高等数学练习与测试

(下册 第二版)

南京工业大学数学系

前言

要学好高等数学，总离不开解题，通过解题加深对所学课程内容的理解、灵活地掌握运算方法和提高自己的解题技巧，培养分析问题、解决问题的能力。因此如何帮助学生提高解题能力，是当前高等数学课程教学改革的一项重要任务。

为了帮助学生更好地完成作业，也为了帮助学生比较系统地复习、巩固所学知识，我们组织部分教师针对《高等数学》课程的特点，编制了这本《高等数学练习与测试》（下册第二版），每节内容包基础题，提高题，这部分作业绝大多数同学困难不大。每章还配备自我测试题，起到一个检查督促作用。这次修订，改动较大，考虑到不同专业对高等数学的要求不同，以及部分同学将来考研的需要，每章增加了重点与难点分析，之后还配备了一些综合题，供学有余力的学生选做。另外，还增加了期中与期末模拟试卷，近几年期末真题，便于学生自测，复习迎考。

本书是在我系多年使用的讲义基础上形成和修订的，是我系教师共同努力的结晶，第二版编写人员有许丙胜、马树建、焦军彩、李金凤、张国娟、江舜军、左永生、汪银乐等，全书由许丙胜负责统稿。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误和不当之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编写组

2015 年 12 月

内容提要

这本《高等数学练习与测试》（第二版）是为工科院校的大学生编写的，内容深广度符合“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，适合高等院校工科类各专业学生使用。

本次修订遵循“坚持改革，不断锤炼，打造精品”的要求，对第一版作了大的修改，删减了一些偏怪题，同时增加了一些概念性、启发性习题，对全书的文字表达，记号的采用进行了仔细推敲。所有这些修订都是为了使本书更加完善，加深对所学课程内容的理解，灵活地掌握运算方法和提高自己的解题技巧，培养解题、解决问题的能力。

本书分上、下两册出版，下册包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分和无穷级数等内容，每章包含基础题、提高题、综合题、重难点与典型例题、方法分析和自我测试题，全书增加了期中与期末模拟测试题，往届真题，书末附有习题答案与提示。

本书可作为大学生学习高等数学的辅导书，也可供报考硕士研究生的考生及参加高等数学竞赛的数学爱好者使用。

第八章 向量代数与空间解析几何

§8-1 向量及其线性运算

基础题

1．在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$A(3,0,0)$; $B(0,-2,0)$; $C(0,0,1)$; $D(3,4,0)$; $E(0,4,3)$.

2．求点 (a,b,c) 关于 (1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

3．试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

4. 已知空间三点 $A(3,-1,2)$、$B(1,2,-4)$、$C(-1,1,2)$，求点 D，使得以 A、B、C、D 为顶点的四边形为平行四边形.

5．设 $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c},\vec{v}=-\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$。试用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示 $2\vec{u}-3\vec{v}$.

6. 设向量 $\bar{r}$ 的模是 4，它与轴 u 的夹角是 $\dfrac{\pi}{3}$，求 $\bar{r}$ 在轴 u 上的投影.

7．设已知两点$M_1(4,\sqrt{2},1)$和$M_2(3,0,2)$。计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

8. 求平行于向量$\vec{a}=\{6,7,-6\}$的单位向量.

提高题

1．从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\vec{a}=\{8,9,-12\}$ 的方向取线段长 $|\overrightarrow{AB}|=34$，求 B 点的坐标.

2. 设向量 $\vec{a}=\{-1,3,2\},\vec{b}=\{2,-3,-4\},\vec{c}=\{-3,12,6\}$，试证向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，并用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示 $\vec{c}$.

§8-2　向量的数量积　向量积　混合积

基础题

1．设 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k},\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，计算：

（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\vec{a}\times\vec{b}$；(2) $(-2\vec{a})\cdot 3\vec{b}$ 及 $\vec{a}\times 2\vec{b}$；(3) $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 的夹角的余弦.

2. 已知向量 $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k},\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ 和 $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}$，计算：

(1) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$；　(2) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})$.

3．已知 $M_1(1,-1,2),M_2(3,3,1),M_3(3,1,3)$。求与向量 $\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

4．已知$|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=2,|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{7}$，求$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角.

提高题

1. 设$(\mathrm{a}\times b)\cdot c=2$，求$[(\mathrm{a}+\mathrm{b})\times(\mathrm{b}+\mathrm{c})]\cdot(\mathrm{c}+\mathrm{a})$的值.

2. 设$\mathrm{p}=\lambda\mathrm{a}+5b, q=3a-b$，其中$\mathrm{a}, b$是相互垂直的单位向量，求满足下列条件的$\lambda$值：（1）以$\mathrm{p}, q$为边的三角形面积为8；（2）$p \parallel q$；（3）$p \perp q$.

§8-3　平面及其方程

曲面方程的概念

基础题

1．求与坐标原点 o 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 1：2 的点的全体所组成的曲面的方程.

2．将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

平面及其方程

基础题

1. 求过 $(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 三点的平面方程.

2. 求过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\vec{a}=(2,1,1)$ 和 $\vec{b}=(1,-1,0)$ 的平面方程.

3. 求过点 $M(4,-3,-2)$ 且垂直于两平面 $x+2y-z=0$，$2x-3y+4z-5=0$ 的平面方程.

4. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

5. 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

提高题

1. 设平面过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}=8$ 垂直，求此平面方程.

2. 求与已知平面 $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}+5=0$ 平行且与三坐标面所构成的四面体体积为 1 的平面方程.

3. 求半径为 3，且与平面 $x+2y+2z+3=0$ 相切于点 $\left(1,1,-3\right)$ 的球面方程.

§8-4 空间直线及其方程

基础题

1. 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

2. 求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

3. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

4. 求直线 $\dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+1}{-1}$ 和平面 $x+y+z=4$ 的交点.

5. 求直线$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$与直线$\begin{cases}2x+2y-z+23=0\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$的夹角的余弦.

提高题

1. 求点$P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$的距离.

2. 求过点$(-1,0,4)$，且平行于平面$3x-4y+z-10=0$，又与直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线方程.

3. 求过直线$\begin{cases}x+5y+z=0\\5y+2z-4=0\end{cases}$且与平面$x-4y-8z-10=0$成$\dfrac{\pi}{4}$角的平面方程.

§8-5 几种常见的二次曲面

基础题

指出下列方程是否表示柱面

(1) $y = x^2 + 1$ ；

(2) $x + 2y = 3$ ；

(3) $z^2 = x^2 + y^2$ ；

(4) $z = x^2 + y^2$.

§8-6 空间曲线及其方程

基础题

1. 写出曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=x \end{cases}$的参数方程.

2．求曲面$\mathrm{z}=x^2+y^2$与平面$\mathrm{z}=1$的交线在xOy面上的投影方程.

自我测试题

一、填空题（ 每题 6 分，共 18 分）

1. 设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两垂直，且 $\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$ ，$\left|\vec{c}\right|=1$，则 $\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|=$ _______ .

2. 设 $\left|\vec{a}\right|=3$，$\left|\vec{b}\right|=5$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-9$，则 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=$ _____ .

3. 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+z=a$ (其中 $0<a<R$) 的交线在 xoy 平面上投影曲线的方程是__________________.

二、解答题（ 共 82 分）

1. (12 分) 求下列平面方程：

（1）过 z 轴和点 $M_0(-3,1,-2)$.

（2）平行 x 轴且过两点 $P_1(4,0,-2)$ 和 $P_2(5,1,7)$.

2. （10 分）求直线 $\begin{cases}3x+2y-3z=2\\x+y-6z=3\end{cases}$ 的对称式方程和参数方程.

3.（15 分）求以 $M_1(1,3,5), M_2(1,1,1)$ 为直径的两个端点的球面的方程.

4.（15 分）求过点 $P(1,2,1)$ 且与 $l_1:\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和 $l_2:\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 都平行的平面的方程.

5.（15 分）设一直线平行平面 $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+5=0$，且与直线 $\dfrac{\boldsymbol{x}-1}{2}=\dfrac{\boldsymbol{y}}{-1}=\dfrac{\boldsymbol{z}+2}{1}$ 相交，并通过点 $M_0(2,-1,3)$，求该直线方程.

6.（15 分）求直线 $x-1=y=\dfrac{z+1}{-1}$ 在平面 $x-y+2z-1=0$ 上的投影直线的方程.

重点与难点分析

1. 熟练掌握向量的数量积、向量积的运算性质及坐标计算方法.

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z，\quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

2. 掌握平面的方程及其求法（关键是法向量）.

(1) 平面的点法式方程.

过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\vec{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面方程是

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

（2）平面的一般式方程.

关于 x,y,z 的三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

称为平面的一般式方程，$\vec{n}=(A,B,C)$ 是该平面的一个法向量.

例 1 设平面过点 $M_1(1,0,1)$ 及 $M_2(2,1,-1)$，且垂直于平面 $x-y+z-1=0$，求该平面的方程。

解法 1 由题意，$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,1,-2)$，设 $\overrightarrow{\mathrm{n}_1}=(1,-1,1)$，则所求平面的法向量可取为

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(1,3,2)$$

故所求平面方程为

$$(x-1)+3y+2(z-1)=0，$$

即

$$x+3y+2z-3=0.$$

解法 2 设所求平面一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

由题意有

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ 2A+B-C+D=0 \\ A-B+C=0 \end{cases},$$

解得

$$B=3A,C=2A,D=-3A,$$

故所求平面方程为

$$Ax+3Ay+2Az-3A=0,$$

消去 A, 得平面方程为

$$x+3y+2z-3=0.$$

3. 掌握直线的方程及求法（关键是方向向量）.

(1) 直线的一般方程(表示两平面的交线）.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

(2) 直线的点向式方程（非常重要）.

过点 (x_0,y_0,z_0) 且以 (m,n,p) 为方向向量的直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

(3) 直线的参数方程.

过点 (x_0,y_0,z_0) 且以 (m,n,p) 为方向向量的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \quad (t\text{为参数}).$$

注 点向式方程和参数方程可互相转化，需要求出直线上某点的坐标时，用参数方程较方便.

例 2 求经过点 $M(4,3,-2)$ 且与两平面 $2x-3y+z-5=0$ 和 $x+5y-2z+3=0$ 都平行的直线方程.

解 因为所求直线与两已知平面平行，因此所求直线与这两个平面的方向向量垂直，因此所求直线的方向向量可取作

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(2,-3,1)\times(1,5,-2)=(1,5,13),$$

故所求直线方程为 $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+2}{13}$.

例 3 求点 $M(4,3,10)$ 关于直线 $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$ 的对称点.

解：过 M 作直线 l' 与已知直线 l 垂直相交，设垂足为 $N(x,y,z)$，则 N 在 l 上，由 l 的方程，有

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \\ z=3+5t \end{cases},$$

因此 $$\overrightarrow{MN}=(2t-3,4t-1,5t-7),$$

由于直线 l' 与 l 垂直，因此它们的方向向量垂直，故有

$$2(2t-3)+4(4t-1)+5(5t-7)=0,$$

解得 $t=1$，所以点 N 坐标为 $(3,6,8)$，继而对称点坐标为(2,9,18).

例 4 求通过直线 $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$，且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的平面方程.

解：设过所给直线的平面束为

$$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0,$$

整理得 $$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$$

设 $\vec{n}_1=(1+\lambda,5,1-\lambda)$，$\vec{n}_2=(1,-4,-8)$，则 $|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|=\cos\dfrac{\pi}{4}|\vec{n}_1||\vec{n}_2|$，代入得

$$|9\lambda-27|=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 9\times\sqrt{2\lambda^2+27}$$

解得 $\lambda=-\dfrac{3}{4}$，代入得平面方程为

$$x+20y+7z-12=0.$$

又经计算可知平面 $x-z+4=0$ 与平面 $x-4y-8z+12=0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，故其满足要求，因此所求平面为

$$x+20y+7z-12=0 \text{或} x-z+4=0.$$

综合题

1．已知 $\overrightarrow{AB}=(-3,0,4)$，$\overrightarrow{AC}=(5,-2,-14)$，求 $\angle BAC$ 角平分线上的单位向量.

2. 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，且 $\left|\vec{b}\right|=1$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{|\vec{a}+t\vec{b}|-|\vec{a}|}{t}$.

3. 设直线 l：$\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上, 而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $\left(1,-2,5\right)$，求 a,b 的值.

4. 已知两条直线的方程是$l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，$l_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，求过$l_1$且平行于$l_2$的平面方程.

5. 求过点$M(-1,0,4)$, 平行于平面π：$3x-4y+z-10=0$, 且与直线l：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线方程.

6. 求两异面直线l_1：$\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$，$l_2$：$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$的公垂线方程.

7. 已知入射光线为$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$，求该光线经平面$x+2y+5z+17=0$反射后的反射光线的方程.

参考答案

§8-1

基础题

1．A在x轴上，B在y轴上，C在z轴上，D在xOy面上，E在yOz面上.

2．(1) $(a,b,-c),(-a,b,c),(a,-b,c)$; (2) $(a,-b,-c),(-a,b,-c),(-a,-b,c)$;
(3) $(-a,-b,-c)$。3. 略。 4. $(-3,4,-4)$或$(5,0,-4)$或$(1,-2,8)$；

5. $5\vec{a}-11\vec{b}+7\vec{c}$；6. 2； 7. 模：2；方向余弦：$-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}$；方向角：$\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{3}$；

8. $\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\right)$或$\left(\frac{-6}{11},\frac{-7}{11},\frac{6}{11}\right)$；

提高题

1. $(18,17,-17)$； 2. $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}$；

§8-2

基础题

1.（1）3，$5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$；（2）$-18,\ 10i+2j+14\vec{k}$；（3）$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{3}{2\sqrt{21}}$；

2.（1）$-8\vec{j}-24\vec{k}$；（2）$-\vec{j}-\vec{k}$；3. $\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\left(3\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}\right)$ 4. $\frac{2\pi}{3}$；

提高题

1. 4； 2. （1）$\lambda=1$或$\lambda=-31$，（2）$\lambda=-15$，（3）$\lambda=\frac{5}{3}$；

§8-3

曲面方程的概念

基础题

1. $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{116}{9}$；

2. 绕x轴：$4x^2-9(y^2+z^2)=36$；绕y轴：$4(x^2+z^2)-9y^2=36$；

平面及其方程

基础题

1. $x-3y-2z=0$；2. $x+y-3z-4=0$；3. $5x-6y-7z-52=0$；

4. $\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}$； 5. 1；

提高题

1. $2x+2y-3z=0$； 2. $2x+y+2z=\pm2\sqrt[3]{3}$；

3. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$ 或 $x^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$；

§8-4

基础题

1. $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$； 2. $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$；

3. $16x-14y-11z-65=0$； 4. $(5,2,-3)$； 5. 0；

提高题

1. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$； 2. $\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$ 或 $\begin{cases} 3x-4y+z-1=0 \\ 10x-4y-3z+22=0 \end{cases}$；

3. $x+20y+7z-12=0$ 或 $x-z+4=0$；

§8-5

基础题

（1）是，（2）是，（3）不是，（4）不是；

§8-6

基础题 1. $\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta, \\ y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta, \\ z=3\sin\theta. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$；

自我测试题

一、 1. 2； 2. 12； 3. $\begin{cases} 2x^2+2ax+y^2=R^2-a^2 \\ z=0 \end{cases}$；

二、1.（1）$x+3y=0$； （2）$-9y+z+2=0$； 2. $\dfrac{x+4}{-9}=\dfrac{y-7}{15}=\dfrac{z}{1}$；

$\begin{cases} x=-4-9t \\ y=7+15t \\ z=t \end{cases}$

3. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$． 4. $x-y+z=0$．

5. $\dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-35}$． 6. $\begin{cases} x-3y-2z-3=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$．

综合题

1.（$\dfrac{-2}{\sqrt{6}},\dfrac{-1}{\sqrt{6}},\dfrac{-1}{\sqrt{6}}$）； 2. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$； 3. $a=-5,b=-2$； 4. $x-3y+z+2=0$；

5. $\dfrac{x+1}{12}=\dfrac{4y}{37}=\dfrac{z-4}{1}$；　6. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{-6}$；7. $\dfrac{x+7}{-3}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z}{4}$.

第九章　多元函数微分学

§9-1　多元函数的概念

基础题

1．求下列函数的定义域:

(1) $z=\sqrt{\ln\dfrac{4}{x^2+y^2}}+\arcsin\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(2) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

2. 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$　；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

提高题

1. 证明：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

2. 研究函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处的连续性.

§9-2 偏导数

基础题

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=\arctan\sqrt{x^{y}}$ ；　　　　**(2)** $z=\sin(xy)+\cos^{2}(xy)$；

(3) $u=x^{\frac{y}{z}}$ ；　　　　**(4)** $u=(3x+2y)^{3x+2y}$.

2．设 $f(x,y)=(x^2-1)\ln[\cos^2(y^2-x)]+e^{x^2+y}\sin(xy^2)$，求 $f_y(1,2)$.

3．设 $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$ ，求 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$.

提高题

1. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$ 用偏导数定义计算 $f_x(0,0),f_y(0,0)$.

2. 设 $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 设 $u=\dfrac{1}{r},r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$，证明：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

§9-3 全微分

基础题

1．求下列函数的全微分：

(1) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **；**

(2) $z=\arctan\dfrac{y^2}{x}$ **；**

(3) $u=x^{yz}$ **；**

(4) $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$ **.**

2.求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

§9-4 多元复合函数的求导法则

基础题

1．设$z=\arcsin(x-y)$，而$x=3t, y=4t^3$, 求$\dfrac{dz}{dt}$.

2．设$u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而$y=a\sin x, z=\cos x$, 求$\dfrac{du}{dx}$.

3．设$z=u^2\ln v$, 而$u=\dfrac{x}{y}, v=3x-2y$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4．设$f(x,y)=\int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}dt \quad (x>0, y>0)$，求$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

提高题

1．设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \dfrac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.

2．设 $z = f(x, \dfrac{x}{y})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3．设 $z = f(u, x, y), u = xe^y$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

§9-5　隐函数的求导公式

基础题

1．设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial x}{\partial y}$.

3. 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数，证明由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$.

4．设 $z^3-3xyz=a^3$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5．求方程 $2xz-3xyz+\ln(xyz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的全微分.

提高题

1．求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数：

（1）设 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+2y^2+3z^2=20, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$.

（2）设 $\begin{cases} u^2-v+x=0, \\ u+v^2-y=0, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

2．设 $y=f(x,t)$ ，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数，试证明：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}$ **.**

§9-6 多元函数微分学的几何应用

基础题

1. 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\dfrac{t}{2}$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$ 处的切线及法平面方程.

2. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面与法线方程.

提高题

1．在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求出一点，使在该点的切线平行于平面 $3x + 4y - z = 4$.

2．设曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 Oy 轴旋转一周得旋转曲面。求其在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的切平面方程和法线方程.

§9-7 方向导数与梯度

基础题

1．设函数 $z = x^2 - xy + y^2$，（1）求在点 $P(1,1)$ 处沿方向 $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数；（2）问在哪个方向上的方向导数有最大值？（3）在哪个方向上的方向导数有最小值？（4）求 $grad\ z\big|_p$.

2．求函数 $u = x + y + z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 处沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

3．求函数 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $A(1,2,2)$ 与 $B(-3,1,0)$ 两梯度之间的夹角.

4．问函数 $u=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？，并求此方向导数的最大值.

§9-8 多元函数的极值及其应用

基础题

1. 求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

2. 求函数 $f(x,y)=xy(a-x-y)$ 的极值.

3. 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$ 、x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

4. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

提高题

1. 求函数 $u = xyz$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 及 $x + y + z = 0$ 下的极值.

2. 将正数 12 分成三个正数 x, y, z 之和 使得 $u = x^3 y^2 z$ 为最大.

3. 在第一卦限内作球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的切平面, 使得切平面与三坐标面所围的四面体的体积最小, 求切点的坐标.

自我测试题

一、选择题(每题 3 分，共 9 分)

1. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 所确定，则 $x^2 z_x + y^2 z_y$ 等于(　　　)

A. 0　　　　B. $\frac{1}{\ln|z|}(x^2\ln|x|-y^2\ln|y|)$

C. z^2　　　　D. $2z^2$

2. 函数 $u=xyz-2yz-3$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿 $\vec{l}=2i+2j+k$ 的方向导数等于(　　　)

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$　　B. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

3. 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某个二元函数的全微分，则 a,b 的值分别为(　　　)

A. -2 和 2　　B. 2 和-2　　C. -3 和 3　　D. 3 和-3

二、填空题（每题 3 分，共 9 分 ）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{2x^2y^2}=$______________________.

2. 设函数 $z=z(x,y)$由$xz-y+\arctan y=0$ 所确定，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________________.

3. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$___________________.

三、解答题(共 82 分)

1．(8 分)设 $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}-3xyz^2$，　求 u_x,u_y,u_z .

2．(8 分) 在曲面 $z = xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$ ，并写出法线方程.

3. (8 分) 求函数 $u = z^4 - 3xz + x^2 + y^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处的全微分.

4. (8 分) 已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(xy, z) = x$ 确定，其中 $F(u, v)$ 具有连续偏导数，求求$z_x + z_y$.

5. (14 分) 求平面 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xoy 平面距离最短的点.

6. (12 分) 设 $x=e^u\cos v, y=e^u\sin v, z=uv$. 试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7. (12 分) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

（1）试计算 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$；（2）讨论函数 $f(x,y)$ 在 $\left(0,0\right)$ 处的连续性.

8. (12 分) 设函数 $z=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，试求函数 $z=f(x,yx)$ 对 x 的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

重点与难点分析

1. 掌握多元复合函数、隐函数的求导方法.

（1）多元复合函数求导法则

设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 复合而得复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$，

若 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，且 $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ 对 x,y 的偏导数存在，

则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 对 x,y 的偏导数也存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\quad,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

上述求导法则可以推广至中间变量多于两个的情形.

例 1. 求函数 $z=e^{x+2y}\sin(xy^2)$ 的偏导数.

分析：求偏导和一元函数求导数类似，只是在求某个变量的偏导时，将其它变量视为常数，按照一元函数求导法则进行即可。

解：对 x 求偏导，将 y 看作常数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y}\sin(xy^2)+e^{x+2y}\cos(xy^2)y^2=e^{x+2y}[\sin(xy^2)+y^2\cos(xy^2)]$$

对 y 求偏导，将 x 看作常数：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x+2y}2\sin(xy^2)+e^{x+2y}\cos(xy^2)2xy=2e^{x+2y}[\sin(xy^2)+xy\cos(xy^2)]$$

例 2. 已知函数 f 可微，求函数 $z=f(x^2+\dfrac{x}{y})$ 的偏导数.

分析：求偏导运算，要弄清函数的复合关系，对某一变量求偏导，须经过一切有关的中间变量最终归结到相应的自变量。

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{\partial(x^2+\frac{x}{y})}{\partial x}=f'\cdot(2x+\frac{1}{y})\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\frac{\partial(x^2+\frac{x}{y})}{\partial y}=f'\cdot(-\frac{x}{y^2})$$

例 3. 设 $z=f(x^2y,\frac{y}{x})$，f 可微，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

分析：多元复合函数求高阶偏导数问题，特别是含抽象函数的时候，特别注意 $f''_{11},f''_{12},f''_{22}$ 等都和 f 具有相同的结构。

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'2xy+f_2'(-\frac{y}{x^2})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(2xyf_1'-\frac{y}{x^2}f_2')$$

$$=2yf_1'+2xy[f''_{11}2xy+f''_{12}(-\frac{y}{x^2})]+\frac{2y}{x^3}f_2'-\frac{y}{x^2}[f''_{21}2xy+f''_{22}(-\frac{y}{x^2})]$$

$$=2yf_1'+4x^2y^2f''_{11}-\frac{2y^2}{x}f''_{12}+\frac{2y}{x^3}f_2'-\frac{2y^2}{x}f''_{21}+\frac{y^2}{x^4}f''_{22}$$

（1） 隐函数求导法则

① $F(x,y)=0$ 情形：设方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个领域内满足一定条件，则其可以唯一确定一个单值连续且可导的一元函数 $y=y(x)$，且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

② $F(x,y,z)=0$ 情形：方程 $F(x,y,z)=0$ 在点点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一个邻域内满足一定条件，则能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的二元函数 $z=f(x,y)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

例 4.函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

分析：由方程确定的隐函数求偏导计算，可以用公式法和直接法两种方法计算。公式法求 f_x,f_y,f_z 时，x,y,z 都是自变量；而用直接法方程两边同时对 x 或者 y 求偏导时，z 看作

x, y 的函数。

解法一　公式法

令 $f(x,y,z)=F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x})$

$$f_x=F_1'+F_2'(-\frac{z}{x^2})\quad ,\quad f_y=F_1'(-\frac{z}{y^2})+F_2'\quad ,\quad f_z=F_1'(\frac{1}{y})+F_2'\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z}=-\frac{F_1'+F_2'(-\frac{z}{x^2})}{F_1'\frac{1}{y}+F_2'\frac{1}{x}}\quad ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}=-\frac{F_1'(-\frac{z}{y^2})+F_2'}{F_1'\frac{1}{y}+F_2'\frac{1}{x}}$$

解法二　直接法

方程的两边同时对 x 求偏导：

$$F_1'\cdot(1+\frac{z_x}{y})+F_2'\cdot(\frac{xz_x-z}{x^2})=0$$

解得　$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'+F_2'(-\frac{z}{x^2})}{F_1'\frac{1}{y}+F_2'\frac{1}{x}}$$

同理方程两边同时对 y 求偏导，解得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1'(-\frac{z}{y^2})+F_2'}{F_1'\frac{1}{y}+F_2'\frac{1}{x}}$$

③方程组的情形 方程组两边分别关于 x 或 y 求导，解方程组求得

2. 微分学在几何上的应用.

（1）　空间曲线的切线和法平面（关键是求切向量）.

① 空间曲线 Γ 的参数方程：$x=\varphi(t).y=\psi(t), z=\omega(t)(t\text{为参数})$

三个函数都可导，且导数不同时为零，则在曲线 Γ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量

为：$\vec{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$

则过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线方程为：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$,

法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$.

例 5. 求曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \\ z=\sin\dfrac{t}{2} \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线和法平面方程.

分析：关键是求切向量 $\vec{T}$ 和点

解：$\vec{T}=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\{1-\cos t,\sin t,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}\}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\{1,1,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\}$

$t=\dfrac{\pi}{2}$ 时，对应的点坐标为 $(\dfrac{\pi}{2}-1,1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

故所求的切线方程为：$\dfrac{x-(\frac{\pi}{2}-1)}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

所求法平面方程为：$(x-\dfrac{\pi}{2}+1)+(y-1)+\dfrac{\sqrt{2}}{4}(z-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=0$.

② 空间曲线 Γ 由一般方程表示：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，利用方程组所确定隐函数组的求解，求得切向量。

例 6. 求曲线 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=47 \\ x^2+2y^2=z \end{cases}$ 在点 $M(-2,1,6)$ 处的切线和法平面方程。

分析：可以用公式求出切向量，也可以对方程组两边对 x 求导，确定切向量。

解：对方程组 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=47 \\ x^2+2y^2=z \end{cases}$ 两边对 x 求导，有

$$\begin{cases} 4x+6y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 2x+4y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx} \end{cases}$$

将$M(-2,1,6)$代入方程组，解得

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{28}{27} \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{4}{27} \end{cases}$$ 得切向量$\vec{T}=(1,\dfrac{28}{27},\dfrac{4}{27})$，

故所求的切线方程为：$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{\frac{28}{27}}=\dfrac{z-6}{\frac{4}{27}}$.

所求法平面方程为：$(x+2)+\dfrac{28}{27}(y-1)+\dfrac{4}{27}(z-6)=0$.

（2） 曲面的切平面和法线（关键是求法向量）

① 曲面Σ的方程为：$F(x,y,z)=0$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面Σ上一点，函数$F(x,y,z)$的一阶偏导数F_x,F_y,F_z在M_0处连续且不同时为零，则在M_0点的法向量为：

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

则法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

切平面方程为：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

例 7. 求球面$x^2+y^2+z^2=9$在点$M(2,2,1)$的切平面和法线.

分析：关键是求法向量$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

解：$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}=\{2x,2y,2z\}\big|_M=2\{2,2,1\}$

故所求切平面方程为：$2(x-2)+2(y-2)+(z-1)=0$.

所求的法线方程为：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

② 曲面Σ的方程由显函数$z=f(x,y)$表示，$M_0(x_0,y_0,z_0)$的法向量：

$$\vec{n}=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\}$$ ，

则法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.

切平面方程为：$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$.

3. 方向导数和梯度.

方向导数：函数$z=f(x,y)$在点$P(x\ ,y\ )$处沿方向l的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta$ 为l的方向余弦。

梯度：向量$(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y})$为函数$z=f(x,y)$在点$P(x\ ,y\ )$的梯度，记作$gradf$ 。函数在一点处的梯度方向是在该点处函数值增大最快的方向，即梯度方向垂直于等高线.

（三元函数类似得出）

4. 多元函数的极值及其求法.

（1）极值存在的充分条件：函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内连续，且具有一阶和二阶连续的偏导数，$f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，记$f_{xx}(x_0,y_0)=A$

$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则

① 若$AC-B^2>0$时有极值，且$A>0$有极小值，$A<0$ 有极大值；

② 若$AC-B^2<0$时无极值；

③ 若$AC-B^2=0$时不能确定，需另作讨论.

（2）二元函数最值.

①将函数$z=f(x,y)$在D内的所有驻点以及偏导数不存在点处的函数值，及其在D的边界上的值相比较，最大者就是最大值，最小者就是最小值。在实际问题中，函数在D内只有一个驻点，那么可以肯定该驻点就是最值点.

②条件极值——拉格朗日乘数法

求二元函数 $z = f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的条件极值，步骤如下

a． 构造拉格朗日函数 $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$，其中 λ 为一常数；

b． 求拉格朗日函数的无条件极值

$$\begin{cases} f_x(x,y) + \lambda\varphi_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) + \lambda\varphi_y(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

求解此方程组得驻点 (x_0, y_0) 及乘子 λ_0，则 (x_0, y_0) 即为条件极值的可能极值点.

例 8. 某公司通过电视和报纸两种形式作广告，已知销售收入 R（万元）与电视广告费 x（万元），报纸广告费 y（万元）有如下关系：

$$R(x,y) = 15 + 14x + 32y - 8xy - 2x^2 - 10y^2$$

（1） 在广告费用不限的情况下，求最佳广告策略.

（2） 如果提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的广告策略.

解：（1）利润函数 $L(x,y) = R - (x+y) = 15 + 13x + 31y - 8xy - 2x^2 - 10y^2$

分别对 x, y 求偏导，且令偏导数为 0

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 13 - 8y - 4x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 31 - 8x - 20y = 0 \end{cases}$$ 解得 $x = 1.5, y = 1$

$(1.5,1)$ 为 $L(x,y)$ 唯一的驻点

$L(1.5,1) = 41$（万元）

当电视广告费与报纸广告费分别为 1.5 万元和 1 万元时，最大利润为 41 万元，即为最佳广告策略.

（2）广告费用为 1.5 万元的条件下，最佳广告策略。即在条件 $x + y = 1.5$ 下，$L(x,y)$ 的最大值.

令 $$\begin{aligned} F(x,y) &= L(x,y) + \lambda\varphi(x,y) \\ &= 15 + 13x + 31y - 8xy - 2x^2 - 10y^2 + \lambda(x + y - 1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} F_x' = 13 - 8y - 4x + \lambda = 0 \\ F_y' = 31 - 8x - 20y + \lambda = 0 \\ \quad x + y - 1.5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1.5 \end{cases}$$

（0.1.5）是唯一的驻点，由题意知 $L(x,y)$ 一定存在最大值，故 $L(0,1.5)=39$（万元）为最大值，即最佳广告策.

综合题

1. 设 $u = f(x,y,z), \varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$，其中 f, φ 都具有一阶连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$，求 $\dfrac{du}{dx}$.

2. 设 $z = \dfrac{1}{x} f(xy) + y\varphi(x+y), f, \varphi$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3. 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z) = 0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{dz}{dx}$.

4. 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+g(\dfrac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为____________.

6. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的四条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的一阶偏导数连续，

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的一阶偏导数存在.

则有：（　　）

A. ②⇒③⇒①　　　　B. ③⇒②⇒①

C. ③⇒④⇒①　　　　D. ③⇒①⇒④

7. 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则（　　）

A. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

C. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

D. 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

8. 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有（　　）

A. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　B. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　C. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　D. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

9. 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程（　　）

A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

D.可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

参考答案

§9-1

基础题

1.(1) $\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$ (2) $\{(x,y)|0<x^2+y^2<1,y^2\le 4x\}$ 2.(1) $-\dfrac{1}{4}$, (2) 0

提高题

1.略 2.连续

§9－2

1.(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+x^y}\cdot\dfrac{y\sqrt{x^y}}{2x},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\ln x}{2(1+x^y)}\cdot\sqrt{x^y}$;

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y[\cos(xy)-\sin(2xy)],\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$;

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x,\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$;

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3(3x+2y)^{3x+2y}[1+\ln(3x+2y)],\dfrac{\partial z}{\partial y}=2(3x+2y)^{3x+2y}[1+\ln(3x+2y)]$.

2. $f_y(1,2)=e^3(\sin 4+4\cos 4)$,

3. $f_x'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $f_y'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2y^3}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

提高题

1. 0，0 2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$**.** 3. 略**.**

§9－3

1. (1) $dz=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(ydx-xdy)$;（**2**） $dz=\dfrac{-y^2dx+2xydy}{x^2+y^4}$**.**

（**3**） $du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln xdy+yx^{yz}\ln xdz$ 。

（4）$du = e^{x(x^2+y^2+z^2)}[(3x^2+y^2+z^2)dx + 2xydy + 2xzdz]$.

2.全增量为-0.119，全微分为-0.125.

§9－4

基础题

1. $\dfrac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.　**2.** $e^{ax}\sin x$

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^2}\ln(3x-2y) + \dfrac{3x^2}{(3x-2y)y^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y) - \dfrac{2x^2}{(3x-2y)y^2}$.

4. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}e^{-xy}\sqrt{\dfrac{y}{x}}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}e^{-xy}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

提高题

1. 略

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{11} + \dfrac{2}{y}f''_{12} + \dfrac{1}{y^2}f''_{22},$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}f''_{12} - \dfrac{1}{y^2}f'_2 - \dfrac{x}{y^3}f''_{22}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2x}{y^3}f'_2 + \dfrac{x^2}{y^4}f''_{22}.$

3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = xe^{2y}f''_{uu} + e^y f''_{uy} + xe^y f''_{xu} + f''_{xy} + e^y f'_u.$

§9－5

基础题

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$。**2.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}, \dfrac{\partial x}{\partial y} = \dfrac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-yz}$ .3.略.

4. $\dfrac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$.　**5.** $dz = -\dfrac{z}{x}dx + \dfrac{2xyz-1}{y(2xz-3xyz+1)}dy$.

提高题

1. (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}, \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x}{3z+1}$. (2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-2v}{1+4uv}, \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{2u}{1+4uv}$.　2. 略.

§9－6

基础题

1.切线方程: $\dfrac{x-(\frac{\pi}{2}-1)}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, 法平面方程: $x+y+\sqrt{2}z=\dfrac{\pi}{2}+4$.

2.切平面方程： $x+2y-4=0$, 法线方程 : $\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}\\ z=0\end{cases}$

提高题

1. $M_1(3,9,27), M_2(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27})$

2. $\vec{n}=(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})$，切平面方程：$2\sqrt{3}y+3\sqrt{2}z-12=0$，

法线方程：$\begin{cases}x=0\\ \dfrac{y-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\end{cases}$.

§9-7

基础题

1. （1） $\cos\alpha+\cos\beta$;(1) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;(2) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;(3) $(1,1)$.

2. $x_0+y_0+z_0$.　　　**3.** $\arccos\left(-\dfrac{8}{9}\right)$.

4. $gradu=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ 是方向导数取最大值的方向，方向导数最大值为 $|gradu|=\sqrt{21}$.

§9 – 8

基础题

1.极小值 $f(\dfrac{1}{2},-1)=-\dfrac{e}{2}$.

2. $f\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a^3}{27}$，当 $a>0$ 时为极大值，当 $a<0$ 时为极小值.

3.最大值 $f(2,1)=4$，最小值 $f(4,2)=-64$ 。　4.当两边都是 $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$ 时，周长最大.

提高题

1.极大值 $\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$，极小值 $-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.　2. $u_{\max}(6,4,2)=6912$.　3. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

自我测试题

一、1. A　2. D　3. B　　二、1. 1　2. $-\dfrac{y^2}{x^2(1+y^2)}$　3. $\dfrac{1}{2}$

三、1. $u_x=\dfrac{y^2-z^2}{(x^2+y^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}-3yz^2$　$u_y=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}-3xz^2$

$u_z=\dfrac{xz}{(x^2+y^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}-6xyz$

2. $(-3,-1,3),\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

3. $du\big|_{(1,1,1)}=-dx+2dy+dz$.　　4. $z_x+z_y=\dfrac{1-yF_1-xF_1}{F_2}$.

5. $(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{35}{12})$　6. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(v\cos v-u\sin v)e^{-u}$　，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=(u\cos v+v\sin v)e^{-u}$

7.略　8. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+2yf''_{12}+y^2f''_{22}$.

综合题

1. $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos x-\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{1}{\varphi_3}(2x\varphi_1+e^{\sin x}\cos x\varphi_2)$.

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$.

3. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z},(F'_y+xf'F'_z\neq 0)$.

4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+xyf''_{11}+\dfrac{1}{y^2}f'_2-\dfrac{x}{y^3}f''_{22}-\dfrac{1}{y^2}g'-\dfrac{x}{y^3}g''$.

5. $\dfrac{1}{2}$.　6. A.　7. A.　8. B.　9. D.

第十章　重积分

§10-1 二重积分的概念与性质

基础题

1．利用二重积分的几何意义求下列二重积分：

(1) $I_1 = \iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中积分区域 D 是圆形闭区域：$x^2+y^2 \le 1$.

(2) $I_2 = \iint\limits_D (1-x-y)\,d\sigma$，其中积分区域 $D: x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1$.

2．根据二重积分的性质，完成下列两题:

(1) 比较 $\iint\limits_D (x+y)^2\,d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\,d\sigma$ 的大小，其中积分区域 D：$(x-2)^2+(y-1)^2 \le 1$；

(2) 估计 $I = \iint\limits_D (3x^2+4y^2+5)\,d\sigma$ 的值，其中积分区域 D 是椭圆形闭区域：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3} \le 1$.

提高题

设 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^2d\sigma$，其中 D_1 是矩形闭区域：$-1\le x\le 1$，$-2\le y\le 2$；又 $I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^2d\sigma$，其中 D_2 是矩形闭区域：$0\le x\le 1$，$0\le y\le 2$。试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

§10-2 二重积分的计算

基础题

1．计算下列积分:

(1) $\iint\limits_{D} x\sqrt{y}d\sigma$，其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$， $y=x^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_{D} e^{x+y}d\sigma$，其中 D 是由 $|x|+|y|\le 1$ 所确定的闭区域;

(3) $\iint\limits_{D} \dfrac{x^2}{y^2}d\sigma$，其中 D 是直线 $y=2, y=x$ 和双曲线 $xy=1$ 所围之区域;

(4) $\iint\limits_{D} x^2 yd\sigma$，其中 D 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 及 $y=0, y=1$ 所围成的平面区域.

2．变换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$ ；

(2) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$.

3．化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1) $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy$ ；　　　　**(2)** $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

4．把积分 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$ 化为极坐标形式，并计算积分值.

5．利用极坐标计算下列积分:

（1）$\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy$，其中$D$是由圆周$x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$及直线$y=0$，$y=x$所围成的在第一象限内的闭区域;

（2）$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)dxdy$，其中$D$：　$x^2+y^2\le\pi$.

提高题

1. 设$f(x,y)$为连续函数，且$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)dudv$。其中$D$是由$y=0,y=x^2$，$x=1$所围成的区域，求$f(x,y)$.

2．变换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx$ ；　　　　(2) $\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy$　$(a>0)$　.

3．计算积分：$\iint\limits_{D} |\cos(x+y)|\,dxdy$，其中$D$是由直线$y=x$， $y=0$及$x=\dfrac{\pi}{2}$所围成的区域.

4．选用适当的坐标系计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_{D}\left(\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} d\sigma$，其中$D$是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

(2) $\iint\limits_{D}(x+y)^2\,d\sigma$，其中$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2ay, x^2+y^2\ge ay\}$ $(a>0)$.

5．计算以xoy面上的圆周$x^2+y^2=ax$围成的闭区域为底，以曲面$z=x^2+y^2$为顶的曲顶柱体的体积.

§10-3　三重积分

基础题

1．化三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，其中积分区域 Ω 由 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域.

2．设有一物体，占有空间闭区域 Ω：$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，$0\le z\le 1$，在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$，计算该物体的质量.

3．计算 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$ 所围成的四面体.

4. 计算$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中$\Omega$是由锥面$z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=h(R>0,h>0)$所围成的闭区域.

5. 计算$\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)dv$，其中$\Omega$是由$z=0, y=0, y=\sqrt{x}, x+z=\dfrac{\pi}{2}$所围成的闭区域.

6.利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中$\Omega$是由曲面$x^2+y^2=2z$及平面$z=2$所围成的闭区域;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv$，其中$\Omega$是由曲面$x^2+y^2-z^2=0$与平面$z=1$所围成的闭区域.

7．利用球面坐标计算下列三重积分:

（1）$\iiint\limits_{\Omega} z dv$，其中闭区域$\Omega$由不等式$x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$，$x^2+y^2\le z^2$所确定.

（2）$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$，其中闭区域$\Omega$：$x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$.

8．计算下列各题:

(1) 计算三重积分：$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中$\Omega$为平面曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周形成的曲面与平面$z=2$及$z=8$所围成的区域;

(2) 计算三重积分：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中$\Omega$是由曲面$4z^2=25(x^2+y^2)$及平面$z=5$所围成的闭区域;

（3）$\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\dfrac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

（4）$I=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$，其中$\Omega$为曲面$z=\sqrt{1-x^2-y^2},z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面$z=2$所围成的区域.

提高题:

1. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dv$，其中$\Omega:x^2+y^2+z^2\le a^2$.

2. 设 $F(t)=\iiint z\ln(1+x^2+y^2+z^2)dv$ ，其中Ω由：$x^2+y^2+z^2\le t^2$与$\sqrt{y^2+x^2}\le z$所确定的，求：$\dfrac{dF(t)}{dt}$.

§10-4　重积分的应用

基础题

1．求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$含在圆柱面$x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

2．求底圆半径相等的两个直交圆柱面$x^2+y^2=R^2$及$x^2+z^2=R^2$所围立体的表面积.

3．求曲面 $x^2+y^2=az(a>0)$ 被曲面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 所截下部分的面积.

4. 求曲面 $x^2+y^2=2ax(a>0), z=\alpha x, z=\beta x(\alpha>0, \beta>0$ 为常数）所围立体体积.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 是由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成，它在点 (x,y) 处的面密度 $\rho(x,y)=x^2y$，求该薄片的重心.

6. 设有一半径为 R 的球体，M 是此球面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 M 的距离的平方成正比(比例系数 $k>0$)，求球体重心位置.

7. 已知均匀薄片(面密度 ρ 为常数)所占的闭区域 D 由抛物线 $y^2=\frac{9}{2}x$ 及直线 $x=2$ 所围成。试求该薄片转动惯量 I_x 和 I_y.

8. 求底半径为R，高为H的均匀正圆柱体对于它的一条母线的转动惯量.

9．求均匀柱体：$x^2+y^2\le R^2$，$0\le z\le h$对于位于点$M_0(0,0,a)(R>h)$处的单位质量的质点的引力.（其中柱体的密度记为ρ，万有引力系数G）

提高题

一均匀物体(体密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$，$|x|=a$，$|y|=a$ 所围成.求：

(1)物体的体积；(2)物体的重心；(3)物体关于 z 轴的转动惯量.

自我测试题

一、选择题(每题 5 分，共 10 分)

1.若区域 D 为 $0\le y\le x^2, |x|\le 2$,则 $\iint\limits_D xy^2dxdy=$（　　）

A. 0　　B. $\frac{32}{3}$　　C. $\frac{64}{3}$　　D. 2

2. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则二次积分 $\int_0^1 dy\int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$ 可交换积分次序为（　　）

A. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dx \quad +\int_1^{\sqrt{3}} dx\int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dx$

B. $\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dx \quad +\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx\int_0^1 f(x,y)dx \quad +\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx\int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dx$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{\sqrt{3}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

二、填空题(每题 5 分 ,共 10 分)

1. D 是以 $y=x, y=x+a, y=a$ 和 $y=3a(a>0)$ 为边的平行四边形区域，则 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=$____________.

2. D 由 $x^2+y^2=2x$ 与 x 轴围成上半圆区域, 则 $\iint\limits_D ydxdy=$________.

三、解答题(共 80 分)

1.（14 分）变换积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^2 r^2\cos\theta f(r^2\sin 2\theta)dr$ 为直角坐标系下先对 y 积分后对 x 积分.

2.（15 分）设 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2\le z$ 以及 $x^2+y^2\le z^2$ 所确定的有界闭区域。试计算 $I=\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$.

3.（12 分）用极坐标计算二重积分 $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy$.

其中$D: a^2 \le x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, a > 0$（$x=0$处广义）.

4. （12 分）设 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$ 所围的有界闭区域，试计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$.

5. （12 分）计算$\iint\limits_{D}\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}d\sigma$,其中区域$D$为$x^2+y^2 \le 1, x \ge 0$.

6. （15 分）已知Ω为区域$4x^2+y^2 \le z \le a(a>0)$，试将$\iiint\limits_{\Omega}f(z)dv$化成一元函数的积分式，并当$f(z)=e^{z^2}$时，求出该积分值.

重点与难点分析

一. 对称区域上奇偶函数的积分性质(以二重积分为例)

定理 1　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0\quad, & f(x,y)\text{对}y\text{为奇函数}\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)\text{对}y\text{为偶函数}\end{cases}$$

其中 D_1 为 D 在 x 轴上半平面部分.

定理 2　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0\quad, & f(x,y)\text{对}x\text{为奇函数}\\ 2\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)\text{对}x\text{为偶函数}\end{cases}$$

其中 D_2 为 D 在 y 轴的右半平面部分.

定理 3　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于原点对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0\quad, & f(-x,-y)=-f(x,y),(x,y)\in D\\ 2\iint_{D_3} f(x,y)d\sigma, & f(-x,-y)=f(x,y),(x,y)\in D\end{cases}$$

其中 D_3 为 D 的上半平面部分或右半平面部分.

定理 4　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma\,.$$

例 1、计算 $\iint_D (x+y^2)dxdy$，其中 D 是由 $y=x^2, y=4x^2$ 及 $y=1$ 围成的区域.

解:积分域关于 y 轴对称,由奇偶性可得 $\iint_D xdxdy=0$,原式 $=2\int_0^1 dy\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} y^2dx=\dfrac{2}{7}$.

例 2、计算$\iint\limits_D x^2 dxdy$，其中$D: x^2+y^2\le 4$.

解: $\iint\limits_D x^2 dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2\cdot\rho d\rho=4\pi$.

例 3、设$f(u)$连续，区域D由$y=x^3, x=-1, y=1$围成，计算 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]d\sigma$.

解:作辅助线$y=-x^3$分割区域D为两个区域D_1, D_2, D_1关于x轴对称, D_2关于y轴对称,

故可得$\iint\limits_D xyf(x^2+y^2)d\sigma=0$.所以原式 $=\iint\limits_D xd\sigma=\iint\limits_{D_1} xd\sigma=\int_{-1}^0 dx\int_{x^3}^{-x^3} xdy=-\frac{2}{5}$.

二、选择合适的坐标系和合适的积分顺序

1. 二重积分.

情形 1 : 若 被积函数$f(x,y)$中含x^2+y^2或者 积分区域D的边界曲线包含圆形或扇形,

通常选择极坐标变换：令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$;

情形 2: 一般直角坐标情形我们需要选择合适的积分顺序：例如,能够计算出来(参见例 1), 计算简单、积分式子较少为原则.

例 4 计算$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$，其中$D$由$y=x, y=1$和$y$轴所围区域.

解　如果$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$

那么先对e^{-y^2}求原函数就不行，故考虑另一种顺序的累次积分

$$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}[e^{-y^2}]\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e}).$$

2. 三重积分.

情形 1:　若被积函数$f(x,y,z)$或Ω的边界曲面Σ的方程中含x^2+y^2则选择柱坐标;

若被积函数$f(x,y,z)$或Ω的边界曲面Σ的方程中含$x^2+y^2+z^2$则选择球坐标.

情形 2 : 使用直角坐标请注意积分顺序:

若Ω表示为$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D, \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\}$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint_{D} dxdy\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz;$$

若Ω表示为$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D_z, c\le z\le d\}$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_c^d dz\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy.$$

例 5 求$\iiint_V \left(x^2+y^2+z\right)dv$，其中$V$是由$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周所得曲面与$z=4$围成的几何体.

解:$\iiint_V \left(x^2+y^2+z\right)dv = \int_0^4 dz\iint_{D_z}\left(x^2+y^2+z\right)d\sigma$

$$=\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\left(\rho^2+z\right)\rho d\rho$$

$$=2\pi\int_0^4\left[\frac{\rho^4}{4}+\frac{\rho^2}{2}z\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2z}}dz = 2\pi\int_0^4 2z^2dz=\frac{64\pi}{3}.$$

三、积分的综合问题举例

例 6 设$f(u)$可微，且$f(0)=0$，求$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$，其中

$\Omega: x^2+y^2+z^2\le t^2$.

解:其中$\iiint_{\Omega} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r)\cdot r^2\sin\varphi dr=4\pi\int_0^t r^2 f(r)dr$,

则利用洛比达法则可得,原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4\pi\int_0^t r^2 f(r)dr}{\pi t^4}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2 f(t)}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}=f'(0)$.

