电力也称为库仑力。上面讨论的都是对于给定的带电体如何计算其产生的电场强度分布，下面考虑已知电场 E ，讨论带电粒子在电场中的受力以及运动。

例 5.2.6 (电子垂直于电场强度 E 的运动) 阴极射线示波管是把电信号变换成可观察图像的真空玻璃管。图 5.2.11 为示波管的竖直偏转系统，两极板间为匀强电场 E ，电子质量为 m ，电荷为 $-e$ ，以恒定速度 v_0 射入电场中， v_0 与 E 垂直。电子的重力可忽略不计，求电子在电场中运动的轨迹方程。

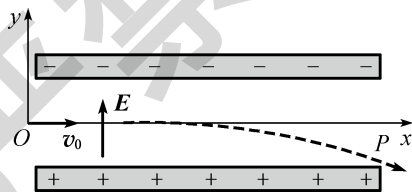


图 5.2.11 例 5.2.6 图

解：电子进入电场时 ($x=y=0$)，速度为 $v_0 = v_0 i$ ，电场强度方向竖直向上，电子受到的电场力产生的加速度为

$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{-eE}{m}$$

电子在竖直方向加速度为恒矢量，运动方程为

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 = -\frac{eE}{2m} t^2$$

电子在水平方向做初速度为 v_0 的匀速运动，运动方程为

$$x = v_0 t$$

从上面两式中消去时间 t ，即得电子运动的轨迹

$$y = -\frac{eE}{2mv_0^2} x^2$$

这是抛物线方程，表明电子的运动轨迹为抛物线。

*5.3 电 偶 极 子

在电学问题中，常常遇到一对等量异号点电荷 $+q$ 和 $-q$ 组成的带电体系，它们之间的距离 l 远小于场点到它们的距离 r ，这种带电体系称为**电偶极子**。乘积 ql 为电偶极矩，常用符号 p

表示。电偶极矩可视为矢量 \mathbf{p} , 大小为 ql , 方向从负电荷指向正电荷, 如图 5.3.1 所示。

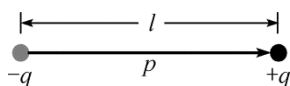


图 5.3.1 电偶极子

现在求电偶极子在一些特殊点产生的电场强度。首先考虑电偶极子中垂面上的点 P , 如图 5.3.2 (a) 所示, r 为 P 点到电偶极子连线的垂直距离。由电场强度的叠加原理, P 点的电场强度为

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

\mathbf{E}_+ 和 \mathbf{E}_- 分别是正负电荷分别产生的电场, E_+ 和 E_- 的值大小相等

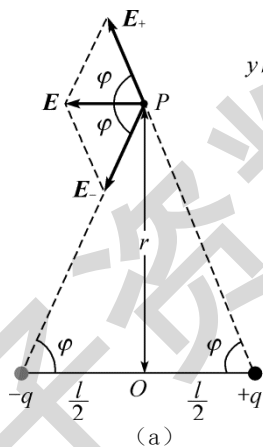
$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + l^2/4}$$

它们在 P 点 y 方向的分量互相抵消, 所以总的电场强度 \mathbf{E} 大小为

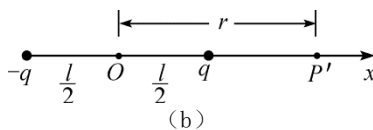
$$\begin{aligned} E_P &= 2E_+ \cos\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + l^2/4} \frac{l/2}{(r^2 + l^2/4)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}} \quad (\text{电偶极子中垂线上}) \end{aligned}$$

对于远离电偶极子的场点 $r \gg l$, 上式变为

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \quad (\text{电偶极子中垂面上, 且 } r \gg l) \quad (5.3.1)$$



(a)



(b)

图 5.3.2 电偶极子的电场

接着考虑沿电偶极子臂的延长线上点 P' 的场强。如图 5.3.2 (b) 所示, P' 点的场强为

$$E_{P'} = E_+ + E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r - l/2)^2} + \frac{-q}{(r + l/2)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rl}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \quad (\text{电偶极子臂的延长线上})$$

当 $r \gg l$, 上式变为

$$E_{P'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \quad (\text{电偶极子臂的延长线上, 且 } r \gg l) \quad (5.3.2)$$

可以证明, 电偶极子场强 $1/r^3$ 的衰减关系也适用于除中垂面和延长线外的其他点, 随距离的衰减比点电荷的衰减更快 ($1/r^2$)。

实际中电偶极子模型的应用是非常多的。在讨论电介质的极化时, 在外电场的作用下电介质的原子或分子中的正负电荷中心发生微小的相对位移, 形成电偶极子; 无线电发射天线里电子周期性的运动, 使得金属线的两端交替出现正、负电荷, 形成振荡电偶极子。另外, 生物学中生物膜也要用到电偶极子的概念。

5.4 高 斯 定 理

5.4.1 电场强度通量

定义通过电场中某一面积的电场线数目为电场强度通量, 用 Φ_E 表示。根据电场线数目与电场强度 E 的关系式 $E = dN/dS$, 可计算通过某一面积的 Φ_E 。

1. 匀强电场, 平面的电场强度通量

如图 5.4.1 (a) 所示, 匀强电场 E 垂直穿过平面 S , 则穿过该平面的电场强度通量为

$$\Phi_E = ES$$

若平面 S 与电场 E 不垂直, 平面法线与电场方向存在夹角 θ , 如图 5.4.1 (b) 所示, 则穿过平面的电场线数目变少, 通过该平面的电场强度通量为

$$\Phi_E = ES_{\perp} = ES \cos \theta \quad (\text{场强 } E \text{ 均匀}) \quad (5.4.1a)$$

式中, S_{\perp} 为平面 S 在垂直于 E 方向上的投影面积。为了表达简洁, 平面 S 可表示为矢量 \mathbf{S} , 其大小为面积 S , 方向为垂直于平面的法线方向, 如图 5.4.1 (b) 所示。 E 和 \mathbf{S} 的夹角也是平面与竖直方向的夹角为 θ , 则式 (5.4.1a) 可利用矢量的点积改写为

$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \quad (\text{场强 } E \text{ 均匀}) \quad (5.4.1b)$$

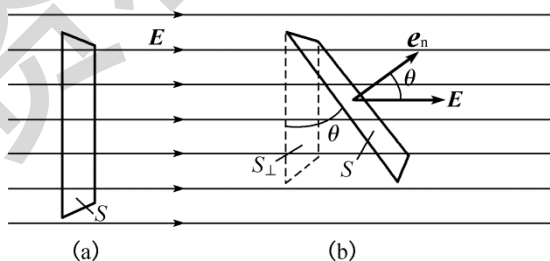


图 5.4.1 通过平面的匀强电场

2. 非匀强电场, 曲面的电场强度通量

将上述特殊情形进行推广。如图 5.4.2 所示, 电场 E 是非匀强电场, 曲面也不是平面。此时, 在曲面上任取一面元 $d\mathbf{S}$, 面元足够小, 可近似为平面, 且面元上的电场强度变化很小, 可视为匀强电场, 则通过该面元的电场强度通量为

$$d\Phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cos \theta dS \quad (5.4.2a)$$

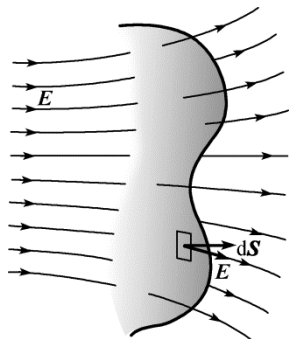


图 5.4.2 曲面的电场强度通量

整个曲面可划分为许多小面元 dS ，由上式可计算每个小面元的电场强度通量，然后求所有小面元上电场强度通量的代数和，就得出通过整个曲面的电场强度通量。当面元大小趋于 0 而面元数目趋于无限大时，求和变为对整个曲面的积分

$$\Phi_E = \int E \cdot dS \quad (5.4.2b)$$

3. 闭合曲面的电场强度通量

如图 5.4.3 所示，通过闭合曲面的电场强度通量记为

$$\Phi_E = \oint E \cdot dS \quad (5.4.3)$$

式中，积分符号 \oint 表示对闭合曲面的积分。

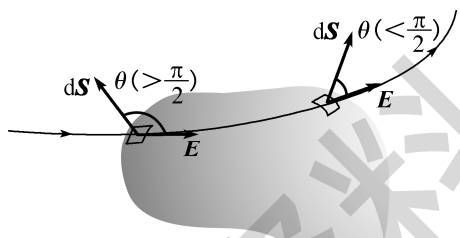


图 5.4.3 闭合曲面的电场强度通量

一个曲面有正反两面，所以曲面的法线方向 e_n 也有正、反两种取法。例如，在图 5.4.1 中，矢量 S 的方向可以指向右上方向（图中所示），也可以指向左下方。对于单个面元或非闭合曲面，法线方向取向哪一侧并没有实质的区别。而对于闭合曲面，规定 S 和 dS 的方向总是指向闭合曲面外侧，如图 5.4.3 所示。对于进入闭合曲面的电场线（见图 5.4.3 左侧）， $\theta > \pi/2$ ， $\cos\theta < 0$ 。对离开闭合曲面的电场线（见图 5.4.3 右侧），电场 E 和 dS 之间的夹角 θ 小于 $\pi/2$ ， $\cos\theta > 0$ 。根据上述规定，穿进闭合曲面的电场强度通量（ $\int E \cos\theta dS < 0$ ）为负，而穿出闭合曲面的电场强度通量为正。所以式（5.4.3）给出的是闭合曲面的净流出通量。若 Φ_E 为负，则说明存在流进闭合曲面的净通量。

5.4.2 高斯定理

那么通过某一闭合曲面的电场强度通量 Φ_E 的值取决于哪些因素呢？这正是高斯定理关心的事情。

1. 高斯定理的表述

通过一个任意闭合曲面的电场强度通量等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以真空电容率 ϵ_0 ，与闭合曲面外的电荷无关，即

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q_i^{\text{in}}}{\varepsilon_0} \quad (5.4.4)$$

式中, q_i^{in} 表示闭合曲面内的电荷, 这就是**电场的高斯定理**, 给出了通过闭合曲面的电场强度通量 Φ_E 和曲面内电荷的代数和 $\sum q_i^{\text{in}}$ 之间的数值关系。下面通过对高斯定理的证明和应用加深对高斯定理的理解。

2. 高斯定理的证明

利用点电荷的场强分布和电场强度叠加原理, 采取从特殊到一般的方法, 分步证明高斯定理。

1) 点电荷 q 位于球面的中心

如图 5.4.4 所示, 单个点电荷 q 位于半径为 r 的球面的中心。由库仑定律, 球面上各点电场强度 \mathbf{E} 大小相等, 均为 $E = q / 4\pi\varepsilon_0 r^2$, 方向沿径向, 与该点面元 $d\mathbf{S}$ 方向平行或相反 (若 q 为负), 则

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

可见, 高斯定理适用于点电荷位于球面中心的特殊情形。

由上式可见, 这一结果与球面半径 r 无关。

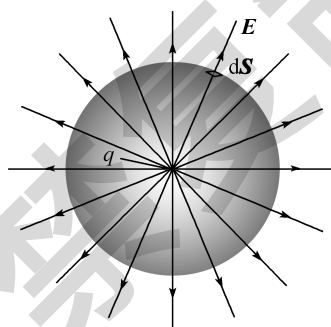


图 5.4.4 点电荷 q 位于半径为 r 的球面高斯面的中心

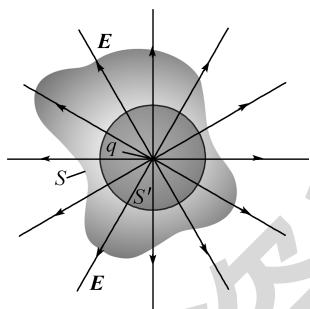


图 5.4.5 点电荷 q 位于任意曲面 S 内

2) 点电荷 q 位于任意闭合曲面 S 内

如图 5.4.5 所示, 点电荷 q 位于任意形状的闭合曲面 S 内。在 S 内作以 q 所在点为球心的小球面 S' , 由电场线的性质可知, q 产生的电场线穿过曲面 S 的数目与穿过球面 S' 的数目相同, 所以通过 S 的电场强度通量等于通过 S' 的电场强度通量, 得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

即高斯定理对包围单个电荷 q 的任意形状的闭合曲面都成立。

3) 点电荷 q 位于闭合曲面 S 之外

由于单个点电荷所产生的电场线在周围空间连续不断。当点电荷位于闭合曲面 S 外时, 可以看到所有穿进曲面的电场线又从另一侧曲面穿出, 故对高斯面上总的电场强度通量的贡献为 0。

4) 空间内存在多个点电荷

若空间内存在多个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n , 有的在闭合曲面内, 有的在闭合曲面外, 曲面上各点的电场强度 \mathbf{E} 为各点电荷单独存在时产生的电场强度 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ 的矢量叠加, 于是

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint (\sum_i \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}$$

对等式右端应用 (2) 和 (3) 得到的结论, 若点电荷在面内, 则积分等于 q_i/ε_0 ; 若点电荷在面外, 则积分为 0。于是上式可化简为

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i^{\text{in}}$$

由此可见, 对于任意的电荷分布和任意形状的闭合曲面, 高斯定理都成立。

3. 几点说明

(1) 高斯定理和库仑定律都是静电场的基本定律, 适用于静电荷产生的电场。到本书磁场部分将会看到, 变化的磁场也会激发出电场, 库仑定律不能描述这样的电场, 但是高斯定理对这样的电场也成立。因此, 高斯定理是比库仑定律更加普遍的规律。

(2) 对电场强度 \mathbf{E} 积分的闭合曲面, 可根据需要任意选择, 不一定真实存在, 称之为高斯面。

(3) $\sum q_i^{\text{in}}$ 为面内电荷的代数和, 面内电荷的分布状态不影响表达式。

(4) 高斯定理等式右端的 $\sum q_i^{\text{in}}$ 为曲面内电荷的代数和, 而等式左端的 \mathbf{E} 却是由空间所

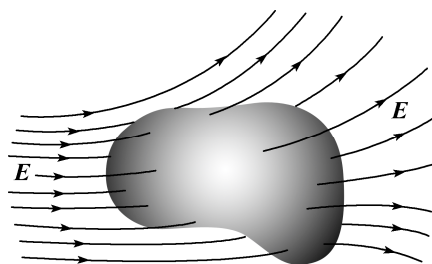


图 5.4.6 曲面内无电荷

有电荷在闭合曲面上各点激发的电场强度的矢量和, 即 \mathbf{E} 是由面内、面外所有电荷决定的, 这是由电场强度的叠加原理决定的。高斯面外的电荷对电场强度通量的贡献为零, 但是对各点的电场强度贡献并非为 0。例如, 如图 5.4.6 所示, 高斯面位于面外电荷激发的电场中, 面内无电荷, 高斯面上的电场强度通量为 0, 而面上各点的场强并不为 0。

(5) 高斯定理表明静电场是有源场。

5.4.3 高斯定理的应用

一般情况下, 给定空间的电荷分布, 根据高斯定理仅能求出某一闭合曲面的电场强度通量, 无法确定空间内各点的电场强度。但是, 当电荷分布具有高度对称性时, 电场强度的分布相应地也具有一定的对称性。这时, 高斯定理提供了求解电场强度的一种简便方法。应用高斯定理, 要根据电场强度分布的对称性选择合适的高斯面, 使得高斯面上所有或部分点的场强为常量, 才能求出 \mathbf{E} 。有些情况下选择的高斯面使得通过其中部分曲面的电场强度通量为零。

