谓词逻辑初步

离散数学—逻辑和证明

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 引言
- 谓词
- 量词
- 推理

引言

- 例：
  - 人都要死的
  - 苏格拉底是人
  - 苏格拉底要死的

  - 命题逻辑无法处理！

引言

- 知识表示
  - $brother(x, y) \wedge father(y, z) \rightarrow uncle(x, z)$
  - $father(x, y) \wedge father(y, z) \rightarrow grandfather(x, z)$

  - 命题逻辑无法表达!

谓词 (Predicate)

- 如果x是整数，“x 大于2” 不是命题，它的真值依赖于x的取值
  - 可以将 “x大于2”表示为 P(x)。
- 一元谓词P: 陈述P(x) 看作命题函数P在x的一个值.
  - P 的定义域是整数集
  - P(3)是一个取值为T的命题
  - P(1)是一个取值为F的命题
- 举例，二元谓词Q：Q(x, y)表示 “x=y+3”。

量词(Quantifier)

- 若P(x) 是谓词, ∀xP(x)表示 “对所有的x, P(x)”。 ∀ 称为全称量词 (Universal Quantifier)
- 若P(x) 是谓词, ∃xP(x)表示 “存在某个x, P(x)”。
  ∃ 称为存在量词 (Existential Quantifier)
- 例：P(x)表示x>2
  - ∀xP(x)为F（假），∃xP(x)为T（真）
- 优先级：量词的优先级高于其它逻辑运算符。

关于论域/作用域的讨论

- 符号化以下语句
  - P(x)表示$x^2>0$，$\forall x P(x)$的真值?
  - 有的政治家诚实
  - 所有美国人都喜欢汉堡包

关于论域/作用域的讨论

- 观察量化表达式
  - $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$
  - $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$
  - $\forall xP(x) \wedge \forall yQ(y)$
  - $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
  - $\forall x(P(x,y) \wedge Q(x,y))$
- 量化表达式中的变元：绑定、自由、作用域、替换

带量词的公式的否定式

- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- 对所有的实数x, x的平方是正数
- 否定：存在某个实数 x, 其平方不是正数。
- $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
- 存在x, 满足 5x=x.
- 否定：对任意的x, 5x≠x.

多个量词并用

- $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$

  举例：$P(x,y)$ 表示 $x+y=y+x$。论域为实数集

- $\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$

  举例： $P(x,y)$ 表示$x=y+1$。

- $\forall x \exists y P(x,y)$ 与 $\exists y \forall x P(x,y)$ 不一定等价

  举例：$P(x,y)$ 表示“$y>x$”。

多个量词并用

- 考虑实数集：
  - $\forall x \forall y P(x,y)$ 与 $\forall y \forall x P(x,y)$ 总是有相同的真值。若$P(x,y)$ 表示 $x+y=y+x$，则$\forall y \forall x P(x,y)$为真。
  - $\exists x \exists y P(x,y)$ 与 $\exists y \exists x P(x,y)$ 总是有相同的真值。若$P(x,y)$ 表示$x=y+1$，则$\exists y \exists x P(x,y)$为真。
  - 若$P(x,y)$ 表示 “$y>x$” 则$\forall x \exists y P(x,y)$ 为真，但$\exists y \forall x P(x,y)$ 为假。

将自然语言翻译成逻辑表达式

这个班上的每个学生都学过微积分课程.

$S(x)$: x是这个班上的

$C(x)$: x学过微积分课程

$\forall x\,(S(x) \rightarrow C(x))$

这个班上的每个学生都或去过加拿大，或去过墨西哥.

