Oppgave 1A.6: Forenklet simulasjon av rakettmotor

Sigurd Sørlie Rustad
Universitetet i Oslo[*]
(Dated: 3. september 2019)

Vi har simulert en forenklet rakettmotor, til en rakett som skal forlate en fiktiv planet. Simulasjonen består av hydrogengass (H_2) med en temperatur på 10 000K. Gassen er i en kvadratisk boks med sidelengde $L = 10^{-6}$ m, og et kvadratisk hull der gassen kan forlate. Det er rakettmotoren som er fokuset så vi ser bort ifra faktorer som luftmotstand, gravitasjon og avtagende vekt.

I. INTRODUKSJON

Vi ønsker å finne ut hvordan vi kan sende en rakett på 1000kg vekk fra en fiktiv planet, all informasjon om planeten er hentet fra ast2000tools, informasjon om modulen ligger her: [2]. For å rømme fra planeten er vi nødt til å finne en rakettmotor modell som fungerer. Vanligvis vil det oppstå en rekke kompliserte prosesser som luftmotstand, gravitasjon, vekttap, osv., men siden vi kun er ute etter en fungerende modell, velger vi å se bort ifra dette. Det vi fokusere på er gassen i boksen og hvordan den akselererer raketten. Modellen vi bruker er en hydrogengass (H_2) i en boks. Boksen har ett hull i en av sidene hvor vi lar partiklene forlate, og ser deretter hvordan dette akselererer raketten. For at vi skal klare å kjøre simulasjonen ser vi kun på en liten boks med 10^5 partikler. I tillegg ser vi på en ideell gass og partikler som ikke påvirker hverandre. Det betyr at vi ser på punktpartikler der alle støt er elastiske (energi er bevart), og det oppstår ingen krefter eller partikkelkolisjoner mellom partiklene.

II. METODE

Boksen vi simulerer er et kvadrat med sidelengde $L = 10^{-6}$m. Først plasserer vi $N = 10^5$ partikler i boksen med uniform sannsynlighet for hvor de blir plassert. Deretter angir vi en hastighetskomponent i x-, y-, z-retning som følger normalfordelingen gitt ved:

$$P(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Der v er hastighetskomponenten, gjennomsnittet er $\mu = 0$ og standard avvik er $\sigma = \sqrt{kTm}$ (se side 6 og 2 i [1]). Her er $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ m^{2}kg/(s^{2}K) Boltmanns konstanten, $T = 10^4$K er temperaturen og m er massen til et hydrogenmolekyl: $m_{H2} = 3.35 \cdot 10^{-27}$kg.

For å teste verdiene ser vi på om den gjennomsnittlige kinetiske energien og farten stemmer med de forventede verdiene. Forventet gjennomsnittlig kinetisk energi er gitt ved $K = (3/2)kT$ (se oppgave 1A.6 i [1]) og gjennomsnittlig fart er gitt ved:

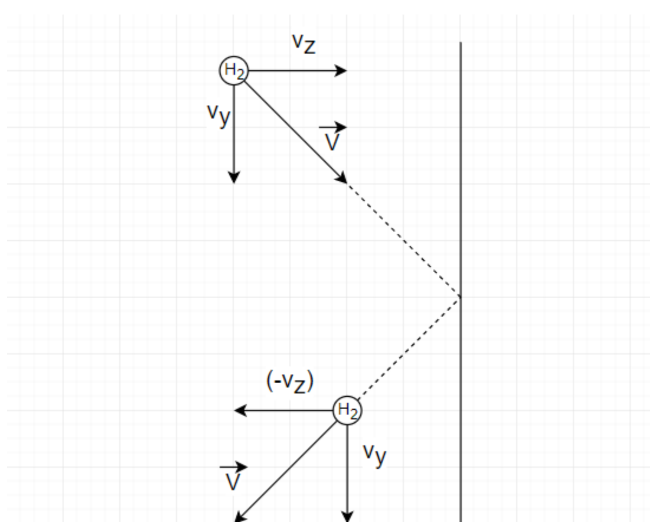
$$\langle v \rangle = \int_0^\infty vP(v)dv = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$$

Der m er m_{H2} (se oppgave 1A.5 i [1]). Vi finner den faktiske gjennomsnittlige kinetiske energen ved å summere opp den kinetiske energien til hver enkel partikkel, gitt ved $K = (1/2)mv^2$, og deler på antall partikler. Det samme gjelder gjennomsnittlig fart, vi summerer opp farten til alle partiklene og deler på antall partikler.

For å simulere gassen velger vi tidsintervallet $\Delta t = 10^{-12}$s med 1000 tidssteg. Hastigheten er konstant før partikkelen treffer veggen, og endring i posisojn er hastighet ganget med tid. Plusser vi forrige posisjon med endring i posisjon får vi den oppdaterte posisjonen:

$$\vec{r}_{i+1} = \vec{v}\Delta t + \vec{r}_i$$

Der $\vec{r}_{i+1}$ er ny posisjon og $\vec{r}_i$ er forrige posisjon. Det eneste som mangler nå er å simulere kollisjonene med veggen.