例 7 高度为$h(t)$（其中t为时间）的雪堆在融化过程中其侧面满足$z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$，已知体积减少的速率与侧面面积成比，比例系数为$0.9$，问高度为$130$厘米的雪堆全部融化需要多少时间？

解:记V为雪堆体积,S为雪堆的侧面积,则

$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}\left[h^2(t)-h(t)z\right]}dxdy=\int_0^{h(t)}\frac{\pi}{2}\left[h^2(t)-h(t)z\right]dz=\frac{\pi}{4}h^3(t),$$

$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\frac{16\left(x^2+y^2\right)}{h^2(t)}}dxdy$,利用极坐标可得,

$S=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left[h^2(t)+16r^2\right]^{\frac{1}{2}}rdr=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$ 并且由题意 $\frac{dV}{dt}=-0.9S$,

$\frac{dV}{dh}=\frac{3}{4}\pi h^2(t)=\frac{9}{13}S$,所以 $\frac{dh(t)}{dt}=\frac{dh}{dV}\cdot\frac{dV}{dt}=-\frac{13}{10}$，因此 $h(t)=-\frac{13}{10}t+C$.

由 $h(0)=130$ ，得 $h(t)=-\frac{13}{10}t+130$ ，令 $h(t)\to 0$ ，得 $t=100$.

因此,高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需的时间为 100 小时.

综合题

1．设 $f(x)$ 为连续函数， $F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$ ，则 $F'(2)$ 等于（　　　　）

A. $2f(2)$　　　　B. $f(2)$　　　　C. $-f(2)$　　　　D. 0.

2．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)dx=A$ ，求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

3．设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$ ，求 $\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy$.

4．设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，且

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-1}^{t} f(x^2)dx},$$

其中，$\Omega(t)=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le t^2\}$；

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性；(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

参考答案

§10-1

基础题

1. (1) $\dfrac{2\pi}{3}$ **；(2)** $\dfrac{1}{6}$ **；2. (1)** $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \le \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$ **，(2)** $10\sqrt{3}\le I\le 34\sqrt{3}\pi$ **；**

提高题

1． $I_1=4I_2$

§10-2

基础题

1．(1) $\dfrac{6}{55}$ **；(2)** $e-e^{-1}$ **；(3)** $\dfrac{27}{64}$ **；(4)** $\dfrac{2}{15}(4\sqrt{2}-1)$**.**

2．(1) $\int_0^4 dx\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$ **，(2)** $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$

3．(1) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\int_0^{2\sec\theta} f(r)rdr$ **，(2)** $\int_0^{\pi/2} d\theta\int_{(\cos\theta+\sin\theta)^{-1}}^{1} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ **；**

4． $\sqrt{2}-1$ **；5．（1）** $\dfrac{3}{64}\pi^2$ **；（2）** $\dfrac{\pi}{2}(1+e^{\pi})$

提高题

1. $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$；**2.** **(1)** $\int_1^2 dx\int_{1-x}^0 f(x,y)dy$，

(2) $\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx$

3. $\frac{\pi}{2}-1$；**4.**（1）$\frac{\pi}{8}(\pi-2)$；（2）$\frac{45}{32}\pi a^4$　**5.** $\frac{3}{32}\pi a^4$；

§10－3

基础题: 1. $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$；**2.** $\frac{3}{2}$；**3.** $\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$；**4.** $\frac{\pi}{4}h^2R^2$.

5. $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$；**6.**（1）$\frac{16}{3}\pi$；（2）$\frac{\pi}{4}$. **7.**（1）$\frac{7}{6}\pi a^4$；（2）$\frac{8}{5}\pi$

8. **(1)** 336π；**(2)** 8π；（3）$\frac{\pi}{6}(7-4\sqrt{2})$；（4）$\frac{31}{8}\pi$.

提高题: 1. $\frac{4}{5}\pi a^5$；**2.** $\frac{\pi}{2}t^3\ln(1+t^2)$.

§10－4

基础题: 1. $2a^2(\pi-2)$；**2.** $16R^2$；**3.** $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)a^2$；**4.** $(\alpha-\beta)\pi a^3$. **5.** $\bar{x}=\frac{35}{48},\bar{y}=\frac{35}{54}$.

6. $\left(0,0,\frac{R}{3}\right)$. **7.** $I_x=\frac{72}{5}\rho$，$I_y=\frac{96}{7}\rho$. **8.** $\frac{3}{2}\mu\pi R^4H$.

9. $\vec{F}=\left\{0,\ 0,\ -2\pi G\rho[\sqrt{(h-a)^2+R^2}-\sqrt{R^2+a^2}+h\ \right\}$

提高题:

(1) $\frac{8}{3}a^4$, (2) $\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{7}{15}a^2$, (3) $\frac{112}{45}a^6\rho$.

自我测试题

一选择题　**1. A**　**2. B**

二.填空　**1.** $14a^4$　**2.** $\frac{2}{3}$

三. 1. $\int_0^{\sqrt{2}} dx\int_0^x xf(2xy)dy+\int_{\sqrt{2}}^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xf(2xy)dy$　**2.** $\frac{\pi}{10}\left[1-\frac{\sqrt{2}}{8}\right]$　**3.** $\frac{1-a^2}{16}\pi^2$

4. $\frac{\pi}{6}\left[2\sqrt{2}-1\right]$　**5.** $\frac{\pi}{2}\ln 2$ **6.** $\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv=\frac{\pi}{2}\int_0^a zf(z)dz$，当 $f(z)=e^{z^2}$ 时积分值为 $\frac{\pi}{4}\left(e^{a^2}-1\right)$.

综合题

1.B　**2.**提示：换序，令 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$ 可得，原式= $\dfrac{A^2}{2}$.

3.因为积分域 D 关于 $y=x$ 轴对称，可得 $\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_D y^2dxdy$，则

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D x^2dxdy=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D\frac{x^2+y^2}{2}dxdy=\frac{(a^2+b^2)\pi R^4}{4a^2b^2}$$

.

4.（1）其中

$$\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi d\varphi\int_0^t f(r^2)\cdot r^2\sin\varphi dr=4\pi\int_0^t r^2f(r^2)dr$$

$$\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)\cdot rdr=2\pi\int_0^t f(r^2)\cdot rdr$$

则 $F'(t)=2\dfrac{t^2f(t^2)\int_0^t f(r^2)\cdot rdr-tf(t^2)\int_0^t r^2f(r^2)dr}{\left[\int_0^t f(r^2)rdr\right]^2}=2\dfrac{tf(t^2)\int_0^t f(r^2)\cdot r(t-r)dr}{\left[\int_0^t f(r^2)rdr\right]^2}$.

由函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，可知在区间 $(0,+\infty)$ 内 $F'(t)>0$，可得 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

（2）$G(t)=\dfrac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)rdr}{2\int_0^t f(r^2)dr}=\dfrac{\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{\int_0^t f(r^2)dr}$　，则原问题 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

转化为证明 $g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-\left[\int_0^t f(r^2)rdr\right]^2>0$，

$g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr>0$，从而 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加，故当 $t>0$ 时，$g(t)>g(0)=0$ ，得证.

高等数学（下）期中模拟试卷一

题号	一	二	三	四	总分

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

得分					

一、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1、极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{xy^2+9}}{xy^2}$ $=$ ______________。

2、函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿东北方向的方向导数为 $=$ ______________。

3、直线 $\begin{cases}x=3+t\\ y=2-t\\ z=1+2t\end{cases}$ 与平面 $2x+y+z-5=0$ 的夹角为 $=$ ______________。

4、设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，则 $dz=$ ________________________。

5、过点 $(3,1,-2)$ 且与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ 垂直相交的直线方程为 ___________________。

6、交换二次积分 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$ 的次序得 ________________________________。

二、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1、设直线方程为 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+D_2=0\end{cases}$，$A_1$、$B_1$、$C_1$、$D_1$、$A_2$、$D_2$ 均不为零，则直线（　　）

A. 过原点　　B. 平行 x 轴　　C. 垂直 x 轴　　D. 平行 z 轴

2、若 $\vec{a},\vec{b}$ 为共线的单位向量，则它们的数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

3、函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续且偏导数存在是它在该点可微的（　　）

A. 必要而非充分条件　　B. 充分而非必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分又非必要条件

4、设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=-1$，

$z=f(x,y)$ 在点 $\left(0,0,f(0,0)\right)$ 的一个法向量为（　　）

A. $(3,-1,1)$　　B. $(3,-1,-1)$　　C. $(1,0,3)$　　D. $(3,0,1)$

5、 $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2+3y^2-9y$ 的极小值点是(　　　)

A. $(-2,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(0,-3)$　　D. $(-2,-3)$

6、设平面区域

$D=\left\{(x,y)\middle|-a\le x\le a,x\le y\le a\right\}$, $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le a,x\le y\le a\right\}$,

则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)dxdy=$ (　　　)

A. $4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$　　B. $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$

C. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$　　D. 0

三、计算题（每题 8 分, 共 56 分）

1、试求微分方程 $y''+2y'-3y=0$ 的一条积分曲线，使其在原点处与直线 $y=4x$ 相切。

2、求过直线 $\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程。

3、设 $z=f\left(u,x,y\right),u=xe^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

4、求椭圆抛物面 $z=1+x^2+\frac{1}{4}y^2$ 上平行于平面 $2x+y+z=0$ 的切平面及法线方程。

5、求曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z-2=0$ 之间的最短距离。

6、计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是由 xoz 面上曲线 $z^2=2x$ 绕 x 轴旋转所得旋转体与平面 $x=2, x=5$ 所围成的闭区域。

7、求球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内部的那部分曲面的表面积。

四、**证明题**(8 分)

证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处可微。

院（系）________________班级________________学号________________姓名________________

高等数学（下）期中模拟试卷二

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1、 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续、偏导数都存在、可微三者之间的关系是：

____

____

2、设 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(x-2y,\, y^2\right)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$____________________。

3、已知 $xe^{y-z}+yz\cos x=5$，则 $dz=$____________________。

4、函数 $f(x,y,z)=(2x+y)^z$ 在 $(1,1,2)$ 点处方向导数的最大值为____________________。

5、交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dx=$____________________。

6、介于平面 $z=0$ 与 $x+y+z=3$ 之间的曲面 $x^2+y^2=1$ 的面积为____________________。

7、$div(grad(x^3-xy^2+y^3z-z^3))\big|_{(0,0,0)}=$____________________。

8、 $rot(grad(x^3-xy^2+y^3z-z^3))\big|_{(0,0,0)}=$ ____________。

二、计算题（共 76 分）

1、（6 分）判断函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点是否连续？是否可偏导？

2、（6 分）求曲面 $z=x^2+y^2$ 上到平面 $2x+y-3z=6$ 距离最近的点的坐标。

3、（6 分）求经过直线 $\begin{cases}x+2y=3\\ z=0\end{cases}$，且与曲面 $z=x^2+2y^2$ 相切的平面方程。

4、（6 分）求曲线 $\begin{cases}z=x^2-y^2\\ x+y+z=6\end{cases}$ 上点 $(2,1,3)$ 处的切线方程和法平面方程。

5、（6 分）设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(0)=2$，试求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_0^t dy\int_y^t \frac{f(x)}{1+y^2}dx$。

6、（6分）计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y^2)dV$，其中 Ω 由 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=2-x^2$ 围成。

7、（6 分）计算 $\oint_L (x-y)^2 ds$，其中 $L: x^2+y^2=R^2$。

8、（6 分）计算$\oint_L \frac{y}{x^2+2y^2}dx-\frac{x}{x^2+2y^2}dy$，其中$L:|x|+|y|=1$，方向为逆时针。

9、（6 分）计算$\oint_\Gamma (2x-3y)dx+(z+3x)dz$，其中$\Gamma:\begin{cases} x^2-x+y^2=0 \\ x+z=1 \end{cases}$，俯视时方向逆时针方向。

10、（6 分）计算$\iint\limits_\Sigma \frac{zds}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$，其中$\Sigma: z=xy$，$(x,y)\in\{(x,y)\,|\,x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$。

11、（6 分）计算$\iint\limits_{\Sigma}(2x+y)dydz+\left(z^2-xy\right)dxdy$，其中$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\left(x^2+y^2\le 1\right)$上侧为正方向。

12、（10分）设函数$f(x)$可导，且满足方程$f(x)=x+\int_0^x (x-t)f'(t)dt$，求$f(x)$。

高等数学（下）期中模拟试卷三

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

1、已知球面的一条直径的两个端点为$\left(2,-3,5\right)$和$\left(4,1,-3\right)$，则该球面的方程为

____。

2、函数$u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$在点$A\left(1,0,1\right)$处沿点$A$指向点$B\left(3,-2,2\right)$方向的方向导数为

________________________。

3、曲面$z=x^2+y^2$与平面$2x+4y-z=0$平行的切平面方程为________________________。

4、极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(1-\cos(x^2+y^2))\sin xy}{(x^2+y^2)^2\mathrm{e}^{x^2+y^2}}=$ ____________________。

5、设二元函数$z=xy^2+x^3y$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________________。

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、旋转曲面$x^2-y^2-z^2=1$是由（　　）

A. xOz坐标面上的双曲线绕Ox轴旋转而成

B. xOy坐标面上的椭圆绕Oz轴旋转而成

C. xOy坐标面上的双曲线绕Oz轴旋转而成

D. xOz坐标面上的椭圆绕Ox轴旋转而成

2、微分方程$y''+y=2x\cos x+3x^2$的一个特解应具有形式（　　）

A. $x(a_1x+b_1)\cos x+x(a_2x+b_2)\sin x+d_1x^2$

B. $x(a_1x+b_1)\cos x+x(a_2x+b_2)\sin x+d_1x^2+d_2x+d_3$

C. $x(a_1x+b_1)(a_2\cos x+b_2\sin x)+d_1x^2+d_2x+d_3$

D. $x(a_1x+b_1)(\cos x+\sin x)+d_1x^2+d_2x+d_3$

其中$a_1,b_1,a_2,b_2,d_1,d_2,d_3$都是待定常数.

3、已知直线$L:\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-\sqrt{2}\pi}$与平面$\pi:x+\sqrt{2}y-\pi z=4$，则（　　）

A. L在π内　　B. L与π不相交　　C. L与π正交　　D. L与π斜交

4、下列说法正确的是（　　　）

A. 两向量$\vec{a}$与$\vec{b}$平行的充要条件是存在唯一的实数λ，使得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$

B．二元函数$z=f(x,y)$的两个二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$在区域$D$内连续，则在该区域内两个二阶混合偏导必相等

C. 二元函数$z=f(x,y)$的两个偏导数在点(x_0,y_0)处连续是函数在该点可微的充分条件

D. 二元函数$z=f(x,y)$的两个偏导数在点(x_0,y_0)处连续是函数在该点可微的必要条件

5、设$z=f(2x+y,x-2y)$, 且函数f具有连续的二阶连续偏导数，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（　　　）

A. $2f_{11}-2f_{22}-3f_{12}$　　　　B. $2f_{11}+f_{22}+3f_{12}$

C. $2f_{11}+f_{22}+5f_{12}$　　　　D. $2f_{11}-2f_{22}-f_{12}$

三、计算题（共 29 分）

1、（13 分）求下列微分方程的通解：

(1)（6 分）$y'=1+x+y^2+xy^2$；

(2)（7 分）$y''-3y'+2y=xe^{2x}$.

2、（8 分）设$z=uv^2+t\cos u$，$u=e^t$，$v=\ln t$，求全导数$\dfrac{dz}{dt}$。

3、（8 分）求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值。

四、应用题（8 分）

1、某工厂生产两种型号的机床，其产量分别为 x 台和 y 台，成本函数为 $c(x,\ y)=x^2+2y^2-xy$ （万元），若市场调查分析，共需两种机床 8 台，求如何安排生产使其总成本最少？最小成本为多少？

五、综合题（21 分）

1、（10 分）已知直线 l_1： $\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\\ x=0\end{cases}$，$l_2$： $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=1\\ y=0\end{cases}$，求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程。

2、（11分）设函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$，在球面 $x^2+y^2+z^2=5R^2\ (x>0,y>0,z>0)$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)$ 取到最大值。

六、证明题（12分）

设函数 $u=x^kF\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)$，其中 k 是常数，函数 F 具有连续的一阶偏导数。试证明: $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=kx^kF\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)$。

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期中模拟试卷四

题号	一	二	总分
得分			

一、解答题（共75分）

1. （5分）设函数 $z=z\left(x,y\right)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

2.（5分） 设 $z=z\left(x,y\right)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi\left(x+y+z\right)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$，求 dz。

3. （5分）求函数 $f\left(x,y\right)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $\left(0,1\right)$ 处的梯度。

4. （5分）设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的一动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xoy 面垂直，求点 P 的轨迹 C。

5.（10分）求二元函数 $f\left(x,y\right)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值。

6. （10分）设函数 $u=f\left(x,y\right)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，确定的 a,b 值，使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下简化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$。

7. （10分）已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$，求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点。

8. （8分）设函数 $f\left(x,y\right)$ 连续，交换二次积分的积分次序：$\int_0^1 dy\int_{2y-2}^{0} f(x,y)dx$。

9.（8分）设函数 f 连续，若 $F\left(u,v\right)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中区域D为区域 $1\le x^2+y^2\le u^2$，$0\le\arctan\frac{y}{x}\le v$ 在第一象限的部分，求 $\frac{\partial F}{\partial u}$。

10.（9分）求位于两球面 $x^2+y^2+\left(z-2\right)^2=4$ 和 $x^2+y^2+\left(z-1\right)^2=1$ 之间的均匀物体的质心。

二、计算题 （共25分）

1. （8分）计算由 $1\le x^2+y^2\le 2x, y\ge 0, 0\le z\le xy$ 所确定的立体的体积.

2.（8分）计算二重积分$\iint\limits_{D}\left(x+y\right)^{3}dxdy$，其中$D$由曲线$x=\sqrt{1+y^{2}}$与直线$x+\sqrt{2}y=0$及$x-\sqrt{2}y=0$围成。

3. （ 9 分 ） 计 算 $I=\iint\limits_{D}r^{2}\sin\theta\sqrt{1-r^{2}\cos 2\theta}drd\theta$ ， 其 中 $D=\left\{\left(r,\theta\right)\middle|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期中自测题

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1．设函数 $f(x,y)=2x+(y-1)\arcsin\sqrt{x^2+y^2}$，则 $f_x(x,1)=$__________。

2．若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 取得极值，则常数 $a=$______。

3．由 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$ 表示的立体图形的体积 $V=$_________。

4．微分方程 $y''+9y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$ 的特解为___________。

5．函数 $u=xy+yz^3$ 在点 $M(-4,-1,1)$ 沿方向 $\vec{l}=\{-2,2,-1\}$ 的方向导数是______________________。

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1．下列方程中，属于锥面方程的是（　　）

A．$x+y+z=1$　　B．$x^2+y^2+z^2=1$

C．$x^2+y^2-z=0$　　D．$x^2+y^2-z^2=0$

2．函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）

A．连续且偏导数存在　　B．连续，偏导数不存在

C．不连续，偏导数存在　　D．不连续，偏导数不存在

3．设 $z=e^{xy}$，则 dz 等于（　　）

A．Δz　　B．$e^{xy}dx$　　C．$e^{xy}(xdx+ydy)$　　D．$e^{xy}(ydx+xdy)$

4．若 $f(x,y)$ 在关于 y 轴对称的有界闭区域 D 上连续，且 $f(-x,y)=-f(x,y)$, 则二重积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 的值等于（　　）

A．D 的面积　　B．0　　C．$2\iint_D f(x,y)dxdy$　　D．$f(x,y)$

5. 微分方程 $y''-y'-2y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的特解 y^* 的形式可设为（　　）

A． $ax\mathrm{e}^{2x}$　　B． $(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$　　C． $(ax+b)x\mathrm{e}^{2x}$　　D． $ax^2\mathrm{e}^{2x}$

三、解答题（每题 7 分，共 35 分）

1. 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中函数 $f(t)$ 二阶可导，函数 $g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ 2x^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$ 可以分别确定 x 、 y 为 z 的函数，求 $\dfrac{dx}{dz}$ 与 $\dfrac{dy}{dz}$。

3. 交换二重积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ 次序，并计算该积分。

4. 化为极坐标形式，然后计算二重积分 $\int_0^{2a} dx\int_0^{A} \sqrt{x^2+y^2}dy$，其中 $A=\sqrt{2ax-x^2}$ 。

5. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dV$，其中 Ω 为椭球：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$。

四、综合题（每题 8 分，共 24 分）

1. 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $x + y + z = 1$ 的交线与坐标原点的最远距离与最近距离。

2. 设物体 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与曲面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成，其体密度为常数 1，试求该物体的质量和重心坐标。

4.设有曲面 $S: 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$，平面 $\Pi: 2x + 2y + z + 5 = 0$。

（1）在曲面 S 上求平行于平面 Π 的切平面方程;（2）求曲面 S 与平面 Π 之间的最短距离。

五、证明题（11 分）

设 $f(u)$ 连续，区域 Ω 由 $0 \le z \le 1$，$x^2+y^2 \le t^2$ 围成，设 $f(t)=\iiint\limits_{\Omega}\left[z^2+f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dV$，

1）证明 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t^2}=\dfrac{\pi}{3}$；　　2）求 $f(t)$。

参考答案

高等数学（下）期中模拟试卷一

一、1、$-\dfrac{1}{6}$　2、$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　3、$\dfrac{\pi}{6}$　4、$dz=\dfrac{z}{x+z}dx+\dfrac{z^2}{y(x+z)}dy$

5、$\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{4}=z+2$　6、$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$

二、1、C　2、D　3、A　4、B　5、B　6、C

三、1、方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$，由已知 $y(0)=0, y'(0)=4$，代入上式得

$C_1=1, C_2=-1$，故所求积分曲线的方程为 $y=e^x-e^{-3x}$。

2、设平面束方程：$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$，即 $(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$，

从而 $\overrightarrow{n_1}=(1+\lambda,5,1-\lambda)$，又平面 $x-4y-8z+12=0$ 的法线向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,-4,-8)$，

从而 $\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{|9\lambda-27|}{\sqrt{2\lambda^2+27\cdot 9}}=\dfrac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\dfrac{(\lambda-3)^2}{2\lambda^2+27}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 16\lambda^2-12\lambda+225=0\Rightarrow\lambda=-\dfrac{3}{4}$，即平面：$x+20y+7z-12=0$

又平面 $x-z+4=0$ 的一个法线向量 $\overrightarrow{n_3}=(1,0,-1)$，则平面 $x-z+4=0$ 与平面 $x-4y-8z+12=0$ 的夹角的余弦为 $\dfrac{\left|\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_3}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{9}{\sqrt{2}\cdot 9}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即平面 $x-z+4=0$ 满足条件.

所以，求过直线 $\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面为

$x+20y+7z-12=0$ 和 $x-z+4=0$.

3、$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot e^y+f_2'$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f_1'\cdot e^y+f_2'\right)=\dfrac{\partial f_1'}{\partial y}\cdot e^y+f_1'\cdot e^y+\dfrac{\partial f_2'}{\partial y}$

$$\because\frac{\partial f_1'}{\partial y}=f_{11}''\cdot xe^y+f_{13}'',\ \frac{\partial f_2'}{\partial y}=f_{21}''\cdot xe^y+f_{23}'',$$

$$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(f_{11}''\cdot xe^y+f_{13}''\right)\cdot e^y+f_1'\cdot e^y+f_{21}''\cdot xe^y+f_{23}''$$

4、设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，取切向量 $\vec{n}=\left(2x,\dfrac{1}{2}y,-1\right)$，则 $\vec{n}\Big|_M=\left(2x_0,\dfrac{1}{2}y_0,-1\right)$.

由已知，切平面平行于平面 $2x+y+z=0$，从而 $\vec{n}\Big|_M=\left(2x_0,\dfrac{1}{2}y_0,-1\right)$ 平行于平面 $2x+y+z=0$ 的法线向量 $\overrightarrow{n_1}=(2,1,1)$,

所以 $\dfrac{2x_0}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}y_0}{1}=\dfrac{-1}{1}=-1\Rightarrow x_0=-1,y_0=-2\Rightarrow z_0=3$

所以，切点 $(-1,-2,3)$，$\vec{n}\Big|_M=(-2,-1,-1)$.

切平面方程：$-2(x+1)-(y+2)-(z-3)=0$，即：$2x+y+z+1=0$；

法线方程：$\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$，即：$\dfrac{x+1}{2}=y+2=z-3$；

5、方法1　设(x,y,z)为曲面$z=x^2+y^2$上任一点，则

目标函数：$d=\dfrac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}$；约束条件：$z=x^2+y^2$

将约束条件代入目标函数，化为无条件极值：

$$d=\frac{\left|x+y-2\left(x^2+y^2\right)-2\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\left|2x^2-x+2y^2-y+2\right|}{\sqrt{6}}$$

将绝对值内配方得，$2x^2-x+2y^2-y+2$

$$=2\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+2\left(y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{4}+2=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{4}$$

所以，$d=\dfrac{2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{4}}{\sqrt{6}}\geq\dfrac{\frac{7}{4}}{\sqrt{6}}=\dfrac{7\sqrt{6}}{24}$，当且仅当$x=y=\dfrac{1}{4}$时取等号

从而，求曲面$z=x^2+y^2$与平面$x+y-2z-2=0$之间的最短距离$d=\dfrac{7\sqrt{6}}{24}$.

方法2　设(x_0,y_0,z_0)为曲面$z=x^2+y^2$上任一点，则过该点的曲面的一个法向量$\vec{n}=\left(2x_0,2y_0,-1\right)$，当过该点的切平面与平面$x+y-2z-2=0$平行时，可得最短距离

即：$\vec{n}=\left(2x_0,2y_0,-1\right)//\left(1,1,-2\right)$

$\Rightarrow\dfrac{2x_0}{1}=\dfrac{2y_0}{1}=\dfrac{-1}{-2}\Rightarrow x_0=y_0=\dfrac{1}{4}\Rightarrow z_0=\dfrac{1}{8}$，从而，所求的点为$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$

则所求的最短距离$d=\dfrac{|x_0+y_0-2z_0-2|}{\sqrt{6}}=\dfrac{\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{8}-2\right|}{\sqrt{6}}=\dfrac{\frac{7}{4}}{\sqrt{6}}=\dfrac{7\sqrt{6}}{24}$.

6、曲线$z^2=2x$绕x轴旋转得旋转曲面：$y^2+z^2=2x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\left(y^2+z^2\right)$；

$x=2\Rightarrow y^2+z^2=4;x=5\Rightarrow y^2+z^2=10$

投影法：将Ω投影在yOz面上，

$$D_{yz}:4\le y^2+z^2\le 10\Leftrightarrow 0\le\theta\le 2\pi,2\le r\le\sqrt{10};2\le x\le 5$$

所以 $$\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dv=\iint\limits_{D_{yz}}\left[\int_2^5\left(y^2+z^2\right)dx\right]dydz$$

$$=3\iint\limits_{D_{yz}}\left(y^2+z^2\right)dydz=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^{\sqrt{10}}r^2\cdot rdr=126\pi\ .$$

7、 $A=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$，其中曲面方程：$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$；

则 $z_x=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},z_x=-\dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$$D_{xy}:x^2+y^2\le 2x\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+y^2\le 1\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\theta$$

所以，$A=2\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\dfrac{1}{\sqrt{4-r^2}}\cdot rdr=8\pi-16$

四、分析:函数$f(x,y)$在$\left(x_0,y_0\right)$处可微

$$\Leftrightarrow\Delta z=f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)$$
$$=dz+O\left(\rho\right)=f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y+O\left(\rho\right)$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-dz}{\rho}$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)-\left(f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y\right)}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}=0$$

证明：

$$f_x\left(0,0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(0+\Delta x,0\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\Delta x\right)^2\sin\dfrac{1}{\left(\Delta x\right)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2}=0$$

同理，$f_y\left(0,0\right)=0$

$$\therefore \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z - dz}{\rho}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - \left(f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

证毕.

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0$$

高等数学（下）期中模拟试卷二

一、 1、连续与偏导数都存在无因果关系；连续不一定可微，但可微一定连续；偏导数都存在不一定可微，但可微一定偏导数都存在。

2、$-2f''_{11} + 2yf''_{12}$ 3、$\dfrac{yz\sin x - e^{y-z}}{y\cos x - xe^{y-z}}dx - \dfrac{z\cos x + xe^{y-z}}{y\cos x - xe^{y-z}}dy$

4、$3\sqrt{20 + 9\ln^2 3}$ 5、$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$ 6、6π 7、0 8、$(0,0,0)$

二、1、因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x| + |kx|}{\sqrt{x^2 + k^2x^2}} = \dfrac{1 + |k|}{\sqrt{1 + k^2}}$ 随 k 而变，

所以，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续。

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-1}{x} = 0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点关于 x 可偏导。

同理，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点关于 y 可偏导。

2、方法 1 ：$z = x^2 + y^2$ 上的点 (x,y,z) 到平面 $2x + y - 3z = 6$ 的距离为

$f(x,y,z) = \dfrac{|2x + y - 3z - 6|}{\sqrt{14}}$， 为 此 构 造

$$L(x,y,z,\lambda) = (2x + y - 3z - 6)^2 + \lambda\left(z - x^2 - y^2\right)$$

由 $L'_x = L'_y = L'_z = L'_\lambda = 0$，得驻点 $(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{36}\right)$，由于驻点唯一，所以该驻点

为所要求的距离最近的点。

方法 2 ： $z=x^2+y^2$ 上的点 (x,y,z) 处的切向量为 $\{2x,2y,-1\}$ ，由 $\{2x,2y,-1\}=\lambda\{2,1,-3\}$，及 $z=x^2+y^2$，得 $(x,y,z)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{5}{36}\right)$ 为所要求的距离最近的点。

3、设曲面上切点坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则 $z_0=x_0^2+2y_0^2$ ，

切平面为 $2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$，即 $2x_0x+4y_0y-z=z_0$ ，

根据条件 $\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{2}=\frac{z_0}{3}$ ， $z_0=x_0^2+2y_0^2$，因此 $(x_0,y_0,z_0)=(2,2,12)$ ，

所求切平面方程为 $4x+8y-z=12$ 和 $z=0$.

4 、 $\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=2x-2y\dfrac{dy}{dx}\\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$ ，由此得 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+1}{2y-1},\frac{dz}{dx}=\frac{2x+2y}{1-2y}$ ，切向量为 $\left\{1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right\}_{(2,1,3)}=\{1,5,-6\}$, 切线方程为 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-3}{-6}$；

法平面方程为 $(x-2)+5(y-1)-6(z-3)=0$，即 $x+5y-6z=-11$.

5、 $$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_0^t dy\int_y^t\frac{f(x)}{1+y^2}dx=\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t dx\int_0^x\frac{f(x)}{1+y^2}dy}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t f(x)\arctan x\,dx}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)\arctan t}{2t}=f(0)\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t^2}}{2}=1$$

6、 $$\iiint_\Omega(x^2+2y^2)dV=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}(x^2+2y^2)dz$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+2y^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\left(r^2+r^2\sin^2\theta\right)\left(1-r^2\right)dr$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\cdot\int_0^1\left(r^3-r^5\right)dr=\frac{\pi}{2}\ .$$

7、解 $\oint_L (x-y)^2 ds=\oint_L\left(x^2-2xy+y^2\right)ds=\oint_L\left(R^2-2xy\right)ds$

$$=2\pi R^3-2\int_{-\pi}^{\pi}R^2\cos\theta\sin\theta\sqrt{R^2\sin^2\theta+R^2\cos^2\theta}\,d\theta=2\pi R^3.$$

8、取$C:x^2+2y^2=\delta$（$\delta>0$充分小），方向顺时针，因为在C之外，L之内的区域内

，$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+2y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+2y^2}\right)=\frac{x^2-2y^2}{(x^2+2y^2)^2}$，

所以$\oint_L=\oint_{L\cup C}-\oint_C=\oint_{C^-}\frac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}=\frac{1}{\delta}\oint_{C^-}ydx-xdy=\frac{-2}{\delta}\iint\limits_D dxdy=-\sqrt{2}\pi$.

9、 $\oint_\Gamma(2x-3y)dx+(z+3x)dz=\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x-3y & 0 & z+3x\end{vmatrix}=\iint\limits_\Sigma -3dzdx+3dxdy$

$=\iint\limits_{D_{xy}}3dxdy=\frac{3}{4}\pi$，其中$D_{xy}:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$.

10、 $\iint\limits_\Sigma\frac{zds}{\sqrt{1+x^2+y^2}}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\sqrt{1+y^2+x^2}\,dxdy$

（其中$D_{xy}:\{(x,y)|\,x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$）

$$=\iint\limits_{D_{xy}}xydxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xydy=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{24}.$$

11、设$\Sigma_0:z=1\ \left(x^2+y^2\le 1\right)$下侧为正方向。

$$\iint\limits_\Sigma=\oiint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0}=-\iiint\limits_\Omega(2+2z)dV+\iint\limits_{D_{xy}}(1-xy)dxdy$$

（其中$\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$，$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$）

$$=-2\int_0^1 dz\iint_{D_z}(1+z)dxdy+\pi-\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta dr$$ （$D_z:x^2+y^2\le z^2$）

$$=-2\pi\int_0^1(1+z)z^2dz+\pi=-\frac{\pi}{6}.$$

12、积分变上限函数的求导问题经常考查，注意弄清对那个变量求导，特别是被积函数中既含有t又含有x的情形。这种问题一般总是先求导。

$f(x)=x+x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt$，$f'(x)=1+\int_0^x f'(t)+xf'(x)-xf'(x)$，

$f'(x)=1+f(x)-f(0)$.又$f(0)=0$，即$f'(x)-f(x)=1$，故$f(x)=e^x-1$.

高等数学（下）期中模拟试卷三

一、1、$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$　　2、$\frac{1}{2}$.　　3、$2x+4y-z-5=0$.

4、0　　5、$2y+3x^2$

二、1、A　2、B　3、C　4、C　5、A

三、1、（1）将原微分方程进行分离变量，得：$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1+x)\mathrm{d}x$，上式两端积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\arctan y=\int(1+x)\mathrm{d}x=x+\frac{x^2}{2}+c$$

即　：　$\arctan y=x+\frac{x^2}{2}+c$ 其中c为任意常数.

（2）题设方程对应的齐次方程的特征方程为$r^2-3r+2=0,$特征根为$r_1=1,\ \ r_2=2,$于是，该齐次方程的通解为$Y=C_1x+C_2e^{2x}$,因$\lambda=2$是特征方程的单根，故可设题设方程的特解：$y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$.代入题设方程，得$2b_0x+b_1+2b_0=x$,比较等式两端同次幂的系数，得$b_0=\frac{1}{2},\ \ b_1=-1,$于是，求得题设方程的一个特解$y^*=x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$.

从而，所求题设方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$.

2、$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(uv^2+t\cos u\right)=v^2-t\sin u$，

$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(uv^2+t\cos u\right)=2uv$，$\frac{\partial z}{\partial t}=\cos u$

依复合函数求导法则，全导数为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}$$

$$=\left(v^2-t\sin u\right)e^t+2uv\cdot\frac{1}{t}+\cos u\cdot 1$$

$$=\left(\ln^2 t-t\sin e^t\right)e^t+\frac{2}{t}e^t\ln t+\cos e^t$$

3、解方程组 $\begin{cases}f_x(x,y)=e^{2x}\left(2x+2y^2+4y+1\right)=0\\ f_y(x,y)=e^{2x}(2y+2)=0\end{cases}$，得驻点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$。由于 $A=f_{xx}(x,y)=4e^{2x}\left(x+y^2+2y+1\right)$，$B=f_{xy}(xy)=4e^{2x}(y+1)$，$C=f_{yy}(x,y)=2e^{2x}$

在点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 处，$A=2e>0$，$B=0$，$C=2e$，$AC-B^2=4e^2$，所以函数在点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 处取得极小值，极小值为 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$。

四、即求成本函数 $c(x,\ y)$ 在条件 $x+y=8$ 下的最小值，

构造辅助函数　$F(x,\ y)=x^2+2y^2-xy+\lambda(x+y-8)$，

解方程组　$\begin{cases}F'_x=2x-y+\lambda=0\\ F'_y=-x+4y+\lambda=0\\ F'_\lambda=x+y-8=0\end{cases}$，

解得　$\lambda=-7,x=5,y=3$，

这唯一的一组解，即为所求，当这两种型号的机床分别生产5台和3台时，总成本最小，最小成本为：$c(5,\ 3)=5^2+2\times 3^2-5\times 3=28$（万）.

五、1、直线 l_1 与 l_2 的方向向量分别为

$\vec{\mathbf{s}}_1=\left\{0,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right\}\times\{1,\ 0,\ 0\}=\left\{0,\ \frac{1}{c},\ -\frac{1}{b}\right\}$,

$\vec{\mathbf{s}}_2=\left\{\frac{1}{a},\ 0,\ -\frac{1}{c}\right\}\times\{0,\ 1,\ 0\}=\left\{\frac{1}{c},\ 0,\ \frac{1}{a}\right\}$,

作 $\vec{\mathbf{n}}=\vec{\mathbf{s}}_1\times\vec{\mathbf{s}}_2=\left\{\frac{1}{ca},\ -\frac{1}{bc},\ -\frac{1}{c^2}\right\}$,

取直线 l_1 上的一点 $P_1(0,\ 0,\ c)$，则过点 P_1 且以 $\vec{\mathbf{n}}=\left\{\frac{1}{ca},\ -\frac{1}{bc},\ -\frac{1}{c^2}\right\}$ 为法向量的平面 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0$ ，就是过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程.

2、设球面上的点为 (x,y,z) .

令 $L(x,y,z,\lambda)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5R^2)$ ，

$$L_x=\frac{1}{x}+2\lambda x=0,\ L_y=\frac{1}{y}+2\lambda y=0,\ L_z=\frac{1}{3z}+2\lambda z=0,\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-5R^2=0$$

由前三个式子得 $x^2=y^2=\frac{z^2}{3}$，代入最后式子得 $x=y=R,\ z=\sqrt{3}R$. 由题意得 $f(x,y,z)$ 在球面上的最大值一定存在，因此唯一的驻点 $(R,R,\sqrt{3}R)$ 就是最大值点，最大值为 $f(R,R,\sqrt{3}R)=\ln(3\sqrt{3}R^5)$.

六、$\frac{\partial u}{\partial x}=kx^{k-1}F\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)+x^kF_1'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)\left(-\frac{z}{x^2}\right)+x^kF_2'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$

$$=kx^{k-1}F\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)-zx^{k-2}F_1'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)-yx^{k-2}F_2'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^kF_2'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x^{k-1}F_2'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^kF_1'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x^{k-1}F_1'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right),$$

所以，$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}$

$$=x\cdot\left[kx^{k-1}F\left(\frac{z}{x},\quad\frac{y}{x}\right)-zx^{k-2}F_1'\left(\frac{z}{x},\quad\frac{y}{x}\right)-yx^{k-2}F_2'\left(\frac{z}{x},\quad\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$+y\cdot x^{k-1}F_2'\left(\frac{z}{x},\quad\frac{y}{x}\right)+z\cdot x^{k-1}F_1'\left(\frac{z}{x},\quad\frac{y}{x}\right)=kx^kF\left(\frac{z}{x},\quad\frac{y}{x}\right).$$

高等数学（下）期中模拟试卷四

一、1. z　　2. 对等式$x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$两端取微分, 得

$2xdx+2ydy-dz=\varphi'\cdot(dx+dy+dz)$，解得$dz=\dfrac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}dx+\dfrac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}dy$.

3. $\vec{i}$　　4. 椭球面S点$P(x,y,z)$处的法向量是$\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}=\{2x,2y-z,2z-y\}$，

点P处的切平面与xoy面垂直的充要条件是$\vec{n}\cdot\{0,0,1\}=2z-y=0$，

所以点P的轨迹C的方程为：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\2z-y=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1\\2z-y=0\end{cases}$.

5. $f_x'(x,y)=2x(2+y^2),f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1$，令$f_x'(x,y)=0,f_y'(x,y)=0$，解得唯一驻点$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$，由于$A=f_{xx}''\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=2\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right)>0,B=f_{xy}''\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=4\cdot0\cdot\dfrac{1}{e}=0$，

$C=f_{yy}''\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=2\cdot0^2+e=e,B^2-AC=-2e\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right)<0$，从而$f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$是$f(x,y)$的极小值.

6. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta},\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{\partial^2u}{\partial\eta^2}$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$ ，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

将以上各式代入原等式，得

$$(a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\left[10ab+12\left(a+b\right)+8\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

由题意，令 $a^2+12a+4=0,10ab+12\left(a+b\right)+8\neq 0,5b^2+12b+4=0$

解得 $a=-2,b=-\dfrac{2}{5}$，或 $a=-\dfrac{2}{5},b=-2$.

7. 点 $\left(x,y,z\right)$ 到 xOy 面的距离为 $|z|$，故求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点的坐标，等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z-5=0$ 下的最大值点和最小值点。令 $L\left(x,,y,z,\lambda,\mu\right)=z^2+\lambda\left(x^2+y^2-2z^2\right)+\mu\left(x+y+3z-5\right)$

由 $\begin{cases}L_x=2\lambda x+\mu=0\\L_y=2\lambda y+\mu=0\\L_z=2z-2\lambda z+3\mu=0\\x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}\Rightarrow x=y\Rightarrow\begin{cases}2x^2-2z^2=0\\2x+3z=5\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-5\\y=-5\\z=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$

根据几何意义，该曲线上存在距离 xOy 面最远的点和最近的点，故所求距离 xOy 面最远的点和最近的点的坐标分别为 $\left(-5,-5,5\right),\left(1,1,1\right)$.

8. $\int_{-2}^{0}dx\int_{0}^{1+\frac{x}{2}}f(x,y)dy$　　　　9. $vf\left(u^2\right)$

10. 因为区域关于 z 轴对称，故质心必位于 z 轴上，所以 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$，

由公式 $\bar{z}=\dfrac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}z\mu dv=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\mu dv}{\iiint\limits_{\Omega}\mu dv}$，

由 $\mu\equiv$ 常数，不妨设 $\mu=1$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\mu dv=\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3-\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{28}{3}\pi，$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mu dv=\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\rho^4\Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}d\varphi=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi\left[4^4\cos^4\varphi-16\cos^4\varphi\right]d\varphi$$

$$=120\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin\varphi d\varphi=120\pi\left[-\frac{1}{6}\cos^6\varphi\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=20\pi，$$

所以 $\bar{z}=\dfrac{20\pi}{\frac{28\pi}{3}}=\dfrac{15}{7}$，从而质心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{15}{7}\right)$.

二、1. 边界函数含有 x^2+y^2 项，故选择柱面坐标系表示.

由 $\begin{cases}x^2+y^2=2x\\x^2+y^2=1\end{cases}$ 化为极坐标表示为 $\begin{cases}r^2=2r\cos\theta\\r^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=2\cos\theta\\r=1\end{cases}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

立体所占空间闭区域为

$\Omega:0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3},1\le r\le 2\cos\theta,0\le z\le r^2\sin\theta\cos\theta$，

$$\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}dr\int_0^{r^2\sin\theta\cos\theta}rdz=\frac{9}{16}.$$

2. 作图（略）可知，D 具有对称性，第一象限部分可表示为 $0\le y\le 1,\sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}$

，从而 $\iint\limits_{D}(x+y)^3dxdy=\iint\limits_{D}(x^3+3xy^2)dxdy=2\int_0^1dy\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}(x^3+3xy^2)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1+2y^2-3y^4)dy+3\int_0^1(y^2-y^4)dy=\frac{14}{15}.$$

3. 由题设，可知 $D=\left\{(r,\theta)\Big|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right\}=\left\{(x,y)\big|0\le x\le 1,0\le y\le x\right\}$，

从而 $I=\iint\limits_{D}y\sqrt{1-x^2+y^2}dxdy=\dfrac{1}{2}\int_0^1dx\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}d(1-x^2+y^2)$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x dx=\frac{1}{3}\int_0^1 [1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

作换元 $x=\sin t$，则 $I=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$.

第十一章　曲线积分与曲面积分

§11-1　对弧长的曲线积分

基础题

1．光滑曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},(\alpha \le t \le \beta)$ 的弧微分 $\mathrm{d}s=$____________________. 由此，圆周 $\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \end{cases},(0 \le \theta < 2\pi)$ 的弧微分 $\mathrm{d}s=$________________.

2．计算下列对弧长的曲线积分:

（1）$\int_L (x+y)ds$，其中 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段.

（2）$\oint\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$、直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界.

(3) $\int_{\Gamma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$，其中 Γ 为曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧.

(4) $\int_L (x^2+y^2)ds$，其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

提高题

计算 $\int_L x^2 ds$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截得的圆周.

§11-2　对坐标的曲线积分

基础题

1．力 $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 沿光滑曲线弧 L 所做功的微元 $\mathrm{d}W=$________________，其中 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上连续.

2．计算第二型曲线积分：

（1）$\oint_L xydx$，其中 L 为圆周 $(x-R)^2+y^2=R^2(R>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界（按逆时针方向绕行）；

（2）$\int_\Gamma xdx+ydy+(x+y-1)dz$，其中 Γ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线.

(3) $\oint_L \dfrac{-xdx+ydy}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 沿逆时针方向绕行.

提高题

1. 计算 $\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$，其中 L 分别是：

（1）先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$，再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线；

（2）曲线 $x=2t^2+t+1$，$y=t^2+1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧.

2. 求在力 $\vec{F}(y,-x,x+y+z)$ 作用下，

(1) 质点由 $A(a,0,0)$ 沿螺旋线 L 到 $B(a,0,2\pi b)$ 所做的功，其中

$$L: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\le t\le 2\pi;$$

(2) 质点由 A 沿直线 $x=a, y=0$ 到 B 所做的功.

§11-3　格林公式及其应用

基础题

1．利用曲线积分计算由星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 所围成的图形的面积.

2．计算曲线积分 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2 + y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$，L 的方向为逆时针方向.

2. 证明曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x\cos y - y^2 \sin x)dx + (2y\cos x - x^2 \sin y)dy$$

在整个 xOy 平面内与路径无关，并求其值.

提高题

1．利用格林公式计算由双纽线：$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 所围成的区域的面积.

2．计算曲线积分 $\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - 2)\mathrm{d}y$，其中 L 为上半圆周 $(x-R)^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$，沿逆时针方向.

3．选择 a,b 使得 $(ay^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (bx^2 + 2xy)\mathrm{d}y$ 是某一函数 $u = u(x,y)$ 的全微分，并求出 $u = u(x,y)$.

§11-4　对面积的曲面积分

基础题

1．光滑曲面 $z = f(x,y)$ 的面积微元 $\mathrm{d}S =$__________________________.

2．计算 $\iint\limits_S \frac{dS}{z}$，其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ 所截的顶部.

3．计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0,z=3$ 所截得的部分.

4．计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上 $z\geq h(0<h<R)$ 的部分.

提高题

1．计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dS$, 其中 Σ 是介于平面 $z=0$ 和 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

2．求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0 \le z \le 1)$ 的质量，此壳的面密度的大小为 $\rho = z$.

§11-5　对坐标的曲面积分

基础题

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

1. 计算下列对坐标的曲面积分：

（1）$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$在$x\geq 0, y\geq 0$部分并取球面外侧；

（2）$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$f(x,y,z)$为连续函数，$\Sigma$是平面$x-y+z=1$在第四卦限部分的上侧.

2． 把对坐标的曲线积分$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化成对面积的曲面积分，其中$\Sigma$是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限部分的上侧.

提高题

1. 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

2. 设磁场强度为 $E(x,y,z)$，求球内出发通过上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$ 的磁通量.

§11-6　高斯公式　通量与散度

基础题

1．利用高斯公式计算曲面积分：$\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧。

2. 利用高斯公式计算曲面积分：$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是介于 $z = 0$ 和 $z = 3$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \le 9$ 的整个表面的外侧.

3．计算 $\iint\limits_{\Sigma} (y^2 - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z^2 - x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2 - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$(0 \le z \le h)$ 的外侧.

提高题

1. 求向量 $\vec{A}=(2x+3z)\vec{i}-(xz+y)\vec{j}+(y^2+2z)\vec{k}$ 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量，其中 Σ 是以点 $(3,-1,2)$ 为球心，半径 $R=3$ 的球面，流向外侧。

2. 设 $u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$ 均在闭区域 Ω 上具有二阶连续偏导数，$\dfrac{\partial u}{\partial n},\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数，证明：

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\ ,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面.（此公式叫“格林第二公式”）

§11-7　斯托克斯公式　环流量与旋度

基础题

1．计算$\oint_L (2y+z)dx+(x-z)dy+(y-z)dz$，其中$L$为平面$x+y+z=1$与各坐标面的交线，取逆时针方向为正方向.

2．利用斯托克斯公式将曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$化为曲线积分，并计算积分值，其中$\vec{A}=y^2\vec{i}+xy\,\vec{j}+xz\vec{k}$**,**$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧，$\vec{n}$是$\Sigma$的单位法向量.

3. 计算向量场 $\vec{A}=(x-z)\vec{i}+(x^{3}+yz)\vec{j}-3xy^{2}\vec{k}$ 绕闭曲线 $\Gamma:\begin{cases} z=2-\sqrt{x^{2}+y^{2}} \\ z=0 \end{cases}$ 沿逆时针方向的环流量.

提高题

1. 若 L 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上的闭曲线，其所包围的区域面积为 S，求 $\oint_{L}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$，其中 L 沿正向进行.

2. 设向量场 $A(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 及数量场 $u(x,y,z)$ 均为光滑的，计算 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}A)$ 及 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)$.

自我测试题

一、填空题(每题 5 分，共 20 分)

1．设 C 为正方形 $|x|+|y|=a\ (a>0)$ 的边界，则曲线积分 $\oint_C xy\mathrm{d}s=$________________.

2. 设 C 是以点 $A(1,1)$，$B(2,2)$ 和 $C(1,3)$ 为顶点的三角形的正向边界曲线，则曲线积分 $I=\oint_C 2(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y=$______________________.

3．已知曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2$（$z\le 1$），则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{1+4z}\mathrm{d}S=$___________.

4．若 Σ 为光滑封闭曲面，V 为其所围立体的体积，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 Σ 的外法线的方

向余弦，则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=$____________.

二、解答题（共 58 分）

1.（**16 分**）计算 $I=\iint\limits_{S}xzdydz+yxdzdx+zydxdy$，其中 S 是柱面 $x^2+y^2=1$ 在 $-1\le z\le 1$ 和 $x\ge 0$ 的部分，曲面的法向与 x 轴成锐角.

2.（**16 分**）设 $g'(x)$ 连续，且 $g(1)=g(0)=0$，计算

$$I=\int_L[2xg(y)-y]\mathrm{d}x+[x^2g'(y)-y]\mathrm{d}y,$$

其中 L 是过三点 $A(0,0),B(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ 和 $C(1,1)$，其对称轴与 y 轴平行的抛物线.