例 5.4.1 (均匀带电球壳) 如图 5.4.7 (a), 半径为 R 的球壳均匀带电 Q , 求:

(1) 球壳外的电场强度;

(2) 球壳内的电场强度。

解: (1) 由电荷分布的球对称性可知, 电场强度分布也应具有球对称性, 即电场强度沿着径向向外 (若 $Q < 0$, 则向内), 且大小仅与 r 有关。

首先求球壳外的电场 \mathbf{E} , 选择高斯面为半径为 r ($r > R$) 与球壳同心的球面, 如图 5.4.7 (a) 中球壳外虚线球面 S_1 。 S_1 上各点的电场强度 \mathbf{E} 大小相等, 方向均与所在点处面元 $d\mathbf{S}$ 的法向一致, 由高斯定理

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

得

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad (r > R)$$

可见, 均匀带电球壳外的电场与将所有电荷集中在球心处的点电荷产生的电场相同。

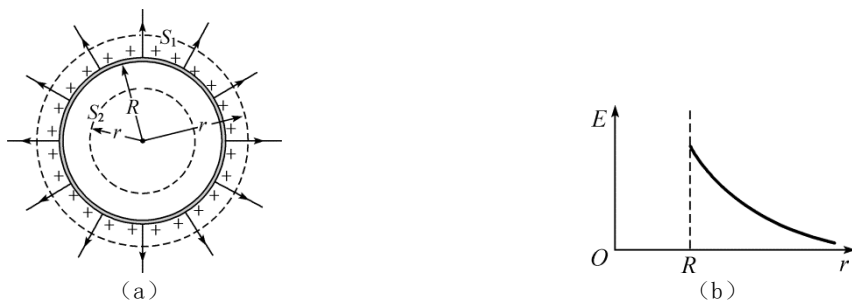


图 5.4.7 均匀带电薄球壳的电场

(2) 球壳内电场分布也应是球对称的, 在球壳内取半径为 r 的同心球面 S_2 为高斯面, 则由高斯定理得

$$\oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = 0$$

得

$$E = 0 \quad (r < R)$$

即均匀带电球壳内电场强度处处为零。如图 5.4.7 (b) 所示为均匀带电球壳产生的电场强度随 r 的变化关系。

例 5.4.2 (均匀带电的球体) 如图 5.4.8 (a) 所示, 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内。求:

- (1) 球外的电场强度 ($r > R$);
- (2) 球内的电场强度 ($r < R$)。



图 5.4.8 均匀带电球体的电场

解: 电荷分布呈现球对称, 电场强度分布也具有球对称性。 \mathbf{E} 仅取决于 r , 且沿径向向外 (若 $Q < 0$, 则 \mathbf{E} 沿径向向内)。

(1) 在球外, 选择半径为 r 的与带电球体同心的高斯面 S_1 , 如图 5.4.8 (a) 所示。由高斯定理

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

于是

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

可见, 均匀带电球体外的电场强度与位于球心处具有相同电量的点电荷产生的电场相同。

(2) 在球内, 选择半径为 r 的同心球面 S_2 为高斯面, 如图 5.4.8 (a) 所示, 由高斯定理

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

S_2 所包围的电荷为总电荷 Q 的一部分。设电荷体密度为 ρ_E , 因电荷均匀分布, 故 ρ_E 为常数, 则 S_2 内包围的电荷量为

$$q = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_E}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_E} Q = \frac{r^3}{R^3} Q$$

于是有

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r \quad (r < R)$$

图 5.4.8 (b) 为均匀带电球体产生的电场强度随 r 的变化关系, 电场强度在球体内随 r 的增大线性增加, 直到在球体表面 $r = R$ 处达到最大值, 然后在球体外以 $1/r^2$ 关系减小。

如果利用电场强度的叠加原理求解上例会比较困难, 而利用高斯定理求电场强度分布的前提是电荷分布必须具有高度对称性, 则其产生的电场强度分布也具有相应的对称性。此时, 选择的高斯面上 \mathbf{E} = 常量或部分为 0, 可简化电场强度通量的积分, 从而求出电场强度的分布。下面两个例子的结论, 之前根据电场强度的叠加原理计算得到过, 现在利用高斯定理重新计算。可发现, 利用高斯定理的方法要更加简洁方便。

例 5.4.3 (均匀带电的“无限长”直线) 如图 5.4.9 (a) 所示, 长直细棒均匀带正电, 电荷线密度为 λ 。计算长直细棒附近 P 点的电场强度 (该点远离细棒端点), P 点到长直细棒的垂直距离为 r 。



图 5.4.9 均匀带电长直线的电场

解: 长直细棒上的电荷分布具有轴对称性, 则电场强度分布也应具有轴对称性, 电场强度沿径向向外, 且仅与点到细棒的垂直距离有关。电场强度分布的对称性和方向分析如下: 如图 5.4.9 (b) 所示, 取棒上任一点为原点 O , 对空间中任一点 P , 将整个细棒分割为上下成对的线元, 每对线元 dz 和 dz' 相对于 OP 对称, 它们在 P 点激发的元电场强度 $d\mathbf{E}$ 和 $d\mathbf{E}'$ 也相对于 OP 对称, 垂直于 OP 方向的分量互相抵消, 只剩下沿 OP 方向的分量。细棒无限长, 这样的线元总是可以成对选择, 所以 P 点总的电场强度沿 OP 方向。另外, 到细棒距离相等的各点空间位置等价, 故电场强度分布呈现轴对称。

由于电场分布的轴对称性, 选择与长直细棒同轴、底面半径为 r 、高为 l ($l \ll$ 直线长度) 的闭合圆柱面 S 为高斯面。因为 \mathbf{E} 与两底面平行, 所以底面上的电场强度通量为零; 而 \mathbf{E} 与圆柱侧面处处垂直。由高斯定理得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{侧面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{上、下底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

于是

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

应当指出, 如果长直线为有限长, 可利用电场强度叠加原理计算其附近的电场强度, 而此时由于对称性的缺失, 试图利用高斯定理求其附近某点场强就不可能了。

例 5.4.4 (“无限大” 均匀带电平面) 如图 5.4.10 所示, 电荷均匀分布在“无限大”平面薄板上, 电荷面密度为 σ 。求平面附近的电场强度。

解: 电荷的分布具有面对称性, 则电场强度分布具有相同的对称性。可判断电场强度在两侧垂直于带电平面, 且指向外侧 (若 $\sigma < 0$, 则由外指向内侧), 距离平面等距离的点电场强度大小相等。如图 5.4.10 所示, 选择垂直穿过带电平面的小闭合圆柱面为高斯面, 上下底面面积为 S , 且位置相对于带电薄板对称。电场强度 \mathbf{E} 与圆柱侧面平行, 故侧面无电场强度通量, 总的电场强度通量由两个底面贡献, 由高斯定理得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

式中, σS 为高斯面内所包围的电荷。于是, 底面处的电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

上式表明, 无限大均匀带电平面附近的电场强度与场点的位置无关, 为匀强电场。虽然实际中并没有无限长的带电细棒、无限大的带电平面薄板, 但是对于有限长的细棒或有限大的带电平面, 只要待求电场强度的点不太靠近细棒端点或平面边缘, 结果依然成立。

利用高斯定理求电场强度的关键在于对称性的分析, 其一般步骤可总结为:

(1) 首先分析电荷分布的对称性, 一般有球对称、轴对称 (也称柱对称) 和面对称 (即平面左右对称)。对称性分析决定了如何选择高斯面, 高斯面上所有或部分区域的电场强度 \mathbf{E} 是常数或零。

(2) 选择合适的高斯面, 球对称选择球面为高斯面, 轴对称选择圆柱面为高斯面, 面对称选择小的钱币形薄圆柱面为高斯面。要确保高斯面经过待求电场强度的空间点。

(3) 根据电荷分布的对称性确定高斯面上电场强度 \mathbf{E} 的方向。

(4) 计算通量 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 的值。

(5) 计算高斯面所包围的电荷量的代数和。

(6) 将电场强度通量与面内电荷代数和联立等式, 求电场强度 E 。

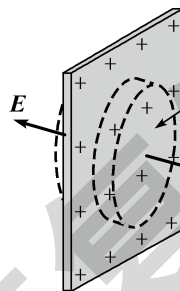


图 5.4.10 “无限大” 均匀带电薄板的电场

5.5 静电场的环路定理 电势

静电场的环路定理以及电势的概念是从能量的角度研究静电场的性质。

5.5.1 静电场的环路定理

电荷在电场中受到电场力的作用,那么电荷在电场中移动,电场力就要对电荷做功。接下来我们研究电场力做功的特点,将会得到反映静电场另一个基本特性的定理——**静电场的环路定理**。

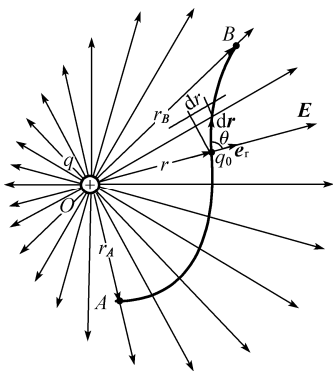


图 5.5.1 点电荷的电场力做功与路径无关

1. 单个点电荷产生的电场

如图 5.5.1 所示,静止的点电荷 q 位于 O 点,在 q 产生的电场中,将试验电荷 q_0 从 A 点沿任意路径 l 移动到 B 点, A 点的径矢为 r_A , B 点的径矢为 r_B 。在路径上任取一位移元 dr , 径矢为 r , 则在这段位移元上电场力对 q_0 所做的元功可表示为

$$dW = F \cdot dr = q_0 E \cdot dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} e_r \cdot dr$$

由图 5.5.1 可知, $e_r \cdot dr = |e_r||dr|\cos\theta = dr$, 式中, θ 为径矢单位矢量 e_r 与 dr 的夹角。代入上式并从 A 点到 B 点进行积分

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (5.5.1)$$

上式表明,在单个点电荷产生的静电场中,电场力对试验电荷的做功与具体的路径无关,仅取决于试验电荷起点和终点的位置。

2. 任意带电体系产生的电场

任意带点体系总是可以分解为若干个电荷元,每个电荷元均可看作点电荷,则该带电体系产生的电场强度 E 就可看作各点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 单独产生的电场强度的矢量和,即

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

当试验电荷在该电场中从 A 点移动到 B 点时,电场力做功为

$$W_{AB} = \int_A^B q_0 E \cdot dl = \int_A^B q_0 E_1 \cdot dl + \int_A^B q_0 E_2 \cdot dl + \dots + \int_A^B q_0 E_n \cdot dl$$

上式右端每一项积分都与具体路径无关,所以总电场力所做的功也一定与路径无关。

由此,可得出结论:试验电荷在任意形状带电体产生的静电场中移动时,静电力所做的功只与试验电荷带电量及其起点、终点位置有关,与具体路径无关,**静电力是保守力**。

3. 静电场环路定理

如图 5.5.2 所示,试验电荷在静电场中从某点出发,沿任意闭合路径又回到出发点,则静电力做功为

$$q_0 \oint E \cdot dl = q_0 \int_{ACB} E \cdot dl + q_0 \int_{BDA} E \cdot dl = q_0 \int_{ACB} E \cdot dl - q_0 \int_{ADB} E \cdot dl$$

根据上述研究可知,电场力做功与路径无关,即

$$q_0 \int_{ACB} E \cdot dl = q_0 \int_{ADB} E \cdot dl$$

于是

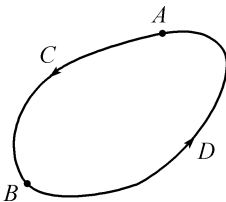


图 5.5.2 静电场的环路定理

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (5.5.2)$$

上式表示，静电场中电场强度沿任意闭合路径的线积分为零，称为静电场的环路定理。静电场的环路定理表明静电场是保守力场，也是无旋场。

5.5.2 电势差和电势

1. 电势能

静电场力是保守力，那么根据保守力做功的特点可定义电荷在电场中的电势能。按照势能的一般定义，保守力做功，对应着势能增量的负值，则静电场中电荷 q_0 从位置 A 到位置 B 电场力对该电荷所做功为电荷电势能增量的负值，即

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -(E_{pB} - E_{pA}) = E_{pA} - E_{pB} \quad (5.5.3)$$

式中， E_{pA} 和 E_{pB} 表示电荷 q_0 在位置 A 和 B 的电势能。上式表明，电场力做正功，电荷的电势能减小；电场力做负功，电荷的电势能增加，这与能量守恒定律是一致的。例如，如图 5.5.3 所示，平行极板带有等量异号电荷，其间隔距离远小于极板高度和宽度，极板间电场可视为匀强电场。正点电荷 q 由正极板附近 a 点释放，在电场力作用下加速向负极板运动。在这一过程中，电场力做正功，电荷 q 的电势能减小，而动能增加，减小的电势能转化为动能，电荷总的能量守恒。

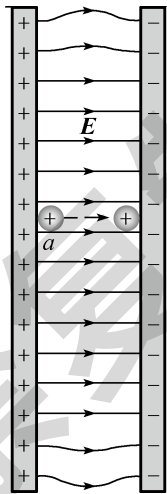


图 5.5.3 电场力做功，电势能转化为动能

与重力势能一样，电势能的值也是相对的。为了确定电荷在电场中某一位置电势能，必须选择一个电势能为 0 的参考点位置。在式 (5.5.3) 中令 B 点电势能为零，则电荷 q_0 在 A 点的电势能为

$$E_{pA} = q_0 \int_A^{E_p=0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.5.4)$$

式 (5.5.4) 给出了计算电场中电荷在任意位置电势能的一般公式，即电荷 q_0 在 A 点的电势能等于将电荷 q_0 从 A 点移动到电势能零点位置电场力所做的功。

2. 电势差与电势

与重力势能类似，电势能也是属于系统的。电势能属于电荷 q_0 和电场构成的整个系统，且大小与试验电荷的电量 q_0 成正比，因此电势能并不能直接反映电场在某一点的性质。但是比值 E_{pA}/q_0 与试验电荷无关，反映了电场本身在 A 点的性质，所以这一比值可作为表征静电场在该点性质的物理量，称为**电势**，用符号 V 表示。式 (5.5.3) 两端同时除以 q_0 得

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B = V_{AB} \quad (5.5.5)$$

式中， V_A 和 V_B 表示电场在 A 点和 B 点的电势。 V_{AB} 称为 A, B 两点间的**电势差**，在电工学中也称为电压，常用符号 U 表示。如表 5.5.1 所示为一些常见的典型电压值。

表 5.5.1 一些典型的电压值

电 源	电压近似值 / V
闪电	10^8
高压电线	10^6

(续表)

电 源	电压近似值 / V
电视机显像管电势差	10^4
汽车点火	10^4
家用电源	220
汽车电池	12
手电筒电池	1.5
神经细胞膜两侧静息电位	10^{-1}
心电图和脑电图测得的皮肤电势变化	10^{-4}

与电势能一样, 电势大小也是相对的。计算某点电势, 必须明确电势零点的位置。令式 (5.5.5) 中 V_B 为 0, 则

$$V_A = \int_A^{V=0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.5.6)$$

式 (5.5.6) 给出了计算某点电势的一般公式, 即求电场强度沿从待求电势点到零点电势位置任意路径的线积分。和电势能一样, 电势零点位置可以任意选择。在理论计算中, 计算有限大带电体激发的电场中各点的电势, 通常选择无穷远处一点为电势零点。但必须注意, 对“无限大”带电体, 如“无限长”带电圆柱、“无限大”带电平板等, 不能选无穷远为电势零点, 必须视具体情况另选一点为电势零点。另外, 在实际问题中, 常选择地面或与地面相连的导体为电势零点。