$\forall x\,(S(x) \rightarrow V(x, \text{加拿大}) \vee V(x, \text{墨西哥}))$

练习：所有狮子都是凶猛的，有些狮子不喝咖啡。

一个关于素数的命题

在 n 与 $2n$ 之间存在素数 (Tschebyscheff定理):

- $\forall n(N(n) \to \exists x(N(x) \wedge (x \geq n) \wedge (x \leq 2n) \wedge \forall y(y|x \to (y=1 \vee y=x))))$
- 定义: $N(x)$: x 是正整数;
- $y|x$: y 整除 x

练习: "不存在最大的素数。"

为阅读和构造证明而必须掌握的若干基本逻辑要素：推理规则

- 推理的样例
  - 老张请小刘和老钱吃饭。　他和老钱先到饭店，等了好久小刘还没有到。老张自言自语说：“哎，该来的还没来。”老钱听了不高兴了：“哦，原来我是不该来的？那我走吧。”
  - 问题：
    - 如果你是老钱，你会不高兴吗？你的不高兴，有道理吗？

推理的一般解释：

- 从“前提”$A_1, A_2, \ldots, A_k$为真出发，推出“结论”B为真的推理（证明）过
  - 前提：该来的还没有来
  - 结论：老钱不该来
- 其中我们关心的是：
  - 结论是否正确
- 其实，我们更关心的是：
  - 推理（证明）过程是否正确！

当前提都正确的时候，
如果推理过程正确，
那么，结论一定正确！

老钱该不该来?

定义谓词:

P(x):x该来; Q(x):x来了

$\forall$: 全称量词,表示"对所有的"

- 前提:
  - 该来的还没有来
    - $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ -------- (1)
  - 老钱来了
    - Q(老钱)
- 推理过程
  - (1) $\Rightarrow$ P(老钱
  - (3)+(2) $\Rightarrow$ $\neg$
- 结论:
  - 老钱不该来!

老钱其实完全可以来!

问题出在哪里?

推理过程? 正确!

前提? 前提有误!

再一例

- 如果税收下降，收入一定上升。现在我的收入上升了，所以，一定是税收下降了！
- 定义命题P：税收下降；命题Q：收入上升
- 前提：
  - $P \rightarrow Q$；Q
- 结论：
  - P
- 推理过程:
  - ?

推理过程的不正确，
不能保证任何结果的正确性

推理过程正确性保障

推理过程正确性的保障需要
数学(具体而言是数理逻辑)的支持!

数理逻辑基础包括:
命题逻辑和谓词逻辑

推理的结构–重言式

- 前提：一组命题公式A_1, A_2, …, A_k
- 结论：一个命题公式B
- 所谓“推理正确”指：
  - 对诸A_i和B中出现的命题变元的任一指派，若前提的合取式为真，则结论必为真

推理的结构–重言式

- 即“推理为正确的”当且仅当

  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$是重言式

- 说明：
  - $\Rightarrow$ 若推理正确，则或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \equiv F$，或者（$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \equiv T$，且$B \equiv T$），无论何种情况，上式为真，蕴涵式永真。
  - $\Leftarrow$ 若上述蕴涵式为重言式，且$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真，B也必为真，因此推理正确。
- 注意：若前提的合取式为假，推理总是正确，或者说，推理正确并不保证结论正确

推理过程

- 从前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$为真出发，推出结论B为真的推理过程是一个表达式序列，该序列最后一个表达式应是要证明的结论，而其它任一表达式满足如下的条件,:
  - 它可以是任意一个重言式;
  - 它可以是$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$中的任何一个表达式;
  - 可以是序列中前面的任一表达式通过应用“替换规则”得到的表达式;
  - 可以是对序列中前面任意一个或若干个表达式应用推理规则得到的新表达式
    - $A, (A\rightarrow B)$得到B

例

- 以下推论合理吗?
  - 晚上编程序就没法早早睡觉；
  - 睡得早，起床早，上课不迟到；
  - 所以，要想不迟到，晚上千万不能编程序！
    - 不合理
- 再一例：
  - 如果税收下降，收入一定上升。现在我的收入上升了，所以，一定是税收下降了！
    - 不合理

