Université de Tunis El Manar
Faculté des Sciences de Tunis
———–
Département des Sciences de l'Informatique

2013-2014

T.D. N^{o}1 Programmation Declarative Logique et Fonctionnelle (PDLF)

FNP, FSS, Résolution en CPO, Substitution, Unification et Résolution en CP1

Section : Mastère Informatique

Exercice 1. Transformer les formules suivantes en forme normale prénéxe :
- φ_1 : $\forall x\ (P(x) \Rightarrow \exists y\ Q(x,y))$
- φ_2 : $\exists x\ (\neg(\exists y\ P(x,y)) \Rightarrow (\exists z\ Q(z) \Rightarrow R(x)))$
- φ_3 : $\forall x \forall y\ (\exists z\ P(x,y,z) \wedge (\exists u\ Q(x,u) \Rightarrow \exists v\ Q(y,v)))$

Exercice 2. Mettre sous forme normale de Skolem les formules suivantes :
- φ_1 : $\neg(\forall x\ P(x) \Rightarrow \exists y \forall z\ Q(y,z))$
- φ_2 : $\forall x(\neg E(x,0) \Rightarrow \exists y\ (E(y,g(x)) \wedge \forall z(E(z,g(x)) \Rightarrow E(y,z))))$
- φ_3 : $\neg(\forall x\ P(x) \Rightarrow \exists y\ P(y))$

Exercice 3. Considérons les énoncés suivants :
- φ_1 : "chaque personne qui épargne de l'argent gagne des intérêts"
- φ_2 : "s'il n'y a pas d'intérêts alors personne n'épargne de l'argent"

$S(x,y)$, $M(x)$, $I(x)$ et $E(x,y)$ représentent respectivement "x épargne y", "x est de l'argent", "x est un intérêt" et "x gagne y".

1. Formaliser φ_1 et φ_2
2. Trouver les ensembles de clauses associés à φ_1, φ_2 et $\neg\varphi_2$.

Exercice 4.

1. Pour chaque item, montrer par résolution l'inconsistance de l'ensemble de ses clauses :
   - $S_1 = \{p \vee q \vee r,\ \neg p \vee r,\ \neg q,\ \neg r\}$
   - $S_2 = \{p \vee q,\ \neg q \vee r,\ \neg p \vee q, \neg r\}$
   - $S_3 = \{p \vee p,\ \neg p \vee q,\ \neg q \vee \neg q\}$
   - $S_4 = \{p \vee \neg q,\ p \vee r,\ \neg q \vee r, \neg p \vee q,\ q \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg r\}$
   - $S_5 = \{p \vee \neg q \vee r,\ q \vee r,\ \neg p \vee \neg r,\ q \vee \neg r,\ \neg q\}$
2. Montrer par résolution que $\{p \vee \neg q \vee r,\ \neg p \vee r,\ \neg s,\ p \vee q \vee s\} \models r \wedge \neg s$

Exercice 5. Soit $\theta = \{x/a,\ y/b,\ z/g(x,y)\}$, $E = \{P(h(x),z)\}$.
Déterminer $E\theta$, $E\theta^2$,..., $E\theta^n$.

Exercice 6.
Soient $\theta_1 = \{x/a,\ y/f(z),\ z/y\}$, $\theta_2 = \{x/b,\ y/z,\ z/g(x)\}$.
Calculer $\theta_1 o \theta_2$ et $\theta_2 o \theta_1$.

Exercice 7. Etudier l'unifiabilité de ω dans chcun des cas suivants :

- $\omega_1 = \{Q(f(a), g(x)),\ Q(y, y)\}$.
- $\omega_2 = \{Q(a),\ Q(b)\}$.
- $\omega_3 = \{Q(a, x),\ Q(a, a)\}$.
- $\omega_4 = \{Q(a, x, f(x)),\ Q(a, y, y)\}$
- $\omega_5 = \{Q(x, y, z),\ Q(u, h(u, v), u)\}$.
- $\omega_6 = \{P(x, y),\ P(y, f(z)\}$
- $\omega_7 = \{P(a, y, f(y)),\ P(z, z, u)\}$
- $\omega_8 = \{P(x, g(x)),\ P(y, y\}$
- $\omega_9 = \{P(x, g(x), y),\ P(z, u, g(u))\}$
- $\omega_{10} = \{P(a, x, f(g(y))),\ P(z, f(z), f(u))\}$
- $\omega_{11} = \{P(x, f(y, z)),\ P(x, a)\ ,\ P(x, g(h(k(x))))\}$
- $\omega_{12} = \{f(x, f(y, z)),\ f(f(y, a), f(z, f(b, z)))\}$
- $\omega_{13} = \{P(x, f(x), g(f(x), x)),\ P(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))\}$
- $\omega_{14} = \{P(x, f(x), f(f(x))),\ P(f(f(y)), y, f(y))\}$
- $\omega_{15} = \{P(x_1, g(x_1), x_2, h(x_1, x_2), x_3, k(x_1, x_2, x_3)),\ P(y_1, y_2, e(y_2), y_3, f(y_2, y_3), y_4)\}$

Exercice 8. Déterminer si les clauses suivantes ont des facteurs, si oui les citer.