3.（**16 分**）计算第二型曲面积分 $I=\iint\limits_{S}f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy$，其中 S 是平行六面体 $(0\le x\le a,0\le y\le b,0\le z\le c)$ 的表面并取外侧为正向，$f(x),g(y),h(z)$ 均为 S 上的连续函数.

4.（10 分）求均匀曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$， $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ 的重心.

三、证明题（共 22 分）

1.（12 分）证明：若 Σ 是任意光滑闭曲面，$\vec{l}$ 为任一固定方向，则 $\oiint\limits_{\Sigma}\cos\alpha \mathrm{d}S=0$，其中

α 是 Σ 上任意一点处的外法线 $\vec{n}$ 和 $\vec{l}$ 的夹角.

2.（10 分）设 p 表示从原点到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $W(x,y,z)$ 的切平面的垂直距离，求证 $\iint\limits_{\Sigma} p\mathrm{d}S = 4\pi abc$，式中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

重点与难点分析

1. 正确理解两类曲线积分与两类曲面积分的概念、性质、几何意义和物理意义.
2. 熟练掌握两类曲线积分和两类曲面积分的计算方法，了解它们之间的相互关系.
3. 掌握格林公式及应用，熟悉和会应用平面曲线积分与积分路径无关的条件。掌握二元函数全微分方程的求解方法.
4. 掌握高斯公式及应用，了解斯托克斯公式，知道通量与散度，环流量与旋度.
5. 会用曲线积分和曲面积分求一些几何量与物理量（弧长、曲面面积、质量、重心、转动惯量、功及流量等）.

一、 曲线积分化为定积分应用举例

例 1　计算对弧长的曲线积分 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为曲线 $\rho=a(0\le\theta\le\frac{\pi}{4})$ 的一段.

解　$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a\sqrt{0+a^2}d\theta=\frac{\pi}{4}ae^a$.

例 2　计算对坐标的曲线积分 $\int_L ydx+zdy+xdz$，其中 L 是曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,x\ge0,y\ge0,z\ge0\quad(a>0,b>0,c>0)$ 从点 $(a,0,0)$ 到 $(0,0,c)$ 的一段曲线弧.

解　设 $x=at$，$z=c(1-t)$，$y=\sqrt{2}b\sqrt{t-t^2}$，起点 $t=1$，终点 $t=0$. 因此

$$\text{原积分}=\int_1^0[ab\sqrt{2}\sqrt{t-t^2}+bc\frac{(1-t)(1-2t)}{\sqrt{2}\sqrt{t-t^2}}-act]dt(\text{令}\mathrm{t}=\cos^2\frac{\theta}{2})$$

$$=\int_0^{\pi}(-\frac{ab}{2\sqrt{2}}\sin^2\theta+\frac{bc}{\sqrt{2}}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta+ac\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$=-\frac{\pi b}{4\sqrt{2}}(a+c)+\frac{ac}{2}$$

二、格林公式计算曲线积分应用举例

例 3 计算 $\oint_L(x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$ 其中 L 是以 $A(1,1),B(3,2),C(2,5)$ 为顶点的三角形，方向取正.

解：$\oint_L(x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$

$$=\iint\limits_D(-4x-2y)dxdy=\iint\limits_{D_1}(-4x-2y)dxdy+\iint\limits_{D_2}(-4x-2y)dxdy=-46\frac{2}{3}$$

三、曲面积分的计算应用举例

例 4　计算对面积的曲面积分 $\iint\limits_S xyzdS$，其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

解　因为 $z=1-x-y$，　$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3}$　所以

$$\iint\limits_D xyzdS=\sqrt{3}\iint\limits_{\substack{x+y\le 1\\ x\ge 0,y\ge 0}} xy(1-x-y)dxdy$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(xy-x^2y-xy^2)=\frac{\sqrt{3}}{120}.$$

例 5　计算第二型曲面积分 $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，并取外侧为正向.

解　对于积分 $\iint\limits_S z^2dxdy$，S 可以表示成

$z=c\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2},(x,y)\in D_{xy}$，

那么 $\iint\limits_S z^2dxdy$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy$$

$$-\iint\limits_{D_{xy}}[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy$$

$$=4c\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}dxdy$$

作变换：$T:x=a+r\cos\theta,y=b+r\sin\theta$

那么 $\iint\limits_S z^2dxdy=\dfrac{8}{3}\pi R^3c$

同理有 $\iint\limits_S x^2dzdy=\dfrac{8}{3}\pi R^3a$，$\iint\limits_S y^2dxdz=\dfrac{8}{3}\pi R^3b$

所以 $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\dfrac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$.

四、高斯公式应用举例

例 6　应用高斯公式计算积分 $\oint\!\!\!\oint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$，其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

解　由高斯公式，有

$$\oiint\limits_{S} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy = 3\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dV = \frac{12}{5}\pi$$

五、斯托克斯公式应用举例

例 7　应用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint\limits_{L} x^2y^3dx + dy + zdz$，其中 L 为 $y^2+z^2=1, x=y$ 所交椭圆的正向.

解　$\oint\limits_{L} x^2y^3dx + dy + zdz = \iint\limits_{S}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$.

综合题

1．设 $P = x^2 + 5\lambda y + 3yz, Q = 5x + 3\lambda xz - 2, R = (\lambda+2)xy - 4z$，计算 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$，其中 L 为螺旋线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = ct(0 \le t \le 2\pi)$.

2．证明：若 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$S$ 为包围区域 V 的曲面外侧，则

(1) $\iiint\limits_{V} \Delta u dxdydz = \oiint\limits_{S} \dfrac{\partial u}{\partial n} dS$；

(2) $\oiint\limits_{S} u\dfrac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint\limits_{V} \nabla \bullet \nabla u dxdydz + \iiint\limits_{V} u\Delta u dxdydz$.

其中 u 在区域 V 及其界面 S 上有二阶连续偏导数，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 外法线方向的方向导数.

3. 设流体的流速为$v=(k,y,0)$，求单位时间内从球面$x^2+y^2+z^2=4$的内部流过球面的流量.

4. 求下列全微分的原函数：

（1）$yzdx+xzdy+xydz$；

（2）$(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2yx)dz$.

5. 计算$I=\int_L x\ln(x^2+y^2-1)dx+y\ln(x^2+y^2-1)dy$，其中$L$是被积函数的定义域内从点$(2,0)$至$(0,2)$的逐段光滑曲线.

参考答案

§11-1

基础题

1. $\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\mathrm{d}t$；$R\mathrm{d}\theta$　**2.** （1） $\sqrt{2}$；（2） $\mathrm{e}^R(2+\frac{\pi}{4}R)-2$；

（3） $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})$；（4）$2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$；

提高题　$\frac{2}{3}\pi a^3$

§11-2

基础题

1.　$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$　2.（1） $-\frac{\pi}{2}R^3$；（2）13；

（3）设$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\end{cases}(0\le\theta\le2\pi)$ 所以

$$\oint_L\frac{-xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(-a\cos\theta)(-a\sin\theta)+a\sin\theta\bullet a\cos\theta]d\theta=0$$

提高题

1.（1）14（2）$\frac{32}{3}$

2. 在空间曲线 L 上力 F 所做的功为

$$W=\int_L F\bullet ds=\int_L ydx-xdy+(x+y+z)dz.$$

（1） $2\pi(\pi b^2-a^2)$　　　（2） $2\pi b(a+\pi b)$

§11-3

基础题

1. $\frac{3}{8}\pi a^2$　　2． $-\pi$

3.

设：$P=2x\cos y-y^2\sin x, Q=2y\cos x-x^2\sin y$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-2y\sin x, \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin x-2x\sin y$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 积分与路径无关，取 $(0,0)$ 到 (x,y) 的折线，原积分为 $x^2\cos x+y^2\sin y$

提高题

1. 利用图形对称性可知面积为 a^2　2. πR^2　3. $a=1,b=-1,u(x,y)=-x^2y+xy^2$.

§11-4

基础题

1. $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　2. $2a\pi\ln\frac{a}{h}$　3. 9π　4. $\pi R(R^2-h^2)$

提高题

1. $2\pi\arctan\frac{H}{R}$　　2. $\frac{2}{15}\pi(6\sqrt{3}+1)$

§11-5

基础题

1. （1） $\frac{2}{15}$ （2） $\frac{1}{2}$　　2. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P+\frac{2}{5}Q+\frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)\mathrm{d}S$

提高题

1. $\frac{1}{8}$　　2. $2\pi a^3$

§11-6

基础题

1. $\frac{12}{5}\pi a^5$　　2. 81π　　3. $-\frac{\pi}{4}h^4$

提高题

1. 108π　　2. （略）

§11-7

基础题：

1. 1　2. 0　3. 12π

提高题

1. 2S　　2. 0, 0

自我测试题

一、1、0　　2、$-\dfrac{4}{3}$　　3、3π　　4、$3V$

二、

1. 设平面

$$
\begin{aligned}
&S_1: x=0,-1\le y\le 1,-1\le x\le 1, \text{与}x\text{负方向相同；}\\
&S_2: x\ge 0, x^2+y^2=1, z=1, \text{方向向上；}\\
&S_3: x\ge 0, x^2+y^2=1, z=-1, \text{方向向下。}
\end{aligned}
$$

V为面S,S_1,S_2,S_3围成的体积 .

$$
\begin{aligned}
I' &= \iint\limits_{S+S_1+S_2+S_3} xzdydz + yzdzdx + zydxdy\\
&= \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz\\
&= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\pi z+\frac{2}{3}\right)dz\\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

又

$$\iint\limits_{S_1} xzdydz + yzdzdx + zydxdy = 0$$

$$\iint\limits_{S_2} xzdydz + yzdzdx + zydxdy = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2=1\\ x\ge 0}} ydxdy$$

$$\iint\limits_{S_3} xzdydz + yzdzdx + zydxdy = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2=1\\ x\ge 0}} -ydxdy$$

有 $I=I'=\dfrac{4}{3}$.

2. 略.

3. 设平行六面体在 yz, zx, xy 平面上的投影分别为 D_{yz}, D_{zx}, D_{xy} 那么

$$I=\iint_{D_{yz}}[f(a)-f(0)]dydz+\iint_{D_{zx}}[g(b)-g(0)]dzdx+\iint_{D_{xy}}[h(c)-h(0)]dxdy$$
$$=[f(a)-f(0)]bc+[g(b)-g(0)]ac+[h(c)-h(0)]ab$$

4.设(x_0,y_0,z_0)由对称性可知$x_0=y_0=z_0$,只需要求出z_0即可

$$z_0=\frac{\iint_S zdS}{\iint_S dS}=\frac{\iint_S zdS}{S}$$

又$S=\frac{1}{2}\pi a^2$以及$\iint_S zdS=\frac{1}{4}\pi a^2$,可知$z_0=\frac{a}{2}$，即重心坐标为$(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

三、1. 设$\vec{l_1}=(a,b,c)$为$\vec{l}$方向的单位向量，$\vec{n_1}$为外法线的单位向量：$\vec{n_1}=(\cos\theta,\cos\varphi,\cos\psi)$，则

$$\cos\alpha=l_1\cdot n_1=a\cos\theta+b\cos\varphi+c\cos\psi$$

应用 Gauss 公式

$$\iint_S\cos(n,l)dS=\iint_S(a\cos\theta+b\cos\varphi+c\cos\psi)dS$$
$$=\iiint_V(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z})\,dxdydz=\iiint_V 0dv=0$$

2.椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上$W(x,y,z)$点的切平面为

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1$$

点$(0,0,0)$到切平面的距离：

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{z^4}}}$$

可以得到

$$dS=\frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}dxdy\ .$$

故积分 $\iint\limits_{\Sigma} p\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_{上半}}\frac{c^2}{z}\mathrm{dxdy}=4\pi abc$.

综合题

1. $\pi a^2(1-\lambda)(5-3c\pi)-8\pi^2c^2$

2. （1）利用高斯公式，有

$$\oiint\limits_{S}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\oiint\limits_{S}[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n,z)]dS$$

$$=\oiint\limits_{S}\frac{\partial u}{\partial x}dydz+\frac{\partial u}{\partial y}dxdz+\frac{\partial u}{\partial z}dxdy$$

$$=\iiint\limits_{V}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})\,dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{V}\Delta udxdydz$$

（2）由高斯公式，有

$$\oiint\limits_{S}u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\oiint\limits_{S}u\frac{\partial u}{\partial x}dydz+u\frac{\partial u}{\partial y}dxdz+u\frac{\partial u}{\partial z}dxdy$$

$$=\iiint\limits_{V}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2+u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})]dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{V}\nabla\bullet\nabla udxdydz+\iiint\limits_{V}u\Delta udxdydz$$

3. 单位时间内流体从球面的内部流过球面的流量为 $E=\iint\limits_{S}kdydz+ydzdx$.

对于积分 $\iint\limits_{S}kdydz$，由于被积函数 $f(x,y,z)=k$ 为常数，前侧曲面 $x=\sqrt{4-y^2-z^2}$ 上的微元 dS 在 yoz 面上的投影为正，$x=-\sqrt{4-y^2-z^2}$ 上的微元 dS 在 yoz 面上投影为负，故 $\iint\limits_{S}kdydz=0$，所以

$$E=\iint\limits_{S}ydxdz=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{4-x^2-z^2}dxdz-\iint\limits_{D_{zx}}(-\sqrt{4-x^2-z^2})dxdz$$

$$=2\iint\limits_{x^2+z^2\le 4}(-\sqrt{4-x^2-z^2})dzdx=\frac{32}{3}\pi$$

4. 因为 $P=yz,Q=xz,R=xy$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=z-z=0,\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=x-x=0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}=y-y=0$$

在全空间成立，所以 $yzdx+xzdy+xydz$ 在全空间为某个函数的全微分，

显然　　$d(xyz)=yzdx+xzdy+xydz$

故　　$u(x,y,z)=xyz+c$

（2）因为 $P=x^2-2yz,Q=y^2-2xz,R=z^2-2xy$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}=0$$

在全空间成立，所以 $(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2yx)dz$ 在全空间为某个函数 u 的全微分。

取 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$ 则

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz+c\\&=\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z z^2dz\\&=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+c\end{aligned}$$

5. 被积函数 $P=x\ln(x^2+y^2-1),Q=y\ln(x^2+y^2-1)$ 在定义域内有连续的偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2xy}{x^2+y^2-1}.$$

这里 D 为二连通区域，$x^2+y^2\le 1$ 是唯一的洞，在围绕该洞任一路径上逆时针方向积分一周，其值相等，等于该洞的循环常数

$$\begin{aligned}w&=\oint_C x\ln(x^2+y^2-1)dx+y\ln(x^2+y^2-1)dy\\&=\oint_C x\ln 3dx+y\ln 3dy\\&=\ln 3\int_0^{2\pi}[2\cos\theta(-2\sin\theta)+4\sin\theta\cos\theta]\,d\theta=0\end{aligned}$$

由此可见积分与路径无关。采用平行于坐标轴的折线路径

$ABC:(2,0)\to(2,2)\to(0,2)$

得 $I=\int_0^2 y\ln(3+y^2)dy+\int_2^0 x\ln(3+x^2)dx=0$.

第十二章　无穷级数

§12-1 常数项级数的概念和性质

基础题

利用级数收敛与发散的定义判别下列级数的敛散性：

（1）$\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$ ；

（2）$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$；（注意 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}=(\dfrac{1}{3})^{\frac{1}{n}}$ ）

（3）$(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2})+\cdots+(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n})+\cdots.$

提高题

判别下列级数的敛散性:

（1） $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ ；(提示 ：$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$)

（3）$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$.

§12-2　常数项级数的审敛法

基础题

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判别下列级数的敛散性:

（1）$1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\dfrac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

2. 用比值审敛法判别下列级数的敛散性:

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n2^n}$;　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

3. 用根值审敛法判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$ 的敛散性.

4．判别下列级数是否收敛, 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

（1）$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$；

（2）$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$.

提高题

判别下列级数的敛散性:

（1）$\frac{3}{4}+2(\frac{3}{4})^2+\cdots+n(\frac{3}{4})^n+\cdots$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}$；（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}\ (p>0)$.

§12-3　幂级数

基础题

求下列级数的收敛区间:

（1）$1-x+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n^2}+\cdots$；

（2）$\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 4}+\cdots+\dfrac{x^n}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}+\cdots$.

提高题

1．求下列级数的收敛域:

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n x^{2n}$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

2. 求下列幂级数的和函数（注意 x 的范围）:

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$；

（2）$x+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$.

3. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 当 $x=0$ 时收敛，当 $x=4$ 时发散，试指出此幂级数的收敛半径 R，并证之.

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛域及和函数，并计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)\quad(a>1).$$

§12-4 函数展开成幂级数

基础题

将下列函数展开成 x 的幂级数:

（1）$\ln(a+x)(a>0)$；

（2）$a^x\,(a>0\text{且}a\neq 1)$；

（3）$\sin^2 x$．

提高题

1．将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数.

2. 将 $f(x)=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{e^x-e}{x-1})$ 展开为 $x-1$ 的幂级数.

§12-5 傅里叶级数

基础题

1. 已知 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，$f(x)=\begin{cases}-\pi/2, & -\pi \le x < -\pi/2 \\ x, & -\pi/2 \le x < \pi/2 \\ \pi/2, & \pi/2 \le x < \pi\end{cases}$ 且设 $s(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，求 $s(0)$ 、$s(\pi)$ 、$s(5\pi/2)$.（提示：直接用 Dirichlet 定理）

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数 .

(1) $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，其在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为：$f(x)=e^{2x} \quad (-\pi \le x < \pi)$.

(2) $f(x)=\begin{cases} e^x & ,-\pi \le x < 0 \\ 1 & ,0 \le x < \pi \end{cases}$.

提高题

1. 将 $f(x)=2x^2 \quad (0 \le x \le \pi)$ 展开为正弦级数与余弦级数.

2. 在区间 $[-\pi,\pi]$ 内把函数 $f(x)=1-\dfrac{2|x|}{\pi}$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

§12-6 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数

基础题

将下列各周期函数展开成傅里叶级数（下面给出函数在一个周期内的表达式）：

（1）$f(x)=1-x^2 \quad (-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2})$ ；

（2） $f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x<0 \\ 1, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2}\le x<1 \end{cases}$.

提高题

将 $f(x)=x^2(0\le x\le 2)$ 展开为正弦级数与余弦级数.

自我测试题

一、判别题（共 40 分）

1. （10 分）利用定义判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$ 的敛散性.

2.（20 分）判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3+2n+1}}$ ；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}x^n$ （提示：$n!\sim\sqrt{2\pi n}(\dfrac{n}{e})^n, n\to\infty$ ）

3.（10 分）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ 是否收敛？若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

二、**解答题**（共 60 分）

1.（10 分）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n+\frac{1}{2^n x^n})$ 的收敛域.

2.（13 分）将 $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数.

3.（10 分）假设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，且 $f(x)=\begin{cases} e^{x} & ,-\pi \le x<0 \\ 1 & ,0 \le x<\pi \end{cases}$；设 $s(x)$ 为 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，求 $s(\pi)$， $s(2\pi)$.

4.（12 分）设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和为 S_n，而 $v_n=\dfrac{1}{S_n}$。已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，

问 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性如何？

5. (15 分)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ 在其收敛域 $|x| < 1$ 内的和函数.

重点与难点分析

1.常数项级数敛散性的判别方法.

（1） 判断通项的极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$是否为零，若不为零，级数发散；若为零，则需进一步判断.

（2） 等比、等差数列或可转化为等比、等差数列的数列，求前n项和，用级数收敛的定义判断.

（3） 正项级数可考虑比较审敛法及其极限形式、比值审敛法、根值审敛法，非正项级数可加绝对值后变为正项级数判断其敛散性，若发散，则需进一步用其他方法判断.

（4） 交错级数用莱布尼兹（Leibniz）定理判断.

2.幂级数

（1）掌握阿贝尔(Abel)定理及比值审敛法，会求幂级数的收敛半径、收敛域及和函数.

（2）会把函数展开成幂级数.

3.傅里叶(Fourier)级数

（1）掌握傅里叶级数收敛定理，即狄利克雷(Dirichlet)充分条件.

（2）掌握以2π为周期的函数以及可延拓为以2π为周期的非周期函数的傅里叶级数.

（3）掌握以$2l$为周期的函数以及可延拓为以$2l$为周期的非周期函数的傅里叶级数.

例 1 判断级数的敛散性:

（1）$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$（注意$\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$）;

（2）$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots$.

解 （1） 通项的极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}=1$，级数发散.

（2） 虽然通项的极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n}=0$，它和调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$比较，调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，它也发散.

级数通项极限不为零，级数发散，但通项极限为零，级数不一定收敛.

例 2 判断下列级数的敛散性：

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n}\quad;$$

解 因为$u_n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})$ 单调递减，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

由 Leibniz 判别法知级数收敛 ;但

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$$

所以原级数仅条件收敛 。

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}=e^{-1}<1$，

所以原级数绝对收敛 .

非正项级数加绝对值后变为正项级数判断其收敛，若发散需进一步用其他方法判断.

例 3 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$的收敛域及和函数，并计算极限

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n})\quad(a>1).$$

解 先求收敛域$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，得收敛半径$R=1$,在端点$x=\pm1$处发散，因此收敛域为$(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=x(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1)$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n})=S(\frac{1}{a})=\frac{a}{(a-1)^2}$.

利用幂级数可逐项微分或积分的性质把未知和函数的级数转化为已知和函数的级数，并可利用和函数求常数项级数的和.

例 4 证明当$0<x<\pi$时，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\cos 2kx=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x$.

证 这是傅里叶级数的反问题，因为级数只含余弦项，将函数偶延拓到$(-\pi,\pi)$内，其傅里叶系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x)dx=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x)\cos nxdx=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx$$

$$a_{2k+1}=0\quad k=1,2,\cdots$$

$$a_{2k}=\frac{1}{4}[\frac{-2}{2k+1}+\frac{2}{2k-1}]=\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}\quad k=1,2,\cdots$$

故 $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)}$ ，结论成立.

定义在 $0<x<\pi$ 上的函数，不论它为奇函数或偶函数或非奇非偶函数，都可通过延拓变为奇函数或偶函数，故可展开为正弦级数或余弦级数.

综合题

1. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}$ 的敛散性，若收敛，求该级数的和.

2. 试求函数 $y=\ln(1+x+x^2+x^3)$ 关于 x 的幂级数.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}$ 的收敛域及和函数，并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)(n+2)2^{n}}$ 的和.

4. 将函数 $f(x)=2+|x|\ (-1<x<1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ 的和.

5.设 $f(x)=\begin{cases} x+2\pi, & -\pi \le x<0 \\ \pi, & x=0 \\ x, & 0<x\le \pi \end{cases}$，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n=0,1,2,\cdots$ 利用函数的傅里叶级数展开式，求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和**.**

参考答案

§12-1

基础题

1．(1)收敛；(2)发散；(3)收敛.

提高题

1. (1)发散；(2)收敛；(3)发散.

§12-2

基础题

1. (1)发散；(2)收敛.　**2.** (1)发散；(2)收敛.　**3.** 收敛　**4.** (1)条件收敛；(2)绝对收敛.

提高题

1. (1)收敛；(2)收敛；(3)收敛；(4)收敛.

§12-3

基础题

1. (1) $[-1,1]$；(2) $(-\infty,\infty)$；

提高题

1. (1) $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$；(2) $[4,6)$；　**2.** (1) $\frac{1}{(1-x)^2}$　$(-1<x<1)$.(2) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$　$(|x|<1)$.

3. 直接用定义；**4.** 收敛半径 $R=1$，收敛域为 $(-1,1)$，$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$，

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n})=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

§12-4

基础题

(1) $\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{na^n}$　$(-a<x\le a)$；

(2) $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$　$(-\infty<x<\infty)$　；

(3) $\sin^2 x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$　$(-\infty<x<\infty)$.

提高题

1. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$　$(-6<x<-2)$；

2. $f(x)=\mathrm{e}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}(x-1)^{n-2}$　$(x\ne1)$；

§12-5

基础题

1. $s(0)=0,\quad s(\pi)=0,\quad s\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

2. (1) $\mathrm{e}^{2x}=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)\right]$；

$(x\ne(2n+1)\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

(2) $f(x)=\frac{1+\pi-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+\left[1-(-1)^n\right]\left(\frac{1}{n}-\frac{n^2}{1+n^2}\mathrm{e}^{-\pi}\right)\sin nx\right\}$

$(x\in(-\pi,\pi))$；

提高题

1.
$$2x^2=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{2}{n^3}+(-1)^n(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n})]\sin nx \qquad 0\le x<\pi$$

$$2x^2=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad 0\le x\le\pi$$

2.注意到 $f\left(x\right)$ 是偶函数，故 $f\left(x\right)$ 的 Fourier 系数

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\,\mathrm{d}\,x=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\mathrm{d}\,x=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\sin nx\Bigg|_0^{\pi}+\frac{4}{n\pi^2}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\pi\right)=\begin{cases}0, & n\text{为偶数时},\\ \dfrac{8}{n^2\pi^2}, & n\text{为奇数时},\end{cases}$$

由于 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 内分段单调，连续，且 $f\left(\pi\right)=f\left(-\pi\right)$,

故在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 内， $f\left(x\right)=\dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

§12-6

基础题

(1) $f(x)=\dfrac{11}{12}+\dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos 2n\pi x,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $$\frac{-1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\{[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}+\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}]\cos n\pi x+\frac{1-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\sin n\pi x\}$$

$$x\ne 2k,2k+\frac{1}{2},\qquad k=0,\quad \pm1,\quad \pm2,\cdots$$

提高题

$$x^2=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\}\sin\frac{n\pi x}{2}\qquad 0\le x<2$$

$$2x^2=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\qquad 0\le x\le 2$$

自我测试题

1. $s_n\to 2(n\to\infty)$，级数收敛.

2. (1)收敛.(2) 当 $0<t<e$ 时，级数收敛；当 $t>e$ 时，级数发散；当 $t=e$，级数发散.

3. 条件收敛.

二、1.收敛域为$(-1,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$.

2. $$f(x)=\frac{1}{4}[(-\frac{1}{3})\frac{1}{1-\frac{x}{3}}-\frac{1}{1-x}]=-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n]x^n \qquad (-1<x<1).$$

3. $s(2\pi)=f(2\pi)=1;\quad s(\pi)=\dfrac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$

4.根据提示条件知$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s_n}$为正项级数收敛，则必有$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}=0$，从而$\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty$，所以正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

5. $$s(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}+\dfrac{1}{1-x} & 0<|x|<1\\ 0 & x=0\end{cases};$$

综合题

1. $\frac{19}{4}$　　**2.** 由于 $y=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$，而

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,\ 1];$$

故 $$\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\qquad x\in[-1,\ 1].$$

所以 当 $x\in(-1,\ 1]$时，有 $$y=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\frac{(-1)^{k-1}-\frac{1}{2}}{k}x^{2k}\right).$$

3. $s(x)=x+\ln(1-x)-\dfrac{x^2}{2}+x\ln(1-x)\qquad x\in(-1,1);\quad \dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{3}{8}.$

4. $2+|x|=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}\qquad (-1\le x<1);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}.$

5. $f(x)$满足傅里叶级数收敛于$f(x)$的充分条件，故当$x\in[-\pi,\pi]$时，

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x),$$

其中$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$，$n=1,2,3,\cdots$.特别$S(0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=f(0)=\pi$.

而$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+2\pi)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,\mathrm{d}x=2\pi$，

故$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S(0)+\frac{a_0}{2}=\pi+\pi=2\pi$.

院（系）________________班级________________学号________________姓名_____________

高等数学（下）期末模拟试卷一

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空题(每题3分，共15分)

1. 过直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ 且垂直于平面 $3x+2y-z=5$ 的平面方程是_________。

2. 设 $x^2+2xy+y+ze^z=1$，则 $dz\big|_{(0,1)}=$ ________________________。

3. 椭圆抛物面 Σ： $z=2x^2+y^2$ 在点 $P_0(1,-1,3)$ 处的法线方程是____________________。

4. 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积为___________。

5. 设 L 为上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L\left(x^2-xy+y^2\right)ds=$ ___________。

二、选择题(每题3分，共15分)

1．方程 $y''-3y'+2y=1+2x-3e^x$ 的特解形式为（　　）

A. $(ax+b)e^x$　　B. $(ax+b)xe^x$　　C. $ax+b+ce^x$　　D. $ax+b+cxe^x$

2. 设 $u_n=(-1)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则级数（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛　　　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散　　　　D. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

3．二元函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处都连续是 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微分的（　　）

A.充分条件　　　　B. 必要条件

C.充要条件　　　　D.既非充分也非必要条件

4. 二次积分 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy =$（　　）

A. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$　　B. $\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$　　C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$　　D. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & -\pi \le x < 0 \\ x-\pi & 0 \le x < \pi \end{cases}$，则周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=2\pi$ 处收敛于（　　）

A. $-\frac{\pi}{2}$　　B. $-\pi$　　C. 0　　D. π^2

三、计算题(共58分)

1、设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$，其中 f 有二阶连续偏导数，g 有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

2、(8分) 求 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ 在闭区域 D：$\dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1$ 上的最大值和最小值。

3、(8分) 求微分方程 $y'' = \dfrac{y'}{x} + xe^x$ 的通解。

4、(14分)（Ⅰ）试确定可导函数 $f(x)$，使在右半平面内，$y[2 - f(x)]dx + xf(x)dy$ 为某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 其中 $f(1) = 2$；　（Ⅱ）求 $u(x, y)$ 。

5、（10分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$的收敛域及和函数。

6、（10分）计算积分$I=\iint_{\Sigma}(y-z)\,dzdx+(x+2z)\,dxdy$，其中$\Sigma$是抛物面$z=x^2+y^2 \quad (0\le z\le 1)$，取下侧。

三、**证明题**(12分)

设函数$\varphi(y)$具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线L上，曲线积分$\oint_L \dfrac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数．证明：对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线$C$，有$\oint_C \dfrac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$。

高等数学（下）期末模拟试卷二

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

题号	一	二	总分
得分			

一、填空题(每空3分，共18分)

1、已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=2$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$___________。

2、设$z=x\ln(xy)$，则$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=$_____________。

3、曲面$x^2+y^2+z=9$在点$(1,2,4)$处的切平面方程为__________________________。

4、设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x$，则$f(x)$的傅里叶级数在$x=3$处收敛于_________，在$x=\pi$处收敛于________。

5、设L为连接$(1,0)$与$(0,1)$两点的直线段，则$\int_L (x+y)ds=$_______。

二、解答下列各题（共 82 分）

1、（8 分）求曲线$\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$在点$M_0\ (1,-1,2)$处的切线及法平面方程。

2、（8 分）求由曲面$z=2x^2+2y^2$及$z=6-x^2-y^2$所围成的立体的体积。

3、（8 分）判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$ 是否收敛？如果收敛，那么是绝对收敛还是条件收敛？

4、（8 分）设 $z = f(xy,\frac{x}{y}) + \sin y$ ，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

5、（8 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}$， 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h \ (0<h<a)$ 截得的顶部。

6、（8 分）抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆，求该椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值。

7、（8 分）计算曲线积分 $\int_L (e^x \sin y - m)dx + (e^x \cos y - mx)dy$ ，其中 m 为常数，L 为由点 $A(a,0)$ 至原点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax \ \ (a > 0)$ 。

8、（8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n}$ 的收敛域及和函数。

9、（9 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$ ，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$ 的上侧。

10、（9 分）设 $f(x)$ 为连续函数，$f(0)=a$ ，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}[z+f(x^2+y^2+z^2)]dv$ ，其中 Ω_t 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{t^2-x^2-y^2}$ 所围成的闭区域，求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^3}$ 。

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期末模拟试卷三

题号	一	二	三	总分
得分				

一、解答题（共 43 分）

1、（5 分）设 $z=f(3x+2y,\dfrac{x}{y})$，其中 $f(u,v)$ 有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2、（6 分）求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面及法线方程.

3、（7 分）设曲线积分 $\int_L [x^2 + \frac{y}{x} f'(x)]dx + [f'(x) + y]dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0) = 0$，$f'(1) = 1$，求函数 $f(x)$.

4、（10 分）判别下列级数是否收敛，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n - \ln n}$.

5、（8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1}$ 的收敛域及和函数.

6、（7 分）设 $u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，函数 $f(r)$ 二次可微，满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，且 $f(1)=f'(1)=1$，求 $f(r)$.

二、计算题（共 45 分）

1、(共 15 分) 计算下列重积分：

（1）$\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}dxdy$，其中 D 由 $y=x$ 及 $y=\sqrt{x}$ 所围成;

（2）$\iint\limits_D \dfrac{xy}{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是 $x^2+y^2\le a^2$ 所围区域在第一像限的部分;

（3）$\iiint\limits_V z dxdydz$，其中V是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=h(h>0)$围成的区域.

2、（共 15 分）计算下列曲线或曲面积分：

（1）$\int_L z ds$，其中L为$x=\cos t, y=\sin t, z=t(0\le t\le \pi)$；

（2）$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{1+4z}dS$，其中$\Sigma$是抛物面$z=x^2+y^2$位于平面$z=1$下方的部分；

（3）$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$是柱面$x^2+y^2=1$被$z=0$及$z=3$所截部分的外侧。

3、（共 15 分）解下列微分方程：

（1）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x},y|_{x=1}=2$；

（2）$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+2xy=3x^2$；

（3）$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=e^{-x}$.

三、**证明题**（共 12 分）

1、（7 分）设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均发散，讨论下列级数的敛散性，要求证明你的结论或给出反例。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$；　　2、$\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$.

2、（5 分）设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明：$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

高等数学（下）期末模拟试卷四

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空题(每题3分，共15分)

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

1、设 $z=\cos(x^2y)$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\frac{\pi}{2})}=$__________。

2、函数 $z=6(x-y)-x^2-y^2$ 的极值点为_______________。

3、交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy=$____________________。

4、当 p _____________时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 收敛。

5、微分方程 $y'=\frac{e^x}{\sec^2 y}$ 的通解为_______________________。

二、选择题(每题3分，共15分)

1、函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$ 、$f_y'(x_0,y_0)$ 均存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的（　　）

A.充分条件　　　　B.必要条件

C.充要条件　　　　D.既非充分条件又非必要条件

2、设 $x^2+y^2\le 2x$， $y\ge 0$，则 $\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$（　　）

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \rho f(\rho)d\rho$　　　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 f(\rho)d\rho$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} \rho f(\rho)d\rho$　　　　D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(\rho)d\rho$

3、设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，取逆时针方向，则 $\int_L -ydx+xdy=$（　　）

A. 2π　　B. -2π　　C. π　　D. $-\pi$

4、求微分方程 $y''+6y'+9y=xe^{-3x}$ 的特解时，应设（　　）

A. $y^*=(ax+b)e^{-3x}$　　　　B. $y^*=x(ax+b)e^{-3x}$

C. $y^*=x^2(ax+b)e^{-3x}$　　　　D. $y^*=x^2(ax+b)$

5、将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数，则 $f(x)=$（　　）

A. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$　　　　B. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

C. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$　　　　D. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}x^{2n}$

三、解答题（每题7分，共63分）

1、 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x-z,y-z)=0$ 确定的隐函数，F 具有一阶连续偏导数，且 $F_u'+F_v'\ne 0$，其中 $u=x-z$， $v=y-z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2、求$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$，其中$\Omega$为上半球体$x^2+y^2+z^2\le 4, z\ge 0$.

3、求幂级$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$的收敛范围.

4、求曲线$\begin{cases} y=2x^2 \\ z=x^3 \end{cases}$在点$(1,2,1)$处的切线方程和法平面方程.

5、求 $\iint_D x\sqrt{y}dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x^2$ 围成的区域.

6、求 $I=\int_L (e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$，其中 L 为曲线 $y=x^2$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的一段.

7、求微分方程 $y''-4y'=e^x$ 的通解.

8、计算 $\iint_\Sigma (x^2-2xy)dydz+(y^2-2yz)dzdx+(z^2-2xz)dxdy$，其中 Σ 是半球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2(z\geq a)$ 的上侧.

9、设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x + 2\int_0^x f(t)\sin t dt = x + 1$，求 $f(x)$.

四、证明题（7分）

设 $a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$，$(n = 2,3,\cdots)$，试证：当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 收敛，并求其和函数.

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期末模拟试卷五

题号	一	二	三	总分
得分				

一、证明题（4 分）

设 $z=\ln\tan\dfrac{y}{x}$，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

二、计算题（共 36 分）

1、（18 分）计算下列重积分：

（1）$\iint_D (3x+2y)d\sigma$，其中 D 由 $x=0, y=0$ 及 $x+y=2$ 围成；

（2）$\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$；

（3）$\iiint\limits_{\Omega} zdv$,Ω 由曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围成.

2、（18 分）计算下列曲线或曲面积分：

（1）$\int_{\Gamma} zds$,$\Gamma: x=t\cos t, y=t\sin t, z=t\ (0\le t\le t_0)$；

（2）$\int_{L}(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$，其中 L 为顶点为 $(0,0)$，$(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界；

（3） $\iint\limits_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$，其中 Σ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ (z \geq 0)$ 的上侧.

三、解答题（共 60 分）

1、（12 分）判断下列级数是否收敛.若收敛，是条件收敛，还是绝对收敛？

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；（2） $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

2、（6 分）将 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ 展开为 $(x+4)$ 的幂级数.

3、（21 分）解下列微分方程：

（1）求 $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ 的通解；

（2）求 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2(\ln y-x)}$ 的通解；

（3）求 $y''-4y'+3y=0$， $y|_{x=0}=6$， $y'|_{x=0}=10$ 的特解.

4、（6 分）求函数 $z=2x^2+y^2$ 在点 $P(1,1)$ 处的梯度及沿该梯度方向的方向导数.

5、（8分）求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在点 $P(1,1,1)$ 的切线及法平面方程.

6、（7 分）在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使该切平面与三坐标轴所围成的四面体的体积最小，求切点的坐标.

高等数学（下）期末自测题

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1、设线性无关的函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 均是二阶非齐次线性微分方程

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，c_1, c_2 是任意常数，则该方程的通解是（　　　）

A．$y=c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$　　B．$y=c_1y_1+c_2y_2+y_3$

C．$y=c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$　　D．$y=c_1y_1+c_2y_2-(c_1+c_2)y_3$

2、曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的法平面方程为（　　　）

A．$x+2y-3z=6$　B．$x+2y+3z=6$　C．$x-2y-3z=6$　D．$x-2y+3z=6$

3、设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，

在该邻域内该方程只能确定（　　　）

A．一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

B．两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

C．两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

D．两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

4、设 $f(x,y)$ 为连续函数，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ =（　　　）

A．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$　　B．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

C．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　　D．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

5、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^3}$ 的收敛情况是（　　　）

A．绝对收敛　　B．收敛性与 α 有关　　C．发散　　D．条件收敛

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1、极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\tan(xy)}{y}=$ ____________ 。

2、函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(1,1)$ 处的全微分 $df\big|_{(1,1)}=$ __________________________ 。

3、设L为正方形$|x|+|y|=\dfrac{1}{2}$的边界曲线，则曲线积分$\oint_L xy^2 ds=$ ____________ 。

4、设Σ表示平面$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$在第一卦限部分，则$\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\dfrac{4}{3}y\right)ds=$ __________。

5、函数$z=xe^{2y}$在点$P(1,0)$处沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$的方向导数为____________ 。

三、解答题(每题 8 分，共 64 分)

1、设$z=f\left(xy,x-y\right)$，f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2、交换积分次序，然后计算$I=\int_1^4 dx\int_x^4 \dfrac{1}{x\ln y}dy$.

3、计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y+z^2)dv$，其中$\Omega$由$x^2+y^2=z^2$，$z=h(h>0)$所围成的闭区域.

4、计算曲线积分：$I=\int_L (x^2-e^x\cos y)dx+(e^x\sin y+3x)dy$ ，

其中 L 是从点 $O(0,0)$ 沿右半圆周 $x^2+y^2=2y$ 到点 $A(0,2)$ 的弧段.

5、计算曲面积分：$I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$ ，

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\left(z\geq 0\right)$ 的下侧.

6、将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并指出其收敛域.

7、已知曲线积分$\int_L [\sin x - f(x)]\dfrac{y}{x}dx + f(x)dy$ 与路径无关，且 $f(\pi)=1$ ，求函数 $f(x)$.

8、从斜边长为l的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

四、**证明题**(6分)

设$a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right), \quad n = 1, 2, \cdots$，求证：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$收敛.

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期末考试真题一

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、选择题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分)

1、直线 $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{1}$ 与平面 $\pi: x-y-2z+6=0$ 之间的夹角为（　　）

$(A)\ 0$　　$(B)\ \dfrac{\pi}{6}$　　$(C)\ \dfrac{\pi}{4}$　　$(D)\ \dfrac{\pi}{2}$

2、设函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的偏导数存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=$（　　）

$(A)\ 0$　　$(B)\ f_x(2a,b)$　　$(C)\ f_x(a,b)$　　$(D)\ 2f_x(a,b)$

3、二次积分 $\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$ 交换积分次序后为（　　）

$(A)\ \int_0^4 dy\int_y^{2\sqrt{y}} f(x,y)dx$　　$(B)\ \int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)dx$

$(C)\ \int_0^4 dy\int_y^{\frac{y^2}{4}} f(x,y)dx$　　$(D)\ \int_0^4 dy\int_0^4 f(x,y)dx$

4、设椭圆 L ：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的周长为 l，则 $\oint_L(\sqrt{3}x+2y)^2 ds=$（　　）

$(A)\ l$　　$(B)\ 3l$　　$(C)\ 4l$　　$(D)\ 12l$

5、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的（　　）

(A) 充要条件　　(B) 充分条件　　(C) 必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分，总计 15 分)

1、已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点 M 处的切平面与平面 $2x+2y+z-1=0$ 平行，则点 M 的坐标为_________________。

2、设函数 $y=xe^{2x}$ 是某二阶常系数线性齐次微分方程的解，则该微分方程为_________________。

3、设 $\sum$ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}dS=$________________。

4、函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数为______________________________。（注明收敛域）

5、设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且在 $(-\pi,\ \pi]$ 上有表达式 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0,\\ 1, & 0<x\le\pi\end{cases}$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(2\pi)=$________________。

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、设函数 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4x-6y-8z+5$ 求：

（1）、函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(2,1,2)$ 处的梯度.

（2）、函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(2,1,2)$ 处方向导数的最大值.

2、设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求 dz.

3、计算二重积分 $\iint\limits_{D} xdxdy$，其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ $(x>0)$ 与三条直线

$y=x,\ x=3,$

$y=0$ 所围成的平面闭区域.

4、计算 $\oint\limits_{L}(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$，其中曲线 L ：$x^2+y^2=9$，方向为逆时针.

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、已知曲线 $y=f(x)$ 过原点且在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$，求此曲线方程.

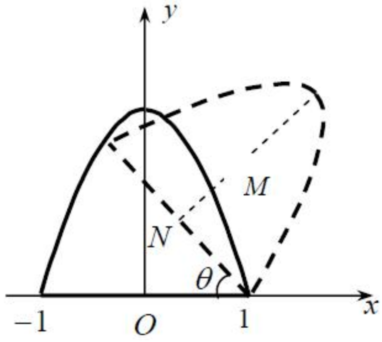
2、求函数 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$ 在区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4\}$ 上的最大值和最小值.

3、判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3^n \cdot n}$ 的敛散性，若收敛，求该级数的和.

4、计算 $\oiint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-\mathrm{z})xdydz$ ，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0,\mathrm{z}=3$ 所围成的空间闭区域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

五、应用题(本题 8 分)

如图，一平面均匀薄片是由抛物线 $y=a(1-x^2)(a>0)$ 及 x 轴所围成的，现要求当此薄片以 $(1,0)$ 为支点向右方倾斜时，只要 θ 角不超过 45° ，则该薄片便不会向右翻倒，问参数 a 最大不能超过多少？



六、证明题(本题 6 分)

设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)=1$, $f''(0)=2$,

证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$ 收敛.

高等数学（下）期末考试真题二

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

题号	一	二	三	四	五	六	总分

一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 总计 15 分)

1、直线 $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{8}$ 与平面 $x+2y-z+2=0$ 的位置关系是（　　　）

(A) 垂直　　(B) 斜交　　(C) 在平面上　　(D) 平行但不在平面上

2、对于函数 $z=f(x,y)$，下列命题正确的是：（　　）

(A) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都连续，则 $f(x,y)$ 必可微　　(B) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 连续

(C) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 的极限存在　　(D) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 可微

3、设积分区域 $D=\{(x,y)\big||x|\le 1,|y|\le 1\}$，则下式中正确的是（　　）

(A) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}(x+y)dxdy=4\int_0^1 xe^{x^2}dx$　　(B) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}(x+y)dxdy=0$

(C) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}(x+y)dxdy=(4\int_0^1 xe^{x^2}dx)^2$　　(D) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}(x+y)dxdy=8\int_0^1 xe^{x^2}dx$

4、设 $\sum$ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$ =（　　　）

(A) 0　　(B) $\pi \mathrm{R}e^{R}$　　(C) $2\pi \mathrm{R}e^{R^2}$　　(D) $4\pi \mathrm{R}^2\mathrm{e}^{R}$

5、下列级数中属于条件收敛的是（　　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n-1}$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^2}$

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分，总计 15 分)

1、曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x-z+1=0$ 的交线平行于 z 轴的投影柱面方程

为________________________________。

2、设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则 $f'_x(x,1)=$____________________。

3、设区域 D 由曲线 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 所围成，则 $\iint\limits_D (x+y)dxdy=$___________。

4、将函数 $f(x)=xe^{-2x}$ 展开成 x 的幂级数，其中含 x^4 项的系数是______________。

5、$f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且在（$-\pi$，π]上有表达式 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0,\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(\pi)$ =________________。

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、函数 $f(x,y,z)=xy+zx+yz-x-y-z+6$，问在点 $P(3,4,0)$ 处沿怎样的方向 l，f 的变化率最大？并求其最大的变化率。

2、设 $z=f(x^2+y^2,\dfrac{y}{x})$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

3、计算二次积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 y\sin\dfrac{x}{y}dy$。

4、计算$\oint_L xds$，其中L为由直线$y=x$及抛物线$y=x^2$所围成的区域的整个边界。

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、求曲面$z-e^z+2xy=3$在点$(1,2,0)$处的切平面方程和法线方程。

2、求函数$f(x,y)=x^2-y^2+2$在区域$D=\{(x,y)\big|x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\}$上的最大值和最小值。

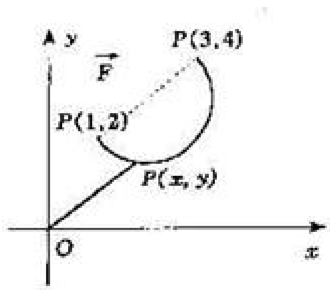
3、设Σ是由曲线$\begin{cases} z=y^2, \\ x=0, \end{cases}$ $(0\le z\le 2)$绕z轴旋转而成的曲面，写出Σ的方程并计算

$\iint\limits_{\Sigma} 4(1-y^2)dzdx+z(8y+1)dxdy$，其中$\Sigma$取下侧。

4、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 在收敛域 $(-1,1)$ 内的和函数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)4^{n}}$ 的和。

五、应用题（本题 8 分）

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\vec{F}$ 作用（见图）。$\vec{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$，求变力 $\vec{F}$ 对质点 P 所作的功。



六、证明题(本题 6 分)

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，令$s_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n \ (n = 1, 2, \cdots)$，证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_n}$收敛。

高等数学（下）期末考试真题三

题号	一	二	三	四	五、六	总分

一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 总计 15 分)

1、曲面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是由（　　）

（A）xOz 平面上曲线$z = x$绕z轴旋转而成 （B）yOz 平面上曲线$z = |y|$绕z轴旋转而成

（C）xOz 平面上曲线$z = x$绕x轴旋转而成 （D）yOz 平面上曲线$z = |y|$绕y轴旋转而成

2、设$z = y^{y^x}$，则$\frac{\partial z}{\partial y} =$（　　）

(A) $y^x y^{y^x - 1}$

(B) $y^x y^{y^x} \left[\frac{1}{y} + (\ln y)^2 \right]$

(C) $y^x \left[\frac{1}{y} + (\ln y)^2 \right]$

(D) $y^x y^{y^x} \left[\frac{1}{y} + \frac{x}{y} \ln y \right]$

3、设区域D是xoy平面上以点$A(1,1)$、$B(-1,1)$、$C(-1,-1)$为顶点的三角形区域，区域D_1是D在第一象限的部分，则：$\iint_D (xy + \cos x \sin y) dxdy =$（　　）

(A) $2\iint\limits_{D_1}(\cos x\sin y)dxdy$　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xydxdy$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　(D) 0

4、设Σ为曲面$z=2-(x^2+y^2)$在xoy平面上方的部分，则$\iint\limits_{\Sigma}zdS=$（　　）

（A）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2-r^2}\left(2-r^2\right)\sqrt{1+4r^2}rdr$　　（B）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2}\left(2-r^2\right)\sqrt{1+4r^2}rdr$

（C）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-r^2\right)rdr$　　（D）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-r^2\right)\sqrt{1+4r^2}rdr.$

5、正项级数(1) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 、(2) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n{}^3$ ，则下列说法正确的是（　　）

（A）若（1）发散、则（2）必发散　　（B）若（2）收敛、则（1）必收敛

（C）若（1）发散、则（2）不确定　　（D）级数（1）、（2）敛散性相同

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分，总计 15 分)

1、已知三个单位向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$________

2、函数$u=x^2-xy+2z$在点$(1,2,-1)$处的方向导数的最小值为________

3、将$\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e}f(x,y)dx$交换积分次序得 ________

4、设Σ是母线平行于oz轴的柱面的部分，它的底是位于xoy平面上的光滑曲线L，它的高z是x,y的非负函数$z=f(x,y)$，用曲线积分表示柱面Σ的面积$A=$________

5、设函数$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其以$2\pi$为周期的傅里叶级数在点$x=\pi$处收敛于________ 。

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、判别直线l:$\dfrac{x-2}{3}=y+2=\dfrac{z-3}{-4}$与平面$\pi: x+y+z-3=0$的位置关系。

2、设$z=f(x^2,\dfrac{x}{y})$，其中$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

3、计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\left|y-x^{2}\right|d\sigma$，$D=\{(x,y)\,\|x|\le 1,\ 0\le y\le 1\}$。

4、求数项级数 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3^{2}}+\dfrac{1}{3\cdot 3^{3}}+\dfrac{1}{4\cdot 3^{4}}+\cdots$ 的和。

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分，每题要有必要的解题步骤)

1、求曲线 $x=\arctan t^{2}, y=\ln(1+t^{4}), z=\dfrac{2t}{1+t^{4}}$ 在对应于 $t=-1$ 点处的切线方程和法平面方程.

