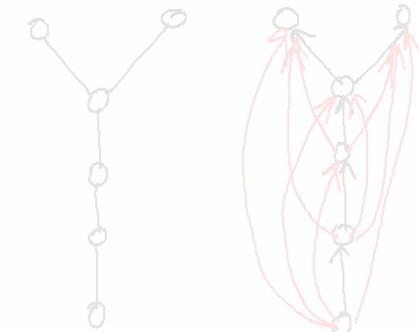




离 散 数 学

Discrete Mathematics

偏序与偏序格



南京大学计算机学院



回顾



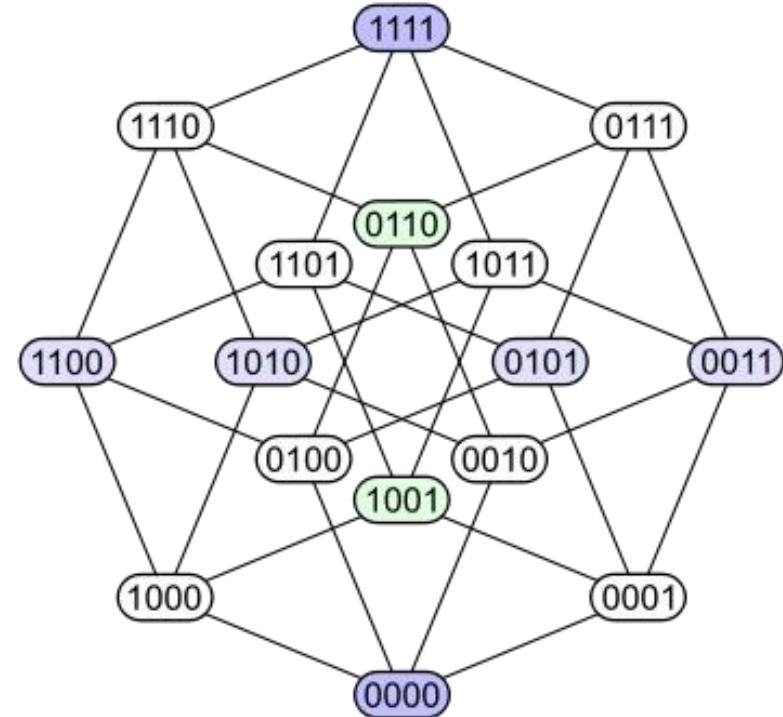
- 关系的闭包
 - 闭包的定义
 - 闭包的计算公式
 - 传递闭包的Warshall算法
- 等价关系
 - 等价类
 - 划分



提要



- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素
- 特殊元素的性质
- 偏序格





偏序关系(Partial Order)



- 定义（偏序关系）：非空集合 A 上的**自反**、**反对称**和**传递**的关系称为 A 上的偏序关系，记为： \leqslant
- 设 \leqslant 为偏序关系，若 $(a, b) \in \leqslant$ ，则记为 $a \leqslant b$ ，读作“ a 小于或等于 b ”

实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系。

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系。



偏序关系 (续)

定义：设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，

$$x, y \in A, x \text{ 与 } y \text{ 可比} \Leftrightarrow x \leq y \vee y \leq x.$$

任取两个元素 x 和 y ，可能有下述几种情况发生：

$$x < y (\text{或 } y < x), \quad x = y, \quad x \text{ 与 } y \text{ 不是可比的.}$$

定义： R 为非空集合 A 上的偏序关系，

$\forall x, y \in A, x$ 与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义： $x, y \in A$, 如果 $x < y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x < z < y$, 则称 y 覆盖 x .

例如 $\{1, 2, 4, 6\}$ 集合上的整除关系, 2 覆盖 1, 4 和 6 覆盖 2. 但 4 不覆盖 1.



偏序集(poset)与哈斯图



1. 偏序集

定义：集合 A 和 A 上的偏序关系 \leq 一起叫做偏序集，记作 (A, \leq) .

实例：

整数集合 Z 和数的小于或等于关系 \leq 构成偏序集 (Z, \leq)

集合 A 的幂集 $P(A)$ 和包含关系 R_{\subseteq} 构成偏序集 $(P(A), R_{\subseteq})$.

2. 哈斯图

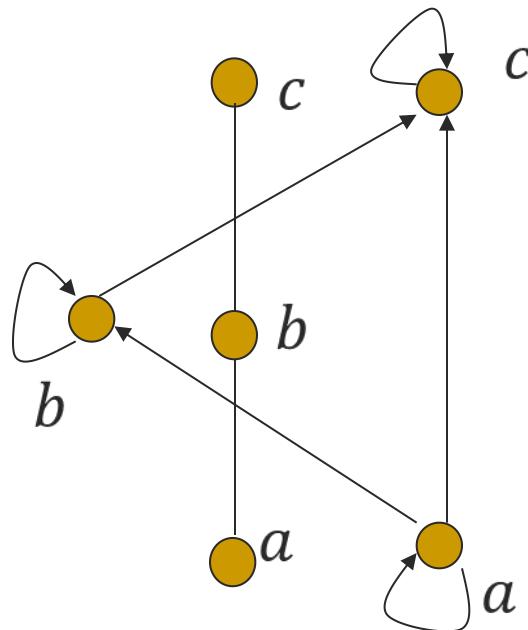
利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点：

- 每个结点没有环
- 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前
- 具有覆盖关系的两个结点之间连边



哈斯图 (Hasse Diagrams)



