Plan

- Hvad er Regularitet og Automater
- Praktiske oplysninger om kurset
- Regulære udtryk
- Induktionsbevis
- Frokost
- Endelige automater
- **Skelnelighed, Produktkonstruktion**
- Præsentation af Java projekt

Skelnelighed

- Givet et sprog L, hvor mange tilstande er nødvendige i en FA M hvis $L(M)=L$?

- To strenge, x og y, skal ende i forskellige tilstande, hvis der er behov for at kunne *skelne* dem

- dvs., $\delta^*(q_0, x) \neq \delta^*(q_0, y)$
  hvis $\exists z \in \Sigma^*$: $(xz \in L \wedge yz \notin L) \vee (xz \notin L \wedge yz \in L)$

Definition af skelnelighed

Lad $L \subseteq \Sigma^*$ og $x, y \in \Sigma^*$

- ***Kvotientsproget*** L/x defineres som
  $$L/x = \{ z \in \Sigma^* \mid xz \in L \}$$
- x og y er ***skelnelige*** mht. L hvis
  $$L/x \neq L/y$$
- z ***skelner*** x og y mht. L hvis
  $z \in L/x - L/y$ eller $z \in L/y - L/x$

Eksempel

Hvis

- $L = \{ s \in \{0,1\}^* \mid s \text{ ender med } 10 \}$
- $x = 00$
- $y = 01$

så er x og y skelnelige mht. L

Bevis:

$z = 0$ skelner x og y

– dvs. hvis $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ genkender L
så er $\delta^*(q_0, x) \neq \delta^*(q_0, y)$

Nødvendigt antal tilstande i en FA

- Antag $x_1, x_2, ..., x_n \in \Sigma^*$ og for ethvert par x_i, x_j, $i \neq j$ er x_i og x_j skelnelige mht. L

- Enhver FA der genkender L har mindst n tilstande

- Bevis (skitse):
  - antag FA'en har færre tilstande
  - det medfører at $\exists i \neq j$: $\delta^*(q_0, x_i) = \delta^*(q_0, x_j)$
  - modstrid med at x_i og x_j er skelnelige mht. L

Eksempel 1: en stor automat

Lad $L_{42} = \{ x \in \{0,1\}^* \mid |x| \geq 42$ og det 42. symbol fra højre i x er et 1 $\}$

- Lad $x_1, x_2, ..., x_{2^{42}}$ være *alle* strenge af længde 42 over alfabetet {0,1}
- Disse strenge er alle parvist skelnelige mht. L_{42}
- En automat der genkender L_{42} har derfor mindst 2^{42} tilstande
- (...hvis den overhovedet findes)

Eksempel 2: palindromer

Lad $pal = \{ x \in \{0,1\}^* \mid x = reverse(x) \}$

- Lad x og y være vilkårlige forskellige strenge over {0,1}
- x og y er skelnelige mht. pal (bevis: se bogen...)
- Vi kan altså finde en vilkårligt stor mængde parvist skelnelige strenge, så pal er **ikke regulært**

Forening af regulære sprog

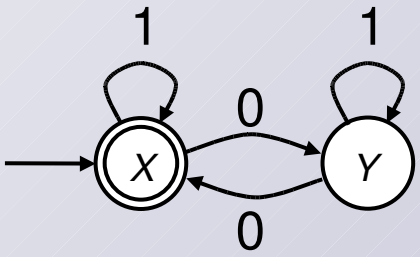
- Givet to regulære sprog, L_1 og L_2
  er $L_1 \cup L_2$ også regulært?