2、计算$\int_C y^2 \mathrm{d}s$，其中C为摆线的一拱：$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$，$0\le t\le 2\pi$。

3、计算曲线积分$\oint_L 2y^3dx+(x^4+6y^2x)dy,$其中$L$是由$x^4+y^4=1$与$x$轴，$y$轴在第一象限所围成的区域$D$的正向边界曲线。

4、求在第一卦限中过定点(a,b,c)的平面，使之与三个坐标面所围成的四面体体积最小。

五、解答题(本题 8 分)

设$\sum$是曲面$z=x^2+y^2$（$z\le 1$）的下侧，试计算向量场$\vec{A}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$穿过$\sum$指

定侧的流量。

六、证明题(本题 6 分)

设$\{a_n\}$为严格递增有界的正数列，证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$收敛。

高等数学（下）期末考试真题四

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分

一、选择题（本题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分，每小题给出四个选项，请将正确答案填在题后的括号内）

1．若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则在 (x_0,y_0) 点下列结论中不一定成立的是（　　　　）

(A) 连续　　　　(B) 偏导数存在　　　　(C) 偏导数连续　　　　(D) 切平面存在

2. 直线 $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$ 与平面 $x+2y-5z-11=0$ 的位置关系是（　　　　）

(A) 平行但不在平面上　　　　(B) 在平面上　　　　(C) 垂直　　　　(D) 斜交

3. 若曲面 Σ： $x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z)^2 dS=$（　　　　）

(A) πa^4　　　　(B) $2\pi a^4$　　　　(C) $4\pi a^4$　　　　(D) $6\pi a^4$

4．设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$，则级数（　　　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 都收敛　　　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 都发散　　　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 收敛

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分，请将正确答案填在题后的横线上）

1．已知矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 的模分别为 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=\sqrt{2}$, 及 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}$，则 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=$ ____________ 。

2. 已知 $z=\ln(1+\dfrac{x}{y})$, 则 $dz\big|_{(1,1)}=$ ______________________ 。

3．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$ 的收敛域是____________________ 。

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于____________________ 。

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分，写出必要的解题过程）

1．求过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $L:\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程。

2. 设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 。

3. 计算积分 $\iint\limits_{D} e^{\frac{y}{x}}dxdy$ ，其中 $D:$由$y=x^2, y=2x$ 所围成的区域。

4. 计算半径为 R 、中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I（设线密度 $\mu=1$ ）。

四、计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分，写出必要的解题过程）

1．设 $z=f(x,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设 $f(x,y,z)=e^{xyz}+x^2+y^2$，

(1) 求 f 在点 $P(1,1,1)$ 处的梯度；　(2) 求 f 在点 $P(1,1,1)$ 处方向导数的最大值。

3．计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} 2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+(9-z^3)dxdy$

其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2+1 \quad (1\le z\le 2)$，取下侧。

4. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数，并求展开式成立的区间。

五、应用题题（本题满 7 分）

求质点 $M(x,y)$）受作用力 $\vec{F}=(y+3x)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}$ 沿路径 L 所作的功 W，其中 L 是沿椭圆 $4x^2+y^2=4$ 顺时针方向的一周。

六、综合题（本题满 7 分）

某工厂生产两种型号的机床，其产量分别为 x 台和 y 台，成本函数为

$$c(x,\quad y)=x^2+2y^2-xy \quad （万元）$$

若市场调查分析，共需两种机床 8 台，求如何安排生产，总成本最少？最小成本为多少？

七、证明题（本题满 6 分）

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 收敛于 1。

高等数学（下）期末考试真题五

题号	一	二	三	四	五	总分

一、单项选择题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分)

1、设 $z=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2)$，则 $dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=$（　　　）

$(A)\ \dfrac{1}{3}(dx+dy)$　　$(B)\ (dx+dy)$　　$(C)\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}(dx+dy)$　　$(D)\ \dfrac{1}{2}(dx+dy)$

2、设区域 $D:x^2+y^2\le 4$，则积分 $\iint_D f(x^2+y^2)d\sigma$ 在极坐标下的累次积分为（　　　）

$(A)\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 f(r^2)rdr$　　$(B)\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 f(r^2)dr$

$(C)\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 f(r^2)rdr$　　$(D)\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 f(r^2)dr$

3、设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则对面积的曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$ =（　　　）

$(A)\ \pi$　　$(B)\ 2\pi$　　$(C)\ 3\pi$　　$(D)\ 4\pi$

4、设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则下列级数必收敛的为（　　　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n u_n}{n}$　　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$　　　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$　　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$

5、设线性无关函数y_1, y_2, y_3都是二阶非齐次线性方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的解，C_1,C_2是任意常数, 则该非齐次线性方程的通解是（　　　）

(A) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　　(B) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$　　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1、曲面$xy+y^2-e^z=1$在点$(1,1,0)$处的切平面方程为__________________________。

2、设$D:x^2+y^2\le 2x$，由二重积分的几何意义知$\iint\limits_D\sqrt{2x-x^2-y^2}\,dxdy$ =____________。

3、设椭圆$L:\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$的周长为$a$，则曲线积分$\oint\limits_L(5xy-6x^2-10y^2)ds$ =__________。

4、当______________________时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$条件收敛。

5、若某三阶常系数线性齐次微分方程有解为$y_1=e^{-x}$，$y_2=xe^{-x}$，$y_3=e^x$；则该三阶常系数线性齐次微分方程为__________________________________。

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每题 7 分，总计 28 分,每题要有必要的解题步骤)

1、设数量场$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4x-6y-8z+5$

求：(1)函数f在点$(2,1,2)$处的梯度。(2)函数f在点$(2,1,2)$处方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$的最大值。

2、计算二次积分$\int_{\pi}^{2\pi}dy\int_{y-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$。

3、求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解。

4、计算积分 $I=\int_L (e^{-x^2}\sin x+3y-\cos y)dx+(x\sin y-y^4)dy$，其中 L 是从点 $A(-\pi,0)$ 沿曲线 $y=\sin x$ 到点 $B(\pi,0)$ 的弧段。

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每题 7 分，总计 28 分,每题要有必要的解题步骤)

1、设 $z=f\left(x^2-y^2,\ \ xy\right)$，其中函数 f 具有二阶连续的偏导数，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} 2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+(9-z^3)dxdy$，

其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2+1 \quad (1\le z\le 2)$，取下侧。

3、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和。

4、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且 $f(x)=x$ （$-\pi\le x<\pi$），试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数。

五、解答题(本题 8 分)

已知曲线过点 $(1,1)$，曲线上任一点 $P(x,y)$ 处的切线交 y 轴于点 Q，以 PQ 为直径所作的

圆均过点 $F(1,0)$，求此曲线的方程。

六、证明题(本题 6 分)

已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明数列 $\left\{\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+a_n\right)\right\}$ 收敛。

参考答案

高等数学（下）期末模拟试卷一

一、1. $x-8y-13z+9=0$ 2. $-2dx-dy$ 3. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$

4. $\frac{\pi}{6}$ 5. π

二、1. D 2. C 3. A 4. B 5. A

三、

1、根据复合函数求偏导公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot(-\frac{y}{x^2}),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot(-\frac{y}{x^2})\right)$$

$$=f_1'+y[f_{11}''x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-g''\cdot\frac{y}{x^3}-g'\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{y}{x^3}g''-\frac{1}{x^2}g'$$

2、在D的内部，

$$\begin{cases}f_x'=2x=0\\ f_y'=-2y=0\end{cases}\Rightarrow(0,0)\text{ 为驻点，且 }f(0,0)=0,$$

在D的边界上，

由 $\frac{x^2}{4}+y^2=1\Rightarrow y^2=1-\frac{x^2}{4}\Rightarrow z=x^2-y^2=\frac{5x^2}{4}-1\quad(-2\le x\le 2)$

$\frac{dz}{dx}=\frac{5x}{2}=0\Rightarrow x=0$，此时，$y=\pm1$,，则有 $f(0,\pm1)=-1,\quad f(\pm2,0)=4$

比较上述函数值知，

函数 $z=f(x,y)=x^2-y^2$ 在 D 上的最大值为4,最小值为-1。

3、方程不显含y，故令$y'=p$,则$y''=p'$，代入原方程得$p'-\frac{1}{x}p=xe^x$，

利用通解公式求得通解为$p=x(e^x+C_1)$，

积分得原方程通解为$y=(x-1)e^x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$。

4、（1）$P=y[2-f(x)]$，$Q=xf(x)$，

因为$y[2-f(x)]dx+xf(x)dy$是函数$u(x,y)$的全微分，所以有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，

即　$f(x)+xf'(x)=2-f(x)$，故$xf'(x)+2f(x)=2$，　上述微分方程的通解为

$f(x)=1+\frac{C}{x^2}$. 由$f(1)=2$得$C=1$，所以$f(x)=1+\frac{1}{x^2}$。

（2）在右半平面内取$(x_0,y_0)=(1,0)$，则

$$u(x,y)=\int_1^x P(x,0)\,dx+\int_0^y Q(x,y)\,dy=\int_0^y (x+\frac{1}{x})\,dy=y(x+\frac{1}{x})\text{。}$$

5、易求得其收敛域为$(-1,1)$，令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x\cdot S_1(x)\text{，}\quad\text{其中}\ S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}\text{，}$$

两边积分$\int_0^x S_1(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^{n-1}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$，

再积分$\int_0^x(\int_0^x S_1(x)\,dx)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)x^n dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}$，

因此$S_1(x)=(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2}{(1-x)^3}$，故原级数的和函数$S(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$。

6、补$\Sigma_0: z=1\ (x^2+y^2\le 1)$,取上侧,

设Σ与Σ_0围成空间区域Ω，Ω及Σ_0在xOy平面上的投影区域$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$。

由Gauss公式，

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}(y-z)dzdx+(x+2z)dxdy-\iint\limits_{\Sigma_0}(y-z)dzdx+(x+2z)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial y}(y-z)+\frac{\partial}{\partial z}(x+2z)]dv-\iint\limits_{\Sigma_0}(y-z)dzdx+(x+2z)dxdy$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}dv-\iint\limits_{\Sigma_0}(y-z)dzdx+(x+2z)dxdy\text{。}$$

因为Σ_0垂直于zOx平面，Σ_0在zOx平面上的投影区域面积为零，

所以 $\iint\limits_{\Sigma_0}(y-z)dzdx=0$，

$$I=3\iint\limits_{D_{xy}}[\int_{x^2+y^2}^{1}dz]dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}[x+2(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(3-5x^2-5y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(3-5r^2)rdr=\frac{\pi}{2}\text{。}$$

四、将C分解为：$C=l_1+l_2$，另作一条曲线l_3围绕原点且与C相接，则

$$\oint_C\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=\oint_{l_1+l_3}\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}-\oint_{l_2+l_3}\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0\text{。}$$

高等数学（下）期末模拟试卷二

一、1、-4； 2、$-\dfrac{1}{y^2}$；3、$2x+4y+z=14$； 4、3，0； 5、$\sqrt{2}$.

二、1、方程两边对x求导，得$\begin{cases}3y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-2x\\ y\dfrac{dy}{dx}-z\dfrac{dz}{dx}=-3x\end{cases}$， 从而$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{5x}{4y}$，$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{7x}{4z}$

该曲线在$\left(1,-1,2\right)$处的切向量为$\vec{T}=(1,\frac{5}{4},\frac{7}{8})=\frac{1}{8}(8,10,7)$，

故所求的切线方程为$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$；

法平面方程为 $8\left(x-1\right)+10\left(y+1\right)+7\left(z-2\right)=0$ 即 $8x+10y+7z=12$

2、$\begin{cases} z=2x^2+2y^2 \\ z=6-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2$，该立体$\Omega$在$xOy$面上的投影区域为

$D_{xy}:x^2+y^2\le 2$，

故所求的体积为$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int_{2\rho^2}^{6-\rho^2}dz=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho(6-3\rho^2)d\rho=6\pi$。

3、由$\lim\limits_{n\to\infty}n\left|u_n\right|=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})^n=1>0$，知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$发散，

又$|u_n|=\ln(1+\frac{1}{n})>\ln(1+\frac{1}{n+1})=|u_{n+1}|,\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=0$.故所给级数收敛且条件收敛。

4、$\frac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y})+0=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$

$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''$。

5、Σ的方程为$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，Σ在xOy面上的投影区域为

$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2-h^2\}$，又$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=a\big/\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{adxdy}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\rho d\rho}{a^2-\rho^2}$$

$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-\rho^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

5、设$M(x,y,z)$为该椭圆上的任一点，则点M到原点的距离为$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

令$L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1)$，

则由$\begin{cases}L_x=2x-2\lambda x+\mu=0\\ L_y=2y-2\lambda y+\mu=0\\ L_z=2z+\lambda+\mu=0\\ z=x^2+y^2\\ x+y+z=1\end{cases}$，解得$x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，$z=2\mp\sqrt{3}$．于是得到两个可能极值点

$$M_1(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}),\quad M_2(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3})$$

又由题意知，距离的最大值和最小值一定存在，所以距离的最大值与最小值分别在这两点处取得.

故$d_{\max}=|OM_2|=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，$d_{\min}=|OM_1|=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$ 。

7、记L与直线段$\overline{OA}$所围成的闭区域为D，则由格林公式，得

$$I_2=\oint_{L+\overline{OA}}(e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy=-m\iint_D d\sigma=-\frac{\pi}{8}ma^2,$$

而$I_1=\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy=-m\int_0^a dx=-ma$

$$\therefore\int_L(e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy=I_2-I_1=ma-\frac{\pi}{8}ma^2。$$

8、$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow R=3$，收敛区间为 $(-3,3)$，又当$x=3$时，

级数成为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散；当$x=-3$时，级数成为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，收敛，

故该幂级数的收敛域为$[-3,3)$。

令 $s\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$ （$-3\le x<3$），则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{3})^{n-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-x/3}=\frac{1}{3-x},(|x|<3)$$

于是 $s(x)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{dx}{3-x}=-\ln\left(3-x\right)\Big|_0^x=\ln 3-\ln\left(3-x\right)$，（$-3\le x<3$）。

9、取 Σ_1 为 $z=0(x^2+y^2\le 1)$ 的下侧，记 Σ 与 Σ_1 所围成的空间闭区域为 Ω，则由高斯公式，有

$$I_2=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3\left(z^2-1\right)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}6\left(x^2+y^2+z\right)dv$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho^2}\left(\rho^2+z\right)\rho dz=2\pi,$$

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3\left(z^2-1\right)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}3\left(z^2-1\right)dxdy=3\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=3\pi$$

$$\therefore\quad I=I_2-I_1=2\pi-3\pi=-\pi\ 。$$

10、$F\left(t\right)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^t\left[r\cos\varphi+f\left(r^2\right)\right]r^2dr$

$$=2\pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^t r^3dr+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2dr\right]$$

$$=\pi\left[\frac{t^4}{8}+\left(2-\sqrt{2}\right)\int_0^t r^2f\left(r^2\right)dr\right]$$

故 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F\left(t\right)}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\pi\left[\frac{t^3}{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)t^2f(t^2)\right]}{3t^2}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi\lim\limits_{t\to 0^+}f(t^2)=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a$

高等数学（下）期末模拟试卷三

一、1、$\frac{\partial z}{\partial x}=3\cdot f_1^{'}+\frac{1}{y}\cdot f_2^{'}$，　　$\frac{\partial z}{\partial y}=2\cdot f_1^{'}-\frac{x}{y^2}\cdot f_2^{'}$

2、$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6$

$n=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,6z)$,

$n\Big|_{(1,1,1,)}=(2,4,6)$,

切平面　$2(x-1)+4(y-1)+6(z-1)=0$，即 $x+2y+3z-6=0$。

法线　$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$。

3、$f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

4、（1）记 $u_n=\frac{n^2}{2^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}=\frac{1}{2}<1$，原级数绝对收敛。

（2）记 $u_n=\frac{1}{n-\ln n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，且当 n 较大时，数列 u_n 单调递减，由 Leibniz 判别法知原级数收敛，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 发散，故原级数条件收敛。

5、收敛域是 $[-1,1]$，和函数是 $S(x)=\begin{cases}(x+1)\ln(x+1)-x,-1<x\le 1\\ 1,x=-1\end{cases}$.

6、$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3})\frac{du}{dr}+\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3})\frac{du}{dr}+\frac{y^2}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3})\frac{du}{dr}+\frac{z^2}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}$

$\therefore\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}=0$

令 $\frac{du}{dr}=p$，则有 $\frac{dp}{dr}+\frac{2}{r}=0$，$p=\frac{c_1}{r^2}$，$\frac{du}{dr}=\frac{c_1}{r^2}$，$f(r)=u(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2$

由 $f(1)=f'(1)=1$ 可得 $f(r)=2-\frac{1}{r}$。

二、1、（1）$\iint_D\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^1dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1(1-y)\sin ydy=1-\sin 1$；

（2）$\iint_D\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\cos\theta\sin\theta\cdot rdr=\frac{a^2}{4}$；

（3）$\iiint_V zdxdydz=\int_0^h zdz\iint_{x^2+y^2\le z^2}dxdy=\int_0^h\pi z^3dz=\frac{1}{4}\pi h^4$.

2、（1）$\int_L zds=\int_0^{\pi} t\cdot\sqrt{2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$；

（2）$\iint_{\Sigma}\sqrt{1+4z}dS=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\cdot\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1+4r^2)rdr=3\pi\ ;$$

（3）用 Σ_1,Σ_2 分别表示平面 $z=0$ 及 $z=3$ 上单位圆 $x^2+y^2=1$ 内部分，它们与 Σ 一起构成闭曲面，记其所围区域为 Ω。由高斯公式，得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_{\Omega}3dv=9\pi$$

$$\iint_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy=0$$

$$\iint_{\Sigma_2} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}3dxdy=3\pi$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=9\pi-3\pi=6\pi\ .$$

3、（1）$y^2=2x^2(\ln x+2)$；　　（2）$y=\frac{C+x^3}{1+x^2}$；　　（3）$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{4}xe^{-x}$.

三、1、（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 发散。因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 都是正项级数，且 $a_n\le\max(a_n,b_n)$ 由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 发散。

（2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$ 可能收敛也可能发散，

例如，设 $a_n=b_n=\frac{1}{n}$，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散；

又例如，设 $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n},b_n=\frac{1-(-1)^n}{n}$，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$ 收敛。

2、等式 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 两边分别对 x,y 求偏导，

$2\cos(x+2y-3z)\cdot(1-3\frac{\partial z}{\partial x})=1-3\frac{\partial z}{\partial x}$，　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{6\cos(x+2y-3z)-3}$

$2\cos(x+2y-3z)\cdot(2-3\frac{\partial z}{\partial y})=2-3\frac{\partial z}{\partial y}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4\cos(x+2y-3z)-2}{6\cos(x+2y-3z)-3}$

上面两式相加即得 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

高等数学（下）期末模拟试卷四

一、1、$-\pi$　2、$(3,-3)$　3、$\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$　4、$p>0$　5、$\tan y=e^x+c$

二、1、D　2、C　3、A　4、C　5、A

三、

1、$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_u}{F_u+F_v}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_v}{F_u+F_v}$。

2、$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 r^4\sin\varphi dr=\dfrac{64}{5}\pi$

3、$(-1,1]$

4、切线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-1}{3}$；法平面方程$x+4y+3z-12=0$.

5、$\iint_D x\sqrt{y}dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy=\dfrac{6}{55}$.

6、积分与路径无关

$$I=\int_L (e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy=\int_0^1(1+x)dx+\int_0^1(e^y-2y)dy=e-\frac{1}{2}.$$

7、特征方程$r^2-4r=0$，$r_1=0,r_2=4$。　$y^*=Ae^x=-\dfrac{1}{3}e^x$，$y=C_1+C_2e^{-4x}-\dfrac{1}{3}e^x$.

8、记$\Sigma_1:x^2+y^2\le a^2,z=a$，下侧。$\Sigma+\Sigma_1$所围区域记为$\Omega$，利用高斯公式，

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2-2xy)dydz+(y^2-2yz)dzdx+(z^2-2xz)dxdy=0$$

$$\iint_{\Sigma}(x^2-2xy)dydz+(y^2-2yz)dzdx+(z^2-2xz)dxdy$$

$$=-\iint_{\Sigma_1}(x^2-2xy)dydz+(y^2-2yz)dzdx+(z^2-2xz)dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le a^2}(a^2-2ax)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le a^2}a^2dxdy=\pi a^4.(2ax\text{是奇函数})$$

9、方程两边求导，得$f'(x)\cos x-f(x)\sin x+2f(x)\sin x=1$

$$f'(x)+f(x)\tan x=\frac{1}{\cos x}$$

方程两边令$x=0$，则$f(0)=1$，故$f(x)=\sin x+\cos x$.

四、易知$a_n>0$。又$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\ge a_n$。

对于幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$，因为$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{a_n}\le\dfrac{2a_n}{a_n}=2$，即

$$a_2\le 2a_1，\ a_3\le 2a_2\le 2^2a_1，\ \cdots,a_n\le 2^{n-1}a_1$$

又幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}a_1x^{n-1}$在$|x|<\dfrac{1}{2}$内收敛，所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$在$|x|<\dfrac{1}{2}$内也收敛。

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=a_1+a_2x+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^{n-1}=a_1+a_2x+\sum_{n=3}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n-2})x^{n-1}$$

$$=a_1+a_2x+\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-1}=a_1+a_2x+x\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^{n-2}+x^2\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-3}$$

$$=a_1+a_2x-a_1x+(x+x^2)\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-3}$$

$$(1-x-x^2)\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=1\text{，}\quad\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=\frac{1}{1-x-x^2}\,.$$

高等数学（下）期末模拟试卷五

一、1、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0\,.$$

二、1、（1）$\iint_D(3x+2y)d\sigma=5\iint_D xd\sigma=5\int_0^2dx\int_0^{2-x}xdy=\dfrac{20}{3}$；

（2）$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b r^2dr=\dfrac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$；

（3）$\iiint_\Omega zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{r^2/2}^2 zdz=\dfrac{16}{3}\pi$.

2、（1）$\int_\Gamma zds=\int_0^{t_0}t\sqrt{t^2+2}dt=\dfrac{1}{3}(t^2+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0}=\dfrac{1}{3}[(t_0^2+2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}]$。

（2）$\int_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy=\iint_D 4dxdy=4\times\dfrac{1}{2}\times3\times2=12$。

（3）记Σ_1是$x^2+y^2\le a^2, z=0$下侧。$\Sigma+\Sigma_1$所围区域记为Ω，则

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi dr=\frac{6}{5}\pi a^5\text{。}$$

三、1、(1)对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$，所以绝对收敛。

（2）对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+100}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$，$\because \frac{\sqrt{n}}{n+100}>\frac{1}{n+100}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+100}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$不是绝对收敛，而是条件收敛.

2、$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-(x+4)/3}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-(x+4)/2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}](x+4)^n,(-6<x<2).$$

3、（1）$(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=x(y^2+1)dx+y(1-x^2)dy=0$，

$\frac{xdx}{1-x^2}+\frac{ydy}{1+y^2}=0$，　$\int\frac{xdx}{1-x^2}+\int\frac{ydy}{1+y^2}=\ln c$，于是$(1+y^2)=c(1-x^2)$.

（2）$\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=\frac{2\ln y}{y}$，一阶线性方程，$x=e^{-\int\frac{2}{y}dy}(\int\frac{2\ln y}{y}e^{\int\frac{2}{y}dy}dy+C)$，

于是$x=\ln y-\frac{1}{2}+\frac{C}{y^2}$.

（3）$y=C_1e^x+C_2e^{3x}$，$y=4e^x+2e^{3x}$.

4、$gradz\Big|_P = 4\vec{i} + 2\vec{j}$，$\dfrac{\partial z}{\partial l}|_P = |\operatorname{grad} z|_P| = \sqrt{20}$.

5、$\vec{T}|_P = (1,2,3)$，切线方程 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$，

法平面方程 $(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0,$ 即 $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

6、设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为椭球面上的一点，令 $F(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$，则

$$F_x\Big|_P = \frac{2x_0}{a^2},\quad F_y\Big|_P = \frac{2y_0}{b^2},\quad F_z\Big|_P = \frac{2z_0}{c^2}$$

过 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程是

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

即 $$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

切平面在三个轴上的交点分别是

$$x = \frac{a^2}{x_0},\quad y = \frac{b^2}{y_0},\quad z = \frac{c^2}{z_0}$$

四面体的体积是

$$V = \frac{1}{6}xyz = \frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$$

在条件 $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2} = 1$ 下求 V 的最小值。

令 $u = \ln x_0 + \ln y_0 + \ln z_0$，作函数

$$G = \ln x_0 + \ln y_0 + \ln z_0 + \lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)$$

由 $$\begin{cases} G'_{x_0} = 0, G'_{y_0} = 0, G'_{z_0} = 0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

可得 $x_0=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$， $y_0=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$， $z_0=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

即当切点为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 时，四面体的体积最小 $V_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$.

高等数学（下）期末考试真题一

一、选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 总计 15 分)

1、(A)　　2、(D)　　3、(B)　　4、(D)　　5、(C)

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分，总计 15 分)

1、$(1,1,2)$　2、$y''-4y'+4y=0$　3、4π　4、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\quad(0<x<4)$　**5**、0

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、**解**：$gradf=\{2x-4,4y-6,6z-8\}$;　$gradf\big|_{(2,1,2)}=\{0,-2,4\}$　……4 分

$\left|gradf\big|_{(2,1,2)}\right|=2\sqrt{5}$, 函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(2,1,2)$ 处方向导数的最大值为 $2\sqrt{5}$　……3 分

2、解：等式两边分别对 x 求偏导，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x+z}$　……2 分

等式两边分别对 y 求偏导，得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z^2}{y(x+z)}$　……2 分

故　$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=\dfrac{z}{x+z}dx+\dfrac{z^2}{y(x+z)}dy$　……3 分

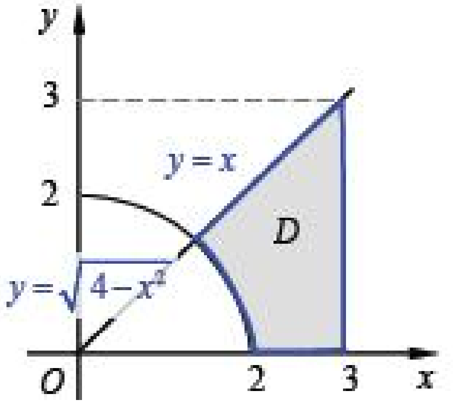
3、解：

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy=\iint\limits_D r\cos\theta\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_2^{\frac{3}{\cos\theta}}r^2\cos\theta\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{9}{\cos^2\theta}-\frac{8}{3}\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\left[9\tan\theta-\frac{8}{3}\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=9-\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$



（本题也可先计算大的三角形区域积分，采用直角坐标，再计算扇形区域积分，采用极坐

标，两者相减更简单）

4、**解**：$P=2xy-2y,Q=x^2-4x$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x-4,\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x-2$ ……2 分

由格林公式 $\oint\limits_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=\iint\limits_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy$ ……2 分

$$=\iint\limits_D(-2)dxdy=(-2)\cdot 9\pi=-18\pi$$ ……3 分

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分,每题要有必要的解题步骤)

1、**解**：由条件可知$\dfrac{dy}{dx}=2x+y$，且$y(0)=0$ ……2 分

其通解为 $y=e^{\int dx}\left[\int 2xe^{-\int dx}dx+c\right]=e^x\left[2\int xe^{-x}dx+c\right]=ce^x-2x-2$ ……4 分

将$y(0)=0$代入通解中，得$c=2$，故所求曲线方程为$y=2e^x-2x-2$ ……1 分

2、**解**：$f_x=2x$，$f_y=8y$；令$\begin{cases}f_x=0\\f_y=0\end{cases}$ 解得驻点：$(0,0)$，在区域内$f(0,0)=9$ ……2 分

在边界上$\boldsymbol{x^2=4-y^2}$代入，得$f=3y^2+13\quad\boldsymbol{(-2\le y\le 2)}$，

令$\dfrac{df}{dy}=0$得$y=0$，这时$\boldsymbol{x=\pm 2}$；

$f(2,0)=13,f(-2,0)=13,f(0,-2)=f(0,2)=25$ ……3 分

比较得最大值：$f(0,-2)=f(0,2)=25$，最小值：$f(0,0)=9$ ……2 分

3、**解**：先考查$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{3^n\cdot n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n\cdot n}$，记$u_n=\dfrac{1}{3^n\cdot n}$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\cdot n}{3^{n+1}\cdot(n+1)}=\dfrac{1}{3}<1$，故原级数绝对收敛； ……3 分

记$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$，易知收敛半径$R=1$，当$-1<x<1$时，

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，于是 $S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$； ……3 分

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n\cdot n}=S(-\frac{1}{3})=-\ln\frac{4}{3}$。 ……1 分

4、解：$P=(y-z)x,Q=0,R=x-y$， $\frac{\partial P}{\partial x}=y-z,\frac{\partial Q}{\partial y}=0,\frac{\partial R}{\partial z}=0$ ……2 分

由高斯公式 $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-\mathrm{z})xdydz$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(y-z)dxdydz$$ ……3 分

$$=\iiint\limits_{\Omega}(-z)dxdydz=-\frac{9}{2}\pi$$ ……2 分

（计算积分 $\iiint\limits_{\Omega}(-z)dxdydz$ 可以采用截面法或柱坐标）

五、应用题（本题 8 分）

解：记此均匀薄片的质心坐标为 $\mathrm{M}(\overline{x},\overline{y})$，由对称性知 $\overline{x}=0$， ……1 分

$$\overline{y}=\frac{\iint\limits_{D}ydxdy}{\iint\limits_{D}dxdy}=\frac{2\int_0^1dx\int_0^{a(1-x^2)}ydy}{2\int_0^1a(1-x^2)dx}=\frac{2}{5}a$$ ……3 分

即质心坐标为 $\mathrm{M}(0,\frac{2}{5}a)$；

由条件可知，$\frac{2}{5}a=1$，得 $a=\frac{5}{2}$。 ……4 分

（问题等价于：当转 45° 时 M 在 $(1,0)$ 点的正上方，也就是此时 $\mathrm{OM}\perp x$ 轴，即转之前 OM 与 x 轴也是夹角 45°）

六、证明题（本题 6 分）

证明：由题目条件可知 $f'(0)=0$，将 $f(x)$ 在 $x=0$ 的小邻域内泰勒展开，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

将 $x=\dfrac{1}{n}$ 代入上式，得

$$f(\frac{1}{n})=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+\frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$f(\frac{1}{n})-1=\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

即当 $n\to\infty$ 时， $f(\dfrac{1}{n})-1>0$ 且与 $\dfrac{1}{n^2}$ 为等价无穷小； ……4 分

又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(\dfrac{1}{n})-1]$ 也收敛。 ……2 分

高等数学（下）期末考试真题二

一、选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 总计 15 分)

1、(C)　　2、(A)　　3、(B)　　4、(D)　　5、(B)

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分，总计 15 分)

1、$x^2-x+y^2=1$　　2.、 1　　3、2π　　4、$-\dfrac{4}{3}$　　5、 $\dfrac{\pi}{2}$

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、解: $grad f(3,4,0)=(y+z-1,x+z-1,x+y-1)\big|_P=(3,2,6)$

f 沿方向 $l=(3,2,6)$ 的变化率最大； ……4 分

其最大的变化率为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_P=\left|grad f(3,4,0)\right|=7$ 。 ……3 分

2、解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot f_1'-\dfrac{y}{x^2}\cdot f_2'$, ……3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(2yf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}'')-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}(2yf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}'')$$

$$=-\frac{1}{x^2}f_2'+4xyf_{11}''+2(1-\frac{y^2}{x^2})f_{12}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''$$ ……4 分

3、解：$\int_0^1 dx\int_x^1 y\sin\frac{x}{y}dy=\int_0^1 dy\int_0^y y\sin\frac{x}{y}dx$（交换积分顺序） ……2 分

$$=\int_0^1 y^2(1-\cos 1)dy$$ ……3 分

$$=\frac{1}{3}(1-\cos 1)$$ ……2 分

4、解：L 由 L_1 和 L_2 两段组成，其中 $L_1: y=x(0\le x\le 1)$；$L_2: y=x^2(0\le x\le 1)$，于是 $\oint_L xds=\int_{L_1}xds+\int_{L_2}xds=\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}dx+\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}dx$ ……4 分

$=\int_0^1\sqrt{2}xdx+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1)$ ……3 分

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分,每题要有必要的解题步骤)

1、解：令 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$, 点 $(1,2,0)$ 处的切平面的法向量为

$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,2,0)}=(2y,2x,1-e^z)\big|_{(1,2,0)}=2\cdot(2,1,0)$； ……3 分

切平面方程为：$2x+y-4=0$； ……2 分

法线方程为：$\begin{cases}\frac{x-1}{2}=y-2\\ z=0\end{cases}$. ……2 分

2、

解:令 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y=0,$ 得驻点（0，0）， ……2 分

$$L(x,y;\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda(x^2+\frac{y^2}{4}-1),$$

$L_x=2x+2\lambda x=0$，$L_y=-2y+\frac{1}{2}\lambda y=0$，$L_\lambda=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0$，

可能极值点 （0，2），（0，-2），（1，0），（-1，0）， ……3 分

$f(0,0)=2$，$f(0,2)=f(0,-2)=-2$，$f(1,0)=f(-1,0)=3$

函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在区域 $D=\{(x,y)\left|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\right.\}$ 上的最大值和最小值分别为 3 和-2。 ……2 分

3、解： Σ 的方程是 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 2)$； ……2 分

$\sum$ 不封闭， 设 Σ_1 为 $z=2,(x^2+y^2\le 2)$ 的上侧，则

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 4(1-y^2)dzdx+z(8y+1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}dr\int_{\rho^2}^{2}rdz=2\pi,$$

（或 $\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_0^2[\iint\limits_{D_z}dxdy]dz=\int_0^2\pi zdz=2\pi$ ） ……2 分

$$\iint\limits_{\Sigma_1}4(1-y^2)dzdx+z(8y+1)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}2(8y+1)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}2dxdy=4\pi$$ ……2 分

故 $\iint\limits_{\Sigma}4(1-y^2)dzdx+z(8y+1)dxdy=2\pi-4\pi=-2\pi$ 。 ……1 分

4、解： 设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ， $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2},\quad |x|<1$ ， ……2 分

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad |x|<1$$ ， ……3 分

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)4^n}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}(\frac{1}{2})^{2n+1}=2s(\frac{1}{2})=\ln 3$$ 。 ……2 分

五、应用题(本题 8 分)

解： 由图可知 $\vec{F}=(-y,x)$, 故所求的功为

$$W=\int_{\widehat{AB}}\vec{F}\cdot\vec{ds}=\int_{\widehat{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$$ ……3 分

$$=(\int_{\widehat{AB}+\overline{BA}}+\int_{\overline{AB}})(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$$ ……3 分

$$=2\iint_D dxdy+\int_{-1}^{3}[-(x+1)+x]dx=2\pi-2$$ ……2 分

六、证明题(本题 6 分)

证明： 显然数列 S_n 单调增加，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$ ；

对于交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{s_n}$ ，因为数列 $\frac{1}{s_n}$ 单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}=0$ ，由莱布尼兹定理知级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{s_n}$收敛。 ……6 分

高等数学（下）期末考试真题三

一、选择题

1、(B)　　2、(D)　　3、(A)　　4、(D)　　5、(C)

二、填空题

1、$-\frac{3}{2}$　　2.、$-\sqrt{5}$　　3、$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$　　4、$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$　　5、$\frac{\pi^2-1}{2}$

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、解: l 过点 $P(2,-2,3)$，方向向量为$\vec{s}=\{3,1,-4\}$，平面法向量为：$\vec{n}=\{1,1,1\}$ ……3 分

$\vec{n}\cdot\vec{s}=0$，且 P 满足π 方程 ……3 分

故 l 必在平面π 上 ……1 分

2、

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot\frac{1}{y}$， ……3 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x^2}{y^2}f_{12}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{y^2}f_2'$ ……4 分

3、解: $I=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)dxdy$ ……2 分

$=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy+\int_{-1}^1 dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy$ ……3 分

$=\int_{-1}^1[\frac{y^2}{2}-x^2y]\Big|_{x^2}^1 dx+\int_{-1}^1[x^2y-\frac{y^2}{2}]\Big|_0^{x^2} dx=\frac{11}{15}$ ……2 分

4、解: 先求幂级数$\frac{1}{1}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots$的和函数$S(x)$，

易求得收敛域为$[-1,1)$， ……2 分

且$S(x)=\frac{1}{1}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots=-\ln(1-x)\quad(-1\le x<1)$ ……4 分

则级数 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{4\cdot 3^4}+\cdots$ 的和为 $S(\frac{1}{3})=-\ln(1-\frac{1}{3})=\ln\frac{3}{2}$ ……1 分

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分,每题要有必要的解题步骤)

1、**解**：$t=-1$ 对应点 $\left(\frac{\pi}{4},\ln 2,-1\right)$，对应的切线方向向量

$\vec{s}=\{-1,-2,-1\}=-\{1,2,1\}$，…3 分

切线方程 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{y-\ln 2}{2}=z+1$ ……2 分

法平面方程 $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(y-\ln 2\right)+(z+1)=0$ ……2 分

2、**解**：由于 $ds=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$ ……2

分

$\int_C y^2 \mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$ ……2 分

$=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 udu=\frac{256}{15}a^3$ ……3 分

3、**解**:由格林公式，原式 $=\iint\limits_D 4x^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ……4

分

$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{(1-y^4)^{\frac{1}{4}}}4x^3\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$ ……3 分

4、**解**:设所求平面的截距式方程为 $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$，（$A,B,C>0$）

问题即为求 $V=\frac{1}{6}ABC$ 在条件 $\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}=1$，（$A,B,C>0$）下的最小值。 ……2 分

令拉格朗日函数 $F=ABC+\lambda(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}-1)$ ……1 分

于是有 $\begin{cases} F_A' = 0 \\ F_B' = 0 \\ F_C' = 0 \\ F_\lambda' = 0 \end{cases}$，得 $A = 3a, B = 3b, C = 3c$ ；……3 分

故所求平面方程为 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 3$ 。……1 分

五、解答题(本题 8 分)

解：$\sum$ 不封闭，补 $\sum_1 : z = 1$ 取上侧，

流量 $Q = \iint\limits_{\Sigma} \vec{A} d\vec{S} = \iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$

$$Q = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} \vec{A} d\vec{S} - \iint\limits_{\Sigma_1} \vec{A} d\vec{S}$$

……4 分

$$= \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} dxdy$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \left(2x + 2y + 2z\right) dv - \pi$$

由对称性，$\iiint\limits_{\Omega} xdv = 0$，$\iiint\limits_{\Omega} ydv = 0$

$\iiint\limits_{\Omega} zdv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr \int_{r^2}^1 zdz = \pi \int_0^1 r\left(1 - r^4\right) dr = \dfrac{1}{3}\pi$（截面法更简单）

故 $Q = \dfrac{2}{3}\pi - \pi = -\dfrac{1}{3}\pi$ ……4 分

六、证明题(本题 6 分)

证明：令 $u_n = 1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 S_n，

因 $\{a_n\}$ 为严格递增有界的正数列，则存在正数 M，且 $a_n \le M$，

$0 < u_n = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} < \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_1}$, ……3 分

于是 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{k+1} - a_k}{a_1} = \dfrac{a_{n+1} - a_1}{a_1} \le \dfrac{M - a_1}{a_1}$

正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$S_n$有上界，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}})$收敛。

高等数学（下）期末考试真题四

一、选择题

1．(C) 2．(D) 3．(C) 4．(B)

二、填空题

1．2 2．$\dfrac{1}{2}\left(dx-dy\right)$ 3．$\left[-1,3\right)$ 4．$\dfrac{\pi^2}{2}$

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分，写出必要的解题过程）

1. 解： 由已知点$A(3,1,-2),B(4,-3,0)$在平面上，直线L的方向向量为$\vec{s}=(5,2,1)$

则$\overrightarrow{AB}=(1,-4,2)$，所求平面的法向量为$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{s}=(-8,9,22)$ ……3 分

平面直线的方程为$8(x-3)-9(y-1)-22(z+2)=0$ ……3 分

即为$8x-9y-22z-59=0$ ……1 分

2. 解： $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，即$x=z\ln z-z\ln y$，令$F(x)=x-z\ln z+z\ln y$ ……1 分

$F_x=1,F_y=\dfrac{z}{y},F_z=\ln y-\ln z-1$； ……2 分

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{\ln z-\ln y+1}=\frac{z}{x+z},$$ ……2 分

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z}{y(\ln z-\ln y+1)}=\frac{z^2}{y(x+z)}$$ ……2 分

3. 解： $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2x}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y$ ……3 分

$=\int_0^2 x(e^2-e^x)\mathrm{d}x$ ……2 分

$=e^2-1$ ……2 分

4. 解： $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta \quad (-\alpha\le\theta\le\alpha)$

$I=\int_L y^2 ds$ ……2 分

$=\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\sin^2\theta\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\,d\theta$ ……3 分

$=R^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\theta d\theta=R^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$ ……2 分

四、计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分，写出必要的解题过程）

1. 解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'$ ……3 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf_{12}''+f_2'+xyf_{22}''$ ……4 分

2. 解： $f_x=yze^{xyz}+2x$，$f_x(1,1,1)=e+2$

$f_y=xze^{xyz}+2y$，$f_y(1,1,1)=e+2$， $f_z=xye^{xyz}$，$f_z(1,1,1)=e$， ……3 分

（1）$gradf(1,1,1)=\{e+2,e+2,e\}$。 ……2 分

（2）在点 p(1,1,1)方向导数的最大值为：

$|gradf(1,1,1)|=\sqrt{(e+2)^2+(e+2)^2+e^2}=\sqrt{3e^2+8e+8}$。 ……2 分

3. 解： 取平面Σ_1： $z=2$，取上侧．则Σ与Σ_1构成封闭曲面，取外侧．令Σ与Σ_1所围空间区域为Ω，由 Gauss 公式，得

$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz-\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(9-2^3)dxdy$ ……4 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{1-r^2}^{2}dz-\iint\limits_{x^2+y^2\le1}dxdy$

$=-\dfrac{\pi}{2}$ ……3 分

4. 解： $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$ ……2 分

$$=\frac{1}{1+(x-3)}-\frac{1}{2+(x-3)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-3)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{2^n}$$ ……3 分

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-3)^n$$ ……1 分

其中 $\left|\frac{x-3}{2}\right|<1$, 即 $x\in(1,5)$ ……1 分

五、应用题题（本题满 7 分）

解： $w=\oint_L\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\oint_L(y+3x)dx+(2y-x)dy$ ……3 分

$$=-\iint\limits_{4x^2+y^2\le 1}(-1-1)dxdy$$ ……2 分

$$=4\pi$$ ……2 分

六、综合题（本题满 7 分）

解： 即求成本函数 $c(x,\quad y)$ 在条件 $x+y=8$ 下的最小值

构造拉格朗日函数 $F(x,\quad y)=x^2+2y^2-xy+\lambda(x+y-8)$ ……2 分

解方程组 $\begin{cases}F'_x=2x-y+\lambda=0\\F'_y=-x+4y+\lambda=0\\F'_\lambda=x+y-8=0\end{cases}$ ……3 分

解得 $\lambda=-7,x=5,y=3$

实际问题有最值且拉格朗日函数有唯一的一驻点，即为所求，当这两种型号的机床分别生产 5 台和 3 台时，总成本最小，最小成本为：

$c(5,\quad 3)=5^2+2\times 3^2-5\times 3=28$（万） ……2 分

七、证明题（本题满 6 分）

证明： $a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\mathrm{d}\tan x = \dfrac{1}{n+1}$； ……3 分

记级数一般项 $u_n = \dfrac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$，

部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$， ……2 分

显然，$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 收敛于 1。 ……1 分

高等数学（下）期末考试真题五

一、单项选择题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分)

1、(A)　　2 、(C)　　3、(D)　　4、(C)　　5、(B)

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1 、$x+3y-z-4=0$　　2、$\dfrac{2\pi}{3}$　3、$-30a$　　4、$0<p\le 1$　5、$y''' + y'' - y' - y = 0$

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每题 7 分，总计 28 分,每题要有必要的解题步骤)

1、

解：(1) $gradf = \{2x-4, 4y-6, 6z-8\}$；　$gradf\big|_{(2,1,2)} = \{0,-2,4\}$ ·········4 分

(2) $\left|gradf\right|_{(2,1,2)} = 2\sqrt{5}$，故 f 在点 $(2,1,2)$ 处方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$。 ·········7 **分**

2、解： $\int_{\pi}^{2\pi} dy \int_{y-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} dx \int_{\pi}^{x+\pi} \dfrac{\sin x}{x} dy$ ·········4 分

$$= \int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$ ·········7 **分**

3、 特征方程 $r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -3$，对应齐次方程的通解为

$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$　（其中 C_1, C_2 为任意常数） ·········4 分

因 $\lambda = -3$ 是特征根，设特解为 $y^* = Axe^{-3x}$，其中 A 为待定常数，代入原方程，

得 $A = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow y^* = -\dfrac{1}{4}xe^{-3x}$ ·········6

分

从而得通解 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{4} x e^{-3x}$ ………7

分

4、

解：这里 $P = e^{-x^2} \sin x + 3y - \cos y$，$Q = x \sin y - y^4$。

由于 $\frac{\partial P}{\partial y} = 3 + \sin y, \frac{\partial Q}{\partial x} = \sin y$，可见 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 不成立。 ………2

分

记 $P_1 = e^{-x^2} \sin x - \cos y$，则 $I = \int_L P_1 dx + Q dy + \int_L 3y dx \underline{\underline{记}} I_1 + I_2$，$(I_2 = \int_L 3y dx)$。

则曲线积分 I_1 满足与路径无关的条件，选择与 L 起终点相同的直线段 $y = 0$，有

$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-x^2} \sin x - 1) dx = -2\pi$，而 $I_2 = \int_L 3y dx = \int_{-\pi}^{\pi} 3 \sin x dx = 0$ ………6

分

故所求积分 $I = -2\pi$。 ………7

分

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每题 7 分，总计 28 分,每题要有必要的解题步骤)

1、**解**：$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x f_1' + y f_2'$ ………3

分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy f_{11}'' + \left(2x^2 - 2y^2\right) f_{12}'' + xy f_{22}'' + f_2'$$ ………7

分

2、

解：取平面 Σ_1： $z = 2$，取上侧．则 Σ 与 Σ_1 构成封闭曲面，取外侧．令 Σ 与 Σ_1 所围空间区域为 Ω，由 Gauss 公式，得

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$$ ………2

分

$$= \int_1^2 \pi(z-1) dz - \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(9 - 2^3\right) dxdy = -\frac{\pi}{2}$$ ………7

分

3、

解：$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1, x = \pm 1$ 时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛，故此幂级数的收敛域为 $[-1,1]$。 ………2

分

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ ， $(-1\le x\le 1)$,则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(\int_0^x(-x^2)^{n-1}dx)$$

………5

$$=x\cdot\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1})dx)=x\cdot\arctan x,(-1\le x\le 1)$$

分

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=s(1)=\frac{\pi}{4}$ **………7**

分

4、

解：所给函数满足收敛定理的条件，它在点 x $(x=(2k+1)\pi)$ 处不连续，因此， $f(x)$ 的傅立叶级数收敛于 $\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0$ ，在连续点 x $(x\ne(2k+1)\pi)$ 收敛于 $f(x)$ 。 ………2

分

若不计 $x=(2k+1)\pi$ ，则 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数。$a_n=0.$ $(n=0,1,2,\cdots)$ ………3

分

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{n}(-1)^{(n+1)}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$ ………5

分

故 $f(x)=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots+\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}\sin nx+\cdots)$

$(x\in R,且x\ne\pm\pi,\pm3\pi,\cdots)$ **………7**

分

五、解答题(本题 8 分)

解：过点 $P(x,y)$ 的切线方程

$Y-y=y'(X-x)$ **，令** $X=0$ **得** $Y=y-xy'$ **，即** $Q(0,y-xy')$ ………2

分

由题意， $|PF|^2+|QF|^2=|PQ|^2$

得 $(x-1)^2+y^2+1+(y-xy')^2=x^2+(xy')^2$ **，化简**

$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+1-x}{xy}$ **，即** $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=\frac{1-x}{x}\cdot y^{-1}$ （Bernoulli 方程） ………4

分

令 $z=y^2$ ，得 $\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=\frac{2(1-x)}{x}$ **，其通解为** $z=2x-1+cx^2$

故原方程通解为 $y^2 = 2x - 1 + cx^2$，又 $y(1) = 1$，得 $c = 0$。

所以该曲线的方程为 $y^2 = 2x - 1$。 ·········8 分

六、证明题(本题 6 分)

证明：记 $x_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdot\cdots\cdot(1+a_n)$

因正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$，由正项级数比较审敛法的极限形式知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 也收敛并记其和为 s ·········4 分

即 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k) = s$，于是 $\lim_{n\to\infty}\ln x_n = s$， $\lim_{n\to\infty} x_n = e^s$

故数列 $\left\{(1+a_1)(1+a_2)\cdot\cdots\cdot(1+a_n)\right\}$ 收敛。 ·········6 分

第九章 向量代数与空间解析几何

§8-1 向量及其线性运算

基础题

1．在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$$A(3,0,0);\ B(0,-2,0);\ C(0,0,1);\ D(3,4,0);\ E(0,4,3).$$

2．求点 (a,b,c) 关于 (1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

3．试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

4． 已知空间三点 $A(3,-1,2)$、$B(1,2,-4)$、$C(-1,1,2)$，求点 D，使得以 A、B、C、D 为顶点的四边形为平行四边形.

6．设 $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c},\vec{v}=-\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$。试用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示 $2\vec{u}-3\vec{v}$.

6. 设向量 $\bar{r}$ 的模是 4，它与轴 u 的夹角是 $\dfrac{\pi}{3}$，求 $\bar{r}$ 在轴 u 上的投影.

7. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$。计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

8. 求平行于向量 $\vec{a} = \{6, 7, -6\}$ 的单位向量.

提高题

1．从点 $A(2, -1, 7)$ 沿向量 $\vec{a} = \{8, 9, -12\}$ 的方向取线段长 $|\overrightarrow{AB}| = 34$，求 B 点的坐标.

