

Oppgave 1C.5: Analyse av solsystem

Kandidatnummer: 15851

Universitetet i Oslo*

(Dated: 30. september 2019)

I denne rapporten har vi simulert planet- og stjernebanen til solsystemet vårt, hentet fra [4]. Dette gjorde vi for å kunne forstå bedre hvordan andre sivilisasjoner vil observere vårt solsystem. Etter vi simulerte solsystemet, kunne vi justere for posisjonen og hastigheten til den hypotetiske observatøren, legge til normalfordelt støy, og analysere hva observatøren ville sett. Vi valgte normalfordelt støy med gjennomsnitt lik null, og standardavvik $v_{r*}/5$, der v_{r*} er maksimal radiell hastighet til stjernen. Med verdiene vi valgte, fant vi at det var vanskelig å detektere eksistensen av en planet, allerede når inklinasjonen var $\pi/16$, og umulig når inklinasjonen var null.

I. INTRODUKSJON

For å finne planeter i andre solsystem ser vi på hvordan stjernen deres beveger på seg. Det kan hende at det er andre sivilisasjoner der ute som bruker samme teknikker som oss, og det er derfor interessant å kunne finne ut om andre kan observere at vårt solsystem har planeter.

Data om solsystemet vårt er hentet fra [4], men en oversiktlig tabell med relevant informasjon står bakerst. Vi simulerer solsystemet vårt med de største planetene og stjernen vår, altså planet 3, 4 og 6, og stjerne 1. Vi bruker Euler-Cromer metoden til å simulere gravitasjonskraften mellom alle objektene, og finner posisjonen og hastigheten til alle planetene og stjernen.

Etter vi har simulert planetbanene beregner vi hva en observatør langt unna, og med en driftsastighet vekk fra oss, vil observere. Deretter justerer vi, og undersøker for forskjellige inklinasjonsvinkler. Gitt at de ikke har perfekte observasjonsverktøy, vil de også få støy i dataen sin. Vi legger derfor til støy, og beregner i denne rapporten at støyen er normalfordelt.

II. METODE

Først og fremst må vi simulere planet- og stjernebanene. Siden det er de mest massive planetene som påvirker stjernen mest, velger vi kun å se på de tre mest massive planetene. Det gir planet; 3, 4 og 6. For å gjøre dette bruker vi Newtons gravitasjonslov, Newtons 2. lov, og Euler-Cromer metoden. Grunnen til at vi bruker Euler-Cromer metoden er fordi den gir presise nok resultater for våre formål. Overfladisk beskrivelse av Euler-Cromer metoden finner man i teoridelen i [5], med en nærmere beskrivelse i [2]. For å kunne bruke Euler-Cromer må vi sette opp differensiallikninger på formen:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = s(x) \quad (1)$$

Dette oppnår vi gjennom Newtons 2. lov og Newtons gravitasjonslov. Siden vi ser bort i fra ytre krefter, virker det

kun indre krefter. Newtons gravitasjonslov mellom to legemer er på formen:

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (2)$$

Der G er gravitasjonskonstanten, m_1 massen til det ene objektet, m_2 massen til det andre objektet, r er avstanden mellom dem, og \hat{r} er enhetsvektoren med retning fra det ene til det andre objektet. Hvis vi anvender dette og Newtons 2. lov på f.eks. stjernen vil vi få følgende likning:

$$\Sigma \vec{F}_{star} = m_{star} \vec{a} = G m_{star} \left(\frac{m_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{m_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \frac{m_3}{r_3^2} \hat{r}_3 \right)$$

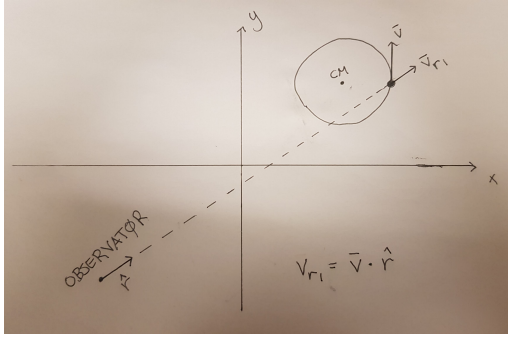
som gir :

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = G \left(\frac{m_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{m_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \frac{m_3}{r_3^2} \hat{r}_3 \right)$$