Figur 1. Elastisk kollisjon med veggen: $\vec{v}$ er hastighetsvektoren, v_x og v_y er hastighet i x- og y-retning

* sigurdsr@gmail.com

Siden vi ser på en ideell gass er alle kollisjonenene elastiske, så det eneste som endrer seg er hastighetkomponenten som står normalt på veggen (se figur 1), og den blir rettet i motsatt retning etter kollisjonen.

For å se om simulasjonen er realistisk kan vi se på trykket i boksen. Forventet trykk er gitt ved $P = nkT$ (se side 10 i [1]) der n er antall partikler (N) per volum (L^3). For å regne ut faktisk trykk er vi først nødt til å regne ut kraften som partiklene utgjør på veggen. Newtons andre lov sier at kraft er endring i bevegelsesmengde delt på endring i tid:

$$f = \frac{dp}{dt} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Her er f kraften, p bevegelsesmengde og t tid (se side 8 i [1]). I vårt tilfelle ser vi på den totale endringen i bevegelsesmengden til alle partiklene i tidsrommet 10^{-9} sekunder, som burde gi et nøyaktisk uttrykk for kraft, og deretter regne ut trykk ved hjelp av formelen $P = F/A$ hvor P er trykk, F er kraft (f) og A er arealet til boksen ($6L^2$) (se side 8 i [1]).

Etter at alle testene er gjennomført er det eneste som gjenstår å simulere raketten. Dette gjør vi ved å lage et kvadratisk hull i en av sidene til boksen, med sidelengde $L/2$. I vår simulasjon beregner vi med konstant trykk og temperatur, det betyr at verken kinetisk energi eller antall partikler endrer seg. På grunn av dette burde fordelingen av hastigheter være tilnærmet konstant, så i stedet for å la partiklene rømme og lage nye partikler, velger vi å la de sprette inn i boksen igjen. I tillegg velger vi å ikke se på et spesifikt hull i boksen, men heller på netto bevegelsesmengde fluks (hvor mye bevegelsesmengde som strømmer ut av boksen) til boksen, og dele det på 24 (siden hullet er 1/24 av arealet til boksen). Her er det viktig å merke seg at vi ikke lar partiklene rømme, vi måler kun hvor mye bevegelsesmengde som treffer veggen og henter den komponenten som står normalt på veggen. Årsaken til det er siden de andre komponentene vil i gjennomsnitt utligne hverander, men også fordi den eneste komponenten som gjør bidrag til bevegelse vil være komponenten rettet vekk fra boksen. Grunnen til at vi gjør det på denne måten er fordi koden blir raskere, men også siden dette er en av mange bokser, og da ønsker vi ikke de spesifikke tilfellene, vi ønsker hvor mange partikler som rømmer ut av boksen i gjennomsnitt. Hvis vi ser på et spesifikt hull vil vi kunne få avvik og dermed ende opp med alt for mange/få bokser.

Når vi kjenner hullet sin gjennomsnittlig bevegelsesmengde fluks, er vi klare til å regne på motoren. Vi kan bruke bevaring av bevegelsesmengde til å finne Δv til raketten:

$$\Delta p_{rocket} = \Delta v m = \Delta p \implies \Delta v = \frac{\Delta p}{m}$$

Der Δp_{rocket} er endringen i bevegelsesmengden til raketten, Δv er bevegelsesmengde fluksen til hullet og $m = 1000$ kg er massen til raketten. Siden vi ser bort ifra gravitasjon er endringen konstant og vi kan si at akselerasjon a_{boks} er lik Δv, i tillegg må vi gange med 10^9 for å få enhet m/s^2, siden vi ser på tidssteg 10^{-9}.

Den fiktive planeten har en masse på $m_p = 5,41 \cdot 10^{24}$kg, rundt 90% av massen jorda. Rømningshastigheten v_{esc} til planeten finner vi gjennom formelen:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Der r er avstanden fra sentrum til planeten, M er massen m_p og $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg/s^2) er gravitasjonskonstanten (se side 12 i [1]). Avstanden fra sentrum til planeten varierer, men siden akselerasjonen til raketten er konstant er dette lett å løse analytisk, formelen for fart er gitt ved integralet av akselerasjon med hensyn på tid: $v(t) = at$. Utrykket for strekning er gitt ved integralet av fart med hensyn på tid: $r(t) = r_0 + 0.5at^2$, der r_0 er radiusen til planeten R = 6252887m. Vi bestemmer oss for at vi skal nå farten innen 20 minutter (1200 sekunder). Vi får uttrykket:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R + 0.5at^2}} = at \implies Rt^2a^2 + \frac{1}{2}t^4a^3 - 2GM = 0 \quad (1)$$

Total akselerasjonen til raketten er antall bokser ganget med hvor mye en boks akselererer raketten, vi får dermed at $a = a_{boks}x$ der x er antall bokser. Setter vi dette inn i ligning 1 får vi et trdjegradspolynom som vi kan løse og få antall bokser. Dette kan vi igjen bruke til å finne ut hvor mye drivstoff vi trenger i kg ved å telle antall partikler som rømmer mens raketten akselererer, og gange det med massen til et hydrogenmolekyl.

