

Oppgave 1B.7: Planet og stjernebaner

Kandidatnummer: 15851

Universitetet i Oslo*

(Dated: 17. september 2019)

I denne rapporten har vi simulert planet, og stjernebaner med varierende presisjon. Først simulerte vi solsystemet vårt. Vi så bort fra kreftene mellom planetene, og planetene sin påvirkning på stjernen. Vi brukte deretter Euler-Cromer metoden til å simulere planetbanene. På grunn av simplifikasjonene, hadde vi et analytisk uttrykk å sammenligne resultatene med. Vi simulerte også trelegemeproblemet, bestående av to stjerner og en planet. Da brukte vi Euler-Cromer metoden med to forskjellige initialhastigheter, og fikk to ganske forskjellige resultater. Vi fikk varierende presisjon, og fant at Euler-Cromer metoden har store begrensninger.

I. INTRODUKSJON

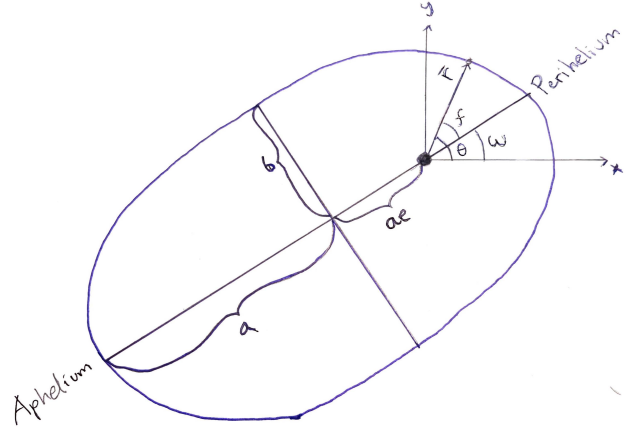
Hensikten med denne rapporten er å forstå bevegelsen til legemer i verdenrommet. Dette er viktig innen astrofysikken siden vi bruker det til å forutse en rekke fenomener, f.eks. forutse planetbaner rundt en stjerne, kun ved å se på bevegelsen til stjernen. I denne rapporten bruker vi helt grunnleggende fysiske lover og numeriske metoder til å simulere og plote bevegelsen til planeter og stjerner. Vi skal først se på solsystemet vårt bestående av åtte planeter og en stjerne, og deretter prøve å simulere trelegemeproblemet bestående av en planet og to stjerner. I begge tilfellene ser vi bort fra alle ytre krefter, og simulerer ved hjelp av Euler-Cromer metoden, nærmere beskrevet i teoridelen. All informasjon vi trenger om planetene og stjernene står bakerst i en tabell, der planet 1-8 og stjerne 1 er solsystemet vårt (hentet fra [2]).

Når vi simulerer solsystemet vårt gjør vi noen forenklinger. Vi lar posisjonen til stjernen være fast, og vi ser bort fra gravitasjonen mellom planetene. Dette gjør at simuleringen blir enklere, og at vi kan finne et analytisk uttrykk for planetbanene å sammenligne med, nemlig formelen for en ellipsebane.

Trelegmesystemet består av stjerne 2-3 og planet 9. Mange av stjernene er binære stjerner, altså 2 stjerner som har bane om hverandre, så dette er interessant for å forstå andre systemer enn vårt eget. Vi gjør ikke de samme simplifikasjonene her og har derfor ikke et analytisk uttrykk å sammenligne med.

II. TEORI

Teoridelen går igjennom begreper rundt ellipsebaner og litt informasjon om Euler-Cromer metoden. Vi bruker mange begreper om ellipsebaner og har derfor laget en tegning med alle begrepene vi mener er vedt å merke seg. I tillegg har vi laget en kjapp beskrivelse av Euler-Cromer metoden.



Figur 1. Ellipsebanen til et legeme: \vec{r} er posisjonsvektoren til legeme, origo ligger i brennpunktet, a er den store halvaksen, b er den lille halvaksen, e er eksentrisiteten, perihelium er den korteste avstanden mellom origo og ellipsen, aphelium er den lengste avstanden mellom origo og ellipsen, ω er periheliumvinkelen, f er sann anomal og θ er posisjonsvinkelen.