2. 设向量 $\vec{a} = \{-1, 3, 2\}, \vec{b} = \{2, -3, -4\}, \vec{c} = \{-3, 12, 6\}$，试证向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面，并用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\vec{c}$.

§8-2　向量的数量积　向量积　混合积

基础题

1．设 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k},\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，计算：

（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\vec{a}\times\vec{b}$；(2) $(-2\vec{a})\cdot 3\vec{b}$ 及 $\vec{a}\times 2\vec{b}$；(3) $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 的夹角的余弦.

2. 已知向量 $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k},\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ 和 $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}$，计算：

(1) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$；　(2) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})$.

3．已知 $M_1(1,-1,2), M_2(3,3,1), M_3(3,1,3)$。求与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

4．已知 $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=2, |\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{7}$，求 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角.

提高题

1. 设 $(\mathrm{a}\times b)\cdot c=2$, 求 $[(\mathrm{a}+\mathrm{b})\times(\mathrm{b}+\mathrm{c})]\cdot(\mathrm{c}+\mathrm{a})$ 的值.

2．设 $p=\lambda a+5b, q=3a-b$，其中 a, b 是相互垂直的单位向量，求满足下列条件的 λ 值：（1）以 p, q 为边的三角形面积为 8；（2）$p \parallel q$；（3）$p \perp q$.

§8-3 平面及其方程

曲面方程的概念

基础题

2．求与坐标原点 o 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 1：2 的点的全体所组成的曲面的方程.

2．将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

平面及其方程

基础题

1. 求过 $(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 三点的平面方程.

2.求过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\vec{a}=(2,1,1)$ 和 $\vec{b}=(1,-1,0)$ 的平面方程.

3. 求过点 $M(4,-3,-2)$ 且垂直于两平面 $x+2y-z=0$，$2x-3y+4z-5=0$ 的平面方程.

4. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

5. 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

提高题

1. 设平面过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}=8$ 垂直，求此平面方程.

2. 求与已知平面 $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}+5=0$ 平行且与三坐标面所构成的四面体体积为 1 的平面方

程.

3. 求半径为 3，且与平面 $x+2y+2z+3=0$ 相切于点 $\left(1,1,-3\right)$ 的球面方程.

§8-4　空间直线及其方程

基础题

1. 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

2. 求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

3. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

4. 求直线 $\dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+1}{-1}$ 和平面 $x+y+z=4$ 的交点.

5. 求直线 $\begin{cases}5x-3y+3z-9=0\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$ 与直线 $\begin{cases}2x+2y-z+23=0\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$ 的夹角的余弦.

提高题

1. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

2. 求过点 $(-1,0,4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

3. 求过直线 $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ 5y+2z-4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z-10=0$ 成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

§8-5 几种常见的二次曲面

基础题

指出下列方程是否表示柱面

(2) $y=x^2+1$ ；

(2) $x+2y=3$ ；

(3) $z^2 = x^2 + y^2$；

(4) $\mathrm{z} = x^2 + y^2$.

§8-6 空间曲线及其方程

基础题

1. 写出曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$的参数方程.

2．求曲面$\mathrm{z} = x^2 + y^2$与平面$\mathrm{z} = 1$的交线在xOy面上的投影方程.

自我测试题

一、填空题（ 每题 6 分，共 18 分）

1. 设向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两垂直，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$ ，$|\vec{c}|=1$，则$|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=$________ .

2. 设$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=-9$，则$|\vec{a}\times\vec{b}|=$______ .

3. 球面$x^2+y^2+z^2=R^2$与平面$x+z=a$（其中$0<a<R$）的交线在xoy平面上投影曲线的方程是__________________.

二、解答题（ 共 82 分）

1. (12 分)求下列平面方程：

（1）过z轴和点$M_0(-3,1,-2)$.

（2）平行 x 轴且过两点 $P_1(4,0,-2)$ 和 $P_2(5,1,7)$.

2.（10 分）求直线 $\begin{cases} 3x+2y-3z=2 \\ x+y-6z=3 \end{cases}$ 的对称式方程和参数方程.

3.（15 分）求以 $M_1(1,3,5), M_2(1,1,1)$ 为直径的两个端点的球面的方程.

4.（15 分）求过点 $P(1,2,1)$ 且与 l_1: $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和 l_2 : $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 都平行的平面的方程.

5.（15 分）设一直线平行平面 $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+5=0$，且与直线 $\dfrac{\boldsymbol{x}-1}{2}=\dfrac{\boldsymbol{y}}{-1}=\dfrac{\boldsymbol{z}+2}{1}$ 相交，

并通过点 $M_0(2,-1,3)$，求该直线方程.

6.（15 分）求直线 $x-1=y=\dfrac{z+1}{-1}$ 在平面 $x-y+2z-1=0$ 上的投影直线的方程.

重点与难点分析

1. 熟练掌握向量的数量积、向量积的运算性质及坐标计算方法.

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z，\ \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

2. 掌握平面的方程及其求法（关键是法向量）.

(2) 平面的点法式方程.

过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\vec{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面方程是

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

（2）平面的一般式方程.

关于 x,y,z 的三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

称为平面的一般式方程，$\vec{n}=(A,B,C)$ 是该平面的一个法向量.

例 1 设平面过点 $M_1(1,0,1)$ 及 $M_2(2,1,-1)$，且垂直于平面 $x-y+z-1=0$，求该平面的方程。

解法 1 由题意，$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,1,-2)$,设 $\overrightarrow{\mathrm{n}_1}=(1,-1,1)$，则所求平面的法向量可取为

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=(1,3,2)$$

故所求平面方程为

$$(x-1)+3y+2(z-1)=0,$$

即
$$x+3y+2z-3=0.$$

解法 2 设所求平面一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

由题意有
$$\begin{cases}A+C+D=0\\ 2A+B-C+D=0\\ A-B+C=0\end{cases},$$

解得
$$B=3A,C=2A,D=-3A,$$

故所求平面方程为

$$Ax+3Ay+2Az-3A=0,$$

消去 A, 得平面方程为

$$x+3y+2z-3=0.$$

4. 掌握直线的方程及求法（关键是方向向量）.

(4) 直线的一般方程(表示两平面的交线）.

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

(5) 直线的点向式方程（非常重要）.

过点(x_0,y_0,z_0)且以(m,n,p)为方向向量的直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

(6) 直线的参数方程.

过点(x_0,y_0,z_0)且以(m,n,p)为方向向量的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad （t 为参数）.$$

注　点向式方程和参数方程可互相转化，需要求出直线上某点的坐标时，用参数方程较方便.

例 2 求经过点 $M(4,3,-2)$ 且与两平面 $2x-3y+z-5=0$ 和 $x+5y-2z+3=0$ 都平行的直线方程.

解 因为所求直线与两已知平面平行，因此所求直线与这两个平面的方向向量垂直，因此所求直线的方向向量可取作

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2,-3,1) \times (1,5,-2) = (1,5,13),$$

故所求直线方程为 $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+2}{13}$.

例 3　求点 $M(4,3,10)$ 关于直线 $l: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{5}$ 的对称点.

解：过 M 作直线 l' 与已知直线 l 垂直相交，设垂足为 $N(x,y,z)$，则 N 在 l 上，由 l 的方程，有

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 5t \end{cases},$$

因此 $\overrightarrow{MN} = (2t-3, 4t-1, 5t-7)$，

由于直线 l' 与 l 垂直，因此它们的方向向量垂直，故有

$$2(2t-3) + 4(4t-1) + 5(5t-7) = 0,$$

解得 $t=1$，所以点 N 坐标为 $(3,6,8)$，继而对称点坐标为（2,9,18）.

例 4　求通过直线 $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$，且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的平面方程.

解：设过所给直线的平面束为

$$x + 5y + z + \lambda(x - z + 4) = 0,$$

整理得 $(1+\lambda)x + 5y + (1-\lambda)z + 4\lambda = 0$

设 $\vec{n}_1=(1+\lambda,5,1-\lambda)$，$\vec{n}_2=(1,-4,-8)$，则 $\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|=\cos\dfrac{\pi}{4}\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|$，代入得

$$\left|9\lambda-27\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 9\times\sqrt{2\lambda^2+27}$$

解得 $\lambda=-\dfrac{3}{4}$，代入得平面方程为

$$x+20y+7z-12=0.$$

又经计算可知平面 $x-z+4=0$ 与平面 $x-4y-8z+12=0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，故其满足要求，因此所求平面为

$$x+20y+7z-12=0 \text{或} x-z+4=0.$$

综合题

1. 已知 $\overrightarrow{AB}=(-3,0,4)$，$\overrightarrow{AC}=(5,-2,-14)$，求 $\angle BAC$ 角平分线上的单位向量.

2. 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，且 $\left|\vec{b}\right|=1$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{|\vec{a}+t\vec{b}|-|\vec{a}|}{t}$.

3. 设直线l： $\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面π上, 而平面π与曲面$z=x^2+y^2$相切于点$(1,-2,5)$, 求a,b的值.

4. 已知两条直线的方程是$l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$， $l_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$， 求过$l_1$且平行于$l_2$的平面方程.

5. 求过点 $M(-1,0,4)$, 平行于平面 π: $3x-4y+z-10=0$, 且与直线 l : $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线方程.

6. 求两异面直线l_1：$\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$，$l_2$：$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$的公垂线方程.

7. 已知入射光线为$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$，求该光线经平面$x+2y+5z+17=0$反射后的反射光线的方程.

参考答案

§8-1

基础题

1．A在x轴上，B在y轴上，C在z轴上，D在xOy面上，E在yOz面上.

2．(1) $(a,b,-c),(-a,b,c),(a,-b,c)$; (2) $(a,-b,-c),(-a,b,-c),(-a,-b,c)$;

(3) $(-a,-b,-c)$。3. 略。 4. $(-3,4,-4)$或$(5,0,-4)$或$(1,-2,8)$；

5. $5\vec{a}-11\vec{b}+7\vec{c}$；6. 2； 7. 模：2；方向余弦：$-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}$；方向角：$\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}$；

8. $\left(\dfrac{6}{11},\dfrac{7}{11},\dfrac{-6}{11}\right)$或$\left(\dfrac{-6}{11},\dfrac{-7}{11},\dfrac{6}{11}\right)$；

提高题

1. $(18,17,-17)$； 2. $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}$；

§8-2

基础题

1.（1）3，$5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$；（2）$-18,\ 10i+2j+14\vec{k}$；（3）$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$；

2.（1）$-8\vec{j}-24\vec{k}$；（2）$-\vec{j}-\vec{k}$；3. $\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\left(3\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}\right)$ **4.** $\frac{2\pi}{3}$；

提高题

1. 4； 2. （1）$\lambda=1$ 或 $\lambda=-31$，（2）$\lambda=-15$，（3）$\lambda=\frac{5}{3}$；

§8-3

曲面方程的概念

基础题

1. $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{116}{9}$；

2. 绕 x 轴：$4x^2-9(y^2+z^2)=36$；绕 y 轴：$4(x^2+z^2)-9y^2=36$；

平面及其方程

基础题

1. $x-3y-2z=0$；2. $x+y-3z-4=0$；3. $5x-6y-7z-52=0$；

4. $\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}$； 5. 1；

提高题

1. $2x+2y-3z=0$； 2. $2x+y+2z=\pm2\sqrt[3]{3}$；

3. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$ 或 $\boldsymbol{x}^2+(\boldsymbol{y}+1)^2+(\boldsymbol{z}+5)^2=9$；

§8-4

基础题

1. $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$； 2. $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$；

3. $16x-14y-11z-65=0$； 4. $\left(5,2,-3\right)$； 5. 0；

提高题

1. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$；2. $\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$ 或 $\begin{cases}3x-4y+z-1=0\\10x-4y-3z+22=0\end{cases}$；

3. $x+20y+7z-12=0$ 或 $x-z+4=0$；

§8-5

基础题

（1）是，（2）是，（3）不是，（4）不是；

§8-6

基础题 1. $\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta, \\ y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta, \\ z=3\sin\theta. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ ；

自我测试题

一、　1. 2；　2. 12；　3. $\begin{cases} 2x^2+2ax+y^2=R^2-a^2 \\ z=0 \end{cases}$ ；

二、1.（1）$x+3y=0$；　（2）$-9y+z+2=0$；2. $\dfrac{x+4}{-9}=\dfrac{y-7}{15}=\dfrac{z}{1}$ ；

$\begin{cases} x=-4-9t \\ y=7+15t \\ z=t \end{cases}$

3. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.　4. $x-y+z=0$.

5. $\dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-35}$.　6. $\begin{cases} x-3y-2z-3=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$.

综合题

1.（$\dfrac{-2}{\sqrt{6}},\dfrac{-1}{\sqrt{6}},\dfrac{-1}{\sqrt{6}}$）；　2. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　3. $a=-5,b=-2$；　4. $x-3y+z+2=0$；

5. $\dfrac{x+1}{12}=\dfrac{4y}{37}=\dfrac{z-4}{1}$；　6. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{-6}$；7. $\dfrac{x+7}{-3}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z}{4}$.

第九章　多元函数微分学

§9-1　多元函数的概念

基础题

1．求下列函数的定义域:

(1) $z=\sqrt{\ln\dfrac{4}{x^2+y^2}}+\arcsin\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(2) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

2. 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$ ；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

提高题

1. 证明：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

4. 研究函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处的连续性.

§9-2 偏导数

基础题

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=\arctan\sqrt{x^y}$ ；

(2) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(3) $u=x^{\frac{y}{z}}$ ；

(4) $u=(3x+2y)^{3x+2y}$.

2．设 $f(x,y)=(x^2-1)\ln[\cos^2(y^2-x)]+e^{x^2+y}\sin(xy^2)$，求 $f_y(1,2)$.

3．设 $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$，求 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$.

提高题

1. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$ 用偏导数定义计算 $f_x(0,0),f_y(0,0)$.

2．设 $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3．设 $u=\dfrac{1}{r},r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$，证明：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

§9-3 全微分

基础题

1．求下列函数的全微分：

(1) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ；

(2) $z=\arctan\dfrac{y^2}{x}$ ；

(3) $u=x^{yz}$ ；

(4) $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

2.求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

§9-4 多元复合函数的求导法则

基础题

1．设$z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t, y=4t^3$, 求 $\dfrac{dz}{dt}$.

2．设 $u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y=a\sin x, z=\cos x$，求 $\dfrac{du}{dx}$.

3．设 $z = u^2 \ln v$, 而 $u = \dfrac{x}{y}, v = 3x - 2y$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4．设 $f(x, y) = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2} dt \quad (x > 0, y > 0)$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

提高题

1．设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \dfrac{y}{x}, F(u)$ 为可导函数，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.

2．设 $z = f(x, \dfrac{x}{y})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3．设 $z = f(u, x, y), u = xe^y$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

§9-5　隐函数的求导公式

基础题

1．设 $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. 设 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial x}{\partial y}$.

3．设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数，证明由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$.

4．设 $z^3-3xyz=a^3$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5．求方程 $2xz-3xyz+\ln(xyz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的全微分.

提高题

1．求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数：

（1）设 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+2y^2+3z^2=20, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$.

（2）设$\begin{cases} u^2 - v + x = 0, \\ u + v^2 - y = 0, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

2．设 $y = f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数，其中 f, F 都具有一阶连续偏导数，试证明：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial t}}$.

§9-6 多元函数微分学的几何应用

基础题

1. 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\dfrac{t}{2}$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$ 处的切线及法平面方程.

2. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面与法线方程.

提高题

1．在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求出一点，使在该点的切线平行于平面 $3x+4y-z=4$.

2．设曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 Oy 轴旋转一周得旋转曲面。求其在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的切平面方程和法线方程.

§9-7 方向导数与梯度

基础题

1．设函数 $z=x^2-xy+y^2$，（1）求在点 $P(1,1)$ 处沿方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数；（2）问在哪个方向上的方向导数有最大值？（3）在哪个方向上的方向导数有最小值？（4）求 $grad\, z\big|_p$.

2．求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

3．求函数 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $A(1,2,2)$ 与 $B(-3,1,0)$ 两梯度之间的夹角.

4．问函数$u = xy^2 z$在点$P(1,-1,2)$处沿什么方向的方向导数最大？，并求此方向导数的最大值.

§9-8 多元函数的极值及其应用

基础题

1. 求函数 $f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值.

2. 求函数 $f(x,y) = xy(a - x - y)$ 的极值.

3. 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$、x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

4. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

提高题

1. 求函数 $u=xyz$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 及 $x+y+z=0$ 下的极值.

2. 将正数 12 分成三个正数 x,y,z 之和 使得 $u=x^3y^2z$ 为最大.

3. 在第一卦限内作球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的切平面, 使得切平面与三坐标面所围的四面体的体积最小, 求切点的坐标.

自我测试题

一、选择题(每题 3 分，共 9 分)

1. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ 所确定，则 $x^2z_x+y^2z_y$ 等于(　　　)

A. 0　　　　B. $\dfrac{1}{\ln|z|}(x^2\ln|x|-y^2\ln|y|)$

C. z^2　　　　D. $2z^2$

2. 函数 $u=xyz-2yz-3$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿 $\vec{l}=2i+2j+k$ 的方向导数等于(　　　)

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　B. $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{3}$

3. 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某个二元函数的全微分，则 a,b 的值分别为(　　　)

A. -2 和 2　　B. 2 和-2　　C. -3 和 3　　D. 3 和-3

二、**填空题**（每题 3 分，共 9 分 ）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{2x^2y^2} =$ ____________________.

2. 设函数 $z=z(x,y)$由$xz-y+\arctan y=0$ 所确定，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________________.

3. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________________.

三、**解答题**(共 82 分)

1．(8 分) 设 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}-3xyz^2$，　求 u_x, u_y, u_z .

2．(8 分) 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$ ，并写出法线方程.

5. （8 分）求函数 $u = z^4 - 3xz + x^2 + y^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处的全微分.

4. (8 分) 已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(xy, z) = x$ 确定，其中 $F(u, v)$ 具有连续偏导数，求
求 $z_x + z_y$.

5. (14 分) 求平面 $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xoy 平面距离最短的点.

6.（12 分）设 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v, z = uv$. 试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7.（12 分）设函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

（1）试计算 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$；（2）讨论函数 $f(x,y)$ 在 $\left(0,0\right)$ 处的连续性.

8. (12 分) 设函数 $z = f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，试求函数 $z=f(x, yx)$ 对 x 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

重点与难点分析

5. 掌握多元复合函数、隐函数的求导方法.

（1）多元复合函数求导法则

设 $z = f(u,v)$，$u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ 复合而得复合函数 $z = f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$，

若 $z = f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，且 $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ 对 x, y 的偏导数存在，

则复合函数 $z = f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 对 x, y 的偏导数也存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

上述求导法则可以推广至中间变量多于两个的情形.

例 4.　求函数 $z = e^{x+2y}\sin(xy^2)$ 的偏导数.

分析：求偏导和一元函数求导数类似，只是在求某个变量的偏导时，将其它变量视为常数，按照一元函数求导法则进行即可。

解：对 x 求偏导，将 y 看作常数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y}\sin(xy^2)+e^{x+2y}\cos(xy^2)y^2=e^{x+2y}[\sin(xy^2)+y^2\cos(xy^2)]$$

对 y 求偏导，将 x 看作常数：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x+2y}2\sin(xy^2)+e^{x+2y}\cos(xy^2)2xy=2e^{x+2y}[\sin(xy^2)+xy\cos(xy^2)]$$

例 5.　已知函数 f 可微，求函数 $z=f(x^2+\frac{x}{y})$ 的偏导数.

分析：求偏导运算，要弄清函数的复合关系，对某一变量求偏导，须经过一切有关的中间变量最终归结到相应的自变量。

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{\partial(x^2+\frac{x}{y})}{\partial x}=f'\cdot(2x+\frac{1}{y})\quad,\quad\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\frac{\partial(x^2+\frac{x}{y})}{\partial y}=f'\cdot(-\frac{x}{y^2})$$

例 6.　设 $z=f(x^2y,\frac{y}{x})$ ，f 可微，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

分析：多元复合函数求高阶偏导数问题，特别是含抽象函数的时候，特别注意 $f''_{11},f''_{12},f''_{22}$ 等都和 f 具有相同的结构。

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1 2xy+f'_2(-\frac{y}{x^2})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(2xyf'_1-\frac{y}{x^2}f'_2)$$

$$=2yf'_1+2xy[f''_{11}2xy+f''_{12}(-\frac{y}{x^2})]+\frac{2y}{x^3}f'_2-\frac{y}{x^2}[f''_{21}2xy+f''_{22}(-\frac{y}{x^2})]$$

$$=2yf'_1+4x^2y^2f''_{11}-\frac{2y^2}{x}f''_{12}+\frac{2y}{x^3}f'_2-\frac{2y^2}{x}f''_{21}+\frac{y^2}{x^4}f''_{22}$$

（2）　隐函数求导法则

① $F(x,y)=0$ 情形：设方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个领域内满足一定条件，

则其可以唯一确定一个单值连续且可导的一元函数 $y=y(x)$，且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

② $F(x,y,z)=0$ 情形：方程 $F(x,y,z)=0$ 在点点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一个邻域内满足一定条件，则能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的二元函数 $z=f(x,y)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

例 4.函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

分析：由方程确定的隐函数求偏导计算，可以用公式法和直接法两种方法计算。公式法求 f_x,f_y,f_z 时，x,y,z 都是自变量；而用直接法方程两边同时对 x 或者 y 求偏导时，z 看作 x,y 的函数。

解法一　公式法

令 $f(x,y,z)=F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})$

$$f_x=F_1'+F_2'(-\frac{z}{x^2})\ ,\quad f_y=F_1'(-\frac{z}{y^2})+F_2'\ ,\quad f_z=F_1'(\frac{1}{y})+F_2'\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z}=-\frac{F_1'+F_2'(-\frac{z}{x^2})}{F_1'\frac{1}{y}+F_2'\frac{1}{x}}\quad ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}=-\frac{F_1'(-\frac{z}{y^2})+F_2'}{F_1'\frac{1}{y}+F_2'\frac{1}{x}}$$

解法二　直接法

方程的两边同时对 x 求偏导：

$$F_1'\cdot(1+\frac{z_x}{y})+F_2'\cdot(\frac{xz_x-z}{x^2})=0$$

解得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'+F_2'(-\frac{z}{x^2})}{F_1'\frac{1}{y}+F_2'\frac{1}{x}}$$

同理方程两边同时对 y 求偏导，解得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1'(-\frac{z}{y^2})+F_2'}{F_1'\frac{1}{y}+F_2'\frac{1}{x}}$$

③方程组的情形 方程组两边分别关于 x 或 y 求导，解方程组求得

6. 微分学在几何上的应用.

（3） 空间曲线的切线和法平面（关键是求切向量）.

③ 空间曲线 Γ 的参数方程：$x=\varphi(t).y=\psi(t),z=\omega(t)(t$为参数$)$

三个函数都可导，且导数不同时为零，则在曲线 Γ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量

为：$\vec{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$

则过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线方程为：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$,

法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$.

例 5. 求曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\\ z=\sin\frac{t}{2}\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线和法平面方程.

分析：关键是求切向量 $\vec{T}$ 和点

解：$\vec{T}=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\{1-\cos t,\sin t,\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\{1,1,\frac{\sqrt{2}}{4}\}$

$t=\dfrac{\pi}{2}$ 时，对应的点坐标为 $(\dfrac{\pi}{2}-1,1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

故所求的切线方程为：$\dfrac{x-(\frac{\pi}{2}-1)}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

所求法平面方程为：$(x-\dfrac{\pi}{2}+1)+(y-1)+\dfrac{\sqrt{2}}{4}(z-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=0$.

④ 空间曲线Γ由一般方程表示：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，利用方程组所确定隐函数组的求解，求得切向量。

例 6. 求曲线$\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=47\\x^2+2y^2=z\end{cases}$在点$M(-2,1,6)$处的切线和法平面方程。

分析：可以用公式求出切向量，也可以对方程组两边对x求导，确定切向量。

解：对方程组$\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=47\\x^2+2y^2=z\end{cases}$两边对$x$求导，有

$$\begin{cases}4x+6y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0\\2x+4y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}\end{cases}$$

将$M(-2,1,6)$代入方程组，解得

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{28}{27}\\\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{4}{27}\end{cases}\qquad \text{得切向量}\ \vec{T}=(1,\frac{28}{27},\frac{4}{27}),$$

故所求的切线方程为：$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{\frac{28}{27}}=\dfrac{z-6}{\frac{4}{27}}$.

所求法平面方程为：$(x+2)+\dfrac{28}{27}(y-1)+\dfrac{4}{27}(z-6)=0$.

（4） 曲面的切平面和法线（关键是求法向量）

③ 曲面Σ的方程为：$F(x,y,z)=0$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面Σ上一点，函数$F(x,y,z)$的

一阶偏导数 F_x, F_y, F_z 在 M_0 处连续且不同时为零，则在 M_0 点的法向量为：

$$\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$$

则法线方程为：$\dfrac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$

切平面方程为：$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

例 7. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 在点 $M(2,2,1)$ 的切平面和法线.

分析：关键是求法向量 $\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$

解：$\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\} = \{2x, 2y, 2z\}\big|_M = 2\{2,2,1\}$

故所求切平面方程为：$2(x-2) + 2(y-2) + (z-1) = 0$.

所求的法线方程为：$\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

④ 曲面 Σ 的方程由显函数 $z = f(x, y)$ 表示，$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的法向量：

$$\vec{n} = \{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\} \quad ,$$

则法线方程为：$\dfrac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$.

切平面方程为：$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.

7. 方向导数和梯度.

方向导数：函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x\ \ , y\ \ )$ 处沿方向 l 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 为 l 的方向余弦。

梯度：向量 $(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y})$ 为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x\ \ , y\ \ )$ 的梯度，记作 $gradf$ 。函数在一点处的梯度方向是在该点处函数值增大最快的方向，即梯度方向垂直于等高线.

（三元函数类似得出）

8. 多元函数的极值及其求法.

（1）极值存在的充分条件：函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内连续，且具有一阶和二阶连续的偏导数，$f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，记 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$

$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则

④ 若 $AC-B^2>0$ 时有极值，且 $A>0$ 有极小值，$A<0$ 有极大值；

⑤ 若 $AC-B^2<0$ 时无极值；

⑥ 若 $AC-B^2=0$ 时不能确定，需另作讨论.

（2）二元函数最值.

①将函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点以及偏导数不存在点处的函数值，及其在 D 的边界上的值相比较，最大者就是最大值，最小者就是最小值。在实际问题中，函数在 D 内只有一个驻点，那么可以肯定该驻点就是最值点.

②条件极值——拉格朗日乘数法

求二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的条件极值，步骤如下

a. 构造拉格朗日函数 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，其中 λ 为一常数；

b. 求拉格朗日函数的无条件极值

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

求解此方程组得驻点 (x_0,y_0) 及乘子 λ_0，则 (x_0,y_0) 即为条件极值的可能极值点.

例 8. 某公司通过电视和报纸两种形式作广告，已知销售收入 R（万元）与电视广告费 x（万元），报纸广告费 y（万元）有如下关系：

$$R(x,y)=15+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2$$

（3） 在广告费用不限的情况下，求最佳广告策略.

（4） 如果提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的广告策略.

解：（1）利润函数 $L(x,y)=R-(x+y)=15+13x+31y-8xy-2x^2-10y^2$

分别对 x, y 求偏导，且令偏导数为 0

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 13 - 8y - 4x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 31 - 8x - 20y = 0 \end{cases}$$ 解得 $x = 1.5, y = 1$

$(1.5,1)$ 为 $L(x, y)$ 唯一的驻点

$L(1.5,1) = 41$（万元）

当电视广告费与报纸广告费分别为 1.5 万元和 1 万元时，最大利润为 41 万元，即为最佳广告策略.

（2）广告费用为 1.5 万元的条件下，最佳广告策略。即在条件 $x + y = 1.5$ 下，$L(x, y)$ 的最大值.

令 $$\begin{aligned} F(x, y) &= L(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \\ &= 15 + 13x + 31y - 8xy - 2x^2 - 10y^2 + \lambda(x + y - 1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} F_x' = 13 - 8y - 4x + \lambda = 0 \\ F_y' = 31 - 8x - 20y + \lambda = 0 \\ x + y - 1.5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1.5 \end{cases}$$

（0.1.5）是唯一的驻点，由题意知 $L(x, y)$ 一定存在最大值，故 $L(0,1.5) = 39$（万元）为最大值，即最佳广告策.

综合题

1. 设 $u = f(x, y, z), \varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$，其中 f, φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$，求 $\dfrac{du}{dx}$.

2. 设 $z = \dfrac{1}{x} f(xy) + y\varphi(x + y), f, \varphi$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3. 设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{dz}{dx}$.

4. 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+g(\dfrac{x}{y})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为____________.

6. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的四条性质:

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的一阶偏导数连续,

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的一阶偏导数存在.

则有:（　　）

A. ②⇒③⇒①　　　　B. ③⇒②⇒①

C. ③⇒④⇒①　　　　D. ③⇒①⇒④

7. 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$, 则（　　）

A. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

C. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

D. 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

8. 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$ ， 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有（　　　）

A. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　B. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　C. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　D. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

9. 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程（　　　）

A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

D. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

参考答案

§9-1

基础题

1.(1) $\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$　(2) $\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<1, y^2\le 4x\}$　2.(1) $-\frac{1}{4}$, (2) 0

提高题

1.略　2.连续

§9－2

1.(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^y}\cdot\frac{y\sqrt{x^y}}{2x}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\ln x}{2(1+x^y)}\cdot\sqrt{x^y}$;

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=y[\cos(xy)-\sin(2xy)],\ \frac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$;

(3) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x,\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x;$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=3(3x+2y)^{3x+2y}[1+\ln(3x+2y)],\frac{\partial z}{\partial y}=2(3x+2y)^{3x+2y}[1+\ln(3x+2y)].$

2. $f_y(1,2)=e^3(\sin 4+4\cos 4)$，

3. $f'_x(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $f'_y(x,y)=\begin{cases}\frac{2y^3}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

提高题

1. **0，0**　2. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ **.**　3. 略**.**

§9－3

1. (1) $dz=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(ydx-xdy)$;（**2**）$dz=\frac{-y^2dx+2xydy}{x^2+y^4}$.

（**3**）$du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln xdy+yx^{yz}\ln xdz$。

（**4**）$du=e^{x(x^2+y^2+z^2)}[(3x^2+y^2+z^2)dx+2xydy+2xzdz]$**.**

2.全增量为-0.119，全微分为-0.125**.**

§9－4

基础题

1. $\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$**.**　**2.** $e^{ax}\sin x$

3. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$

4. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}e^{-xy}\sqrt{\frac{y}{x}},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}e^{-xy}\sqrt{\frac{x}{y}}$**.**

提高题

1. 略

2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+\frac{2}{y}f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22},$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''_{12}-\frac{1}{y^2}f'_2-\frac{x}{y^3}f''_{22},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f'_2+\frac{x^2}{y^4}f''_{22}.$

3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xe^{2y}f''_{uu}+e^y f''_{uy}+xe^y f''_{xu}+f''_{xy}+e^y f'_u$.

§9－5

基础题

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$ 。**2.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-yz}$ .3.略.

4. $\dfrac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$. **5.** $dz=-\dfrac{z}{x}dx+\dfrac{2xyz-1}{y(2xz-3xyz+1)}dy$.

提高题

1. (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)},\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x}{3z+1}$. (2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-2v}{1+4uv},\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{2u}{1+4uv}$. 2. 略.

§9－6

基础题

1.切线方程: $\dfrac{x-(\frac{\pi}{2}-1)}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, 法平面方程: $x+y+\sqrt{2}z=\dfrac{\pi}{2}+4$.

2.切平面方程： $x+2y-4=0$, 法线方程 : $\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}\\ z=0\end{cases}$

提高题

1. $M_1(3,9,27),M_2(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27})$

2. $\vec{n}=(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})$，切平面方程： $2\sqrt{3}y+3\sqrt{2}z-12=0$，

法线方程： $\begin{cases}x=0\\ \dfrac{y-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\end{cases}$.

§9-7

基础题

2. **（1）** $\cos\alpha+\cos\beta$; (1) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; (2) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; (3) $(1,1)$.

2. $x_0+y_0+z_0$.　　　**3.** $\arccos\left(-\dfrac{8}{9}\right)$.

4. $gradu=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ 是方向导数取最大值的方向，方向导数最大值为 $\left|gradu\right|=\sqrt{21}$.

§9－8

基础题

1. 极小值 $f(\dfrac{1}{2},-1)=-\dfrac{e}{2}$.

2. $f\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a^3}{27}$，当 $a>0$ 时为极大值，当 $a<0$ 时为极小值.

3.最大值 $f(2,1)=4$，最小值 $f(4,2)=-64$。　4.当两边都是 $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$ 时，周长最大.

提高题

1.极大值 $\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$，极小值 $-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.　2. $u_{\max}(6,4,2)=6912$.　3. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

自我测试题

一、1. A　2. D　3. B　　二、1. 1　2. $-\dfrac{y^2}{x^2(1+y^2)}$　3. $\dfrac{1}{2}$

三、1. $u_x=\dfrac{y^2-z^2}{(x^2+y^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}-3yz^2$　$u_y=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}-3xz^2$

$u_z=\dfrac{xz}{(x^2+y^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}-6xyz$

2. $(-3,-1,3),\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

3. $du\Big|_{(1,1,1)}=-dx+2dy+dz$.　　4. $z_x+z_y=\dfrac{1-yF_1-xF_1}{F_2}$.

5. $(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{35}{12})$　6. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(v\cos v-u\sin v)e^{-u}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=(u\cos v+v\sin v)e^{-u}$

7.略　8. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+2yf''_{12}+y^2f''_{22}$.

综合题

1. $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos x-\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{1}{\varphi_3}(2x\varphi_1+e^{\sin x}\cos x\varphi_2)$.

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$.

3. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z},(F'_y+xf'F'_z\neq 0)$.

4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+xyf''_{11}+\dfrac{1}{y^2}f'_2-\dfrac{x}{y^3}f''_{22}-\dfrac{1}{y^2}g'-\dfrac{x}{y^3}g''$.

5. $\dfrac{1}{2}$.　6. A .　7. A .　8. B.　9. D.

第十章　重积分

§10-1 二重积分的概念与性质

基础题

1．利用二重积分的几何意义求下列二重积分：

(1) $I_1=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中积分区域 D 是圆形闭区域：$x^2+y^2\leq 1$.

(2) $I_2=\iint\limits_D(1-x-y)d\sigma$,其中积分区域 $D: x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1$.

3．根据二重积分的性质，完成下列两题:

(1) 比较$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$与$\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$的大小，其中积分区域$D$：$(x-2)^2+(y-1)^2 \le 1$；

(2) 估计$I=\iint\limits_D (3x^2+4y^2+5) d\sigma$的值，其中积分区域$D$是椭圆形闭区域：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3} \le 1$.

提高题

设$I_1=\iint\limits_{D_1} (x^2+y^2)^2 d\sigma$，其中$D_1$是矩形闭区域：$-1 \le x \le 1$，$-2 \le y \le 2$；又$I_2=\iint\limits_{D_2} (x^2+y^2)^2 d\sigma$，其中$D_2$是矩形闭区域：$0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 2$。试利用二重积分的几何意义说明$I_1$与$I_2$之间的关系.

§10-2 二重积分的计算

基础题

1．计算下列积分:

(1) $\iint\limits_{D} x\sqrt{y}d\sigma$，其中$D$是由两条抛物线$y=\sqrt{x}$， $y=x^2$所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_{D} e^{x+y}d\sigma$，其中$D$是由$|x|+|y|\le 1$所确定的闭区域;

(3) $\iint\limits_{D}\frac{x^2}{y^2}d\sigma$，其中$D$是直线$y=2,y=x$和双曲线$xy=1$所围之区域;

(4) $\iint\limits_{D}x^2yd\sigma$，其中$D$为双曲线$x^2-y^2=1$及$y=0,y=1$所围成的平面区域.

2．变换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y}f(x,y)dx$;

(2) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)}f(x,y)dy$.

3．化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1) $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy$ ；　　**(2)** $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

4．把积分 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$ 化为极坐标形式，并计算积分值.

5．利用极坐标计算下列积分:

（1）$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x} dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域;

（2）$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)dxdy$，其中 D：　$x^2+y^2\le\pi$.

提高题

1. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)dudv$ 。其中 D 是由 $y=0, y=x^2$，$x=1$ 所围成的区域，求 $f(x,y)$.

2．变换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_{-1}^{0} dy \int_{2}^{1-y} f(x,y)dx$ ；　　　　(2) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \quad (a>0)$.

3．计算积分：$\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=0$ 及 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

4．选用适当的坐标系计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D \left(\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

(2) $\iint\limits_{D}(x+y)^2 d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2ay, x^2+y^2\ge ay\}$ $(a>0)$.

5．计算以 xoy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

§10-3　三重积分

基础题

1．化三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$为三次积分，其中积分区域$\Omega$由$z=x^2+y^2$及平面$z=1$所围成的闭区域.

2．设有一物体，占有空间闭区域Ω：$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，$0\le z\le 1$，在点(x,y,z)处的密度为$\rho(x,y,z)=x+y+z$，计算该物体的质量.

3．计算$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中$\Omega$为平面$x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$所围成的四面体.

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中 Ω 是由锥面 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h(R>0,h>0)$ 所围成的闭区域.

5. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)dv$，其中 Ω 是由 $z=0,y=0,y=\sqrt{x},x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的闭区域.

6.利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2-z^2=0$ 与平面 $z=1$ 所围成的闭区域.

7．利用球面坐标计算下列三重积分:

（1）$\iiint\limits_{\Omega} z dv$，其中闭区域$\Omega$由不等式$x^2+y^2+(z-a)^2 \le a^2$，$x^2+y^2 \le z^2$所确定.

（2）$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv$，其中闭区域$\Omega$：$x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1$.

8．计算下列各题:

(1) 计算三重积分：$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中$\Omega$为平面曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周形成的曲面与平面$z=2$及$z=8$所围成的区域;

(2) 计算三重积分：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中$\Omega$是由曲面$4z^2=25(x^2+y^2)$及平面$z=5$所围成的闭区域;

（3）$\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\dfrac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

（4）$I=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$，其中$\Omega$为曲面$z=\sqrt{1-x^2-y^2},z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面$z=2$所围成的区域.

提高题:

1. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dv$，其中$\Omega:x^2+y^{2.}+z^2\le a^2$.

2. 设 $F(t)=\iiint z\ln(1+x^2+y^2+z^2)dv$ ，其中 Ω 由：$x^2+y^2+z^2\le t^2$ 与 $\sqrt{y^2+x^2}\le z$ 所确定的，求：$\dfrac{dF(t)}{dt}$.

§10-4　重积分的应用

基础题

1．求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

2．求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

3．求曲面 $x^2+y^2=az(a>0)$ 被曲面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 所截下部分的面积.

4. 求曲面 $x^2+y^2=2ax(a>0), z=\alpha x, z=\beta x(\alpha>0, \beta>0$ 为常数）所围立体体积.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 是由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成，它在点 (x,y) 处的

面密度 $\rho(x, y) = x^2 y$，求该薄片的重心.

6. 设有一半径为 R 的球体，M 是此球面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 M 的距离的平方成正比(比例系数 $k > 0$)，求球体重心位置.

7. 已知均匀薄片(面密度 ρ 为常数)所占的闭区域 D 由抛物线 $y^2 = \dfrac{9}{2}x$ 及直线 $x = 2$ 所围成。试求该薄片转动惯量 I_x 和 I_y.

8. 求底半径为 R，高为 H 的均匀正圆柱体对于它的一条母线的转动惯量.

9．求均匀柱体：$x^2+y^2\le R^2$，$0\le z\le h$ 对于位于点 $M_0(0,0,a)(R>h)$ 处的单位质量的质点的引力.（其中柱体的密度记为 ρ，万有引力系数 G）

提高题

一均匀物体(体密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$，$|x|=a$，$|y|=a$ 所围成.求：

(1)物体的体积；(2)物体的重心；(3)物体关于 z 轴的转动惯量.

自我测试题

一、选择题(每题 5 分，共 10 分)

1.若区域 D 为 $0 \le y \le x^2, |x| \le 2$,则 $\iint\limits_D xy^2 dxdy =$（　　）

A. 0　　B. $\frac{32}{3}$　　C. $\frac{64}{3}$　　D. 2

2.设 $f(x,y)$ 为连续函数，则二次积分 $\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$ 可交换积分次序为（　　）

A. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dx$

B. $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dx$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{\sqrt{3}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$

二、填空题(每题 5 分 ,共 10 分)

1. D 是以 $y = x, y = x + a, y = a$ 和 $y = 3a(a > 0)$ 为边的平行四边形区域，则 $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy =$____________________.

2. D 由 $x^2 + y^2 = 2x$ 与 x 轴围成上半圆区域, 则 $\iint\limits_D ydxdy =$__________.

三、解答题(共 80 分)

1.（14 分）变换积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^2 r^2 \cos\theta f(r^2 \sin 2\theta) dr$ 为直角坐标系下先对 y 积分后对 x 积分.

2.（15 分）设 Ω 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \le z$ 以及 $x^2 + y^2 \le z^2$ 所确定的有界闭区域。试计算 $I = \iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$.

4.（12 分）用极坐标计算二重积分 $\iint\limits_{D} \arctan\dfrac{y}{x}\,dxdy$.
其中 $D: a^2 \le x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, a > 0$（$x = 0$ 处广义）.

4.（12 分）设 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 1$ 所围的有界闭区域，试计算 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dv$.

5.（12 分）计算 $\iint\limits_{D} \dfrac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} d\sigma$,其中区域 D 为 $x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0$.

6.（15 分）已知 Ω 为区域 $4x^2 + y^2 \le z \le a(a > 0)$，试将 $\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$ 化成一元函数的积分式，并当 $f(z) = e^{z^2}$ 时，求出该积分值.

重点与难点分析

一. 对称区域上奇偶函数的积分性质（以二重积分为例）

定理 1　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0 \quad, & f(x,y)\text{对}y\text{为奇函数}\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)\text{对}y\text{为偶函数}\end{cases}$$

其中 D_1 为 D 在 x 轴上半平面部分.

定理 2　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0 \quad, & f(x,y)\text{对}x\text{为奇函数}\\ 2\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)\text{对}x\text{为偶函数}\end{cases}$$

其中 D_2 为 D 在 y 轴的右半平面部分.

定理 3　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于原点对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0 \quad, & f(-x,-y)=-f(x,y),(x,y)\in D\\ 2\iint_{D_3} f(x,y)d\sigma, & f(-x,-y)=f(x,y),(x,y)\in D\end{cases}$$

其中 D_3 为 D 的上半平面部分或右半平面部分.

定理 4　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(y,x)d\sigma .$$

例 1、计算$\iint_D (x+y^2)dxdy$，其中D是由$y=x^2, y=4x^2$及$y=1$围成的区域.

解:积分域关于y轴对称,由奇偶性可得$\iint_D xdxdy=0$,原式$=2\int_0^1 dy\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} y^2dx=\frac{2}{7}$.

例 2、计算$\iint_D x^2dxdy$，其中$D: x^2+y^2\le 4$.

解: $\iint_D x^2dxdy = \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 \rho^2\cdot\rho d\rho = 4\pi$.

例 3、设$f(u)$连续，区域D由$y=x^3, x=-1, y=1$围成，计算 $\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]d\sigma$.

解:作辅助线$y=-x^3$分割区域D为两个区域D_1, D_2, D_1关于x轴对称, D_2关于y轴对称,

故可得$\iint_D xyf(x^2+y^2)d\sigma=0$.所以原式 $=\iint_D xd\sigma = \iint_{D_1} xd\sigma = \int_{-1}^0 dx\int_{x^3}^{-x^3} xdy = -\frac{2}{5}$.

二、选择合适的坐标系和合适的积分顺序

1. 二重积分.

情形 1：若 被积函数$f(x,y)$中含x^2+y^2或者 积分区域D的边界曲线包含圆形或扇形,

通常选择极坐标变换：令$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$;

情形 2: 一般直角坐标情形我们需要选择合适的积分顺序：例如,能够计算出来(参见例 1),计算简单、积分式子较少为原则.

例 4 计算$\iint_D e^{-y^2}dxdy$，其中D由$y=x, y=1$和y轴所围区域.

解 如果$\iint_D e^{-y^2}dxdy = \int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$

那么先对e^{-y^2}求原函数就不行，故考虑另一种顺序的累次积分

$$\iint_D e^{-y^2}dxdy = \int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx = \int_0^1 ye^{-y^2}dy = -\frac{1}{2}[e^{-y^2}]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{e}).$$

2. 三重积分.

情形 1: 若被积函数 $f(x,y,z)$ 或 Ω 的边界曲面 Σ 的方程中含 x^2+y^2 则选择柱坐标;

若被积函数 $f(x,y,z)$ 或 Ω 的边界曲面 Σ 的方程中含 $x^2+y^2+z^2$ 则选择球坐标.

情形 2 : 使用直角坐标请注意积分顺序:

若 Ω 表示为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,\varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\}$，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iint_D dxdy\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}f(x,y,z)dz\,;$$

若 Ω 表示为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,c\le z\le d\}$，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_c^d dz\iint_{D_z}f(x,y,z)dxdy\,.$$

例 5 求 $\iiint_V\left(x^2+y^2+z\right)dv$，其中 V 是由 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面与 $z=4$ 围成的几何体.

解: $\iiint_V\left(x^2+y^2+z\right)dv=\int_0^4 dz\iint_{D_z}\left(x^2+y^2+z\right)d\sigma$

$$=\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\left(\rho^2+z\right)\rho d\rho$$

$$=2\pi\int_0^4\left[\frac{\rho^4}{4}+\frac{\rho^2}{2}z\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2z}}dz=2\pi\int_0^4 2z^2dz=\frac{64\pi}{3}\,.$$

三、积分的综合问题举例

例 6 设 $f(u)$ 可微，且 $f(0)=0$，求 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{\pi t^4}\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$，其中

$\Omega: x^2+y^2+z^2\le t^2$.

解:其中 $\iiint_\Omega f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r)\cdot r^2\sin\varphi dr=4\pi\int_0^t r^2 f(r)dr$,

则利用洛比达法则可得,原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4\pi\int_0^t r^2 f(r)dr}{\pi t^4}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2 f(t)}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}=f'(0)$.

例 7 高度为$h(t)$（其中t为时间）的雪堆在融化过程中其侧面满足$z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$，已知体积减少的速率与侧面面积成比，比例系数为$0.9$，问高度为$130$厘米的雪堆全部融化需要多少时间？

解:记V为雪堆体积,S为雪堆的侧面积,则

$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}\left[h^2(t)-h(t)z\right]}dxdy=\int_0^{h(t)}\frac{\pi}{2}\left[h^2(t)-h(t)z\right]dz=\frac{\pi}{4}h^3(t),$$

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\frac{16\left(x^2+y^2\right)}{h^2(t)}}dxdy$$,利用极坐标可得,

$$S=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left[h^2(t)+16r^2\right]^{\frac{1}{2}}rdr=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$$ 并且由题意$\dfrac{dV}{dt}=-0.9S$,

$\dfrac{dV}{dh}=\dfrac{3}{4}\pi h^2(t)=\dfrac{9}{13}S$,所以$\dfrac{dh(t)}{dt}=\dfrac{dh}{dV}\cdot\dfrac{dV}{dt}=-\dfrac{13}{10}$，因此$h(t)=-\dfrac{13}{10}t+C$.

由$h(0)=130$，得$h(t)=-\dfrac{13}{10}t+130$，令$h(t)\to 0$，得$t=100$.

因此,高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需的时间为 100 小时.

综合题

1．设$f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则$F'(2)$等于（　　　）

A. $2f(2)$　　　B. $f(2)$　　　C. $-f(2)$　　　D. 0.

2．设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，并设$\int_0^1 f(x)dx=A$，求$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

3．设区域D为$x^2+y^2\le R^2$，求$\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy$.

4．设函数$f(x)$连续且恒大于零，且

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}，\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-1}^{t}f(x^2)dx}，$$

其中，$\Omega(t)=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le t^2\}$；

(1) 讨论$F(t)$在区间$(0,+\infty)$内的单调性；(2) 证明当$t>0$时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

参考答案

§10-1

基础题

1. (1) $\frac{2\pi}{3}$ **；(2)** $\frac{1}{6}$ **；2. (1)** $\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma\le\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma$ **，(2)** $10\sqrt{3}\le I\le 34\sqrt{3}\pi$ **；**

提高题

1. $I_1=4I_2$

§10-2

基础题

1．(1) $\frac{6}{55}$；**(2)** $e-e^{-1}$；**(3)** $\frac{27}{64}$；**(4)** $\frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1)$.

2．(1) $\int_0^4 dx\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$，**(2)** $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$

3．(1) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\int_0^{2\sec\theta} f(r)rdr$，**(2)** $\int_0^{\pi/2} d\theta\int_{(\cos\theta+\sin\theta)^{-1}}^{1} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$；

4． $\sqrt{2}-1$；**5．（1）** $\frac{3}{64}\pi^2$；**（2）** $\frac{\pi}{2}(1+e^{\pi})$

提高题

1． $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$；**2．(1)** $\int_1^2 dx\int_{1-x}^{0} f(x,y)dy$，

(2) $\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx$

3． $\frac{\pi}{2}-1$；**4．（1）** $\frac{\pi}{8}(\pi-2)$；**（2）** $\frac{45}{32}\pi a^4$　**5．** $\frac{3}{32}\pi a^4$；

§10－3

基础题: 1． $\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)dz$；**2．** $\frac{3}{2}$；**3．** $\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$；**4．** $\frac{\pi}{4}h^2R^2$.

5． $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$；**6．（1）** $\frac{16}{3}\pi$；**（2）** $\frac{\pi}{4}$. **7．（1）** $\frac{7}{6}\pi a^4$；**（2）** $\frac{8}{5}\pi$

8．(1) 336π；**(2)** 8π；**（3）** $\frac{\pi}{6}(7-4\sqrt{2})$；**（4）** $\frac{31}{8}\pi$.

提高题: 1． $\frac{4}{5}\pi a^5$；**2．** $\frac{\pi}{2}t^3\ln(1+t^2)$.

§10－4

基础题: 1． $2a^2(\pi-2)$；**2．** $16R^2$；**3．** $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)a^2$；**4．** $(\alpha-\beta)\pi a^3$. **5．** $\bar{x}=\frac{35}{48},\bar{y}=\frac{35}{54}$.

