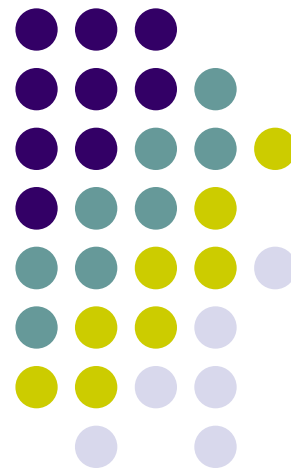
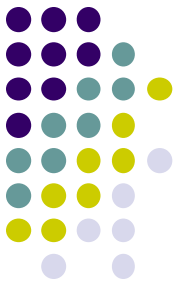


命题逻辑

离散数学—逻辑和证明

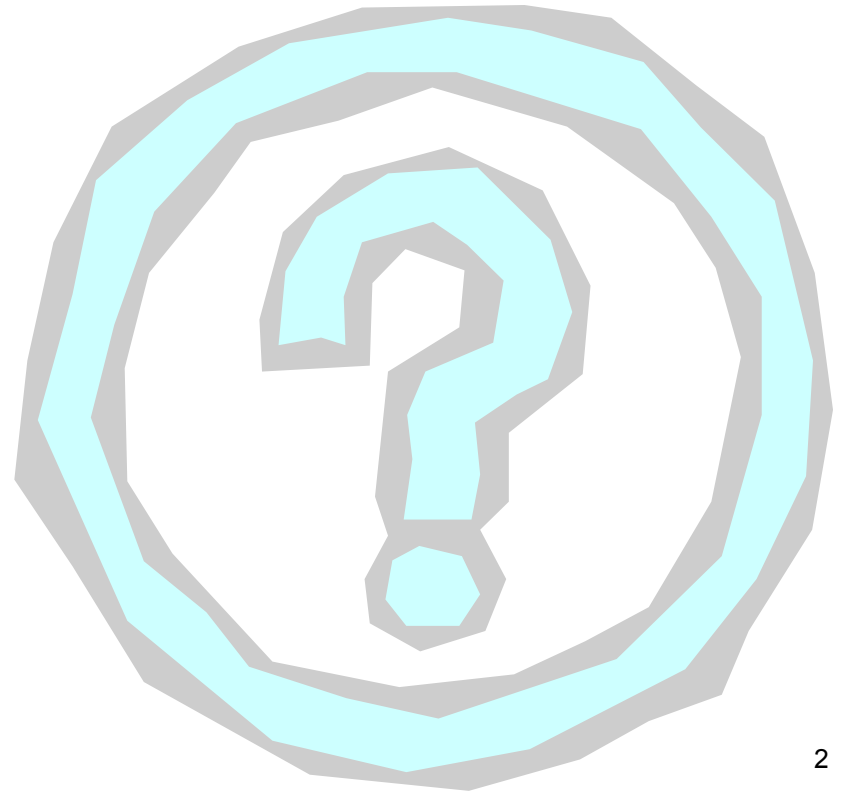
南京大学计算机科学与技术系

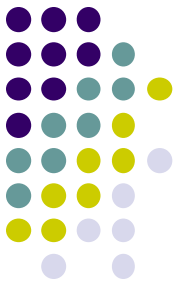




内容提要

- 引言
- 逻辑运算符
- 命题表达式
- 命题的真值表
- 逻辑等价





引言 – 编程语言中的布尔表达式

- Java程序设计语言中的布尔运算符

- $\&\&$, \parallel , $!$

- 举例

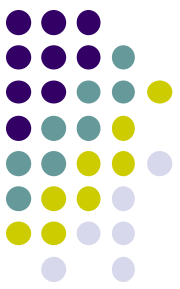
- $(a \geq 5) \&\& (a \leq 10)$
- $p \parallel !q$

```
if  $x < 0$  then  $\text{abs} := -x$   
    else  $\text{abs} := x$ 
```

