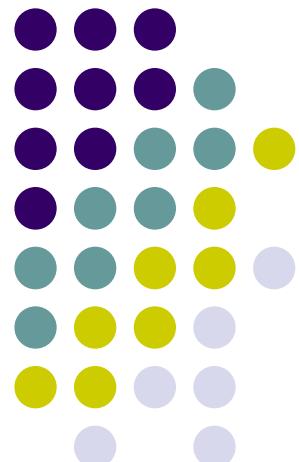
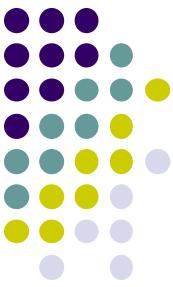


代数格

离散数学 – 代数结构

南京大学计算机学院

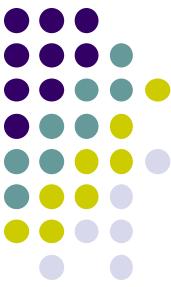




内容提要

- 代数格的定义
- 格的对偶原理
- 子格
- 格同态、格同构
- 分配格
- 有界格
- 有补格
- 有补分配格





格 (回顾)

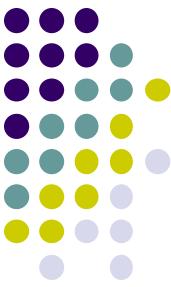
- (S, \leq) 的一个 (偏序) 格, 如果下列条件成立:
 - 设 (S, \leq) 是偏序集
 - $\forall x, y \in S$, 存在 $\{x, y\}$ 的最小上界 $\text{lub}\{x, y\}$, 记为 $x \vee y$.
 - $\forall x, y \in S$, 存在 $\{x, y\}$ 的最大下界 $\text{glb}\{x, y\}$, 记为 $x \wedge y$.
- 设 (S, \leq) 是格, 则 (S, \wedge, \vee) 有下列性质:
 - 结合律: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
 - 交换律: $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$
 - 吸收律: $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$



代数格 (定义)

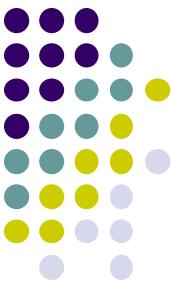
- 设 L 是一个集合， \wedge 和 \vee 是 L 上的二元运算，且满足结合律、交换律、吸收律，则称 (L, \wedge, \vee) 是代数格。

等 式	名 称
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	结合律
$x \wedge y = y \wedge x$ $x \vee y = y \vee x$	交换律
$x \vee (x \wedge y) = x$ $x \wedge (x \vee y) = x$	吸收律



代数格中的偏序关系

- $\forall x, y \in B, x \wedge y = x \text{ iff } x \vee y = y$
 - 若 $x \wedge y = x$, 则 $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ //吸收律
 - 若 $x \vee y = y$, 则 $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ //吸收律
- $\forall x, y \in B$, 定义 $x \leq y \text{ iff } x \wedge y = x$ (即 $x \vee y = y$)
 - 证明这个关系满足自反性、反对称性、传递性。
 - 这个偏序构成一个格。
 - $\text{lub}\{x,y\}$ 即为 $x \vee y$.
 - $\text{glb}\{x,y\}$ 即为 $x \wedge y$.
- 代数格等同于(偏序) 格



格的代数性质

结合律

交换律

吸收律

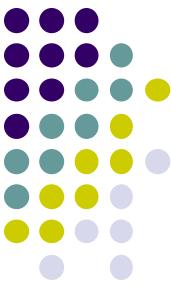
幂等律

吸收律



$$x \wedge \underline{x} = x \wedge (\underline{x \vee (x \wedge x)}) = x \quad (\text{两次应用吸收律})$$

同理可证: $x \vee x = x$



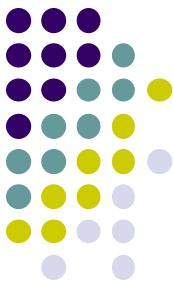
关于格的对偶命题

- 对偶命题的例子
 - $a \wedge b \leq a$ 和 $a \vee b \geq a$ 互为对偶命题
- 对偶命题构成规律
 - 格元素名不变
 - \leq 与 \geq , \wedge 与 \vee 全部互换。