6． $\left(0,0,\frac{R}{3}\right)$. **7．** $I_x=\frac{72}{5}\rho$，$I_y=\frac{96}{7}\rho$.　**8．** $\frac{3}{2}\mu\pi R^4H$.

9． $\vec{F}=\left\{0,\ 0,\ -2\pi G\rho[\sqrt{(h-a)^2+R^2}-\sqrt{R^2+a^2}+h\ \right\}$

提高题:

(1) $\frac{8}{3}a^4$, (2) $\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{7}{15}a^2$, (3) $\frac{112}{45}a^6\rho$.

自我测试题

一选择题　1．A　2．B

二.填空 **1.** $14a^4$ **2.** $\dfrac{2}{3}$

三. 1. $\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^x xf(2xy)dy+\int_{\sqrt{2}}^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xf(2xy)dy$ **2.** $\dfrac{\pi}{10}\left[1-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right]$ **3.** $\dfrac{1-a^2}{16}\pi^2$

4. $\dfrac{\pi}{6}\left[2\sqrt{2}-1\right]$ **5.** $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$ **6.** $\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv=\dfrac{\pi}{2}\int_0^a zf(z)dz$ **,当** $f(z)=e^{z^2}$ **时积分值为** $\dfrac{\pi}{4}\left(e^{a^2}-1\right)$**.**

综合题

3.B **2.**提示：换序，令 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$ 可得，原式= $\dfrac{A^2}{2}$.

6.因为积分域 D 关于 $y=x$ 轴对称，可得 $\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_D y^2dxdy$，则

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D x^2dxdy=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D\frac{x^2+y^2}{2}dxdy=\frac{\left(a^2+b^2\right)\pi R^4}{4a^2b^2}$$

.

4. （1）其中

$$\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f\left(r^2\right)\cdot r^2\sin\varphi dr=4\pi\int_0^t r^2 f\left(r^2\right)dr$$

$$\iint\limits_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f\left(r^2\right)\cdot rdr=2\pi\int_0^t f\left(r^2\right)\cdot rdr$$

则 $F'(t)=2\dfrac{t^2f\left(t^2\right)\int_0^t f\left(r^2\right)\cdot rdr-tf\left(t^2\right)\int_0^t r^2f\left(r^2\right)dr}{\left[\int_0^t f\left(r^2\right)rdr\right]^2}=2\dfrac{tf\left(t^2\right)\int_0^t f\left(r^2\right)\cdot r(t-r)dr}{\left[\int_0^t f\left(r^2\right)rdr\right]^2}$.

由函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，可知在区间 $(0,+\infty)$ 内 $F'(t)>0$，可得 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

（2）$G(t)=\dfrac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f\left(r^2\right)rdr}{2\int_0^t f\left(r^2\right)dr}=\dfrac{\pi\int_0^t f\left(r^2\right)rdr}{\int_0^t f\left(r^2\right)dr}$ ，则原问题 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

转化为证明 $g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-\left[\int_0^t f(r^2)rdr\right]^2>0$，

$g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr>0$，从而 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加，故当 $t>0$ 时，

$g(t)>g(0)=0$ ，得证.

高等数学（下）期中模拟试卷一

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1、极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{xy^2+9}}{xy^2}$ = ____________。

2、函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿东北方向的方向导数为 $=$ ____________ 。

3、直线 $\begin{cases}x=3+t\\ y=2-t\\ z=1+2t\end{cases}$ 与平面 $2x+y+z-5=0$ 的夹角为 $=$ ____________。

4、设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，则 $dz=$ ______________________。

5、过点 $(3,1,-2)$ 且与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ 垂直相交的直线方程为 _________________ 。

6、交换二次积分 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$ 的次序得 _____________________________ 。

二、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1、设直线方程为 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+D_2=0\end{cases}$，$A_1$、$B_1$、$C_1$、$D_1$、$A_2$、$D_2$ 均不为零，则直线（　　　）

A. 过原点　　B. 平行 x 轴　　C. 垂直 x 轴　　D. 平行 z 轴

2、若 $\vec{a},\vec{b}$ 为共线的单位向量，则它们的数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　　）

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

3、函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续且偏导数存在是它在该点可微的(　　　)

A.必要而非充分条件　　　　　　B.充分而非必要条件
C.充分必要条件　　　　　　　　D.既非充分又非必要条件

4、设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=-1$，

$z=f(x,y)$ 在点 $\left(0,0,f\left(0,0\right)\right)$ 的一个法向量为(　　　)

A. $(3,-1,1)$　　B. $(3,-1,-1)$　　C. $(1,0,3)$　　D. $(3,0,1)$

5、$f(x,y)=x^3+y^3+3x^2+3y^2-9y$ 的极小值点是(　　　)

A. $(-2,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(0,-3)$　　D. $(-2,-3)$

6、设平面区域

$D=\left\{(x,y)\middle|-a\le x\le a, x\le y\le a\right\},\ D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le a, x\le y\le a\right\}$，

则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy=$ (　　　)

A. $4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$　　　　B. $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$

C. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$　　　　D. 0

三、计算题（每题 8 分, 共 56 分）

1、试求微分方程 $y''+2y'-3y=0$ 的一条积分曲线，使其在原点处与直线 $y=4x$ 相切。

2、求过直线 $\begin{cases}x+5y+z=0\\ x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程。

3、设 $z=f\left(u,x,y\right),u=xe^{y}$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}$。

4、求椭圆抛物面 $z=1+x^{2}+\frac{1}{4}y^{2}$ 上平行于平面 $2x+y+z=0$ 的切平面及法线方程。

5、求曲面 $z=x^{2}+y^{2}$ 与平面 $x+y-2z-2=0$ 之间的最短距离。

6、计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中$\Omega$是由$xoz$面上曲线$z^2=2x$绕$x$轴旋转所得旋转体与平面$x=2,x=5$所围成的闭区域。

7、求球面$x^2+y^2+z^2=4$含在圆柱面$x^2+y^2=2x$内部的那部分曲面的表面积。

五、**证明题**(8 分)

证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, \qquad\qquad\qquad x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处可微。

高等数学（下）期中模拟试卷二

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1、 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续、偏导数都存在、可微三者之间的关系是：

____

____

2、设 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(x-2y,\,y^2\right)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________________。

3、已知 $xe^{y-z}+yz\cos x=5$，则 $dz=$__________________。

4、函数 $f(x,y,z)=(2x+y)^z$ 在 $(1,1,2)$ 点处方向导数的最大值为__________________。

5、交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dx=$__________________。

6、介于平面 $z=0$ 与 $x+y+z=3$ 之间的曲面 $x^2+y^2=1$ 的面积为__________________。

7、$div(grad(x^3-xy^2+y^3z-z^3))\big|_{(0,0,0)}=$__________________。

8、$rot(grad(x^3-xy^2+y^3z-z^3))\big|_{(0,0,0)}=$__________________。

二、计算题（共 76 分）

1、（6 分）判断函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点是否连续？是否可偏导？

2、（6 分）求曲面 $z=x^2+y^2$ 上到平面 $2x+y-3z=6$ 距离最近的点的坐标。

3、（6 分）求经过直线 $\begin{cases}x+2y=3\\ z=0\end{cases}$，且与曲面 $z=x^2+2y^2$ 相切的平面方程。

4、（6 分）求曲线$\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$上点$(2, 1, 3)$处的切线方程和法平面方程。

5、（6 分）设$f(x)$为连续函数，且$f(0) = 2$，试求$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t^2} \int_0^t dy \int_y^t \dfrac{f(x)}{1 + y^2} dx$。

6、（6分）计算$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + 2y^2) dV$，其中$\Omega$由$z = x^2 + 2y^2$与$z = 2 - x^2$围成。

7、（6 分）计算$\oint_L (x-y)^2 ds$，其中$L: x^2+y^2=R^2$。

8、（6 分）计算$\oint_L \frac{y}{x^2+2y^2}dx-\frac{x}{x^2+2y^2}dy$，其中$L:|x|+|y|=1$，方向为逆时针。

9、（6 分）计算$\oint_\Gamma (2x-3y)dx+(z+3x)dz$，其中$\Gamma:\begin{cases} x^2-x+y^2=0 \\ x+z=1 \end{cases}$，俯视时方向逆时针方向。

10、（6 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{zds}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ ，其中 $\Sigma: z=xy$ ，$(x,y)\in\{(x,y)\mid x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ 。

11、（6 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+y)dydz+(z^2-xy)dxdy$ ，其中 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$ ，$(x^2+y^2\le 1)$ 上侧为正方向。

12、（10分）设函数 $f(x)$ 可导，且满足方程 $f(x)=x+\int_0^x(x-t)f'(t)dt$ ，求 $f(x)$ 。

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期中模拟试卷三

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1、已知球面的一条直径的两个端点为 $\left(2,-3,5\right)$ 和 $\left(4,1,-3\right)$，则该球面的方程为 ______________________________。

2、函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在点 $A\left(1,0,1\right)$ 处沿点 A 指向点 $B\left(3,-2,2\right)$ 方向的方向导数为

____________________。

3、曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程为______________________。

4、极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(1-\cos(x^2+y^2))\sin xy}{(x^2+y^2)^2\mathrm{e}^{x^2+y^2}}=$ ________________。

5、设二元函数 $z=xy^2+x^3y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______________。

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、旋转曲面 $x^2-y^2-z^2=1$ 是由（　　　）

A. xOz 坐标面上的双曲线绕 Ox 轴旋转而成

B. xOy 坐标面上的椭圆绕 Oz 轴旋转而成

C. xOy 坐标面上的双曲线绕 Oz 轴旋转而成

D. xOz 坐标面上的椭圆绕 Ox 轴旋转而成

2、微分方程 $y''+y=2x\cos x+3x^2$ 的一个特解应具有形式（　　　）

A. $x(a_1x+b_1)\cos x+x(a_2x+b_2)\sin x+d_1x^2$

B. $x(a_1x+b_1)\cos x+x(a_2x+b_2)\sin x+d_1x^2+d_2x+d_3$

C. $x(a_1x+b_1)(a_2\cos x+b_2\sin x)+d_1x^2+d_2x+d_3$

D. $x(a_1x+b_1)(\cos x+\sin x)+d_1x^2+d_2x+d_3$

其中 $a_1,b_1,a_2,b_2,d_1,d_2,d_3$ 都是待定常数.

3、已知直线 $L:\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-\sqrt{2}\pi}$ 与平面 $\pi:x+\sqrt{2}y-\pi z=4$，则（　　　）

A. L 在 π 内　　B. L 与 π 不相交　　C. L 与 π 正交　　D. L 与 π 斜交

4、下列说法正确的是（　　　）

A.两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行的充要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$

B .二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在区域 D 内连续，则在该区域内两个二阶混合偏导必相等

C.二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x_0,y_0) 处连续是函数在该点可微的充分条件

D.二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x_0,y_0) 处连续是函数在该点可微的必要条件

5、设 $z=f(2x+y,x-2y)$，且函数 f 具有连续的二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（　　　）

A. $2f_{11}-2f_{22}-3f_{12}$　　B. $2f_{11}+f_{22}+3f_{12}$

C. $2f_{11}+f_{22}+5f_{12}$　　D. $2f_{11}-2f_{22}-f_{12}$

三、计算题（共 29 分）

1、（13 分）求下列微分方程的通解：

(1)（6 分） $y'=1+x+y^2+xy^2$；

(2)（7 分） $y''-3y'+2y=xe^{2x}$.

2、(8 分）设 $z=uv^2+t\cos u$， $u=e^t$， $v=\ln t$，求全导数 $\dfrac{dz}{dt}$。

3、(8 分）求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$的极值。

四、应用题（8 分）

1、某工厂生产两种型号的机床，其产量分别为 x 台和 y 台，成本函数为 $c(x,\ y)=x^2+2y^2-xy$ （万元），若市场调查分析，共需两种机床 8 台，求如何安排

生产使其总成本最少？最小成本为多少？

五、综合题（21 分）

1、（10 分）已知直线l_1：$\begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \\ x=0 \end{cases}$，$l_2$：$\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=1 \\ y=0 \end{cases}$，求过$l_1$且平行于$l_2$的平面方程。

2、（11 分）设函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$，在球面 $x^2+y^2+z^2=5R^2\ (x>0,y>0,z>0)$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)$ 取到最大值。

六、证明题（12 分）

设函数 $u=x^kF\left(\dfrac{z}{x},\ \dfrac{y}{x}\right)$，其中 k 是常数，函数 F 具有连续的一阶偏导数。试证明: $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=kx^kF\left(\dfrac{z}{x},\ \dfrac{y}{x}\right)$。

高等数学（下）期中模拟试卷四

题号	一	二	总分
得分			

一、解答题（共75分）

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

1. （5分）设函数 $z=z\left(x,y\right)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

2.（5分） 设 $z=z\left(x,y\right)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi\left(x+y+z\right)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$，求 dz。

3. （5分）求函数 $f\left(x,y\right)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $\left(0,1\right)$ 处的梯度。

4. （5分）设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的一动点，若 S 在点 P 处的切平面与

xoy 面垂直，求点 P 的轨迹 C 。

5.（10分）求二元函数 $f\left(x,y\right)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值。

6.（10分）设函数 $u=f\left(x,y\right)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，确定的 a,b 值，使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下简化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ 。

7.（10分）已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$，求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点。

8.（8分）设函数 $f\left(x,y\right)$ 连续，交换二次积分的积分次序：$\int_0^1 dy\int_{2y-2}^0 f(x,y)dx$ 。

9.（8分）设函数 f 连续，若 $F\left(u,v\right)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ ，其中区域D为区域 $1\le x^2+y^2\le u^2$，$0\le\arctan\frac{y}{x}\le v$ 在第一象限的部分，求 $\frac{\partial F}{\partial u}$ 。

10.（9分）求位于两球面 $x^2+y^2+\left(z-2\right)^2=4$ 和 $x^2+y^2+\left(z-1\right)^2=1$ 之间的均匀物体的质心。

二、计算题 （共25分）

1. （8分）计算由$1 \le x^2 + y^2 \le 2x, y \ge 0, 0 \le z \le xy$所确定的立体的体积.

2.（8分）计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$，其中$D$由曲线$x = \sqrt{1+y^2}$与直线$x + \sqrt{2}y = 0$及$x - \sqrt{2}y = 0$围成。

3. （9 分）计算 $I=\iint\limits_{D} r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$，其中 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right\}$

高等数学（下）期中自测题

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x,y)=2x+(y-1)\arcsin\sqrt{x^2+y^2}$，则 $f_x(x,1)=$___________。

2．若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 取得极值，则常数 $a=$______。

3. 由 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$ 表示的立体图形的体积 $V=$__________。

4. 微分方程 $y''+9y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=2$ 的特解为____________。

5. 函数 $u=xy+yz^3$ 在点 $M(-4,-1,1)$ 沿方向 $\vec{l}=\{-2,2,-1\}$ 的方向导数是________________________。

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 下列方程中，属于锥面方程的是（　　）

A. $x+y+z=1$　　　　B. $x^2+y^2+z^2=1$

C．$x^2+y^2-z=0$ D．$x^2+y^2-z^2=0$

2．函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）

A．连续且偏导数存在 B．连续，偏导数不存在

C．不连续，偏导数存在 D．不连续，偏导数不存在

3．设 $z=e^{xy}$，则 dz 等于（　　）

A．Δz B．$e^{xy}dx$ C．$e^{xy}(xdx+ydy)$ D．$e^{xy}(ydx+xdy)$

4．若 $f(x,y)$ 在关于 y 轴对称的有界闭区域 D 上连续，且 $f(-x,y)=-f(x,y)$, 则二重积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 的值等于（　　）

A．D 的面积 B．0 C．$2\iint_D f(x,y)dxdy$ D．$f(x,y)$

5．微分方程 $y''-y'-2y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的特解 $\boldsymbol{y}^*$ 的形式可设为（　　）

A．$ax\mathrm{e}^{2x}$ B．$(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$ C．$(ax+b)x\mathrm{e}^{2x}$ D．$ax^2\mathrm{e}^{2x}$

三、解答题（每题 7 分，共 35 分）

1．设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中函数 $f(t)$ 二阶可导，函数 $g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$可以分别确定$x$、$y$为$z$的函数，求$\dfrac{dx}{dz}$与$\dfrac{dy}{dz}$。

3. 交换二重积分$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \dfrac{\sin y}{y} dy$次序，并计算该积分。

4. 化为极坐标形式，然后计算二重积分$\int_0^{2a} dx \int_0^{A} \sqrt{x^2 + y^2} dy$，其中$A = \sqrt{2ax - x^2}$。

5. 求$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dV$，其中$\Omega$为椭球：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$。

四、综合题（每题 8 分，共 24 分）

1．求曲面$z=x^2+y^2$和平面$x+y+z=1$的交线与坐标原点的最远距离与最近距离。

2．设物体Ω由曲面$z=x^2+y^2$与曲面$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$围成，其体密度为常数1，试求该物体的质量和重心坐标。

7.设有曲面$S:2x^2+4y^2+z^2=4$，平面$\Pi:2x+2y+z+5=0$。

（1）在曲面S上求平行于平面Π的切平面方程;（2）求曲面S与平面Π之间的最短距离。

五、证明题（11 分）

设$f(u)$连续，区域Ω由$0\le z\le 1$，$x^2+y^2\le t^2$围成，设$f(t)=\iiint\limits_{\Omega}\left[z^2+f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dV$，

1）证明$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t^2}=\dfrac{\pi}{3}$；　　2）求$f(t)$。

参考答案

高等数学（下）期中模拟试卷一

一、1、$-\dfrac{1}{6}$　2、$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　3、$\dfrac{\pi}{6}$　4、$dz=\dfrac{z}{x+z}dx+\dfrac{z^2}{y\left(x+z\right)}dy$

5、$\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{4}=z+2$　6、$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$

二、1、C　2、D　3、A　4、B　5、B　6、C

三、1、方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$，由已知 $y(0)=0,y'(0)=4$，代入上式得

$C_1=1,C_2=-1$，故所求积分曲线的方程为 $y=e^x-e^{-3x}$。

2、设平面束方程：$x+5y+z+\lambda\left(x-z+4\right)=0$，即$\left(1+\lambda\right)x+5y+\left(1-\lambda\right)z+4\lambda=0$，

从而$\overrightarrow{n_1}=\left(1+\lambda,5,1-\lambda\right)$，又平面$x-4y-8z+12=0$的法线向量$\overrightarrow{n_2}=\left(1,-4,-8\right)$，

从而 $\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{\left|9\lambda-27\right|}{\sqrt{2\lambda^2+27}\cdot 9}=\dfrac{\left|\lambda-3\right|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\dfrac{\left(\lambda-3\right)^2}{2\lambda^2+27}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 16\lambda^2-12\lambda+225=0\Rightarrow\lambda=-\dfrac{3}{4}$，即平面：

$x+20y+7z-12=0$

又平面 $x-z+4=0$ 的一个法线向量 $\overrightarrow{n_3}=\left(1,0,-1\right)$，则平面 $x-z+4=0$ 与平面 $x-4y-8z+12=0$ 的夹角的余弦为$\dfrac{\left|\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_3}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{9}{\sqrt{2}\cdot 9}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即平面 $x-z+4=0$ 满足条件.

所以，求过直线$\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$且与平面$x-4y-8z+12=0$成$\dfrac{\pi}{4}$角的平面为

$x+20y+7z-12=0$ 和 $x-z+4=0$.

3、$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot e^y+f_2'$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f_1'\cdot e^y+f_2'\right)=\dfrac{\partial f_1'}{\partial y}\cdot e^y+f_1'\cdot e^y+\dfrac{\partial f_2'}{\partial y}$

$\because \dfrac{\partial f_1'}{\partial y} = f_{11}'' \cdot xe^y + f_{13}'', \dfrac{\partial f_2'}{\partial y} = f_{21}'' \cdot xe^y + f_{23}'',$

$\therefore \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(f_{11}'' \cdot xe^y + f_{13}''\right) \cdot e^y + f_1' \cdot e^y + f_{21}'' \cdot xe^y + f_{23}''$

4、设切点为$M\left(x_0, y_0, z_0\right)$，取切向量$\vec{n} = \left(2x, \dfrac{1}{2}y, -1\right)$，则$\vec{n}\big|_M = \left(2x_0, \dfrac{1}{2}y_0, -1\right)$.

由已知，切平面平行于平面$2x + y + z = 0$，从而$\vec{n}\big|_M = \left(2x_0, \dfrac{1}{2}y_0, -1\right)$平行于平面

$2x + y + z = 0$的法线向量$\overrightarrow{n_1} = \left(2,1,1\right)$，

所以 $\dfrac{2x_0}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}y_0}{1} = \dfrac{-1}{1} = -1 \Rightarrow x_0 = -1, y_0 = -2 \Rightarrow z_0 = 3$

所以，切点$\left(-1,-2,3\right)$，$\vec{n}\big|_M = \left(-2,-1,-1\right)$.

切平面方程：$-2\left(x+1\right) - \left(y+2\right) - \left(z-3\right) = 0$，即：$2x + y + z + 1 = 0$；

法线方程：$\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{-1}$，即：$\dfrac{x+1}{2} = y + 2 = z - 3$；

5、方法 1　设(x, y, z)为曲面$z = x^2 + y^2$上任一点，则

目标函数：$d = \dfrac{\left|x + y - 2z - 2\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \left(-2\right)^2}} = \dfrac{\left|x + y - 2z - 2\right|}{\sqrt{6}}$；约束条件：$z = x^2 + y^2$

将约束条件代入目标函数，化为无条件极值：

$$d = \frac{\left|x + y - 2\left(x^2 + y^2\right) - 2\right|}{\sqrt{6}} = \frac{\left|2x^2 - x + 2y^2 - y + 2\right|}{\sqrt{6}}$$

将绝对值内配方得，$2x^2 - x + 2y^2 - y + 2$

$$= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + 2\left(y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4} + 2 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

所以，$d = \dfrac{2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{4}}{\sqrt{6}} \geq \dfrac{\frac{7}{4}}{\sqrt{6}} = \dfrac{7\sqrt{6}}{24}$，当且仅当$x = y = \dfrac{1}{4}$时取等号

从而，求曲面$z=x^2+y^2$与平面$x+y-2z-2=0$之间的最短距离$d=\dfrac{7\sqrt{6}}{24}$.

方法 2　设(x_0,y_0,z_0)为曲面$z=x^2+y^2$上任一点，则过该点的曲面的一个法向量

$\vec{n}=\left(2x_0,2y_0,-1\right)$，当过该点的切平面与平面$x+y-2z-2=0$平行时，可得最短距离

即：$\vec{n}=\left(2x_0,2y_0,-1\right)//\left(1,1,-2\right)$

$\Rightarrow\dfrac{2x_0}{1}=\dfrac{2y_0}{1}=\dfrac{-1}{-2}\Rightarrow x_0=y_0=\dfrac{1}{4}\Rightarrow z_0=\dfrac{1}{8}$，从而，所求的点为$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$

则所求的最短距离$d=\dfrac{\left|x_0+y_0-2z_0-2\right|}{\sqrt{6}}=\dfrac{\left|\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-2\cdot\dfrac{1}{8}-2\right|}{\sqrt{6}}=\dfrac{\dfrac{7}{4}}{\sqrt{6}}=\dfrac{7\sqrt{6}}{24}$.

6、曲线$z^2=2x$绕x轴旋转得旋转曲面：$y^2+z^2=2x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\left(y^2+z^2\right)$；

$x=2\Rightarrow y^2+z^2=4;x=5\Rightarrow y^2+z^2=10$

投影法：将Ω投影在yOz面上，

$D_{yz}:4\le y^2+z^2\le 10\Leftrightarrow 0\le\theta\le 2\pi,2\le r\le\sqrt{10};2\le x\le 5$

所以　$\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dv=\iint\limits_{D_{yz}}\left[\int_2^5\left(y^2+z^2\right)dx\right]dydz$

$\displaystyle=3\iint\limits_{D_{yz}}\left(y^2+z^2\right)dydz=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^{\sqrt{10}}r^2\cdot rdr=126\pi$.

7、　$\displaystyle A=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$，其中曲面方程：$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$；

则$z_x=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},z_x=-\dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$$D_{xy}:x^2+y^2\le 2x\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+y^2\le 1\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\theta$$

所以，$A=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{4-r^2}}\cdot rdr=8\pi-16$

四、分析:函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微

$$\Leftrightarrow \Delta z=f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)$$
$$=dz+O\left(\rho\right)=f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y+O\left(\rho\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-dz}{\rho}$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)-\left(f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y\right)}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}=0$$

证明：

$$f_x\left(0,0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(0+\Delta x,0\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\Delta x\right)^2\sin\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2}=0$$

同理，$f_y\left(0,0\right)=0$

$$\therefore \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-dz}{\rho}$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f\left(\Delta x,\Delta y\right)-f\left(0,0\right)-\left(f_x\left(0,0\right)\Delta x+f_y\left(0,0\right)\Delta y\right)}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left[\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2\right]\sin\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}\sin\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}=0$$

证毕.

高等数学（下）期中模拟试卷二

一、 1、连续与偏导数都存在无因果关系；连续不一定可微，但可微一定连续；偏导数都存在不一定可微，但可微一定偏导数都存在。

2、$-2f''_{11}+2yf''_{12}$　　3、$\dfrac{yz\sin x-e^{y-z}}{y\cos x-xe^{y-z}}dx-\dfrac{z\cos x+xe^{y-z}}{y\cos x-xe^{y-z}}dy$

4、$3\sqrt{20+9\ln^2 3}$　　5、$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx$　　6、6π　7、0　　8、$(0,0,0)$

二、1、因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|+|kx|}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}=\dfrac{1+|k|}{\sqrt{1+k^2}}$ 随 k 而变，

所以，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续。

又因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-1}{x}=0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点关于 x 可偏导。

同理，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点关于 y 可偏导。

2、方法 1 ：$z=x^2+y^2$ 上的点 (x,y,z) 到平面 $2x+y-3z=6$ 的距离为

$f(x,y,z)=\dfrac{|2x+y-3z-6|}{\sqrt{14}}$，为此构造

$L(x,y,z,\lambda)=(2x+y-3z-6)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$

由 $L'_x=L'_y=L'_z=L'_\lambda=0$，得驻点 $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6},\dfrac{5}{36}\right)$，由于驻点唯一，所以该驻点为所要求的距离最近的点。

方法 2 ：$z=x^2+y^2$ 上的点 (x,y,z) 处的切向量为 $\{2x,2y,-1\}$，由 $\{2x,2y,-1\}=\lambda\{2,1,-3\}$，及 $z=x^2+y^2$，得 $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6},\dfrac{5}{36}\right)$ 为所要求的距离最近的点。

3、设曲面上切点坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则 $z_0=x_0^2+2y_0^2$ ，

切平面为 $2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$，即 $2x_0x+4y_0y-z=z_0$ ，

根据条件 $\dfrac{2x_0}{1}=\dfrac{4y_0}{2}=\dfrac{z_0}{3}$ ，$z_0=x_0^2+2y_0^2$，因此 $(x_0,y_0,z_0)=(2,2,12)$ ，

所求切平面方程为 $4x+8y-z=12$ 和 $z=0$.

4、$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=2x-2y\dfrac{dy}{dx}\\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$，由此得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+1}{2y-1},\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+2y}{1-2y}$，切向量为

$\left\{1,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}\right\}_{(2,1,3)}=\{1,5,-6\}$, 切线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-3}{-6}$；

法平面方程为 $(x-2)+5(y-1)-6(z-3)=0$，即 $x+5y-6z=-11$.

6、$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t^2}\int_0^t dy\int_y^t\dfrac{f(x)}{1+y^2}dx=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\int_0^t dx\int_0^x\dfrac{f(x)}{1+y^2}dy}{t^2}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\int_0^t f(x)\arctan x\,dx}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)\arctan t}{2t}=f(0)\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t^2}}{2}=1$$

6、$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y^2)dV=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}(x^2+2y^2)dz$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+2y^2)(1-x^2-y^2)dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(r^2+r^2\sin^2\theta)(1-r^2)dr$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)d\theta\cdot\int_0^1(r^3-r^5)dr=\frac{\pi}{2}\ .$$

7、解 $\oint_L(x-y)^2ds=\oint_L(x^2-2xy+y^2)ds=\oint_L(R^2-2xy)ds$

$$=2\pi R^3-2\int_{-\pi}^{\pi}R^2\cos\theta\sin\theta\sqrt{R^2\sin^2\theta+R^2\cos^2\theta}d\theta=2\pi R^3.$$

8、取 $C:x^2+2y^2=\delta$（$\delta>0$ 充分小），方向顺时针，因为在 C 之外，L 之内的区域内

，$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2+2y^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x}{x^2+2y^2}\right)=\dfrac{x^2-2y^2}{(x^2+2y^2)^2}$，

所以 $\oint_L=\oint_{L\cup C}-\oint_C=\oint_{C^-}\dfrac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}=\dfrac{1}{\delta}\oint_{C^-}ydx-xdy=\dfrac{-2}{\delta}\iint\limits_D dxdy=-\sqrt{2}\pi$.

10、 $\oint_{\Gamma}(2x-3y)dx+(z+3x)dz=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x-3y & 0 & z+3x \end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}-3dzdx+3dxdy$

$=\iint\limits_{D_{xy}}3dxdy=\dfrac{3}{4}\pi$，其中 $D_{xy}:\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$.

10、 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{zds}{\sqrt{1+x^2+y^2}}=\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\sqrt{1+y^2+x^2}dxdy$

（其中 $D_{xy}:\{(x,y)|\,x+y\le 1,\, x\ge 0,\, y\ge 0\}$）

$=\iint\limits_{D_{xy}}xydxdy=\int_0^1dx\int_0^{1-x}xydy=\dfrac{1}{2}\int_0^1x(1-x)^2dx=\dfrac{1}{24}$.

11、设 $\Sigma_0: z=1\ \ (x^2+y^2\le 1)$ 下侧为正方向。

$$\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0}=-\iiint\limits_{\Omega}(2+2z)dV+\iint\limits_{D_{xy}}(1-xy)dxdy$$

（其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$， $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$）

$=-2\int_0^1dz\iint\limits_{D_z}(1+z)dxdy+\pi-\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^1r^3\sin\theta\cos\theta dr$ （$D_z:x^2+y^2\le z^2$）

$=-2\pi\int_0^1(1+z)z^2dz+\pi=-\dfrac{\pi}{6}$.

12、积分变上限函数的求导问题经常考查，注意弄清对那个变量求导，特别是被积函数中既含有 t 又含有 x 的情形。这种问题一般总是先求导。

$f(x)=x+x\int_0^xf'(t)dt-\int_0^xtf'(t)dt$， $f'(x)=1+\int_0^xf'(t)+xf'(x)-xf'(x)$，

$f'(x)=1+f(x)-f(0)$.又 $f(0)=0$，即 $f'(x)-f(x)=1$，故 $f(x)=e^x-1$.

高等数学（下）期中模拟试卷三

一、1、 $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$ 2、 $\dfrac{1}{2}$. 3、 $2x+4y-z-5=0$.

4、0　　5、$2y+3x^2$

二、1、A　2、B　3、C　4、C　5、A

三、1、（1）将原微分方程进行分离变量，得：$\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1+x)\mathrm{d}x$，上式两端积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\arctan y=\int(1+x)\mathrm{d}x=x+\frac{x^2}{2}+c$$

即　：　$\arctan y=x+\dfrac{x^2}{2}+c$　其中c为任意常数.

（2）题设方程对应的齐次方程的特征方程为$r^2-3r+2=0,$特征根为$r_1=1,\quad r_2=2,$于是，该齐次方程的通解为$Y=C_1x+C_2e^{2x},$因$\lambda=2$是特征方程的单根，故可设题设方程的特解：$y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}.$代入题设方程，得$2b_0x+b_1+2b_0=x,$比较等式两端同次幂的系数，得$b_0=\dfrac{1}{2},\quad b_1=-1,$于是，求得题设方程的一个特解$y^*=x(\dfrac{1}{2}x-1)e^{2x}.$

从而，所求题设方程的通解为$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x(\dfrac{1}{2}x-1)e^{2x}.$

2、$\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(uv^2+t\cos u\right)=v^2-t\sin u$，

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial}{\partial v}\left(uv^2+t\cos u\right)=2uv$，$\dfrac{\partial z}{\partial t}=\cos u$

依复合函数求导法则，全导数为

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}\\&=\left(v^2-t\sin u\right)e^t+2uv\cdot\frac{1}{t}+\cos u\cdot 1\\&=\left(\ln^2 t-t\sin e^t\right)e^t+\frac{2}{t}e^t\ln t+\cos e^t\end{aligned}$$

3、解方程组$\begin{cases}f_x(x,y)=e^{2x}\left(2x+2y^2+4y+1\right)=0\\f_y(x,y)=e^{2x}(2y+2)=0\end{cases}$，得驻点$\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$。由于

$A=f_{xx}(x,y)=4e^{2x}\left(x+y^2+2y+1\right)$，$B=f_{xy}(xy)=4e^{2x}(y+1)$，$C=f_{yy}(x,y)=2e^{2x}$

在点$\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$处，$A=2e>0$，$B=0$，$C=2e$，$AC-B^2=4e^2$，所以函数在点$\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$处取得极小值，极小值为$f\left(\dfrac{1}{2},-1\right)=-\dfrac{e}{2}$。

四、即求成本函数$c(x,\ \ y)$在条件$x+y=8$下的最小值，

构造辅助函数 $F(x,\ \ y)=x^2+2y^2-xy+\lambda(x+y-8)$，

解方程组 $\begin{cases} F'_x=2x-y+\lambda=0 \\ F'_y=-x+4y+\lambda=0 \\ F'_\lambda=x+y-8=0 \end{cases}$，

解得 $\lambda=-7,x=5,y=3$，

这唯一的一组解，即为所求，当这两种型号的机床分别生产5台和3台时，总成本最小，最小成本为：$c(5,\ \ 3)=5^2+2\times3^2-5\times3=28$（万）.

五、1、直线l_1与l_2的方向向量分别为

$$\vec{\mathbf{s}}_1=\left\{0,\ \ \frac{1}{b},\ \ \frac{1}{c}\right\}\times\{1,\ \ 0,\ \ 0\}=\left\{0,\ \ \frac{1}{c},\ \ -\frac{1}{b}\right\},$$

$$\vec{\mathbf{s}}_2=\left\{\frac{1}{a},\ \ 0,\ \ -\frac{1}{c}\right\}\times\{0,\ \ 1,\ \ 0\}=\left\{\frac{1}{c},\ \ 0,\ \ \frac{1}{a}\right\},$$

作 $\vec{\mathbf{n}}=\vec{\mathbf{s}}_1\times\vec{\mathbf{s}}_2=\left\{\dfrac{1}{ca},\ \ -\dfrac{1}{bc},\ \ -\dfrac{1}{c^2}\right\}$，

取直线l_1上的一点$P_1(0,\ \ 0,\ \ c)$，则过点P_1且以$\vec{\mathbf{n}}=\left\{\dfrac{1}{ca},\ \ -\dfrac{1}{bc},\ \ -\dfrac{1}{c^2}\right\}$为法向量的平面$\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}+1=0$，就是过$l_1$且平行于$l_2$的平面方程.

2、设球面上的点为(x,y,z).

令 $L(x,y,z,\lambda)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5R^2)$，

$L_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0,\ L_y=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0,\ L_z=\dfrac{1}{3z}+2\lambda z=0,\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-5R^2=0$

由前三个式子得 $x^2=y^2=\dfrac{z^2}{3}$，代入最后式子得 $x=y=R,\ z=\sqrt{3}R$. 由题意得 $f(x,y,z)$ 在球面上的最大值一定存在，因此唯一的驻点 $(R,R,\sqrt{3}R)$ 就是最大值点，最大值为 $f(R,R,\sqrt{3}R)=\ln(3\sqrt{3}R^5)$.

六、$\dfrac{\partial u}{\partial x}=kx^{k-1}F\left(\dfrac{z}{x},\ \dfrac{y}{x}\right)+x^kF_1'\left(\dfrac{z}{x},\ \dfrac{y}{x}\right)\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)+x^kF_2'\left(\dfrac{z}{x},\ \dfrac{y}{x}\right)\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$

$$=kx^{k-1}F\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)-zx^{k-2}F_1'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)-yx^{k-2}F_2'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^kF_2'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x^{k-1}F_2'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^kF_1'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x^{k-1}F_1'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right),$$

所以，$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}$

$$=x\cdot\left[kx^{k-1}F\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)-zx^{k-2}F_1'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)-yx^{k-2}F_2'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)\right]$$

$$+y\cdot x^{k-1}F_2'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)+z\cdot x^{k-1}F_1'\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right)=kx^kF\left(\frac{z}{x},\ \frac{y}{x}\right).$$

高等数学（下）期中模拟试卷四

一、1. z　　2. 对等式 $x^2+y^2-z=\varphi\left(x+y+z\right)$ 两端取微分, 得

$2xdx+2ydy-dz=\varphi'\cdot\left(dx+dy+dz\right)$，解得 $dz=\dfrac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}dx+\dfrac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}dy$.

3. $\vec{i}$　4. 椭球面S点$P\left(x,y,z\right)$处的法向量是$\vec{n}=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}=\left\{2x,2y-z,2z-y\right\}$，

点P处的切平面与xoy面垂直的充要条件是$\vec{n}\cdot\left\{0,0,1\right\}=2z-y=0$，

所以点P的轨迹C的方程为：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\2z-y=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1\\2z-y=0\end{cases}$.

5. $f_x'\left(x,y\right)=2x\left(2+y^2\right),f_y'\left(x,y\right)=2x^2y+\ln y+1$，令$f_x'\left(x,y\right)=0,f_y'\left(x,y\right)=0$，解得唯一驻点$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$，由于$A=f_{xx}''\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=2\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right)>0,B=f_{xy}''\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=4\cdot0\cdot\dfrac{1}{e}=0$，

$C=f_{yy}''\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=2\cdot0^2+e=e,B^2-AC=-2e\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right)<0$，从而$f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$是$f\left(x,y\right)$的极小值.

6. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta},\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{\partial^2u}{\partial\eta^2}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=a\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+b\dfrac{\partial u}{\partial\eta},\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2ab\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+b^2\dfrac{\partial^2u}{\partial\eta^2}$，

$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=a\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+(a+b)\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+b\dfrac{\partial^2u}{\partial\eta^2}$

将以上各式代入原等式，得

$$(a^2+12a+4)\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\left[10ab+12\left(a+b\right)+8\right]\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=0$$

由题意，令$a^2+12a+4=0,10ab+12\left(a+b\right)+8\neq0,5b^2+12b+4=0$

解得$a=-2,b=-\dfrac{2}{5}$，或$a=-\dfrac{2}{5},b=-2$.

7. 点$\left(x,y,z\right)$到xOy面的距离为$\left|z\right|$，故求C上距离xOy面最远的点和最近的点的坐标，等价于求函数$H=z^2$在条件$x^2+y^2-2z^2=0$与$x+y+3z-5=0$下的最大值点和最小

值点。令 $L(x,,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda\left(x^2+y^2-2z^2\right)+\mu\left(x+y+3z-5\right)$

由 $\begin{cases}L_x=2\lambda x+\mu=0\\L_y=2\lambda y+\mu=0\\L_z=2z-2\lambda z+3\mu=0\Rightarrow x=y\Rightarrow\begin{cases}2x^2-2z^2=0\\2x+3z=5\end{cases}\\x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-5\\y=-5\\z=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$

根据几何意义，该曲线上存在距离 xOy 面最远的点和最近的点，故所求距离 xOy 面最远的点和最近的点的坐标分别为 $(-5,-5,5),(1,1,1)$.

8. $\int_{-2}^{0}dx\int_{0}^{1+\frac{x}{2}}f(x,y)dy$　　9. $vf\left(u^2\right)$

10. 因为区域关于 z 轴对称，故质心必位于 z 轴上，所以 $\overline{x}=0,\overline{y}=0$，

由公式 $\overline{z}=\dfrac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}z\mu dv=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\mu dv}{\iiint\limits_{\Omega}\mu dv}$，

由 $\mu\equiv$ 常数，不妨设 $\mu=1$，则

$\iiint\limits_{\Omega}\mu dv=\dfrac{4}{3}\pi\cdot2^3-\dfrac{4}{3}\pi\cdot1^3=\dfrac{28}{3}\pi$，

$\iiint\limits_{\Omega}z\mu dv=\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\rho^4\Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}d\varphi=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi\left[4^4\cos^4\varphi-16\cos^4\varphi\right]d\varphi$

$=120\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin\varphi d\varphi=120\pi\left[-\dfrac{1}{6}\cos^6\varphi\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=20\pi$，

所以 $\overline{z}=\dfrac{20\pi}{\frac{28\pi}{3}}=\dfrac{15}{7}$，从而质心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{15}{7}\right)$.

二、1. 边界函数含有 x^2+y^2 项，故选择柱面坐标系表示.

由 $\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ 化为极坐标表示为 $\begin{cases} r^2=2r\cos\theta \\ r^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=2\cos\theta \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{3}$，

立体所占空间闭区域为

$\Omega: 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}, 1\le r\le 2\cos\theta, 0\le z\le r^2\sin\theta\cos\theta$，

$$\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}dr\int_0^{r^2\sin\theta\cos\theta} rdz=\frac{9}{16}.$$

2. 作图（略）可知，D 具有对称性，第一象限部分可表示为 $0\le y\le 1, \sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}$

，从而 $\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy=\iint\limits_D (x^3+3xy^2)dxdy=2\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}(x^3+3xy^2)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1+2y^2-3y^4)dy+3\int_0^1(y^2-y^4)dy=\frac{14}{15}.$$

3. 由题设，可知 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le\sec\theta, 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right\}=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1, 0\le y\le x\right\}$，

从而 $I=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}dxdy=\dfrac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}d(1-x^2+y^2)$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x dx=\frac{1}{3}\int_0^1[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

作换元 $x=\sin t$，则 $I=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi}{16}$.

第十一章　曲线积分与曲面积分

§11-1　对弧长的曲线积分

基础题

1．光滑曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},(\alpha\le t\le\beta)$ 的弧微分 $\mathrm{d}s=$____________________. 由此，圆周 $\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \end{cases},(0\le\theta<2\pi)$ 的弧微分 $\mathrm{d}s=$________________.

2．计算下列对弧长的曲线积分:

（1）$\int_L (x+y)ds$，其中 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段.

（2）$\oint\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$、直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界.

（3）$\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$，其中 Γ 为曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧.

(4) $\int_L (x^2+y^2)ds$，其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

提高题

计算 $\int_L x^2 ds$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截得的圆周.

§11-2　对坐标的曲线积分

基础题

1．力 $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 沿光滑曲线弧 L 所做功的微元

$\mathrm{d}W =$ ________________，其中 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上连续.

2．计算第二型曲线积分：

（1）$\oint_L xydx$，其中 L 为圆周 $(x-R)^2 + y^2 = R^2 (R>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界（按逆时针方向绕行）；

（2）$\int_\Gamma xdx + ydy + (x+y-1)dz$，其中 Γ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线.

(3) $\oint_L \dfrac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 沿逆时针方向绕行.

提高题

1. 计算$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$，其中L分别是：

（1）先沿直线从点$(1,1)$到点$(1,2)$，再沿直线到点$(4,2)$的折线；

（2）曲线$x=2t^2+t+1$，$y=t^2+1$上从点$(1,1)$到点$(4,2)$的一段弧.

2. 求在力$\vec{F}(y,-x,x+y+z)$作用下，

⑴质点由$A(a,0,0)$沿螺旋线L到$B(a,0,2\pi b)$所做的功，其中

$$L: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\le t\le 2\pi;$$

⑵质点由A沿直线$x=a, y=0$到B所做的功.

§11-3　格林公式及其应用

基础题

1．利用曲线积分计算由星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 所围成的图形的面积.

2．计算曲线积分 $\oint\limits_L \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$，L 的方向为逆时针方向.

4. 证明曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x\cos y - y^2 \sin x)dx + (2y\cos x - x^2 \sin y)dy$$

在整个 xOy 平面内与路径无关，并求其值.

提高题

1．利用格林公式计算由双纽线：$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围成的区域的面积.

2. 计算曲线积分 $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-2y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\mathrm{d}y$，其中 L 为上半圆周 $(x-R)^2+y^2=R^2, y\geq 0$，沿逆时针方向.

3．选择 a,b 使得 $(ay^2-2xy)\mathrm{d}x+(bx^2+2xy)\mathrm{d}y$ 是某一函数 $u=u(x,y)$ 的全微分，并求出 $u=u(x,y)$.

§11-4　对面积的曲面积分

基础题

1． 光滑曲面 $z=f(x,y)$ 的面积微元 $\mathrm{d}S=$__________________________.

2．计算 $\iint\limits_S \frac{dS}{z}$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ 所截的顶部.

3．计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0,z=3$ 所截得的部分.

4．计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上 $z\geq h(0<h<R)$ 的部分.

提高题

1．计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}dS$，其中 Σ 是介于平面 $z=0$ 和 $z=H$ 之间的圆柱面

$x^2+y^2=R^2$.

2．求抛物面壳 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\,(0\le z\le 1)$ 的质量，此壳的面密度的大小为 $\rho=z$.

§11-5　对坐标的曲面积分

基础题

1. 计算下列对坐标的曲面积分:

（1）$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\ge 0, y\ge 0$ 部分并取球面外侧;

（2）$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

2． 把对坐标的曲线积分 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成对面积的曲面积分，其中 Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限部分的上侧.

提高题

1. 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

2. 设磁场强度为$E(x,y,z)$，求球内出发通过上半球面$x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0$的磁通量.

§11-6　高斯公式　通量与散度

基础题

1．利用高斯公式计算曲面积分：$\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中$\Sigma$为球面

$x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧。

2. 利用高斯公式计算曲面积分：$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是介于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\le 9$ 的整个表面的外侧.

3．计算 $\iint_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le h)$ 的外侧.

提高题

1．求向量$\vec{A}=(2x+3z)\vec{i}-(xz+y)\vec{j}+(y^2+2z)\vec{k}$穿过曲面$\Sigma$流向指定侧的通量，其中$\Sigma$是以点$(3,-1,2)$为球心，半径$R=3$的球面，流向外侧。

2．设$u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$均在闭区域Ω上具有二阶连续偏导数，$\dfrac{\partial u}{\partial n},\dfrac{\partial v}{\partial n}$依次表示$u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$沿$\Sigma$的外法线方向的方向导数，证明：

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\ ,$$

其中Σ是空间闭区域Ω的整个边界曲面.（此公式叫“格林第二公式”）

§11-7　斯托克斯公式　环流量与旋度

基础题

1. 计算$\oint_L (2y+z)dx+(x-z)dy+(y-z)dz$，其中$L$为平面$x+y+z=1$与各坐标面的交线，取逆时针方向为正方向.

2．利用斯托克斯公式将曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$化为曲线积分，并计算积分值，其中$\vec{A}=y^2\vec{i}+xy\,\vec{j}+xz\vec{k}$**,**$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧，$\vec{n}$是$\Sigma$的单位法向量.

3. 计算向量场$\vec{A}=(x-z)\vec{i}+(x^3+yz)\vec{j}-3xy^2\vec{k}$绕闭曲线$\Gamma$**:**$\begin{cases} z=2-\sqrt{x^2+y^2} \\ z=0 \end{cases}$沿逆时针方向的环流量.

提高题

1. 若 L 是平面 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ 上的闭曲线，其所包围的区域面积为 S ，

求 $\oint_L \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$, 其中 L 沿正向进行.

2. 设向量场 $A(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ 及数量场 $u(x,y,z)$ 均为光滑的，计算 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}A)$ 及 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)$.

自我测试题

一、填空题(每题 5 分，共 20 分）

1．设 C 为正方形 $|x|+|y|=a\ (a>0)$ 的边界，则曲线积分 $\oint_C xy\mathrm{d}s=$______________.

2. 设 C 是以点 $A(1,1)$，$B(2,2)$ 和 $C(1,3)$ 为顶点的三角形的正向边界曲线，则曲线积分 $I=\oint_C 2(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y=$______________________.

3．已知曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2$（$z\le 1$)，则 $\iint_\Sigma \sqrt{1+4z}\mathrm{d}S=$___________.

4．若 Σ 为光滑封闭曲面，V 为其所围立体的体积，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 Σ 的外法线的方向余弦，则曲面积分 $\oiint_\Sigma (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=$____________.

二、解答题（共 58 分）

1.（16 分）计算 $I=\iint_S xzdydz+yxdzdx+zydxdy$，其中 S 是柱面 $x^2+y^2=1$ 在 $-1\le z\le 1$ 和 $x\ge 0$ 的部分，曲面的法向与 x 轴成锐角.

2.（**16** 分）设 $g'(x)$ 连续，且 $g(1)=g(0)=0$，计算

$$I=\int_L [2xg(y)-y]\mathrm{d}x+[x^2g'(y)-y]\mathrm{d}y,$$

其中 L 是过三点 $A(0,0), B(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ 和 $C(1,1)$，其对称轴与 y 轴平行的抛物线.

3.（**16** 分）计算第二型曲面积分 $I=\iint\limits_S f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy$，其中 S 是平行六面体 $(0\le x\le a, 0\le y\le b, 0\le z\le c)$ 的表面并取外侧为正向，$f(x), g(y), h(z)$ 均为 S 上的连续函数.

4.（10 分）求均匀曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ 的重心.

四、证明题（共 22 分）

1.（12 分）证明：若 Σ 是任意光滑闭曲面，$\vec{l}$ 为任一固定方向，则 $\oiint\limits_{\Sigma}\cos\alpha \mathrm{d}S=0$，其中 α 是 Σ 上任意一点处的外法线 $\vec{n}$ 和 $\vec{l}$ 的夹角.

2.（10 分）设 p 表示从原点到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $W(x,y,z)$ 的切平面的垂直距离，求证 $\iint\limits_{\Sigma} p\mathrm{d}S=4\pi abc$，式中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

重点与难点分析

1. 正确理解两类曲线积分与两类曲面积分的概念、性质、几何意义和物理意义.
2. 熟练掌握两类曲线积分和两类曲面积分的计算方法，了解它们之间的相互关系.
3. 掌握格林公式及应用，熟悉和会应用平面曲线积分与积分路径无关的条件。掌握二元函数全微分方程的求解方法.
4. 掌握高斯公式及应用，了解斯托克斯公式，知道通量与散度，环流量与旋度.
5. 会用曲线积分和曲面积分求一些几何量与物理量（弧长、曲面面积、质量、重心、转动

惯量、功及流量等）.

