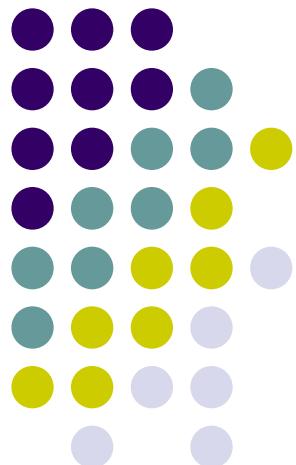
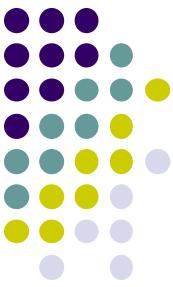


# 命题逻辑

离散数学—逻辑和证明

南京大学计算机科学与技术系





# 内容提要

- 引言
- 逻辑运算符
- 命题表达式
- 命题的真值表
- 逻辑等价





# 引言 – 编程语言中的布尔表达式

- Java程序设计语言中的布尔运算符
  - `&&`, `||`, `!`
- 举例
  - `(a >= 5) && (a <= 10)`
  - `p || !q`
- 程序验证需要考察有关不变式
  - 条件/循环语句
- 程序分析时需要考虑布尔表达式的可满足性

```
if x<0 then abs:=-x  
else abs:=x
```



# 引言 – 搜索引擎中的布尔检索

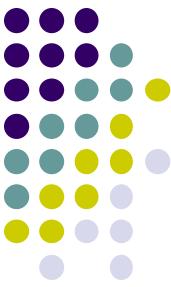
- 布尔逻辑检索

- 利用**布尔逻辑运算符**进行**检索项的逻辑组配**，用以表达检索者的查询。

- (“ San Zhang ” **OR** “张三”) **AND** "Software Engineering"
  - ..... **NOT** “Ontology”// 有的使用 “-” 替代 “**NOT**”

- 布尔运算符

- 与，合取，Conjunction (**AND**) ( $\wedge$ , &, · )
- 或，析取，Disjunction (**OR**) ( $\vee$ )
- 非，否定，Negation (**NOT**) ( $\neg$ , ~, -)



# 引言 – 逻辑迷题

## ● 泥巴孩谜题

- 一个男孩和一个女孩玩耍回来，看不见自己的额头，父亲说“你们当中至少有一个人额头上泥”。父亲问孩子“你知道你额头上有没有泥？”

$p$ : 男孩的额头上泥

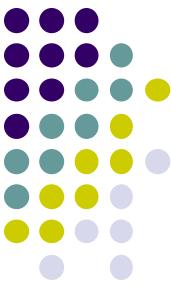
$q$ : 女孩的额头上泥

$p \vee q$  为真



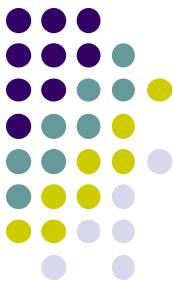
# 引言 – 日常生活中的逻辑

- 父子对话
  - 子: 爸爸, 我要玩游戏
  - 父: 不做完作业不能玩游戏 (除非..., 否则不允许....)
- 如果以 $p$ 表示 “做完作业” ,  $q$ 表示 “玩游戏”
  - 常理:  $p \rightarrow q$
  - 数学:  $\neg p \rightarrow \neg q$  (等价命题:  $q \rightarrow p$ )



# 引言 – 日常生活中的推理

- 老张宴请好友，他和老钱先到目的地，等了好久小刘还没到。老张说道：“哎，**该来的还没有来。**”
- 问题：
  - 如何理解 “**该来的还没有来**”。
  - 老钱如何进行推理： **他该不该来？**

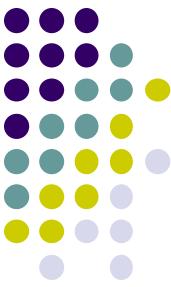


# 引言 – 合理表述的重要性

- 不合理表述的后果会很严重
  - 该来的没来
    - 老钱走了
  - 不该走的走了
    - 留下的人也走了

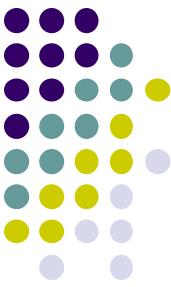
知识表示与推理

**Knowledge Representation and Reasoning, KR&R**



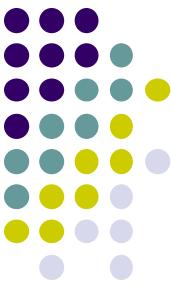
# 命题

- 命题是一个陈述语句，即一个陈述事实的句子
  - 要么真，要么假
  - 不能既真又假
- 判断下列句子是否为命题
  - ✓ ● 税收下降了
  - ✓ ● 我的收入上升了
  - ✓ ● 今天是星期五
  - ✗ ● 你会说英语吗？
  - ✗ ●  $3-x=5$
  - ✗ ● 我们走吧！
  - ✓ ● 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。
  - ✗ ● 他是个多好的人呀！
  - ✗ ● “我现在说的是假话。”