格的对偶原理

- 如果命题 P 对一切格为真，则 P 的对偶命题 P^* 也对一切格为真。
 - 证明思路：证明 P^* 对任意格 (S, \leq) 为真
 - 定义 S 上的二元关系 \leq^* , $\forall a,b \in S, a \leq^* b \Leftrightarrow b \leq a$, 显然 \leq^* 是偏序。
 - $\forall a,b \in S, a \wedge^* b = a \vee b, a \vee^* b = a \wedge b$ 所以 (S, \leq^*) 也是格
 - 这里 $a \wedge^* b, a \vee^* b$ 分别是 a, b 关于偏序 \leq^* 的最大下界和最小上界。
 - P^* 在 (S, \leq) 中为真当且仅当 P 在 (S, \leq^*) 中为真。
 - P 在一切格中为真, $\therefore P^*$ 在一切格中为真。



子 格

- 子格 (sub lattice) 是格的子代数。设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格，非空集合 $S \subseteq L$ ，若 S 关于 L 中的运算 \wedge, \vee 仍构成格，称 $\langle S, \wedge, \vee \rangle$ 是 L 的子格

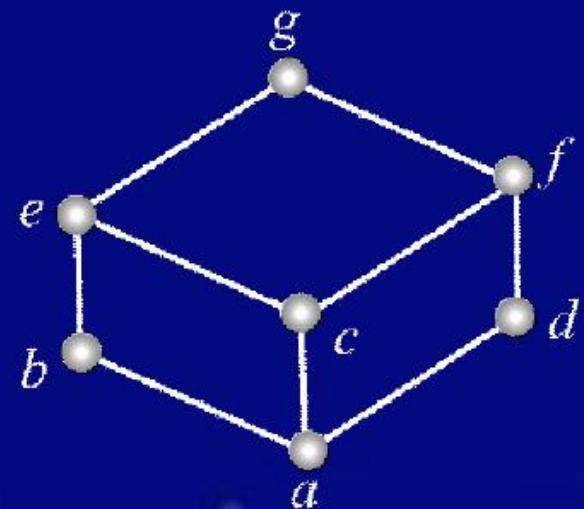
例 13.5 设格 L 如图 3 所示. 令

$$S_1 = \{a, e, f, g\}, S_2 = \{a, b, e, g\}$$

S_1 不是 L 的子格，因为

$$e, f \in S_1 \text{ 但 } e \wedge f = c \notin S_1.$$

S_2 是 L 的子格.





格同态

定义 13.5 设 L_1 和 L_2 是格,

$$f: L_1 \rightarrow L_2,$$

若 $\forall a, b \in L_1$ 有

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b),$$

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

成立, 则称 f 为格 L_1 到 L_2 的同态映射, 简称格同态.



格同态与格同构

■ 设 f 是格 L_1 到 L_2 的映射，

- (1) 若 f 为格同态映射，则 f 保序，即

$$(\forall x, y \in L_1)(x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y))$$

- (2) 若 f 为双射，则 f 为格同构映射（即格同构）当且仅当

$$(\forall x, y \in L_1)(x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y))$$



格同态的保序性 (续)

例 设 $L_1 = \langle S_{12}, D \rangle$, $L_2 = \langle S_{12}, \leq \rangle$ 是格, 其中:

S_{12} 是 12 的所有正因子构成的集合,

D 为整除关系, \leq 为通常数的小于或等于关系.

令

$$f: S_{12} \rightarrow S_{12}, f(x) = x$$

f 是双射, 但不是格 L_1 到 L_2 的同构映射.

