Gennemgang af et induktionsbevis for de regulære sprogs lukkethed under reverse

Sigurd Meldgaard

24. Januar 2009

Bemærk at i dette dokument er alle detaljer penslet helt ud, så selvom det ser langt ud, så skulle der kun ske een ting per skridt.

1 Definitioner

1.1 Reverse funktionen

Reverse af en streng er defineret rekursivt i strukturen af strengen:

$$rev(\Lambda) = \Lambda$$

$$rev(x \cdot a) = a \cdot rev(x), \text{ hvor } x \in \Sigma^*, a \in Sigma$$

Reverse af et sprog er defineret rekursivt som reverse af hvert enkelt element:

$$rev_L(L) = \{x | rev_s(x) \in L\}$$

2 Hvad skal vi bevise

Vi vil bevise at *de regulære sprog er lukkede under rev_L*, d.v.s. hvis L er regulært, så er $rev_L(x)$ også regulært.

Vi gør det ved at lave et konstruktivt bevis, d.v.s. at vi viser hvordan man kan konstruere et regulært udtryk for $rev_L(L)$ hvis man har et regulært udtryk for L.

Vi laver beviset som et induktionsbevis. D.v.s. vi viser at det gælder for alle de måder som et regulært udtryk kan være skrevet på.

3 Konstruktion

Vi definerer en funktion rev_r på regulære udtryk:

3.1 Basistilfældet

$$rev_r(\emptyset) = \emptyset$$

$$rev_r(\Lambda) = \Lambda$$

$$rev_r(a) = a, a \in \Sigma$$

3.2 Det rekursive tilfælde

$$rev_r(r_1 + r_2) = rev_r(r_1) + rev_r(r_2)$$

$$rev_r(r_1 \cdot r_2) = rev_r(r_2) \cdot rev_r(r_1)$$

$$rev_r(r_1^*) = rev_r(r_1)^*$$

4 Korrekthed

Nu har vi vist hvordan vi vil konstruere $rev_r(r)$ for alle regulære udtryk, så skal vi bevise korrekthed, d.v.s. vise at $L(rev_r(r)) = rev_L(L(r))$. Dette viser vi i alle 6 tilfælde.

5 Basistilfældet

De tre basistilfælde er nærmest trivielle:

- $r = \emptyset$

  $$rev_r(\emptyset) = \emptyset$$

  Dette er korrekt fordi

  $$L(rev_r(r)) = L(rev_r(\emptyset)) = L(\emptyset) = rev_L(\emptyset) = rev_L(L(r))$$

  Her benytter vi at hvis vi tager rev på alle elementer i den tomme mængde har vi stadig den tomme mængde.

- $r = \Lambda$

  $$rev(\Lambda) = \Lambda$$

  Dette er korrekt fordi

  $$L(rev_r(r)) = L(rev_r(\Lambda)) = L(\Lambda) = \{\Lambda\} = rev_L(\{\Lambda\}) = rev_L(L(r))$$

  Her bruger vi definitionen på $rev(\Lambda) = \Lambda$.

- $r = a$

$$rev(a) = a, a \in \Sigma$$

Dette er korrekt fordi (her er det skrevet helt ud i alle detaljer:

$$L(rev_r(r)) = L(rev_r(a)) = L(a) = \{a \cdot \Lambda\}$$

$$= \{a \cdot rev(\Lambda)\} = \{rev(\Lambda \cdot a)\} = rev_L(\{a\}) = rev_L(L(r))$$

Her folder vi definitionen på $rev()$ ud en enkelt gang.

Før vi kan bevise induktionsskridtet får vi brug for to lemmaer (små underbeviser).