命题逻辑的推理规则

附加 $1.\ A \Rightarrow (A \vee B)$

化简 $2.\ (A \wedge B) \Rightarrow A$

假言推理 $3.\ A \rightarrow B, A \Rightarrow B$

取拒式 $4.\ A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A$

析取三段论 $5.\ A \vee B, \neg B \Rightarrow A$

假言三段论 $6.\ A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$

消解 $7.\ A \vee B, \neg A \vee C \Rightarrow B \vee C$

常用的蕴涵重言式

$$1.\ A \to (A \vee B)$$

$$2.\ (A \wedge B) \to A$$

$$3.\ ((A \to B) \wedge A) \to B$$

$$4.\ ((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$$

$$5.\ ((A \vee B) \wedge \neg B) \to A$$

$$6.\ ((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$$

$$7.\ ((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \to (A \leftrightarrow C)$$

$$8.\ ((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C)) \to (B \vee D)$$

$$((A \to B) \wedge (\neg A \to B)) \to B$$

$$9.\ ((A \to B) \wedge (C \to D) \to (\neg B \vee \neg D)) \to (\neg A \vee \neg C)$$

蕴含重言式在逻辑推理中相当重要

蕴涵重言式与导出的推理规则

附加律	$1.\ A \Rightarrow (A \vee B)$
化简律	$2.\ (A \wedge B) \Rightarrow A$
假言推理	$3.\ ((A \to B) \wedge A) \Rightarrow B$
取拒式	$4.\ ((A \to B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$
析取三段论	$5.\ ((A \vee B) \wedge \neg B) \Rightarrow A$
假言三段论	$6.\ ((A \to B) \wedge (B \to C)) \Rightarrow (A \to C)$
等价三段论	$7.\ ((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$
构造性二难	$8.\ ((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C)) \Rightarrow (B \vee D)$
	$((A \to B) \wedge (\neg A \to B)) \Rightarrow B$
破坏性二难	$9.\ ((A \to B) \wedge (C \to D) \to (\neg B \vee \neg D)) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$

与量词有关的“自然演绎”规则

$$\frac{\forall x\, P(x)}{\therefore P(c)}$$

全称例示

$$\frac{P(c)\text{对任意的}c}{\therefore\ \forall x\, P(x)}$$

全称生成

$$\frac{\exists x\, P(x)}{\therefore P(c)\text{对于某个}c}$$

存在例示

$$\frac{P(c)\text{对某个}c}{\therefore\ \exists x\, P(x)}$$

存在生成

与量词有关的基本推理规则

- 全称例示 UI: $\forall x P(x) \Rightarrow P(c)$
- 全称生成 UG: $P(c)$,任意c $\Rightarrow \forall x P(x)$
- 存在例示 EI: $\exists x P(x) \Rightarrow$ 对某个c, $P(c)$
- 存在生成 EG: 对某个c, $P(c) \Rightarrow \exists x P(x)$

苏格拉底到底死不死?

- $P(x)$: x是人；$Q(x)$： x要死
- 符号化及推理过程:
  - 人都是要死的： $\forall x(P(x) \to Q(x))$

    $P(苏格拉底) \to Q(苏格拉底)$

    苏格拉底是人： $P(苏格拉底)$

    $\therefore Q(苏格拉底)$

谓词逻辑中的推理（举例）

- “在这个班上的某个学生没有读过这本书”，“班上的每个人都通过了第一门考试”，结论“通过第一门考试的某个人没有读过这本书”。
- $C(x)$: x在这个班上
- $B(x)$: x读过书了
- $P(x)$: x通过了第一门考试
  - $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
  - $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$
  - $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

$C(a) \wedge \neg B(a)$	存在例示
$C(a)$	化简
$C(a) \rightarrow P(a)$	全称例示
$P(a)$	假言推理
$\neg B(a)$	化简
$\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$	存在生成

Prolog（Programming in Logic）

- 若教授p是课程c的老师，学生s注册课程c，则p教s。
  - instructor(p, c)∧enrolled(s, c) → teaches(p, s)

teaches(p, s) :- instructor(p, c), enrolled(s, c)