电势值是相对的, 而电势差则是绝对的, 与电势零点的选择无关。若已知 A, B 两点间的电势差 V_{AB} , 将电荷从 A 点移动到 B 点, 由式 (5.5.3) 可得电场力做功用电势差表示

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 V_{AB} \quad (5.5.7)$$

在 SI 单位制中, 电势和电势差 (电压) 的单位为: 焦耳/库仑 (J/C), 称为伏特 (V), $1\text{V}=1\text{J/C}$ 。

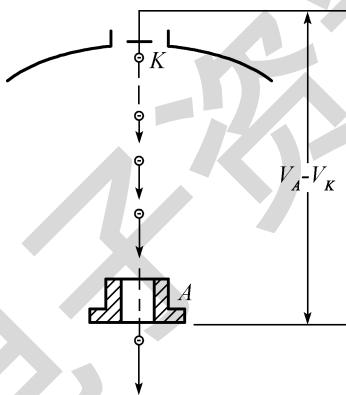


图 5.5.4 电子束焊接机

带电体系产生的电场, 既可用电场强度描述, 也可用电势来表述。一般地, 电势的描述方法更加方便, 因为电势是标量, 而电场强度是矢量。

例 5.5.1 图 5.5.4 为电子束焊接机中的电子枪示意图。K 为阴极, A 为阳极, 其上有一小孔。阴极发射的电子在阴极和阳极电场的加速作用下聚集成一细电子束, 以极高的速率穿过阳极上的小孔, 射到被焊接的金属上, 使两块金属熔化而焊接在一起。设 $V_A - V_K = 3\,000\text{V}$, 且电子从阴极发射时速率为 0。求:

- (1) 电子到达被焊接的金属时具有的动能;
- (2) 电子射到金属上时的速率。

解: (1) 电场力对电子做功使其具有动能, 则电子获得的动能为

$$E_k = W_{KA} = (-e)V_{KA} = -1.6 \times 10^{-19} \times (-3000) = 4.8 \times 10^{-16} (\text{J}) = 3000 (\text{eV})$$

(2) 电子射到金属上时的速率为

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 4.8 \times 10^{-16}}{9.1 \times 10^{-31}}} = 3.25 \times 10^7 (\text{m/s})$$

5.5.3 电势的计算

1. 电场强度积分法求电势

已知带电体系激发的电场强度在空间的分布, 则可根据式 (5.5.5) 或式 (5.5.6) 计算电场内任意两点间的电势差或任意一点的电势。式 (5.5.6) 是计算电势的一般公式, 同时也给出了电场强度和电势之间的一般关系。

例 5.5.2 (均匀带电球壳的电势) 一薄球壳均匀带电 Q , 半径为 R , r 表示场点到球心的距离。求带电球壳产生的电场中电势的分布。

解: 空间分为球壳外 $r > R$ 和球壳内 $r < R$ 两个区域, 在例 5.4.1 中, 已经求得均匀带电球壳产生的电场强度分布为

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$

场强方向沿径向向外 (若 $Q < 0$, 则沿径向向内)。带电球壳有限大, 取无穷处电势为 0。

(1) 若 P 点在球壳外, 到球心距离为 r , 由式 (5.5.6), 将电场强度 E 沿径向直线积分, 可得 P 点 (见图 5.5.5) 电势为

$$V_P = \int_P^\infty E \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$

(2) 当 r 趋向于 R 时, 球壳表面处电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (r = R)$$

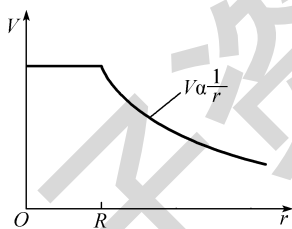


图 5.5.6 均匀带电球壳的电势分布

(3) 若 P 点在球壳内部, 因场强分布函数不连续, 所以积分分为两段

$$V_P = \int_P^\infty E \cdot d\mathbf{l} = \int_P^R E \cdot d\mathbf{l} + \int_R^\infty E \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (r < R)$$

可见, 球壳内电场强度为零, 导致球壳内任意两点之间电势差为零; 整个球壳内各点电势相同, 都等于球壳表面的电势。

图 5.5.6 为均匀带电球壳的电势 V 随 r 的变化关系。

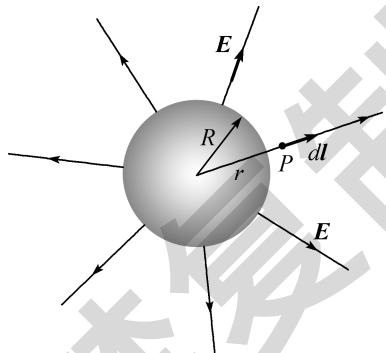


图 5.5.5 均匀带电球壳的电势

2. 电势叠加原理求电势

1) 点电荷的电势

根据式 (5.5.6) 可求出单个点电荷 q 产生的电场中各点的电势。单个点电荷产生的电场强度为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

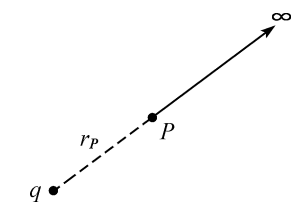


图 5.5.7 点电荷产生的电势

以无穷远处为电势零点, 如图 5.5.7 所示, 电场强度沿径矢直线积分, 可得 P 点电势为

$$V_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_p}^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_p}$$

式中, r_p 为 P 点到点电荷 q 的距离。由于 P 点是任意选择的, 于是得到单个点电荷产生的电场中电势的分布

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{点电荷, } r = \infty \text{ 处 } V = 0) \quad (5.5.8)$$

可见, 正点电荷产生的电场在整个空间电势为正, 随着 r 的增加逐渐降低为零, 如图 5.5.8 (a) 所示; 负电荷产生的电场在整个空间电势为负, 随着 r 的增加逐渐增加为零, 如图 5.5.8 (b) 所示。

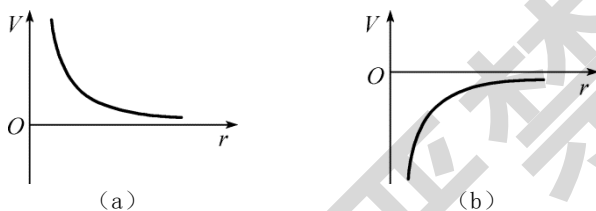


图 5.5.8 点电荷的电势分布

(a) $q > 0$ (b) $q < 0$

2) 点电荷系的电势

若电场是由 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 激发, 则电场中某点 P 的电势可由电场强度叠加原理求得

$$V_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^\infty \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \int_P^\infty \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$$

由式 (5.5.8) 可得, $\int_P^\infty \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = V_{Pi} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$, 式中 r_i 为场点 P 到第 i 个点电荷的距离,

代入上式可得

$$V_P = \sum_{i=1}^n V_{Pi} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (5.5.9)$$

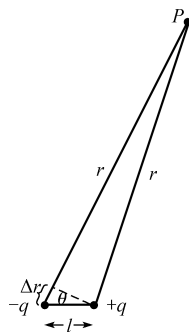
上式表明: 点电荷系激发的电场中, 某点的电势等于各个点电荷单独存在时在该点所激发的电势的代数和, 这就是**电势叠加原理**。

例 5.5.3 如图 5.5.9 所示, 计算电偶极子附近电场中点 P 的电势。

解: 以无穷远处电势为 0, 由电势叠加原理, P 点电势为

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{r + \Delta r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta r}{r(r + \Delta r)}$$

式中, r 表示 P 点到正电荷的距离; $r + \Delta r$ 为 P 点到负电荷的距离。若 P 点到电偶极子的距离远大于两电荷间距, 即 $r \gg l$, 由图中

图 5.5.9 电偶极子的电场中 P 点的电势

可见, 此时有 $\Delta r \approx l \cos \theta$ 。考虑到 $r \gg \Delta r$, 上式可化简为

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (\text{电偶极子, } r \gg l)$$

式中 p 为电偶极矩。可见, 当 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 时, P 点离正电荷较近, 电势 V 为正; 当 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时, P 点离负电荷较近, 电势 V 为负。单个点电荷的电势随场点到电荷距离的一次方减小, 而电偶极子的电势随场点到电偶极子距离的平方减小, 电势衰减得更快。这是因为当场点离电偶极子较远时, 两个等量异号的电荷就显得相对更近, 趋于发生中和效应。

3) 连续分布的电荷电场中的电势

若电场由连续带电体激发, 可将连续分布电荷分割为无限多个电荷元, 电荷元可视为点电荷, 且电荷元数目无穷多, 故式 (5.5.9) 的求和变为积分, 可求得电场中 P 点的电势为

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (5.5.10)$$

式中, dq 为带电体上任意电荷元的带电量; r 为 dq 到待求电势点的距离; 积分遍及整个带电体。许多情况下, 往往不知道 \mathbf{E} 作为位置的函数, 式 (5.5.6) 的积分很难计算, 这时就可根据式 (5.5.10) 求电势分布。由于电势是标量, 电场强度是矢量, 所以电势的标量积分往往比电场强度的矢量积分简便得多。

例 5.5.4 (均匀带电圆环的电势) 如图 5.5.10 所示, 细圆环半径为 R , 均匀带电 Q 。求圆环轴线上距离中心点 x 处点 P 的电势值。

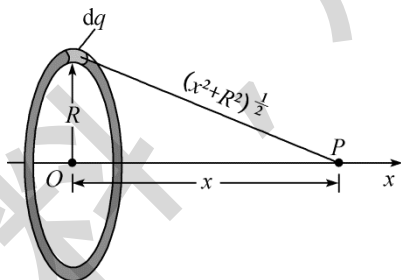


图 5.5.10 均匀带电圆环轴线上 P 点的电势

解: 圆环有限大, 取“无穷远”为电势零点, 圆环上各点到 P 点距离相等, 由电势叠加原理可得 P 点电势为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$$

若 P 点到环的圆心距离很远, $x \gg R$, 上述结果就转化为 $Q / (4\pi\epsilon_0 x)$, 这正是点电荷的电势。

例 5.5.5 (均匀带电薄圆盘的电势) 如图 5.5.11 所示, 一薄平面圆盘半径为 R , 均匀带电量为 Q 。求其轴线上距离圆盘中心 x 处 P 点的电势。

解: 上例中, 我们求出了均匀带电细圆环在轴线上的电势, 为此可将圆盘分割为许多半径为 r , 宽度为 dr 的圆环, 每个圆环的面积为 $dS = (2\pi r)dr$, 带电量正比于其面积, 则

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

式中 $\sigma = Q / \pi R^2$ 为电荷面密度。由电势叠加原理, P 点的电势可视为各同心圆环产生的

电势之和, 利用上题结果得

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^q \frac{dq}{(x^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{rdr}{(x^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} (x^2 + r^2)^{1/2} \Big|_0^R \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[(x^2 + R^2)^{1/2} - x \right] \end{aligned}$$

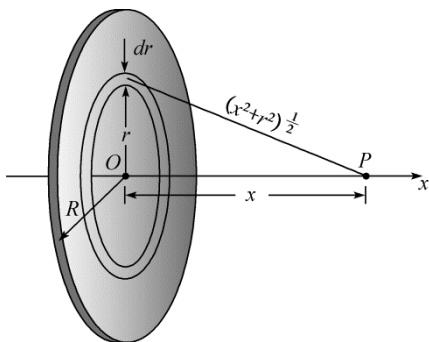


图 5.5.11 均匀带电薄圆盘轴线上 P 点的电势

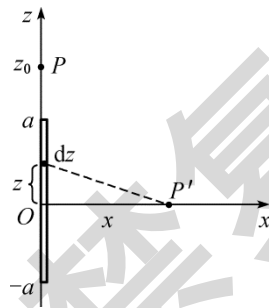


图 5.5.12 例 5.5.6 图

例 5.5.6 一细直棒长为 $2a$, 均匀带电, 线密度为 λ , 求:

- (1) 细棒延长线上各点的电势;
- (2) 细棒中垂线上各点的电势。

解: (1) 如图 5.5.12 所示, 建立坐标系, 细棒位于 z 轴, 中点位于原点 O , 设细杆延长线上 P 点坐标为 z_0 , 在细棒上取线微元 dz , 由电势叠加原理, 可得 P 点的电势为

$$V_P = \int_{-a}^a \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 (z_0 - z)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z_0 + a}{z_0 - a}$$

将上式中 z_0 改为 z , 可得细棒延长线各点电势为

$$V_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + a}{z - a} \quad (z > a)$$

- (2) 设细棒中垂线位于 x 轴, P' 点坐标为 x , 由电势叠加原理, 可得 P' 点电势为

$$V_{P'} = \int_{-a}^a \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a}$$

一般来说, 如果电荷分布具有对称性, 可利用高斯定理求出电场强度分布, 然后利用电势的定义对电场强度进行线积分求电势; 如果电荷分布不具备对称性, 则考虑根据电势叠加原理求电势。

*5.6 电场强度和电势梯度

电场中各点的物理性质, 既可用电场强度描述, 也可用电势描述。前者从电场对电荷作功的角度描述电场中各点的力学性质; 后者从电场对电荷做功的角度描述电场中各点的能量特征。两者是对电场这一同一对象不同角度的描述, 彼此之间必然存在密切的联系。本节

将讨论电场强度和电势之间的关系，从而加深对电场性质的理解。

5.6.1 等势面

一般来说，电场中各点的电势是逐点变化的，但总有一些点的电势值是相等的，将这些电势值相等的点连起来构成的曲线或曲面就称为**等势线**或**等势面**。如果整个物体电势均相等，则为**等势体**。

根据等势面的规定，可推断出等势面具有以下性质：

1) 静电场中等势面与电场线处处正交

等势面上的各点具有相同的电势，即等势面上任意两点间的电势差为零，故电荷沿等势面移动电场力不做功。取一试验电荷 q_0 ，沿等势面取一任意元位移 $d\mathbf{l}$ ，则电场力做功 $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 E dl \cos\theta = 0$ ，其中 θ 为 \mathbf{E} 和 $d\mathbf{l}$ 的夹角。因为 q_0 ， E 和 $d\mathbf{l}$ 都不为 0，所以必定有 $\cos\theta = 0$ ，即 $\theta = \pi/2$ 。等势面上的元位移 $d\mathbf{l}$ 是任意选择的，这就说明电场强度 \mathbf{E} 与等势面必须处处正交。

当空间的场源确定后，电场分布就确定了。等势面（对二维情况就是等势线）就客观存在，而电场线是人为引进的，并不客观存在。但是利用电场线与等势面互相垂直的性质，我们可通过作等势面（等势线）的方法，作出电场线。图 5.6.1 为电势差为 20V 的平行极板间的等势线（虚线）和电场线（实线）。以负极板处电势为 0，并标出每一等势线的电势值，从图中可见，电场 \mathbf{E} 指向较低的电势值 V ，即沿着电场线的方向电势下降。图 5.6.2 为两个等量异号电荷的等势线（虚线）和电场线（实线）。

