Plan

- Hvad er Regularitet og Automater
- Praktiske oplysninger om kurset
- Regulære udtryk
- Induktionsbevis
- Frokost
- **Endelige automater**
- Skelnelighed, Produktkonstruktion
- Præsentation af Java projekt

Regulære udtryk og endelige automater

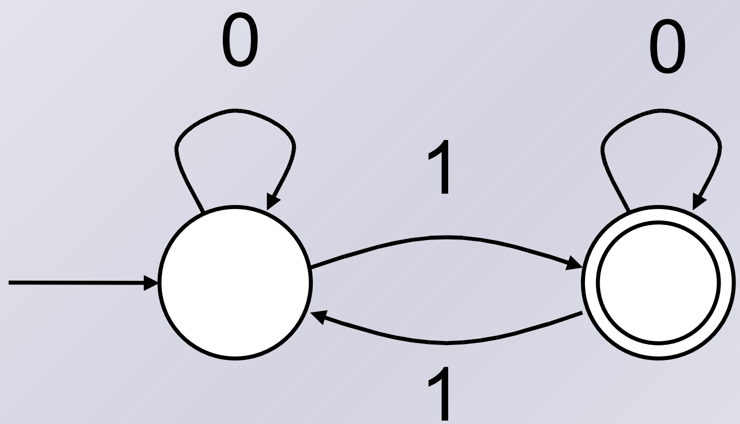
- Regulære udtryk: ***deklarative***
  dvs. ofte velegnede til at *specificere*
  regulære sprog

- Endelige automater: ***operationelle***
  dvs. bedre egnet til at afgøre om
  en given streng er i sproget

- Ethvert regulært udtryk kan oversættes til en endelig automat – og omvendt
(bevises næste seminar...)

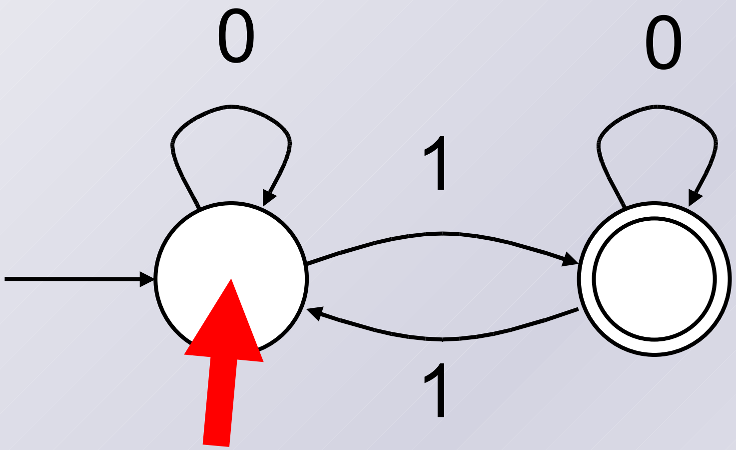
En endelig automat

- En endelig automat, der genkender strenge over alfabetet $\Sigma=\{0,1\}$ med ulige antal 1'er:



- Automaten læser strengen ét tegn ad gangen, fra venstre mod højre
- Hvis automaten ender i en *accept*-tilstand, så accepteres(=genkendes) strengen

At køre en streng på en automat



- Eksempel: vi vil vide om strengen 1010 accepteres
- Vi starter i starttilstanden og læser strengen

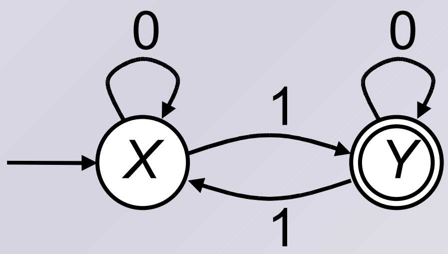
1010

- Vi ender i en ikke-accept tilstand, så strengen accepteres ikke

Hvad repræsenterer tilstandene?