# 命题变元

- 常用小写字母表示命题变元，如：  $p, q, r$
- 命题变元的取值范围为：  $\{\text{T}, \text{F}\}$ ,  $\{1, 0\}$
- 命题也可以表示为命题变元的形式，可以理解为该变元“已赋值”
  - $p$ : 今天是周五 ( $p=0$ )
  - $q$ :  $2+2=4$  ( $q = 1$ )



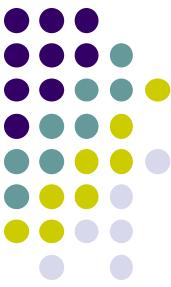
# 原子命题与复合命题

## ● 复合命题

- 并非外面在下雨。
- 张挥与王丽都是三好学生。
- 张晓静不是江西人就是安徽人。
- 如果 $2+3=6$ , 则 $\pi$ 是有理数。
- $\sqrt{3}$ 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

复合命题是否为真, 取决于:

作为复合成分的子命题的真假  
逻辑运算符 (联接词) 的语义



# 否定 (运算符, 联接词)

$\neg p$ : “非 $p$ ”

$\neg p$ 的真值表

$p$	$\neg p$
0	1
1	0

$p$ 所有可能的取值



# 合取 (运算符, 联接词)

$p \wedge q$ : “ $p$  并且  $q$ ”

$p$	$q$	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$(p,q)$  所有可能的取值

$p \wedge q = 1$  iff  
 $p$  和  $q$  均为 1

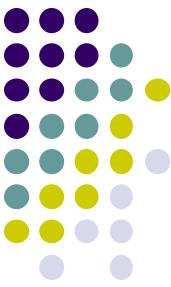


# 析取 (运算符, 联接词)

$p \vee q$ : “ $p$  或  $q$ ”

$p \vee q = 0$  iff  
 $p$  和  $q$  均为 0

$p$	$q$	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



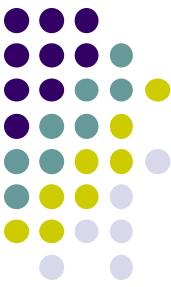
# 蕴含 (运算符, 联接词)

$p \rightarrow q$ : “若  $p$  , 则  $q$ ” (条件语句)  $p$ 称为假设,  $q$ 称为结论

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

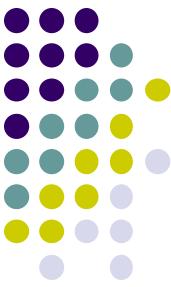
$p \rightarrow q = 0$  iff  
 $p$ 为1而 $q$ 为0





# 关于蕴含

- \* 如果 $1+1=3$ , 我就是超人
  - \* 命题为真, 不保证结论为真
- \* 老师说, 考试得85分以上会得奖。我考了90分, 但没有得到奖
  - \* 老师犯逻辑错误咯!
- \* 老师说, 考试得85分以上会得奖。我考了80分, 但得奖了!
  - \* 老师犯糊涂了?
- \* 老师说, 考试得不到85分以上别想得奖。我考了80分, 但得奖了!
- \* 老师说, 想得奖, 仅当考试得85分以上



# 关于蕴含

- $p \rightarrow q$ : “若  $p$ ，则  $q$ ” (条件语句)
- “想得奖，仅当/只有考试得85分以上”
  - “得奖”  $\rightarrow$  “考试得85分以上”
  - 考不到85分以上，甭想得奖
- 不能玩游戏，除非做完作业 ( $\neg p$ , 除非  $c$ )
  - 没有做完作业，就不能玩 ( $\neg c \rightarrow \neg p$ )



# 双蕴含 (运算符, 联接词)

$p \leftrightarrow q$  : “ $p$ 当且仅当  $q$ ” (双条件语句)

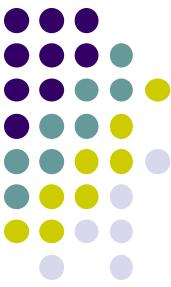
$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \leftrightarrow q = 1$  iff  
 $p$ 和 $q$ 有相同的真值