将偏序关系简化为哈斯图：

- 省略所有顶点上的环
- 省略所有因传递关系而引出的边
- 根据箭头的方向自下而上重排列所有顶点，而后将所有的有向边替换为无向边



偏序集



例：证明 $(P(A), \subseteq)$ 为全序当且仅当 $|A| \leq 1$

证明：(1) “ \Leftarrow ”：

Case 1: $|A| = 0$, $P(A) = \{\emptyset\}$, $(P(A), \subseteq)$ 为全序

Case 2: $|A| = 1$, 设 $A = \{a\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$, $(P(A), \subseteq)$ 为全序

“ \Rightarrow ”：只需证 $|A| \geq 2$ 时, $(P(A), \subseteq)$ 非全序

$\because |A| \geq 2 \quad \therefore$ 可取 $a, b \in A$, $a \neq b$

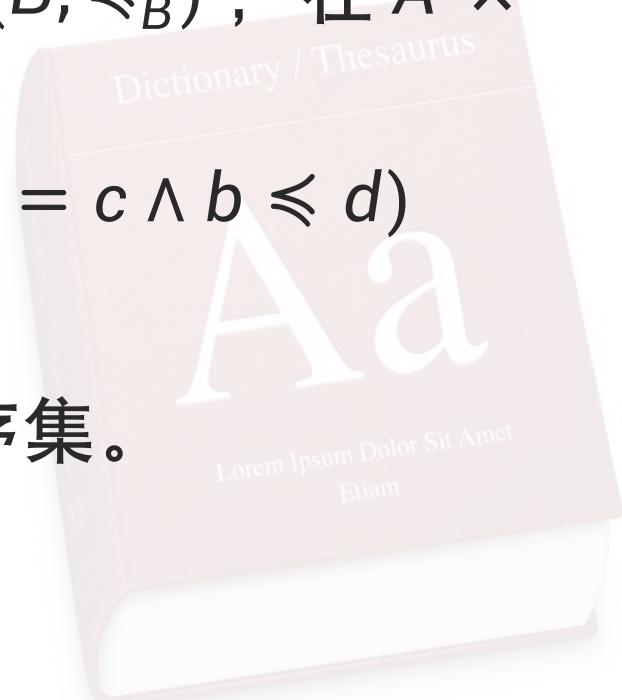
$\{a\}$ $\{b\}$ 不可比 $\therefore (P(A), \subseteq)$ 非全序



偏序集 (续)



- 例：字典序(lexicographic order)与偏序集
 - 给定两个偏序集 (A, \leq_A) 与 (B, \leq_B) ，在 $A \times B$ 上定义新关系 “ \leq ”：
$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$$
- 易证， $(A \times B, \leq)$ 是一个偏序集。

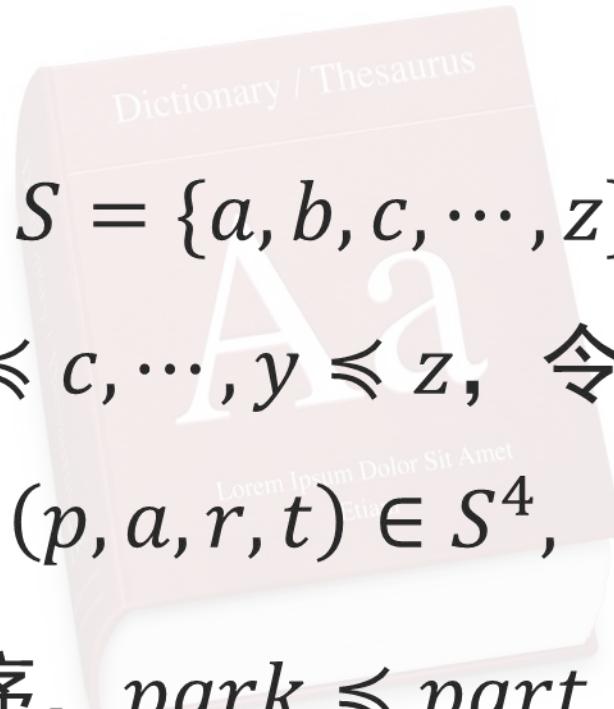




偏序集 (续)



- 例：在字典中 “part” 和 “park” 两个单词的顺序如何？
- 定义全序集（英文字母表） $S = \{a, b, c, \dots, z\}$ ，元素满足线序关系 $a \leq b, b \leq c, \dots, y \leq z$ ，令 $S^4 = S \times S \times S \times S$ ，易见， $(p, a, r, t) \in S^4$ ， $(p, a, r, k) \in S^4$ ；根据字典序， $park \leq part$