- 程序验证需要考察有关不变式

- 条件/循环语句

- 程序分析时需要考虑布尔表达式的可满足性



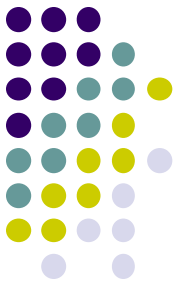
引言 – 搜索引擎中的布尔检索

- 布尔逻辑检索

- 利用布尔逻辑运算符进行检索项的逻辑组配，用以表达检索者的查询。
 - (“ San Zhang ” OR “张三”) AND "Software Engineering"
 - NOT “Ontology”// 有的使用 “-” 替代 “NOT”

- 布尔运算符

- 与，合取，Conjunction (AND) (\wedge , &, \cdot)
- 或，析取，Disjunction (OR) (\vee)
- 非，否定，Negation (NOT) (\neg , \sim , -)



引言 – 逻辑谜题

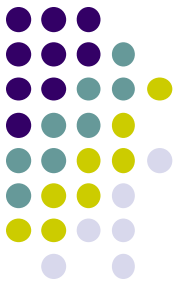
- 泥巴孩谜题

- 一个男孩和一个女孩玩耍回来，看不见自己的额头，父亲说“你们当中至少有一个人额头上有泥”。父亲问孩子“你知道你额头上有没有泥？”

p : 男孩的额头上有泥

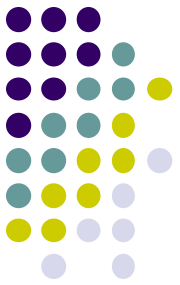
q : 女孩的额头上有泥

$p \vee q$ 为真



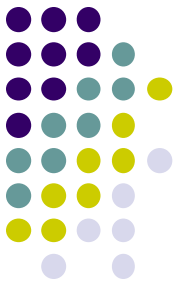
引言－日常生活中的逻辑

- 父子对话
 - 子：爸爸，我要玩游戏
 - 父：不做完作业不能玩游戏（除非...，否则不允许....）
- 如果以 p 表示“做完作业”， q 表示“玩游戏”
 - 常理： $p \rightarrow q$
 - 数学： $\neg p \rightarrow \neg q$ （等价命题： $q \rightarrow p$ ）



引言－日常生活中的推理

- 老张宴请好友，他和老钱先到目的地，等了好久小刘还没到。老张说道：“哎，**该来的还没有来。**”
- 问题：
 - 如何理解“**该来的还没有来**”。
 - 老钱如何进行推理：**他该不该来？**



引言 – 合理表述的重要性

- 不合理表述的后果会很严重
 - 该来的没来
 - 老钱走了
 - 不该走的走了
 - 留下的人也走了

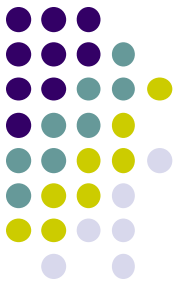
知识表示与推理

Knowledge Representation and Reasoning, KR&R

命题



- 命题是一个陈述语句，即一个陈述事实的句子
 - 要么真，要么假
 - 不能既真又假
- 判断下列句子是否为命题
 - ✓ ● 税收下降了
 - ✓ ● 我的收入上升了
 - ✓ ● 今天是星期五
 - ✗ ● 你会说英语吗?
 - ✗ ● $3-x=5$
 - ✗ ● 我们走吧!
 - ✓ ● 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。
 - ✗ ● 他是个多好的人呀!
 - ✗ ● “我现在说的是假话。”



命题变元

- 常用小写字母表示命题变元，如： p, q, r
- 命题变元的取值范围为： $\{T, F\}, \{1, 0\}$
- 命题也可以表示为命题变元的形式，可以理解为该变元“已赋值”
 - p : 今天是周五 ($p=0$)
 - q : $2+2=4$ ($q=1$)



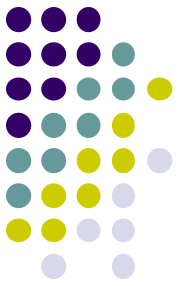
原子命题与复合命题

- 复合命题

- 并非外面在下雨。
- 张挥与王丽都是三好学生。
- 张晓静不是江西人就是安徽人。
- 如果 $2+3=6$ ，则 π 是有理数。
- $\sqrt{3}$ 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