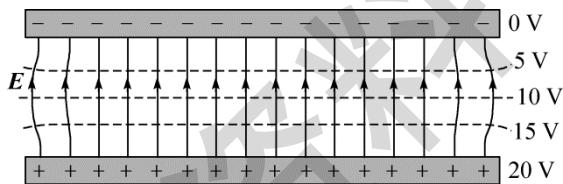


图 5.6.1 带电平行极板间的电场线和等势面

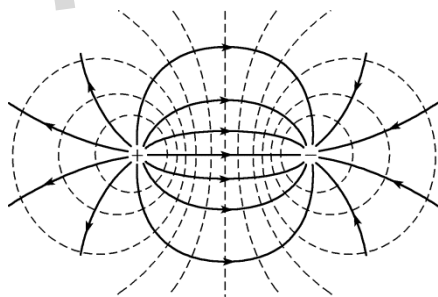


图 5.6.2 等量异号电荷的等势线

2) 等势面密集的地方电场强度大，等势面稀疏的地方电场强度小

描绘等势面时规定：任意两个相邻等势面之间的电势差都相等。按照这一规定，等势面的疏密程度也能够表示各处电场强度的大小，等势面密集的地方电场强度大，等势面稀疏的地方电场强度小，如图 5.6.1 和图 5.6.2 所示。

5.6.2 电场强度和电势梯度的关系

若某区域电场强度分布已知，根据式 (5.6.5) $V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 可求得任意两点间的电势差。对式 (5.6.5) 做反演，可用电势来表示电场强度。所以，已知电势 V 的分布，可求得电场强度 \mathbf{E} 的分布。

将式 (5.6.5) 写成微分形式

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_l dl$$

式中, dV 为两点间元位移 $d\mathbf{l}$ 对应的电势差; E_l 为电场强度在元位移 $d\mathbf{l}$ 方向上的分量; 负号是因为等式左边 $V_{AB} = V_A - V_B$, 而等式右边是从 A 到 B 的积分。于是得到

$$E_l = -\frac{dV}{dl} \quad (5.6.1)$$

即: 任意方向上的电场强度分量等于这一方向上电势变化率的负值。 dV/dl 表示电势沿 $d\mathbf{l}$ 方向上的空间变化率。在物理上, “梯度” 就是指物理量的空间变化率, 且梯度是物理量变化最快的方向。电势变化最快的方向就是该点电场强度 \mathbf{E} 的方向, 则

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{d\mathbf{l}} \quad (d\mathbf{l} \parallel \mathbf{E}) \quad (5.6.2a)$$

将上式写成矢量式

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dl} \mathbf{e}_n = -\nabla V \quad (5.6.2b)$$

式中, \mathbf{e}_n 表示等势面上某点法线方向的单位矢量, 指向电势升高的方向, 故 \mathbf{e}_n 与该点电场强度的方向相反。矢量式 (5.6.2b) 说明, 静电场中各点的场强等于该点电势梯度的负值, 式中负号的含义是: 场强指向电势降落的方向。若 \mathbf{E} 为空间坐标 (x, y, z) 的函数, l 指 x, y 和 z 轴, 则式 (5.6.2) 就变为

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (5.6.3a)$$

式 (5.6.3a) 也可写成矢量式

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}\right)V \quad (5.6.3b)$$

例 5.6.1 (圆环和圆盘轴线上的电场强度) (1) 求均匀带电圆环 (见图 5.5.10) 轴线上某点 P 的电场强度;

(2) 求均匀带电圆盘 (见图 5.5.11) 轴线上某点 P 的电场强度。

解: (1) 由例 5.5.4 已知

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$$

由式 (5.6.3a) 可得

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}, \quad E_y = E_z = 0$$

结果与例 5.2.2 一致。

(2) 由例 5.5.5 已知

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[(x^2 + R^2)^{1/2} - x \right]$$

由式 (5.6.3a) 可得

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right], \quad E_y = E_z = 0$$

对于离圆盘很近的点, $x \ll R$, 上式可近似为

$$E_x \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

式中, $\sigma = Q/\pi R^2$ 为电荷的面密度。结果与例 5.2.4 一致。

比较上面的计算和 5.2 节中电场强度的计算, 可发现对于电荷系或连续带电体, 常可先求 V 的分布, 再根据式 (5.6.2) 和 (5.6.3) 求 E , 往往比利用电场强度叠加原理计算 E 要简便一些。这是因为电势 V 是标量, 求得电势分布后, 只需进行微分运算就可求得场强分布, 这样就避免了复杂的矢量积分运算。这体现了利用电势梯度与场强关系求场强的优越性, 但在很多情况下, 求出 $V = V(x, y, z)$ 并不容易, 所以其实际应用也有一定的局限性。

思考题 5

5.1 一个金属球带上正电后, 该球的质量是增大、减小还是不变?

5.2 根据库仑定律, $r \rightarrow 0$ 时, $F \rightarrow \infty$ 。

(1) 为什么能轻易将带有同号电荷、直径为 1cm 的小球推靠到一起?

(2) 若将两个带同号电荷的点电荷无限靠近, 是否需要无穷大的力?

5.3 若点电荷 q 只受电场力的作用而运动, 那么电场线是否就是点电荷 q 在电场中运动的轨迹呢?

5.4 如题图所示, 带负电的电子位于图中的位置 A 。若电子可自由运动, 则其电势能将减小还是增加? 其电势又如何变化?

5.5 设电荷均匀分布在一球面上, 若把另一点电荷放在球心上, 这个电荷能处于平衡状态吗? 如果把它放在偏离球心的位置上, 又将如何呢? 为什么?

5.6 3 个相等的点电荷分别位于等边三角形的 3 个顶点上, 问是否可以以三角形中心为球心作球面高斯面, 利用高斯定理求它们产生的电场强度分布? 对此球面高斯定理是否成立?

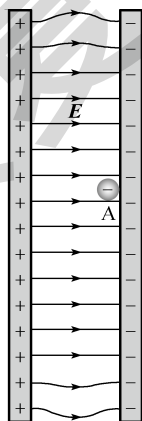
5.7 在真空中, 有两个相对的平行板, 板的面积为 S , 分别带有等量异号电荷 $+q$ 和 $-q$, 板的间距 d 远小于极板的线度。计算两个极板之间的作用力, 提出 3 种方法: ①按照库仑定律, $F = q^2 / (4\pi\epsilon_0 d^2)$; ②极板间的场强为 $E = \sigma / \epsilon_0 = q / (\epsilon_0 S)$, 则 $F = qE = q^2 / (\epsilon_0 S)$; ③一个极板处于另一个极板产生的电场 $E = \sigma / 2\epsilon_0 = q / (2\epsilon_0 S)$ 中, 故 $F = qE = q^2 / (2\epsilon_0 S)$ 。哪种方法是正确的? 为什么?

5.8 试用环路定理证明, 静电场的电场线是永不闭合的。

5.9 已知高斯面上场强 E 处处不为 0, 能否断定穿过此高斯面的电场强度通量 Φ_E 不为 0? 能否断定高斯面内一定有电荷?

5.10 已知电场中某点的电势, 能否计算该点的场强? 已知电场中某点附近的电势分布, 能否计算该点的场强?

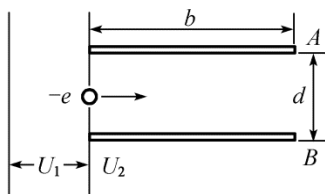
5.11 电势为 0 处, 场强是否一定为 0? 电势不变的空间, 场强是否为 0?



思考题 5.4 图

练习题 5

5.1 如题图所示, 一静止的电子在 $U_1 = 50\,000\text{V}$ 的电压作用下获得速度后, 水平飞入两平行平板的中央。平板是水平放置的, 板长为 $b = 5\text{cm}$, 两板间距离 $d = 1\text{cm}$ 。求至少要在两板间加多大电压 U_2 , 才能使电子不再飞出两板间的空间。



练习题 5.1 图

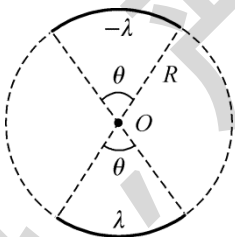
5.2 两个带等量异号电荷的均匀带电同心球面, 半径分别为 $R_1 = 0.03\text{m}$ 和 $R_2 = 0.10\text{m}$ 。已知两者的电势差为 450V , 求内球面上所带的电荷。

5.3 根据氢原子的玻尔模型, 氢原子处于基态时, 电子位于以原子核为中心的半径为 $0.529 \times 10^{-10}\text{m}$ 的圆周轨道上。取 $U_\infty = 0$, 求:

- (1) 原子核产生的电场在电子轨道上任一点的电势;
- (2) 电子的电势能。

5.4 外力将电荷 $q = 3.00\mu\text{C}$ 从无穷远处 ($r = \infty$) 移至距离电荷 $Q = 20.0\mu\text{C}$ 为 0.50m 处, 问外力至少需要做多少功?

5.5 两段形状相同的圆弧如题图所示对称放置, 圆弧半径为 R , 圆心角为 θ , 均匀带电, 线密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$, 求圆心 O 点的场强和电势。



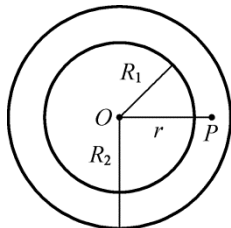
练习题 5.5 图

5.6 讨论: 有一带电球体, 已知电荷是球对称均匀分布的, 讨论在下面两种情况下, 球的表面上的电场强度 E 是否大于球内各点的 E ?

- (1) 电荷体密度是均匀的;
- (2) 电荷体密度与球的半径 r 成反比。

5.7 实验证实, 地球表面上方的电场不是 0 , 而是存在方向向下的电场, 且大小随高度改变。设在地球上方 100m 高处场强为 150N/C , 300m 高处场强为 100N/C 。用高斯定理求这两个高度之间的平均体电荷密度 (以多余或缺少的电子数密度表示)。

5.8 如题图所示, 一个均匀带电的球层, 其电荷体密度为 ρ , 球层内表面半径为 R_1 , 外表面半径为 R_2 , 设无穷远处为电势零点, 求球层中半径为 r 处 P 点的电势。



练习题 5.8 图

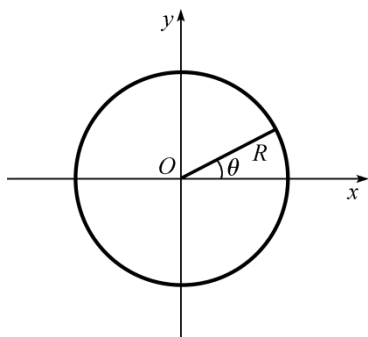
5.9 两根无限长的均匀带电直线互相平行，相距为 $2a$ ，线电荷密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$ ，求每单位长度的带电直线受到的电场力。

5.10 一无限长的均匀带电薄壁圆柱筒，半径为 R ，电荷面密度为 σ ，设垂直于圆柱筒方向从中心轴向外的径矢的大小为 r ，求其电场分布。

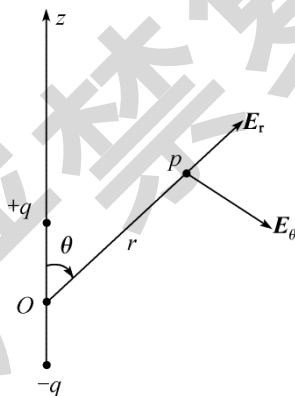
5.11 根据汤姆逊模型，氢原子由一团均匀的正电荷云和其中的两个电子构成。设正电荷云可视为半径为 0.05nm 的球，带电量为 $2e$ ，两个电子处于相对于球心对称的位置，求两电子的平衡间距。

5.12 一个带电细塑料圆环，半径为 R ，所带电荷线密度 λ 随角度 θ 变化， $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$ ，如题图所示。求该带电细圆环在圆心处产生的电场的电场强度。

***5.13** 利用例 5.5.3 的结果，如题图所示，求电偶极子的电场中任意一点 P 点的场强。



练习题 5.12 图



练习题 5.13 图

第 6 章 静电场中的导体和电介质 电能存储

上一章讨论了带电体系激发的静电场在真空中分布的性质，而实际情况下电场空间总是有其他物质存在的，这些物质的存在对电场的分布会带来一定的影响，或者说这些物质中的电场与真空状态下是不同的。按照导电能力，物质大致可分为导体和电介质，导体中存在自由移动的电荷，所以导电能力极强；而电介质中电荷处于紧束缚状态，只能在原子附近相对移动，因而电介质的导电能力极其微弱或不导电，故电介质也称绝缘体。正因为微观结构上的差异，导体和电介质对外加静电场的影响完全不同。静电的应用实际上是导体和电介质静电特性的应用，因此研究静电场中的导体和电介质的静电性质以及导体和电介质对电场分布的影响，具有重要的实际意义。

本章将首先讨论静电场中的导体处于静电平衡状态的性质和电荷分布，并在此基础上讨论导体对静电场的影响，计算静电场中有导体时场中的电场强度和电势分布。利用静电场对导体的作用，可制成各种各样的电容器。电容器在电路中有着广泛的应用，本章将介绍几种简单几何形状的导体构成的电容器的电容特性，以及电容器的串联、并联特性。接着讨论电场对电介质的作用。静电场使得电介质极化，极化电荷产生的附加电场使得介质中的电场有所减弱。引入电位移矢量 \mathbf{D} ，定量研究电介质的极化对外加电场的影响，导出有介质时的高斯定理，并论述电介质对电容器电容的影响。最后从电容器的电能储存出发，讨论静电场的能量特征。

6.1 导体的静电特性

6.1.1 导体的静电平衡条件

1. 静电感应与静电平衡

金属导体由带正电的晶格点阵和带负电的自由电子组成。当导体既不带电也不处于外加静电场时，导体中的正负电荷处处均匀分布，各部分都表现为电中性，此时自由电子只做无规则热运动，无宏观定向运动。

如图 6.1.1 所示，将一不带电的孤立导体放入静电场中，外加电场的作用使自由电荷在导体内做宏观定向运动，正负电荷重新分布，使导体两端出现等量异号电荷，这就是**静电感应**

现象, 导体受外电场影响而在表面产生的电荷称为**感应电荷**。静电感应最终要使导体达到稳定的状态, 导体内没有电荷做任何宏观定向的运动, 称导体处于**静电平衡**状态。

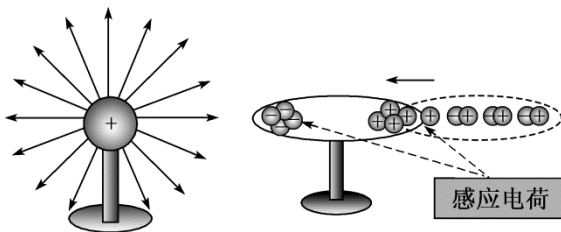


图 6.1.1 静电感应现象

另一种情况是导体原来处于电中性, 使它带电, 这些电荷在导体内激发电场, 反过来作用于导体内的自由电荷使其做宏观定向运动, 最终自由电荷重新分布的过程也会结束, 导体达到静电平衡状态。

当然导体达到静电平衡状态的过程所需时间实际上是极其短暂的 (约 10^{-6}s 数量级)。

2. 静电平衡性质

1) 导体处于静电平衡时, 导体内部电场强度处处为零

若导体内电场强度不是处处为 0, 则有电场的地方自由电荷就受到电场力, 将会发生移动, 说明导体尚未达到静电平衡。所以, 只要导体处于静电平衡, 其内部电场强度必定处处为 0。