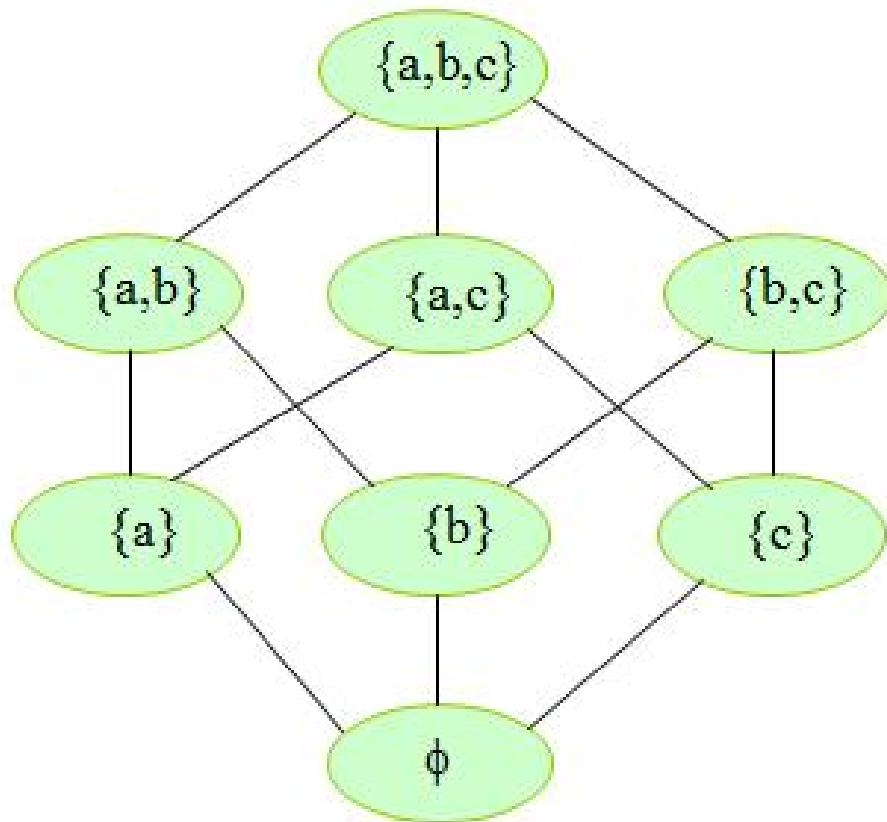
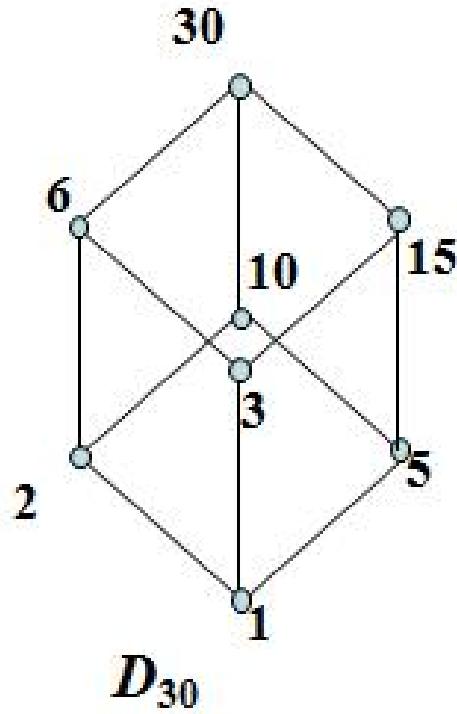
因为 $f(2) \leq f(3)$, 但 2 不整除 3.