三、曲线积分化为定积分应用举例

例 1 计算对弧长的曲线积分 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为曲线 $\rho = a(0 \le \theta \le \frac{\pi}{4})$ 的一段.

解 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\sqrt{0+a^2}d\theta = \frac{\pi}{4}ae^a$.

例 2 计算对坐标的曲线积分 $\int_L ydx+zdy+xdz$，其中 L 是曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0 \quad (a>0,b>0,c>0)$ 从点 $(a,0,0)$ 到 $(0,0,c)$ 的一段曲线弧.

解 设 $x=at$，$z=c(1-t)$，$y=\sqrt{2}b\sqrt{t-t^2}$，起点 $t=1$，终点 $t=0$. 因此

$$\text{原积分} = \int_1^0 [ab\sqrt{2}\sqrt{t-t^2}+bc\frac{(1-t)(1-2t)}{\sqrt{2}\sqrt{t-t^2}}-act]dt(\text{令}\mathrm{t}=\cos^2\frac{\theta}{2})$$

$$= \int_0^{\pi}(-\frac{ab}{2\sqrt{2}}\sin^2\theta+\frac{bc}{\sqrt{2}}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta+ac\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$= -\frac{\pi b}{4\sqrt{2}}(a+c)+\frac{ac}{2}$$

四、格林公式计算曲线积分应用举例

例 3 计算 $\oint_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$ 其中 L 是以 $A(1,1),B(3,2),C(2,5)$ 为顶点的三角形，方向取正.

解：$\oint_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$

$$=\iint_D(-4x-2y)dxdy=\iint_{D_1}(-4x-2y)dxdy+\iint_{D_2}(-4x-2y)dxdy=-46\frac{2}{3}$$

三、曲面积分的计算应用举例

例 4 计算对面积的曲面积分 $\iint_S xyzdS$，其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

解 因为 $z=1-x-y$，$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3}$ 所以

$$\iint_D xyzdS = \sqrt{3}\iint_{\substack{x+y\le 1\\ x\ge 0,y\ge 0}} xy(1-x-y)dxdy$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(xy-x^2y-xy^2)=\frac{\sqrt{3}}{120}.$$

例 5　计算第二型曲面积分 $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，并取外侧为正向.

解　对于积分 $\iint\limits_S z^2dxdy$，S 可以表示成

$z=c\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2},(x,y)\in D_{xy}$,

那么 $\iint\limits_S z^2dxdy$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy$$

$$-\iint\limits_{D_{xy}}[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy$$

$$=4c\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}dxdy$$

作变换：$T:x=a+r\cos\theta,y=b+r\sin\theta$

那么 $\iint\limits_S z^2dxdy=\dfrac{8}{3}\pi R^3c$

同理有 $\iint\limits_S x^2dzdy=\dfrac{8}{3}\pi R^3a$，$\iint\limits_S y^2dxdz=\dfrac{8}{3}\pi R^3b$

所以 $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\dfrac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$.

四、高斯公式应用举例

例 6　应用高斯公式计算积分 $\oiint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$，其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

解 由高斯公式，有

$$\oiint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy=3\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dV=\frac{12}{5}\pi$$

五、斯托克斯公式应用举例

例 7　应用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz$，其中 L 为 $y^2+z^2=1,x=y$ 所交椭圆的正向.

解 $\oint_L x^2y^3dx+dy+zdz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix}=0$.

综合题

1．设 $P=x^2+5\lambda y+3yz, Q=5x+3\lambda xz-2, R=(\lambda+2)xy-4z$，计算 $\int_L Pdx+Qdy+Rdz$，其中 L 为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=ct(0\le t\le 2\pi)$.

2．证明：若 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$S$ 为包围区域 V 的曲面外侧，则

（1）$\iiint_V \Delta u dxdydz=\oiint_S \dfrac{\partial u}{\partial n}dS$；

（2）$\oiint_S u\dfrac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint_V \nabla\bullet\nabla u dxdydz+\iiint_V u\Delta u dxdydz$.

其中 u 在区域 V 及其界面 S 上有二阶连续偏导数，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 外法线方向的方向导数.

3. 设流体的流速为$v=(k,y,0)$，求单位时间内从球面$x^2+y^2+z^2=4$的内部流过球面的流量.

4. 求下列全微分的原函数：

(3) $yzdx+xzdy+xydz$；

(4) $(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2yx)dz$.

5. 计算$I=\int_L x\ln(x^2+y^2-1)dx+y\ln(x^2+y^2-1)dy$，其中$L$是被积函数的定义域内从点$(2,0)$至$(0,2)$的逐段光滑曲线.

参考答案

§11-1

基础题

1. $\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\mathrm{d}t$；$R\mathrm{d}\theta$　**2.**（1）$\sqrt{2}$；（2）$\mathrm{e}^R(2+\frac{\pi}{4}R)-2$；

（3）$\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})$；（4）$2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$；

提高题　$\frac{2}{3}\pi a^3$

§11-2

基础题

2.　$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$　2.（1）$-\frac{\pi}{2}R^3$；（2）13；

（3）设 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\end{cases}(0\le\theta\le2\pi)$ 所以

$$\oint_L\frac{-xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(-a\cos\theta)(-a\sin\theta)+a\sin\theta\bullet a\cos\theta]d\theta=0$$

提高题

1.（1）14（2）$\frac{32}{3}$

2. 在空间曲线 L 上力 F 所做的功为

$W=\int_L F\bullet ds=\int_L ydx-xdy+(x+y+z)dz.$

(1) $2\pi(\pi b^2-a^2)$　　(2) $2\pi b(a+\pi b)$

§11-3

基础题

1. $\frac{3}{8}\pi a^2$　　2．$-\pi$

3.

设：$P=2x\cos y-y^2\sin x, Q=2y\cos x-x^2\sin y$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-2y\sin x, \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin x-2x\sin y$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$积分与路径无关，取$(0,0)$到$(x,y)$的折线，原积分为$x^2\cos x+y^2\sin y$

提高题

2. 利用图形对称性可知面积为 a^2　2. πR^2　3. $a=1, b=-1, u(x,y)=-x^2y+xy^2$.

§11-4

基础题

2. $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　2. $2a\pi\ln\frac{a}{h}$　3. 9π　4. $\pi R(R^2-h^2)$

提高题

1. $2\pi\arctan\frac{H}{R}$　2. $\frac{2}{15}\pi(6\sqrt{3}+1)$

§11-5

基础题

2. (1) $\frac{2}{15}$ (2) $\frac{1}{2}$　2. $\iint_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P+\frac{2}{5}Q+\frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)\mathrm{d}S$

提高题

1. $\frac{1}{8}$　2. $2\pi a^3$

§11-6

基础题

1. $\frac{12}{5}\pi a^5$　2. 81π　3. $-\frac{\pi}{4}h^4$

提高题

1. 108π　2. （略）

§11-7

基础题：

2. 1　2. 0　3. 12π

提高题

1. 2S　**2.** 0, 0

自我测试题

一、1、0　　2、$-\frac{4}{3}$　　3、3π　　4、$3V$

二、

1. 设平面

$$S_1: x=0,-1\le y\le 1,-1\le x\le 1,\text{与}x\text{负方向相同；}$$
$$S_2: x\ge 0,x^2+y^2=1,z=1,\text{方向向上；}$$
$$S_3: x\ge 0,x^2+y^2=1,z=-1,\text{方向向下。}$$

V为面S,S_1,S_2,S_3围成的体积.

$$I' = \iint\limits_{S+S_1+S_2+S_3} xzdydz + yzdzdx + zydxdy$$
$$= \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$$
$$= \int_{-1}^{1}(\frac{1}{2}\pi z + \frac{2}{3})dz$$
$$= \frac{4}{3}$$

又

$$\iint\limits_{S_1} xzdydz + yzdzdx + zydxdy = 0$$
$$\iint\limits_{S_2} xzdydz + yzdzdx + zydxdy = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2=1\\ x\ge 0}} ydxdy$$
$$\iint\limits_{S_3} xzdydz + yzdzdx + zydxdy = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2=1\\ x\ge 0}} -ydxdy$$

有$I = I' = \frac{4}{3}$.

2. 略.

3.设平行六面体在yz,zx,xy平面上的投影分别为D_{yz},D_{zx},D_{xy}那么

$$I = \iint\limits_{D_{yz}}[f(a)-f(0)]dydz + \iint\limits_{D_{zx}}[g(b)-g(0)]dzdx + \iint\limits_{D_{xy}}[h(c)-h(0)]dxdy$$
$$= [f(a)-f(0)]bc + [g(b)-g(0)]ac + [h(c)-h(0)]ab$$

4.设(x_0,y_0,z_0)由对称性可知$x_0=y_0=z_0$,只需要求出z_0即可

$$z_0=\frac{\iint\limits_S zdS}{\iint\limits_S dS}=\frac{\iint\limits_S zdS}{S}$$

又 $S=\frac{1}{2}\pi a^2$ 以及 $\iint\limits_S zdS=\frac{1}{4}\pi a^2$,可知 $z_0=\frac{a}{2}$，即重心坐标为 $(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

三、1. 设 $\vec{l_1}=(a,b,c)$ 为 $\vec{l}$ 方向的单位向量，$\vec{n_1}$ 为外法线的单位向量：$\vec{n_1}=(\cos\theta,\cos\varphi,\cos\psi)$，则

$$\cos\alpha=l_1\cdot n_1=a\cos\theta+b\cos\varphi+c\cos\psi$$

应用 Gauss 公式

$$\begin{aligned}\iint\limits_S\cos(n,l)dS&=\iint\limits_S(a\cos\theta+b\cos\varphi+c\cos\psi)dS\\&=\iiint\limits_V(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z})\,dxdydz=\iiint\limits_V 0\,dv=0\end{aligned}$$

2.椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上 $W(x,y,z)$ 点的切平面为

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1$$

点 $(0,0,0)$ 到切平面的距离：

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{z^4}}}$$

可以得到

$$dS=\frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}dxdy\ .$$

故积分 $\iint\limits_{\Sigma} p\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{\Sigma_{上半}} \frac{c^2}{z}\mathrm{dxdy}=4\pi abc$.

综合题

3. $\pi a^2(1-\lambda)(5-3c\pi)-8\pi^2c^2$

4. （1）利用高斯公式，有

$$\oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS = \oiint\limits_S [\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n,z)]dS$$

$$=\oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}dydz+\frac{\partial u}{\partial y}dxdz+\frac{\partial u}{\partial z}dxdy$$

$$=\iiint\limits_V (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})dxdydz$$

$$=\iiint\limits_V \Delta u dxdydz$$

（2）由高斯公式，有

$$\oiint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS = \oiint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial x}dydz+u\frac{\partial u}{\partial y}dxdz+u\frac{\partial u}{\partial z}dxdy$$

$$=\iiint\limits_V [(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2+u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})]dxdydz$$

$$=\iiint\limits_V \nabla\bullet\nabla u dxdydz+\iiint\limits_V u\Delta u dxdydz$$

3. 单位时间内流体从球面的内部流过球面的流量为 $E=\iint\limits_S kdydz+ydzdx$.

对于积分 $\iint\limits_S kdydz$，由于被积函数 $f(x,y,z)=k$ 为常数，前侧曲面 $x=\sqrt{4-y^2-z^2}$ 上的微元 dS 在 yoz 面上的投影为正， $x=-\sqrt{4-y^2-z^2}$ 上的微元 dS 在 yoz 面上投影为负，故 $\iint\limits_S kdydz=0$，所以

$$E=\iint\limits_S ydxdz=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{4-x^2-z^2}dxdz-\iint\limits_{D_{zx}}(-\sqrt{4-x^2-z^2})dxdz$$

$$=2\iint\limits_{x^2+z^2\le 4}(-\sqrt{4-x^2-z^2})dzdx=\frac{32}{3}\pi$$

4. 因为 $P=yz,Q=xz,R=xy$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=z-z=0,\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=x-x=0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}=y-y=0$$

在全空间成立，所以 $yzdx+xzdy+xydz$ 在全空间为某个函数的全微分，

显然 $\quad d(xyz)=yzdx+xzdy+xydz$

故 $\quad u(x,y,z)=xyz+c$

（2）因为 $P=x^2-2yz,Q=y^2-2xz,R=z^2-2xy$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}=0$$

在全空间成立，所以 $(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2yx)dz$ 在全空间为某个函数 u 的全微分。

取 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$ 则

$$u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz+c$$

$$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z z^2dz$$

$$=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+c$$

5. 被积函数 $P=x\ln(x^2+y^2-1),Q=y\ln(x^2+y^2-1)$ 在定义域内有连续的偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2xy}{x^2+y^2-1}.$$

这里 D 为二连通区域，$x^2+y^2\le 1$ 是唯一的洞，在围绕该洞任一路径上逆时针方向积分一周，其值相等，等于该洞的循环常数

$$w=\oint_C x\ln(x^2+y^2-1)dx+y\ln(x^2+y^2-1)dy$$

$$=\oint_C x\ln 3dx+y\ln 3dy$$

$$=\ln 3\int_0^{2\pi}[2\cos\theta(-2\sin\theta)+4\sin\theta\cos\theta]\,d\theta=0$$

由此可见积分与路径无关。采用平行于坐标轴的折线路径

$ABC:(2,0)\to(2,2)\to(0,2)$

得 $I=\int_0^2 y\ln(3+y^2)dy+\int_2^0 x\ln(3+x^2)dx=0$.

第十二章　无穷级数

§12-1 常数项级数的概念和性质

基础题

利用级数收敛与发散的定义判别下列级数的敛散性：

（1）$\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$ ；

（2）$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$；（注意 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}=(\dfrac{1}{3})^{\frac{1}{n}}$ ）

（3）$(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2})+\cdots+(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n})+\cdots.$

提高题

判别下列级数的敛散性:

（1） $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ ；（提示 ： $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$）

（3）$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$.

§12-2　常数项级数的审敛法

基础题

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判别下列级数的敛散性:

（1）$1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\dfrac{1+n}{1+n^2}+\cdots$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

2. 用比值审敛法判别下列级数的敛散性:

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n2^n}$；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

3. 用根值审敛法判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$ 的敛散性.

4．判别下列级数是否收敛, 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

（1）$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$；

（2）$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$.

提高题

判别下列级数的敛散性:

（1）$\frac{3}{4}+2(\frac{3}{4})^2+\cdots+n(\frac{3}{4})^n+\cdots$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}\ (p>0)$.

§12-3　幂级数

基础题

求下列级数的收敛区间:

（1）$1-x+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n^2}+\cdots$；

（2）$\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2\cdot4}+\cdots+\dfrac{x^n}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}+\cdots$.

提高题

1．求下列级数的收敛域:

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n x^{2n}$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

2. 求下列幂级数的和函数（注意 x 的范围）:

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$；

（2）$x+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$.

3．若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 当 $x=0$ 时收敛，当 $x=4$ 时发散，试指出此幂级数的收敛半径 R，并证之.

4．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域及和函数，并计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)\quad (a>1).$$

§12-4 函数展开成幂级数

基础题

将下列函数展开成 x 的幂级数:

（1）$\ln(a+x)\,(a>0)$；

（2）$a^x\,(a>0且a\neq 1)$；

（3）$\sin^2 x$.

提高题

2. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数.

2. 将 $f(x)=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{e^x-e}{x-1})$ 展开为 $x-1$ 的幂级数.

§12-5 傅里叶级数

基础题

1. 已知 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，$f(x)=\begin{cases}-\pi/2, & -\pi\le x<-\pi/2\\ x, & -\pi/2\le x<\pi/2\\ \pi/2, & \pi/2\le x<\pi\end{cases}$ 且设 $s(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，求 $s(0)$ 、$s(\pi)$ 、$s(5\pi/2)$.（提示：直接用 Dirichlet 定理）

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数 .

(1) $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，其在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为：$f(x)=e^{2x}\quad(-\pi\le x<\pi)$.

（2） $f(x)=\begin{cases} e^x & ,-\pi \le x < 0 \\ 1 & ,0 \le x < \pi \end{cases}$.

提高题

1. 将 $f(x)=2x^2 \quad (0 \le x \le \pi)$ 展开为正弦级数与余弦级数.

2. 在区间 $[-\pi,\pi]$ 内把函数 $f(x)=1-\dfrac{2|x|}{\pi}$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

§12-6 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数

基础题

将下列各周期函数展开成傅里叶级数（下面给出函数在一个周期内的表达式）：

（1）$f(x)=1-x^2 \quad (-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2})$ ；

（2）$f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x<0 \\ 1, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2}\le x<1 \end{cases}$.

提高题

将 $f(x)=x^2(0\le x\le 2)$ 展开为正弦级数与余弦级数.

自我测试题

五、判别题（共 40 分）

1. （10 分）利用定义判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$ 的敛散性.

2.（20 分）判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3+2n+1}}$ ；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} x^n$ （提示：$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\dfrac{n}{e})^n, n \to \infty$ ）

3.（10 分）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi + \dfrac{1}{\sqrt{n}})$ 是否收敛？若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

六、**解答题**（共 60 分）

1.（10 分）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n+\frac{1}{2^n x^n})$ 的收敛域.

2.（13 分）将 $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数.

3.（10 分）假设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，且 $f(x)=\begin{cases} e^x & ,-\pi \le x < 0 \\ 1 & ,0 \le x < \pi \end{cases}$；设 $s(x)$ 为 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，求 $s(\pi)$， $s(2\pi)$.

4.（12 分）设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和为 S_n，而 $v_n = \dfrac{1}{S_n}$。已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，问 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性如何？

5. (15 分)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1} x^n$ 在其收敛域 $|x| < 1$ 内的和函数.

重点与难点分析

1.常数项级数敛散性的判别方法.

（1） 判断通项的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 是否为零，若不为零，级数发散；若为零，则需进一步判断.

（2） 等比、等差数列或可转化为等比、等差数列的数列，求前 n 项和，用级数收敛的定义判断.

（3） 正项级数可考虑比较审敛法及其极限形式、比值审敛法、根值审敛法，非正项级数可加绝对值后变为正项级数判断其敛散性，若发散，则需进一步用其他方法判断.

（4） 交错级数用莱布尼兹（Leibniz）定理判断.

2.幂级数

（1）掌握阿贝尔(Abel)定理及比值审敛法，会求幂级数的收敛半径、收敛域及和函数.

（2）会把函数展开成幂级数.

3.傅里叶(Fourier)级数

（1）掌握傅里叶级数收敛定理，即狄利克雷(Dirichlet)充分条件.

（2）掌握以 2π 为周期的函数以及可延拓为以 2π 为周期的非周期函数的傅里叶级数.

（3）掌握以 $2l$ 为周期的函数以及可延拓为以 $2l$ 为周期的非周期函数的傅里叶级数.

例 1 判断级数的敛散性:

（1）$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$ （注意 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$ ）;

（2）$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots$.

解 （1） 通项的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}=1$，级数发散.

（2） 虽然通项的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n}=0$，它和调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 比较，调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，它也发散.

级数通项极限不为零，级数发散，但通项极限为零，级数不一定收敛.

例 2 判断下列级数的敛散性：

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}\quad ;$$

解 因为 $u_n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})$ 单调递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

由 Leibniz 判别法知级数收敛 ;但

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$$

所以原级数仅条件收敛 。

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}=e^{-1}<1$，

所以原级数绝对收敛 .

非正项级数加绝对值后变为正项级数判断其收敛，若发散需进一步用其他方法判断.

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛域及和函数，并计算极限

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n})\quad(a>1).$$

解 先求收敛域 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，得收敛半径 $R=1$,在端点 $x=\pm1$ 处发散，因此收敛域为 $(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=x(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n})=S(\frac{1}{a})=\frac{a}{(a-1)^2}$.

利用幂级数可逐项微分或积分的性质把未知和函数的级数转化为已知和函数的级数，并可利用和函数求常数项级数的和.

例 4 证明当 $0<x<\pi$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\cos 2kx=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x$.

证 这是傅里叶级数的反问题，因为级数只含余弦项，将函数偶延拓到 $(-\pi,\pi)$ 内，其傅

里叶系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x)dx=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x)\cos nxdx=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx$$

$$a_{2k+1}=0 \quad k=1,2,\cdots$$

$$a_{2k}=\frac{1}{4}[\frac{-2}{2k+1}+\frac{2}{2k-1}]=\frac{1}{(2k+1)(2k-1)} \quad k=1,2,\cdots$$

故 $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)}$ ，结论成立.

定义在 $0<x<\pi$ 上的函数，不论它为奇函数或偶函数或非奇非偶函数，都可通过延拓变为奇函数或偶函数，故可展开为正弦级数或余弦级数.

综合题

1. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}$ 的敛散性，若收敛，求该级数的和.

2. 试求函数 $y=\ln(1+x+x^2+x^3)$ 关于 x 的幂级数.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}$ 的收敛域及和函数，并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)(n+2)2^{n}}$ 的和.

4. 将函数 $f(x)=2+|x|\ (-1<x<1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ 的和.

8.设 $f(x)=\begin{cases} x+2\pi, & -\pi \le x < 0 \\ \pi, & x=0 \\ x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n=0,1,2,\cdots$ 利用函数的傅里叶级数展开式，求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和.

参考答案

§12-1

基础题

2．(1)收敛；(2)发散；(3)收敛.

提高题

1. (1)发散；(2)收敛；(3)发散.

§12-2

基础题

1. (1)发散；(2)收敛.　**2.** (1)发散；(2)收敛.　**3.** 收敛　**4.** (1)条件收敛；(2)绝对收敛.

提高题

1. (1)收敛；(2)收敛；(3)收敛；(4)收敛.

§12-3

基础题

1. (1)$[-1,1]$；(2)$(-\infty,\infty)$；

提高题

1. (1)$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$；(2)$[4,6)$； **2.** (1)$\frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$.(2)$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$.

3. 直接用定义；**4.** 收敛半径 $R=1$，收敛域为$(-1,1)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$，

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n})=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

§12-4

基础题

(3) $\ln(a+x)=\ln a+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{na^n}\quad(-a<x\le a)$；

(4) $a^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n\quad(-\infty<x<\infty)$；

(3) $\sin^2 x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\quad(-\infty<x<\infty)$.

提高题

1. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n\quad(-6<x<-2)$；

2. $f(x)=\mathrm{e}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}(x-1)^{n-2}\quad(x\ne1)$；

§12-5

基础题

1. $s(0)=0,\quad s(\pi)=0,\quad s\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

2. (1) $\mathrm{e}^{2x}=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)\right]$；

$$(x\ne(2n+1)\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(2) $f(x)=\frac{1+\pi-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+\left[1-(-1)^n\right]\left(\frac{1}{n}-\frac{n^2}{1+n^2}\mathrm{e}^{-\pi}\right)\sin nx\right\}$

$\left(x\in\left(-\pi,\pi\right)\right)$；

提高题

1.
$$2x^2=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{2}{n^3}+(-1)^n(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n})]\sin nx \qquad 0\le x<\pi$$

$$2x^2=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad 0\le x\le\pi$$

2.注意到 $f\left(x\right)$ 是偶函数，故 $f\left(x\right)$ 的 Fourier 系数

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\,\mathrm{d}\,x=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\mathrm{d}\,x=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\sin nx\Big|_0^{\pi}+\frac{4}{n\pi^2}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\pi\right)=\begin{cases}0, & n\text{为偶数时},\\ \dfrac{8}{n^2\pi^2}, & n\text{为奇数时},\end{cases}$$

由于 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 内分段单调，连续，且 $f\left(\pi\right)=f\left(-\pi\right)$,

故在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 内，$f\left(x\right)=\dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2k-1\right)x}{\left(2k-1\right)^2}$.

§12-6

基础题

(3) $f(x)=\dfrac{11}{12}+\dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos 2n\pi x,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$；

(4) $$\frac{-1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\{[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}+\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}]\cos n\pi x+\frac{1-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\sin n\pi x\}$$

$$x\ne 2k,2k+\frac{1}{2},\qquad k=0,\quad \pm1,\quad \pm2,\cdots$$

提高题

$$x^2=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\}\sin\frac{n\pi x}{2} \qquad 0\le x<2$$

$$2x^2=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} \qquad 0\le x\le 2$$

自我测试题

4. $s_n \to 2(n \to \infty)$，级数收敛.

5. (1)收敛.(2) 当$0<t<e$时，级数收敛；当$t>e$时，级数发散；当$t=e$，级数发散.

6. 条件收敛.

二、1.收敛域为$(-1,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$.

2.
$$f(x)=\frac{1}{4}[(-\frac{1}{3})\frac{1}{1-\frac{x}{3}}-\frac{1}{1-x}]=-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$
$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n]x^n \qquad (-1<x<1).$$

3. $s(2\pi)=f(2\pi)=1;\qquad s(\pi)=\dfrac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$

4.根据提示条件知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s_n}$为正项级数收敛，则必有$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}=0$，

从而$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$，所以正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

6. $$s(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}+\dfrac{1}{1-x} & 0<|x|<1\\ 0 & x=0\end{cases};$$

综合题

1. $\frac{19}{4}$　　**2.** 由于 $y=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$，而

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,\ 1];$$

故 $$\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\qquad x\in[-1,\ 1].$$

所以 当 $x\in(-1,\ 1]$时，有 $$y=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\frac{(-1)^{k-1}-\frac{1}{2}}{k}x^{2k}\right).$$

3. $s(x)=x+\ln(1-x)-\dfrac{x^2}{2}+x\ln(1-x)\qquad x\in(-1,1)$；$\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{3}{8}$.

4. $2+|x|=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}\quad(-1\le x<1)$； $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

5. $f(x)$满足傅里叶级数收敛于$f(x)$的充分条件，故当$x\in[-\pi,\pi]$时，

$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=f(x)$，

其中$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$， $n=1,2,3,\cdots$.特别$S(0)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=f(0)=\pi$.

而$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+2\pi)\,\mathrm{d}\,x+\dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,\mathrm{d}\,x=2\pi$，

故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=S(0)+\dfrac{a_0}{2}=\pi+\pi=2\pi$.

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期末模拟试卷一

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空题(每题3分，共15分)

1．过直线$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$且垂直于平面$3x+2y-z=5$的平面方程是_________。

2．设$x^2+2xy+y+ze^z=1$，则$dz\big|_{(0,1)}=$________________________。

3．椭圆抛物面Σ：$z=2x^2+y^2$在点$P_0(1,-1,3)$处的法线方程是____________________。

4．曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=x^2+y^2$所围立体的体积为___________。

5．设L为上半圆周$y=\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分$\int_L\left(x^2-xy+y^2\right)ds=$___________。

二、选择题(每题3分，共15分)

1．方程$y''-3y'+2y=1+2x-3e^x$的特解形式为（　　　）

A. $(ax+b)e^x$　　B. $(ax+b)xe^x$　　C. $ax+b+ce^x$　　D. $ax+b+cxe^x$

2. 设$u_n=(-1)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则级数（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

3．二元函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处都连续是 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微分的（　　）

A.充分条件　　B. 必要条件
C.充要条件　　D.既非充分也非必要条件

4. 二次积分 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$　　B. $\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$　　C. $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}\sqrt{2}$

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & -\pi\le x<0 \\ x-\pi & 0\le x<\pi \end{cases}$，则周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=2\pi$ 处收敛于（　　）

A. $-\dfrac{\pi}{2}$　　B. $-\pi$　　C. 0　　D. π^2

三、计算题(共58分)

1、设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+g(\dfrac{y}{x})$，其中 f 有二阶连续偏导数，g 有二阶导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2、(8分) 求$z=f(x,y)=x^2-y^2$在闭区域D：$\dfrac{x^2}{4}+y^2\leq 1$上的最大值和最小值。

3、(8分) 求微分方程$y''=\dfrac{y'}{x}+xe^x$的通解。

4、(14分)（Ⅰ）试确定可导函数$f(x)$，使在右半平面内，$y[2-f(x)]dx+xf(x)dy$为某函数$u(x,y)$的全微分, 其中$f(1)=2$；　（Ⅱ）求$u(x,y)$。

5、（10分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的收敛域及和函数。

6、（10分）计算积分 $I=\iint_{\Sigma}(y-z)\,dzdx+(x+2z)\,dxdy$ ，其中 Σ 是抛物面 $z=x^2+y^2 \quad (0\le z\le 1)$，取下侧。

七、**证明题**(12分)

设函数$\varphi(y)$具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线L上，曲线积分$\oint_L \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数. 证明：对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线$C$，有$\oint_C \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$。

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期末模拟试卷二

题号	一	二	总分
得分			

一、填空题(每空3分，共18分)

1、已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=2$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$___________。

2、设$z=x\ln(xy)$，则$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=$_____________。

3、曲面$x^2+y^2+z=9$在点$(1,2,4)$处的切平面方程为___________________________。

4、设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x$，则$f(x)$的傅里叶级数在$x=3$处收敛于__________，在$x=\pi$处收敛于________。

5、设L为连接$(1,0)$与$(0,1)$两点的直线段，则$\int_L (x+y)ds=$_______。

二、解答下列各题（共 82 分）

1、（8 分）求曲线$\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$在点$M_0\ (1,-1,2)$处的切线及法平面方程。

2、（8 分）求由曲面$z=2x^2+2y^2$及$z=6-x^2-y^2$所围成的立体的体积。

3、(8 分)判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$是否收敛？如果收敛，那么是绝对收敛还是条件收敛？

4、（8 分）设$z=f(xy,\frac{x}{y})+\sin y$，其中$f$具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

5、(8 分)计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h\ (0<h<a)$截得的顶部。

6、（8 分）抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆，求该椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值。

7、（8 分）计算曲线积分 $\int_L (e^x \sin y - m)dx + (e^x \cos y - mx)dy$，其中 m 为常数，L 为由点 $A(a,0)$ 至原点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax \ \ (a > 0)$。

8、（8 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n \cdot n}$的收敛域及和函数。

9、（9 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$ ，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$ 的上侧。

10、（9 分）设 $f(x)$ 为连续函数，$f(0)=a$ ，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}[z+f(x^2+y^2+z^2)]dv$ ，其中 Ω_t

是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{t^2-x^2-y^2}$ 所围成的闭区域，求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^3}$。

高等数学（下）期末模拟试卷三

题号	一	二	三	总分
得分				

一、解答题（共 43 分）

1、（5 分）设 $z=f(3x+2y,\dfrac{x}{y})$，其中 $f(u,v)$ 有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2、（6 分）求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面及法线方程.

3、（7 分）设曲线积分 $\int_L [x^2 + \dfrac{y}{x} f'(x)]dx + [f'(x) + y]dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0) = 0$， $f'(1) = 1$，求函数 $f(x)$.

4、（10 分）判别下列级数是否收敛，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛：

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{2^n}$；　　（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n - \ln n}$.

5、（8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}$ 的收敛域及和函数.

6、（7 分）设 $u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，函数 $f(r)$ 二次可微，满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，且 $f(1)=f'(1)=1$，求 $f(r)$.

二、计算题（共 45 分）

1、（共 15 分）计算下列重积分：

（1）$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dxdy$，其中 D 由 $y=x$ 及 $y=\sqrt{x}$ 所围成;

（2）$\iint\limits_{D} \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy$，其中 D 是 $x^2+y^2 \le a^2$ 所围区域在第一像限的部分；

（3）$\iiint\limits_{V} zdxdydz$，其中 V 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=h(h>0)$ 围成的区域.

2、（共 15 分）计算下列曲线或曲面积分：

（1）$\int_{L} zds$，其中 L 为 $x=\cos t, y=\sin t, z=t(0 \le t \le \pi)$；

（2）$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{1+4z}dS$，其中$\Sigma$是抛物面$z=x^2+y^2$位于平面$z=1$下方的部分；

（3）$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$是柱面$x^2+y^2=1$被$z=0$及$z=3$所截部分的外侧。

3、（共 15 分）解下列微分方程：

（1）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}, y|_{x=1}=2$；

（2）$(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}+2xy=3x^2$；

（3）$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-3y=e^{-x}$.

三、证明题（共 12 分）

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

1、（7 分）设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，讨论下列级数的敛散性，要求证明你的结论或给出反例。

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ ；　　　　2、 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$.

2、（5 分）设 $2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$ ，证明： $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期末模拟试卷四

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空题(每题3分，共15分)

1、设 $z=\cos(x^2y)$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\frac{\pi}{2})}=$__________。

2、函数 $z=6(x-y)-x^2-y^2$ 的极值点为______________。

3、交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy=$__________________。

4、当 p ____________时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}$ 收敛。

5、微分方程 $y'=\dfrac{e^x}{\sec^2 y}$ 的通解为______________________。

二、选择题(每题3分，共15分)

1、函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$ 均存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的（　　）

A.充分条件　　　　B.必要条件

C.充要条件　　　　D.既非充分条件又非必要条件

2、设 $x^2+y^2\le 2x$，$y\ge 0$，则 $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$（　　）

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \rho f(\rho)d\rho$　　　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 f(\rho)d\rho$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} \rho f(\rho)d\rho$　　　　D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(\rho)d\rho$

3、设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，取逆时针方向，则 $\int_L -ydx+xdy=$（　　）

A. 2π　　B. -2π　　C. π　　D. $-\pi$

4、求微分方程 $y''+6y'+9y=xe^{-3x}$ 的特解时，应设（　　）

A. $y^*=(ax+b)e^{-3x}$　　　　B. $y^*=x(ax+b)e^{-3x}$

C. $y^*=x^2(ax+b)e^{-3x}$　　　　D. $y^*=x^2(ax+b)$

5、将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数，则 $f(x)=$（　　）

A. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$　　B. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

C. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$　　D. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}x^{2n}$

三、解答题（每题7分，共63分）

2、 设$z=z(x,y)$是由方程$F(x-z,y-z)=0$确定的隐函数，F具有一阶连续偏导数，且$F_u'+F_v'\neq 0$，其中$u=x-z$，$v=y-z$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

2、求$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$，其中$\Omega$为上半球体$x^2+y^2+z^2\leq 4,z\geq 0$.

3、求幂级$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$的收敛范围.

4、求曲线$\begin{cases} y = 2x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$ 在点$(1,2,1)$处的切线方程和法平面方程.

5、求$\iint_D x\sqrt{y}dxdy$，其中D是由曲线$y=\sqrt{x}$和$y=x^2$围成的区域.

6、求$I=\int_L (e^y + x)dx + (xe^y - 2y)dy$，其中$L$为曲线$y=x^2$上从点$O(0,0)$到$A(1,1)$的一段.

7、求微分方程$y'' - 4y' = e^x$的通解.

8、计算 $\iint_{\Sigma}(x^2-2xy)dydz+(y^2-2yz)dzdx+(z^2-2xz)dxdy$，其中 Σ 是半球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2(z\geq a)$ 的上侧.

9、设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t dt=x+1$，求 $f(x)$.

四、证明题（7分）

设 $a_1=a_2=1$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，$(n=2,3,\cdots)$，试证：当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1}$ 收敛，并求其和函数.

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期末模拟试卷五

题号	一	二	三	总分
得分				

一、证明题（4 分）

设 $z = \ln\tan\dfrac{y}{x}$，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

二、计算题（共 36 分）

2、（18 分）计算下列重积分：

（1）$\iint_D (3x+2y)d\sigma$，其中 D 由 $x=0, y=0$ 及 $x+y=2$ 围成；

（2）$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,a^2 \le x^2+y^2 \le b^2\}$；

（3）$\iiint\limits_\Omega zdv$,Ω 由曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围成.

2、（18 分）计算下列曲线或曲面积分：

（1）$\int_\Gamma zds$,$\Gamma: x=t\cos t, y=t\sin t, z=t\ (0\le t\le t_0)$；

（2）$\int_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$，其中 L 为顶点为 $(0,0)$，$(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界；

（3）$\iint\limits_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$，其中 Σ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ (z \geq 0)$ 的上侧.

三、解答题（共 60 分）

1、（12 分）判断下列级数是否收敛.若收敛，是条件收敛，还是绝对收敛？

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$；　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

2、（6 分）将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开为 $(x+4)$ 的幂级数.

3、（21 分）解下列微分方程：

（1）求 $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ 的通解；

（2）求 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2(\ln y-x)}$ 的通解；

（3）求 $y''-4y'+3y=0$， $y|_{x=0}=6$， $y'|_{x=0}=10$ 的特解.

4、（6 分）求函数 $z = 2x^2 + y^2$ 在点 $P(1,1)$ 处的梯度及沿该梯度方向的方向导数.

5、（8分）求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $P(1,1,1)$ 的切线及法平面方程.

6、（7 分）在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面，使该切平面与三坐标轴所围成的四面体的体积最小，求切点的坐标.

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期末自测题

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1、设线性无关的函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 均是二阶非齐次线性微分方程

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解，c_1, c_2 是任意常数，则该方程的通解是（　　）

A．$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + (1 - c_1 - c_2) y_3$　　B．$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_3$

C．$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 - (1 - c_1 - c_2) y_3$　　D．$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 - (c_1 + c_2) y_3$

2、曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的法平面方程为（　　）

A．$x + 2y - 3z = 6$　B．$x + 2y + 3z = 6$　C．$x - 2y - 3z = 6$　D．$x - 2y + 3z = 6$

3、设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，

在该邻域内该方程只能确定（　　）

A．一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$

B．两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$

C．两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$

D．两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$

4、设 $f(x, y)$ 为连续函数，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ =（　　）

A．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$　　B．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$　　D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

5、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^3}$ 的收敛情况是（　　）

A. 绝对收敛　　B. 收敛性与 α 有关　　C. 发散　　D. 条件收敛

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1、极限 $\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\tan(xy)}{y} =$ ____________ 。

2、函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(1,1)$ 处的全微分 $df\Big|_{(1,1)} =$ __________________________ 。

3、设L为正方形 $|x|+|y|=\frac{1}{2}$ 的边界曲线，则曲线积分 $\oint_L xy^2 ds =$ ____________ 。

4、设 Σ 表示平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限部分，则 $\iint_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)ds =$ __________。

5、函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向导数为____________ 。

三、解答题(每题 8 分，共 64 分)

1、设 $z=f\left(xy,x-y\right)$， f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2、交换积分次序，然后计算 $I=\int_1^4 dx \int_x^4 \frac{1}{x\ln y} dy$.

3、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y+z^2)dv$，其中 Ω 由 $x^2+y^2=z^2$， $z=h(h>0)$ 所围成的闭区域.

4、计算曲线积分：$I=\int_L(x^2-e^x\cos y)dx+(e^x\sin y+3x)dy$，

其中 L 是从点 $O(0,0)$ 沿右半圆周 $x^2+y^2=2y$ 到点 $A(0,2)$ 的弧段.

5、计算曲面积分：$I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$，

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\left(z\geq 0\right)$ 的下侧.

6、将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并指出其收敛域.

7、已知曲线积分 $\int_L [\sin x - f(x)]\dfrac{y}{x}dx + f(x)dy$ 与路径无关，且 $f(\pi)=1$ ，求函数 $f(x)$.

8、从斜边长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

八、**证明题**(6分)

设$a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$,　$n=1,2,\cdots$，求证：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛.

高等数学（下）期末考试真题一

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 总计 15 分)

1、直线$l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{1}$与平面$\pi: x-y-2z+6=0$之间的夹角为（　　）

$(A)\ 0$　　　　$(B)\ \dfrac{\pi}{6}$　　　　$(C)\ \dfrac{\pi}{4}$　　　　$(D)\ \dfrac{\pi}{2}$

2、设函数$f(x,y)$在点(a,b)的偏导数存在，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=$（　　）

$(A)\ 0$　　$(B)\ f_x(2a,b)$　　$(C)\ f_x(a,b)$　　$(D)\ 2f_x(a,b)$

3、二次积分 $\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$ 交换积分次序后为（　　）

$(A)\ \int_0^4 dy\int_y^{2\sqrt{y}} f(x,y)dx$　　$(B)\ \int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)dx$

$(C)\ \int_0^4 dy\int_y^{\frac{y^2}{4}} f(x,y)dx$　　$(D)\ \int_0^4 dy\int_0^4 f(x,y)dx$

4、设椭圆 L： $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的周长为 l，则 $\oint_L(\sqrt{3}x+2y)^2 ds=$（　　）

$(A)\ l$　　$(B)\ 3l$　　$(C)\ 4l$　　$(D)\ 12l$

5、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的（　　）

(A) 充要条件　　(B) 充分条件　　(C) 必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分，总计 15 分)

1、已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点 M 处的切平面与平面 $2x+2y+z-1=0$ 平行,则点 M 的坐标为__________________。

2、设函数 $y=xe^{2x}$ 是某二阶常系数线性齐次微分方程的解，则该微分方程为__________________。

3、设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS=$________________。

4、函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数为______________________________。(注明收敛域)

5、设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且在 $(-\pi,\ \pi]$ 上有表达式 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0,\\ 1, & 0<x\le\pi\end{cases}$，

$S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(2\pi)$=________________。

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、设函数 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4x-6y-8z+5$ 求：

（1）、函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(2,1,2)$ 处的梯度.

（2）、函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(2,1,2)$ 处方向导数的最大值.

2、设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求 dz .

3、计算二重积分 $\iint\limits_{D} xdxdy$，其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ $(x>0)$ 与三条直线

$y=x,\ x=3,$

$y=0$ 所围成的平面闭区域.

4、计算 $\oint\limits_{L}(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$，其中曲线 L： $x^2+y^2=9$，方向为逆时针.

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

1、已知曲线 $y=f(x)$ 过原点且在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$，求此曲线方程.

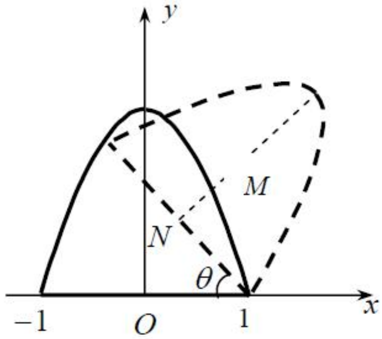
2、求函数 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$ 在区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4\}$ 上的最大值和最小值.

3、判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n\cdot n}$ 的敛散性，若收敛，求该级数的和.

4、计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-\mathrm{z})xdydz$ ，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0,\mathrm{z}=3$ 所围成的空间闭区域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

五、应用题(本题 8 分)

如图，一平面均匀薄片是由抛物线 $y = a(1-x^2)(a>0)$ 及 x 轴所围成的，现要求当此薄片以 $(1,0)$ 为支点向右方倾斜时，只要 θ 角不超过 45°，则该薄片便不会向右翻倒，问参数 a 最大不能超过多少？



六、证明题(本题 6 分)

设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)=1$, $f''(0)=2$,

证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$ 收敛.

院（系）____________班级____________学号____________姓名____________

高等数学（下）期末考试真题二

题号	一	二	三	四	五	六	总分

一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 总计 15 分)

1、直线$\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{8}$与平面$x+2y-z+2=0$的位置关系是（　　）

(A) 垂直　　(B) 斜交　　(C) 在平面上　　(D) 平行但不在平面上

2、对于函数$z=f(x,y)$，下列命题正确的是：（　　）

(A) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$都连续，则$f(x,y)$必可微　　(B) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$都存在，则$f(x,y)$连续

(C) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$都存在，则$f(x,y)$的极限存在　　(D) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$都存在，则$f(x,y)$可微

3、设积分区域$D=\{(x,y)\big||x|\le 1,|y|\le 1\}$，则下式中正确的是（　　）

(A) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}(x+y)dxdy=4\int_0^1 xe^{x^2}dx$　　(B) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}(x+y)dxdy=0$

(C) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}(x+y)dxdy=(4\int_0^1 xe^{x^2}dx)^2$　　(D) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}(x+y)dxdy=8\int_0^1 xe^{x^2}dx$

4、设$\sum$为曲面$x^2+y^2+z^2=R^2$，则曲面积分$\iint\limits_\Sigma e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$ =（　　）

(A) 0　　(B) $\pi \mathrm{R}e^R$　　(C) $2\pi \mathrm{R}e^{R^2}$　　(D) $4\pi \mathrm{R}^2\mathrm{e}^R$

5、下列级数中属于条件收敛的是（　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n-1}$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^2}$

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分，总计 15 分)

1、曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x-z+1=0$ 的交线平行于 z 轴的投影柱面方程

为__________________________________。

2、设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ ，则 $f_x'(x,1)=$ ______________________。

3、设区域 D 由曲线 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 所围成，则 $\iint\limits_D (x+y)dxdy=$ ___________。

4、将函数 $f(x)=xe^{-2x}$ 展开成 x 的幂级数，其中含 x^4 项的系数是_____________。

5、$f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且在（$-\pi$，π]上有表达式 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0,\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$，

$S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(\pi)$ =________________。

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、函数 $f(x,y,z)=xy+zx+yz-x-y-z+6$ ，问在点 $P(3,4,0)$ 处沿怎样的方向 l ，f 的变化率最大？并求其最大的变化率。

2、设 $z=f(x^2+y^2,\dfrac{y}{x})$ ，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

3、计算二次积分 $\int_0^1 dx \int_x^1 y \sin\frac{x}{y} dy$ 。

4、计算 $\oint_L xds$ ，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界。

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程和法线方程。

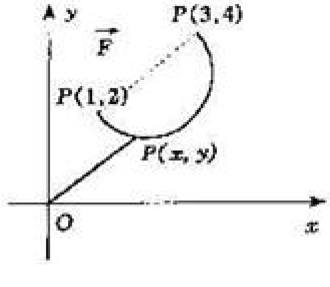
2、求函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在区域 $D=\{(x,y)\left|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\right.\}$ 上的最大值和最小值。

3、设 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z = y^2, \\ x = 0, \end{cases}$ $(0 \le z \le 2)$ 绕 z 轴旋转而成的曲面，写出 Σ 的方程并计算 $\iint\limits_{\Sigma} 4(1-y^2)dzdx + z(8y+1)dxdy$，其中 Σ 取下侧。

4、求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 在收敛域 $(-1,1)$ 内的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}$ 的和。

五、应用题(本题 8 分)

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\vec{F}$ 作用(见图)。$\vec{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$，求变力 $\vec{F}$ 对质点 P 所作的功。



六、证明题(本题 6 分)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，令 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$，证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_n}$ 收敛。

高等数学（下）期末考试真题三

题号	一	二	三	四	五、六	总分

一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 总计 15 分)

1、曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是由（　　）

（A）xOz 平面上曲线 $z = x$ 绕 z 轴旋转而成 （B）yOz 平面上曲线 $z = |y|$ 绕 z 轴旋转而成

（C）xOz 平面上曲线 $z=x$ 绕 x 轴旋转而成 （D）yOz 平面上曲线 $z=|y|$ 绕 y 轴旋转而成

2、设 $z=y^{y^x}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

(A) $y^x y^{y^x-1}$　　(B) $y^x y^{y^x}\left[\dfrac{1}{y}+(\ln y)^2\right]$

(C) $y^x\left[\dfrac{1}{y}+(\ln y)^2\right]$　　(D) $y^x y^{y^x}\left[\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y}\ln y\right]$

3、设区域 D 是 xoy 平面上以点 $A(1,1)$、$B(-1,1)$、$C(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，区域 D_1 是 D 在第一象限的部分，则：$\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)dxdy=$（　　）

(A) $2\iint\limits_{D_1}(\cos x\sin y)dxdy$　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xydxdy$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　(D) 0

4、设 Σ 为曲面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xoy 平面上方的部分，则 $\iint\limits_\Sigma zdS=$（　　）

（A）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2-r^2}\left(2-r^2\right)\sqrt{1+4r^2}rdr$　　（B）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2}\left(2-r^2\right)\sqrt{1+4r^2}rdr$

（C）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-r^2\right)rdr$　　（D）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-r^2\right)\sqrt{1+4r^2}rdr$.

5、正项级数(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^3$，则下列说法正确的是（　　）

（A）若（1）发散、则（2）必发散　　（B）若（2）收敛、则（1）必收敛
（C）若（1）发散、则（2）不确定　　（D）级数（1)、(2）敛散性相同

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分)

1、已知三个单位向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$____________

2、函数 $u=x^2-xy+2z$ 在点 $(1,2,-1)$ 处的方向导数的最小值为____________

3、将 $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e}f(x,y)dx$ 交换积分次序得 ____________________________

4、设 Σ 是母线平行于 oz 轴的柱面的部分，它的底是位于 xoy 平面上的光滑曲线 L，它的高 z 是 x,y 的非负函数 $z=f(x,y)$，用曲线积分表示柱面 Σ 的面积 $A=$____________

5、设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于____________________ 。

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分,每题要有必要的解题步骤)

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

1、判别直线 l: $\dfrac{x-2}{3}=y+2=\dfrac{z-3}{-4}$ 与平面 $\pi: x+y+z-3=0$ 的位置关系。

2、设 $z=f(x^2,\dfrac{x}{y})$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

3、计算二重积分 $I=\iint\limits_D \left|y-x^2\right| d\sigma$，$D=\left\{(x,y)\middle| |x|\le 1,\ 0\le y\le 1\right\}$。

4、求数项级数 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3^2}+\dfrac{1}{3\cdot 3^3}+\dfrac{1}{4\cdot 3^4}+\cdots$ 的和。

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分,每题要有必要的解题步骤)

1、求曲线 $x=\arctan t^2, y=\ln(1+t^4), z=\dfrac{2t}{1+t^4}$ 在对应于 $t=-1$ 点处的切线方程和法平面方程.