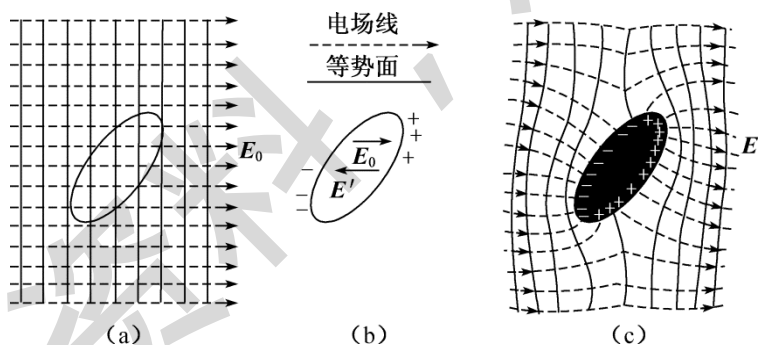


图 6.1.2 导体的静电平衡

那么导体内部的零电场是如何形成的呢? 如图 6.1.2 (a) 所示, 一不带电的导体放入外加电场 E_0 中, 在外加电场的作用下, 导体中自由电荷的定向移动导致两端出现等量异号电荷, 这些正负电荷激发一个附加的电场 E' , 在导体内部与 E_0 相反, 如图 6.1.2 (b) 所示。 E' 与 E_0 叠加, 将影响导体内外的电场分布。最终导体达到静电平衡, 由静电平衡条件, 导体内部的电场强度 $E = E' + E_0$ 处处为 0, 即正负电荷的集聚使得附加电场 E' 与 E_0 大小相等, 方向相反, 如图 6.1.2 (c) 所示。此时, 自由电荷不再移动, 导体两端的正负电荷不再增加。

2) 导体表面外附近的电场强度处处与表面垂直

若导体表面附近的电场强度与表面不垂直, 则电场就有平行于导体表面的分量 E_{\parallel} , 导体表面的自由电荷就受到该电场的作用沿着导体表面继续移动, 从而破坏了静电平衡。所以, 导体处于静电平衡, 表面附近电场强度必定处处垂直于导体表面。

上述导体的静电平衡条件以电场强度的特征描述, 据此可推导出等价的导体静电平衡时的电势特征。首先, **导体内部任意两点之间电势差为零**。静电平衡时, 导体内电场强度 E 处处为 0, 则导体内任意两点间的电势差 $U_{AB} = \int_A^B E \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。其次, **导体表面是一个等势面**。导体表面附近电场强度处处与表面垂直, 即 E 与沿表面的元位移 $d\mathbf{l}$ 的夹角处处为 $\pi/2$, 则表面上任意两点间的电势差 $U_{AB} = \int_A^B E \cdot d\mathbf{l}$ 也为零。这和等势线处处与电场线正交的结论也是一致的。总之, **导体处于静电平衡时, 导体就是一个等势体**。

无论什么形状的导体, 放入静电场达到静电平衡后, 都会成为等势体, 导体表面成为等势面。在静电场中引入导体后, 导体附近空间的电场线和等势面就要发生改变, 以满足新形成的等势面与导体的表面等势面相一致。图 6.1.2 (c) 中给出了静电平衡后导体附近的等势线和电场线重新分布的情况。根据这一特性, 在许多实际问题中, 可通过调整和控制导体电极的形状和电势实现所需的电场分布。

例 6.1.1 如图 6.1.3 所示, 半径为 R 的不带电的金属球, 在球外离球心 O 距离为 L 处放置一电量为 q 的点电荷。设无穷远处为电势零点, 则静电平衡后金属球的电势 U 为多少?

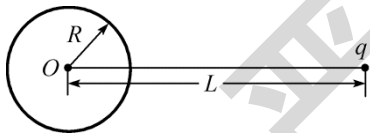


图 6.1.3 例 6.1.1 图

解: 静电平衡后, 金属球是一个等势体, 故金属球的电势也就是球心处的电势。在点电荷 q 激发的电场中, 由于静电感应, 金属球上出现等量异号的电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 。由电势叠加原理, 球心处电势为空间内所有电荷产生的电势之和, 则金属球的电势为

$$U = U_O = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L}$$

6.1.2 导体上的电荷分布

现在研究孤立导体带电达到静电平衡时其上电荷的分布规律。在这类问题中, 不必分析电场和导体相互作用最终实现静电平衡的复杂中间过程, 而是假设静电平衡已经达到, 利用静电平衡条件, 结合静电场的高斯定理, 推导电荷分布的情况。

1. 实心导体

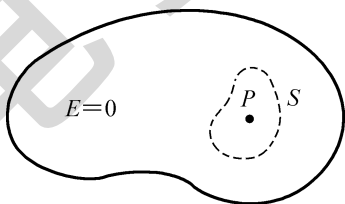


图 6.1.4 实心导体内无净电荷

实心导体处于静电平衡时, 导体内部没有净电荷, 电荷只能分布在导体的表面。如图 6.1.4 所示, 实心导体处于静电平衡, 在导体内任取一点 P , 在导体内取一闭合高斯面 S 将点 P 包围。由静电平衡条件, 导体内部电场强度处处为 0, 则高斯面上的 Φ_E 为 0, 由高斯定理可知, 高斯面内 q 必定为 0。包围 P 点的高斯面 S 可取得足够小, 则可以推论 P 点无净电荷。因为 P 点可任意选择, 所以导体内无净电荷, 电荷只能分布在导体表面。

2. 空腔导体

1) 空腔内无电荷

若导体内有空腔，且空腔内无其他带电体，那么空腔导体内表面上处处无净电荷，电荷全部分布在外表面；空腔内无电场。

如图 6.1.5 所示，空腔内无其他带电体，且处于静电平衡。首先围绕空腔导体内任意一点 P 取高斯面 S_1 ，与实心导体的证明过程类似，可知空腔导体内部无净电荷，电荷只可能分布在空腔导体的外表面或内表面。然后在空腔导体的内、外表面之间取高斯面 S_2 ， S_2 上各点均在导体内部，所以各点电场强度为 0， S_2 上的电场强度通量也必为 0，由高斯定理可知，内表面上电荷的代数和必为 0。那么内表面是否可能有地方带正电，有的地方带负电呢？如果是这样，空腔内就必定存在从内表面正电荷出发，终止于内表面负电荷的电场线。将电场强度沿着电场线积分，可得内表面上正负电荷所在位置的电势差 $V_{AB} \neq 0$ ，这与静电平衡时导体是等势体的性质相矛盾。可见，处于静电平衡的导体空腔内无电荷时，内表面上处处无净电荷，电荷只能分布在外表面，整个空腔导体（含空腔）为等势体。

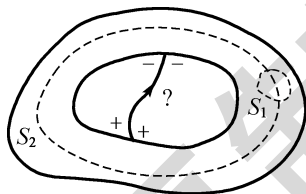


图 6.1.5 导体空腔内无电荷

2) 空腔内有电荷

若空腔导体内有其他带电体，带电量为 q ，则当它处于静电平衡时，空腔内表面上将出现感应电荷 $-q$ ，而外表面上出现电荷 q 。

如图 6.1.6 (a) 所示，空腔导体内有电荷 q ，处于静电平衡。在空腔内外表面之间取一高斯面 S ， S 面上各点均在导体内部，场强均为 0，则 S 面上的电场强度通量为 0，由高斯定理， S 面内电荷的代数和必为零。由于导体内部无净电荷，所以内表面上必定出现感应电荷 $-q$ 。孤立的空腔导体满足电荷守恒定律，故在外表面出现感应电荷 q 。若电荷 q 位于球形空腔导体的中心，如图 6.1.6 (b) 所示，则导体内部没有电场，而空腔内外的电场分布仍然是球对称的，与点电荷 q 单独存在时的电场分布一致，就好像球形空腔导体不存在一样。

当腔内电荷 q 与内表面接触时，它将与内表面上的电荷中和，其效果相当于将放入空腔的电荷转移到空腔导体的外表面上。范德格拉夫发电机的球形“帽子”就是利用这一过程获得很高的电势。

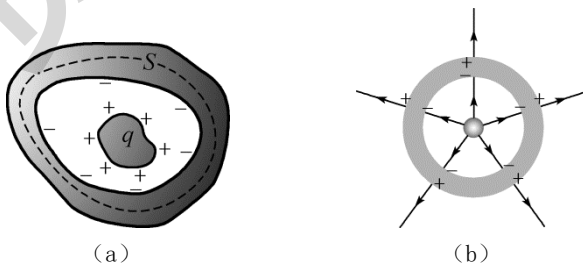


图 6.1.6 导体空腔内有电荷

例 6.1.2 如图 6.1.7 所示，金属球 B 位于金属导体 A 的空腔内，使 A, B 导体分别带电 $q_1 = 4\mu\text{C}$ 和 $q_2 = 2\mu\text{C}$ ，求 A 的外表面带电量为多少？

解：在 A 导体的内部取如图所示的高斯面 S ，高斯面上各点场强均为 0，则高斯面上电场强度通量为 0，表明高斯面内电荷代数和为 0，所以 A 的内表面由于静电感应出现电荷

$q' = -q_2 = -2\mu\text{C}$ 。根据电荷守恒定律, A 的外表面将增加电荷 $q'' = -q' = 2\mu\text{C}$, 而原先 A 所带电荷 q_1 均分布在外表面, 所以静电平衡后 A 的外表面带电量为 $q = q'' + q_1 = 6\mu\text{C}$ 。

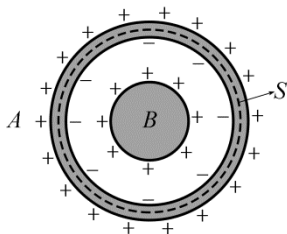


图 6.1.7 例 6.1.2 图

6.1.3 导体表面的电荷面密度与附近电场强度的关系

静电平衡时, 导体表面之外附近空间的电场强度 \mathbf{E} 与该处导体表面的电荷面密度 σ 有如下关系

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{导体表面附近}) \quad (6.1.1)$$

证明: 如图 6.1.8 所示, 选择闭合的扁圆柱面为高斯面, 其上底刚好位于表面上方的导体外部, 另一底面恰好位于表面下方的导体内部, 侧面与表面垂直。导体内部电场强度为零, 表面处电场强度与表面处处垂直向外, 所以仅圆柱高斯面的上底有电场强度通量。圆柱面上底面积 S 足够小, 电场强度 \mathbf{E} 可视为均匀, 由高斯定理

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

得

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

这一结论适用于任意形状的导体, 有着重要的应用。

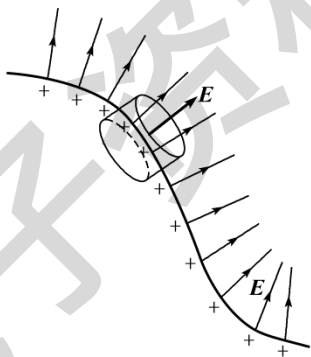


图 6.1.8 导体表面附近的电场强度

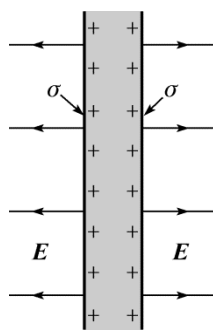


图 6.1.9 “无限大”薄带电平面的电场

关于式 (6.1.1), 有几点值得讨论:

(1) 为什么前面我们讨论的“无限大”带电平面附近的电场强度为 $E = \sigma / (2\epsilon_0)$, 而这里导体表面附近的电场强度为 $E = \sigma / \epsilon_0$ 呢? 这是由于对带电体表面电荷面密度 σ 定义方法的不同。对于导体, 电荷分布于导体表面, 所有的电场线都从表面向外离开; 而对于薄带电平面, 电场线是向两侧离开。无限大的带电平面, 电荷分布在两侧平面 (见图 6.1.9), 电场线从两

侧平面向外辐射。若 σ' 表示导体视为一个整体的电荷面密度，每一侧平面的电荷密度 $\sigma = \sigma' / 2$ ，那么由式 (6.1.1) 将给出 $E = (\sigma' / 2) / \varepsilon_0 = \sigma' / (2\varepsilon_0)$ ，结果与“无限大”带电平面一致。不过，一般用 σ 表示导体每一侧表面的电荷面密度，于是有 $E = \sigma / \varepsilon_0$ 。

(2) 这一结论不仅适用于孤立导体，也适用于处在外电场中的任意导体。式 (6.1.1) 表明导体表面附近 P 点的电场强度由该表面处电荷面密度决定，但必须强调，由电场强度叠加原理， P 点的电场强度是由导体表面上所有电荷以及周围其他带电体上的电荷产生的电场强度叠加后的效果，而不是仅由该表面处电荷产生。例如，实心球形导体均匀带电 q ，则在球表面附近 P 点的电场强度为 $E = q / (4\pi\varepsilon_0 R^2) = \sigma / \varepsilon_0$ ，显然 P 点电场强度是导体表面上所有电荷共同决定的。若在球形导体附近放置另一电荷 q' ，则 P 点的电场强度就由 q ， q' 以及 q' 在导体上的感应电荷共同决定，仍可用式 (6.1.1) 表示，不过此时该表面处电荷面密度已经变为 σ' ，其他电荷对 P 点电场强度的影响已经通过对 σ 的影响体现出来了。

(3) 影响导体表面电荷分布以及 σ 的因素十分复杂，可大致分为外部因素和内部因素，外部因素指周围其他带电体或物体，内部因素指导体自身的形状等。对于孤立的带电导体，电荷分布完全由自身的形状决定。不过，对于任意形状的导体，表面电荷面密度 σ 也并非曲率半径 ρ 的单一函数，定量研究很困难。一般地，对于形状不规则的孤立带电导体，电荷在其表面的分布是不均匀的，它与导体表面各点的曲率半径有关，曲率半径较小的地方表面凸出而尖锐， σ 较大；曲率半径较大的地方表面平坦， σ 较小；曲率半径为负值的地方表面凹进去， σ 更小。孤立球形导体的表面各点曲率半径都相同，故 σ 也都相同。

例 6.1.3 如图 6.1.10 所示，两个半径分别为 r 和 R 的球形导体 ($r < R$)，距离很远，用一个很长的导线连接两个导体球，并使它们带电，求两球表面的电荷面密度与曲率半径的关系。



图 6.1.10 带电导体上电荷面密度和曲率半径的关系

解：两球相距很远，故可认为每个球上所带电荷产生的电场不影响另一个球上的电荷分布。设小球和大球上分别带电为 q 和 Q ，它们的电势分别为

$$V_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad V_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

用导线相连两球达到静电平衡时，两个球的电势相等，则

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

可见，两球的带电量与球的半径成正比。小球和大球的电荷面密度之比为

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_R} = \frac{q / (4\pi r^2)}{Q / (4\pi R^2)} = \frac{R}{r}$$

可见，电荷面密度与曲率半径成反比。这一结论只能粗略地表示电荷面密度与曲率半径的大小关系，成反比的关系并非普适结论。若两导体球距离较近，那么它们所带电荷产生的电场将互相影响，使得每个导体的表面电荷分布并不均匀，这样也就谈不上电荷面密度与曲率半

径成反比了。

由式(6.1.1)和上例可知,带电导体表面尖锐的地方电荷面密度大,附近的电场强度也比较大。带电导体尖端附近的电场特别强,达到某一值时,能击穿空气产生放电现象,称为**尖端放电**。此时,强大的电场加速空气中残留的电荷(例如由宇宙射线产生的自由电子)使其获得足够大的动能,这些电荷与空气中的 O_2 , N_2 分子碰撞产生大量的离子,即空气发生了电离。与导体所带电荷异号的离子被吸附到尖端上,而同号的离子被排斥加速离开,就产生了放电现象。

