2. Seminar EVU RegAut

Sigurd Meldgaard

7. februar 2009

Plan

Ækvivalens ml. Regulære udtryk og FA'er

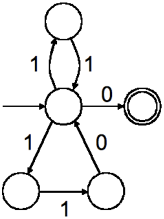
- Definition af NFA'er og deres sprog
- Delmængdekonstruktionen: NFA $\longrightarrow$ FA
- Definition af NFA-Λ'er og deres sprog
- Λ-eliminering: NFA-Λ $\longrightarrow$ FA
- Kleenes sætning: regulært udtryk $\longrightarrow$ NFA-Λ $\longrightarrow$ NFA $\longrightarrow$ FA $\longrightarrow$ regulært udtryk

Nondeterministiske automater

- NFA'er: som FA'er men
- Der er ikke altid præcis én udgående transition pr. alfabetsymbol for hver tilstand
- Automaten accepterer en streng, hvis det er muligt at "gætte" en vej til accept

Eksempel

- Hvordan laver man en automat, der svarer til det regulære udtryk $(11 + 110)^*0$?
- Det er ikke trivielt med FA'er...
- En nondeterministisk automat:



Formel definition af NFA

Everything is vague to a degree you do not realize till you have tried to make it precise.

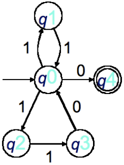
Bertrand Russell

En nondeterministisk endelig automat (NFA) er et 5-tupel $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ hvor

- Q er en endelig mængde af tilstande
- Σ er et alfabet
- $q_0 \in Q$ er en starttilstand
- $A \subseteq Q$ er accepttilstande
- $\delta \colon Q \times \Sigma \to 2^Q$ er en transitionsfunktion
  Det betyder at $\delta(q, a)$ giver en *mængde* af tilstande.

Eksempel på en NFA

Her er den grafiske representation af en automat:



- Den representerer 5-tuplet:
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $A = \{q_4\}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ Er funktionen i denne tabel:

	0	1
q_0	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_0\}$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$

Sproget af en NFA

Givet en NFA $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$:

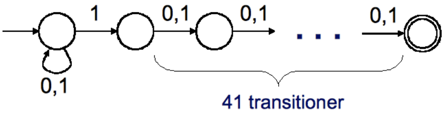
- Definer den udvidede transitionsfunktion:

$$\delta^*(q, x) = \begin{cases} \{q\} & \text{hvis } x = \Lambda \\ \bigcup_{r \in \delta^*(q,y)} \delta(r, a) & \text{hvis } x = y \cdot a \end{cases}$$

- $x \in \Sigma^*$ accepteres af en NFA M hvis og kun hvis $\delta^*(q_0, x) \cap A \neq \emptyset$
- $L(M) = \{x | x \text{ accepteres af } M\}$

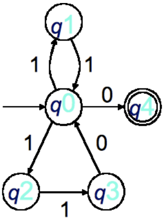
NFA'er er ofte mindre end FA'er

- $L_{42} = \{x \mid |x| \geq 42 \wedge$ 42 tegn fra højre er et 1$\}$
- Sidste seminar viste vi at det kræver mindst 2^{42} tilstande at lave en FA der genkender L_{42}
- En NFA der genkender L_{42} med 43 tilstande:



Quiz

Bliver strengen 110110 accepteret af denne automat?



Ja! der findes en sti til accept:

$$q_0 \longrightarrow q_2 \longrightarrow q_3 \longrightarrow q_0 \longrightarrow q_1 \longrightarrow q_0 \longrightarrow q_4$$

Vi kan systematisk lede efter sådan en sti:

$\{q_0\} \longrightarrow \{q_1, q_2\} \longrightarrow \{q_0, q_3\} \longrightarrow$
$\{q_4, q_0\} \longrightarrow \{q_1, q_2\} \longrightarrow \{q_0, q_3\} \longrightarrow \{q_4, q_0\}$

Øvelser:

Martin : opg. 4.2. (p. 156)
Drawing an NFA and using the definition of δ^*

Plan

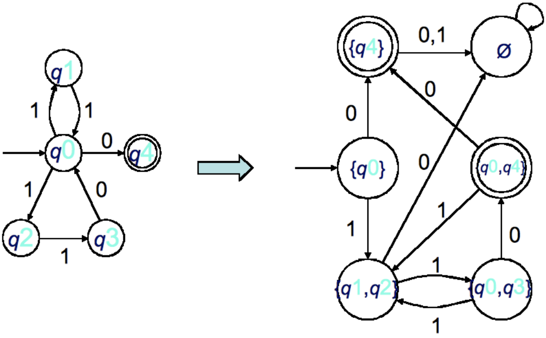
Enhver FA kan oversættes til en NFA

- Hvis man ser på den grafiske repræsentation, så er det trivielt, en FA er bare en simpel NFA.
- Formelt: givet en FA: $N = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$
- Konstruer en NFA: $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta')$ hvor:

$$\delta'(q, a) = \{\delta(q, a)\}$$

- Husk bevis for korrekthed! $L(M) = L(N)$ fordi... (induktion i længden af en inputstreng)

