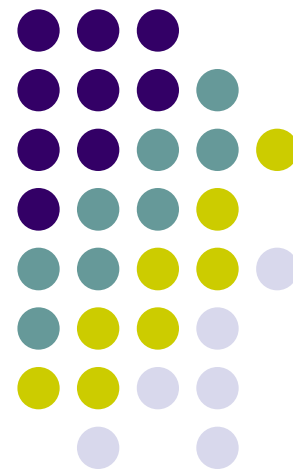
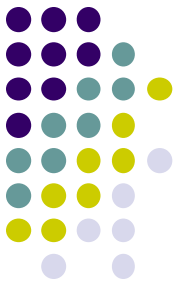


# 布尔代数

离散数学 – 代数结构

南京大学计算机学院

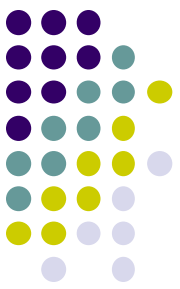




# 内容提要

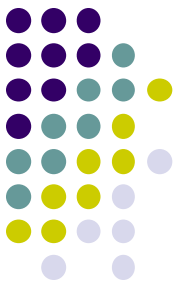
- 布尔函数
- 布尔代数
- 布尔代数的抽象定义
- 布尔代数的性质
- 有限布尔代数
- 布尔代数与数字逻辑电路设计





# 布尔函数

- 令  $B=\{0, 1\}$ ,  $B^n=\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in B, i=1, \dots, n\}$ , 从  $B^n$  到  $B$  的函数称为  **$n$ 度布尔函数**,  $f: B^n \rightarrow B$ 。
- 取值范围为  $B$  的变元称为 **布尔变元**,  $x \in B$ 。
- $n$ 度布尔函数的个数:  $2 \uparrow 2^n (2^2, 2^4, 2^8, \dots)$
- 三种说法
  - 含  $n$  个命题变量的命题逻辑表达式
  - $n$ 度布尔函数  $f: B^n \rightarrow B$
  - 有  $n$  个输入和一个输出的逻辑电路



# 一个逻辑电路设计的例子

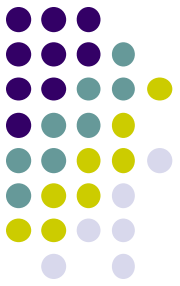
- 举重比赛中三个裁判中两个或者两个以上判定为成功则该次成绩有效, 设计一个电子打分器, 输出一个结果: “成功”或”失败”。

布尔函数:  $f(x,y,z)=1$  iff.  $x,y,z$  至少有两个为1。

相应的布尔表达式:

$$(x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z)$$

$x$	$y$	$z$	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



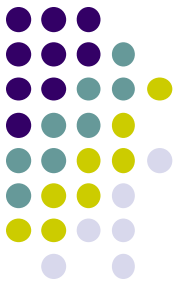
# 回顾：命题表达式的主析取范式

- 求  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$  的主析取范式

- $(\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$  (析取范式)

$$\begin{aligned}\neg p \wedge r &\leftrightarrow \neg p \wedge (\neg q \vee q) \wedge r \\ &\leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\ q \wedge r &\leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)\end{aligned}$$

- $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
- $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$
- |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 001 | 011 | 100 | 111 |
|-----|-----|-----|-----|



# 集合 $\{0, 1\}$ 上的运算

- 布尔和

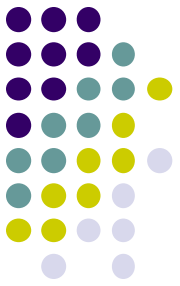
- $1+1=1, 1+0=1, 0+1=1, 0+0=0$

- 布尔积

- $1 \cdot 1=1, 1 \cdot 0=0, 0 \cdot 1=0, 0 \cdot 0=0$

- 补

- $\bar{0}=1, \bar{1}=0$



# 布尔函数上的运算

- 布尔和

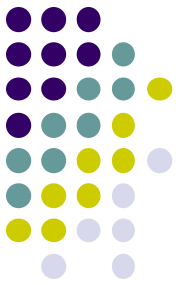
- $(f+g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)$

- 布尔积

- $(f \cdot g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n)$

- 补函数

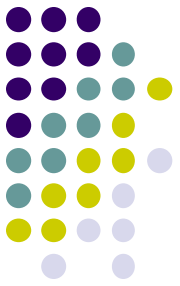
- $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}$



# 布尔恒等式 (1)

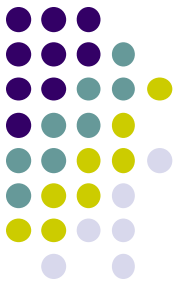
等 式	名 称
$\overline{\overline{x}} = x$	双重补律
$x+x = x$ $x \cdot x = x$	幂等律
$x+0 = x$ $x \cdot 1 = x$	同一律
$x+1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	支配律
$x+y = y+x$ $x \cdot y = y \cdot x$	交换律