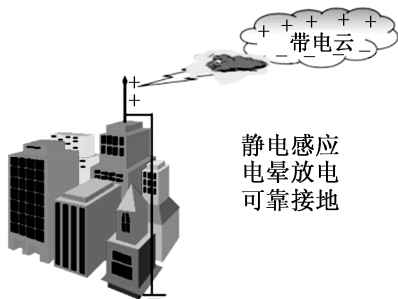


图 6.1.11 避雷针的工作原理

尖端放电现象在技术上有许多重要的应用。避雷针就是利用尖端放电原理制造的(见图 6.1.11),当雷电发生时,建筑物上感应了大量的电荷,如不及时释放,就会在带电云层和建筑物之间发生强大的火花放电,也就是发生雷击。利用尖端放电原理使得尖端附近空气发生电离,中和建筑物上的感应电荷,强大的放电电流从与避雷针连接并良好接地的粗导线中流走,从而确保建筑物免遭雷电的破坏。

在有些情况下,还要防止尖端放电带来的损害。如在高压电器设备中,所有金属部件都要做成光滑的球形表面,以保证机器处于正常的高电势工作状态。

6.1.4 静电屏蔽

利用空腔导体可进行静电屏蔽。静电屏蔽可分为屏蔽腔外电场和屏蔽腔内电场。如前所述,腔内无其他带电体的空腔导体,只要处于静电平衡状态,无论是自身带电还是置于外电场中,腔内都没有电场。空腔导体使得腔内区域不受空腔外表面上的电荷或外界电场的影响,这就是**屏蔽腔外电场**[见图 6.1.12 (a)]。接地的空腔导体可使腔内带电体的电场对腔外不会产生影响,这就是**屏蔽腔内电场**[见图 6.1.12 (b)]。

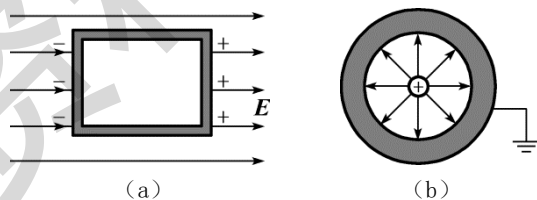


图 6.1.12 静电屏蔽

静电屏蔽在实际技术中有着重要的应用。屏蔽的空腔不一定严格闭合,用金属制成的金属网罩就能起到相当好的屏蔽作用。为了使高压设备不影响外界,可将这些带电体置于接地的金属壳或金属网内。将精密的电磁测量仪器或电子电路置于金属盒中可有效屏蔽外界电场的干扰。为了避免外界的干扰,常用金属丝编织的屏蔽线层包裹传送弱信号的连接导线。在多孔的铁笼中,人可以免受强电释放的伤害(见图 6.1.13)。

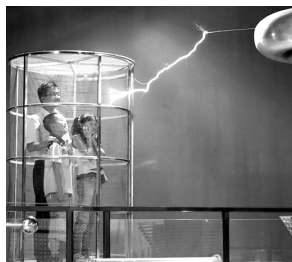


图 6.1.13 法拉第笼

6.2 电容器 电容

6.2.1 孤立导体的电容

孤立导体带电 Q ，静电平衡时将具有确定的电势值 V 。理论和实验都表明，随着导体带电量 Q 的增加，电势 V 线性增加，即

$$C = \frac{Q}{V} \quad (6.2.1)$$

比例系数 C 为孤立导体的**电容**。 C 的值与 Q 、 V 无关，仅取决于导体自身的形状、大小等因素，物理含义是导体升高单位电势增加的电荷量，表征导体储存电能能力的大小。SI 单位制中，电容的单位是 C/V ，称为法拉 (F)， $1F=1C/V$ 。电量的单位 C 很大，所以 F 也是一个很大的单位，实际中常用微法 ($1\mu F=10^{-6}F$) 和皮法 ($1pF=10^{-12}F$)。

例 6.2.1 求半径为 R 的孤立导体球的电容。

解：设导体球带电为 Q ，静电平衡时电荷均分布在导体表面，可得导体球的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

将上式代入式 (6.2.1) 可得

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

可见，球形导体的电容仅与自身的半径有关，与 Q 、 V 无关。

6.2.2 电容器及其电容

1. 电容器的构成及其电容的定义

电容器由两个带有等值异号电荷的导体（多数情况下它们之间还有**电介质**）构成，常用在电路中作为储能器件。构成电容器的两个导体称为极板。如图 6.2.1 所示，将电容器与电源两极相连，电源对电容器迅速充电，其中一个极板带正电，另一个极板带等量的负电荷。对于给定的电容器，电容器两极板间的电势差等于电源电压，每个极板获得电荷 Q 正比于两极板间的电势差 V_{AB}

$$Q = C(V_A - V_B) = CV_{AB} \quad (6.2.2)$$

式中，比例系数 C 为常数，称为**电容器的电容**，表征电容器储存电荷以及静电能大小的能力。一般总可使两极板的相对表面上带有等量异号的电荷 $\pm Q$ 。电容器的电容与 Q 和 V_{AB} 无关，仅取决于两极板的形状、大小、相对位置以及极板间电介质的电容率。

本质上，电容器电容的定义与孤立导体电容的定义是一致的。若某一带电导体 A 附近有其他导体，则该导体的电势 V_A 不仅取决于自身的几何形状以及所带的电荷 Q ，还与周围其他导体的位置和形状有关。这是因为 Q 将使其他导体表面出现感应电荷，而这些感应电荷将影响空间的电势分布及导体 A 的电势。显然，此时 Q/V_A 就不再是只依赖于自身性质的常数了。

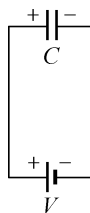


图 6.2.1 电容器与电源两极相连

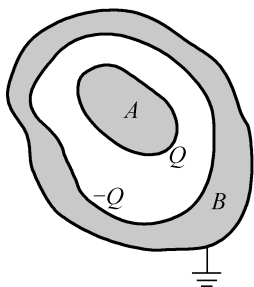


图 6.2.2 电容器的构成

为了消除其他导体的影响,可利用静电屏蔽,将导体 A 置于空腔导体 B 中,如图 6.2.2 所示。若将导体 B 接地,导体 A 的电势就不会受到腔外导体的影响,此时导体 B 电势为零,电势差 $V_{AB} = V_A - V_B = V_A$ 为常数;即使导体 B 不接地,虽然腔外的感应电荷会改变导体 A 和 B 的电势值,但电势差 V_{AB} 仍不受影响,保持为常数。由高斯定理可知,导体 B 的内表面上将感应出等量异号的电荷 $-Q$,可以证明 V_{AB} 与导体 A 上所带的电荷量呈线性关系。导体 A 和空腔导体 B 构成电容器,其电容值为

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{V_{AB}}$$

实际的电容器对屏蔽性的要求并不需要如图 6.2.2 所示的那样严格,一般地,只要两块极板自身的面积很大,且距离很近,那么两个极板相对表面上等量异号的电荷激发的电场将集中分布在两极板之间狭窄的空间内。此时,认为外界对 Q 以及 V_{AB} 的影响可忽略不计。这样的装置也是电容器,具有确定的电容值,如下面将要介绍的平行板电容器和圆柱形电容器(见图 6.2.3 和图 6.2.5)。

电容器是一种用来储存电荷和电能的器件,在电子电路中有着广泛的应用。例如,相机中的闪光灯就是依靠电容器储存的电能源释放工作;电源突然切断,电容器可作为计算机中的电能储备;电容器还可用于阻止电荷和电能的剧烈变化以保护电路;电容器构成收音机中调谐器的一部分;极小的电容器可用于作计算机中二进制随机存储器表示“0”或“1”的存储单元。此外,电容器具有通交流隔直流的性质,故常用于整流滤波等电路中。

2. 电容器电容的计算

下面讨论几种常见的具有规则形状的电容器电容的计算,由此研究影响电容器电容的因素。方便起见,这里只考虑真空电容器,认为两极板间是空气或真空,下一节将讨论极板间电介质对电容的影响。

计算电容器电容的一般步骤是:①假定两极板上分别带有等量异号电荷 $\pm Q$;②然后利用高斯定理或电场强度叠加原理计算两极板间电场强度 E 的分布;③在此基础上计算两极板间的电势差, $V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$;④最后代入电容器电容的定义式 $C = Q / V_{AB}$,得到电容器的电容值 C 。

1) 平行板电容器

如图 6.2.3 所示,平行板电容器由两块彼此靠得很近的面积 S 的平行极板构成,两极板间距为 d , d 相对于极板的线度很小 ($S \gg d^2$),则两极板间为匀强电场(边缘效应忽略不计)。由 5.2 节结论知,两个邻近的平行极板间的电场强度大小为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

场强方向垂直于极板,则两极板间电势差为

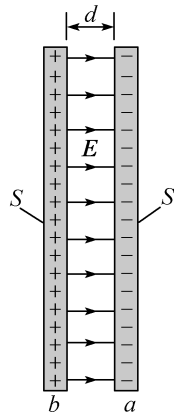


图 6.2.3 平行板电容器

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B E dl = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \int_A^B dl = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

得电容 C 为

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (\text{平行板电容器}) \quad (6.2.3)$$

可见平行板电容器的电容 C 正比于极板面积 S ，反比于极板间距 d 。在实际应用中，常用调节 S 或 d 的方法改变电容器的电容，以满足实际需要。有一种计算机键盘用电容器控制，如图 6.2.4 所示，键盘按键与电容器的上极板相连，按下按键时，电容器上极板向下运动，电容器极板间距离减小，电容增加，电容的变化转变为电信号，通过电子电路探测其变化。

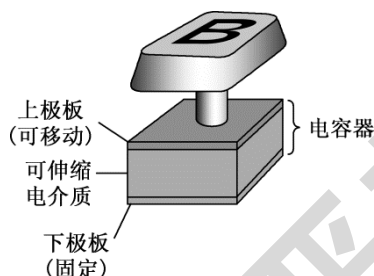


图 6.2.4 计算机键盘上的按键结构

由式 (6.2.3) 可见，要增加电容器的电容值，可减小极板间距 d ，增大极板面积 S 。几十年前，电容器的电容一般都很小，超过 $1\mu\text{F}$ 的电容器并不常见。而目前电容器的电容值可达到几个法拉，而且它们的体积很小，每个极板只有几厘米的线度。这样的电容器在低压应用中用作可充电的电源，反复充电超过 10^5 次而性能不减，如用于计算机存储器。这些大电容值的电容器是如何制造的呢？方法之一是利用多孔活性炭的巨大表面积， 0.1g 活性炭的表面积达到 100m^2 。另外，碳原子和包围碳原子的硫酸的界面形成电双层，正电荷位于碳原子边缘，等量的负电荷位于硫酸边缘，空间距离约为 10^{-9}m ，即极板间距 d 也非常小。这样 0.1g 活性炭的电容值就可达到 $C = \epsilon_0 S / d \approx 1\text{F}$ 。

不过，间距 d 的减小在工艺上存在一定的限度，增大 S 往往也会导致电容器体积的增加。另外一种有效增加电容器电容的方法是在两极板间充满适当的电介质，下一节将讨论这一问题。

2) 圆柱形电容器

如图 6.2.5 (a) 所示，圆柱形电容器由底面半径分别为 R_A 和 R_B 的同轴金属圆柱面组成（内圆柱面有时就是长导线）。两个圆柱面的长度为 L ，远大于圆柱面的间距 $R_B - R_A$ ，边缘效应可忽略。

设内、外圆柱面分别带电 Q 和 $-Q$ [见图 6.2.5 (b)]，圆柱面单位长度的带电量就为 $\lambda = Q / L$ 。由高斯定理可得，内、外圆柱面间的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (R_A < r < R_B)$$

故两极板间的电势差

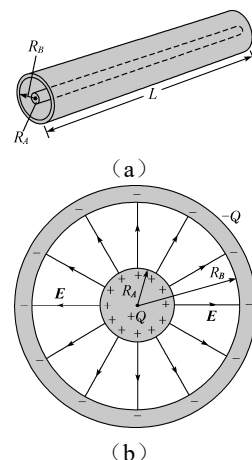


图 6.2.5 圆柱形电容器

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_A}^{R_B} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

则圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_B / R_A)} \quad (6.2.4)$$

可见, 圆柱形电容器的电容值仅取决于 L , R_A , R_B 等几何参数, 与是否带电无关。

3) 球形电容器

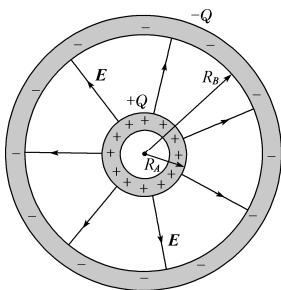


图 6.2.6 球形电容器

球形电容器由两个半径分别为 R_A 和 R_B 的同心导体球壳组成, 如图 6.2.6 所示。设内、外球壳表面分别均匀带电 Q 和 $-Q$ 。利用高斯定理可求得两球壳间的电场强度大小为 $E = Q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$, 方向沿径向。将电场强度沿径向积分, 可得两个导体球壳之间的电势差为

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_A}^{R_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

则球形电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_A R_B}{R_B - R_A} \right) \quad (6.2.5)$$

令式 (6.2.5) 中 $R_B \rightarrow \infty$, 则

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R_A$$

这就是孤立球壳的电容, 与式 (6.2.1) 一致。

在实际问题中, 对于形状不规则的电容器, 通常用实验的方法测量其电容。测出两极板间的电势差 V_{AB} 以及极板上的带电量 Q , 再根据式 (6.2.1) 计算电容器的电容。

6.2.3 电容器的串联和并联

许多电路里都有电容器, 通常用导线将电容器和其他元件相连接。电容器本身也可以多种方式组合在一起, 两种基本的组合方法是串联和并联。

1. 电容器的并联

图 6.2.7 为包含 3 个电容器连接的电路, 电动势为 V 的电源与 a , b 两端相连, 每一电容器两端电势差均为 $V_{ab} = V$, 故这些电容器可视为“并联”。3 个电容器中每个极板获得电量为 $Q_1 = C_1 V$, $Q_2 = C_2 V$, $Q_3 = C_3 V$ 。电源提供的总电荷 Q 为

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 V + C_2 V + C_3 V$$

则这 3 个电容器的等效电容 C_{eq} 为

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (\text{并联}) \quad (6.2.6)$$

可见, 电容器并联的等效电容等于每个电容器电容之和, 总的等效电容增加, 这是因为

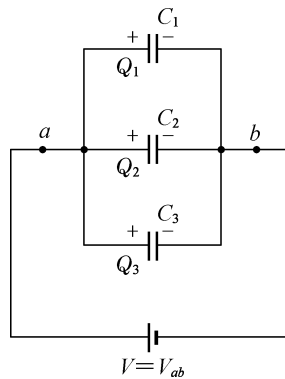


图 6.2.7 电容器的并联

电容器的并联相当于增加了极板的面积。不难将上述结论推广到 n 个电容器并联的情形。

2. 电容器的串联

如图 6.2.8 所示, 电容器 C_1, C_2, C_3 的极板首尾相接, 即为电容器的串联。电量 $+Q$ 从电源流向 C_1 的左极板, $-Q$ 流向 C_3 的右极板。 C_1 左极板上的 $+Q$ 在相对的右极板上感应出电量 $-Q$, 区域 A 的总电荷为零, 则 C_2 的左极板上出现电量 $+Q$ 。以此类推, 可见每个电容器上具有相等的电量 Q 。3 个串联电容器的总电势差 V 等于各电容器上电势差之和

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

对每个电容器分别有

$$Q = C_1 V_1, Q = C_2 V_2, Q = C_3 V_3$$

综合以上两式可得, 串联电容器的等效电容 C_{eq} 满足关系式

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (6.2.7)$$

可见, 串联电容器等效电容的倒数等于每个电容器电容的倒数之和, 串联电路的等效电容 C_{eq} 小于所有串联电容的最小值。不难将上述结论推广到 n 个电容器串联的情形。