- Ja! (dvs. klassen af regulære sprog er *lukket under forening*)

Eksempel

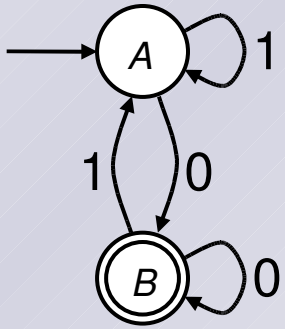
M_1:

(strenge med lige antal 0'er)



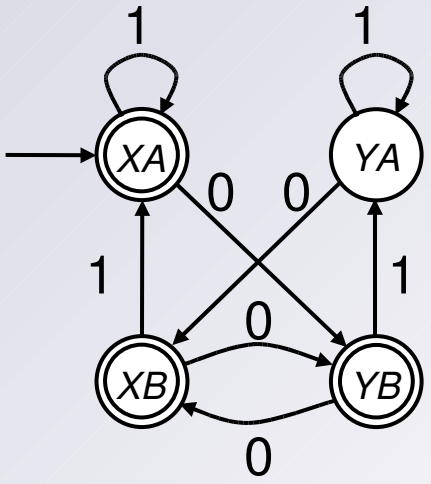
M_2:

(strenge der ender med 0)



M:

$$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$$



Produktkonstruktionen

Antag vi har to FA'er:

- $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$
- $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$

Definer en ny FA:

$M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ hvor

- $Q = Q_1 \times Q_2$ ← **produkt**mængden af tilstande
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $A = \{ (p, q) \mid p \in A_1 \vee q \in A_2 \}$
- $\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$

Der gælder nu:

$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$

Konstruktivt bevis for korrekthed

- Lemma:

  $\forall x \in \Sigma^*: \delta^*((p, q), x) = (\delta_1^*(p, x), \delta_2^*(q, x))$

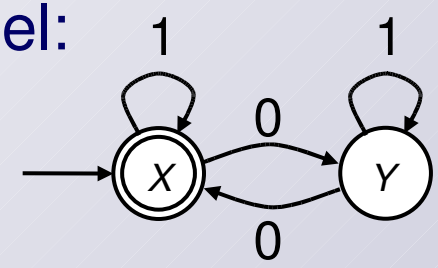
  (Bevis: opgave 3.32, induktion i x)

- Brug lemmaet samt definitionerne af M og $L(\cdot)$

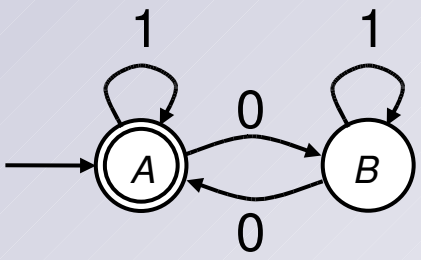
Nøjes med opnåelige tilstande

- Produktkonstruktionen bruger $Q = Q_1 \times Q_2$
- I praksis er hele tilstandsrummet sjældent nødvendigt
- Eksempel:

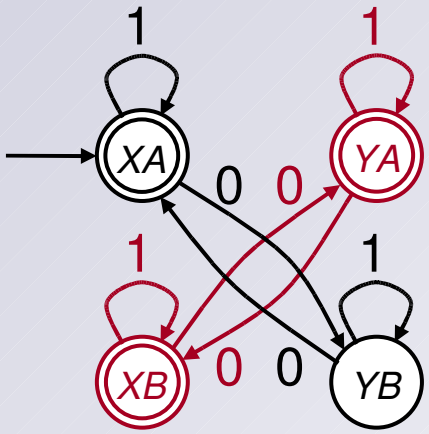
M_1:



M_2:



M:



$$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$$

- Kun tilstande, der er opnåelige fra starttilstanden er relevante for sproget!

Snitmængde og differens

Givet to regulære sprog, L_1 og L_2

2. er $L_1 \cap L_2$ også regulært?
3. er $L_1 - L_2$ også regulært?

- Ja! (dvs. klassen af regulære sprog er lukket under snit og differens)

- Bevis: produktkonstruktion som ved $\cup$ men
  - for $\cap$, vælg $A = \{ (p, q) \mid p \in A_1 \wedge q \in A_2 \}$
  - for -, vælg $A = \{ (p, q) \mid p \in A_1 \wedge q \notin A_2 \}$

Komplement

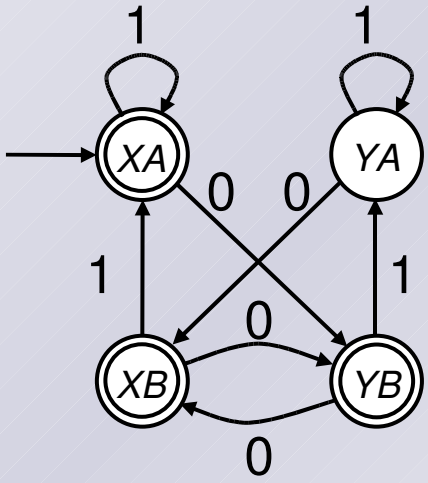
Givet et regulære sprog R
er R' (Rs komplement) også regulært?