## 布尔恒等式 (2)

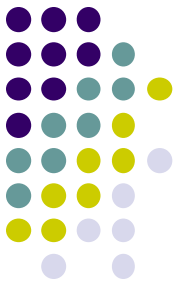
等 式	名 称
$x+(y+z)=(x+y)+z$ $x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$	结合律
$x+(y \cdot z)=(x+y) \cdot (x+z)$ $x \cdot (y+z)=x \cdot y + x \cdot z$	分配律
$\overline{(x \cdot y)} = \bar{x} + \bar{y}$ $\overline{(x+y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$	德摩根律
$x+(x \cdot y)=x$ $x \cdot (x+y)=x$	吸收律
$x + \bar{x} = 1$ $x \cdot \bar{x} = 0$	补律



# 布尔代数的抽象定义

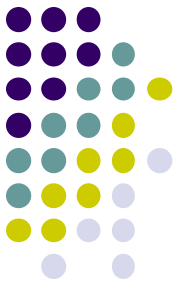
- 一个布尔代数是一个集合 $B$ ，它有二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 、一元运算 $\neg$ 以及特殊元素 $0$ 和 $1$ ，且 $\forall x, y, z \in B$ ，下列性质成立：

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	结合律
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	分配律
$x \wedge y = y \wedge x$ $x \vee y = y \vee x$	交换律
$x \vee 0 = x$ $x \wedge 1 = x$	同一律
$x \vee \bar{x} = 1$ $x \wedge \bar{x} = 0$	补 律



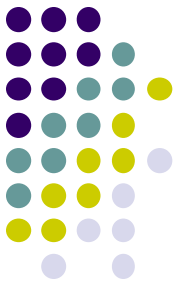
# 布尔代数举例

- $(\{0, 1\}, +, \cdot, -, 0, 1)$  为布尔代数
- $n$  度布尔函数全体也构成一个布尔代数
  - 布尔和
  - 布尔积
  - 补函数
  - 全取0的函数、全取1的函数
- $A$  的幂集也构成一个布尔代数  $(\rho(A), \cap, \cup, \sim, \emptyset, A)$



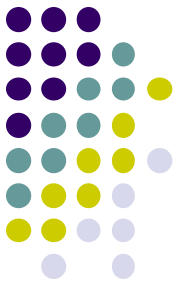
# 布尔代数举例

- $\mathbf{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{B}, i = 1, \dots, n\}$  构成布尔代数
  - $x = (a_1, \dots, a_n), y = (b_1, \dots, b_n), a_i \in \mathbf{B}, b_i \in \mathbf{B}$
  - $x \wedge y = (c_1, \dots, c_n)$ , where  $c_i = a_i \wedge b_i$
  - $x \vee y = (d_1, \dots, d_n)$ , where  $d_i = a_i \vee b_i$
  - $\bar{x} = (e_1, \dots, e_n)$ , where  $e_i = \bar{a}_i$



# 布尔代数的性质

- 结合律、交换律、分配律、同一律、补律
  - 蕴含：支配律、吸收律、幂等律、双重补律、德摩根律
- 证明支配律：  $\forall x \in B, x \vee 1 = 1, x \wedge 0 = 0$ 
  - $x \vee 1 = 1 \wedge (x \vee 1) = (x \vee \bar{x}) \wedge (x \vee 1) = x \vee (\bar{x} \wedge 1) = x \vee \bar{x} = 1$
  - $x \wedge 0 = 0 \vee (x \wedge 0) = (x \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge 0) = x \wedge (\bar{x} \vee 0) = x \wedge \bar{x} = 0$



# 布尔代数的性质

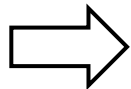
## ● 证明吸收律

- $x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x$
- $x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee 0 = x$

## ● 证明幂等律

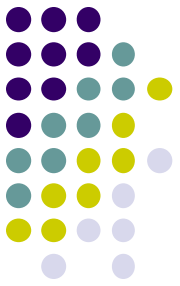
- $x \wedge x = x \wedge (x \vee 0) = x$  (应用同一律、吸收律)

吸收律



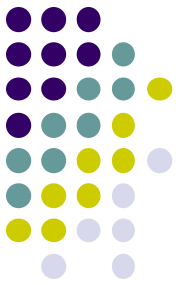
幂等律

$$x \wedge \underline{x} = x \wedge (\underline{x \vee (x \wedge x)}) = x \text{ (两次应用吸收律)}$$



# 布尔代数的性质

- **引理:**  $\forall x, y, z \in B$ , 若  $x \wedge z = y \wedge z$  且  $x \vee z = y \vee z$ , 则  $x = y$ 
  - $x = x \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$  //吸收律/分配律
  - $y = y \vee (y \wedge z) = y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$
- **证明双重补律**
  - $x \vee \bar{x} = 1 = \bar{\bar{x}} \vee \bar{x}$
  - $x \wedge \bar{x} = 0 = \bar{\bar{x}} \wedge \bar{x}$
  - $x = \bar{\bar{x}}$