Her er m_1 , m_2 og m_3 massen til planetene, r_1 , r_2 og r_3 avstanden mellom hver planet og stjernen, og \hat{r}_1 , \hat{r}_2 og \hat{r}_3 enhetsvektorene med retning fra stjernen til planetene. Bruker samme resonnerementet for å finne akselerasjonen til planetene. Nå har vi en likning på samme form som likning 1, og vi kan derfor anvende Euler-Cromer metoden til å regne ut planetbanene. For å velge Δt og antall tidssteg tar vi utgangspunkt i hva vi brukte i [5], siden det ga nøyaktige resultater. Vi brukte $\Delta t = 0.01$ år og $n = 1500$ tidssteg i [5]. Vi bruker samme Δt , men ønsker å kjøre over litt lenger tid, så vi bruker $n = 2500$ tidssteg. Etter vi har brukt Euler-Cromer kan vi plote posisjonene, for å se at det ser rimelig ut.

Når vi har funnet hastigheten til stjernen, kan vi begynne å analysere hvordan dette hadde sett ut hvis vi var en sivilisasjon langt unna. For å gjøre dette lønner det seg først å anta inklinasjon lik 90 grader. Inklinasjonen forteller oss hvor skrå planetbanene er, sett fra observatøren, se teoridelen fra [6] for nærmere forklaring.

* astrologi@gmail.com

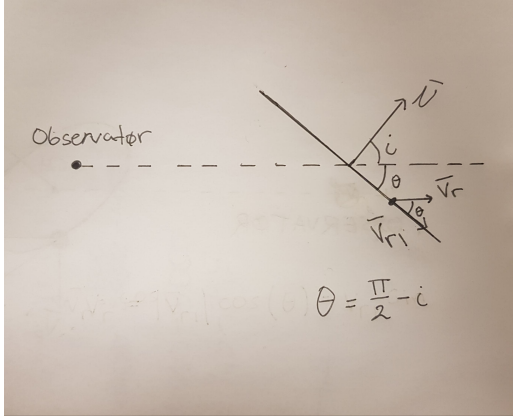


Figur 1. Bane med observatør: Figuren viser en observatør som observerer ellipsebanen til et legeme, med 90 grader inklinasjon. Legemet går i bane rundt massesenteret (CM), med en hastighetsvektor \vec{v} . Vektoren \vec{v}_{r1} er den radielle hastigheten observatøren observerer, og \hat{r} er enhetsvektor i retning fra observatør til stjernen.

Figuren over viser hvordan vi kan finne den radielle hastigheten en observatør observerer, når inklinasjonen er 90 grader. Siden avstandene er store, og banen til stjernen er liten, regner vi med at \hat{r} er konstant. Det følger at v_{r1} er prosjeksjonen \vec{v} har ned på \hat{r} , dette gir formelen:

$$v_{r1} = \vec{v} \cdot \hat{r} \quad (3)$$

Etter vi har funnet den radielle hastigheten, kan vi begynne å legge til inklinasjon.



Figur 2. Observerte hastighet med inklinasjon: Dette er ellipsebanen observert fra siden. Vektoren \vec{N} er normalvektoren til planet ellipsen omslutter, i er inklinasjonsvinkelen, θ er vinkelen mellom ellipsebanen og den stiplede synslinjen, \vec{v}_r er den nye hastigheten observatøren observerer, og \vec{v}_{r1} er hastigheten fra figur 1, med retning på grunn av inklinasjon.

Vi observerer at når vi får en inklinasjon, får v_{r1} en retning og blir derfor en vektor. Trigonometri gir at vinkelen mellom \vec{v}_{r1} og \vec{v}_r er lik θ , og det følger derfor at $v_r = v_{r1} \cos(\theta)$. Merk at når vi skriver uten vektor notasjon, er det fordi vi kun bryr oss om lengden og om den har positiv eller negativ retning, der positiv retning er retningen fra observatør, mot stjernen. Siden normalvektoren står normalt på ellipsen, vil θ være lik differansen

av $\pi/2$ og i , som gir oss formelen:

$$v_r = v_{r1} \cos(\theta) = v_{r1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = v_{r1} \sin(i) \quad (4)$$

Som vi ser over kan vi velge hvilken som helst posisjon og driftshastighet. For å gjøre det enkelt velger vi posisjon langs negativ y-akse. På grunn av store avstander vil vi ikke observere noe drift i x-retning, og siden initialposisjonen er i origo, vil vår \hat{r} som vi prikker med hastighetskomponenten til stjernen, være enhetsvektoren i positiv y-retning, \hat{e}_y . Likning 3 gir derfor y-komponenten til hastighetsvektoren til stjernen. Vi valgte driftshastighet på -10 AU/år , i forhold til origo. For å finne driftshastigheten til systemet sett fra observatøren må vi bare pluss på driftshastigheten. Når vi har funnet v_{r1} kan vi legge til inklinasjon, ved å bruke likning 4. Vi valgte forskjellig inklinasjonsvinklene, $i_1 = \pi/2$, $i_2 = \pi/4$, $i_3 = \pi/16$, og $i_4 = 0$, for å kunne sammenligne.