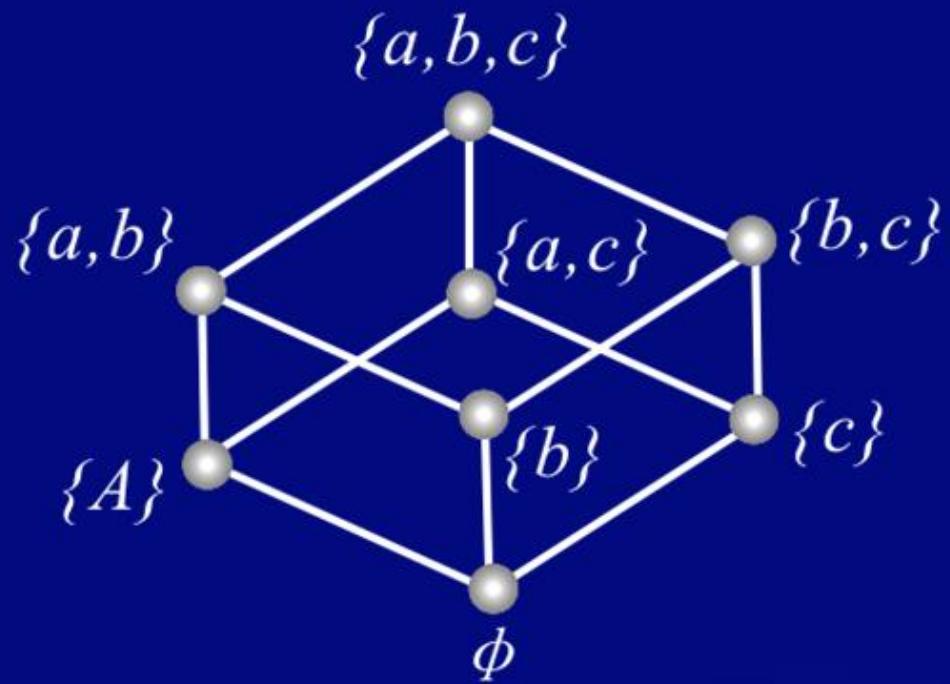
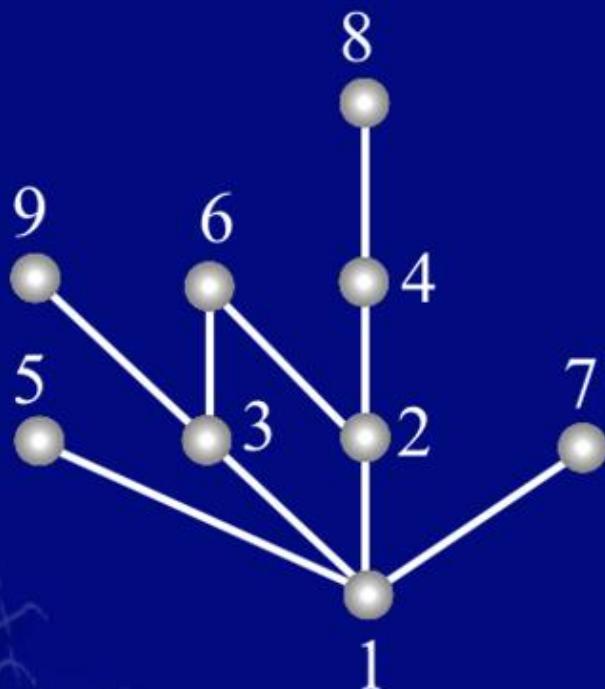




哈斯图



例 偏序集 $(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R \text{ 整除})$ 和 $(P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq})$ 的哈斯图.

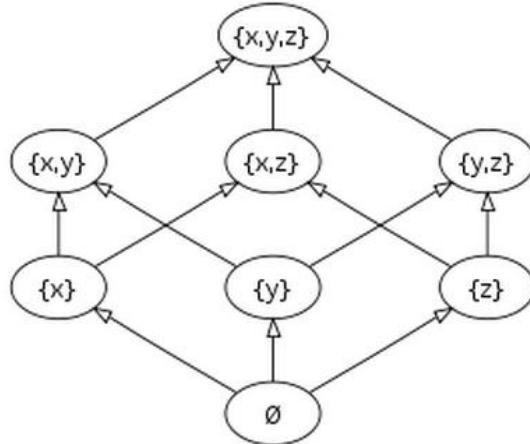




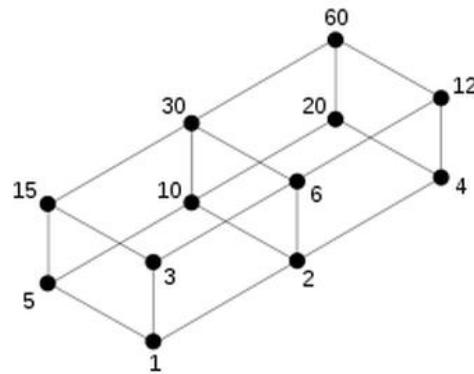
哈斯图 (续)



- The power set of $\{x, y, z\}$ partially ordered by inclusion, has the Hasse diagram:

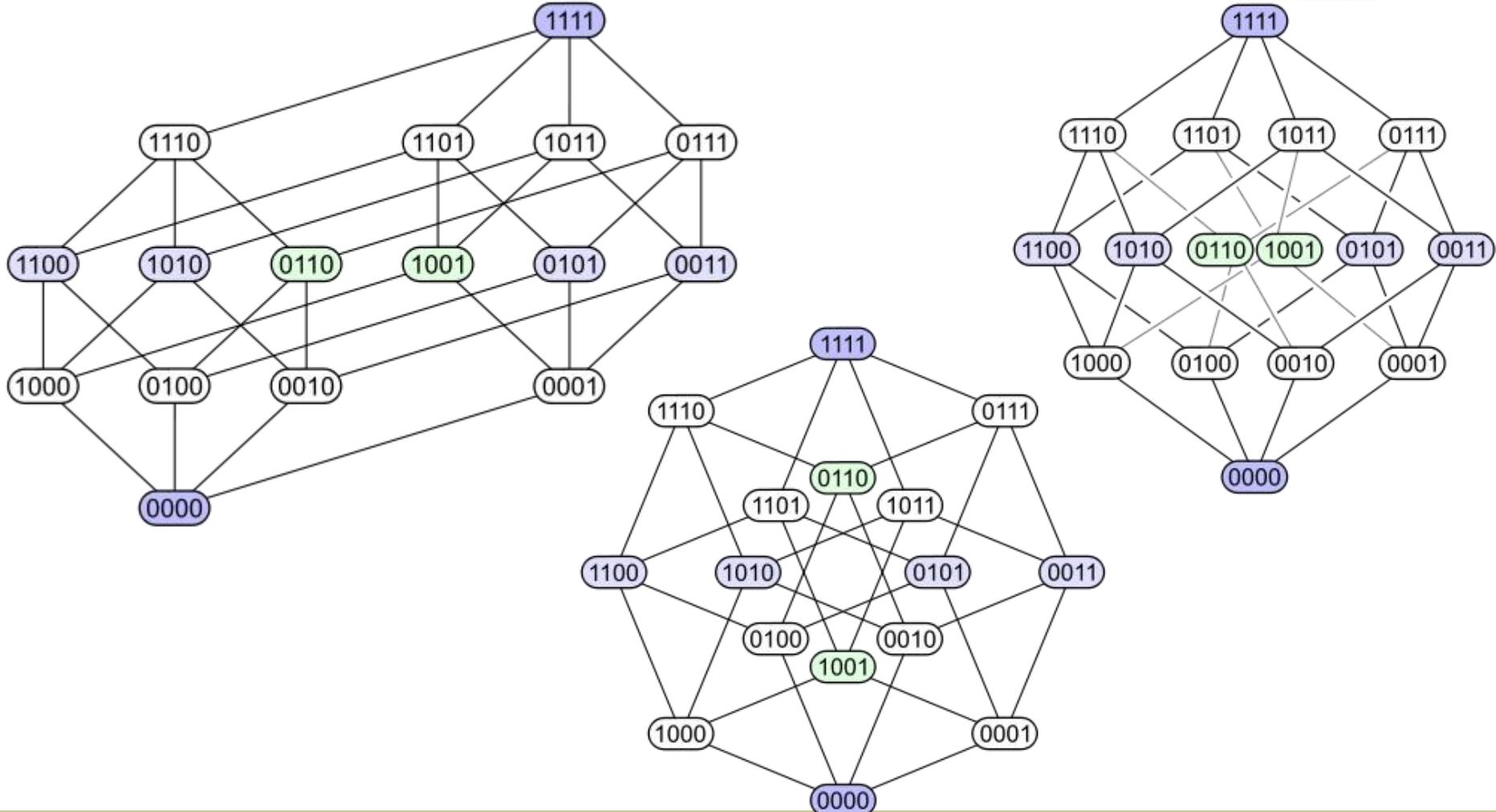


- The set $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 \}$ of all divisors of 60, partially ordered by divisibility, has the Hasse diagram:



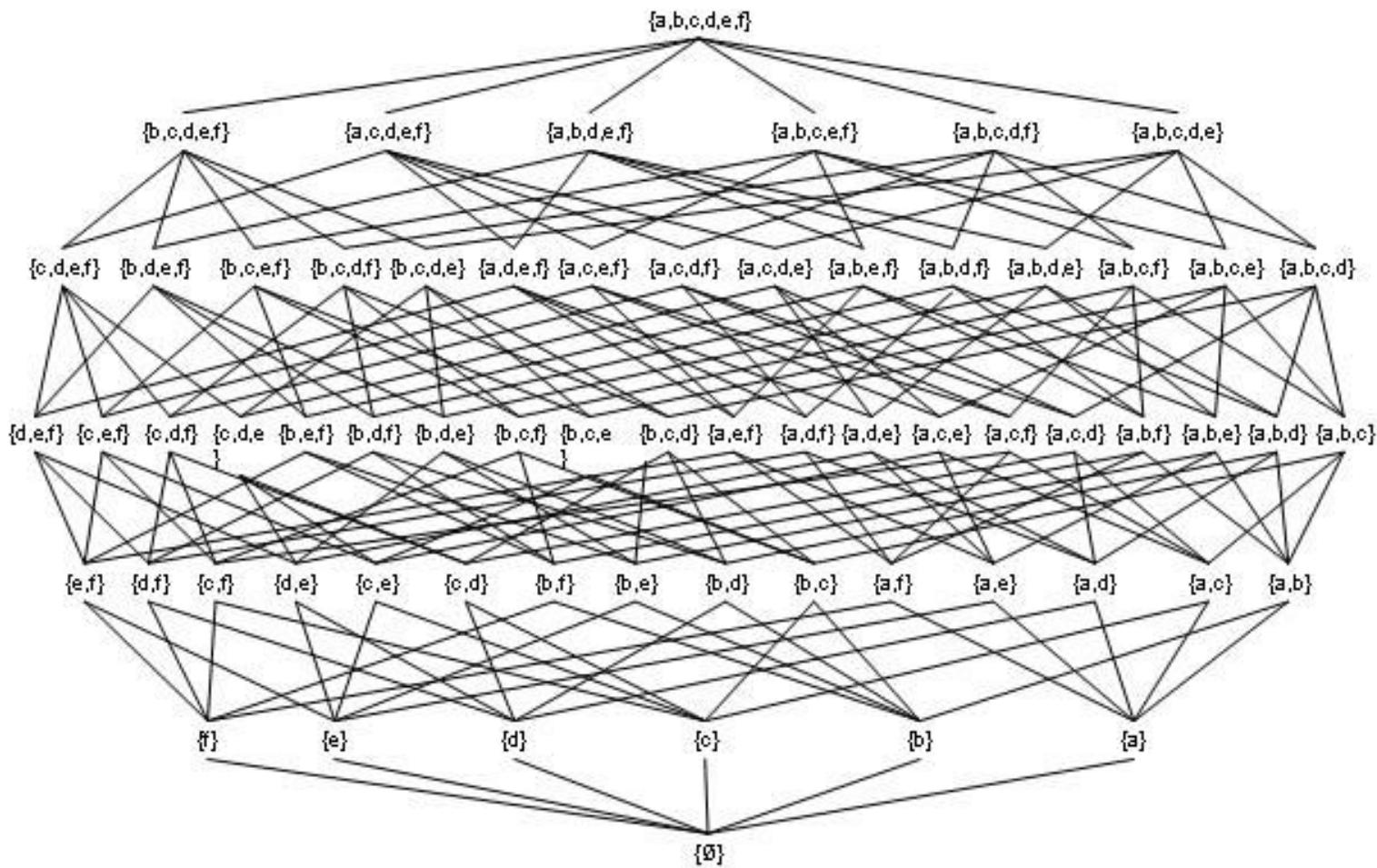


哈斯图 (续)