Enhver NFA kan oversættes til en FA



Dette kaldes determinisering

Delmængdekonstruktionen (determinisering)

Givet en NFA: $N = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$
Konstruer en FA: $M = (Q', \Sigma, q_0', A', \delta')$

- $Q' = 2^Q$ (tilstandene i FA'en svarer til en mængde af tilstande i NFA'en)
- $q_0' = \{q_0\}$
- $A' = \{q \in Q' | A \cap q \neq \emptyset\}$
- $\delta'(q, a) = \bigcup_{r \in q} \delta(r, a)$
- Husk bevis for korrekthed...

Bevis for korrekthed af delmængdekonstruktionen

- Husk definitionen for $L(M)$ og $L(N)$

$$L(M) = \{x | \delta'^*(q'_0, x) \in A'\}$$

$$L(N) = \{x | \delta^*(q_0, x) \cap A \neq \emptyset\}$$

- Lemma:

$$\forall x \in \Sigma^* : \delta'^*(q'_0, x) = \delta^*(q_0, x)$$

Bevis: induktion i strukturen af x...

- $\delta'^*(q'_0, x) \in A' \overset{\text{lemma}}{\Leftrightarrow} \delta^*(q_0, x) \in A' \overset{\text{def af A}}{\Leftrightarrow} \delta^*(q_0, x) \cap A \neq \emptyset$
- D.v.s. $L(M) = L(N)$

Nøjes med opnåelige tilstande

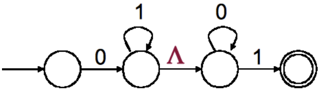
- Delmængdekonstruktionen bruger $Q' = 2^Q$
- Som ved produktkonstruktionen: I praksis er hele tilstandsrummet sjældent nødvendigt
- Som sidste gang: Kun tilstande, der er opnåelige fra starttilstanden er relevante for sproget (Bevis dette: Opg. 3.29, p. 117)

Øvelser

Martin Opg. 4.10 (a+e) (p. 157)
Udfør selv delmængdekonstruktionen.

Plan

NFA'er med Λ-transitioner

- For nemt at kunne oversætte regulære udtryk til automater generaliserer vi automaterne yderligere
- En Λ-transition er en transition, der ikke læser et symbol fra input-strengen
- Eksempel på en NFA-Λ: 

- Automaten "bestemmer selv" om den vil følge Λ-transitionen
Eksempel: strengen 011 accepteres

Formel definition af NFA-Λ

En nondeterministisk endelig automat med Λ-transitioner (NFA-Λ) er et 5-tupel $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ hvor

- Q er en endelig mængde af tilstande
- Σ er et alfabet
- $q_0 \in Q$ er en starttilstand
- $A \subseteq Q$ er accepttilstande
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \Lambda) \to 2^Q$ er en transitionsfunktion

Λ-lukning af en tilstandsmængde (Λ-closure)

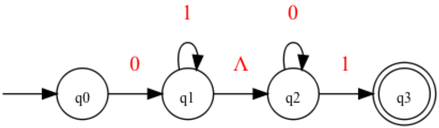
- Hvor kan man komme til ved kun at bruge Λ-transitioner?
- Givet en mængde $S \subseteq Q$, definer Λ-lukningen $\Lambda(S)$ som den mindste mængde der opfylder flg.:
- $S \subseteq \Lambda(S)$
- $\forall q \in \Lambda(S) : \delta(q, \Lambda) \in \Lambda(S)$

Sproget for en NFA-Λ

- Givet en NFA-Λ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$, definer den udvidede transitionsfunktion $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ ved
- $$\delta^*(q,x) = \begin{cases} \Lambda(q) & \text{hvis } x = \Lambda \\ \Lambda(\bigcup_{r \in \delta^*(q,y)} \delta(r,a)) & \text{hvis } x = y \cdot a \end{cases}$$

Quiz

- Hvad er $\delta^*(q_0, 01)$ for denne NFA-Λ?



- $\delta^*(q_0, \Lambda) = \Lambda(q_0) = \{q_0\}$
- $\delta^*(q_0, \Lambda \cdot 0) = \Lambda(\bigcup_{r \in \delta^*(q_0, \Lambda)} \delta(r, 0)) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta^*(q_0, \Lambda \cdot 0 \cdot 1) = \Lambda(\bigcup_{r \in \delta^*(q_0, \Lambda \cdot 0)} \delta(r, 1)) = \Lambda(\{q_1, q_2\} \cup \{q_3\}) = \{q_1, q_2, q_3\}$
- - d.v.s. strengen 01 bliver accepteret af automaten.