- Ja! (dvs. klassen af regulære sprog er lukket under komplement)
- Bevis 1:
  - Vælg $L_1 = \Sigma^*$ og $L_2 = R$, hvorved $R' = L_1 - L_2$
- Bevis 2:
  - Givet en FA $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ hvor $L(M)=R$
  - Definer $M' = (Q, \Sigma, q_0, \mathbf{Q-A}, \delta)$
  - Derved gælder at $L(M')=R'$

Eksempel

M:

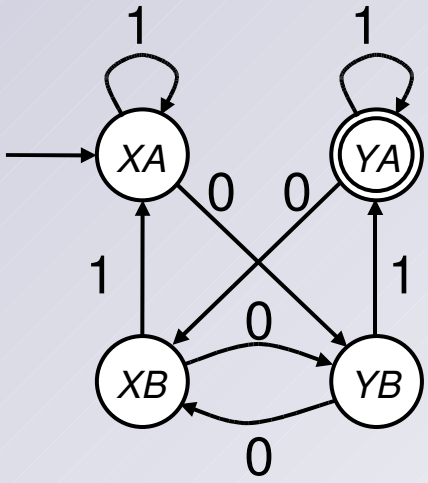
(strenge med lige antal 0'er
eller ender med 0)



M':

$L(M') = (L(M))'$

(strenge med **u**lige antal 0'er
og ender **ikke** med 0)



Øvelser:

- [Martin] 3.33 (a-c)

dRegAut Java-pakken

Udleverede programdele:

- `FA.java`:
  repræsentation af FA'er

- `Alphabet.java`,
  `State.java`,
  `StateSymbolPair.java`,
  `AutomatonNotWellDefinedException.java`:
  hjælpeklasser til `FA.java`

FA.java

```
public class FA {
   public Set<State> states;                                  // Q
   public Alphabet alphabet;                                  // Σ
   public State initial;                                      // q0∈Q
   public Set<State> accept;                                  // A⊆Q
   public Map<StateSymbolPair,State> transitions;  // δ: Q×Σ→Q
   ...
}
```

- et `Alphabet` objekt indeholder mængde af `Character` objekter
- et `StateSymbolPair` objekt består af et `State` objekt og et `Character` objekt

Nyttige metoder i `FA.java`

- `FA()` - konstruerer uinitialiseret `FA` objekt
- `FA(Alphabet a)` - konstruerer `FA` for det tomme sprog
- `clone()` - kloner et `FA` objekt
- `checkWellDefined()` - undersøger om `FA` objektet repræsenterer en veldefineret FA
- `getNumberOfStates()` - returnerer størrelsen af `states`
- `setTransition(State q, char c, State p)` - tilføjer en `c` transition fra `q` til `p`
- `toDot()` - konverterer `FA` objekt til *'Graphviz dot'* input (til grafisk repræsentation)

Automater til modellering og verifikation

Eksempel: *en jernbaneoverskæring*

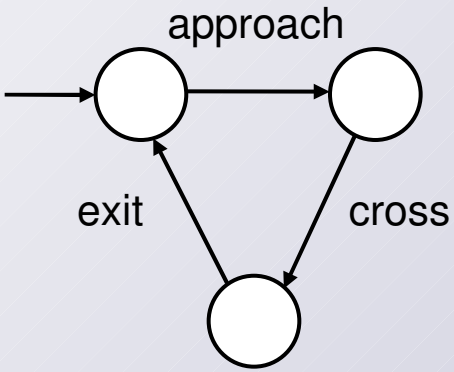
- Tre komponenter:
  - et **tog**
    - krydser vejen
    - kommunikerer med kontrolsystemet
  - et **kontrolsystem**
    - styrer bommen
  - en **bom**