Vi kan bruke bevaring av bevegelsesmengde for å tolke resultatet. Siden hastighetkomponentene v_x, v_y og v_z ble funnet gjennom samme sannsynlighetskurve burde $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle$. Vi kan bruke dette til å finne et godt uttrykk for gjennomsnittlig hastighet i en av retningene:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3v_x^2 \implies v_x = \frac{v}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Dette og bevaring av bevegelsesmengde gjør at vi kommer frem til hvor mye drivstoff vi bør forvente å bruke:

$$\frac{\langle v \rangle}{\sqrt{3}} m_{fuel} = v_{esc} m \implies m_{fuel} = \frac{\sqrt{3} v_{esc} m}{\langle v \rangle} \quad (3)$$

Der m_{fuel} er forventet drivstoff brukt, $\langle v \rangle$ er gjennomsnittlig fart til en partikkel, m er massen til romskipet og v_{esc} er rømningshastigheten til raketten.

III. RESULTATER

Vi fant at gjennomsnittlig kinetisk energi i boksen var $K_{ac} = 2.069 \cdot 10^{-19}$ J, sammenlignet med forventet kinetisk energi $K = 2.071 \cdot 10^{-19}$ J gir et forhold på $K/K_{ac} \approx 1.001$. Den faktiske gjennomsnittlige farten var $v_{ac} = 10245.9$ m/s og forventet $v = 10249.7$ m/s, dette gir forholdet $v/v_{ac} \approx 1.0003$. Faktisk trykk ble $P_{ac} = 13.68$ kPa og forventet trykk $P = 13.81$ kPa som gir forholdet $P/P_{ac} \approx 1.009$. Utregningen av hvor mye drivstoff som brukes ga ca. 1003.9kg og at vi trengte omtrent $3.9 \cdot 10^{12}$ bokser, men det analytiske uttrykket tilsier derimot at vi egentlig burde bruke 1364.2 kg, altså 36% mer.

IV. DISKUSJON

Vi ser at de forventede verdiene samsvarer godt med de simulerte verdiene. Det å bruke ideell gass bryter ned under høyt trykk eller høye temperaturer, men i vårt tilfelle når vi ikke disse nivåene. Det å se bort ifra kreftene og kollisjonene mellom partiklene ser derfor også ut til å være en akseptabel simplifikasjon. Hvis vi faktisk hadde telt antall partikler som rømte ut av hullet, ville det tilsynelatende gitt mer mening å plassere nye partikler i boksen etter at de rømmer. Etter at partiklene treffer hullet og spretter tilbake igjen i boksen vil partikklene sin hastighet være rettet vekk fra hullet. En partikkel som plasseres i boksen på nytt vil derimot ha en mulighet for at hastigheten er rettet mot hullet, og burde derfor forlate boksen raskere. Hvorvidt dette påvirker raketten er vanskelig å si, men kan være viktig å merke seg hvis man gjør det på den måten. Grunnen til at dette ikke burde påvirke vår simulasjon er på grunn av at vi ser på fluksen ut av hele boksen.

Det største avviket er drivstoffet vi brukte i forhold til hvor mye vi forventet å bruke. Vi tror ikke det er en feil i koden, siden vi brukte samme verdiene for både endring i bevegelsesmengde og trykket i boksen, og trykket var som forventet. Det kan hende at vi simulerer med for få partikler slik at antagelsen som fører til ligning 2 ikke stemmer, men vi tror det heller skyldes at gjennomsnittlig hastighet til partikler som treffer veggen, er høyere enn gjennomsnittlig hastighet i boksen. Tankegangen her er at partikler med høy fart vil kollidere oftere med veggen enn en partikkel med lav fart, og derfor registreres oftere. Det er lettere å forestille seg hvis man har to partikler i en boks, den ene har høy hastighet og den andre lav. Den med høy hastighet vil naturligvis kollidere oftere enn den med lav hastighet og det vil tilsynelatende være flere partikler med høy hastighet fra veggen sitt perspektiv, når det i realiteten er like mange med lav og høy fart. Følgelig vil ligningen 3 ikke stemme.

V. KONKLUSJON

Simulasjonen stemmer godt med mange av de forventede verdiene, og det virker som at vi har funnet en god modell for en rakettmotor. Det eneste avviket er forventet bruk av drivstoff. Gitt at simulasjonen er korrekt trenger vi betydelig mindre drivstoff enn hva vi forventet. Vi har ingen konklusjon på hvorfor dette er tilfellet, men forklaringen gitt i diskusjonsdelen virker rimelig og burde undersøkes nærmere.

ACKNOWLEDGMENTS

Takk til B. Hjemgaard for nyttig diskusjon under oppgaven.

[1] Hansen, F. K., 2017, Forelesningsnotat 1A i kurset AST2000
[2] https://lars-frogner.github.io/ast2000tools/html/index.html