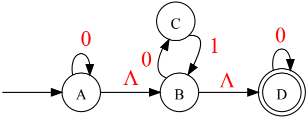
Enhver NFA kan oversættes til en NFA-Λ

- Med den grafiske repræsentation er det trivielt
- Med de formelle definitioner:
  Givet en NFA $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta_M)$,
  definer en NFA-Λ $N = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta_N)$ hvor
  $\delta_N(q, a) = \delta M(q, a)$ for alle $q \in Q$ og $a \in \Sigma$ $\delta_N(q, \Lambda) =$ for alle $q \in Q$
  Bevis for at $L(N) = L(M)$: induktion...

Enhver NFA-Λ kan oversættes til en NFA (Λ-eliminering)

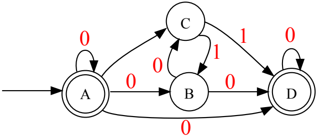
- Givet en NFA-Λ $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$,
- definer en NFA $M_1 = (Q, \Sigma, q_0, A_1, \delta_1)$ ved
- $\delta_1(q, a) = \delta^*(q, a)$
- $A_1 = \begin{cases} A \cup \{q_0\} & \text{hvis } \Lambda(\{q_0\}) \cap A \neq \emptyset \\ A & \text{ellers} \end{cases}$
- Der gælder nu: $L(M_1) = L(M)$

Eksempel



- NFA-Λ:
- Find $\delta^*(q, a)$ for alle $q \in Q$ og $a \in \Sigma$
- Se om $\Lambda(\{q_0\}) \cap A \neq \emptyset$

q	$\delta(q,\Lambda)$	$\delta(q,0)$	$\delta(q,1)$	$\delta^*(q,0)$	$\delta^*(q,1)$
A	$\{B\}$	$\{A\}$	{}	{A,B,C,D}	{}
B	$\{D\}$	$\{C\}$	{}	{C,D}	{}
C	{}	{}	$\{B\}$	{}	{B,D}
D	{}	$\{D\}$	{}	{D}	{}



Bevis for korrekthed af Λ-eliminering

- Vi skal vise: $\forall x \in \Sigma^* : x \in L(M1) \Leftrightarrow x \in L(M)$
  $x = \Lambda$: brug definition af A_1 og Λ-lukning...
- $x \neq \Lambda$: Lemma: $\forall x \in \Sigma^*, x \neq \Lambda : \delta * (q_0, x) = \delta_1 * (q_0, x)$
  ...
- – se bogen Th. 4.2 p. 141.

Øvelser

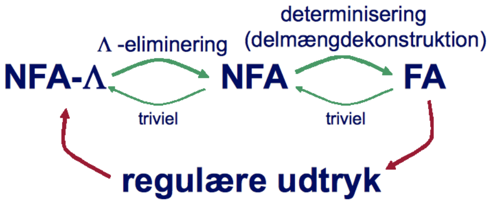
Martin Opg. 4.13 (p.159) Kør strenge på en NFA-Λ

Martin Opg. 4.28 (e) Brug algoritmen til Λ-eliminering

Plan

Status

- Vi har defineret 4 formalismer regulære udtryk FA, NFA, NFA-Λ
- og er ved konstruktivt at bevise ækvivalens i udtrykskraft



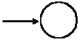
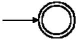
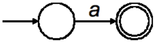
Ethvert regulært udtryk kan oversættes til en NFA-Λ

(Kleenes sætning, del 1)

- Bevis: Induktion i strukturen af det regulære udtryk r.
- Vis konstruktivt for hvert tilfælde hvordan man kan lave den korrekte NFA-Λ

Basis

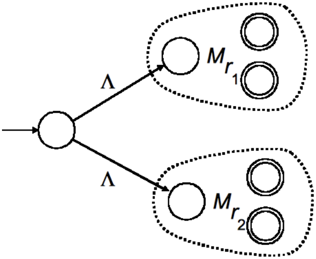
- $r = \emptyset$
- $r = \Lambda$
- $r = a$, hvor $a \in \Sigma$

- 
- 
- 

Induktionsskridt

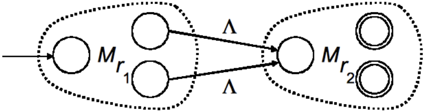
- For alle deludtryk s af r kan vi udnytte induktionshypotesen.
- der eksisterer en NFA-Λ M_s hvor $L(M_s) = L(s)$

$r = r_1 + r_2$

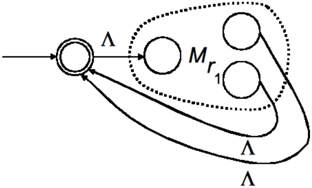


Induktionsskridt (part 2)

$r = r_1 \cdot r_2$



$r = r_1^*$

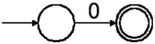


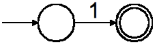
Formel beskrivelse og bevis for korrekthed

Se beviset i bogen: p. 146

Eksempel

Konstruer en NFA-Λ for det regulære udtryk $(00+1)^*(10)^*$

- 0: 

- 1: 

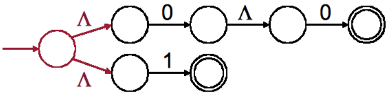
- 00: 