- $P(x) \vee Q(y) \vee P(f(x))$
- $P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(f(a))$
- $P(x, y) \vee P(a, f(a))$
- $P(a) \vee P(b) \vee P(x)$
- $P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x, y)$

Exercice 9. Trouver tout les résolvants possibles des paires de clauses suivantes :

1. $C_1 :\ \neg P(x) \vee Q(x, b)$	$D_1 :\ P(a) \vee Q(a, b)$
2. $C_2 :\ \neg P(x) \vee Q(x, x)$	$D_2 :\ \neg Q(a, f(a))$
3. $C_3 :\ \neg P(x, y, u) \vee \neg P(y, z, v) \vee \neg P(x, v, w) \vee P(u, z, w)$	$D_3 :\ P(g(x, y), x, y)$
4. $C_4 :\ \neg P(v, z, v) \vee P(w, z, w)$	$D_4 :\ P(w, h(x, x), w)$
5. $C_5 :\ P(x) \vee P(y)$	$D_5 :\ \neg P(a) \vee \neg P(y)$

Exercice 10. Pour chaque item montrer en utlisant la résolution que l'ensemble de clauses correspondant est inconsistant.

- $\{R(x, f(x)) \vee P(x) \vee \neg E(x),\ C(f(y)) \vee P(y) \vee \neg E(y),\ Q(a), E(a),\ Q(z) \vee \neg R(a, z),\ \neg Q(u) \vee$

$\neg P(u),\ \neg Q(v) \vee \neg C(v)\}$

- $\{P(x) \vee P(y),\ \neg P(x) \vee \neg P(y)\}$
- $\{P(x, y, f(x, y)),\ \neg P(x, y, u) \vee \neg\ P(y, z, v) \vee \neg P(x, v, w) \vee P(u, z, w),$

  $\neg P(x, y, u) \vee \neg P(y, z, v) \vee \neg P(u, z, w) \vee P(x, v, w),$

  $P(e, y, y),\ P(g(z), z, e),\ \neg P(x, h(x), h(x)) \vee \neg P(k(x), u, x)\}$

Exercice 11. Montrer en utilisant la méthode de résolution que

- $\{\forall x(C(x) \Rightarrow (W(x) \wedge R(x))),\ \exists x(C(x) \wedge O(x))\} \models \exists x(O(x) \wedge R(x))$
- $\{\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \Rightarrow L(x, y))),\ \forall x(P(x) \Rightarrow \forall y(Q(y) \Rightarrow \neg L(x, y)))\} \models \forall x(D(x) \Rightarrow \neg Q(x))$

Exercice 12. Montrer en utilisant le principe de résolution que φ est conséquence logique de $\{\varphi_1, ...\varphi_i\}$ dans chacun des cas suivants :

- $\varphi\ : \forall u Q(u)$ $\varphi_1\ : \forall x \exists y P(x, y)$ $\varphi_2\ : \forall z_1 \forall z_2 (P(z_1, z_2) \Rightarrow Q(z_1))$
- $\varphi\ : \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(f(x))))$ $\varphi_1\ : \forall x(P(x) \Rightarrow R(f(x)))$ $\varphi_2\ : \forall x(R(x) \Rightarrow P(f(x)))$
- $\varphi\ : \exists z Q(z)$ $\varphi_1\ : \exists y \forall x P(x, y)$ $\varphi_2\ : (\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \forall z Q(z))$
- $\varphi\ : \exists x S(x)$ $\varphi_1\ : \exists x \forall y (P(x, y) \vee P(y, x))$ $\varphi_2\ : \forall x(P(x, x) \Rightarrow (Q(x) \vee R(x)))$ $\varphi_3\ : \forall z(Q(z) \Rightarrow S(z))$

  $\varphi_4\ : \forall u(R(u) \Rightarrow Q(u))$

Exercice 13. Ecrire sous forme de clauses les énoncés suivants, et montrer, en utilisant la méthode de résolution, que la conclusion H_4 est conséquence logique de $\{H_1,\ H_2,\ H_3\}$.

H_1 : Pour toute personne qui entre dans le pays, sauf si c'est VIP, il y a au moins un douanier qui s'interesse à elle.

H_2 : Certains contrebandiers entrent dans le pays et n'interessent que les contrebandiers.

H_3 : Aucun contrebandier n'est un VIP.

H_4 : Il existe des douanniers contrebandiers.

On utilisera les symboles de prédicats suivants :

$E(x)$: x entre dans le pays.

$V(x)$: x est un VIP.

$I(x, y)$: x s'interesse à y.

$D(x)$: x est un douannier.

$C(x)$: x est un contrebandier.