- Sikkerhedsegenskab:

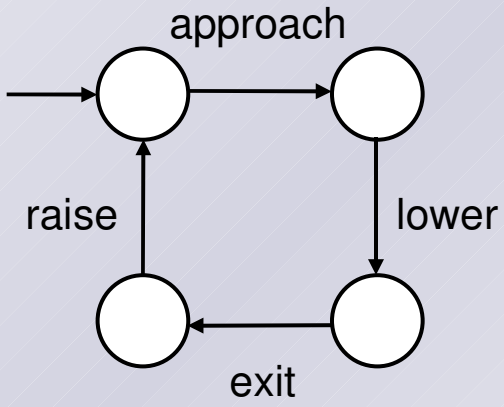
  bommen er altid nede, når toget krydser vejen

Modellering af systemet

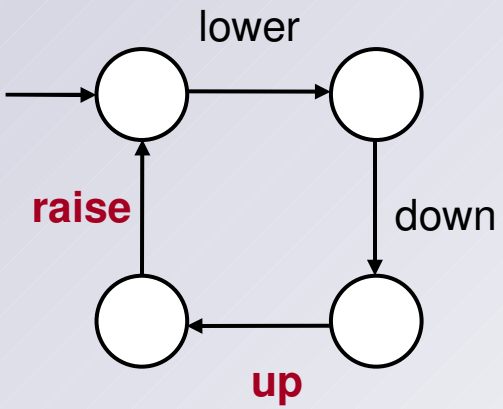
TOG



KONTROLSYSTEM



BOM



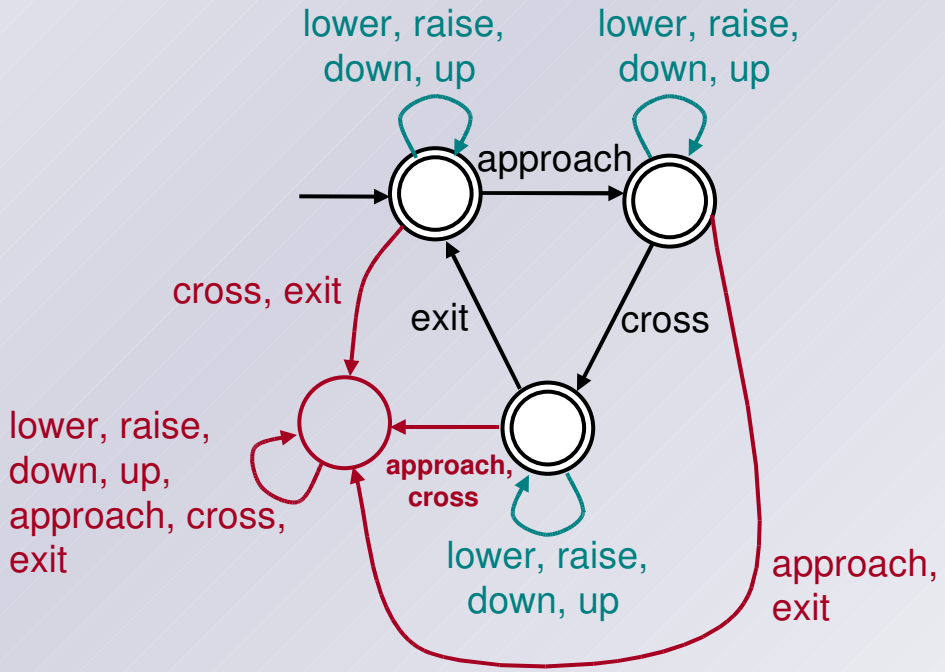
Begivenheder:

approach:	toget nærmer sig
cross:	toget krydser vejen
exit:	toget forlader området
lower:	besked til bommen om at gå ned
raise:	besked til bommen om at gå op
down:	bommen går ned
up:	bommen går op