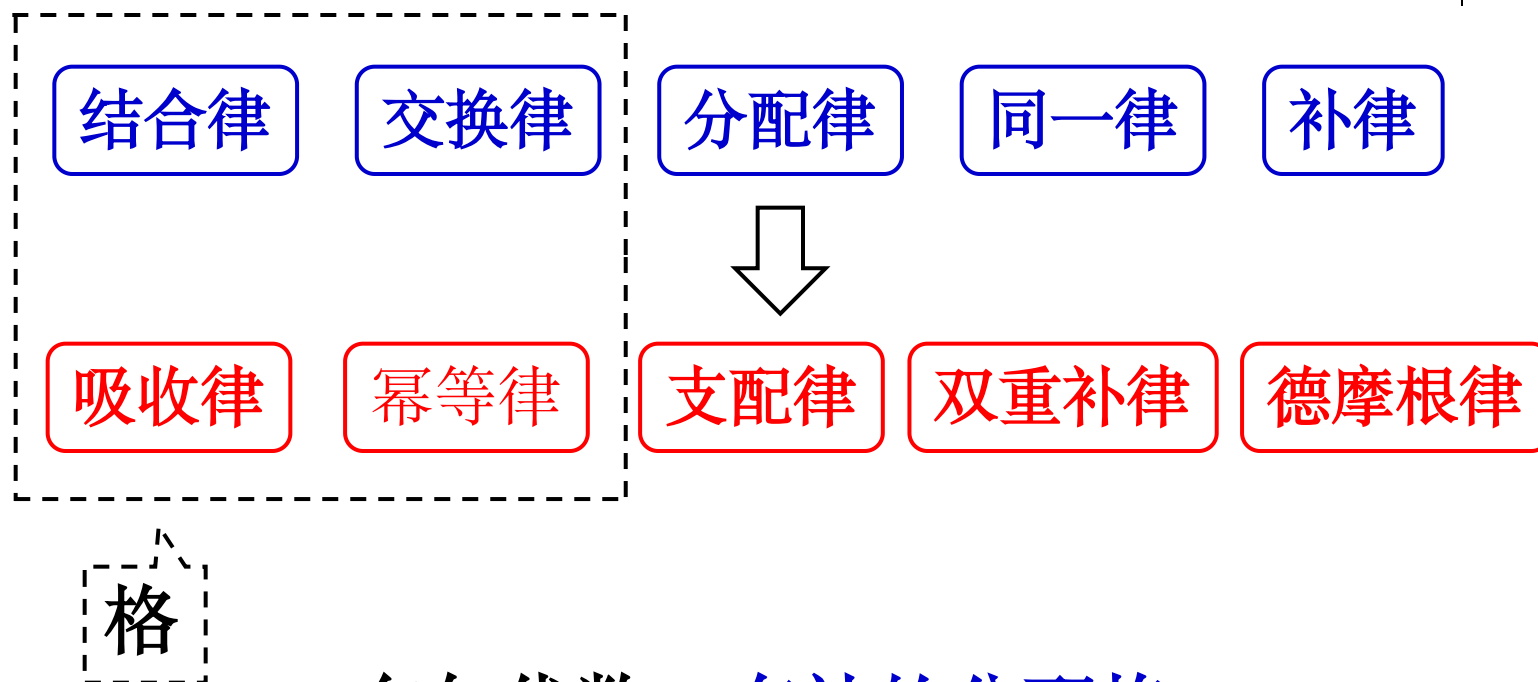
# 布尔代数的性质

- **证明德摩根律:**  $\forall x, y \in B, \overline{(x \wedge y)} = \bar{x} \vee \bar{y}$ ;
  - 根据补元的唯一性, 只需证明 $\bar{x} \vee \bar{y}$ 是 $x \wedge y$ 的补元。
  - $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{x} \vee \bar{y}) = 1$
  - $(x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \wedge y \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{y}) = 0$