根据上述定理可知 f 不是同构映射



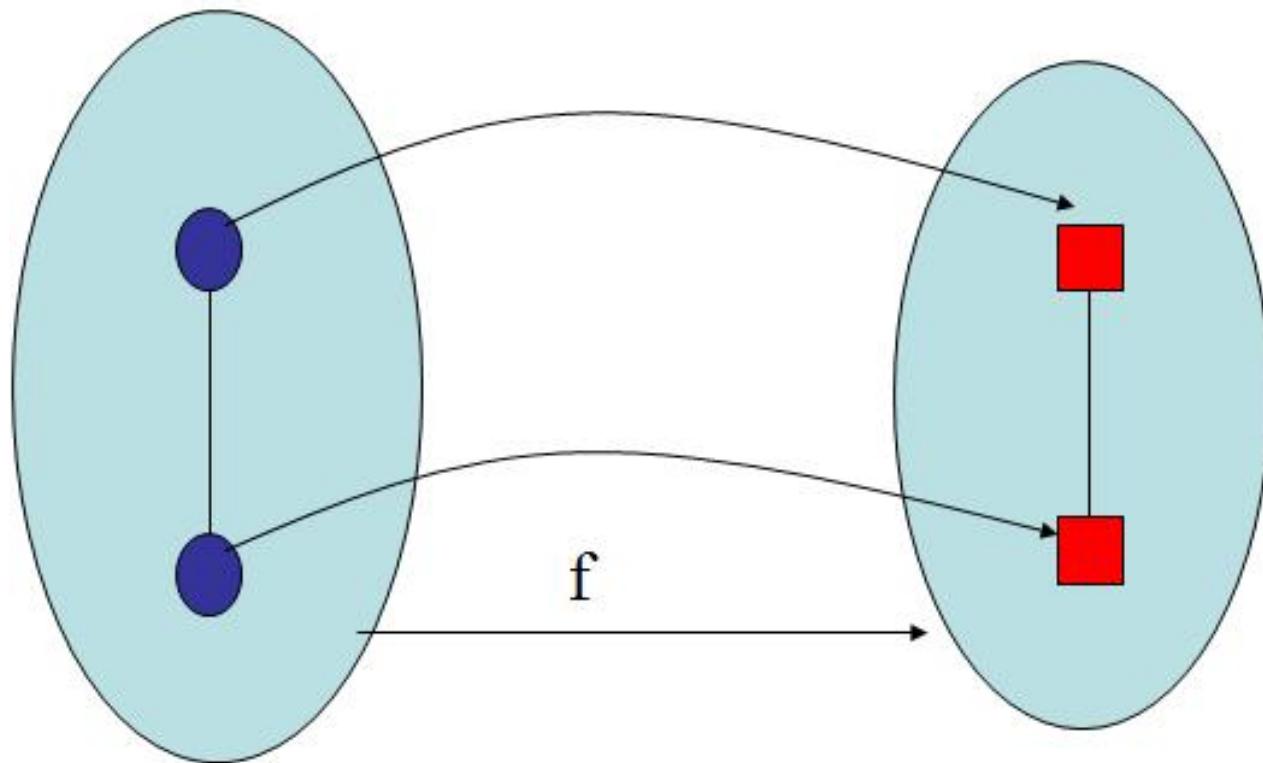
格同构的直观特征

■ 观察以下2个格的哈斯图：





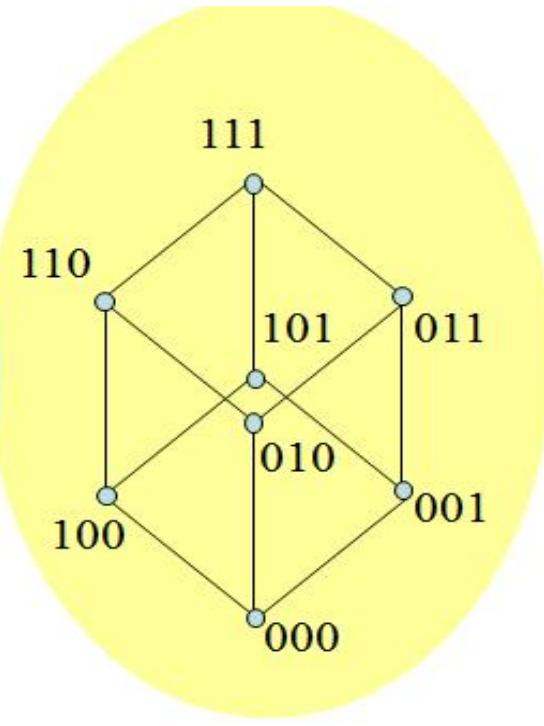
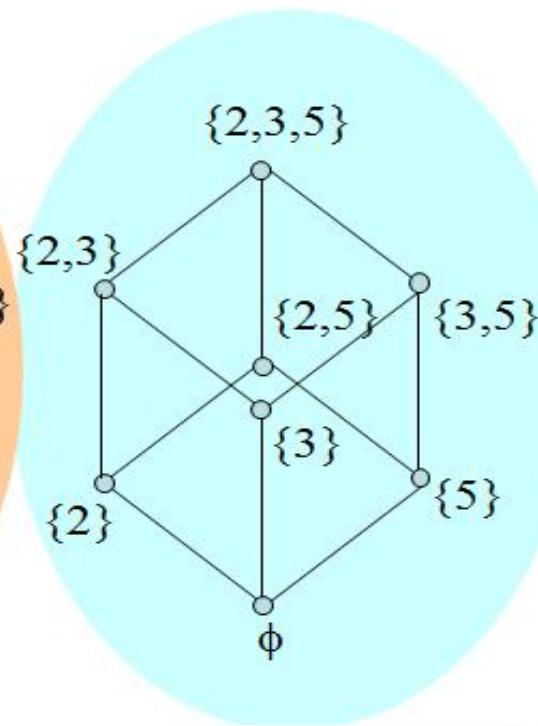
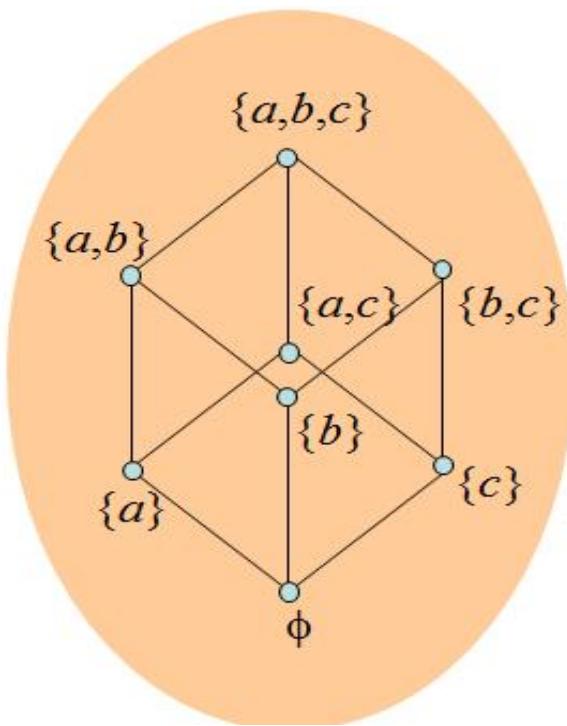
格同构的直观特征 (续)