- 10: 

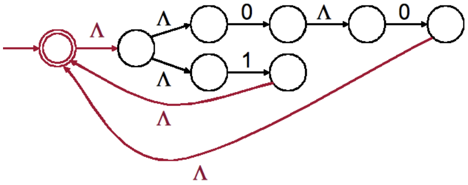
Eksempel fortsat

Konstruer en NFA-Λ for det regulære udtryk $(00+1)^*(10)^*$

- $00+1$:

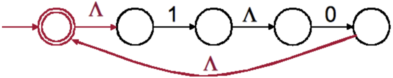


- $(00+1)^*$:

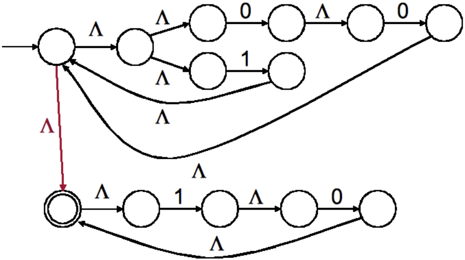


Eksempel fortsat

Konstruer en NFA-Λ for det regulære udtryk $(00+1)^*(10)^*$



- $(10)^*$:



- $(00+1)^*(10)^*$:

Øvelser

Martin Opg. 4.35 (a) (p. 163)
Udfør algoritmen for konstruktion af NFA-Λ fra regulært udtryk.

Enhver FA kan oversættes til et regulært udtryk

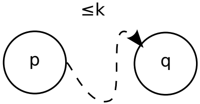
Kleene's sætning del 2.
Vi laver bevis med induktion naturligvis, men induktion i hvad?

Fra FA til regulært udtryk

- For en FA $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ er $L(M)$ defineret som $L(M) = \{x \in \Sigma^* | \delta^*(q_0, x) \in A\}$
- Da A er endelig kan L(M) udtrykkes som en endelig forening af sprog på form $L(p, q) = \{x \in \Sigma^* | \delta^*(p, x) = q\}$
- Vi vil vise at hvert af disse sprog kan oversættes til et regulært udtryk, $r(p, q)$, og derefter kombinere disse med "+"

Induktion i antal tilstande

- Antag tilstandene i M er nummereret $1, ..., |Q|$
- Definer $L(p, q, k)$ hvor $p, q \in Q$ og $k \in \{1..|Q|\}$ som mængden af strenge, der fører fra p til q og kun går gennem tilstande med nummer $\leq k$ (fraregnet endepunkterne)



- dvs. $L(p, q) = L(p, q, |Q|)$
- Vi vil vise ved induktion i k at $L(p, q, k)$ svarer til et regulært udtryk, $r(p, q, k)$
- dvs. vælg $r(p, q) = r(p, q, |Q|)$

Basis

$k = 0$

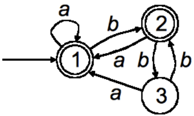
- $L(p, q, 0)$ er mængden af strenge, der fører fra p til q uden at gå gennem nogen tilstande (fraregnet endepunkterne)
- hvis $p \neq q$: $L(p, q, 0) = \{a \in \Sigma | \delta(p, a) = q\}$
- hvis $p = q$: $L(p, q, 0) = \{a \in \Sigma | \delta(p, a) = p\} \cup \{\Lambda\}$
- dvs. vi kan altid finde et regulært udtryk $r(p, q, 0)$ for $L(p, q, 0)$

Induktionsskridt

$k+1$

- $L(p,q,k+1)$ er mængden af strenge, der fører fra p til q og kun går gennem tilstande med nummer $\leq k+1$
- To tilfælde:
  - Strenge der ikke går gennem tilstand $k+1$: $L(p,q,k)$
  - Strenge der går gennem tilstand $k+1$: $L(p,k+1,k)L(k+1,k+1,k)^*L(k+1,q,k)$
- dvs. $L(p,q,k+1) =$ $L(p,q,k) \cup L(p,k+1,k)L(k+1,k+1,k)^*L(k+1,q,k)$
- som vha. induktionshypotesen svarer til et regulært udtryk $r(p,q,k+1) =$ $r(p,q,k) + r(p,k+1,k)r(k+1,k+1,k)^*r(k+1,q,k)$

Eksempel



Oversæt denne FA til et regulært udtryk

- $r = r(1,1,3) + r(1,2,3)$
- $r(1,1,3) = r(1,1,2) + r(1,3,2)r(3,3,2)^* r(3,1,2)$
- $r(1,1,2) = r(1,1,1) + r(1,2,1)r(2,2,1)^* r(2,1,1)$
- $r(1,1,1) = r(1,1,0) + r(1,1,0)r(1,1,0)^* r(1,1,0)$
- $r(1,1,0) = a + \Lambda$
- Heldigvis kan vi sætte en computer til det!