Modellering som FA'er

Eksempel:

M_{TOG} =



- definer accepttilstande
- tilføj loop-transitioner så komponenterne får samme alfabet
- tilføj crash-tilstand og ekstra transitioner så transitions-funktionen bliver total

Kombination af komponenterne

- Vi er interesseret i de sekvenser af begivenheder, der opfylder **alle** komponenterne

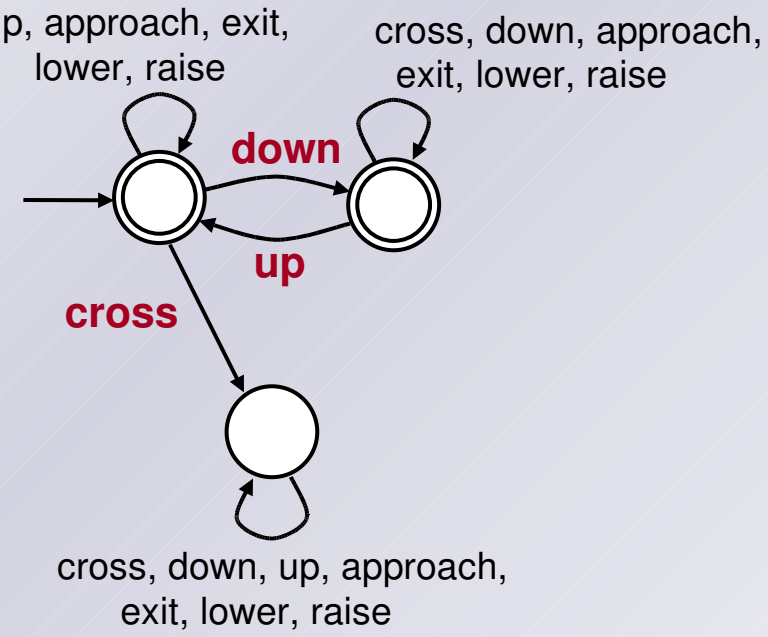
- Produktkonstruktion:

$$L(M) = L(M_{\text{TOG}}) \cap L(M_{\text{KONTROL}}) \cap L(M_{\text{BOM}})$$

Modellering af sikkerhedsegenskaben

– bommen er altid nede, når toget krydser vejen

$S =$



Verifikation

- Korrekthed: $L(M) \cap (L(S))' = \emptyset$
- dvs. vi skal bruge
  - produktkonstruktion (igen)
  - komplement
  - algoritme til at afgøre om sproget for en given FA er tomt (3. seminar)
- hvis $L(M) \cap (L(S))' \neq \emptyset$:

  enhver streng i $L(M) \cap (L(S))'$ svarer til

  et **modeksempel** (algoritme: 3. seminar)

Verifikation med dRegAut-pakken

- Opbyg `FA`-objekter svarende til M_{TOG}, M_{KONTROL}, M_{BOM}, og S
- Kombiner med `FA.intersection()` og `FA.complement()`
- Brug `FA.isEmpty()` og `FA.getAShortestExample()`
- Resultat:

  modeksempel:

  approach · lower · down · up · cross

Resume

- Definition af endelige automater og deres sprog
- Skelnelighed, hvad repræsenterer tilstandene, nødvendigt antal tilstande
- Produktkonstruktionen, komplement *(konstruktive beviser)*
- `dRegAut.FA` klassen, Java-repræsentation af FA'er
- Eksempel: automater til modellering og verifikation

Plan

- Hvad er Regularitet og Automater
- Praktiske oplysninger om kurset
- Regulære udtryk
- Induktionsbevis
- Frokost
- Endelige automater
- Skelnelighed, Produktkonstruktion
- **Præsentation af Java projekt**

Første del af java projekt:

- Studér udleverede programdele:
  - repræsentation af FA'er
  - ekstra udleverede metoder: `delta`, `deltaStar`, `complement`
- Implementér `FA` metoder:
  - `accepts`,`intersection`, `union`, `minus`
- Opbyg en FA og vis den grafisk