- Hver tilstand repræsenterer en viden om den hidtil læste delstreng

- Eksempel:



- *X*: *"der er læst et **lige** antal 1'er"*
- *Y*: *"der er læst et **ulige** antal 1'er"*

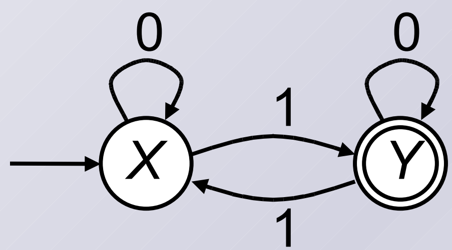
Formel definition af endelige automater

En *endelig automat* (finite automaton/FA) er et 5-tupel $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ hvor

- Q er en endelig mængde af tilstande
- Σ er et alfabet
- $q_0 \in Q$ er en starttilstand
- $A \subseteq Q$ er accepttilstande
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ er en transitionsfunktion

Eksempel

- Denne grafiske repræsentation af en automat:



- svarer til 5-tuplet $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ hvor
- $Q = \{X, Y\}$
- $\Sigma = \{0,1\}$
- $q_0 = X$
- $A = \{Y\}$
- δ: $Q \times \Sigma \rightarrow Q$ er denne funktion:

input

tilstand	0	1
X	X	Y
Y	Y	X

Hvorfor en formel definition?

- Den formelle definition viser **kort og præcist** hvad en FA er
- For eksempel,

• en FA har endeligt mange tilstande

• den har præcis én starttilstand

• en vilkårlig delmængde af tilstandene kan være accepttilstande

• for enhver tilstand q og alfabetsymbol a er der én udgående transition (til tilstanden $\delta(q,a)$)

• der er ikke noget krav om, at alle tilstande kan nås fra starttilstanden

Sproget af en automat

- 5-tupel-definitionen fortæller hvad en FA *er*
- Vi vil nu definere hvad en FA *kan*:

- En FA ***accepterer*** en streng, hvis dens kørsel fra starttilstanden ender i en accepttilstand
- ***Sproget*** $L(M)$ af en FA M er mængden af strenge, den accepterer
- M ***genkender*** sproget $L(M)$

Formel definition af $L(M)$

- Givet en FA $M=(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$, definer *den udvidede transitionsfunktion* $\delta^*: Q \times \Sigma^* \to Q$ ved

$$\delta^*(q, x) = \begin{cases} q & \text{hvis } x=\Lambda \\ \delta(\delta^*(q, y), a) & \text{hvis } x=ya \text{ hvor } y\in\Sigma^* \text{ og } a\in\Sigma \end{cases}$$

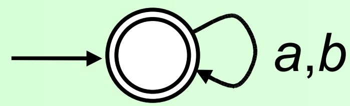
- $x\in\Sigma^*$ *accepteres* af M hvis og kun hvis $\delta^*(q_0, x)\in A$

- Definer $L(M) = \{ x\in\Sigma^* \mid x \text{ accepteres af } M \}$

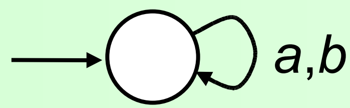
Quiz!

Lad $\Sigma=\{a,b\}$. Konstruér en FA *M* så...

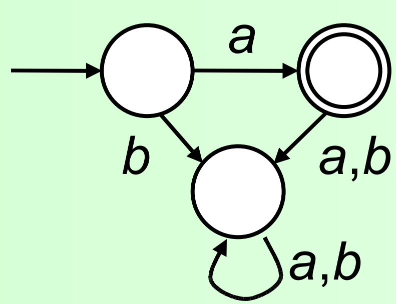
3. $L(M) = \Sigma^*$



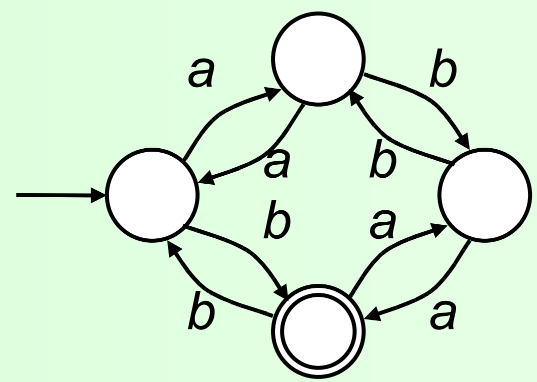
5. $L(M) = \emptyset$



7. $L(M) = \{a\}$



9. $L(M) = \{ x\in\Sigma^* \mid n_a(x)$ lige og $n_b(x)$ ulige $\}$



Øvelser:

- [Martin] Opg. 3.17 (e)
- [Martin] Opg. 3.18
- [Martin] Opg. 3.19 (a-c)

Plan

- Hvad er Regularitet og Automater
- Praktiske oplysninger om kurset
- Regulære udtryk
- Induktionsbevis
- Frokost
- Endelige automater
- **Skelnelighed, Produktkonstruktion**
- Præsentation af Java projekt

Skelnelighed

- Givet et sprog L, hvor mange tilstande er nødvendige i en FA M hvis $L(M)=L$?

- To strenge, x og y, skal ende i forskellige tilstande, hvis der er behov for at kunne *skelne* dem

- dvs., $\delta^*(q_0, x) \neq \delta^*(q_0, y)$
  hvis $\exists z \in \Sigma^*: (xz \in L \wedge yz \notin L) \vee (xz \notin L \wedge yz \in L)$

Definition af skelnelighed

Lad $L \subseteq \Sigma^*$ og $x, y \in \Sigma^*$

- ***Kvotientsproget*** L/x defineres som

  $$L/x = \{ z \in \Sigma^* \mid xz \in L \}$$

- x og y er ***skelnelige*** mht. L hvis

  $$L/x \neq L/y$$

- z ***skelner*** x og y mht. L hvis

$z \in L/x - L/y$ eller $z \in L/y - L/x$

Eksempel

Hvis

- $L = \{ s \in \{0,1\}^* \mid s \text{ ender med } 10 \}$
- $x = 00$
- $y = 01$

så er x og y skelnelige mht. L

Bevis:

$z = 0$ skelner x og y

– dvs. hvis $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ genkender L

så er $\delta^*(q_0, x) \neq \delta^*(q_0, y)$

Nødvendigt antal tilstande i en FA

Antag x1, x2, ..., xn $\in$ Σ** og for ethvert par xi,xj, i≠j*

er xi og xj skelnelige mht. L

Enhver FA der genkender L har mindst

n tilstande

- **Bevis (skitse):**
  - antag FA'en har færre tilstande
  - det medfører at $\exists i \neq j$: $\delta^*(q_0, x_i) = \delta^*(q_0, x_j)$
  - modstrid med at x_i og x_j er skelnelige mht. L

Eksempel 1: en stor automat

Lad $L_{42} = \{\, x \in \{0,1\}^* \mid |x| \geq 42$ og det 42. symbol fra højre i x er et 1 $\}$

- Lad $x_1, x_2, \ldots, x_{2^{42}}$ være *alle* strenge af længde 42 over alfabetet {0,1}
- Disse strenge er alle parvist skelnelige mht. L_{42}
- En automat der genkender L_{42} har derfor mindst 2^{42} tilstande
- (...hvis den overhovedet findes)

<u>Bevis:</u>
$x \neq y$ må være forskellige i i'te tegn fra venstre.
Strengen z som skelner kan være 0^{i-1}

Eksempel 2: palindromer

Lad *pal* = { $x \in \{0,1\}^*$ | $x = reverse(x)$ }

- Lad *x* og *y* være vilkårlige forskellige strenge over {0,1}
- *x* og *y* er skelnelige mht. *pal* (bevis: se bogen...)
- Vi kan altså finde en vilkårligt stor mængde parvist skelnelige strenge, så *pal* er **ikke regulært**

Forening af regulære sprog

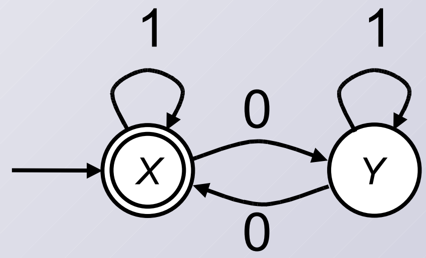
- Givet to regulære sprog, L_1 og L_2 er $L_1 \cup L_2$ også regulært?