5.1 Lemma 1

Lemmaet siger:

$$\forall x, y \in \Sigma^* : rev(xy) = rev(y)rev(x)$$

Vi beviser dette ved induktion i strukturen af y

5.1.1 Basis: $y = \Lambda$

Vi bruger definitionen af rev.

$$rev(xy) = rev(x\Lambda) = rev(x) = \Lambda rev(x) = rev(\Lambda)rev(x) = rev(y)rev(x)$$

5.1.2 Induktionsskridt: $y = y' \cdot a$ hvor $y' \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

Vores induktionshypotese siger: $\forall x : rev(xy') = rev(y')rev(y)$

Vi bruger igen definitionen af rev:

$$rev(xy) = rev(xy'a) = a \cdot rev(xy')$$

Her kan vi bruge induktionshypotesen:

$$... = a \cdot rev(y')rev(x) = rev(y'a)rev(x) = rev(y)rev(x)$$

5.2 Lemma 2

Lemmaet siger:

$$\forall i \geq 0 : rev_L(L^i) = rev_L(L)^i$$

Vi bruger induktion i i:

5.2.1 Basis: $i = 0$

Alting følger her helt simpelt ved at "pakke definitionerne ud".

$$rev_L(L^i) = rev_L(L^0) = rev_L(\Lambda) = \{rev(\Lambda)\} = \{\Lambda\} = rev_L(L)^0$$

I det sidste skridt skal man huske at alle sprog i nul'te er sproget med den tomme streng.

5.2.2 Induktionsskridt: $i = i' + 1$

Induktionshypotesen: $rev_L(L^{i'}) = rev_L(L)^{i'}$. Vi kan genbruge lemma 1 her:

$$rev_L(L^i) = rev_L(L \cdot L^{i'}) = rev(L^{i'}) \cdot rev(L) = rev(L)^{i'} rev(L) = rev(L)^{i'+1} = rev(L^i)$$

5.3 Induktionsskridtet

Så er vi tilbage ved hovedbeviset. Vi har tre tilfælde, og induktionshypotesen er hver gang at: $L(rev_r(r_1)) = rev_L(L(r_1))$ og tilsvarende for r_2

- $r = r_1 + r_2$

  $$rev_r(r_1 + r_2) = rev_r(r_1) + rev_r(r_2)$$

  Dette tilfælde er relativt simpelt.

  $$L(rev_r(r)) = L(rev_r(r_1 + r_2)) = L(rev_r(r_1) + rev_r(r_2)) = L(rev_r(r_1)) \cup L(rev_r(r2))$$

  Her bruger vi induktionshypotesen:

  $$\ldots = rev_L(L(r_1)) \cup rev_L(L(r_2))$$

  rev_L er en elementvis operation, så vi kan flytte $\cup$ indenfor parantesen:

  $$\ldots = rev_L(L(r_1) \cup L(r_2)) = rev_L(L(r_1 + r_2)) = rev_L(L(r))$$

- $r = r_1 \cdot r_2$

  $$rev_r(r_1 \cdot r_2) = rev_r(r_2) \cdot rev_r(r_1)$$

  $$L(rev_r(r)) = L(rev_r(r_2) \cdot rev_r(r_1)) = L(rev_r(r_2)) \cdot L(rev_r(r_1))$$

  induktionshypotese:

  $$\ldots = rev_L(L(r_2)) \cdot rev_L(L(r_1)) = \{x \cdot y | xy \in rev_L(L(r_2)) \cdot rev_L(L(r_1))\}$$

  $$= \{rev(x) \cdot rev(y) | xy \in L(r_2)L(r_1)\}$$

  og her kan vi bruge lemma 1:

  $$\ldots = \{rev(y \cdot x) | x \in L(r_2), y \in L(r_1)\} = rev_L(L(r_2)L(r_1)) = rev_L(L(r))$$

- $r = r_1^*$

  $$rev_r(r_1^*) = rev_r(r_1)^*$$

  Dette tilfælde overlades til læseren! Husk at bruge definitionen for $L(r^*) = \bigcup_{i=0}^{\infty} L(r)^i$ og så lemma 2.