Eksempel fortsat

- $$\begin{gathered}r = ((\emptyset + (((((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a)))) + ((((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))(((((\emptyset + \\ a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))^*)(((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))))) + ((((\emptyset + b) + (\emptyset(((\emptyset + \\ \lambda)^*)(\emptyset + b)))) + ((((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))(((((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))^*)((\emptyset + \\ b) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + b)))))))(((((\emptyset + \lambda) + ((\emptyset + b)(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + b)))) + (((\emptyset + a) + ((\emptyset + b)(((\emptyset + \\ \lambda)^*)(\emptyset + a))))(((((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))^*)((\emptyset + b) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + b)))))))^*)(((\emptyset + \\ a) + ((\emptyset + b)(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a)))) + (((\emptyset + a) + ((\emptyset + b)(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))(((((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \\ \lambda)^*)(\emptyset + a))))^*)(((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a)))))))))))) + ((((\emptyset + b) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + b)))) + \\ ((((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))(((((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))^*)((\emptyset + b) + (\emptyset(((\emptyset + \\ \lambda)^*)(\emptyset + b))))))) + ((((\emptyset + b) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + b)))) + ((((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))(((((\emptyset + \\ a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))^*)((\emptyset + b) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + b)))))))(((((\emptyset + \lambda) + ((\emptyset + b)(((\emptyset + \\ \lambda)^*)(\emptyset + b)))) + (((\emptyset + a) + ((\emptyset + b)(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))(((((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))^*)((\emptyset + \\ b) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + b)))))))^*)(((\emptyset + \lambda) + ((\emptyset + b)(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + b)))) + (((\emptyset + a) + ((\emptyset + b)(((\emptyset + \\ \lambda)^*)(\emptyset + a))))(((((\emptyset + a) + \lambda) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + a))))^*)((\emptyset + b) + (\emptyset(((\emptyset + \lambda)^*)(\emptyset + b)))))))))))\end{gathered}$$
- (Hvis programmet ikke simplificerer undervejs...)

Øvelser

Martin Opg. 4.38(b) (p. 164)
Brug algoritmen fra Kleenes sætning del 2.

Plan


VITAMIN A AND D
LOWFAT MILK
VITAMIN A AND D
LOWFAT MILK

Resume

- Regulære udtryk, FA'er, NFA'er og NFA-Λ'er svarer alle til klassen af regulære sprog
- Algoritmer fra de konstruktive beviser:
- determinisering (delmængdekonstruktionen)
- Λ-eliminering
- regulært udtryk $\rightarrow$ NFA-Λ
- FA $\rightarrow$ regulære udtryk (primært et teoretisk resultat)

Plan

Karakteristik af de regulære sprog

Et sprog er regulært hviss (hvis og kun hvis)

- L beskrives af et regulært udtryk
- L genkendes af en FA/NFA/NFA-Λ
- Der ikke findes uendeligt mange strenge der er parvist skelnelige mht. L

Skelnelighed (fra 1. seminar)

- x og y er skelnelige mht. L hvis
  $\exists z \in \Sigma^* : (xz \in L \wedge yz \notin L) \vee (xz \notin L \wedge yz \in L)$
- Hvis to skelnelige strenge mht. L køres på en FA, der accepterer L, vil de ende i forskellige tilstande
- Intuition bag FA-minimering:
- hvis to strenge er uskelnelige mht. FA'ens sprog, er der ingen grund til at den skelner mellem dem!

Uskelnelighedsrelationen I_L

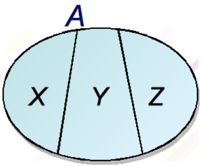
- Definition: Givet et sprog $L \subseteq \Sigma^*$, definer relationen I_L over Σ^* ved: $xI_Ly \Leftrightarrow x$ og y er uskelnelige mht. L

Relationer

- En (binær) relation R over en mængde A er en delmængde af $A \times A$
- Eksempler: $\leq$ er en relation over mængden af reelle tal I_L er en relation over Σ^*
- Notation: $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Ækvivalensrelationer

- R er en ækvivalensrelation hvis den er
- refleksiv $(\forall x : xRx)$
- symmetrisk $(\forall x, y : xRy \Rightarrow yRx)$
- transitiv $(\forall x, y, z : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
- En ækvivalensrelation over A definerer en partitionering af A



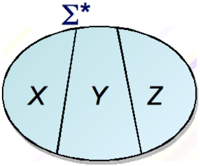
- Notation: $[x] = \{y | xRy\}$ kaldes ækvivalensklassen for x mht. R

Egenskaber ved I_L

- I_L er
- refleksiv $(\forall x : x I_L x)$
- symmetrisk $(\forall x, y : x I_L y \Rightarrow y I_L x)$
- transitiv $(\forall x, y, z : x I_L y \wedge y I_L z \Rightarrow x I_L z)$
- dvs. I_L er en ækvivalensrelation
- I_L partitionerer Σ^*
- $[x]$ er mængden af strenge, der er uskelnelige fra x mht. L