Hvis vi bruker Newtons gravitasjonslov og Newtons andre lov, følger det at planeter og andre legemer går i ellipsebane. Figuren over viser ellipsebanen til et legeme rundt et annet legeme plassert i brennpunktet. Vi posisjonerer origo i brennpunktet siden det blir lettere å beskrive ellipsebanen. Eksentrisiteten er en funksjon av a og b gitt ved; $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$, og sier noe om hvor avlang ellipsen er. Periheliumvinkelen forteller oss hvor skrå ellipsen er, og det følger at θ , posisjonsvinkelen, kan beskrives ved summen av sann anomal og periheliumvinkelen (se [1] for begrunnelser og tilleggsinformasjon).

Når vi simulerer banen til legemer er vi nødt til å løse differensiallikninger på formen:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x) = s(x) \quad (1)$$

hvor $s(x)$ er en kjent funksjon. For å gjøre det bruker vi

* astrologi@gmail.com

Euler-Cromer metoden gitt ved:

$$\begin{aligned} f''(x) &= s(x) \\ f'_{n+1} &= f'_n + s(x)\Delta x \\ f_{n+1} &= f_n + f'_{n+1}\Delta x \end{aligned}$$

Der Δx er en liten endring i x , n er antall steg, og $f(x)$ og $s(x)$ er funksjonene beskrevet over. Det den i praksis gjør er å finne den neste verdien i $f(x)$ og $f'(x)$ ved å la den deriverte være konstant, gange med en liten endring i x , og plusse med den eksisterende verdien. Utleidelse og nærmere forklaring finner man på side 2 i [1].

III. METODE

Vi har valgt å bruke Euler-Cromer metoden for å simulere alle banene i denne rapporten. Metoden gir nøyaktige resultater i mange tilfeller, men numeriske feil og unøyaktighet kan være en utfordring. Selv om den ikke er den mest nøyaktige metoden er den rask og enkel å bruke. Vi anbefaler lesere av denne rapporten til å prøve andre metoder i tillegg.

Først og fremst plottet vi de analytiske banene til solsystemet. Formelen for en ellipse i det kartesiske koordinatsystemet er gitt ved:

$$\vec{r} = \frac{a(1-e^2)}{1+ecosf} \hat{r}, \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{e}_x + \sin\theta\hat{e}_y \quad (2)$$

Der \vec{r} er posisjonsvektoren til planeten, \hat{r} enhetsvektor i samme retning som \vec{r} , \hat{e}_x og \hat{e}_y enhetsvektorer i x - og y -retning, a den store halvaksen, e eksentrisiteten, θ posisjonsvinkelen og f er sann anomali. Der betydningene av verdiene er gitt i teoridelen og formelen hentet fra side 8 i [1]. Vi bruker deretter verdiene gitt i tabellen bakerst til å plote stjerne 1, og planetene 1-8.

Etter vi har plottet det analytiske uttrykket kan vi begynne å simulere planetbanene. Fordi andre galakser og solsystemer er langt unna er gravitasjonen deres på solsystemet vårt neglisjerbart, derfor ser vi bort fra ytre krefter. Planetmassene i solsystemet vårt er mye mindre enn stjernen sin, derfor vil påvirkningen på stjernen være liten, og vi regner derfor med at posisjonen til stjernen er statisk. Den siste simplifikasjonen vi gjør er å se bort fra gravitasjon mellom planetene. Dette er igjen fordi gravitasjonskraften mellom planetene vil være liten på grunn av store avstander. Vi vil ikke gjøre de samme simplifikasjonene når vi simulerer trelegemeproblemet, men nå vil det gjøre simulasjonene betydelig enklere og vi vil også ha et analytisk resultat å sammenligne med.