复合命题是否为真，取决于：

作为复合成分的子命题的真假
逻辑运算符（联接词）的语义



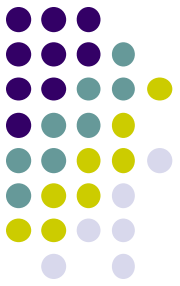
否定 (运算符, 联接词)

$\neg p$: “非 p ”

$\neg p$ 的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

p 所有可能的取值



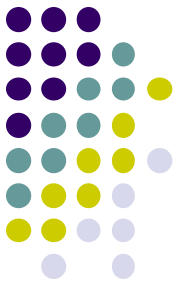
合取 (运算符, 联接词)

$p \wedge q$: “ p 并且 q ”

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \wedge q = 1$ iff
 p 和 q 均为1

(p, q) 所有可能的取值

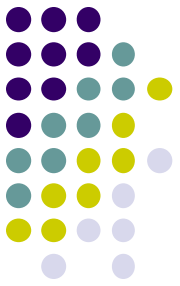


析取 (运算符, 联接词)

$p \vee q$: “ p 或 q ”

$p \vee q = 0$ iff
 p 和 q 均为0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



蕴含 (运算符, 联接词)

$p \rightarrow q$: “若 p , 则 q ” (条件语句) p 称为假设, q 称为结论

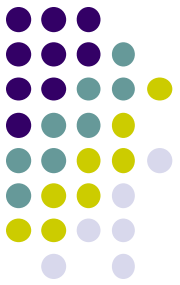
p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p \rightarrow q = 0$ iff
 p 为1而 q 为0

关于蕴含

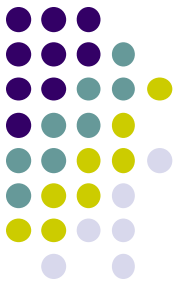


- * 如果 $1+1=3$ ，我就是超人
 - * 命题为真，不保证结论为真
- * 老师说，考试得85分以上会得奖。我考了90分，但没有得到奖
 - * 老师犯逻辑错误咯!
- * 老师说，考试得85分以上会得奖。我考了80分，但得奖了!
 - * 老师犯糊涂了?
- * 老师说，考试得不到85分以上别想得奖。我考了80分，但得奖了!
- * 老师说，想得奖，仅当考试得85分以上



关于蕴含

- $p \rightarrow q$: “若 p , 则 q ” (条件语句)
- “想得奖, 仅当/只有考试得85分以上”
 - “得奖” \rightarrow “考试得85分以上”
 - 考不到85分以上, 甬想得奖
- 不能玩游戏, 除非做完作业 ($\neg p$, 除非 c)
 - 没有做完作业, 就不能玩 ($\neg c \rightarrow \neg p$)

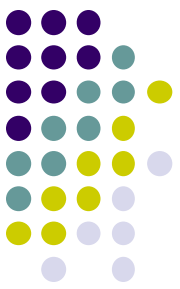


双蕴含 (运算符, 联接词)

$p \leftrightarrow q$: “ p 当且仅当 q ” (双条件语句)

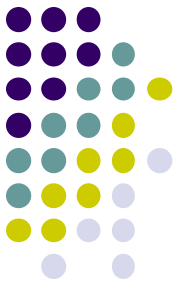
p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \leftrightarrow q = 1$ iff
 p 和 q 有相同的真值



命题表达式（命题逻辑公式）

- 命题变元是命题表达式；
- 若 p 是命题表达式，则 $(\neg p)$ 也是；
- 若 p 和 q 是命题表达式，则 $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \leftrightarrow q)$ 也是；
- 只有有限次应用上述规则形成的符号串才是命题表达式。
 - $(p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$, $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 是命题公式（省略了外层括号）。
 - $pq \rightarrow r$ 以及 $p \rightarrow \wedge q$ 都不是命题公式。
 - $p \vee q \rightarrow r$, $\neg p \wedge q$, $(\neg p) \wedge q$ 是命题公式
- 运算符的优先级： \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow



将自然语言翻译成命题表达式

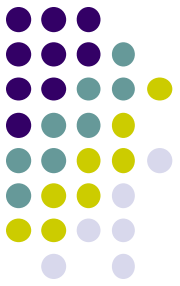
只有你主修计算机科学或不是新生, 才可以从校园网访问因特网.

a : 你可以从校园网访问因特网

c : 你主修计算机科学

f : 你是新生

$a \rightarrow (c \vee \neg f);$



将自然语言翻译成命题表达式（续）

除非你满16周岁, **否则**只要你身高不足4英尺就不能乘滑行游乐车.