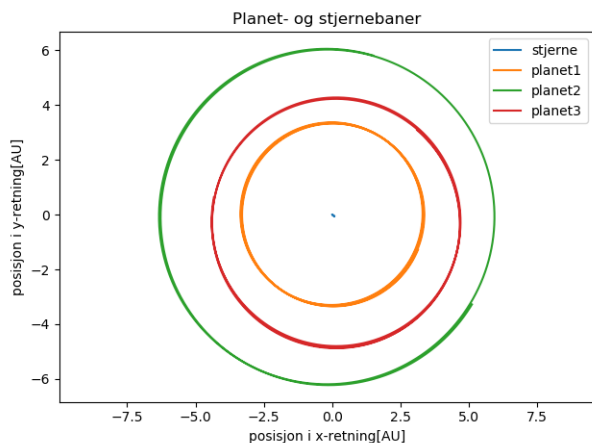
Til slutt må vi legge til støy på kurvene. Fra tidligere datasett vet vi at støyet følger normalfordelingen. Støy kan være avhengig av støyet i det forrige punktet, men for å gjøre det enkelt ser vi bort i fra dette. Formelen til normalfordelingen er gitt ved:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

Der x er støyet, σ er standardavvik, og μ er gjennomsnittet. Formelen er hentet fra [3]. Hva slags støy du får avhenger av omstendigheter og verktøyene man bruker, vi fant at $\sigma = v_{r*}/5$ og $\mu = 0$ gir realistisk støy. Der v_{r*} er maksimal radiell hastighet til stjernen sett fra massesenteret. For å finne den må vi først justere for driftshastigheten til legemet sett fra origo, dette gjør vi gjennom å trekke fra gjennomsnittshastigheten til stjernen. Siden den radielle hastighetskomponenten er hastighetskomponenten i y-retning, finner vi v_{r*} ved å finne maksimum hastighetskomponent i y-retning, etter vi har justert for driftshastighet. Siden observatøren mest sannsynlig kun er opptatt av den radielle hastigheten, justerer vi for observert egenhastighet, der egenhastigheten er massesenteret sin hastighet, sett fra observatøren. Dette gjør vi gjennom å regne ut gjennomsnittet av observert hastighet, og deretter trekke det fra observert hastighet. Til slutt kan vi implimintere normalfordeling på alle hastighetsverdiene i plottet.

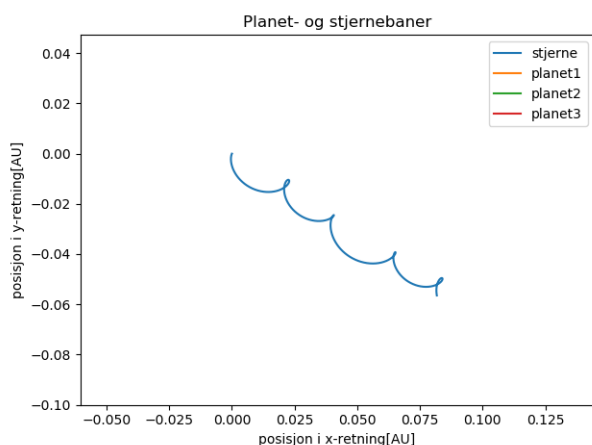
III. RESULTAT

Først simulerte vi og plottet planet- og stjernebanene.



Figur 3. Planet- og stjernebaner: Figuren viser planetbanene til planetene, og stjernebanen i sentrum. Oppe i høyre hjørne kan man se hvilken bane som tilhører hvilken planet, og x- og y-aksen er posisjon målt i AU.