Siden vi ser bort fra ytre krefter, gravitasjon mellom planetene og planetene sin påvirkning på stjernen, virker kun stjernen sin gravitasjonskraft på planetene. Vi kan bruke Newtons lov for gravitasjon og Newtons andre lov, og finne et uttrykk for akselerasjon:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \implies \vec{a} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \quad (3)$$

Der $\Sigma \vec{F}$ er summen av kreftene på planeten, \vec{a} er akselerasjonsvektoren til planeten, G gravitasjonskonstanten, M massen til stjernen, m massen til planeten, r avstanden mellom sentrum av stjernen og sentrum av planeten, og \hat{r} enhetsvektor med retning mot planeten fra stjernen. Siden akselerasjonen \vec{a} er den annenderiverte av posisjon med hensyn på tid, får vi differensiallikningen:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \quad (4)$$

Dette er på samme formen som likning 1 i teoridelen, og vi kan derfor bruke Euler-Cromer metoden. Med initialverdiene \vec{r}_0 og \vec{v}_0 for planet 1-8, kan vi løse likningsettet:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_n &= -G \frac{M}{r_n^2} \hat{r}_n \\ \dot{\vec{r}}_{n+1} &= \dot{\vec{r}}_n + \ddot{\vec{r}}_n \Delta t \\ \vec{r}_{n+1} &= \vec{r}_{n+1} + \dot{\vec{r}}_{n+1} \Delta t \end{aligned}$$

Der Δt er endring i tid, og n er antall tidssteg (Se teoridelen for nærmere beskrivelse og opprinnelse). Vi velger å la simulasjonen gå til den yterste planeten i solsystemet har gjort minst en omdreining. Da kan vi se alle planetbanene, men vi vil også kunne se hvordan planetbanen til de innerste planetene vil endre seg, etter hvert som de gjør sine omdreininger. Vi måtte prøve og feile litt for å finne en gunstig Δt , for liten gir avrundingsfeil, og for stor gir upresis bane. Vi fant at $\Delta t = 0.01$ år med $n = 1500$ tidssteg var en god balanse, men det er sannsynligvis ikke den mest optimale kombinasjonen.

Når vi simulerer trelegemesystemet ser vi også bort fra ytre krefter. Metoden vi bruker er nesten identisk til metoden vi brukte til å simulere planetbanene. Den eneste forskjellen er at det virker to krefter på hvert legeme. Hvis vi først ser på planeten gir Newtons gravitasjonslov og Newtons andre lov følgende uttrykk for akselerasjon:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= m\vec{a} = -Gm \left(\frac{M_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{M_2}{r_2^2} \hat{r}_2 \right) \\ \implies \vec{a} &= -G \left(\frac{M_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{M_2}{r_2^2} \hat{r}_2 \right) \end{aligned}$$

Der $\Sigma \vec{F}$ er summen av kreftene på planeten, \vec{a} akselerasjonsvektoren til planeten, m , M_1 og M_2 er massen til planeten, den store stjernen og den lille stjernen, G er gravitasjonskonstanten, r_1 avstanden mellom planeten og den store stjernen, r_2 avstanden mellom planeten og den lille stjernen, \hat{r}_1 er enhetsvektor med retning fra den store stjernen til planeten, og \hat{r}_2 enhetsvektor med retning fra den lille stjernen til planeten. Vi bruker akkurat den samme metoden til å finne akselerasjonen til den lille og store stjernen. Vi får da tre likninger på samme form som likning 4, og kan igjen bruke Euler-Cromer metoden på alle legemene, med initialverdiene gitt i tabellen. Igjen må vi finne en Δt og antall tidssteg som gir minst mulig feil, her gjelder det å prøve og feile litt, men det vi kom fram til var $\Delta t = 400$ s med $n = 10^6$ steg. Igjen her må