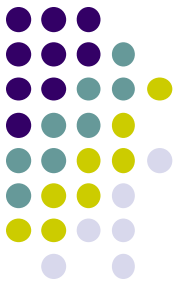
q : 你能乘滑行游乐车

r : 你身高不足4英尺

s : 你满16周岁

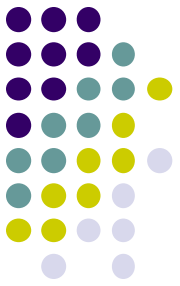
$s \vee (r \rightarrow \neg q)$

$(\neg s \wedge r) \rightarrow \neg q$



将自然语言翻译成命题表达式（续）

- 套餐的菜单上写着：
 - 鸡腿饭或者叉烧饭，苹果或香蕉

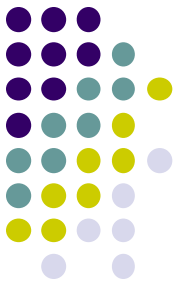


命题表达式的真值表 $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg r$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1

该命题表达式的所有指派

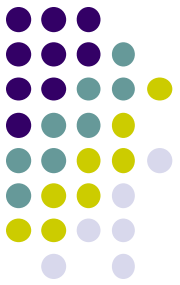
一种“成假”指派



命题表达式的真值表

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

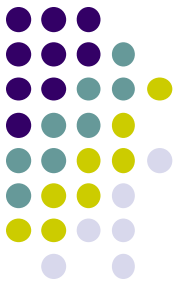
p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1



永真式、矛盾式与可能式

- 永真式（重言式）：总是真的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如： $p \vee \neg p$
- 矛盾式：总是假的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如： $p \wedge \neg p$
- 可能式：既不是永真式又不是矛盾式。比如： $\neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0



逻辑等价

- p 和 q 逻辑等价：在所有可能情况下 p 和 q 都有相同的真值。
 - 也就是说， $p \leftrightarrow q$ 是永真式。
 - 记法： $p \equiv q$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$T \equiv p \vee \neg p \qquad F \equiv p \wedge \neg p$$

命题逻辑公式（定义为一个形式语言）



$$\phi ::= p \mid (\neg \phi_1) \mid (\phi_1 \wedge \phi_2) \mid (\phi_1 \vee \phi_2) \mid (\phi_1 \rightarrow \phi_2) \mid \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$$

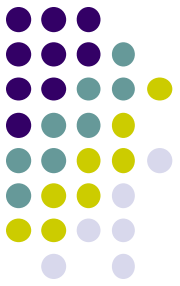
或者

$$\phi ::= p \mid (\neg \phi_1) \mid (\phi_1 \wedge \phi_2) \mid (\phi_1 \vee \phi_2) \mid (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$$

- $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2 \triangleq (\phi_1 \rightarrow \phi_2) \wedge (\phi_2 \rightarrow \phi_1)$



有 A、B、C 3 个人，其中 C 被蒙住了双眼。3 个人各带一个帽子，帽子有白、黑 2 种，但不全为白色的。3 个人都看不见自己头上的帽子，A 先看看 B 和 C，说无法确定自己帽子什么颜色；B 看看 A 和 C，说也不能确定自己头上帽子颜色；这时候 C 说 he 知道自己帽子的颜色了。请问：C 的帽子是什么颜色？请用命题逻辑进行演算，证明结论正确性。



作业

- 教材内容: [Rosen] 1.1, 1.2, 1.3节
- 课后习题:
 - 见课程网站