# 布尔代数的性质



布尔代数：有补的分配格



# 格中的原子

- 定义：设 $L$ 是格， $L$ 中有最小元(全下界) $0$ ，给定元素 $a \neq 0$ ，若 $\forall x \in L$ ，有：

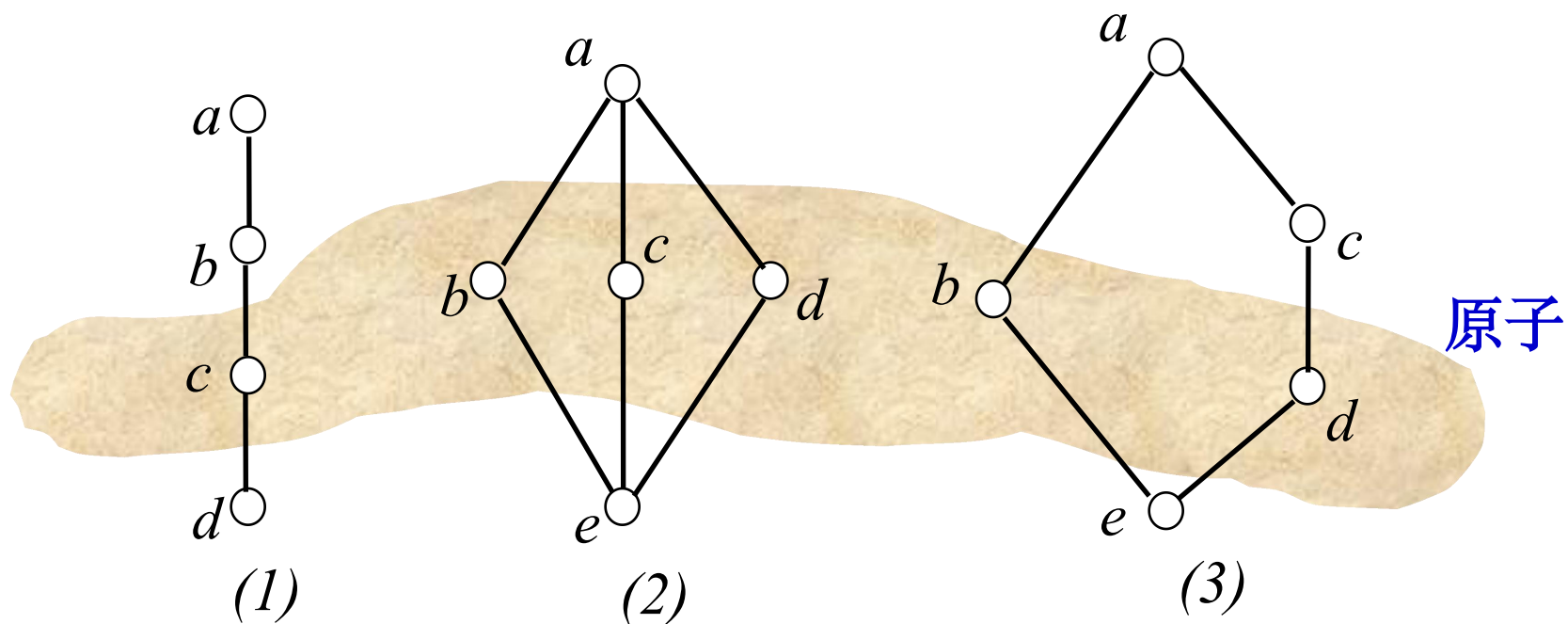
$$0 \leq x \leq a \Rightarrow x = a$$

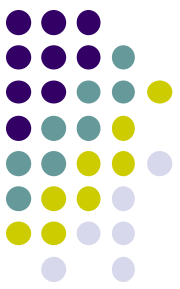
则称 $a$ 是 $L$ 中的原子

(原子是覆盖最小元的那些元素。)

- 设 $a, b$ 是格 $L$ 中的原子，若 $a \neq b$ ，则 $a \wedge b = 0$ 
  - 假设 $a \wedge b \neq 0$ ，注意： $a \wedge b \leq a$ 且 $a \wedge b \leq b$ ，由原子的定义： $a \wedge b = a$ ， $a \wedge b = b$ ， $\therefore a = b$ ，矛盾。

# 格中的原子





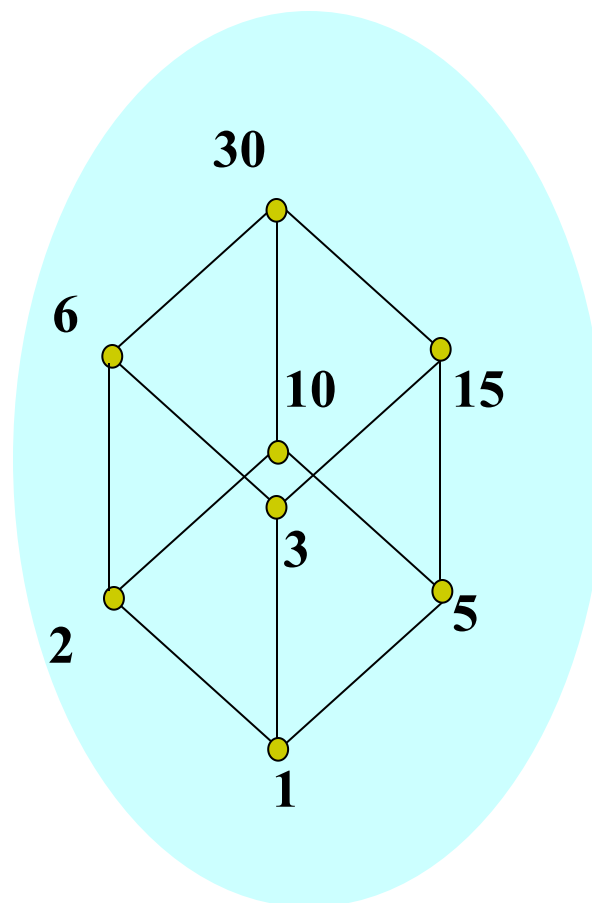
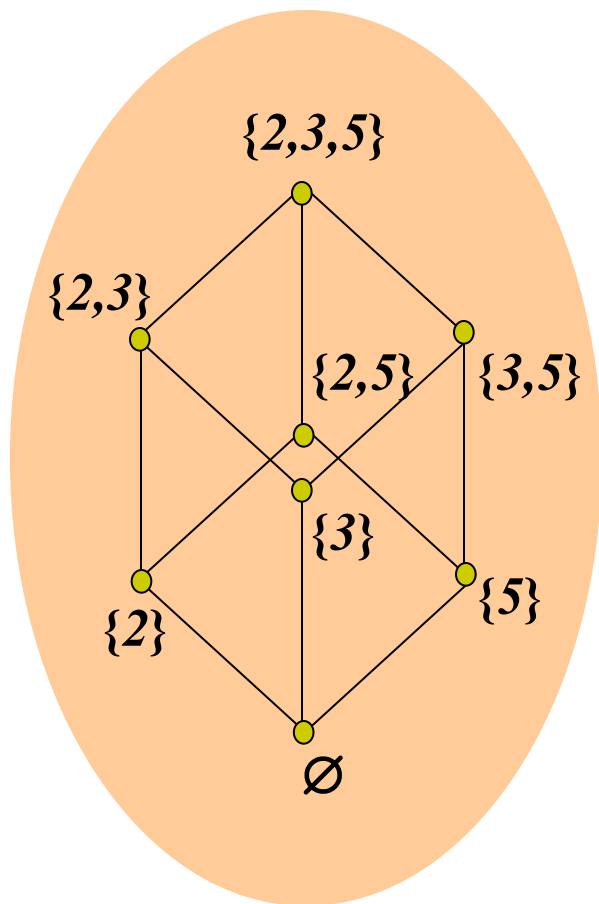
# 有限布尔代数的表示定理