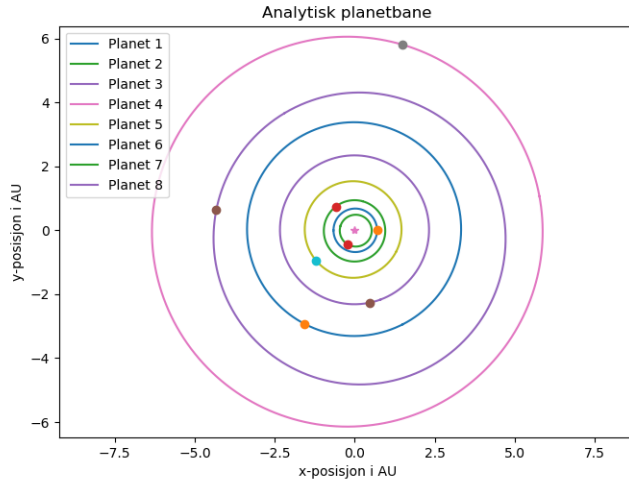
man individuelt finne det som passer best, for å få de resultatene man er ute etter.

Vi valgte også å se på andre initialverdier til planeten, gjennom prøving og feiling fant vi initialverdiene $\vec{v}_0 = (0, -8.44)\text{AU/år}$, som ga tilnærmet ellipsebane rundt begge stjernene. Det er fordi det er interessant å sammenligne begge initialverdiene, både for å forstå planetbaner bedre, men også se hvor begrensningene til Euler-Cromer metoden kommer fra.

I noen tilfeller er det gunstig å se på animasjoner, slik at man kan se hvilken rekkefølge ting skjer i. Vi har derfor brukt modulene i [2] til å lage en animasjon av alle simulerte plot. Disse er vedlagt som .xml filer.

IV. RESULTAT

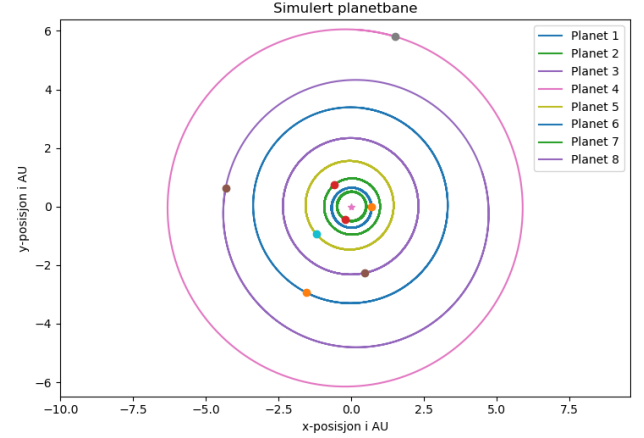
Ved å bruke det analytiske uttrykket for en ellipsebane fikk vi:



Figur 2. Ellipsebanene til planetene: Her er x-aksen og y-aksen posisjonen i x-retning og y-retning med enhet AU. I origo er stjernen markert, prikkene er initialposisjonen til planetene og linjene planetbanene. Oppe i venstre hjørne kan du se hvilken planet som følger hvilken bane.

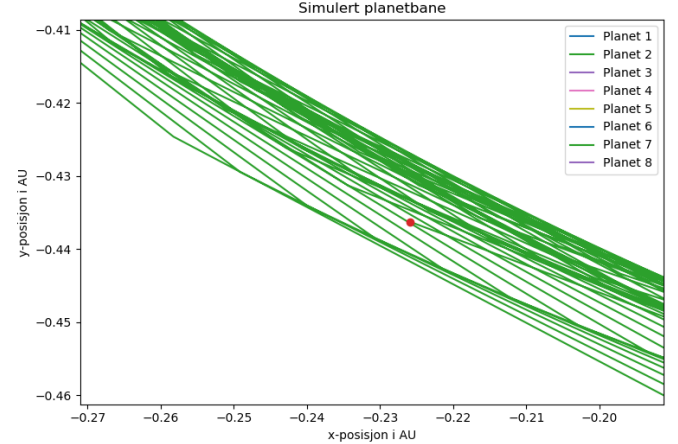
Her ser vi hvordan planetbanene til planet 1-8 burde se ut i simulasjonen. Siden det er mange farger kan det være vanskelig å se hvilken planetbane som tilhører hvilken planet, så her kan det lønne seg å se på tabellen bakerst.

