

MATTE OBLIG

I denne obligen tar jeg for meg newtons avkjølingslov. Jeg tenkte å slå to fluer i en smekk med å bake litt mens jeg lærer. Gøy!

Planen er å bake kanelboller, måle hvordan temperaturen til en bolle endrer seg over tid og sammenlikne dette med hva newton hadde trodd.

Følger først oppskriften på kanelknuter fra matprat her:

<https://www.matprat.no/opskrifter/tradisjon/kanelknuter/>

Jeg skulle tatt i litt mer salt i bollene. Hadde jeg vært lur og rik hadde jeg kjøpt en kjøkkenmaskin slik at jeg kunne spart både tid og energi på eltingen.

Endte til slutt opp med dette:



Bollen i midten der ligger på det varme stekebrettet hele tiden mens temperaturen blir målt.

Og så det kjedelige:

Newtons avkjølingslov sier at temperaturendringen til det du måler følger dette uttrykket:

$$\dot{T} = -k(T - T_o)$$

Hvor k er en konstant, T_o er temperaturen til omgivelsene, og T er temperaturen til det du måler

$$\dot{T} + kT = kT_o$$

Ganger inn e^{kt} på begge sider og får

$$\dot{T}e^{kt} + kTe^{kt} = kT_o e^{kt}$$

Gjør et lurt triks:

$$(Te^{kt})' = kT_o e^{kt}$$

Integrerer begge sider:

$$Te^{kt} + C_1 = \int kT_o e^{kt} dt$$

$$Te^{kt} + C_1 = k \frac{1}{k} T_o e^{kt} + C_2$$

$$Te^{kt} = T_o e^{kt} + (C_2 - C_1)$$

$$C_2 - C_1 = C$$

Ganger med e^{-kt} på begge sider:

$$T = T_o + Ce^{-kt}$$

For å finne C setter vi $T(0) = T_1$ slik at vi får:

$$T(0) = T_o + Ce^0$$

Altså at

$$C = T_1 - T_o$$

Plugger vi det inn for C får vi at:

$$T = T_o + (T_1 - T_o)e^{-kt}$$

Da gjenstår det bare å måle temperaturen til bollene i det de blir tatt ut av ovnen (T_1), og temperaturen av omgivelsene (T_o), og et annet tidspunkt. Jeg valgte å ta temperaturen etter 10 minutter.

Med alt dette kan man finne et uttrykk for T

Målt temperatur er:

$$T_o = 23.8 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T(0) = 99.6^{\circ}\text{C}$$

$$T(10) = 72.9^{\circ}\text{C}$$

Setter man inn disse tallene og stoler på at jeg har gjort riktig utregning får man at

$$72.9 = 23.8 + (99.6 - 23.8)e^{-10k}$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{49.1}{78.8}\right)}{-10} = 0.043424$$

Og sluttuttrykket for T blir

$$T(t) = 23.8 + 75.8e^{-0.043424t}$$

Samtidig tok jeg en måling av temperaturen hvert minutt.

Samler vi målingene og skriver litt dårlig kode får man følgende:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

data = [99.6, 99.0, 95.4, 91.3, 88.1, 85.3, 82.5, 80.1, 76.9, 75.3, 72.9, 71.2, 68.3, 66.3, 64.7, 63.5, 61.9, 60.7, 59.1, 58.0, 56.7, 54.0, 53.4,
        51.6, 50.8, 49.6, 48.8, 47.6, 46.4, 45.6, 40.1, 35.5, 32.4, 29.8]

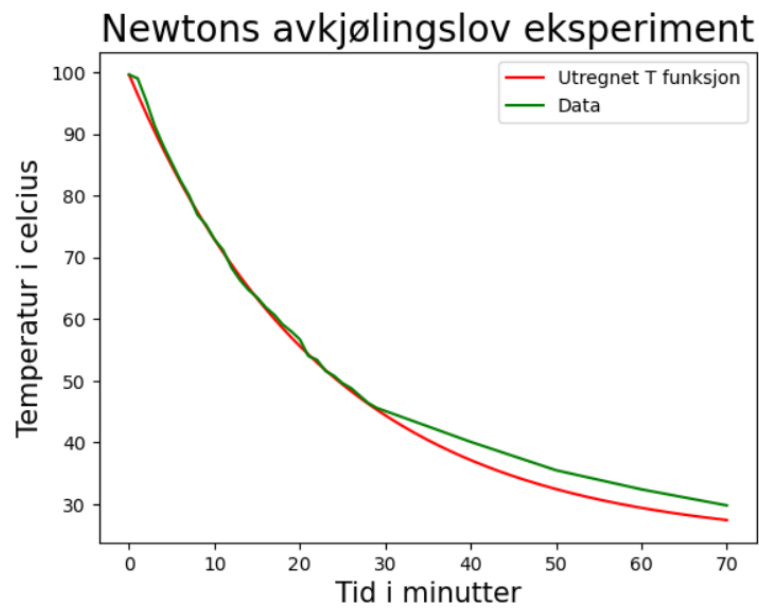
def T(t):
    return 23.8 + 75.8*np.exp(-0.043424*t)

x1 = np.linspace(0, 70, 200)
x2 = list(range(0, 30))
x2.append(40)
x2.append(50)
x2.append(60)
x2.append(70)

fig, ax = plt.subplots()

ax.set_xlabel("Tid i minutter", fontsize=15)
ax.set_ylabel("Temperatur i celcius", fontsize=15)
ax.set_title("Newtons avkjølingslov eksperiment", fontsize=20)
plt.plot(x1, T(x1), color="r", label="Utregnet T funksjon")
plt.plot(x2, data, color="g", label="Data")
plt.legend()
plt.show()
```

Data inneholder målinger som ble tatt hvert minutt i 30 min, i tillegg til målinger tatt etter 40, 50, 60, og 70 min



Man kan se at newton var inne på noe da han kom fram til loven sin. De to grafene er veldig like, fram til slutten hvor de glir fra hverandre.