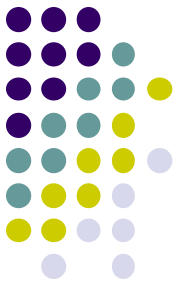
- 任一有限布尔代数B 同构于 B中所有的原子构成的集合A的幂集代数系统 $P(A)$ 。

$$\text{即} (B, \wedge, \vee, ', 0, 1) \cong (P(A), \cap, \cup, \sim, \emptyset, A)$$

- 备注（关于无限布尔代数）
  - $2^{\mathbb{N}}$ ，即无限的0/1序列 $x_0, x_1, x_2, \dots$ 
    - 这一无限布尔代数有原子
  - $2^{\mathbb{N}}$ 的一个子代数：周期序列（Periodic sequence）
    - 这个布尔代数没有原子

# 有限布尔代数 (示例)





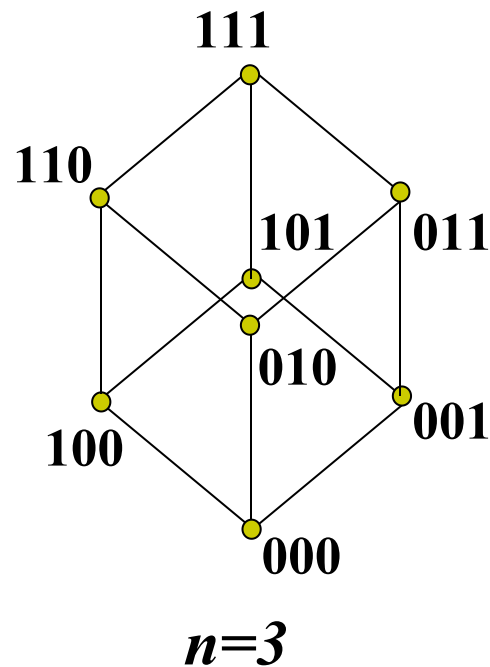
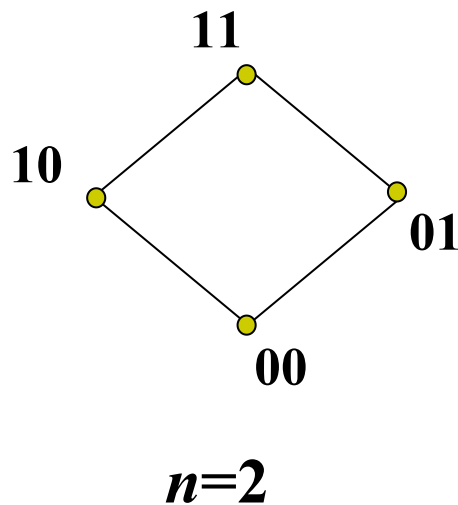
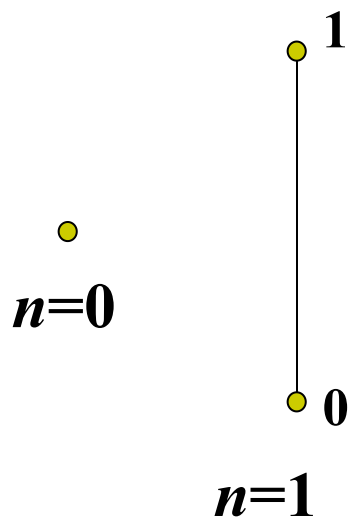
# 有限布尔代数基数是2的整数次幂

- 任何有限布尔代数的基数为 $2^n$ ,  $n$ 是自然数。
  - 设 $B$ 是有限代数系统,  $A$ 是 $B$ 中所有原子的集合。  
则:  $B \cong P(A)$ ,  $\therefore |B| = |P(A)| = 2^{|A|}$
- 等势的有限布尔代数均同构