Når vi brukte Euler-Cromer metoden fikk vi følgende plot:



Figur 3. Simulert ellipsebaner: Her er x-aksen og y-aksen posisjonen i x-retning og y-retning med enhet AU. I origo er stjernen markert, prikkene er initialposisjonen til planetene, og linjene planetbanene. Oppe i høyre hjørne kan du se hvilken planet som følger hvilken bane.

Dette plottet viser de simulerte planetbanene til planet 1-8, og initialposisjonene deres. Siden det er vanskelig å se avvikene har vi også et annet plot som viser et nærmere bilde av planetbanen til den innerste planeten.

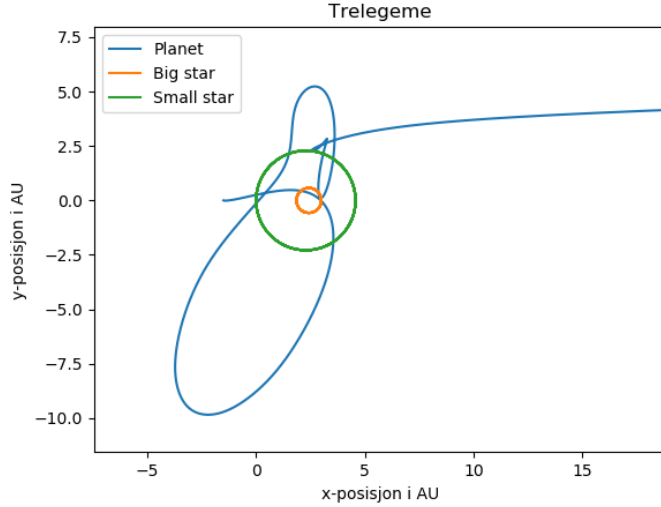


Figur 4. Planetbanen til den innerste planeten: Her er x-aksen og y-aksen posisjonen i x-retning og y-retning med enhet AU. Prikkene er initialposisjonen til planeten, og de grønne linjene er planetbanen til planeten.

Her ser vi en del av planetbanen til den innerste planeten og initialposisjonen. Med øyemål ser det ut som at avvikene ligger på rundt 0.01AU. Videofilen til dette plottet er også vedlagt som orbit_video.xml.

Det numeriske plottet av trelegemesystemet med initialverdier oppgitt i tabellen ble:

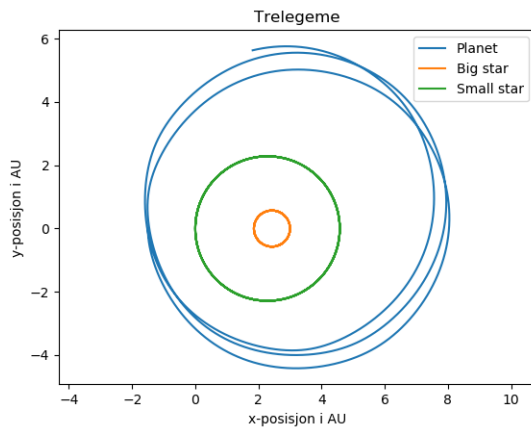
V. DISKUSJON



Figur 5. Trelegemesystemet: Her er x-aksen og y-aksen posisjonen i x-retning og y-retning med enhet AU. Den grønne kurven er banen til den lille stjernen, den orasje kurven er banen til den store stjernen og den blå kurven er planetbanen.

Her ser vi banene til stjernene som går om hverandre, og planetbanen i blått. Planeten følger en ganske uordnet bane helt til den blir slenkt ut mot høyre. Videofilen til dette plottet er vedlagt som `binary_orbit_video.xml`.

Det andre plottet med initialhastighet $\vec{v}_0 = (0, -8.44)\text{AU}/\text{år}$ til planeten ble som følger:



Figur 6. Trelegemesystem nummer to: Her er x-aksen og y-aksen posisjonen i x-retning og y-retning med enhet AU. Den grønne kurven er banen til den lille stjernen, den orasje kurven er banen til den store stjernen, og den blå kurven er planetbanen med initialhastighet $\vec{v}_0 = (0, -8.44)\text{AU}/\text{år}$.