2、计算 $\int_C y^2\mathrm{d}s$，其中 C 为摆线的一拱：$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$，$0\le t\le 2\pi$ 。

3、计算曲线积分 $\oint_L 2y^3dx+(x^4+6y^2x)dy$, 其中 L 是由 $x^4+y^4=1$ 与 x 轴，y 轴在第一象限所围成的区域 D 的正向边界曲线。

4、求在第一卦限中过定点(a,b,c)的平面，使之与三个坐标面所围成的四面体体积最小。

五、解答题(本题 8 分)

设$\sum$是曲面$z=x^2+y^2$（$z\le 1$）的下侧，试计算向量场$\vec{A}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$穿过$\sum$指定侧的流量。

六、证明题(本题 6 分)

设$\{a_n\}$为严格递增有界的正数列，证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}})$收敛。

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

高等数学（下）期末考试真题四

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分

一、选择题（本题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分，每小题给出四个选项，请将正确答案填在题后的括号内）

1．若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则在 (x_0,y_0) 点下列结论中不一定成立的是（　　　）

(A) 连续　　(B) 偏导数存在　　(C) 偏导数连续　　(D) 切平面存在

2. 直线 $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$ 与平面 $x+2y-5z-11=0$ 的位置关系是（　　　）

(A) 平行但不在平面上　　(B) 在平面上　　(C) 垂直　　(D) 斜交

3. 若曲面 Σ ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z)^2dS=$（　　　）

(A) πa^4　　(B) $2\pi a^4$　　(C) $4\pi a^4$　　(D) $6\pi a^4$

4．设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$，则级数（　　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$ 都收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$ 发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$ 都发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$ 收敛

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分，请将正确答案填在题后的横线上）

1．已知矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 的模分别为 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{2}$, 及 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}$，则 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=$ ____________ 。

2． 已知 $z=\ln(1+\dfrac{x}{y})$, 则 $dz\big|_{(1,1)}=$ ______________________ 。

3．幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$ 的收敛域是____________________ 。

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于____________________ 。

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分，写出必要的解题过程）

1．求过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $L:\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程。

2. 设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

3. 计算积分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y}{x}}dxdy$，其中 D:由 $y=x^2, y=2x$ 所围成的区域。

4. 计算半径为R、中心角为2α的圆弧L对于它的对称轴的转动惯量I（设线密度$\mu=1$）。

四、计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分，写出必要的解题过程）

1．设$z=f(x,xy)$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设$f(x,y,z)=e^{xyz}+x^2+y^2$，

(1) 求f在点$P(1,1,1)$处的梯度；　　(2) 求f在点$P(1,1,1)$处方向导数的最大值。

3．计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+(9-z^3)dxdy$

其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2+1\ \ (1\le z\le 2)$，取下侧。

4. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数，并求展开式成立的区间。

五、应用题题（本题满 7 分）

求质点 $M(x,y)$）受作用力 $\vec{F}=(y+3x)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}$ 沿路径 L 所作的功 W，其中 L 是沿椭圆 $4x^2+y^2=4$ 顺时针方向的一周。

六、综合题（本题满 7 分）

某工厂生产两种型号的机床，其产量分别为 x 台和 y 台，成本函数为

$$c(x,\quad y)=x^2+2y^2-xy \quad （万元）$$

若市场调查分析，共需两种机床 8 台，求如何安排生产，总成本最少？最小成本为多少？

七、证明题（本题满 6 分）

设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 收敛于 1。

高等数学（下）期末考试真题五

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

题号	一	二	三	四	五	总分

一、单项选择题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分)

1、设 $z=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2)$, 则 $dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=$（　　　）

$(A)\ \dfrac{1}{3}(dx+dy)$　　$(B)\ (dx+dy)$　　$(C)\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}(dx+dy)$　　$(D)\ \dfrac{1}{2}(dx+dy)$

2、设区域 $D:x^2+y^2\le 4$, 则积分 $\iint_D f(x^2+y^2)d\sigma$ 在极坐标下的累次积分为（　　　）

$(A)\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 f(r^2)rdr$　　　　$(B)\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 f(r^2)dr$

$(C)\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 f(r^2)rdr$　　　　$(D)\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 f(r^2)dr$

3、设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 则对面积的曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$ =（　　　）

$(A)\ \pi$　　$(B)\ 2\pi$　　$(C)\ 3\pi$　　$(D)\ 4\pi$

4、设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数必收敛的为（　　　）

$(A)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u_n}{n}$　　$(B)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$　　$(C)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$　　(D)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$

5、设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解，C_1,C_2 是任意常数，则该非齐次线性方程的通解是（　　　）

$(A)\ C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　　　$(B)\ C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

$(C)\ C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$　　　　$(D)\ C_1y_1+C_2y_2+y_3$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1、曲面 $xy+y^2-e^z=1$ 在点 $(1,1,0)$ 处的切平面方程为__________________________。

2、设 $D:x^2+y^2\le 2x$, 由二重积分的几何意义知 $\iint\limits_D\sqrt{2x-x^2-y^2}\,dxdy$ =____________。

3、设椭圆 $L:\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的周长为 a，则曲线积分 $\oint\limits_L(5xy-6x^2-10y^2)ds$ =__________。

4、当______________________时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛。

5、若某三阶常系数线性齐次微分方程有解为 $y_1 = e^{-x}$， $y_2 = xe^{-x}$， $y_3 = e^{x}$ ；则该三阶常系数线性齐次微分方程为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、设数量场 $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4x - 6y - 8z + 5$

求：(1)函数 f 在点 $(2,1,2)$ 处的梯度。(2)函数 f 在点 $(2,1,2)$ 处方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 的最大值。

2、计算二次积分 $\int_{\pi}^{2\pi} dy \int_{y-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ 。

3、求微分方程 $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$ 的通解。

4、计算积分 $I = \int_L (e^{-x^2} \sin x + 3y - \cos y)dx + (x\sin y - y^4)dy$，其中 L 是从点 $A(-\pi,0)$ 沿曲线 $y = \sin x$ 到点 $B(\pi,0)$ 的弧段。

院（系）________________班级________________学号________________姓名______________

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、设 $z=f\left(x^2-y^2,\quad xy\right)$，其中函数 f 具有二阶连续的偏导数，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2xz^2dydz+y\left(z^2+1\right)dzdx+\left(9-z^3\right)dxdy$，

其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2+1\quad\left(1\le z\le 2\right)$，取下侧。

3、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和。

4、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且 $f(x)=x$ （$-\pi\le x<\pi$），试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数。

五、解答题（本题 8 分）

已知曲线过点 $(1,1)$，曲线上任一点 $P(x,y)$ 处的切线交 y 轴于点 Q，以 PQ 为直径所作的圆均过点 $F(1,0)$，求此曲线的方程。

六、证明题(本题 6 分)

已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明数列 $\left\{(1+a_1)(1+a_2)\cdot\cdots\cdot(1+a_n)\right\}$ 收敛。

参考答案

高等数学（下）期末模拟试卷一

一、1. $x-8y-13z+9=0$　　2. $-2dx-dy$　　3. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$

4. $\dfrac{\pi}{6}$　　5. π

二、1. D　2. C　3. A　4. B　5. A

三、

1、根据复合函数求偏导公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot(-\frac{y}{x^2})\right)$$

$$=f_1'+y[f_{11}''x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-g''\cdot\frac{y}{x^3}-g'\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{y}{x^3}g''-\frac{1}{x^2}g'$$

2、在D的内部，

$\begin{cases}f_x'=2x=0\\ f_y'=-2y=0\end{cases}\Rightarrow(0,0)$ 为驻点，且 $f(0,0)=0$，

在D的边界上，

由 $\frac{x^2}{4}+y^2=1\Rightarrow y^2=1-\frac{x^2}{4}\Rightarrow z=x^2-y^2=\frac{5x^2}{4}-1\qquad(-2\le x\le 2)$

$\frac{dz}{dx}=\frac{5x}{2}=0\Rightarrow x=0$，此时，$y=\pm1$,，则有 $f(0,\pm1)=-1,\quad f(\pm2,0)=4$

比较上述函数值知，

函数 $z=f(x,y)=x^2-y^2$ 在 D 上的最大值为4,最小值为-1。

3、方程不显含 y，故令 $y'=p$, 则 $y''=p'$，代入原方程得 $p'-\frac{1}{x}p=xe^x$，

利用通解公式求得通解为 $p=x(e^x+C_1)$，

积分得原方程通解为 $y=(x-1)e^x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$。

4、（1） $P=y[2-f(x)]$，$Q=xf(x)$，

因为 $y[2-f(x)]dx+xf(x)dy$ 是函数 $u(x,y)$ 的全微分，所以有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，

即 $f(x)+xf'(x)=2-f(x)$，故 $xf'(x)+2f(x)=2$， 上述微分方程的通解为

$f(x)=1+\frac{C}{x^2}$. 由 $f(1)=2$ 得 $C=1$，所以 $f(x)=1+\frac{1}{x^2}$。

（2）在右半平面内取 $(x_0, y_0) = (1,0)$ ，则

$$u(x,y) = \int_1^x P(x,0)\,dx + \int_0^y Q(x,y)\,dy = \int_0^y (x+\frac{1}{x})\,dy = y(x+\frac{1}{x})\text{ 。}$$

5、易求得其收敛域为 $(-1,1)$ ，令

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = x\cdot S_1(x)\text{ ，}\quad \text{其中}\ S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}\text{ ，}$$

两边积分 $\int_0^x S_1(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^{n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ ，

再积分 $\int_0^x (\int_0^x S_1(x)\,dx)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (n+1)x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$ ，

因此 $S_1(x) = (\frac{x^2}{1-x})'' = \frac{2}{(1-x)^3}$ ，故原级数的和函数 $S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$ ， $x \in (-1,1)$ 。

6、补 $\Sigma_0 : z = 1\ (x^2 + y^2 \le 1)$,取上侧,

设 Σ 与 Σ_0 围成空间区域 Ω ， Ω 及 Σ_0 在 xOy 平面上的投影区域 $D_{xy} : x^2 + y^2 \le 1$ 。

由Gauss公式，

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_0} (y-z)dzdx + (x+2z)dxdy - \iint_{\Sigma_0} (y-z)dzdx + (x+2z)dxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} [\frac{\partial}{\partial y}(y-z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+2z)]dv - \iint_{\Sigma_0} (y-z)dzdx + (x+2z)dxdy$$

$$= 3\iiint_{\Omega} dv - \iint_{\Sigma_0} (y-z)dzdx + (x+2z)dxdy\text{ 。}$$

因为 Σ_0 垂直于 zOx 平面， Σ_0 在 zOx 平面上的投影区域面积为零，

所以 $\iint_{\Sigma_0} (y-z)dzdx = 0$,

$$I = 3\iint_{D_{xy}}[\int_{x^2+y^2}^{1} dz]dxdy - \iint_{D_{xy}}[x+2(x^2+y^2)]dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}}(3-5x^2-5y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 (3-5r^2)rdr = \frac{\pi}{2}\text{。}$$

四、将C分解为：$C = l_1 + l_2$，另作一条曲线l_3围绕原点且与C相接，则

$$\oint_C \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4} = \oint_{l_1+l_3} \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4} - \oint_{l_2+l_3} \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4} = 0\text{。}$$

高等数学（下）期末模拟试卷二

二、1、-4； 2、$-\dfrac{1}{y^2}$；3、$2x+4y+z=14$； 4、3，0； 5、$\sqrt{2}$.

二、1、方程两边对x求导，得$\begin{cases} 3y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-2x \\ y\dfrac{dy}{dx}-z\dfrac{dz}{dx}=-3x \end{cases}$，从而$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{5x}{4y}$，$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{7x}{4z}$

该曲线在$(1,-1,2)$处的切向量为$\vec{T}=(1,\frac{5}{4},\frac{7}{8})=\frac{1}{8}(8,10,7)$，

故所求的切线方程为$\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$；

法平面方程为 $8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$ 即 $8x+10y+7z=12$

2、$\begin{cases} z=2x^2+2y^2 \\ z=6-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2$，该立体$\Omega$在$xOy$面上的投影区域为

$D_{xy}: x^2+y^2 \le 2$，

故所求的体积为$V=\iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho\int_{2\rho^2}^{6-\rho^2} dz = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \rho(6-3\rho^2)d\rho = 6\pi$。

3、由 $\lim\limits_{n\to\infty} n|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})^n = 1 > 0$，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，

又 $|u_n| = \ln(1+\frac{1}{n}) > \ln(1+\frac{1}{n+1}) = |u_{n+1}|, \lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n}) = 0$.故所给级数收敛且条件收敛。

4 、$\frac{\partial z}{\partial x} = (f_1'\cdot y + f_2'\cdot\frac{1}{y}) + 0 = yf_1' + \frac{1}{y}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_1' + y[f_{11}''\cdot x + f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})] - \frac{1}{y^2}f_2' + \frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x + f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$

$= f_1' + xyf_{11}'' - \frac{1}{y^2}f_2' - \frac{x}{y^3}f_{22}''$。

5 、 Σ 的方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ， Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x,y)\,|\,x^2 + y^2 \le a^2 - h^2\}$，又 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = a\big/\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z} = \iint\limits_{D_{xy}}\frac{adxdy}{a^2 - x^2 - y^2} = a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\rho d\rho}{a^2 - \rho^2}$$

$$= 2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2 - \rho^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}} = 2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

5、设 $M(x,y,z)$ 为该椭圆上的任一点，则点 M 到原点的距离为 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

令 $L(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x + y + z - 1)$，

则由 $\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x + \mu = 0 \\ L_y = 2y - 2\lambda y + \mu = 0 \\ L_z = 2z + \lambda + \mu = 0 \\ z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$，解得 $x = y = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$， $z = 2\mp\sqrt{3}$. 于是得到两个可能极值点

$$M_1(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}),\quad M_2(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3})$$

又由题意知，距离的最大值和最小值一定存在，所以距离的最大值与最小值分别在这两点处取得.

故 $d_{\max}=|OM_2|=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$， $d_{\min}=|OM_1|=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$ 。

7、记 L 与直线段 $\overline{OA}$ 所围成的闭区域为 D，则由格林公式，得

$$I_2=\oint_{L+\overline{OA}}(e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy=-m\iint_D d\sigma=-\frac{\pi}{8}ma^2,$$

$$而 I_1=\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy=-m\int_0^a dx=-ma$$

$$\therefore \int_L(e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy=I_2-I_1=ma-\frac{\pi}{8}ma^2。$$

8、$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow R=3$，收敛区间为 $(-3,3)$，又当 $x=3$ 时，

级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散；当 $x=-3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，收敛，

故该幂级数的收敛域为 $[-3,3)$。

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n3^n}$ （$-3\le x<3$），则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{3})^{n-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-x/3}=\frac{1}{3-x},(|x|<3)$$

于是 $s(x)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\dfrac{dx}{3-x}=-\ln(3-x)\Big|_0^x=\ln 3-\ln(3-x)$，（$-3\le x<3$）。

9、取 Σ_1 为 $z=0(x^2+y^2\le 1)$ 的下侧，记 Σ 与 Σ_1 所围成的空间闭区域为 Ω，则由高斯公式，有

$$I_2=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=\iiint_\Omega 6(x^2+y^2+z)dv$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho^2}\left(\rho^2+z\right)\rho dz=2\pi,$$

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3\left(z^2-1\right)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}3\left(z^2-1\right)dxdy=3\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=3\pi$$

$\therefore\quad I=I_2-I_1=2\pi-3\pi=-\pi$ 。

10、$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^t\left[r\cos\varphi+f\left(r^2\right)\right]r^2dr$

$$=2\pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^t r^3dr+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2dr\right]$$

$$=\pi\left[\frac{t^4}{8}+\left(2-\sqrt{2}\right)\int_0^t r^2f\left(r^2\right)dr\right]$$

故 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^3}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\pi\left[\dfrac{t^3}{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)t^2f(t^2)\right]}{3t^2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}\pi\lim\limits_{t\to0^+}f(t^2)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a$

高等数学（下）期末模拟试卷三

一、1、$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3\cdot f_1'+\dfrac{1}{y}\cdot f_2'$，　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2\cdot f_1'-\dfrac{x}{y^2}\cdot f_2'$

2、$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6$

$n=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,6z),$

$n\big|_{(1,1,1,)}=(2,4,6),$

切平面　$2(x-1)+4(y-1)+6(z-1)=0$，即 $x+2y+3z-6=0$ 。

法线　$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ 。

3、$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$.

4、（1）记 $u_n=\dfrac{n^2}{2^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n^2}=\dfrac{1}{2}<1$，原级数绝对收敛。

（2）记$u_n=\dfrac{1}{n-\ln n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，且当$n$较大时，数列$u_n$单调递减，由 Leibniz 判别法知原级数收敛，但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}$发散，故原级数条件收敛。

5、收敛域是$[-1,1]$，和函数是$S(x)=\begin{cases}(x+1)\ln(x+1)-x,-1<x\le 1\\ 1,x=-1\end{cases}$.

6、$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\dfrac{1}{r}-\dfrac{x^2}{r^3})\dfrac{du}{dr}+\dfrac{x^2}{r^2}\dfrac{d^2u}{dr^2}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\dfrac{1}{r}-\dfrac{y^2}{r^3})\dfrac{du}{dr}+\dfrac{y^2}{r^2}\dfrac{d^2u}{dr^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(\dfrac{1}{r}-\dfrac{z^2}{r^3})\dfrac{du}{dr}+\dfrac{z^2}{r^2}\dfrac{d^2u}{dr^2}$

$\therefore\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{du}{dr}=0$

令$\dfrac{du}{dr}=p$，则有$\dfrac{dp}{dr}+\dfrac{2}{r}=0$，$p=\dfrac{c_1}{r^2}$，$\dfrac{du}{dr}=\dfrac{c_1}{r^2}$，$f(r)=u(r)=-\dfrac{c_1}{r}+c_2$

由$f(1)=f'(1)=1$可得$f(r)=2-\dfrac{1}{r}$。

二、1、（1）$\iint_D\dfrac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^1dy\int_{y^2}^{y}\dfrac{\sin y}{y}dx=\int_0^1(1-y)\sin ydy=1-\sin 1$；

（2）$\iint_D\dfrac{xy}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\cos\theta\sin\theta\cdot rdr=\dfrac{a^2}{4}$；

（3）$\iiint_V zdxdydz=\int_0^h zdz\iint_{x^2+y^2\le z^2}dxdy=\int_0^h\pi z^3dz=\dfrac{1}{4}\pi h^4$.

2、（1）$\int_L zds=\int_0^{\pi}t\cdot\sqrt{2}dt=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$；

（2）$\iint_\Sigma\sqrt{1+4z}dS=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\cdot\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1+4r^2)rdr=3\pi\text{；}$$

（3）用Σ_1,Σ_2分别表示平面$z=0$及$z=3$上单位圆$x^2+y^2=1$内部分，它们与Σ一起构成闭曲面，记其所围区域为Ω。由高斯公式，得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_\Omega 3dv=9\pi$$

$$\iint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=0$$

$$\iint_{\Sigma_2}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}3dxdy=3\pi$$

$$\therefore\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy=9\pi-3\pi=6\pi.$$

3、（1）$y^2 = 2x^2(\ln x + 2)$；（2）$y = \dfrac{C + x^3}{1 + x^2}$；（3）$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \dfrac{1}{4} x e^{-x}$.

三、1、（1）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$发散。因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$都是正项级数，且$a_n \le \max(a_n, b_n)$由比较判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$发散。

（2）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$可能收敛也可能发散，

例如，设$a_n = b_n = \dfrac{1}{n}$，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$均发散，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也发散；

又例如，设$a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}, b_n = \dfrac{1 - (-1)^n}{n}$，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$均发散，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$收敛。

2、等式$2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$两边分别对$x, y$求偏导，

$$2\cos(x + 2y - 3z) \cdot (1 - 3\frac{\partial z}{\partial x}) = 1 - 3\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2\cos(x + 2y - 3z) - 1}{6\cos(x + 2y - 3z) - 3}$$

$$2\cos(x + 2y - 3z) \cdot (2 - 3\frac{\partial z}{\partial y}) = 2 - 3\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4\cos(x + 2y - 3z) - 2}{6\cos(x + 2y - 3z) - 3}$$

上面两式相加即得$\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

高等数学（下）期末模拟试卷四

一、1、$-\pi$　2、$(3,-3)$　3、$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$　4、$p > 0$　5、$\tan y = e^x + c$

二、1、D　2、C　3、A　4、C　5、A

三、

1、$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{F_u}{F_u + F_v}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{F_v}{F_u + F_v}$。

2、$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 r^4 \sin\varphi dr = \dfrac{64}{5}\pi$

3、$(-1,1]$

4、切线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-1}{3}$；法平面方程$x+4y+3z-12=0$.

5、$\iint_D x\sqrt{y}dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy=\dfrac{6}{55}$.

6、积分与路径无关

$$I=\int_L (e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy=\int_0^1(1+x)dx+\int_0^1(e^y-2y)dy=e-\frac{1}{2}.$$

7、特征方程$r^2-4r=0$，$r_1=0,r_2=4$。 $y^*=Ae^x=-\dfrac{1}{3}e^x$，$y=C_1+C_2e^{-4x}-\dfrac{1}{3}e^x$.

8、记$\Sigma_1: x^2+y^2\le a^2, z=a$，下侧。$\Sigma+\Sigma_1$所围区域记为$\Omega$，利用高斯公式，

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2-2xy)dydz+(y^2-2yz)dzdx+(z^2-2xz)dxdy=0$$

$$\iint_{\Sigma}(x^2-2xy)dydz+(y^2-2yz)dzdx+(z^2-2xz)dxdy$$
$$=-\iint_{\Sigma_1}(x^2-2xy)dydz+(y^2-2yz)dzdx+(z^2-2xz)dxdy$$
$$=\iint_{x^2+y^2\le a^2}(a^2-2ax)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le a^2}a^2dxdy=\pi a^4.(2ax\text{是奇函数})$$

9、方程两边求导，得$f'(x)\cos x-f(x)\sin x+2f(x)\sin x=1$

$$f'(x)+f(x)\tan x=\frac{1}{\cos x}$$

方程两边令$x=0$，则$f(0)=1$，故$f(x)=\sin x+\cos x$.

四、易知$a_n>0$。又$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\ge a_n$。

对于幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$，因为$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{a_n}\le\dfrac{2a_n}{a_n}=2$，即

$$a_2\le 2a_1,\quad a_3\le 2a_2\le 2^2a_1,\quad \cdots, a_n\le 2^{n-1}a_1$$

又幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}a_1x^{n-1}$在$|x|<\dfrac{1}{2}$内收敛，所以幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$在$|x|<\dfrac{1}{2}$内也收敛。

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=a_1+a_2x+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^{n-1}=a_1+a_2x+\sum_{n=3}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n-2})x^{n-1}$$
$$=a_1+a_2x+\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-1}=a_1+a_2x+x\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^{n-2}+x^2\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-3}$$
$$=a_1+a_2x-a_1x+(x+x^2)\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-3}$$

$$(1-x-x^2)\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

高等数学（下）期末模拟试卷五

一、1、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0\,.$$

二、1、（1）$\iint_D(3x+2y)d\sigma=5\iint_D xd\sigma=5\int_0^2dx\int_0^{2-x}xdy=\frac{20}{3}$；

（2）$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b r^2dr=\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$；

（3）$\iiint_\Omega zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{r^2/2}^2 zdz=\frac{16}{3}\pi$.

2、（1）$\int_\Gamma zds=\int_0^{t_0}t\sqrt{t^2+2}dt=\frac{1}{3}(t^2+2)^{\frac{3}{2}}|_0^{t_0}=\frac{1}{3}[(t_0^2+2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}]$。

（2）$\int_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy=\iint_D 4dxdy=4\times\frac{1}{2}\times3\times2=12$。

（3）记Σ_1是$x^2+y^2\le a^2,z=0$下侧。$\Sigma+\Sigma_1$所围区域记为Ω，则

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi dr=\frac{6}{5}\pi a^5\text{。}$$

三、1、（1）对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$，所以绝对收敛。

（2）对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+100}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$，$\because\frac{\sqrt{n}}{n+100}>\frac{1}{n+100}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+100}$发

散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$不是绝对收敛，而是条件收敛.

2、$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-(x+4)/3}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-(x+4)/2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}](x+4)^n,(-6<x<2).$$

3、（1）$(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=x(y^2+1)dx+y(1-x^2)dy=0$，

$\frac{xdx}{1-x^2}+\frac{ydy}{1+y^2}=0$，　$\int\frac{xdx}{1-x^2}+\int\frac{ydy}{1+y^2}=\ln c$，于是$(1+y^2)=c(1-x^2)$.

（2）$\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=\frac{2\ln y}{y}$，一阶线性方程，$x=e^{-\int\frac{2}{y}dy}(\int\frac{2\ln y}{y}e^{\int\frac{2}{y}dy}dy+C)$，

于是$x=\ln y-\frac{1}{2}+\frac{C}{y^2}$.

（3）$y=C_1e^x+C_2e^{3x}$，$y=4e^x+2e^{3x}$.

4、$gradz\Big|_p=4\vec{i}+2\vec{j}$，$\frac{\partial z}{\partial l}|_P=|\operatorname{grad} z|_P|=\sqrt{20}$.

5、$\vec{T}|_P=(1,2,3)$，切线方程$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$，

法平面方程$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0,$即$x+2y+3z-6=0$.

6、设$P(x_0,y_0,z_0)$为椭球面上的一点，令$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$，则

$$F_x\Big|_P=\frac{2x_0}{a^2}，F_y\Big|_P=\frac{2y_0}{b^2}，F_z\Big|_P=\frac{2z_0}{c^2}$$

过$P(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程是

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

即 $$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$$

切平面在三个轴上的交点分别是

$$x=\frac{a^2}{x_0}，\quad y=\frac{b^2}{y_0}，\quad z=\frac{c^2}{z_0}$$

四面体的体积是

$$V=\frac{1}{6}xyz=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$$

在条件 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$ 下求 V 的最小值。

令 $u=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$，作函数

$$G=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$$

由 $$\begin{cases}G'_{x_0}=0,G'_{y_0}=0,G'_{z_0}=0\\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1\end{cases}$$

可得 $x_0=\frac{a}{\sqrt{3}}$， $y_0=\frac{b}{\sqrt{3}}$， $z_0=\frac{c}{\sqrt{3}}$.

即当切点为 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 时，四面体的体积最小 $V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

高等数学（下）期末考试真题一

一、选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 总计 15 分)

1、(A)　　2、(D)　　3、(B)　　4、(D)　　5、(C)

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分，总计 15 分)

1、$(1,1,2)$　2、$y''-4y'+4y=0$　3、4π　4、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n \quad (0<x<4)$　**5**、0

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、**解**：$gradf=\{2x-4,4y-6,6z-8\}$;　$gradf\big|_{(2,1,2)}=\{0,-2,4\}$　……4 分

$\left|gradf\right|_{(2,1,2)}\Big| = 2\sqrt{5}$, 函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(2,1,2)$ 处方向导数的最大值为 $2\sqrt{5}$ ……3 分

2、解： 等式两边分别对 x 求偏导，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{x+z}$ ……2 分

等式两边分别对 y 求偏导，得 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z^2}{y(x+z)}$ ……2 分

故 $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = \dfrac{z}{x+z}dx + \dfrac{z^2}{y(x+z)}dy$ ……3 分

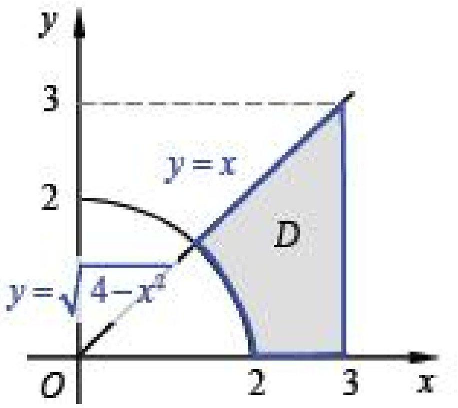
3、解：

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy = \iint\limits_D r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_2^{\frac{3}{\cos\theta}} r^2\cos\theta\,dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{9}{\cos^2\theta} - \frac{8}{3}\cos\theta\right)d\theta$$

$$= \left[9\tan\theta - \frac{8}{3}\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 9 - \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$



（本题也可先计算大的三角形区域积分，采用直角坐标，再计算扇形区域积分，采用极坐标，两者相减更简单）

4、解： $P = 2xy - 2y, Q = x^2 - 4x$ ， $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 4, \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2$ ……2 分

由格林公式 $\oint\limits_L (2xy-2y)dx + (x^2-4x)dy = \iint\limits_D (\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy$ ……2 分

$$= \iint\limits_D (-2)dxdy = (-2)\cdot 9\pi = -18\pi$$ ……3 分

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、**解：** 由条件可知 $\dfrac{dy}{dx} = 2x + y$ ，且 $y(0) = 0$ ……2 分

其通解为 $y = e^{\int dx}\left[\int 2xe^{-\int dx}dx + c\right] = e^x\left[2\int xe^{-x}dx + c\right] = ce^x - 2x - 2$ ……4 分

将 $y(0) = 0$ 代入通解中，得 $c = 2$ ，故所求曲线方程为 $y = 2e^x - 2x - 2$ ……1

分

2、**解**：$f_x = 2x$，$f_y = 8y$；令$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ 解得驻点：$(0,0)$，在区域内 $f(0,0) = 9$ ……2 分

在边界上 $\boldsymbol{x^2 = 4 - y^2}$ 代入，得 $f = 3y^2 + 13 \quad \boldsymbol{(-2 \le y \le 2)}$，

令 $\dfrac{df}{dy} = 0$ 得 $y = 0$，这时 $\boldsymbol{x = \pm 2}$；

$f(2,0) = 13, f(-2,0) = 13, f(0,-2) = f(0,2) = 25$ ……3 分

比较得最大值：$f(0,-2) = f(0,2) = 25$，最小值：$f(0,0) = 9$ ……2 分

3、**解**：先考查 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{3^n \cdot n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n}$，记 $u_n = \dfrac{1}{3^n \cdot n}$，则

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot n}{3^{n+1} \cdot (n+1)} = \frac{1}{3} < 1$ ，故原级数绝对收敛； ……3 分

记 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$，易知收敛半径 $R = 1$，当 $-1 < x < 1$ 时，

$S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$，于是 $S(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x)$； ……3 分

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n \cdot n} = S(-\frac{1}{3}) = -\ln\frac{4}{3}$。 ……1 分

4、**解**：$P = (y-z)x, Q = 0, R = x - y$，$\dfrac{\partial P}{\partial x} = y - z, \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$ ……2 分

由高斯公式 $\displaystyle\oiint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-\mathrm{z})xdydz$

$$= \iiint_{\Omega} (y-z)dxdydz \quad \text{……3 分}$$

$$= \iiint_{\Omega} (-z)dxdydz = -\frac{9}{2}\pi \quad \text{……2 分}$$

（计算积分 $\iiint\limits_{\Omega}(-z)dxdydz$ 可以采用截面法或柱坐标）

五、应用题(本题 8 分)

解：记此均匀薄片的质心坐标为 $\mathrm{M}(\overline{x},\overline{y})$，由对称性知 $\overline{x}=0$， ……1 分

$$\overline{y}=\frac{\iint\limits_{D} ydxdy}{\iint\limits_{D} dxdy}=\frac{2\int_0^1 dx\int_0^{a(1-x^2)} ydy}{2\int_0^1 a(1-x^2)dx}=\frac{2}{5}a$$ ……3 分

即质心坐标为 $\mathrm{M}(0,\frac{2}{5}a)$；

由条件可知，$\frac{2}{5}a=1$，得 $a=\frac{5}{2}$。 ……4 分

（问题等价于：当转 45° 时 M 在 $(1,0)$ 点的正上方，也就是此时 $\mathrm{OM}\perp x$ 轴，即转之前 OM 与 x 轴也是夹角 45°）

六、证明题(本题 6 分)

证明：由题目条件可知 $f'(0)=0$，将 $f(x)$ 在 $x=0$ 的小邻域内泰勒展开，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

将 $x=\frac{1}{n}$ 代入上式，得

$$f(\frac{1}{n})=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+\frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$f(\frac{1}{n})-1=\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

即当 $n\to\infty$ 时，$f(\frac{1}{n})-1>0$ 且与 $\frac{1}{n^2}$ 为等价无穷小； ……4 分

又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$ 也收敛。 ……2 分

高等数学（下）期末考试真题二

一、选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 总计 15 分)

1、(C)　　2、(A)　　3、(B)　　4、(D)　　5、(B)

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分，总计 15 分)

1、$x^2-x+y^2=1$　　2.、1　　3、2π　　4、$-\dfrac{4}{3}$　　5、$\dfrac{\pi}{2}$

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、解: $grad f(3,4,0)=(y+z-1,x+z-1,x+y-1)\big|_P=(3,2,6)$

f 沿方向 $l=(3,2,6)$ 的变化率最大；　　……4 分

其最大的变化率为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_P=\left|grad f(3,4,0)\right|=7$ 。　　……3 分

2、解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot f_1'-\dfrac{y}{x^2}\cdot f_2'$，　　……3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(2yf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}'')-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}(2yf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}'')$$

$$=-\frac{1}{x^2}f_2'+4xyf_{11}''+2(1-\frac{y^2}{x^2})f_{12}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''$$　　……4 分

3、解： $\int_0^1 dx\int_x^1 y\sin\dfrac{x}{y}dy=\int_0^1 dy\int_0^y y\sin\dfrac{x}{y}dx$（交换积分顺序）　　……2 分

$$=\int_0^1 y^2(1-\cos 1)dy$$　　……3 分

$$=\frac{1}{3}(1-\cos 1)$$　　……2 分

4、解： L 由 L_1 和 L_2 两段组成，其中 $L_1:y=x(0\le x\le 1)$ ； $L_2:y=x^2(0\le x\le 1)$ ，于是 $\oint_L xds=\int_{L_1}xds+\int_{L_2}xds=\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}dx+\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}dx$　　……4 分

$$=\int_0^1\sqrt{2}xdx+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1)$$　　……3 分

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分,每题要有必要的解题步骤)

1、解：令 $F(x,y,z)=z-e^{z}+2xy-3$, 点 $(1,2,0)$ 处的切平面的法向量为

$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\Big|_{(1,2,0)}=(2y,2x,1-e^{z})\Big|_{(1,2,0)}=2\cdot(2,1,0)$ ； ……3 分

切平面方程为：$2x+y-4=0$； ……2 分

法线方程为：$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=y-2\\ z=0\end{cases}$. ……2 分

2、

解:令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x=0,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y=0,$ 得驻点（0，0）， ……2 分

$L(x,y;\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda(x^2+\dfrac{y^2}{4}-1)$，

$L_x=2x+2\lambda x=0$，$L_y=-2y+\dfrac{1}{2}\lambda y=0$，$L_\lambda=x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0$，

可能极值点 （0，2），（0，-2），（1，0），（-1，0）， ……3 分

$f(0,0)=2$ ，$f(0,2)=f(0,-2)=-2$ ，$f(1,0)=f(-1,0)=3$

函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在区域 $D=\{(x,y)\Big|x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\}$ 上的最大值和最小值分别为 3 和-2。 ……2 分

3、解： Σ 的方程是 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 2)$ ； ……2 分

$\sum$ 不封闭， 设 Σ_1 为 $z=2,(x^2+y^2\le 2)$ 的上侧，则

$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}4(1-y^2)dzdx+z(8y+1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}dr\int_{\rho^2}^{2}rdz=2\pi$，

（或 $\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^2[\iint\limits_{D_z}dxdy]dz=\int_0^2\pi zdz=2\pi$ ） ……2 分

$\iint\limits_{\Sigma_1}4(1-y^2)dzdx+z(8y+1)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}2(8y+1)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}2dxdy=4\pi$ ……2 分

故 $\iint\limits_{\Sigma}4(1-y^2)dzdx+z(8y+1)dxdy=2\pi-4\pi=-2\pi$ 。 ……1 分

4、解：设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ，$S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{1}{1-x^2},\quad |x|<1$， ……2 分

$$S(x)=\int_0^x \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad |x|<1\ ,$$ ……3 分

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)4^n}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}(\frac{1}{2})^{2n+1}=2s(\frac{1}{2})=\ln 3\ 。$$ ……2 分

五、应用题（本题 8 分）

解： 由图可知 $\vec{F}=(-y,x)$, 故所求的功为

$$W=\int_{\widehat{AB}}\vec{F}\cdot\vec{ds}=\int_{\widehat{AB}}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$$ ……3 分

$$=(\int_{\widehat{AB}+\overline{BA}}+\int_{\overline{AB}})(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$$ ……3 分

$$=2\iint_D dxdy+\int_{-1}^{3}[-(x+1)+x]dx=2\pi-2$$ ……2 分

六、证明题（本题 6 分）

证明： 显然数列 S_n 单调增加，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，所以 $\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty$ ；

对于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{s_n}$ ，因为数列 $\frac{1}{s_n}$ 单调减少且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}=0$ ，由莱布尼兹定理知级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{s_n}$ 收敛。 ……6 分

高等数学（下）期末考试真题三

一、选择题

1、(B)　　2、(D)　　3、(A)　　4、(D)　　5、(C)

二、填空题

1、$-\frac{3}{2}$　　2.、$-\sqrt{5}$　　3、$\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy$　　4、$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$　　5、$\frac{\pi^2-1}{2}$

三、解答下列各题（本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分，每题要有必要的解题步骤）

1、**解**: l 过点 $P(2,-2,3)$ ，方向向量为 $\vec{s}=\{3,1,-4\}$ ，平面法向量为：$\vec{n}=\{1,1,1\}$ ……3 分

$\vec{n}\cdot\vec{s}=0$，且 P 满足 π 方程 ……3 分

故 l 必在平面 π 上 ……1 分

2、

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot\dfrac{1}{y}$， ……3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x^2}{y^2}f_{12}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{y^2}f_2'$$ ……4 分

3、解： $I=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)dxdy$ ……2 分

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(y-x^2)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}(x^2-y)dy$$ ……3 分

$$=\int_{-1}^{1}[\frac{y^2}{2}-x^2y]\Big|_{x^2}^{1}dx+\int_{-1}^{1}[x^2y-\frac{y^2}{2}]\Big|_{0}^{x^2}dx=\frac{11}{15}$$ ……2 分

4、解： 先求幂级数$\dfrac{1}{1}x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^4+\cdots$的和函数$S(x)$，

易求得收敛域为$[-1,1)$， ……2 分

且$S(x)=\dfrac{1}{1}x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^4+\cdots=-\ln(1-x)\quad(-1\le x<1)$ ……4 分

则级数$\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3^2}+\dfrac{1}{3\cdot3^3}+\dfrac{1}{4\cdot3^4}+\cdots$的和为$S(\dfrac{1}{3})=-\ln(1-\dfrac{1}{3})=\ln\dfrac{3}{2}$ ……1 分

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每小题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、**解：** $t=-1$对应点$\left(\dfrac{\pi}{4},\ln2,-1\right)$， 对应的切线方向向量

$\vec{s}=\{-1,-2,-1\}=-\{1,2,1\}$，…3 分

切线方程 $x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{y-\ln2}{2}=z+1$ ……2 分

法平面方程 $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2(y-\ln2)+(z+1)=0$ ……2 分

2、**解**：由于 $ds = a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt = 2a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|dt$ ……2

分

$$\int_C y^2 \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$ ……2 分

$$= 8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt = 32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u du = \frac{256}{15}a^3$$ ……3 分

3、**解**:由格林公式，原式$=\displaystyle\iint_D 4x^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ……4

分

$$=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{(1-y^4)^{\frac{1}{4}}} 4x^3\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$$ ……3 分

4、**解**:设所求平面的截距式方程为 $\dfrac{x}{A}+\dfrac{y}{B}+\dfrac{z}{C}=1$，（$A,B,C>0$）

问题即为求 $V=\dfrac{1}{6}ABC$ 在条件 $\dfrac{a}{A}+\dfrac{b}{B}+\dfrac{c}{C}=1$，（$A,B,C>0$）下的最小值。 ……2 分

令拉格朗日函数 $F = ABC+\lambda(\dfrac{x}{A}+\dfrac{y}{B}+\dfrac{z}{C}-1)$ ……1 分

于是有 $\begin{cases} F'_A = 0 \\ F'_B = 0 \\ F'_C = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases}$，得 $A=3a, B=3b, C=3c$ ； ……3 分

故所求平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=3$。 ……1 分

五、解答题(本题 8 分)

解： $\sum$ 不封闭，补 $\sum_1 : z=1$ 取上侧，

流量 $Q=\displaystyle\iint_\Sigma \vec{A}d\vec{S} = \iint_\Sigma x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$

$$Q = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1}\vec{A}d\vec{S} - \iint_{\Sigma_1}\vec{A}d\vec{S}$$

$$= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy - \iint_{D_{xy}} dxdy$$ ……4 分

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(2x+2y+2z\right)dv-\pi$$

由对称性，$\iiint\limits_{\Omega}xdv=0$，$\iiint\limits_{\Omega}ydv=0$

$$\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_{r^2}^1 zdz=\pi\int_0^1 r\left(1-r^4\right)dr=\frac{1}{3}\pi$$（截面法更简单）

故 $Q=\dfrac{2}{3}\pi-\pi=-\dfrac{1}{3}\pi$ ……4 分

六、证明题(本题 6 分)

证明：令 $u_n=1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列为 S_n，

因 $\{a_n\}$ 为严格递增有界的正数列，则存在正数 M，且 $a_n\le M$，

$0<u_n=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$， ……3 分

于是 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_{k+1}-a_k}{a_1}=\dfrac{a_{n+1}-a_1}{a_1}\le\dfrac{M-a_1}{a_1}$

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 S_n 有上界，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛。

高等数学（下）期末考试真题四

一、选择题

1．(C)　　2．(D)　　3．(C)　　4．(B)

二、填空题

1．2　　2．$\dfrac{1}{2}\left(dx-dy\right)$　　3．$\left[-1,3\right)$　　4．$\dfrac{\pi^2}{2}$

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分，写出必要的解题过程）

1. 解：由已知点 $A(3,1,-2),B(4,-3,0)$ 在平面上，直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(5,2,1)$

则 $\overrightarrow{AB}=(1,-4,2)$，所求平面的法向量为 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{s}=(-8,9,22)$ ……3 分

平面直线的方程为 $8(x-3)-9(y-1)-22(z+2)=0$ ……3 分

即为 $8x-9y-22z-59=0$ ……1 分

2. **解**：$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，即 $x=z\ln z-z\ln y$，令 $F(x)=x-z\ln z+z\ln y$ ……1 分

$F_x=1,F_y=\frac{z}{y},F_z=\ln y-\ln z-1$； ……2 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{\ln z-\ln y+1}=\frac{z}{x+z}$, ……2 分

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z}{y(\ln z-\ln y+1)}=\frac{z^2}{y(x+z)}$ ……2 分

3. **解**：$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2x}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y$ ……3 分

$=\int_0^2 x(e^2-e^x)\mathrm{d}x$ ……2 分

$=e^2-1$ ……2 分

4. **解**：$x=R\cos\theta,y=R\sin\theta\quad(-\alpha\le\theta\le\alpha)$

$I=\int_L y^2ds$ ……2 分

$=\int_{-\alpha}^{\alpha}R^2\sin^2\theta\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}d\theta$ ……3 分

$=R^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\theta d\theta=R^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$ ……2 分

四、计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分，写出必要的解题过程）

1. **解**：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'$ ……3 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf_{12}''+f_2'+xyf_{22}''$ ……4 分

2. **解**：$f_x=yze^{xyz}+2x$，$f_x(1,1,1)=e+2$

$f_y=xze^{xyz}+2y$，$f_y(1,1,1)=e+2$， $f_z=xye^{xyz}$，$f_z(1,1,1)=e$， ……3 分

（1） $gradf(1,1,1)=\{e+2,e+2,e\}$。 ……2 分

（2）在点 p(1,1,1)方向导数的最大值为：

$$\left|gradf(1,1,1)\right|=\sqrt{(e+2)^2+(e+2)^2+e^2}=\sqrt{3e^2+8e+8}$$ 。 ……2 分

3．解：取平面 Σ_1： $z=2$，取上侧．则 Σ 与 Σ_1 构成封闭曲面，取外侧．令 Σ 与 Σ_1 所围空间区域为 Ω，由 Gauss 公式，得

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(9-2^3\right)dxdy$$ ……4 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{1-r^2}^{2}dz-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy$$

$$=-\frac{\pi}{2}$$ ……3 分

4. 解： $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$ ……2 分

$$=\frac{1}{1+(x-3)}-\frac{1}{2+(x-3)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-3)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{2^n}$$ ……3 分

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-3)^n$$ ……1 分

其中 $\left|\dfrac{x-3}{2}\right|<1$, 即 $x\in(1,5)$ ……1 分

五、应用题题（本题满 7 分）

解： $w=\oint_L\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\oint_L(y+3x)dx+(2y-x)dy$ ……3 分

$$=-\iint\limits_{4x^2+y^2\le 1}(-1-1)dxdy$$ ……2 分

$=4\pi$ ……2 分

六、综合题（本题满 7 分）

解： 即求成本函数 $c(x,\quad y)$ 在条件 $x+y=8$ 下的最小值

构造拉格朗日函数 $F(x,\quad y)=x^2+2y^2-xy+\lambda(x+y-8)$ ……2 分

解方程组 $\begin{cases} F_x'=2x-y+\lambda=0 \\ F_y'=-x+4y+\lambda=0 \\ F_\lambda'=x+y-8=0 \end{cases}$ ……3 分

解得 $\lambda=-7, x=5, y=3$

实际问题有最值且拉格朗日函数有唯一的一驻点，即为所求，当这两种型号的机床分别生产 5 台和 3 台时，总成本最小，最小成本为：

$c(5,\quad 3)=5^2+2\times 3^2-5\times 3=28$（万） ……2 分

七、证明题（本题满 6 分）

证明： $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}\tan x=\dfrac{1}{n+1}$； ……3 分

记级数一般项 $u_n=\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}$， ……2 分

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 收敛于 1。 ……1 分

高等数学（下）期末考试真题五

一、单项选择题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分)

1、(A)　　2 、(C)　　3、(D)　　4、(C)　　5、(B)

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1、$x+3y-z-4=0$　　2、$\dfrac{2\pi}{3}$　3、$-30a$　　4、$0<p\le 1$　5、$y'''+y''-y'-y=0$

三、解答下列各题(本大题共 4 小题，每题 7 分，总计 28 分，每题要有必要的解题步骤)

1、

解：(1) $gradf=\{2x-4,4y-6,6z-8\}$；　$gradf\big|_{(2,1,2)}=\{0,-2,4\}$ ………4 分

(2) $\left|gradf\right|_{(2,1,2)}=2\sqrt{5}$，故 f 在点 $(2,1,2)$ 处方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$。 ………7 分

2、解：$\int_{\pi}^{2\pi}dy\int_{y-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin x}{x}dx=\int_{0}^{\pi}dx\int_{\pi}^{x+\pi}\dfrac{\sin x}{x}dy$ ………4 分

$$=\int_{0}^{\pi}\sin xdx=2$$ ………7 分

3、特征方程 $r^2+2r-3=0\Rightarrow r_1=1, r_2=-3$，对应齐次方程的通解为

$Y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$　（其中 C_1,C_2 为任意常数） ………4 分

因 $\lambda=-3$ 是特征根，设特解为 $y^*=Axe^{-3x}$，其中 A 为待定常数，代入原方程，

得 $A=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow y^*=-\dfrac{1}{4}xe^{-3x}$ ………6 分

从而得通解　$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\dfrac{1}{4}xe^{-3x}$ ………7 分

4、

解：这里 $P=e^{-x^2}\sin x+3y-\cos y$，$Q=x\sin y-y^4$。

由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=3+\sin y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\sin y$，可见 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 不成立。 ………2 分

记 $P_1=e^{-x^2}\sin x-\cos y$，则 $I=\int_L P_1dx+Qdy+\int_L 3ydx \underline{\underline{记}}\, I_1+I_2$，$(I_2=\int_L 3ydx)$。

则曲线积分 I_1 满足与路径无关的条件，选择与 L 起终点相同的直线段 $y=0$，有

$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-x^2}\sin x-1)dx=-2\pi$，而 $I_2=\int_L 3ydx=\int_{-\pi}^{\pi}3\sin xdx=0$ ………6 分

故所求积分 $I=-2\pi$。 ………7 分

分

四、解答下列各题(本大题共 4 小题，每题 7 分，总计 28 分, 每题要有必要的解题步骤)

1、解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'$ ………3

分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}''+\left(2x^2-2y^2\right)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$$ ………7

分

2、

解：取平面Σ_1： $z=2$，取上侧．则Σ与Σ_1构成封闭曲面，取外侧．令Σ与Σ_1所围空间区域为Ω，由 Gauss 公式，得

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$ ………2

分

$$=\int_1^2\pi(z-1)dz-\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(9-2^3\right)dxdy=-\frac{\pi}{2}$$ ………7

分

3、

解：$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1},R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1,x=\pm 1$时原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$收敛，故此幂级数的收敛域为$\left[-1,1\right]$。 ………2

分

设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$， $(-1\le x\le 1)$,则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(\int_0^x (-x^2)^{n-1}dx)$$

………5

$$=x\cdot\int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1})dx)=x\cdot\arctan x,(-1\le x\le 1)$$

分

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=s(1)=\dfrac{\pi}{4}$ ………7

分

4、

解：所给函数满足收敛定理的条件，它在点x $(x=(2k+1)\pi)$处不连续，因此，$f(x)$的傅立叶级数收敛于$\dfrac{\pi+(-\pi)}{2}=0$，在连续点x $(x\ne(2k+1)\pi)$收敛于$f(x)$。 ………2

分

若不计 $x=(2k+1)\pi$ ，则 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数。$a_n=0.\ (n=0,1,2,\cdots)$ ………3 分

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx=\frac{2}{n}(-1)^{(n+1)}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$ ………5 分

故 $f(x)=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots+\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}\sin nx+\cdots)$

$(x\in R,且x\neq\pm\pi,\pm3\pi,\cdots)$ **………7 分**

五、解答题(本题 8 分)

解：过点 $P(x,y)$ 的切线方程

$Y-y=y'(X-x)$，令 $X=0$得$Y=y-xy'$，即$Q(0,y-xy')$ ………2 分

由题意，$|PF|^2+|QF|^2=|PQ|^2$

得 $(x-1)^2+y^2+1+(y-xy')^2=x^2+(xy')^2$，化简

$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+1-x}{xy}$，即 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=\frac{1-x}{x}\cdot y^{-1}$ （Bernoulli 方程） ………4 分

令 $z=y^2$，得 $\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=\frac{2(1-x)}{x}$，其通解为 $z=2x-1+cx^2$

故原方程通解为 $y^2=2x-1+cx^2$，又 $y(1)=1$，得 $c=0$ 。

所以该曲线的方程为 $y^2=2x-1$ 。 ………8 分

六、证明题(本题 6 分)

证明：记 $x_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdot\cdots\cdot(1+a_n)$

因正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$，由正项级数比较审敛法的极限形式知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 也收敛并记其和为 s ………4 分

即 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)=s$，于是 $\lim_{n\to\infty}\ln x_n=s$， $\lim_{n\to\infty}x_n=e^s$

故数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdot\cdots\cdot(1+a_n)\}$ 收敛。 ………6 分

参考文献

[1] 同济大学数学系.高等数学.第七版.北京：高等教育出版社，2014.

[2] 施庆生，陈晓龙.高等数学.第七版.北京：科学出版社，2017.

[3] 陈晓龙，施庆生.高等数学学习指导（第二版）.北京：化学工业出版社，2010.

[4] 龚冬保等.高等数学典型题.西安：西安交通大学出版社，2004.

[5] 曹绳武.高等数学重要习题集.大连：大连理工大学出版社，2006.