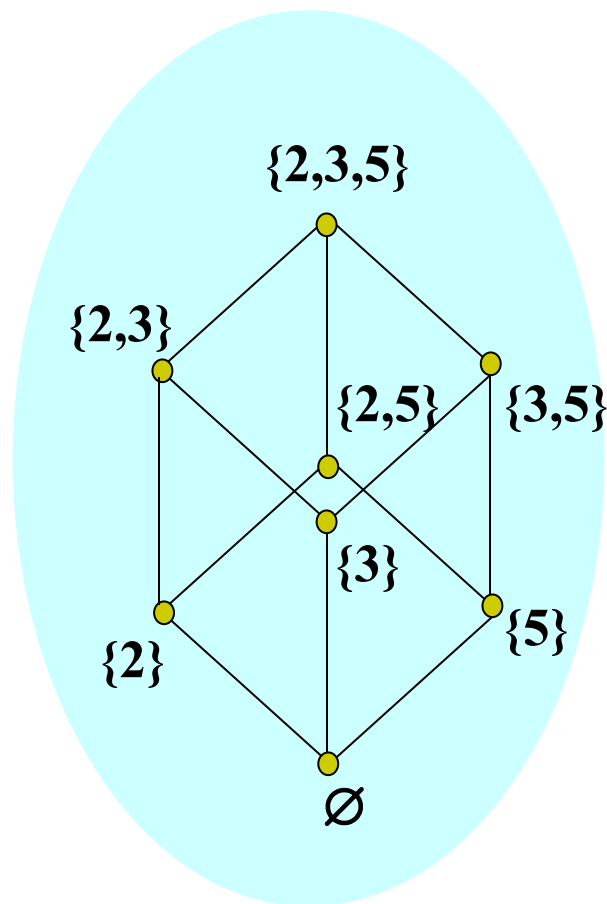
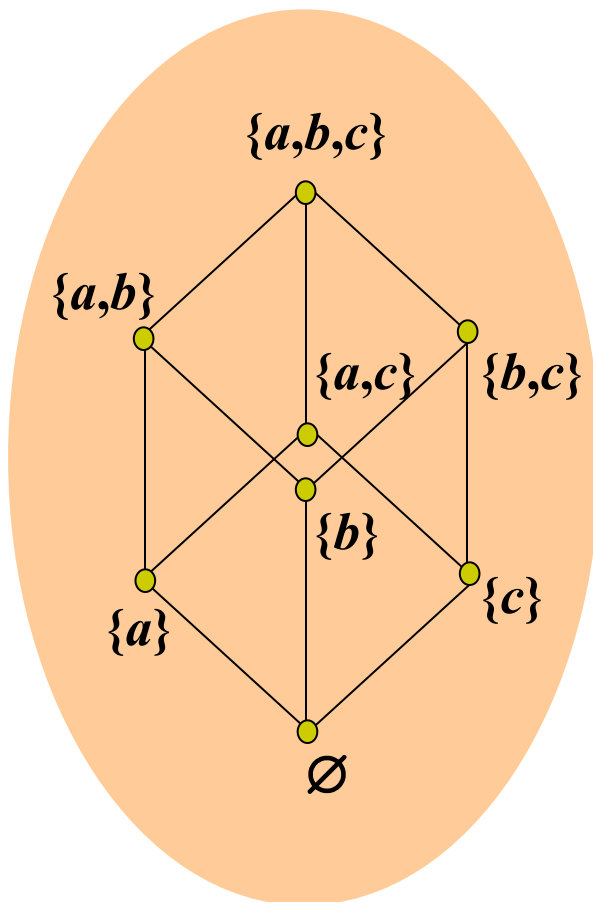
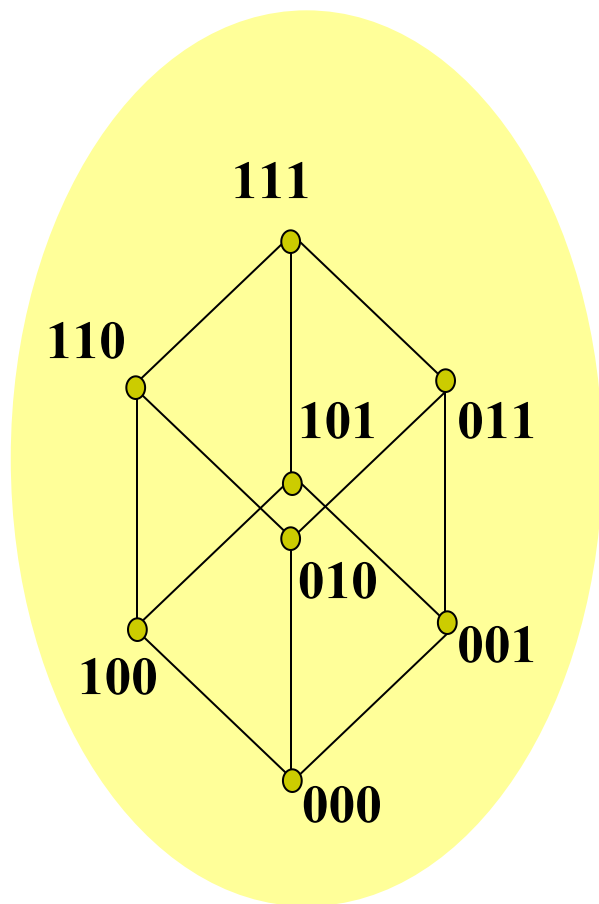
# 有限布尔代数 (举例)