# 命题表达式（命题逻辑公式）

- 命题变元是命题表达式；
- 若 $p$ 是命题表达式，则 $(\neg p)$ 也是；
- 若 $p$ 和 $q$ 是命题表达式，则 $(p \wedge q)$ ,  $(p \vee q)$ ,  $(p \rightarrow q)$ ,  $(p \leftrightarrow q)$ 也是；
- 只有有限次应用上述规则形成的符号串才是命题表达式。
  - $(p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$ ,  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 是命题公式（省略了外层括号）。
  - $p q \rightarrow r$ 以及  $p \rightarrow \wedge q$ 都不是命题公式。
  - $p \vee q \rightarrow r$ ,  $\neg p \wedge q$ ,  $(\neg p) \wedge q$ 是命题公式
- 运算符的优先级： $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$



# 将自然语言翻译成命题表达式

只有你主修计算机科学或不是新生, 才可以从校园网访问因特网.

$a$ : 你可以从校园网访问因特网

$c$ : 你主修计算机科学

$f$ : 你是新生

$a \rightarrow (c \vee \neg f);$



## 将自然语言翻译成命题表达式（续）

除非你满16周岁, 否则只要你身高不足4英尺就不能乘滑行游乐车.

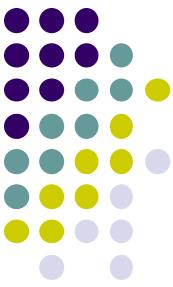
$q$ : 你能乘滑行游乐车

$r$ : 你身高不足4英尺

$s$ : 你满16周岁

$s \vee (r \rightarrow \neg q)$

$(\neg s \wedge r) \rightarrow \neg q$



## 将自然语言翻译成命题表达式（续）

- 套餐的菜单上写着：
  - 鸡腿饭或者叉烧饭，苹果或香蕉

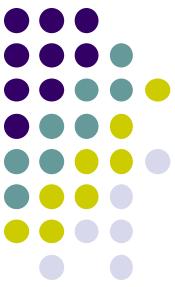


# 命题表达式的真值表 $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$

$p$	$q$	$r$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg r$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0			1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1

一种“成假”指派

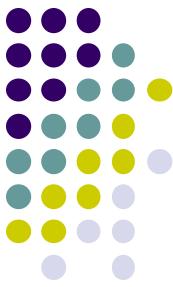
该命题表达式的所有指派



# 命题表达式的真值表

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1



# 永真式、矛盾式与可能式

- 永真式（重言式）：总是真的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如： $p \vee \neg p$
- 矛盾式：总是假的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如： $p \wedge \neg p$
- 可能式：既不是永真式又不是矛盾式。比如： $\neg p$

$p$	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

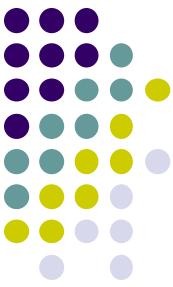


# 逻辑等价

- $p$ 和 $q$ 逻辑等价: 在所有可能情况下 $p$ 和 $q$ 都有相同的真值。
  - 也就是说,  $p \leftrightarrow q$ 是永真式.
  - 记法:  $p \equiv q$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\text{T} \equiv p \vee \neg p \quad \text{F} \equiv p \wedge \neg p$$



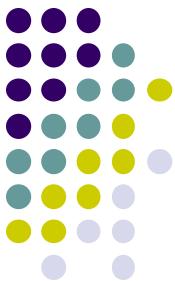
# 命题逻辑公式（定义为一个形式语言）

$\bullet ::= p \mid (\neg \phi_1) \mid (\phi_1 \wedge \phi_2) \mid (\phi_1 \vee \phi_2) \mid (\phi_1 \rightarrow \phi_2) \mid \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$

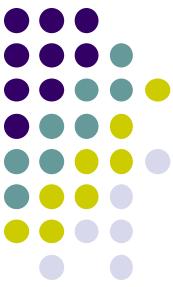
或者

$\phi ::= p \mid (\neg \phi_1) \mid (\phi_1 \wedge \phi_2) \mid (\phi_1 \vee \phi_2) \mid (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$

- $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2 \triangleq (\phi_1 \rightarrow \phi_2) \wedge (\phi_2 \rightarrow \phi_1)$



有 A、B、C 3 个人，其中 C 被蒙住了双眼。3 个人各带一个帽子，帽子有白、黑 2 种，但不全为白色的。3 个人都看不见自己头上的帽子，A 先看看 B 和 C，说无法确定自己帽子什么颜色；B 看看 A 和 C，说也不能确定自己头上帽子颜色；这时候 C 说他知道自己帽子的颜色了。请问：C 的帽子是什么颜色？请用命题逻辑进行演算，证明结论正确性。



# 作业

- 教材内容: [Rosen] 1.1, 1.2, 1.3节
- 课后习题:
  - 见课程网站