格同构的直观特征 (续)

- Iso \rightarrow same
 - Morph \rightarrow shape
- } Isomorphic lattices have
same Hasse diagrams' shape

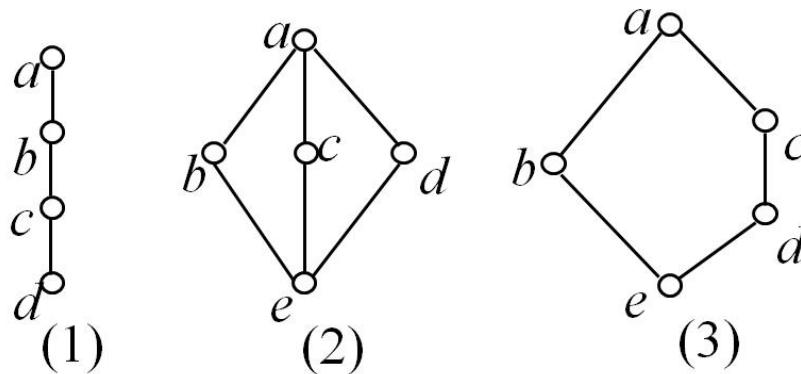




几种典型的格

■ 定义（三种典型的格）：

- (1) 链 (chain)
- (2) 钻石格 (diamond lattice, M_3)
- (3) 五角格 (pentagon lattice, N_5)





分配格

- 定义（分配格）：设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 为格，若

$\forall a, b, c \in L$, 有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

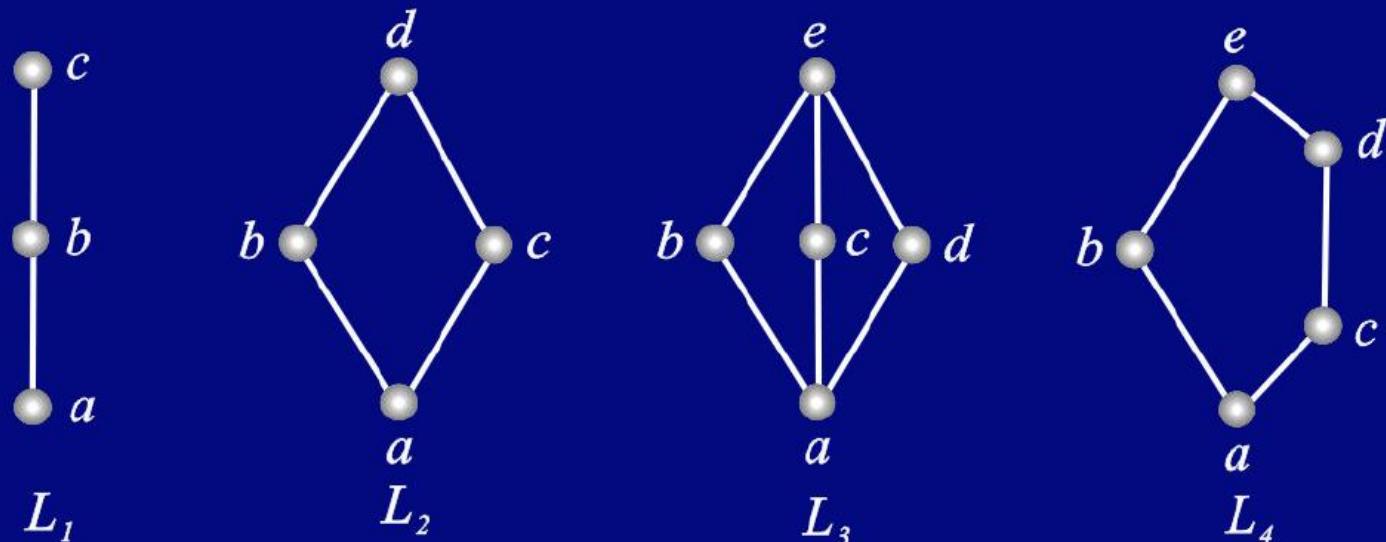
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则称 L 为分配格（distributive lattice）



分配格 (续)

例 参见下图



L_1 和 L_2 是分配格, L_3 和 L_4 不是分配格.