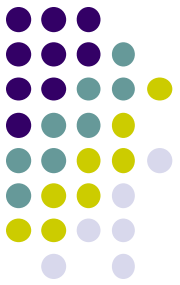
与含 $n$ 个元素的集合的幂集代数系统同构的布尔代数记为 $B_n$



# 几个同构的格的哈斯图





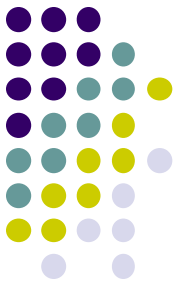


## $B^n$ as Product of $n$ $B$ 's

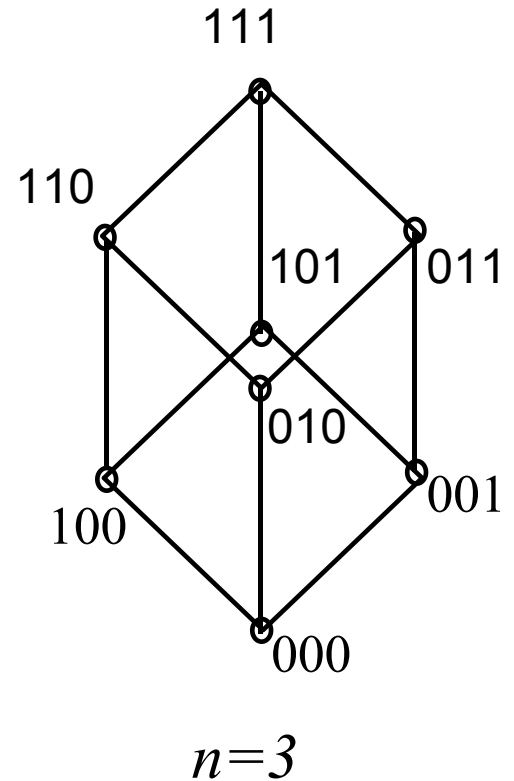
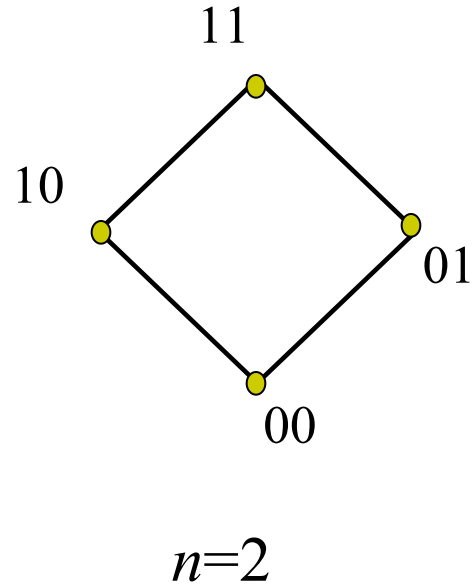
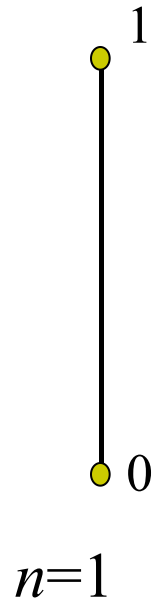
- $B^1, (\{0,1\}, \wedge, \vee, 1, 0, ')$ , is denoted as  $B$ .
- For any  $n \geq 1$ ,  $B^n = B \times B \times \dots \times B$ , where  $B \times B \times \dots \times B$  is given the product partial order.

$x \leq y$  if and only if  $x_k \leq y_k$  for each  $k$ .

# Hasse Diagram of $B^n$



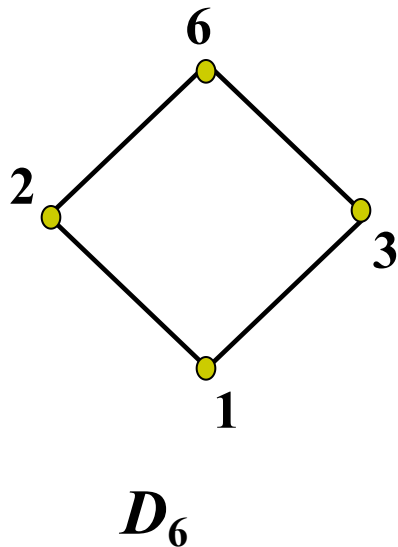
$n=0$



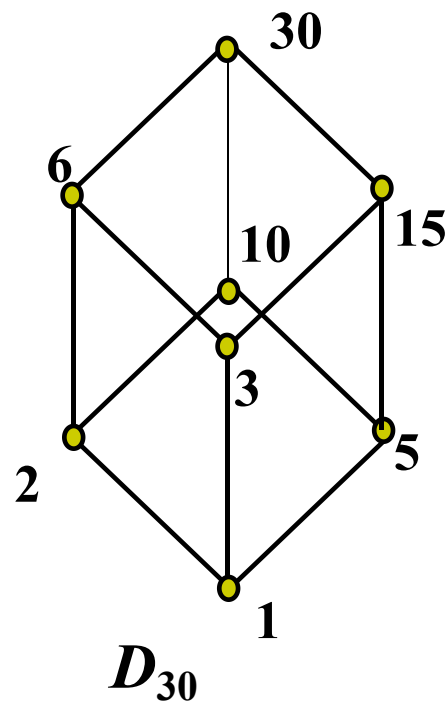
# 例子



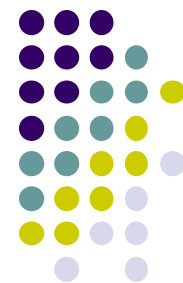
$D_n$  is the poset of all positive divisors of  $n$  with the partial order “divisibility”.