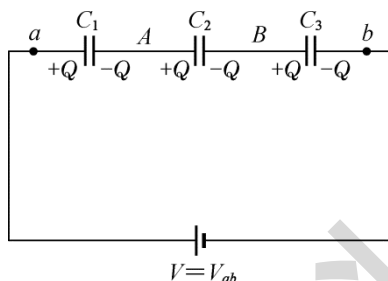


图 6.2.8 电容器的串联

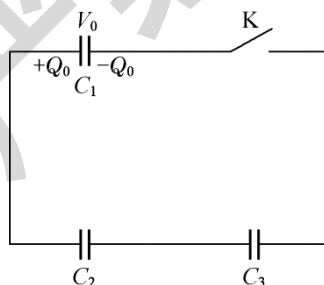


图 6.2.9 例 6.2.2 图

例 6.2.2 3 个电容器如图 6.2.9 所示连接, 其电容分别为 C_1, C_2 和 C_3 。先断开开关 K , 用外接电源单独对 C_1 充电, 使其两端电势为 V_0 , 然后断开电源, 闭合开关 K , 求各电容器上的电势差。

解: 单独对 C_1 充电后, C_1 极板上带电量为 $Q_0 = C_1 V_0$ 。断开电源, 闭合开关 K 后, C_1 放电, 对 C_2 和 C_3 充电, 整个电路可视为 C_2 与 C_3 串联, 再与 C_1 并联。设达到稳定状态后, C_1 极板上带电 Q_1 , C_2, C_3 极板上带电 Q_2 , 则

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= Q_0 \\ \frac{Q_1}{C_1} &= \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_2}{C_3} \end{aligned}$$

联立以上两式可得

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} Q_0 = \frac{C_1^2 (C_2 + C_3)}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} V_0 \\ Q_2 &= Q_0 - Q_1 = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} V_0 \end{aligned}$$

6.3 电介质的静电特性

6.3.1 电介质

电介质就是指不具备导电能力的绝缘材料。在电容器中, 两极板间常常充满如纸片、塑料这样的电介质以增大电容。我们通过下面两个简单的实验来考察电介质对电容器电容的影响。

如图 6.3.1 (a) 所示, 保持电源 V_0 与电容器 C_0 始终连接, 电容器极板上带有电量 Q_0 。在电容器两极板间插入电介质, 实验发现极板上的电荷增加为原来的 ε_r 倍, 即

$$Q = \varepsilon_r Q_0 \quad (\text{电压不变})$$

式中, ε_r 称为电介质的**相对电容率**, 是一个无量纲的数值, 其值总是大于 1, 具体的值取决于不同的电介质材料的特性, 从 1 到几万不等。可见, 电容器的电容变为 $C = Q/V_0 = \varepsilon_r Q_0/V_0 = \varepsilon_r C_0$ 。另一个实验如图 6.3.1 (b) 所示, 电容器 C_0 与电源 V_0 相连, 极板上带有电荷 $Q_0 = C_0 V_0$ 。然后断开电源, 孤立电容器仍然带电 Q_0 , 向两极板间插入电介质, 极板上电荷依然为 Q_0 , 而实验发现极板间的电势差下降为原来的 $1/\varepsilon_r$, 即

$$V = V_0 / \varepsilon_r \quad (\text{电荷守恒})$$

此时电容器的电容变为: $C = Q_0 / V = Q_0 / (V_0 / \varepsilon_r) = \varepsilon_r C_0$ 。可见, 不管在何种外部连接条件下, 在两极板间插入电介质后, 电容器的电容都增大为原来的 ε_r 倍

$$C = \varepsilon_r C_0 \quad (6.3.1)$$

式中, C_0 为两极板间是真空时电容器的电容; C 为两极板间充满相对电容率为 ε_r 的电介质材料时电容器的电容, 这也是 ε_r 称为相对电容率的原因。

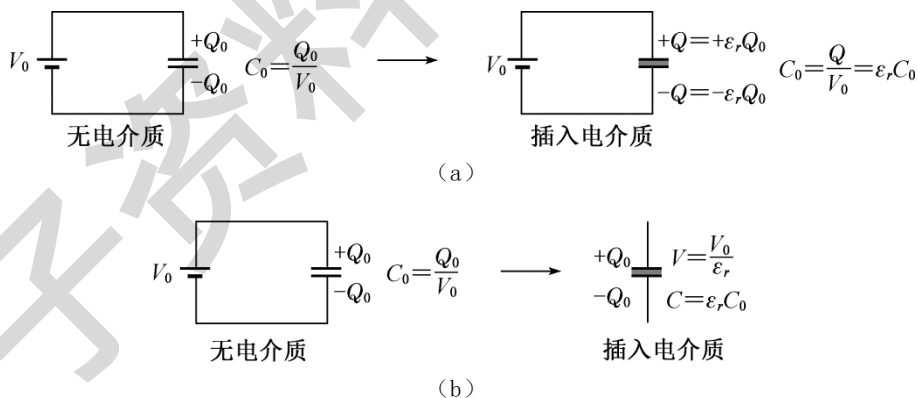


图 6.3.1 电介质对电容的影响

(a) 电压保持为常数 (b) 电荷保持为常数

在第二个实验中, 电介质中的电场强度发生了改变。两平行极板间为真空时, 电场强度为

$$E_0 = \frac{V_0}{d}$$

充满电介质后, 电荷保持不变, 而电势差下降为原来的 $1/\varepsilon_r$, 因此电介质中的电场强度变为

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{\epsilon_r d}$$

即

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad (\text{电介质中}) \tag{6.3.2}$$

可见，电介质中的电场强度也被削弱为原来的 $1/\epsilon_r$ 。不过，虽然电介质中的电场强度有所减弱，却不会像在导体中那样减少为零。

根据上面的讨论，可总结出在电容器中充满电介质的几个作用：首先，电介质内电场强度降低，不像空气那样容易被击穿，使极板上可外加更高的电压而不引起电容器被击穿；其次，充满电介质有利于在工艺上减小极板间距 d ，从而增大电容；最后，电介质本身会使电容器的电容增加为原来的 ϵ_r 倍。

表 6.3.1 为一些电介质的 ϵ_r 值，其中空气的 $\epsilon_r=1.0006$ ，故空气电容器与真空电容器差别很小。表中同时给出了电介质的**击穿场强**，即介质材料被击穿前所能承受的最大电场强度。

表 6.3.1 在 20℃时一些电介质的相对电容率和击穿电场

电 介 质	相对电容率 ϵ_r	击穿场强/ ($\times 10^6 \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$)
空气	1.0006	3
聚苯乙烯	2.6	24
橡胶	6.7	12
乙烯基（塑料）	2~4	50
纸	3.7	15
石英	4.3	8
玻璃	5~10	10~25
钛酸钡	$10^3\sim 10^4$	3

以平行板电容器为例，当极板间充满有相对电容率为 ϵ_r 的电介质时电容值为

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (\text{平行板电容器}) \tag{6.3.3}$$

引进一个新的物理量

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \tag{6.3.4}$$

称为电介质的**电容率**。这样平行板电容器的电容可写为

$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

6.3.2 电介质的分子描述

1. 电介质的分类

电介质可分为两类，一类电介质在无外电场时，分子的正负电荷中心重合，等效电偶极矩为零，这类分子称为“无极分子”，如氦（He）、氧（O₂）、甲烷（CH₄）等（见图 6.3.2）；在另一类介质中，即使无外电场，其正负电荷中心也不重合，而是分开一定的距离，因而分子具有固有电偶极矩 p ，这类分子叫“有极分子”，如水（H₂O）、氨（NH₃）、氯化氢（HCl）等分子（见图 6.3.3）。无外加电场时，由于分子的无规则热运动，在介质内任意一小块区域

内各有极分子电偶极矩的取向随机, 电偶极矩的矢量和平均为零 (见图 6.3.4), 所以无论是整体还是局部有极分子的电介质仍然是电中性的。

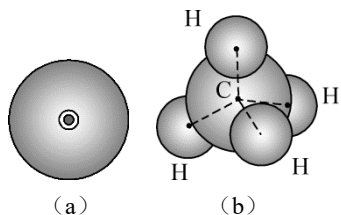


图 6.3.2 无极分子

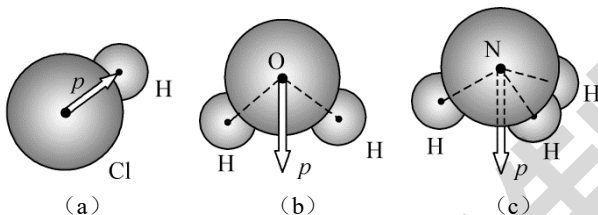
(a) He (b) CH₄

图 6.3.3 有极分子

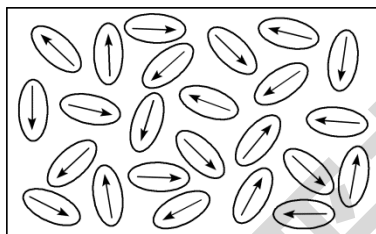
(a) HCl (b) H₂O (c) NH₃

图 6.3.4 无外加电场时, 有极分子电偶极矩的矢量和为零

2. 电介质的极化及其微观机制

如图 6.3.5 (a) 所示, 电容器的两极板之间为空气, 两极板分别带电 $+Q_0$ 和 $-Q_0$, 电势差为 $V_0 = Q_0 / C_0$ 。现在向两极板间插入电介质。对于有极分子, 在外电场作用下固有电偶极矩的取向趋于与外加电场方向一致, 如图 6.3.5 (b) 所示, 受到分子热运动的影响, 这些电偶极矩的取向不会与外场完全一致, 但至少部分取向一致 (电场越强, 取向越有序), 这种极化称为**取向极化**。对于无极分子, 在外电场作用下正负电荷中心分离, 形成了电偶极子, 电偶极矩取向与外加电场方向一致, 即产生了所谓的“感生电矩”, 这种极化为**位移极化**, 也可用图 6.3.5 (b) 阐释。

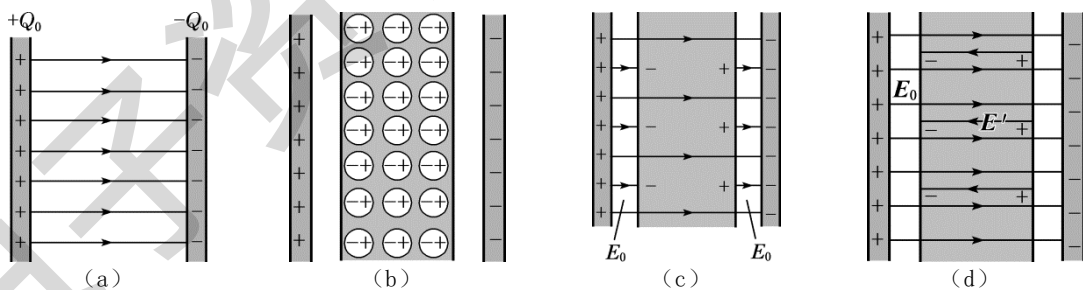


图 6.3.5 电介质的极化

在外电场作用下, 无论是有极分子还是无极分子, 总的效果就是在电介质靠近正极板的表面出现了净负电荷, 而靠近负极板的表面出现了正电荷, 如图 6.3.5 (c) 所示, 即均匀的电介质在电场中被极化了, 表面上产生了极化电荷, 而内部任意小的体积内仍是电中性的。

电介质两个表面上的极化电荷将激发一附加电场 \mathbf{E}' , \mathbf{E}' 的方向与外加电场 \mathbf{E}_0 方向相反, 如图 6.3.5 (d) 所示, 因而电介质内总的场强 \mathbf{E} 大小为

$$E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \quad (6.3.5)$$

上式说明电介质内的电场小于真空中的电场。

3. 极化电荷与自由电荷的关系

以平行板电容器为例，由式 (6.3.5) 可得附加电场 E' 与外加电场 E_0 的关系为

$$E' = E_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right)$$

无电介质时，两平行极板间的电场取决于极板上的自由电荷面密度 $\sigma = Q/S$ ，有

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

极化电荷 Q' 只能位于电介质的表面，且不可自由移动，所以也称为束缚电荷。电介质表面上的极化电荷面密度 $\sigma' = Q'/S$ ，激发的附加电场 E' 为

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

联立以上三式可得极化电荷和自由电荷之间的关系式为

$$\sigma' = \sigma \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \quad (6.3.6)$$

$$Q' = Q \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \quad (6.3.7)$$

由于 ε_r 总是大于 1，所以电介质上的极化电荷总是小于极板上的自由电荷。式 (6.3.6) 和式 (6.3.7) 对于均匀电场中各向同性的均匀电介质是普遍成立的。

例 6.3.1 (电介质部分填充的电容器) 如图 6.3.6 所示，平行板电容器极板面积为 S ，间距为 d ，充电后两极板电势差为 U_0 。然后断开电源，在两极板间放入相对电容率为 ε_r 、与极板相同截面积 S 、厚度为 l 的电介质。求：

- (1) 插入电介质后，介质表面的极化电荷；
- (2) 极板和电介质之间的电场强度；
- (3) 电介质内的电场强度；
- (4) 插入电介质后该电容器的电容。

解：(1) 电介质上的极化电荷为

$$Q' = Q \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right)$$

(2) 极板上的电荷并未发生改变，所以极板和电介质间隙的电场强度与无电介质时的电场强度相同，则

$$E_0 = \frac{U_0}{d}$$

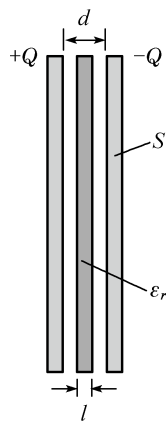


图 6.3.6 电介质部分填充的电容器

(3) 电介质内的电场强度为

$$E' = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{U_0}{d\varepsilon_r}$$

(4) 先求插入电介质后两极板间的电势差, 将电场强度沿平行于电场线的方向进行线积分

$$U = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_0(d-l) + E'l = U_0 \left(1 - \frac{l}{d} + \frac{l}{d\varepsilon_r} \right)$$

则有电介质时电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S U_0 / d}{U_0 \left(d - l + \frac{l}{\varepsilon_r} \right) / d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\varepsilon_r (d-l) + l}$$

6.3.3 有介质时的高斯定理 电位移矢量

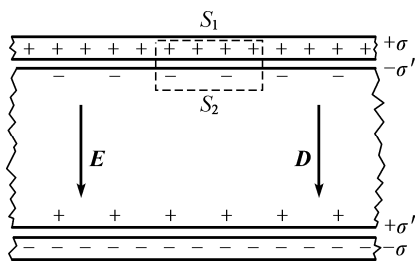


图 6.3.7 平行板电容器

高斯定理是静电场的基本性质之一, 在有电介质存在时也应成立。不过此时在计算高斯面上电场强度通量时, 应计算高斯面内包括自由电荷 Q 和极化电荷 Q' 在内的所有电荷的代数和。

以平行板电容器为例, 设两平行极板上自由电荷面密度分别为 $\pm\sigma$, 两极板间充满相对电容率为 ε_r 的各向同性均匀电介质, 电介质极化后, 在靠近两极板的表面分别产生面密度为 $\pm\sigma'$ 的极化电荷。根据电场分布的对称性, 取一闭合的圆柱形高斯面 S , S 的上下底面与极板平行, 上底 S_1 在极板内部, 下底 S_2 在电介质内上表面附近介质内部, 如图 6.3.7 所示, 由高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} (Q + Q')$$