图5

在 L_3 中, $b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b$, $(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a$

在 L_4 中, $c \vee (b \wedge d) = c \vee a = c$, $(c \vee b) \wedge (c \vee d) = e \wedge d = d$



分配格的判定定理

- 定理（分配格判定定理一）：设 L 为格，则 L 是分配格当且仅当 L 不含有与 M_3 （钻石格）或 N_5 （五角格）同构的子格
- 推论：
 - (1) 小于五元的格皆为分配格
 - (2) 任何链皆为分配格



分配格的判定定理 (续)

例 说明图 6 中的格是否为分配格, 为什么?

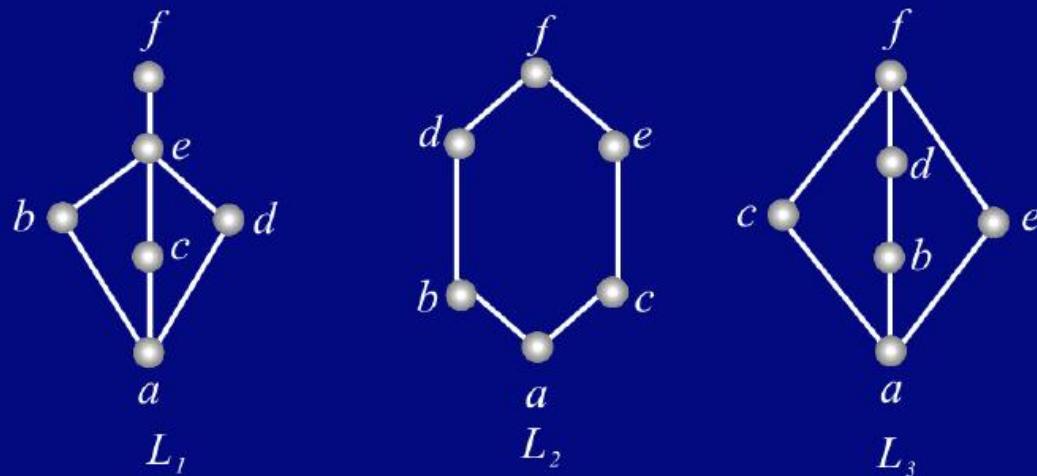


图 6

解 L_1, L_2 和 L_3 都不是分配格.

$\{a, b, c, d, e\}$ 是 L_1 的子格, 并且同构于钻石格;

$\{a, b, c, e, f\}$ 是 L_2 的子格, 并且同构于五角格;

$\{a, c, b, e, f\}$ 是 L_3 的子格, 也同构于钻石格.



分配格的判定定理（续）

- 定理（分配格判定定理二）：设 L 为格，

则 L 是分配格当且仅当

$$(\forall a, b, c \in L)(a \wedge b = a \wedge c \text{ 且 } a \vee b = a \vee c)$$

$$\rightarrow b = c$$



分配格的判定定理 (续)

证 必要性. $\forall a,b,c \in L$, 有

$$\begin{aligned} b &= b \vee (a \wedge b) && (\text{吸收律, 交换律}) \\ &= b \vee (a \wedge c) && (\text{已知条件代入}) \\ &= (b \vee a) \wedge (b \vee c) && (\text{分配律}) \\ &= (a \vee c) \wedge (b \vee c) && (\text{已知条件代入, 交换律}) \\ &= (a \wedge b) \vee c && (\text{分配律}) \\ &= (a \wedge c) \vee c && (\text{已知条件代入}) \\ &= c && (\text{交换律, 吸收律}) \end{aligned}$$



分配格的判定定理 (续)

例 以下三个格都不是分配格.