Her ser vi alle legemene gå i tilnærmet ellipsebane om hverandre. Videofilen til dette plottet er vedlagt som `binary_orbit_video3.xml`.

Da vi simulerte solsystemet vårt gjorde vi en rekke forenklinger. Siden stjernen er mye mer massiv enn planetene så vi bort fra planetene sin påvirkning på stjernen, selv om de fortsatt vil ha en påvirkning. Hadde det vært kun en planet som gikk i bane rundt stjernen ville dette kanskje gitt et mer unøyaktig svar, men siden vi har åtte planeter som alle drar i hver sin retning burde dette gjøre at summen av kreftene på stjernen burde bli mye mindre. Da vi simulerte trelegemesystemet regnet vi med gravitasjonskraften planeten hadde på stjernene, og så ingen påvirkning i verken figurene eller animasjonene.

Den andre forenklingen vi gjorde var å se bort fra gravitasjonen mellom planetene. Det er vanskelig å si i hvor stor grad dette påvirket resultatene. Videre arbeid burde innebære å sammenligne resultatene vi fikk i denne rapporten med simulasjoner der vi tar med gravitasjonskraften mellom planetene, og se hvor stort avvik vi får.

I alle simulasjonene så vi bort fra alle ytre krefter. Dette vil ikke være tilfellet, siden det er mange andre massive legemer i universet som vil ha en gravitasjonskraft på systemet vårt. Men igjen på grunn av de enorme avstandene burde den kraften være neglisjerbar.

Hvis vi ser på figur 2 og 3, ser de simulerte og analytiske planetbanene veldig like ut. Det er ingen åpenbare avvik, bortsett fra tykkelsen på planetbanen til de innerste planetene. Hvis vi ser på animasjonen, ser vi at hastigheten til de innerste planetene er mye større, og at de gjør mange flere omdreininger. I Euler-Cromer metoden antar vi at vi har konstant fart i en liten Δt . Dette vil naturligvis føre til at jo høyere hastighet planeten har, jo mer unøyaktig blir planetbanen, noe som blir visualisert godt i figur 4, siden de innerste planetene gjør mange omdreininger, og vi kan derfor se avvikene fra hver omdreining. I vårt tilfelle ser vi at avvikene ligger på rundt 0.01 AU , som i stor skala ikke er et stort avvik, men hvis vi ser på kun en planet gir det et stort avvik. Dette tyder på at vi til neste gang, burde simulere hver planet hver for seg, med forskjellige Δt og n , eller kanskje også bruke en annen numerisk metode når vi simulerer gjenstander med høy hastighet.

Vi simulerte trelegemeproblemet med to forskjellige initialverdier for planeten. Hvis vi først ser på Figur 5, ser banene til stjernene rimelige ut, de er kanskje litt tykke, men som vi nevnte over, er det forventet når vi har mange omdreininger. Vi ser derimot at energien til planeten ikke er bevart. Planeten starter kun med en liten hastighetskomponent i negativ y-retning, og burde derfor på grunn av bevaring av energi ikke ende opp for langt unna stjernene, men mot slutten av banen ser planeten ut til å forlate gravitasjonsfeltet til stjernene fullstendig. Hvis vi ser på videofilen `binary_orbit.xml`, ser vi mot slutten at planeten får en veldig stor hastighet mens den går i bane rundt den lille stjernen, og blir deretter kastet langt vekk fra stjernene. Vi tror de største numeriske feilene oppstår akkurat da, og vi tror også det er på grunn av for høye hastigheter. Når planeten nærmer seg stjernen, vil

gravitasjonskraften bli veldig stor, og på grunn av dette få høy hastighet. Siden Euler-Cromer regner med konstant hastighet i det gitte tidsrommet Δt , vil den kunne komme seg langt nok unna stjernen i det tidsrommet. Dermed vil ikke gravitasjonskraften klarer å bremse opp planeten lengre, og vi vil derfor ende opp med mye mer kinetisk energi enn det vi startet med. For å få et mer nøyaktig svar kan det kanskje lønne seg å ha en lavere Δt for høyere hastigheter, men det er vanskelig å si om dette bare fører til enda større avrundingsfeil.