- Ja! (dvs. klassen af regulære sprog er *lukket under forening*)

Eksempel

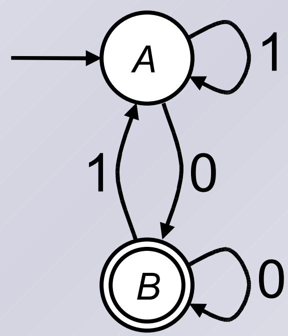
M_1:

(strenge med lige antal 0'er)

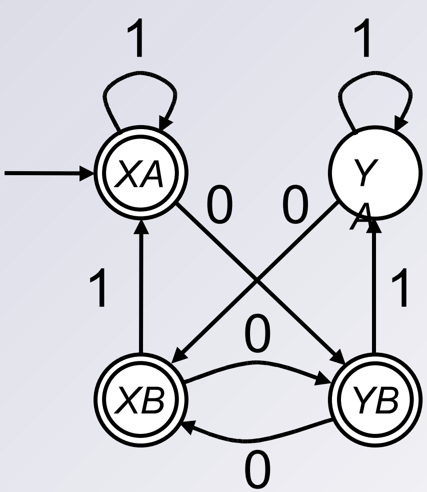


M_2:

(strenge der ender med 0)



M:



$$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$$

Produktkonstruktionen

Antag vi har to FA'er:

- $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$
- $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$

Definer en ny FA:

$M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ hvor

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $A = \{ (p, q) \mid p \in A_1 \vee q \in A_2 \}$
- $\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$

produktmængden af tilstande

Der gælder nu:

$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$

Konstruktivt bevis for korrekthed

- Lemma:

  $\forall x \in \Sigma^*\colon \delta^*((p, q), x) = (\delta_1^*(p, x), \delta_2^*(q, x))$

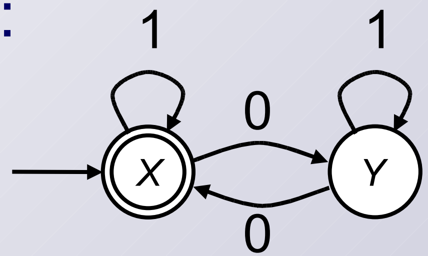
  (Bevis: opgave 3.32, induktion i x)

- Brug lemmaet samt definitionerne af M og $L(\bullet)$

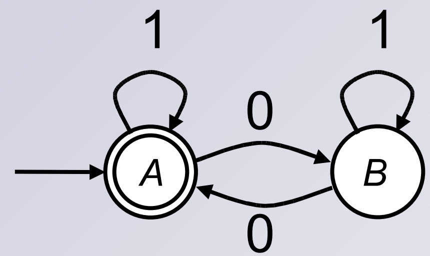
Nøjes med opnåelige tilstande

- Produktkonstruktionen bruger $Q = Q_1 \times Q_2$
- I praksis er hele tilstandsrummet sjældent nødvendigt
- Eksempel:

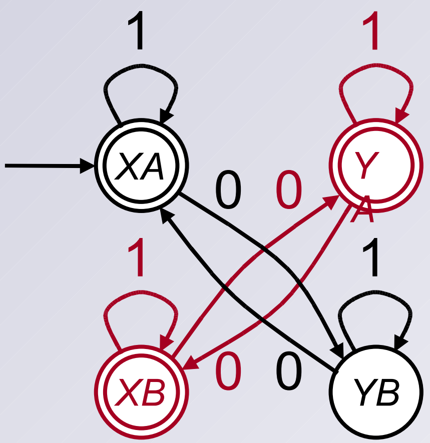
M_1:



M_2:



M:



$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$

- Kun tilstande, der er opnåelige fra starttilstanden er relevante for sproget!

Snitmængde og differens

Givet to regulære sprog, L_1 og L_2

2. er $L_1 \cap L_2$ også regulært?

3. er $L_1 - L_2$ også regulært?