哈斯图 (续)

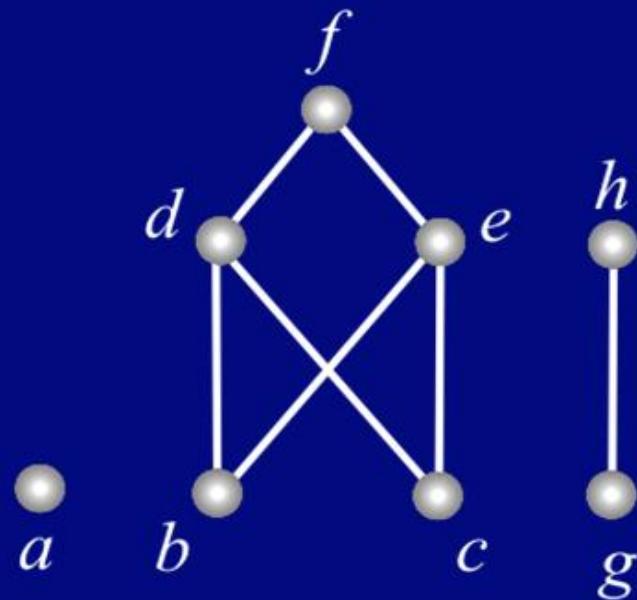




哈斯图 (续)



例 已知偏序集 (A, R) 的哈斯图如下图所示，试求出集合 A 和关系 R 的表达式。



解 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$$R = \{(b, d), (b, e), (b, f), (c, d), (c, e), (c, f), (d, f), (e, f), (g, h)\} \cup I_A$$



偏序集中的特殊元素及其性质



1. 最小元、最大元、极小元、极大元 Least, greatest, maximal, minimal elements

定义：设 (A, \leq) 为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$.

- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的最小元.
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的最大元.
- (3) 若 $\forall x(x \in B \wedge x \leq y \rightarrow x = y)$ 成立, 则称 y 为 B 的极小元.
- (4) 若 $\forall x(x \in B \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$ 成立, 则称 y 为 B 的极大元.

性质：

- 对于有穷集, 极小元和极大元一定存在, 还可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在, 如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元; 最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元, 也是极大元.



偏序集中的特殊元素及其性质 (续)

2. 下界、上界、下确界（最大下界）、上确界（最小上界）

定义：设 (A, \leq) 为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

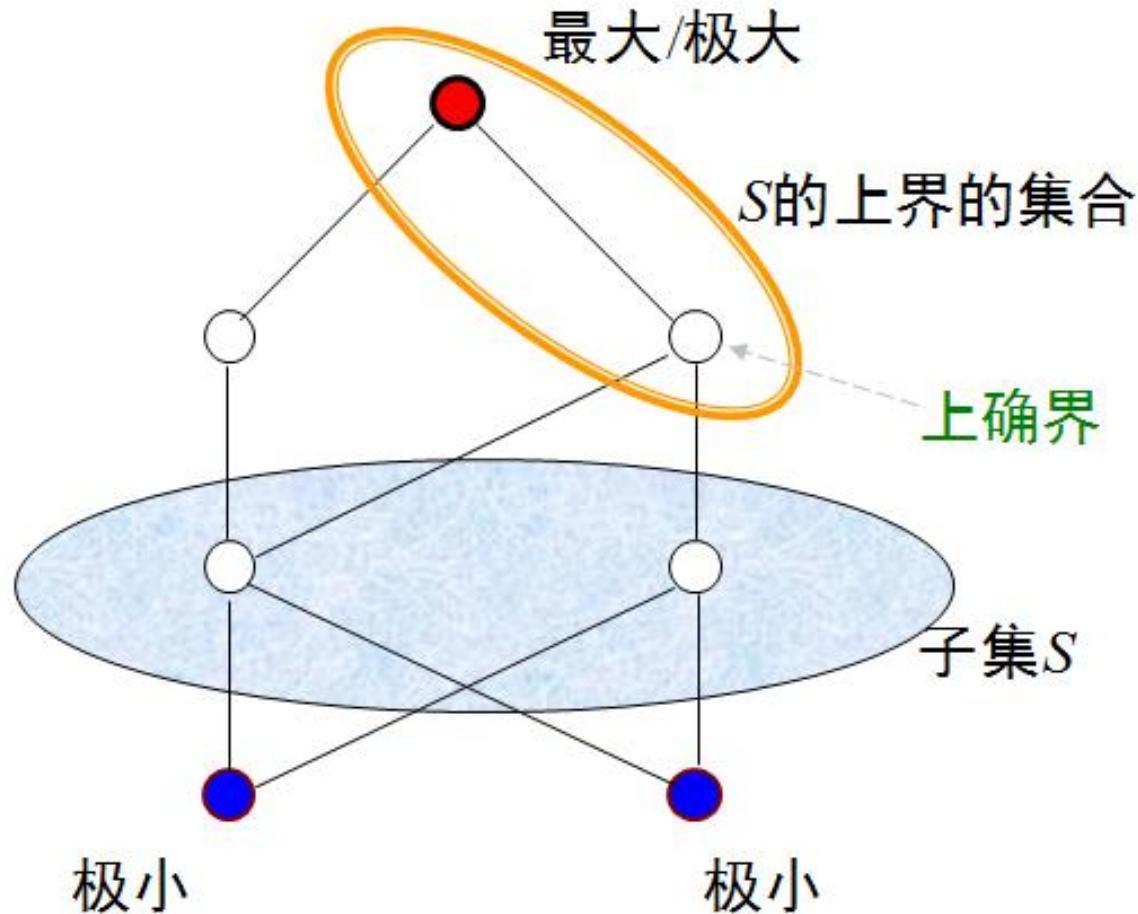
- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的上界.
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的下界.
- (3) 令 $C = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$, 则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界.
- (4) 令 $D = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$, 则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界.