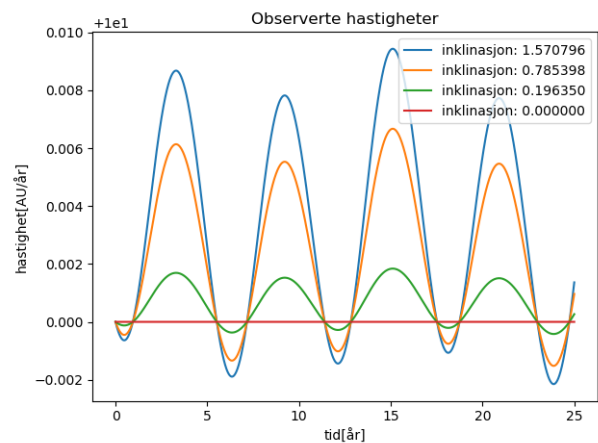
Det er vanskelig å se stjernebanen i figuren over, et nærmere bilde gir:



Figur 4. Stjernebane: Figuren viser et nært bilde av stjernebanen, der x- og y-aksen er posisjon målt i AU.

Vi ser at stjernen begynner i origo, og beveger seg ujevnt, skrått ned mot høyre.

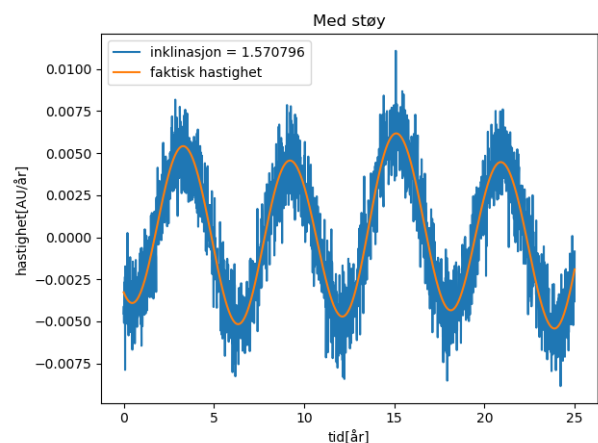
Hvis observatøren hadde hatt perfekte teleskop og omgivelser, hadde de observert følgende hastighet til stjernen:



Figur 5. Observert hastighet: Figuren viser hva observatøren ville observert med forskjellige inklinasjonsvinkler. Man kan se hvilken inklinasjon som hører til hvilken kurve oppe i høyre hjørne. y-aksen er hastighet i AU/år, og x-aksen tid i år, merk også at y-aksen er skalert med +10.

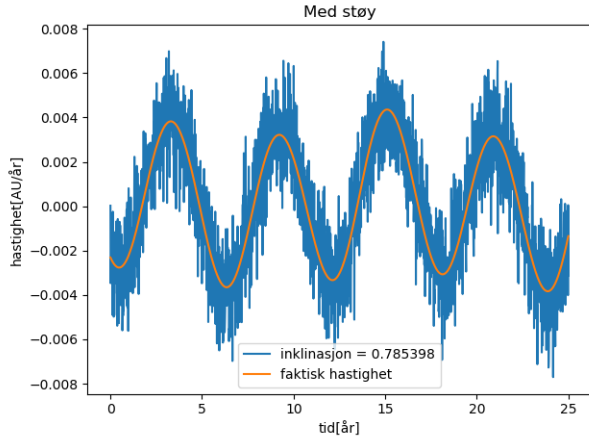
Merk skaleringen oppe i venstre hjørne. Vi kan observere at jo mindre inklinasjonsverdien er, jo mindre blir den observerte hastigheten. Vi observerer også at høyden til topp- og bunnpunktene varierer.

Etter vi har justert for egenhastigheten, sett fra observatøren, ble det støyete plottet:



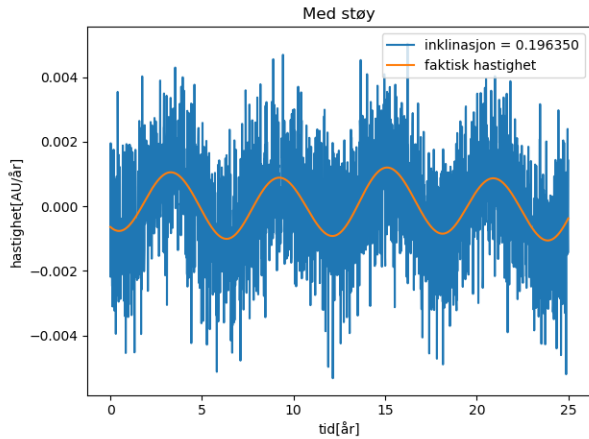
Figur 6. Hastighetsplot med støy: Figuren viser hastighetsplottet med $\pi/2$ rad inklinasjon, med det faktiske hastighetsplottet oppå. y-aksen er hastighet med enhet AU/år, og x-aksen er tid i år.