- Ja! (dvs. klassen af regulære sprog er lukket under snit og differens)

- Bevis: produktkonstruktion som ved $\cup$ men

- for $\cap$, vælg $A = \{ (p, q) \mid p \in A_1 \wedge q \in A_2 \}$
- for -, vælg $A = \{ (p, q) \mid p \in A_1 \wedge q \notin A_2 \}$

Komplement

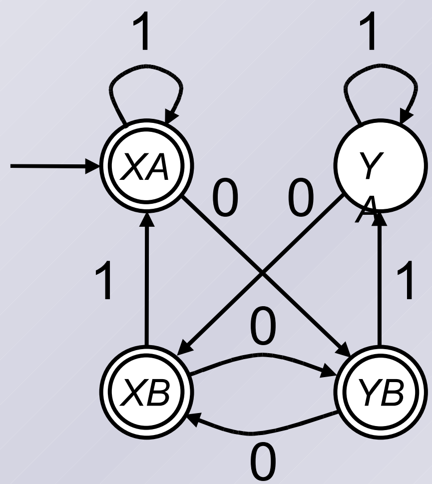
Givet et regulære sprog R
er R' (Rs komplement) også regulært?

- **Ja!** (dvs. klassen af regulære sprog er lukket under komplement)

- Bevis 1:
  - Vælg $L_1 = \Sigma^*$ og $L_2 = R$, hvorved $R' = L_1 - L_2$
- Bevis 2:
  - Givet en FA $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ hvor $L(M)=R$
  - Definer $M' = (Q, \Sigma, q_0, \boldsymbol{Q-A}, \delta)$
  - Derved gælder at $L(M')=R'$

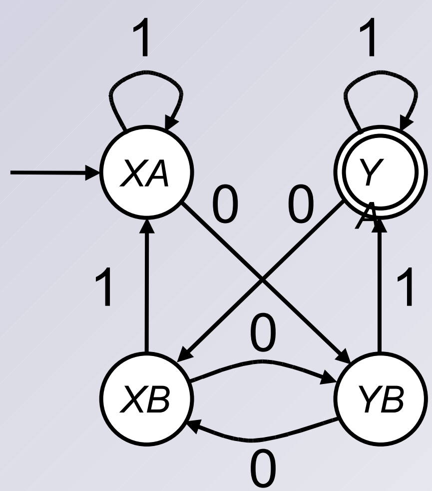
Eksempel

M:



(strenge med lige antal 0'er
eller ender med 0)

M' :



L(*M'*) = (*L*(*M*))'

(strenge med **u**lige antal 0'er
og ender **ikke** med 0)

Øvelser:

- [Martin] 3.33 (a-c)

dRegAut Java-pakken

Udleverede programdele:

- `FA.java`:
  repræsentation af FA'er

- `Alphabet.java`,
`State.java`,
`StateSymbolPair.java`,
`AutomatonNotWellDefinedException.java`:
hjælpeklasser til `FA.java`

FA.java

```
public class FA {
   public Set<State> states;                        // Q
   public Alphabet alphabet;                        // Σ
   public State initial;                            // q0∈Q
   public Set<State> accept;                        // A⊆Q
   public Map<StateSymbolPair,State> transitions;  // δ: Q×Σ→Q
   ...
}
```

- et `Alphabet` objekt indeholder mængde af `Character` objekter
- et `StateSymbolPair` objekt består af et `State` objekt og et `Character` objekt

Nyttige metoder i `FA.java`

- `FA()` - konstruerer uinitialiseret `FA` objekt
- `FA(Alphabet a)` - konstruerer `FA` for det tomme sprog
- `clone()` - kloner et `FA` objekt
- `checkWellDefined()` - undersøger om `FA` objektet repræsenterer en veldefineret FA
- `getNumberOfStates()` - returnerer størrelsen af `states`
- `setTransition(State q, char c, State p)` - tilføjer en `c` transition fra `q` til `p`
- `toDot()` - konverterer `FA` objekt til *'Graphviz dot'* input (til grafisk repræsentation)

Automater til modellering og verifikation

Eksempel: *en jernbaneoverskæring*

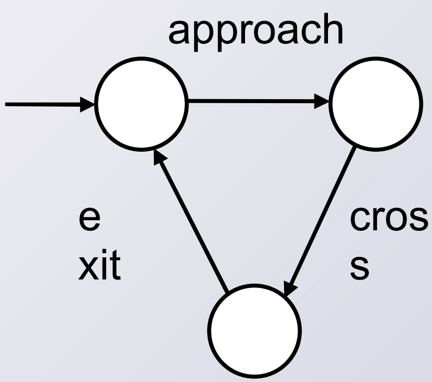
- Tre komponenter:
  - et **tog**
    - krydser vejen
    - kommunikerer med kontrolsystemet
  - et **kontrolsystem**
    - styrer bommen
  - en **bom**

