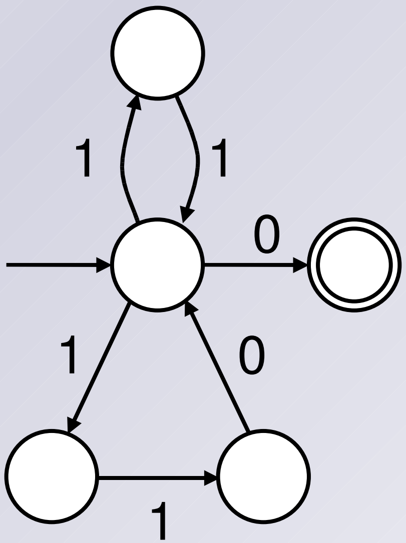
# Nondeterministiske automater

NFA’er: som FA’er men

- der er *ikke* altid præcis én udgående transition pr. alfabetsymbol for hver tilstand
- automaten accepterer en streng, hvis det er muligt at *gætte* en vej til accept

# Eksempel

- Hvordan laver man en automat, der svarer til det regulære udtryk **(11 + 110)*0** ?
- Det er ikke trivielt med FA'er...
- En **nondeterministisk** automat:



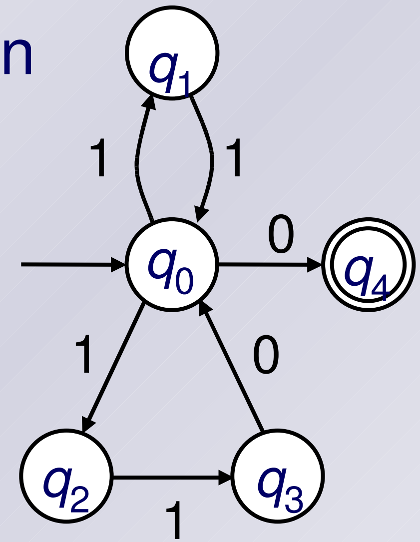
# Formel definition af NFA

En *nondeterministisk endelig automat* (NFA) er et 5-tupel ($Q$, $\Sigma$, $q_0$, $A$, $\delta$) hvor

- $Q$ er en endelig mængde af tilstande
- $\Sigma$ er et alfabet
- $q_0 \in Q$ er en starttilstand
- $A \subseteq Q$ er accepttilstande
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathbf{2}^{Q}$ er en transitionsfunktion

# Eksempel

- Denne grafiske repræsentation af en automat:




- svarer til 5-tuplet ($Q$, $\Sigma$, $q_0$, $A$, $\delta$) hvor
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
  - $\forall$ $\Sigma = \{0,1\}$
  - $A = \{q_4\}$
  - $\forall$ $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ er denne funktion:

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_4\}$ | $\{q_1, q_2\}$ |
| $q_1$ | $\emptyset$ | $\{q_0\}$ |
| $q_2$ | $\emptyset$ | $\{q_3\}$ |
| $q_3$ | $\{q_0\}$ | $\emptyset$ |
| $q_4$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

# Sproget af en NFA

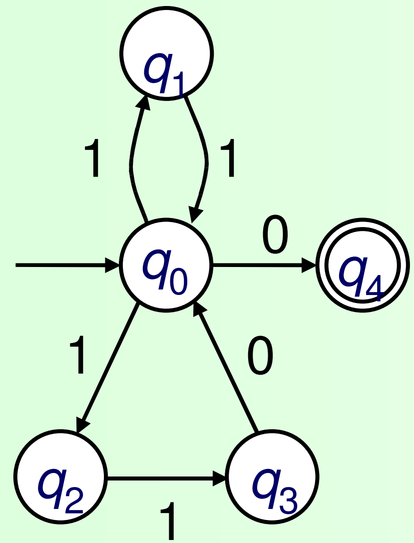
- Givet en NFA $M=(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$, definer *den udvidede transitionsfunktion* $\delta^*: Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ ved

$$\delta^*(q, x) = \begin{cases} \{q\} & \text{hvis } x=\Lambda \\ \bigcup_{r \in \delta^*(q, y)} \delta(r, a) & \text{hvis } x=ya \text{ hvor } y \in \Sigma^* \text{ og } a \in \Sigma \end{cases}$$

- $x \in \Sigma^*$ *accepteres* af $M$ hvis og kun hvis $\delta^*(q_0, x) \cap A \neq \emptyset$
- Definer $L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid x \text{ accepteres af } M \}$

# Quiz!

Bliver strengen 110110 accepteret af denne automat?