Figuren over viser hvordan det ser ut når vi legger til normalfordelt støy. Inklinasjonsvinkelen i dette plottet er $\pi/2$ rad.



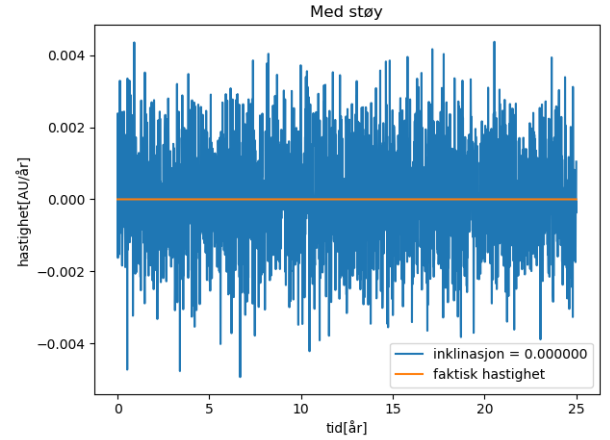
Figur 7. Hastighetsplot med støy: Figuren viser hastighetsplottet med $\pi/4$ rad inklinasjon, med det faktiske hastighetsplottet oppå. y-aksen er hastighet med enhet AU/år, og x-aksen er tid i år.

Denne figuren viser det samme som figur 6, med inklinasjonsvinkel på $\pi/4$ rad.



Figur 8. Hastighetsplot med støy: Figuren viser hastighetsplottet med $\pi/16$ rad inklinasjon, med det faktiske hastighetsplottet oppå. y-aksen er hastighet med enhet AU/år, og x-aksen er tid i år.

Igjen har vi det samme som figur 6, bare med inklinasjonsvinkel $\pi/16$ rad, og plottet under er det samme, med en inklinasjonsvinkel på 0 rad.



Figur 9. Hastighetsplot med støy: Figuren viser hastighetsplottet med 0 rad inklinasjon, med det faktiske hastighetsplottet oppå. y-aksen er hastighet med enhet AU/år, og x-aksen er tid i år.

IV. DISKUSJON

Vi valgte kun å simulere med de tre største planetene i solsystemet. Dette er fordi det er de som vil ha størst gravitasjonskraft på stjernen. Hvis vi hadde inkludert de mindre planetene, ville plottet antakeligvis sett ganske likt ut.

Vi valgte å bruke Euler-Cromer metoden for å simulere planet- og stjernebanene. Dette er fordi metoden er rask og enkel å bruke, men den har også noen ulemper. Det er ikke den mest presise metoden, og det kan være vanskelig å velge riktig Δt , og antall tidssteg. For stor Δt gir unøyaktige resultater, fordi det tar for lang tid før vi oppdaterer hastigheten til planeten. For liten Δt , og vi får avrundingsfeil. Dette er fordi med liten Δt , må vi gjøre flere beregninger, og siden det alltid skjer en liten avrundingsfeil i hver beregning, kan dette bli et problem. Vi valgte å bruke samme verdier som i rapport [5], fordi det ga gode resultater med det samme solsystemet. Grunnen til at vi påstår at det ga gode resultater, er fordi systemet oppførte seg slik vi forventet at det burde oppføre seg, noe som det gjorde i dette tilfellet også. Det kan hende at andre verdier hadde gitt bedre resultater, men for våre formål er det nøyaktig nok.

Figur 5 viser hva observatøren ville observert uten noe støy. Vi observerer at jo mindre inklinasjonen er, jo lavere hastighet observerer man, og hvis den blir null, observerer de kun egenhastigheten. Dette gir mening hvis vi ser på likning 4. Vi kan også observere at grafene varierer, høyden på topp- og bunnpunktene holder seg ikke konstant. Det kan hende at dette er grunnet avrundingsfeil i Euler-Cromer metoden, men det kan også hende at dette er fordi det er flere planeter som går i bane rundt stjernen. Hvis planetene midlertidig er på en tilnærmet linje, observert fra stjernen, burde gravitasjonskraften bli større, siden det ikke er noe gravitasjonskraft som drar

stjernen i en annen retning, dette vil gi stjernen større akselerasjon, og derfor en større hastighet i noen tilfeller.