- Sikkerhedsegenskab:

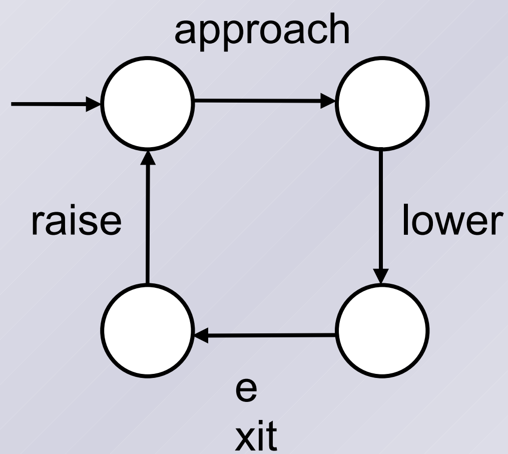
  bommen er altid nede, når toget krydser vejen

Modellering af systemet

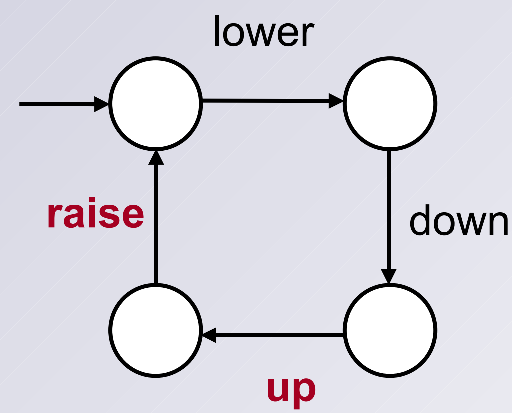
TOG



KONTROLSYSTEM



BOM



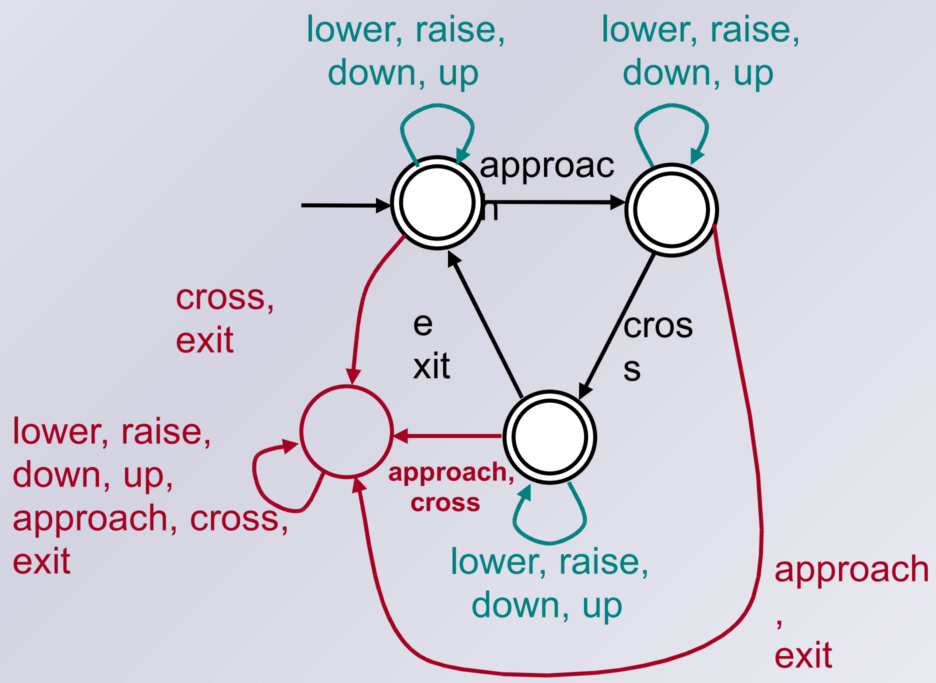
Begivenheder:

approach:	toget nærmer sig
cross:	toget krydser vejen
exit:	toget forlader området
lower:	besked til bommen om at gå ned
raise:	besked til bommen om at gå op
down:	bommen går ned
up:	bommen går op