Quiz

$L = \{0,1\}^*\{10\}$
Beskriv ækvivalensklasserne for I_L



- Hint: der er 3 ækvivalensklasser...
- Hint: find en streng, der er skelnelig fra Λ ...
- Hint: find en streng, der er skelnelig fra både Λ og 1...

$$X : \{\Lambda, 0\} \cup \{0,1\}^*\{00\} = [\Lambda]$$

$$Y : \{0,1\}^*\{1\} = [1]$$

$$Z : \{0,1\}^*\{10\} = [10]$$

MyHill-Nerode-sætningen

- L er regulært $\Leftrightarrow$ I_L har endeligt mange ækvivalensklasser
- "$\Rightarrow$": (1. seminar) hvis I_L har uendeligt mange ækvivalensklasser, så er L ikke regulært
- "$\Leftarrow$": Bevis følger...

Konstruktion af en FA fra I_L

- Givet et sprog $L \subseteq \Sigma^*$, antag I_L har endeligt mange ækvivalensklasser.
- Vi kan definere en FA, hvor tilstandene er ækvivalensklasserne af I_L

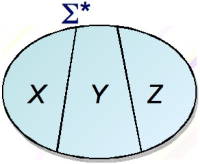
Eksempel

- Ækvivalensklasserne for I_L når $L = \{0,1\}^*\{10\}$:

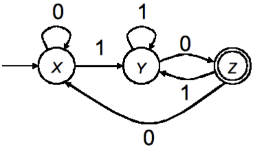
$$X : \{\Lambda, 0\} \cup \{0,1\}^*\{00\} = [\Lambda]$$

$$Y : \{0,1\}^*\{1\} = [1]$$

$$Z : \{0,1\}^*\{10\} = [10]$$



M_L:



Konstruktion af en FA fra I_L

- Definer en FA: $M_L = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ hvor
- $Q = Q_L$ hvor Q_L er ækvivalensklasserne af I_L
- $q_0 = [\Lambda]$
- $A = \{q \in Q | q \cap L \neq \emptyset\}$
- $\delta(q, a) = p$ hvis $q = [x]$ og $p = [xa]$ for en streng x (δ er veldefineret idet $xI_L y \Rightarrow xaI_L ya$)
- Påstand: $L(M_L) = L$

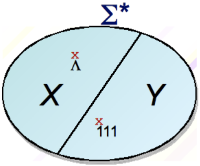
Quiz

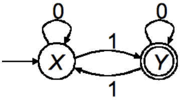
- Antag ækvivalensklasserne for I_L er

$$X = \{x \in \{0,1\}^* | \text{antal 1'er i } x \text{ er lige }\}$$

$$Y = \{x \in \{0,1\}^* | \text{antal 1'er i } x \text{ er ulige }\}$$

og $111 \in L$
Lav en FA, der accepterer L





Bevis for korrekthed af konstruktionen

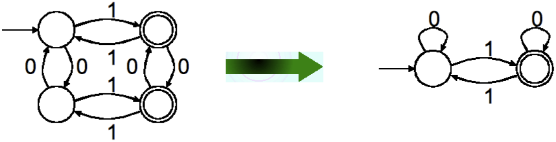
- Påstand: $L(ML) = L$
- Lemma: $\forall x, y \in \Sigma^* : \delta^*([x], y) = [xy]$
- Bevis: induktion i strukturen af y...
- $\delta^*(q_0, x) = \delta^*([\Lambda], x) = [x]$ (følger af lemmaet og def. af q_0)
- $x \in L(M_L) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, x) \in A \Leftrightarrow [x] \in A \Leftrightarrow [x] \cap L \neq \emptyset$
- $x \in L \Rightarrow [x] \cap L \neq \emptyset$ (da $x \in [x]$)
- $[x] \cap L \neq \emptyset \Rightarrow x \in L$ (bruger def. af I_L)
- dvs. $x \in L(M_L) \Leftrightarrow x \in L$

Øvelser

Martin Opg. 5.2 (p. 191) Find selv ækvivalensklasser

Martin Opg. 5.7 Konstruer en FA ud fra en beskrivelse af I_L

Minimering af automater



Man kan i visse tilfælde opnå en mindre FA ved at "slå tilstande sammen"... Kan vi gøre det systematisk? Vil den resulterende FA blive minimal?