式中, Q 和 Q' 分别是高斯面内的自由电荷和极化电荷。将式 (6.3.7) 代入上式, 注意 Q' 与 Q 异号, 得

$$\oint_S \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

引入一个辅助性的物理量 \mathbf{D} , 称为电位移矢量, 定义为

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (6.3.8)$$

利用 \mathbf{D} 将上面的结果改写为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (6.3.9)$$

式 (6.3.9) 右端只含有自由电荷, 而不含极化电荷, 这在使用时将带来很大的方便。式 (6.3.9) 称为有介质时的高斯定理, 可表述为: 通过电介质中任一高斯面的电位移矢量通量 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ 等于面内自由电荷的代数和。 \mathbf{D} 的单位是 C/m^2 。

式 (6.3.9) 虽然是从平行板电容器充满均匀的各向同性介质得到的, 但可以证明它对于包括各向异性介质在内的各种情形是普遍成立的。不过各向异性电介质 \mathbf{D} 的表达式比较复杂,

式(6.3.8)不再适用。

例 6.3.2 如图 6.3.8 所示,一平行板电容器有两层厚度各为 d_1 和 d_2 的均匀电介质,它们的相对电容率分别为 ε_{r1} 和 ε_{r2} 。平行极板的面积是 S , 其上的电荷面密度为 $\pm\sigma_0$ 。求两种电介质内的电场强度 E_1 和 E_2 以及该电容器的电容。

解: 根据对称性分析,电位移矢量 \mathbf{D} 竖直向下。取如图所示的闭合圆柱面为高斯面,上底面在极板内,下底面在电介质 1 内,底面积为 ΔS ,极板内无电场, \mathbf{D} 与圆柱面侧面垂直,因此由式(6.3.9)得

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{下底}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = D_1 \Delta S = \sigma_0 \Delta S$$

于是

$$D_1 = \sigma_0$$

同理可得,电介质 2 内的电位移矢量为

$$D_2 = \sigma_0$$

由式(6.3.8)可得

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}}, \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}$$

两极板间的电势差为

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\sigma_0 d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} + \frac{\sigma_0 d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}$$

则该平行板电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{\sigma_0 S}{\frac{\sigma_0 d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} + \frac{\sigma_0 d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}} = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}}$$

由上例结果还可见,充入电介质后,极板间电场 \mathbf{E} 线不连续,但电位移 \mathbf{D} 线是连续的。

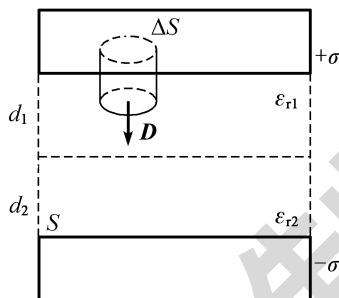


图 6.3.8 例 6.3.2 图

6.4 电容器储能 静电场的能量

6.4.1 电容器储能

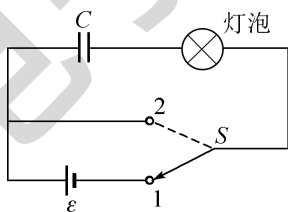


图 6.4.1 电容器的充电和放电

如图 6.4.1 所示的电路中,将开关 S 接到位置 1,电源对电容器充电,充电完成后,将开关 S 接到位置 2,可看到电路中的小灯泡将维持一段时间才逐渐熄灭,表明充电的电容器储存了一定的能量,在这一过程中被释放出来了。那么充电的电容器的能量又是从哪儿来的呢? 电容器储存的能量等于充电过程中电源所做的功。电源对电容器充电的总效应

是将电荷从一个极板转移到另一个极板。充电过程中,电容器带电不会立即达到最大值,而

需要一定的时间。设在充电过程中某一瞬间电容器极板上带电量为 q , 两极板间电势差为 U , 在这一时刻电源将 $-dq$ 的电荷量从正极板转移至负极板所需做的功等于这部分电荷电势能的增加, 即 $dW = (-U)(-dq) = Udq$, 则整个充电过程中电源所做的功为

$$W = \int_0^Q Udq = \frac{1}{C} \int_0^Q qdq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

上式中利用了任意时刻极板间的电势差为 $U=q/C$, Q 为充电结束时电容器每一极板上带电量的绝对值。电源对电容器所做的功以静电能的形式储存在电容器中, 当电容器两极板上分别带电 $+Q$ 和 $-Q$ 时, 储存的静电能为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

由 $Q = CU$, 上式也可以表示为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU \quad (6.4.1)$$

这就是计算电容器储存静电能的公式, 适用于任何形状和结构的电容器。一般情况下电容器充电后电压值是给定的, 所以常用 $W_e = CU^2/2$ 讨论电容器的储能问题。由此可见, 电压一定时, 电容 C 越大, 电容器储存的静电能越多, 这就是为什么说电容值表征了电容器储存电能大小的能力。

6.4.2 静电场的能量

电容器充电, 获得能量, 电容器内电场强度增加; 电容器放电, 电能转为其他形式能量, 电容器内场强减弱或消失。因此电容器储存的静电能可认为是储存在两极板间的电场中。以平行板电容器为例, 研究电场和能量的关系。

平行极板介质电容器的极板面积为 S , 极板间距为 d , 其间充满有相对电容率为 ϵ_r 的电介质, 则其电容为 $C = \epsilon_0 \epsilon_r S / d$ 。平行极板间的电场近似为匀强电场, 与电势的关系为 $V = Ed$, 则

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd$$

式中, Sd 为两个极板间电场存在的体积。在等式两边同时除以体积, 可得单位体积内的电场能量 (即电场能量密度) w_e 的表达式为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE \quad (6.4.2)$$

即静电能能量密度正比于电场强度的平方。虽然式 (6.4.2) 是通过平行板电容器内均匀电场的特殊情形推导得到, 但可以证明该式对非均匀电场以及变化的电磁场都成立, 只不过此时的能量密度是空间位置和时间的函数, 与这里平行板中是常量不同。

计算某一带电体系激发的电场储存的总的静电能, 要先求出电场 E 在整个空间的分布, 根据式 (6.4.2) 得出 w_e 的表达式, 然后将 w_e 对整个电场空间积分, 即

$$W_e = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV \quad (6.4.3)$$

例 6.4.1 已知均匀带电球体半径为 R , 所带电量为 Q , 球外为真空, 求均匀带电球体的静电能。

解: 均匀带电球体所激发的电场强度由高斯定理可得

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} & (r < R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & (r > R) \end{cases}$$

如图 6.4.2 所示, 在电场中取半径为 r , 厚度为 dr 的薄球壳, 球壳的体积元为 $dV = 4\pi r^2 dr$, 球壳内静电能为 $w_e dV$, 对整个空间积分得均匀带电球体的静电场能量为

$$\begin{aligned} W_e &= \int_V \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

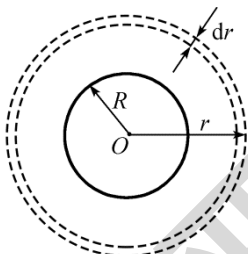


图 6.4.2 例 6.4.1 图

为什么说静电能是储存在电场而不是电荷里呢? 在静电场的情况下, 电荷和电场都不随时间变化, 而静电场与静电荷是密不可分的, 因此无法用实验证实电能究竟以哪种方式储存的。但是, 实验已经证实, 交变电磁场可以脱离电荷而独立存在, 电磁场的能量能够以电磁波的形式在空间传播, 这一事实充分证明了能量是储存在场中的观点。能量是物质的固有属性之一, 而静电场具有能量, 这说明了静电场是一种特殊形态的物质。

思考题 6

6.1 在一个孤立导体球壳的中心放置一点电荷, 问球壳内外表面上的电荷分布是否均匀? 若点电荷偏离球心, 情况又是如何?

6.2 在室外, 人的鼻子的高度和脚的高度之间有约 200V 的电位差, 为什么人没有被这个电位差所电击呢?

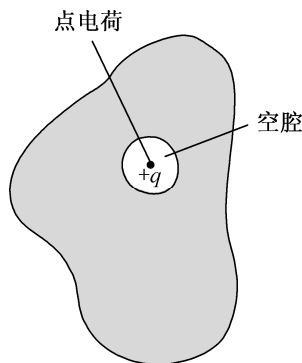
6.3 为什么把鸟放入一个用金属网制成的鸟笼中, 再把鸟笼放入高压电场中, 鸟会安然无恙呢?

6.4 电脑的 CPU 针脚为什么越做越短?

6.5 在高压电器设备周围, 常围上一接地的金属栅网, 以保证栅网外人的生命安全, 试说明其道理。

6.6 如题图所示, 设导体带有电荷 $+Q$, 内部有一空腔, 空腔内放置有一点电荷 $+q$ 。则导体的内表面和外表面的电荷分别是多少?

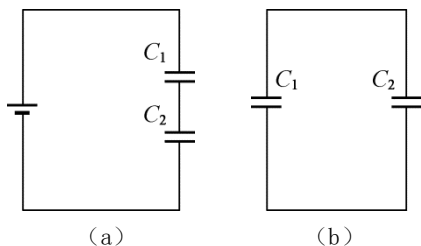
6.7 一个带电量为 Q 的半径为 R 的金属球壳内充满了相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质, 外面是真空, 此球壳的电势是



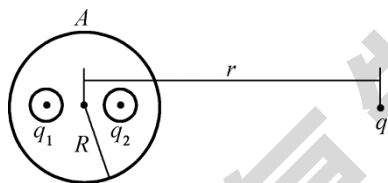
思考题 6.6 图

$Q/(4\pi\epsilon_0\epsilon_r R)$ 吗? 为什么?

6.8 如题图所示, 将两个电容分别为 C_1 和 C_2 的电容器串联后进行充电, 然后断开电源, 将这两个电容器并联, 问它们储存的静电能是增加还是减小? 为什么?



思考题 6.8 图



思考题 6.10 图

6.9 在有固定分布的自由电荷的电场中放置一电介质。当移动此电介质的位置后, 电场中 E 的分布是否改变? D 的分布是否改变? 通过某一闭合曲面的 E 的通量是否改变? D 的通量是否改变?

6.10 如题图所示, 在金属球 A 内有两个球形空腔, 金属球不带电。在两空腔中心分别各放置一点电荷 q_1 和 q_2 , 求金属球 A 上的电荷分布。此外, 在金属球外很远处放置一点电荷 q ($r \gg R$), 求 q_1 , q_2 的受力。

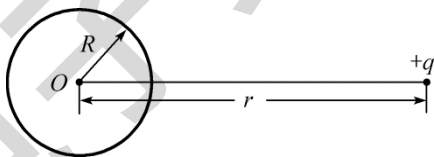
6.11 将平行板电容器的两极板与电源保持连接, 在两极板间充满有相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质, 问极板上的电荷量是原来的几倍? 电场变为原来的几倍?

练习题 6

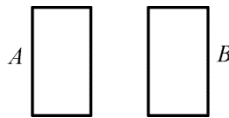
6.1 帕赛尔教授在他的《电磁学》中写道: “如果从地球上移去一滴水中的所有电子, 则地球的电势将会升高几百万伏特。”试针对这段话进行估算给予证实。

6.2 导体球 A 半径为 R_1 , 同心地放置在内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的金属球壳 B 中。使系统带电后导体球 A 的电势为 V , 金属球壳 B 所带总电量为 Q 。求该系统各处的电势和场强分布。

6.3 如题图所示, 真空中有一半径为 R 的金属球 A , 不带电且离地面很远。在 A 球附近与球相距为 r ($r > R$) 处有一带正电的电荷 q 。若将金属球接地, 不计接地导线上电荷的影响, 求金属球的电势以及所带的净电荷。



练习题 6.3 图



练习题 6.4 图

6.4 如题图所示, 空间里有 A , B 两个带电导体板, 试证明 A , B 中至少有一个表面上各点所带电荷是同号的。

6.5 高压设备产生的强电场会导致空气电离, 电荷流动, 高压就无法保持。使空气电离的电场强度约为 $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ 。

(1) 证明: 导体球在空气中的击穿电压正比于导体球的半径;

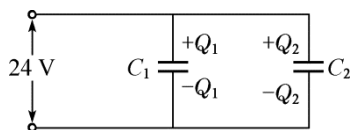
(2) 估算直径为 1.0cm 的导体球在空气中的击穿电压。

6.6 一圆柱形电容器, 内半径为 $r_1 = 4\text{cm}$, 外半径为 $r_2 = 4.2\text{cm}$, 长为 $L = 40\text{cm}$, 两极板间充有相对电容率 $\epsilon_r = 5.0$ 的电介质, 其击穿场强是 $E_d = 1.5 \times 10^7 \text{V/m}$, 如果不考虑边缘效应, 试计算此电容器最多能储存多少电荷。

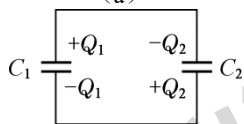
6.7 有的计算机键盘的每一个按键下面连接一小块金属片, 它下面隔一定空气间隙是另一块小的固定金属片, 二者构成一个小的电容器。当键被按下时, 两金属片极板间距减小, 电容器的电容发生变化, 与之相连的电子线路就能检测出是哪个键被按下了, 从而给出相应的信号。设每个金属片的面积为 50.0mm^2 , 初始状态两金属片的间距为 0.600mm 。如果电子线路检测出电容变化了 0.250pF , 求键被按下的距离。

6.8 为了测量电介质材料的相对电容率, 将一块厚度为 $t = 1.5\text{cm}$ 的平板电介质材料缓慢插入两平行极板中, 极板间距为 $d = 2.0\text{cm}$ 。在插入过程中, 电容器上的电荷保持不变, 插入之后, 两极板间的电势差降低为原来的 60% , 求电介质的相对电容率。

6.9 电容器 $C_1 = 2.2\mu\text{F}$ 与 $C_2 = 1.2\mu\text{F}$ 并联接在 24V 的电源上, 如题图 (a) 所示。充电完成后, 将 C_1, C_2 与电源断开, 且彼此也断开, 然后将 C_1, C_2 带有异号电荷的极板重新连接, 如题图 (b) 所示。求达到平衡后 C_1 和 C_2 上的电荷量及电势差。

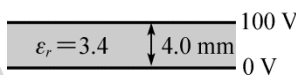


(a)

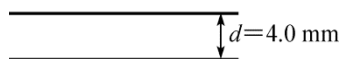


(b)

练习题 6.9 图



(a)



(b)

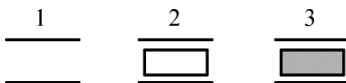
练习题 6.10 图

6.10 如题图 (a) 所示, 平行板电容器中充满有相对电容率为 $\epsilon_r = 3.4$ 的电介质, 与 100V 的电源相连, 电容器充电完成后, 断开电源。极板的面积 $S = 4.0\text{m}^2$, 间距 $d = 4.0\text{mm}$ 。

(1) 计算电容器的电容, 极板上的电荷, 电介质中的电场强度以及电容器储存的电场能。

(2) 小心地将电介质移走, 而不改变极板间距, 如题图 (b) 所示。求此时的电容, 电场强度, 极板间的电势差以及电容器储存的电场能。

6.11 3 个平行板空气电容器完全相同, 将面积和厚度均相同的一块导体板和一块电介质板分别插入其中的两个电容器, 如题图所示, 1 为空气电容器, 2 为插入导体板的电容器, 3 为插入电介质板的电容器。设极板面积为 S , 两极板间距为 d , 插入的导体板或电介质板的厚度为 t , 电介质的相对电容率为 ϵ_r 。试比较三者电容的大小。



练习题 6.11 图