性质：

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在, 则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界, 最大元就是它的上确界; 反之不对.

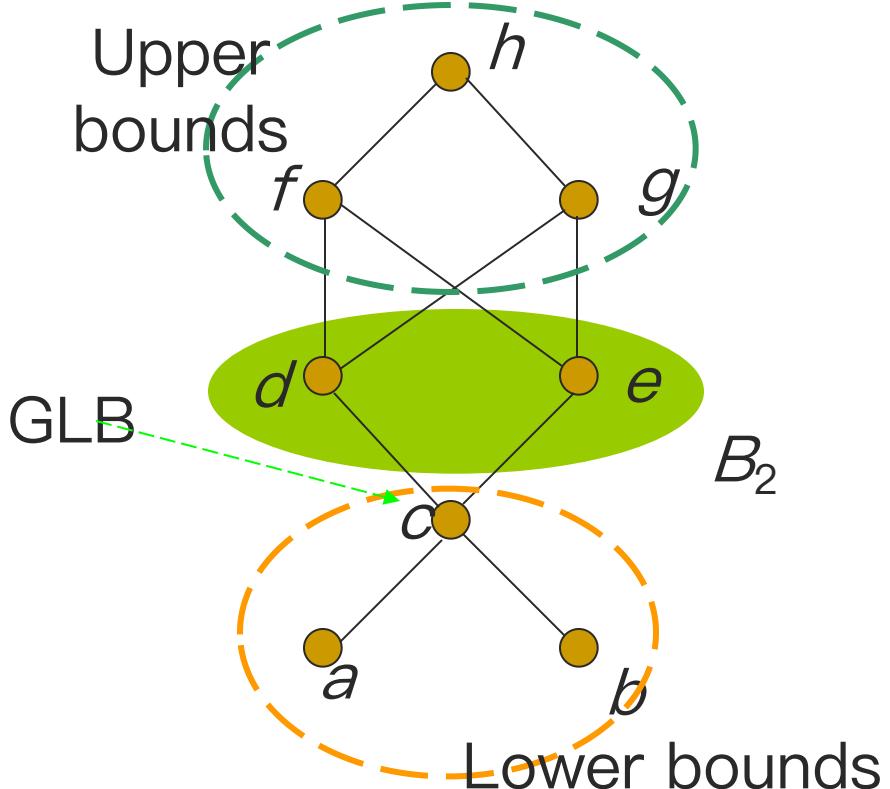
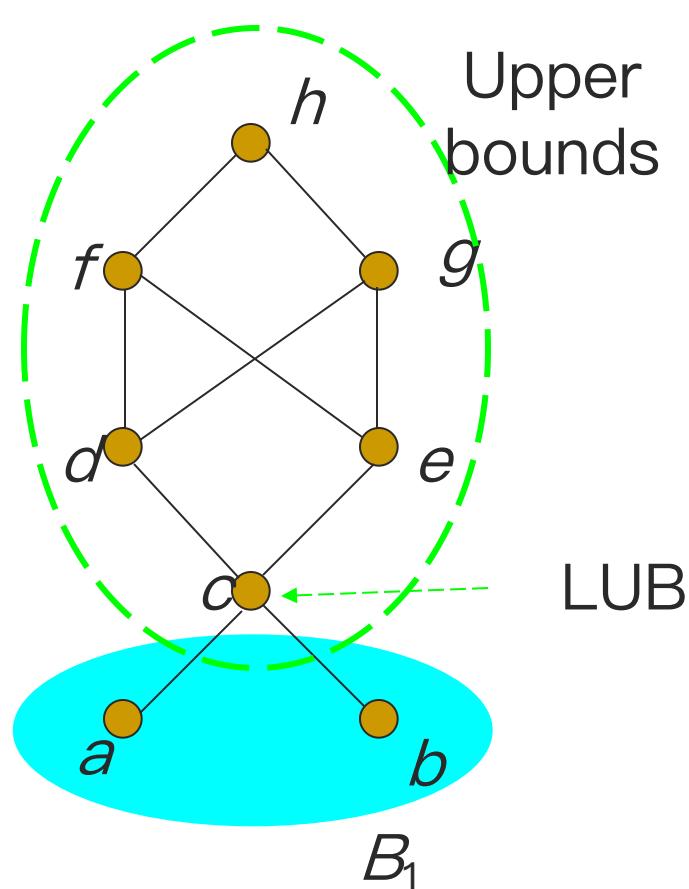


从哈斯图看特殊元素





从哈斯图看特殊元素 (续)



偏序集中的特殊元素及其性质

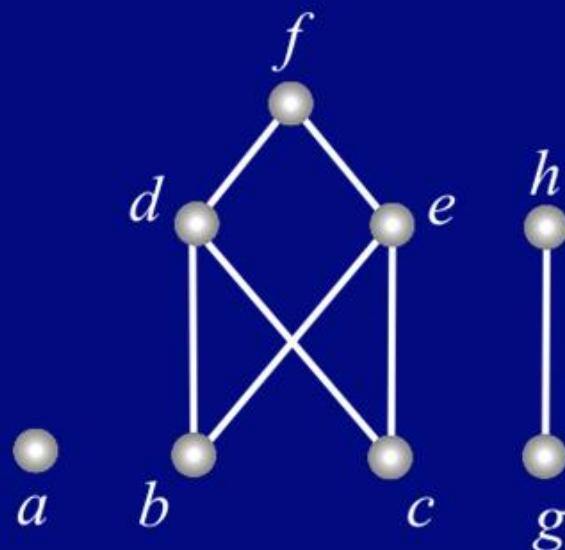


偏序集中的特殊元素及其性质 (续)

例 设偏序集 (A, \leq) 如下图所示，

求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元.