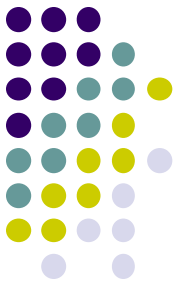
$D_{20}$  is not a  
Boolean algebra



# 布尔代数 $D_n$



- Let  $n=p_1p_2...p_k$ , where the  $p_i$  are distinct primes. Then  $D_n$  is a Boolean algebra.
  - Let  $S=\{p_1, p_2, \dots p_k\}$ , and for any subset  $T$  of  $S$ ,  $a_T$  is the product of the primes in  $T$ .
  - Note: any divisor of  $n$  must be some  $a_T$ . And we have  $a_T|n$  for any  $T$ .
  - For any subsets  $V, T$ ,  $V \subseteq T$  iff.  $a_V|a_T$ , and  $a_V \wedge a_T = \text{GCD}(a_V, a_T)$  and  $a_V \vee a_T = \text{LCM}(a_V, a_T)$ .
  - $f: P(S) \rightarrow D_n$  given by  $f(T) = a_T$  is an isomorphism from  $P(S)$  to  $D_n$ .

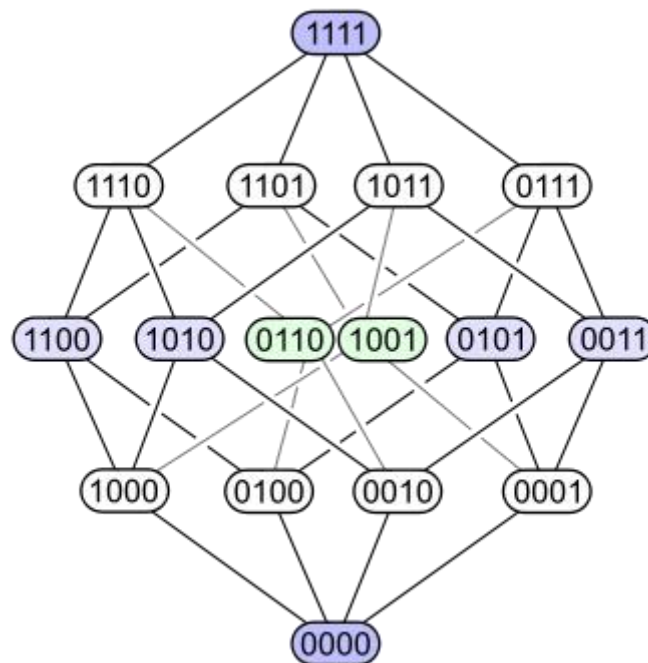
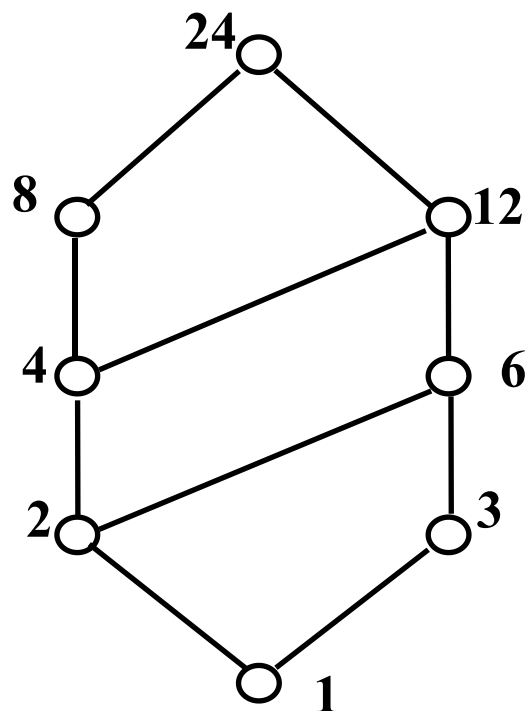


# Proof of Non-Boolean Algebra

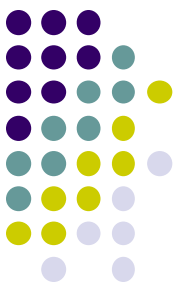
- **Example 2:** if  $n$  is a positive integer and  $p^2|n$ , where  $p$  is a prime number, then  $D_n$  is not a Boolean algebra.
- **Proof**
  - Since  $p^2|n$ ,  $n = p^2q$  for some positive integer  $q$ . Note that  $p$  is also an element of  $D_n$ , then if  $D_n$  is a Boolean algebra,  $p$  must have a complement  $p'$ , which means  $\text{GCD}(p, p') = 1$  and  $\text{LCM}(p, p') = n$ . So,  $pp' = n$ , which leads to  $p' = pq$ . So,  $\text{GCD}(p, pq) = p$ , contradiction.



# 下列格是否构成布尔代数?



格、有界、有补、分配?



# 布尔代数与数字逻辑电路设计

- $B^n$ 的每一个元素可以看做一个长度为 $n$ 的二进字符串。
- 一个有 $n$ 个输入、一个输出的逻辑电路对应于一个用含 $n$ 个布尔变量的布尔代数表达式定义的布尔函数 $f: B^n \rightarrow B$ 。
- 布尔函数的表达式: {和、积、补}是函数完全的。
- 用门电路元件 (并、交、否) 搭出所需的逻辑电路。
  - 电路极小化: 卡诺图

# 作业

- 教材内容：[屈婉玲] 11.2 节
- 课后习题：见课程主页