Figur 6 til 9 viser hva observatøren ville observert, hvis de har støy og juster for egenhastighet. Hvor mye støy vil avhenge av hvor bra forholdene er, og hvor bra teleskop man har. Et teleskop i verdensrommet vil ha mindre støy enn et teleskop på bakken, siden atmosfæren vil forårsake støy. Vi beregnet med konstant støy for alle figurene, som burde være tilfellet, med mindre man observerer med forskjellige teleskop, eller forholdene endrer seg mye. Vi observerer at siden støyet er konstant for alle figurene, er det vanskeligere og vanskeligere å tyde daten. Figur 6 som viser null inklinasjon, kan vi observere kurven ganske presist, men figur 8 der inklinasjonen er på $\pi/16$ er det vanskelig å tolke dataen. Hvis vi bruker øyemål på figur 9, ser det nesten ut til å være noe variasjon der, men med metoder for å tolke dataen, burde det være enkelt å konkludere at det ikke er noe variasjon der.

Det er ingen spesiell grunn til at vi valgte den posisjonen og drifhastigheten, annet enn at det er enkelt å

regne ut. En person som plasserer observatøren et annet sted, vil antakeligvis få andre resultater.

V. KONKLUSJON

Vi simulerte planet- og stjernebanene med Euler-Cromer metoden. Dette ga et tilsynelatende presist nok resultat for våre formål. Vi kan observere at jo mindre inklinasjonsverdien blir, jo mindre blir hastigheten observatøren observerer. Etter vi la på støy med gauss fordeling, kan vi observere at det blir vanskeligere å hente avgjørende data.

Med Euler-Cromer metoden, og verdiene for Δt og antall tidssteg vi valgte, burde en sivilisasjon kunne observere at vårt solsystem har planeter, med inklinasjonsvinkel $\pi/16$. Vi observerer allerede at hvis inklinasjonsvinkelen er $\pi/16$, begynner det å bli vanskelig å observere at stjernen beveger på seg.

VI. TABELLER

Tabell 1: Tabellen under inneholder alle verdiene som er relevant til rapporten, hentet fra [4]. Hvilke enheter vi bruker er oppgitt i øverste rad i begge tabellene, sammen med kategoriene som beskriver innholdet til kolonnene. Der det står - er det ikke oppgitt noe informasjon.

| Planet | Masse(kg) | Store halvakse(AU) | \vec{r}_0 (AU) | \vec{v}_0 (AU/år) | ω (rad) | Eksentrisitet |
|---------|----------------------|--------------------|------------------|---------------------|----------------|---------------|
| 1 | $5.41 \cdot 10^{24}$ | 0.68 | (0.70,0) | (0,7.71) | -3.14 | 0.027 |
| 2 | $4.50 \cdot 10^{24}$ | 0.96 | (-0.60,0.73) | (-5.31,-4.16) | 1.31 | 0.019 |
| 3 | $1.36 \cdot 10^{26}$ | 4.57 | (-4.33,0.63) | (-0.61,-3.13) | 2.11 | 0.065 |
| 4 | $6.78 \cdot 10^{26}$ | 6.10 | (1.49,5.81) | (-2.58,0.76) | 0.18 | 0.038 |
| 5 | $1.30 \cdot 10^{23}$ | 1.51 | (-1.21,-0.94) | (3.34,-4.03) | -0.48 | 0.036 |
| 6 | $3.00 \cdot 10^{27}$ | 3.34 | (-1.56,-2.93) | (3.19,-1.66) | -1.10 | 0.013 |
| 7 | $2.49 \cdot 10^{24}$ | 0.50 | (-0.23,-0.44) | (8.04,-4.88) | 2.83 | 0.070 |
| Stjerne | Masse(kg) | - | \vec{r}_0 (AU) | \vec{v}_0 (AU/år) | - | - |
| 1 | $2.15 \cdot 10^{30}$ | - | (0,0) | (0,0) | - | - |

-
- [1] Hansen, F. K., 2017, Forelesningsnotat 1C i kurset AST2000
 - [2] Hansen, F. K., 2017, Forelesningsnotat 1B i kurset AST2000
 - [3] Hansen, F. K., 2017, Forelesningsnotat 1A i kurset AST2000
 - [4] <https://lars-frogner.github.io/ast2000tools/html/index.html>
 - [5] Rapporten til oppgave 1B7
 - [6] Rapporten til oppgave 1C4