在 L_1 中有 $b \vee c = b \vee d, b \wedge c = b \wedge d$, 但 $c \neq d$

在 L_2 中有 $b \wedge c = b \wedge e, b \vee c = b \vee e$, 但 $c \neq e$

在 L_3 中有 $c \wedge b = c \wedge d, c \vee b = c \vee d$, 但 $b \neq d$

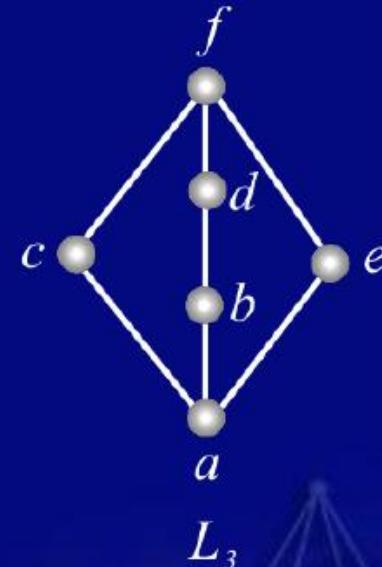
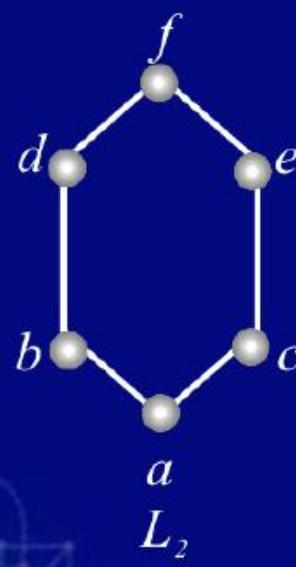
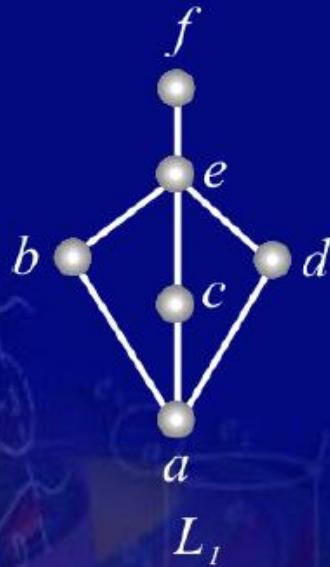


图7

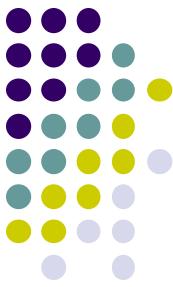


有界格

■ 定义（有界格）：设 L 为格，

- 若存在 $b \in L$ ，使得 $\forall x \in L$ 有 $b \leq x$ ，则称元素 b 是格 L 的全下界（bottom）
- 若存在 $t \in L$ ，使得 $\forall x \in L$ 有 $x \leq t$ ，则称元素 t 是格 L 的全上界（top）

此时格 L 称为有界格（bounded lattice）

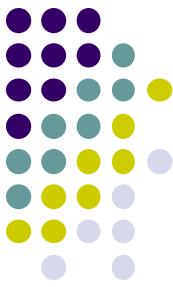


有界格 (续)

■ 注意：

- 若格 L 中存在全下界或全上界，则一定唯一
- 一般将格 L 的全下界记为**0**，全上界记为**1**
- 有界格 L 一般记为 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$
- 有界格 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 满足同一律，即 $\forall a \in L$:

$$a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \wedge 0 = 0, a \vee 1 = 1$$



有界格 (续)

- 有界格 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 满足同一律、支配律
 - 同一律: $\forall a \in L, a \vee \mathbf{0} = a, a \wedge \mathbf{1} = a$
 - 支配律: $\forall a \in L, a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}, a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$
 - **0**是关于 \vee 运算的单位元, \wedge 运算的零元;
 - **1**是关于 \wedge 运算的单位元, \vee 运算的零元。



有界格 (续)

■ 事实：

- 有限格皆为有界格，设 $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，则
 $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ 是 L 的全下界
 $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ 是 L 的全上界
- 求涉及有界格的命题之对偶命题，须将全下界与全上界对换



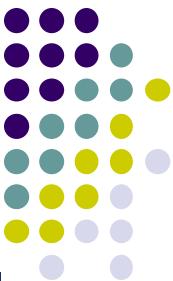
有补格

- 定义（有界格的补元）：设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 为

有界格， $a \in L$ ，若存在 $b \in L$ 使得

$$a \wedge b = 0 \text{ 且 } a \vee b = 1$$

成立，则称元素 b 是 a 的补元（complement）



有补格 (续)

例 考虑下图中的四个格. 针对不同的元素, 求出所有的补元.