- Ja, der eksisterer en sti til accept:

  $\mathbf{q_0} \xrightarrow[1]{} q_2 \xrightarrow[1]{} q_3 \xrightarrow[0]{} q_0 \xrightarrow[1]{} q_1 \xrightarrow[1]{} q_0 \xrightarrow[0]{} \mathbf{q_4}$

- Vi kan **systematisk** lede efter en sådan sti:

  $\{\mathbf{q_0}\} \xrightarrow{1} \{q_1, q_2\} \xrightarrow{1} \{q_0, q_3\} \xrightarrow{0} \{q_4, q_0\} \xrightarrow{1}$

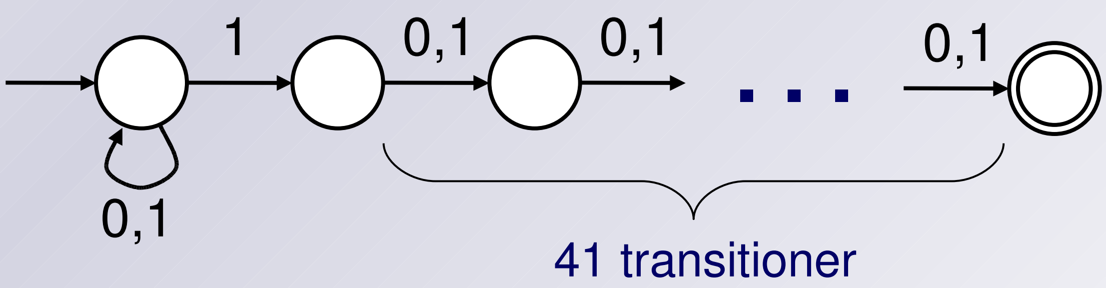
  $\{q_1, q_2\} \xrightarrow{1} \{q_0, q_3\} \xrightarrow{0} \{\mathbf{q_4}, q_0\}$

# NFA'er er ofte mindre end FA'er

Lad $L_{42}$ = { $x \in \{0,1\}^*$ | $|x| \geq 42$ og det 42. symbol fra højre i $x$ er et 1 }

- Sidste uge: En FA der genkender $L_{42}$ har mindst $2^{42}$ tilstande

- En NFA der genkender $L_{42}$ med 43 tilstande:



# Enhver FA kan oversættes til en NFA

- Med den grafiske repræsentation er det trivielt

- Med de formelle definitioner:

  Givet en FA $M=(Q, \Sigma, q_0, A, \boldsymbol{\delta}_M)$,

  definer en NFA $N=(Q, \Sigma, q_0, A, \boldsymbol{\delta}_N)$ hvor

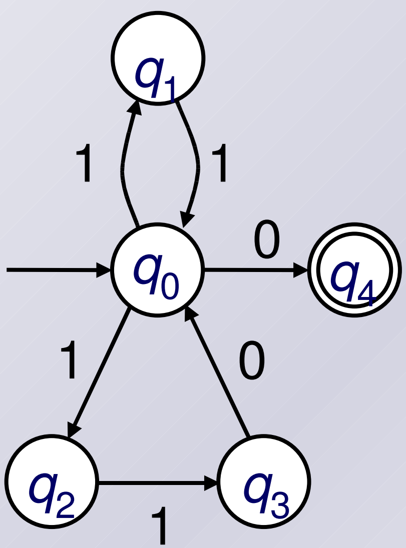
  $\boldsymbol{\delta}_N(q, a) = \{ \boldsymbol{\delta}_M(q, a) \}$ for alle $q \in Q$ og $a \in \Sigma$

  Bevis for at $L(N) = L(M)$: induktion...

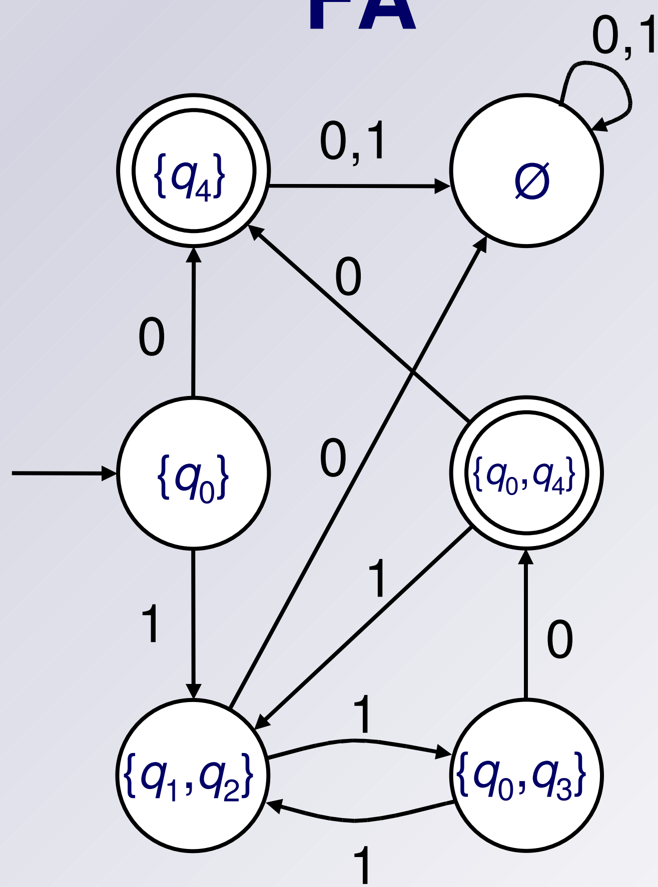
# Enhver NFA kan oversættes til en FA

Eksempel:

## NFA




## FA



# Delmængdekonstruktionen (determinisering)

Givet en NFA $M=(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$,

definer en FA $M_1=(Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ ved

- $Q_1 = 2^Q$
- $q_1 = \{q_0\}$
- $A_1 = \{q \in Q_1 \mid q \cap A \neq \emptyset\}$
- $\delta_1(q, a) = \bigcup_{r \in q} \delta(r, a)$

*hver tilstand i FA'en er en **mængde** af tilstande fra NFA'en*

Der gælder nu: $L(M_1) = L(M)$

# Bevis for korrekthed af determinisering

- Pr. definition af $L(\cdot)$ for NFA'er og FA'er:
  - $L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) \cap A \neq \emptyset \}$
  - $L(M_1) = \{ x \in \Sigma^* \mid \delta_1^*(q_1, x) \in A_1 \}$

- Lemma:

$$\boxed{\forall x \in \Sigma^*: \delta_1^*(q_1, x) = \delta^*(q_0, x)}$$

  Bevis: induktion i strukturen af *x*...

- $\delta_1^*(q_1, x) \in A_1 \overset{\text{lemma}}{\Leftrightarrow} \delta^*(q_0, x) \in A_1 \overset{\text{def. af } A_1}{\Leftrightarrow} \delta^*(q_0, x) \cap A \neq \emptyset$

- dvs. $L(M_1) = L(M)$

# Nøjes med opnåelige tilstande

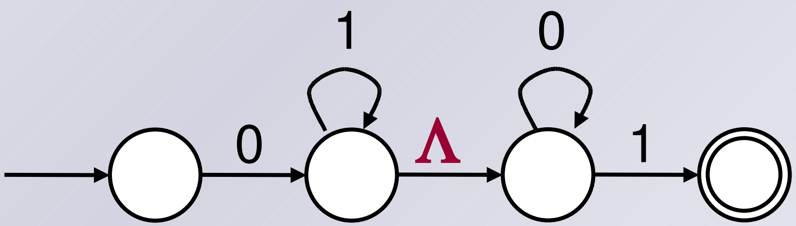
- Delmængdekonstruktionen bruger $Q_1 = 2^Q$
- Som ved produktkonstruktionen:
  I praksis er hele tilstandsrummet sjældent nødvendigt
- Som sidste seminar:
  Kun tilstande, der er opnåelige fra starttilstanden er relevante for sproget .

# NFA'er med Λ-transitioner

- For nemt at kunne oversætte regulære udtryk til automater generaliserer vi automaterne yderligere

- En **Λ-transition** er en transition, der **ikke** læser et symbol fra input-strengen

- Eksempel på en NFA-Λ:




- Automaten "bestemmer selv" om den vil følge Λ-transitionen
- Eksempel: strengen **011** accepteres

# Formel definition af NFA-$\Lambda$

En *nondeterministisk endelig automat med $\Lambda$-transitioner* (NFA-$\Lambda$) er et 5-tupel $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ hvor

- $Q$ er en endelig mængde af tilstande
- $\Sigma$ er et alfabet
- $q_0 \in Q$ er en starttilstand
- $A \subseteq Q$ er accepttilstande
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \to 2^Q$ er en transitionsfunktion

# Λ-lukning af en tilstandsmængde

- Hvor kan man komme til ved kun at bruge Λ-transitioner?

- Givet en mængde $S \subseteq Q$, definer Λ-*lukningen* $\Lambda(S)$ som den mindste mængde der opfylder flg.:
  - $S \subseteq \Lambda(S)$

  $\forall\, \forall q \in \Lambda(S)$: $\delta(q, \Lambda) \subseteq \Lambda(S)$

# Sproget af en NFA-$\Lambda$

- Givet en NFA-$\Lambda$ $M=(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$, definer *den udvidede transitionsfunktion* $\delta^*: Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ ved

$$\delta^*(q, x) = \begin{cases} \Lambda(\{q\}) & \text{hvis } x=\Lambda \\ \Lambda\left( \bigcup_{r \in \delta^*(q, y)} \delta(r, a) \right) & \text{hvis } x=ya \text{ hvor } y \in \Sigma^* \text{ og } a \in \Sigma \end{cases}$$

- $x \in \Sigma^*$ *accepteres* af $M$ hvis og kun hvis $\delta^*(q_0, x) \cap A \neq \emptyset$

- Definer $L(M) = \{\, x \in \Sigma^* \mid x \text{ accepteres af } M \,\}$