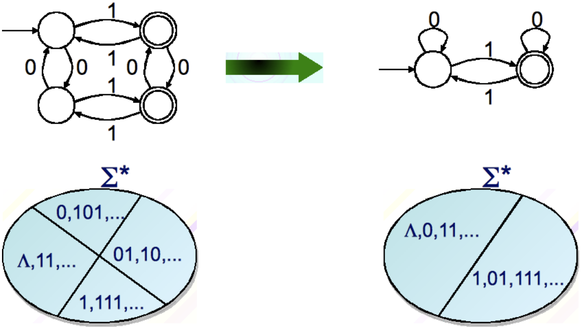
En algoritme til FA-minimering

Fra MyHill-Nerode-sætningen kan vi udlede en algoritme, der givet en vilkårlig FA $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$, finder en minimal FA M_1 hvor $L(M_1) = L(M)$

To partitioneringer af Σ^*

- 1: Ækvivalensklasserne af I_L (svarer til tilstandene i den minimale FA M_L)
- 2: En opdeling af alle $x \in \Sigma^*$ efter værdien af $\delta^*(q_0, x)$ (svarer til tilstandene i den givne FA M)
- Kan vi konstruere 1 ud fra 2?
- Definer for alle $q \in Q$: $L_q = \{x \in \Sigma^* | \delta^*(q_0, x) = q\}$

Eksempel



#2 #1

Fjern uopnåelige tilstande

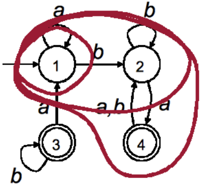
- Ækvivalensklasserne af I_L indeholder alle mindst 1 streng
- Det er muligt at $L_q = \emptyset$ for en eller flere $q \in Q$ (hvis q er uopnåelig fra q_0)
- Der findes en algoritme, der kan fjerne uopnåelige tilstande fra en FA uden at ændre sproget
- Vi kan derfor antage at $Lq \neq \emptyset$ for alle $q \in Q$

Opnåelige tilstande

- Givet en FA $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$
- Lad R være den mindste mængde, der opfylder:
- $q_0 \in R$
- $\forall q \in R, a \in \Sigma : \delta(q, a) \in R$
- R er mængden af opnåelige tilstande i M
- (minder om def. af $\Lambda - lukning$)

Fixpunktsalgoritme

- R kan findes med en fixpunktsalgoritme:



- $1 \in R$
- $\delta(1, b) = 2 \in R$
- $\delta(2, a) = 4 \in R$
- fixpunkt er nu nået
  dvs. de opnåelige tilstande er $R = \{1, 2, 4\}$

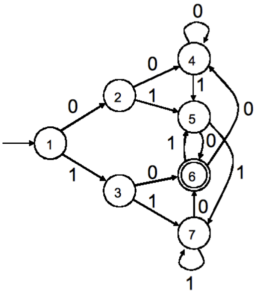
Forholdet mellem partition 1 og 2

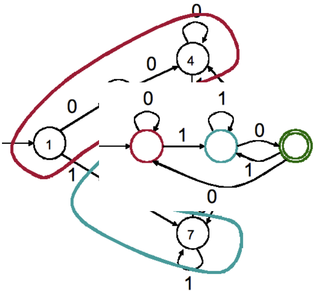
- Fra seminar 1: $\delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y) \Rightarrow x I_L y$
- Dvs. enhver L_q–mængde er helt indeholdt i én I_L-ækvivalensklasse
- Enhver ækvivalensklasse af I_L er derfor foreningen af en eller flere af L_q–mængderne
- Da $L_q \neq \emptyset$ er hver af disse foreninger unik
- Definition: $p \equiv q \Leftrightarrow L_p$ og L_q er delmængder af samme I_L-ækvivalensklasse
- Dvs. hvis $p \equiv q$, så svarer p og q til samme tilstand i den minimale automat!

Konstruktion af $\equiv$ (minimeringsalgoritmen)

- Lad S være den mindste mængde, der opfylder:
- a) $(p \in A \wedge q \notin A) \vee (p \notin A \wedge q \in A) \Rightarrow (p, q) \in S$
- b) $(\exists a \in \Sigma : (\delta(p, a), \delta(q, a)) \in S) \Rightarrow (p, q) \in S$
- Påstand: $p \equiv q$ hvis og kun hvis $(p, q) \in S$
  S kan beregnes med en fixpunktsalgoritme (i stil med opnåelige tilstande og Λ-lukning tidligere...)

Eksempel





2						
3	X	X				
4			X			
5	X	X		X		
6	X	X	X	X	X	
7	X	X		X		X
	1	2	3	4	5	6

- Find alle par af tilstande
- Fjern uopnåelige tilstande (ingen i denne FA)
- Marker alle par som med/ikke med i A
- Find $\equiv$ ved at udfylde en tabel for S (fixpunktsberegning)
- Kombiner tilstande, der svarer til umærkede par

Bevis for korrekthed af minimeringsalgoritmen

- Antag $p, q \in Q, x \in L_p, y \in L_q$
  (dvs. $\delta^*(q_0, x) = p$ og $\delta^*(q_0, y) = q$)
- Lemma: Følgende udsagn er ækvivalente:

$$p \equiv q$$

$$x I_L y$$

$$\forall z \in \Sigma^* : \delta^*(p, z) \in A \Leftrightarrow \delta^*(q, z) \in A$$