设 $B = \{b, c, d\}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.



解 极小元: a, b, c, g ; 极大元: a, f, h ; 没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在, 上界有 d 和 f , 最小上界为 d .



偏序集中的特殊元素及其性质 (续)



例 设 X 为集合, $A = P(X) - \{\emptyset\} - \{X\}$, 且 $A \neq \emptyset$. 若 $|X|=n, n \geq 2$. 问:

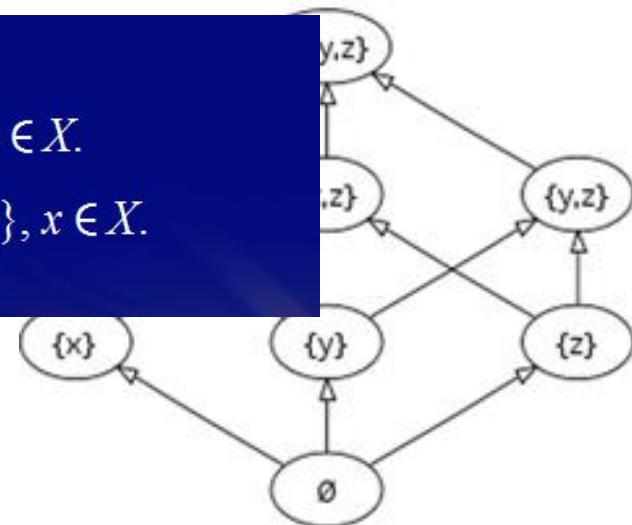
- (1) 偏序集 (A, R_{\subseteq}) 是否存在最大元?
- (2) 偏序集 (A, R_{\subseteq}) 是否存在最小元?
- (3) 偏序集 (A, R_{\subseteq}) 中极大元和极小元的一般形式是什么?

并说明理由.

解 (A, R_{\subseteq}) 不存在最小元和最大元, 因为 $n \geq 2$.

(A, R_{\subseteq}) 的极小元就是 X 的所有单元集, 即 $\{x\}, x \in X$.

(A, R_{\subseteq}) 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即 $X - \{x\}, x \in X$.





偏序集中的特殊元素及其性质 (续)

4. 设偏序集 (A, R) 的哈斯图如图所示.

(1) 写出 A 和 R 的集合表达式

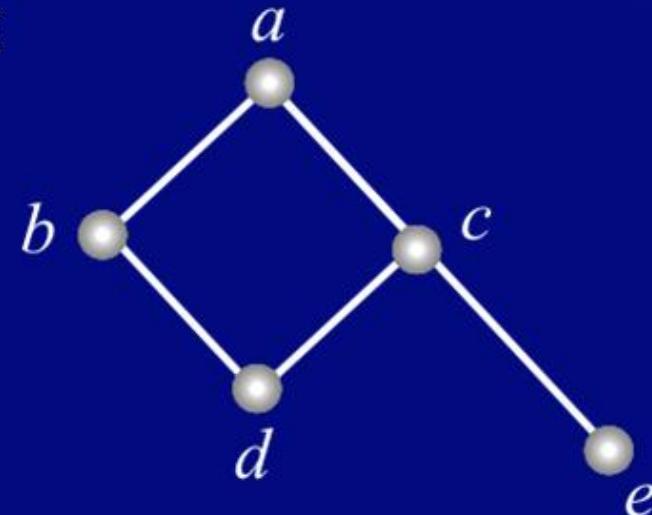
(2) 求该偏序集中的

极大元

极小元

最大元

最小元



解 (1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$$R = \{(d,b), (d,a), (d,c), (e,c), (e,a), (b,a), (c,a)\} \cup I_A$$

(2) 极大元和最大元是 a , 极小元是 d, e ; 没有最小元.



偏序集中的特殊元素及其性质 (续)

6. 设偏序集 (A, R) 和 (B, S) , 定义 $A \times B$ 上二元关系 T :

$$(x, y) T (u, v) \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明 T 为偏序关系.

证 证明自反性 任取 (x, y) ,

$$(x, y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \Rightarrow xRx \wedge ySy \Rightarrow (x, y) T (x, y)$$

证明反对称性 任取 $(x, y), (u, v)$

$$\begin{aligned} & (x, y) T (u, v) \wedge (u, v) T (x, y) \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy \\ & \Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v \\ & \Rightarrow (x, y) = (u, v) \end{aligned}$$

证明传递性 任取 $(x, y), (u, v), (w, t)$

$$\begin{aligned} & (x, y) T (u, v) \wedge (u, v) T (w, t) \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt \\ & \Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt \\ & \Rightarrow (x, y) T (w, t) \end{aligned}$$



偏序集与格



- 格 (lattice) 作为一个代数系统可以通过两种方式进行定义：
 - (1) 通过偏序集与偏序关系定义
 - (2) 通过普通集合与特殊运算定义
- 本讲我们仅从偏序的角度去定义格，并研究其中的若干基本运算





偏序关系与格 (续)



■ 格作为偏序集的定义：

定义：设 (S, \leq) 是偏序集，如果 $\forall x, y \in S$, $\{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界，则称 S 关于偏序 \leq 作成一个格。