Modellering som FA'er

Eksempel:

$M_{TOG} =$



- definer accepttilstande
- tilføj loop-transitioner så komponenterne får samme alfabet
- tilføj crash-tilstand og ekstra transitioner så transitions-funktionen bliver total

Kombination af komponenterne

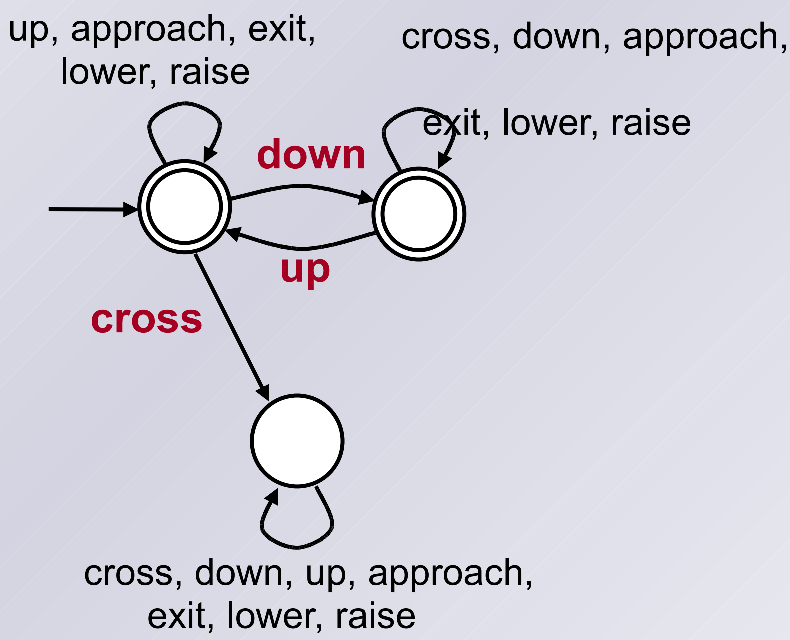
- Vi er interesseret i de sekvenser af begivenheder, der opfylder **alle** komponenterne

- Produktkonstruktion:
  $L(M) = L(M_{\text{TOG}}) \cap L(M_{\text{KONTROL}}) \cap L(M_{\text{BOM}})$

Modellering af sikkerhedsegenskaben

– *bommen er altid nede, når toget krydser vejen*

$S =$



Verifikation

- Korrekthed: $L(M) \cap (L(S))' = \emptyset$

- dvs. vi skal bruge

•produktkonstruktion (igen)

•komplement

•algoritme til at afgøre om sproget for en given FA er tomt (3. seminar)

- hvis $L(M) \cap (L(S))' \neq \emptyset$:

  enhver streng i $L(M) \cap (L(S))'$ svarer til

  et **modeksempel** (algoritme: 3. seminar)

Verifikation med dRegAut-pakken

- Opbyg `FA`-objekter svarende til M_{TOG}, M_{KONTROL}, M_{BOM}, og S
- Kombiner med `FA.intersection()` og `FA.complement()`
- Brug `FA.isEmpty()` og `FA.getAShortestExample()`
- Resultat:

  modeksempel:

  approach · lower · down · up · cross

Resume

- Definition af endelige automater og deres sprog
- Skelnelighed, hvad repræsenterer tilstandene, nødvendigt antal tilstande
- Produktkonstruktionen, komplement *(konstruktive beviser)*
- `dRegAut.FA` klassen, Java-repræsentation af FA'er
- Eksempel: automater til modellering og verifikation

Plan

- Hvad er Regularitet og Automater
- Praktiske oplysninger om kurset
- Regulære udtryk
- Induktionsbevis
- Frokost
- Endelige automater
- Skelnelighed, Produktkonstruktion
- **Præsentation af Java projekt**

Første del af java projekt:

- Studér udleverede programdele:
  - repræsentation af FA'er
  - ekstra udleverede metoder: `delta`, `deltaStar`, `complement`
- Implementér `FA` metoder:
  - `accepts`, `intersection`, `union`, `minus`
- Opbyg en FA og vis den grafisk