Bevis for korrekthed, fortsat

- Påstand: $p \equiv q$ hvis og kun hvis $(p, q) \notin S$
- Iflg. lemmaet:
  $p \not\equiv q \Leftrightarrow (\exists z \in \Sigma^* : (\delta^*(p, z) \in A \wedge \delta^*(q, z) \notin A) \vee (\delta^*(p, z) \notin A \wedge \delta^*(q, z) \in A))$
- $p \not\equiv q \Rightarrow (p, q) \in S$ (brug lemmaet, lav induktion i z)
- $(p, q) \in S \Rightarrow p \not\equiv q$ (brug lemmaet, lav induktion i S)

Øvelse

Martin 5.16 (a+e) (p.192)

Plan

Regaut pakken

- Udleverede programdele:
- `NFA.java` og `NFALambda.java`: repræsentation af NFA'er og NFA-Λ'er
- `RegExp.java`: repræsentation af regulære udtryk
- parser for regulære udtryk
- de trivielle oversættelser: $FA \longrightarrow NFA$, $NFA \longrightarrow NFA - \Lambda$

NFA.java

- Repræsentation som `FA.java`, med én undtagelse:
- `transitions` er en funktion fra `StateSymbolPair` til en mængde af `State` objekter

NFALambda.java

- Repræsentation som NFA.java, med én undtagelse:
- Λ repræsenteres som `\uFFFF` (= `NFALambda.LAMBDA`)

RegExp.java

- `RegExp(String, Alphabet)` – parser et regulært udtryk
- `toString()` – til udskrift af et parsed regulært udtryk
- `toNFALambda()` – konstruktionen fra Kleene's sætning del 1
- `simplify()` – simplificerer et parsed regulært udtryk, nyttig efter FA.toRegExp() (Kleene's sætning del 2)

Minimering i dRegAut java-pakken

- "pseudo-kode":
  uformel mellemting mellem de matematiske definitioner og Java-koden

FA.minimize()

```
FA minimize() {
  phase 1: Remove unreachable states
  phase 2a: Divide into accept/reject states
  phase 2b: Iteration
  phase 3: Build and return resulting minimal automaton n
}
```

FA.findReachableStates(), version 1

```
Set findReachableStates() {
  R = {q0}
  done = false
  while not done do
    done = true
    for each q ∈ R do
      for each a ∈ Σ do
        p = δ(q, a)
        if p ∉ R then
          add p to R
          done = false
  return R
}
```

FA.findReachableStates(), version 2

Vi kan holde øje med hvilke tilstande der ikke er "færdigbesøgt" for at undgå at besøge hver tilstand flere gange

Set findReachableStates() {
  $R = \{\}$
  $pending = \{q_0\}$
  while $pending \neq \emptyset$ do
    pick and remove an element q from $pending$
    add q to R
    for each $c \in \Sigma$ do
      $p = \delta(q, c)$
      if $p \notin R$ then add p to $pending$
  return R
}

FA.minimize phase 2a

define some ordering on the states Q
declare marks: a set of pairs (p, q) where $p, q \in Q$ and $p < q$
$marks = \emptyset$
for each pair $p, q \in Q$ where $p < q$ do
  if not $(p \in A \Leftrightarrow q \in A)$ then add (p, q) to marks
Mange muligheder for Java-representation af marks...

FA.minimize() phase 2b

done = *false*
while not done do
  done = true
  for each pair $p, q \in Q$ where $p < q$ do
    if $(p, q) \notin$ marks then
      for each $a \in \Sigma$ do
        $r = \delta(p, a)$
        $s = \delta(q, a)$
        if $r > s$ then swap r and s
        if $(r, s) \in$ *marks* then
          add (p, q) to marks
          done = *false*

Kunne gøres smartere med en pending worklist.

FA.minimize(), phase 3

FA n = new FA with same alphabet as f but with no states or transitions yet
initialize empty maps old2new: $f.Q \to n.Q$ and new2old: $n.Q \to f.Q$
for each $r \in f.Q$ in order do
  if $(s, r) \in marks$ for every $s < r$ then
    add a new state p to $n.Q$
    add $old2new(r) = p$ and $new2old(p) = r$
    if $r \in f.A$ then add p to $n.A$
  else
    add $old2new(r) = old2new(s)$
  if $r = f.q_0$ then set $n.q_0 = old2new(r)$
  for each state $p \in n$ do
    add $n.\delta(p, c) = old2new(f.\delta(new2old(p), c))$ for each $c \in \Sigma$

Eksempel

```
Alphabet a = new Alphabet('0', '1');
RegExp r = new RegExp("0+(1*+01*+10*+001*01)*0*", a);

NFALambda n1 = r.toNFALambda();
NFA n2 = n1.removeLambdas();
FA n3 = n2.determinize();

System.out.println("Før: "+n3.getNumberOfStates());
FA n4 = n3.minimize();
System.out.println("Efter: "+n4.getNumberOfStates());
```

Før: 13
Efter: 1

Resume

- MyHill-Nerode-sætningen:
- endnu en karakteristik af de regulære sprog
- en algoritme til FA minimering
- en algoritme til at fjerne uopnåelige tilstande i en FA