Når vi bruker initialverdiene $\vec{v}_0 = (0, -8.44)\text{AU}/\text{år}$ fikk vi plottet som er vist i figur 5. Dette resultatet ser mer rimelig ut. Planeten starter med en liten hastighetskomponent i minus y-retning, og går i en ellipsebane rundt begge stjernene. Det er en del variasjon her, men det skyldes sansynligvis endringen i gravitasjonsfeltet mens stjernene går i bane om hverandre.

VI. KONKLUSJON

Vi kan observere klare fordeler og ulemper med de metodene vi har brukt. Vi forventet å få avrundingsfeil når

vi valgte å bruke Euler-Cromer, men det er tydelig at modellen er for dårlig i noen tilfeller. Da vi simulerte planetbanene til solsystemet, fikk vi et rimelig resultat hvis vi så det fra avstand, men det virker ikke som en god metode hvis vi ønsker veldig presise planetbaner. Her gjelder det å velge riktige tidssteg.

Når vi skulle simulere trelegemesystemet fikk vi to veldig forskjellige resultater. I det først tilfellet fikk vi for store avrundingsfeil, mens i det andre tilfellet så det mer rimelig ut.

Vi ser at det absolutt er mulig å simulere planet og stjernebaner ved bruk av Euler-Cromer metoden, men at resultatene varierer i presisjon. Hvis man har ekstreme situasjoner, der hastigheter varierer mellom store og små verdier, kan det absolutt være en fordel å endre Δt underveis i programmet, eller bruke andre numeriske metoder.

VII. TABELLER

Tabellen under inneholder alle verdiene som er relevant til rapporten, hentet fra [1]. Hvilke enheter vi bruker er oppgitt i øverste rad i begge tabellene, sammen med kategoriene som beskriver innholdet til kolonnene. Der det står - er det ikke oppgitt noe informasjon.

Planet	Masse(kg)	Store halvakse(AU)	$\vec{r}_0(\text{AU})$	$\vec{v}_0(\text{AU}/\text{år})$	$\omega(\text{rad})$	Eksentrisitet
1	$5.41 \cdot 10^{24}$	0.68	(0.70,0)	(0,7.71)	-3.14	0.027
2	$4.50 \cdot 10^{24}$	0.96	(-0.60,0.73)	(-5.31,-4.16)	1.31	0.019
3	$1.36 \cdot 10^{26}$	4.57	(-4.33,0.63)	(-0.61,-3.13)	2.11	0.065
4	$6.78 \cdot 10^{26}$	6.10	(1.49,5.81)	(-2.58,0.76)	0.18	0.038
5	$1.30 \cdot 10^{23}$	1.51	(-1.21,-0.94)	(3.34,-4.03)	-0.48	0.036
6	$3.00 \cdot 10^{27}$	3.34	(-1.56,-2.93)	(3.19,-1.66)	-1.10	0.013
7	$2.49 \cdot 10^{24}$	0.50	(-0.23,-0.44)	(8.04,-4.88)	2.83	0.070
8	$6.39 \cdot 10^{23}$	-	(-1.5,0)	(0,-0.21)	-	-
Stjerne	Masse(kg)		$\vec{r}_0(\text{AU})$	$\vec{v}_0(\text{AU})$		
1	$2.15 \cdot 10^{30}$	-	(0,0)	(0,0)	-	-
2	$2.00 \cdot 10^{30}$	-	(0,0)	(0,6.33)	-	-
3	$4.00 \cdot 10^{30}$	-	(3,0)	(0,-1.58)	-	-

[1] Hansen, F. K., 2017, Forelesningsnotat 1B i kurset AST2000

[2] <https://lars-frogner.github.io/ast2000tools/html/index.html>