由于最小上界和最大下界的惟一性，可以把求 $\{x, y\}$ 的最小上界和最大下界看成 x 与 y 的二元运算 \vee 和 \wedge ，即 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 分别表示 x 与 y 的最小上界和最大下界。

注意：本章中出现的 \vee 和 \wedge 符号只代表格中的运算，而不再有其他的含义。



偏序关系与格 (续)



2. 格的实例

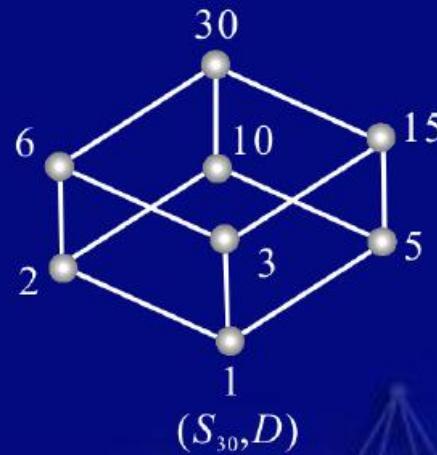
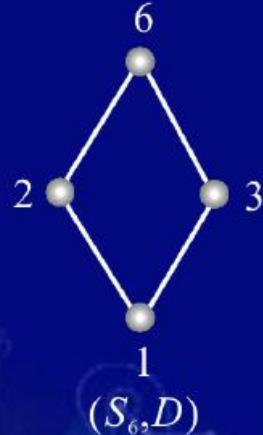
例 设 n 是正整数, S_n 是 n 的正因子的集合.

D 为整除关系, 则偏序集 (S_n, D) 构成格.

$\forall x, y \in S_n$, $x \vee y$ 是 $\text{lcm}(x, y)$, 即 x 与 y 的最小公倍数.

$x \wedge y$ 是 $\text{gcd}(x, y)$, 即 x 与 y 的最大公约数.

下图给出了格 (S_8, D) , (S_6, D) 和 (S_{30}, D) .



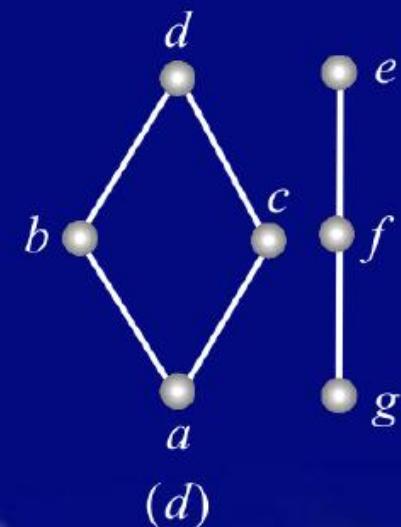
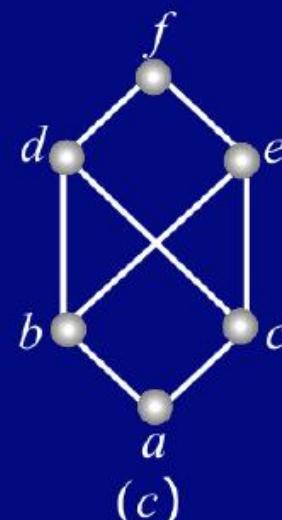
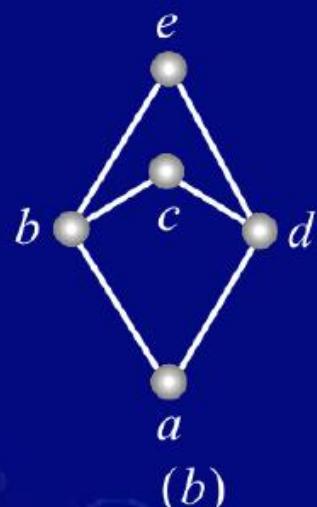
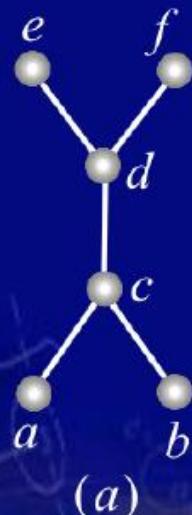


偏序关系与格 (续)



例 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

- (1) $(P(B), \subseteq)$, 其中 $P(B)$ 是集合 B 的幂集.
- (2) (\mathbb{Z}, \leq) , 其中 \mathbb{Z} 是整数集, \leq 为小于或等于关系.
- (3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.





格的对偶原理



对偶原理

(1) 对偶命题

定义：设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \leq, \geq, \vee$ 和 \wedge 的命题. 令 f^* 是将 f 中的 \leq 替换成 \geq , \geq 替换成 \leq , \vee 替换成 \wedge , \wedge 替换成 \vee 所得到的命题. 称 f^* 为 f 的对偶命题.

例如, 在格中令

$$f \text{ 是 } (a \vee b) \wedge c \leq c,$$

$$f^* \text{ 是 } (a \wedge b) \vee c \geq c.$$



格的对偶原理 (续)



(2) 格的对偶原理

设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \leq, \geq, \vee$ 和 \wedge 等的命题.

若 f 对一切格为真, 则 f 的对偶命题 f^* 也对一切格为真.

例如, 如果对一切格 L 都有

$$\forall a, b \in L, a \wedge b \leq a$$

那么对一切格 L 都有

$$\forall a, b \in L, a \vee b \geq a$$



小结



- 偏序：自反，传递，**反对称**
 - 偏序集，哈斯图
 - 最大，最小，极大，极小 元素
 - 上界，下界，上确界，下确界
- 格：任二元素均有上下确界的偏序集
 - 对偶原理



本次课后作业



■ 课后习题:

- 见课程QQ群





课堂练习