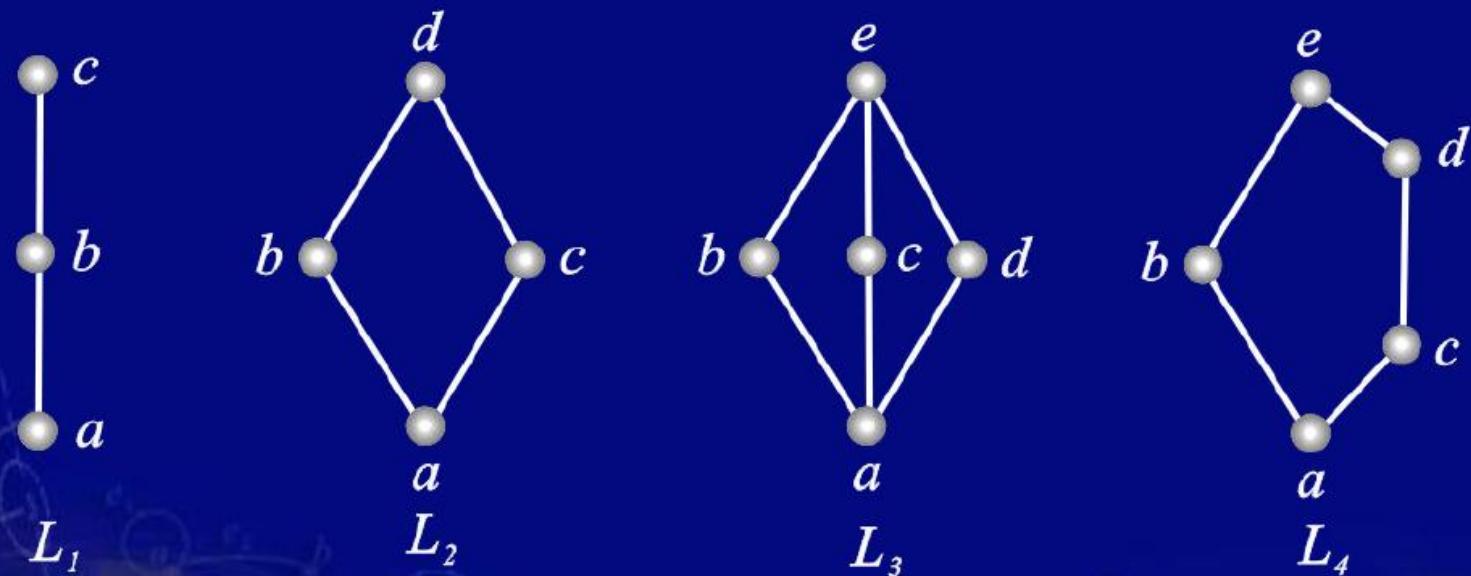


图8



有补格 (续)

- 定理 (有界分配格的补元唯一) : 设
 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 为有界分配格, $a \in L$, 若 a 存
在补元则其补元唯一
- 证明: 假设 b, c 皆为 a 之补元, 则有

$$a \vee c = 1, a \wedge c = 0; a \vee b = 1, a \wedge b = 0$$

由于全上界和全下界唯一, 从而有 $a \vee c = a \vee b$, $a \wedge c = a \wedge b$, 由于 L 是分配格, 故 $b = c$. \square



有补格 (续)

■ 事实

- 任何有界格中，全上界1和全下界0互补
- 对于一般元素，可能存在补元，也可能不存在补元
- 补元若存在，则可能唯一，也可能有多个
- 对于有界分配格，补元若存在则唯一



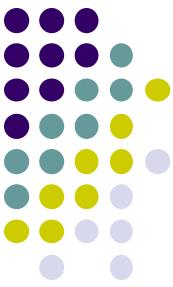
有补格 (续)

- 定义 (有补格) : 设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 为有界格
，若 L 中所有元素皆存在补元，则称 L 为
有补格 (complemented lattice)
- 例: 钻石格 M_3 和五角格 N_5 皆为有补格



有补分配格

- 代数格: 结合律、交换律、吸收律、(幂等律)
- 分配格: 分配律
- 有界: 同一律、(支配律)
- 有补: 补律、(双重补律、德摩根律)



有补分配格 (代数性质)

结合律

交换律

分配律

同一律

补律

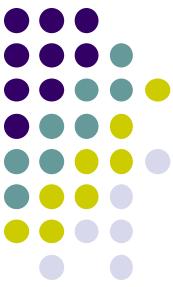
吸收律

幂等律

支配律

双重补律

德摩根律



作业

- 教材内容: [屈婉玲] 11.1, 11.2 节
- 课后习题: 见课程主页