- 事实
  - instructor(*chan*, *math273*)
  - enrolled(*kevin*, *math273*)
  - enrolled(*kiko*, *math273*)
- 查询
  - ? teaches(*chan*, *x*)

再一例

- 以下推论正确吗？
  - 有人喜欢喝茶，有人喜欢喝酒
  - 因此，有人既喜欢喝茶又喜欢喝酒

- 令：A(x)：x喜欢喝茶；B(x)：x喜欢喝酒
- 推理如下：
- 1. $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ Premise
- 2. $\exists x A(x)$ 化简，1
- 3. $\exists x B(x)$ 化简，1
- 4. $A(c)$ 例示，2
- 5. $B(c)$ 例示，3
- 6. $A(c) \wedge B(c)$ 合取. 4,5
- 7. $\exists x (A(x) \wedge B(x))$ 生成，6

老钱该不该来?

- 前提:
  - 该来的还没有来
    - $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ -------- (1)
  - 老钱来了
    - Q(老钱)
- 推理过程
  - (1) $\Rightarrow$ P(老钱
  - (3)+(2) $\Rightarrow$ ¬
- 结论:
  - 老钱不该来!

定义谓词:

P(x):x该来; Q(x):x来了

$\forall$: 全称量词,表示“对所有的”

老钱其实完全可以来!

问题出在哪里?

推理过程? 正确!

前提? 前提有误!

老钱真的可以来

- 前提：
  - “该来的还没有来”改成“还有一个该来的还没有来”
    - $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ -------- (1)
  - 老钱来了
    - Q(老钱) --
- 推理过程
  - (1) ==> P(小刘) ∧ ¬Q(小刘)
- 结论：
  - 老钱真的可以来！

定义谓词：
P(x):x该来；
Q(x):x来了

小结

- 谓词逻辑
  - 在命题逻辑基础上引入谓词和量词，

- 推理
  - 严格的基于命题逻辑和谓词逻辑的形式推理

[练习题]

每个喜欢微博的大学生都不喜欢看报纸，每个大学生喜欢看报纸或喜欢上网，并非每个大学生都喜欢上网，因而我们可以得出有的大学生不喜欢微博?

作业

- 教材内容：[Rosen] 1.4，1.5，1.6节
- 课后习题：
  - 见课程主页

(***Requires calculus***) Use quantifiers to express the definition of the limit of a real-valued function $f(x)$ of a real variable x at a point a in its domain.

Solution: Recall that the definition of the statement

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

is: For every real number $\epsilon > 0$ there exists a real number $\delta > 0$ such that $|f(x) - L| < \epsilon$ whenever $0 < |x - a| < \delta$. This definition of a limit can be phrased in terms of quantifiers by

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon),$$

where the domain for the variables δ and ϵ consists of all positive real numbers and for x consists of all real numbers.

This definition can also be expressed as

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

when the domain for the variables ϵ and δ consists of all real numbers, rather than just the positive real numbers. [Here, restricted quantifiers have been used. Recall that $\forall x > 0 \; P(x)$ means that for all x with $x > 0$, $P(x)$ is true.] ◀

Solution: To say that $\lim_{x\to a} f(x)$ does not exist means that for all real numbers L, $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$. By using Example 8, the statement $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ can be expressed as

$$\neg\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Successively applying the rules for negating quantified expressions, we construct this sequence of equivalent statements

$$\begin{aligned}
&\neg\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)\\
&\qquad\equiv \exists\epsilon > 0\ \neg\exists\delta > 0\ \forall x(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)\\
&\qquad\equiv \exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \neg\forall x(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)\\
&\qquad\equiv \exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\ \neg(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)\\
&\qquad\equiv \exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x(0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon).
\end{aligned}$$

In the last step we used the equivalence $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$, which follows from the fifth equivalence in Table 7 of Section 1.3.

Because the statement "$\lim_{x\to a} f(x)$ does not exist" means for all real numbers L, $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$, this can be expressed as

$$\forall L \exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x(0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon).$$