Réseaux de Petri

2 - Modélisation de systèmes infinis

E. Encrenaz-Tiphène / C. Dutheillet

Lemme de monotonie

$\forall$ <R, M_0>, $\forall$ M_1 accessible à partir de M_0 :

$$M_1 [s> M_2 \text{ et } M'_1 \geq M_1 \Rightarrow M'_1 [s> M'_2 \text{ et } M'_2 \geq M_2$$

Donc

Par le lemme de monotonie, si M_1 [s> M_2 et $M_2 > M_1$

– s est aussi franchissable à partir de M_2

– on a une séquence infinie qui augmente le marquage

- Le réseau est non borné, le graphe d'accessibilité infini, mais on peut construire une représentation d'un sur-ensemble des marquages accessibles

Graphe de couverture

Définition : Le graphe de couverture d'un réseau marqué $<R, M_0>$ est un système de transitions $< Q, \Delta, \lambda, q_0 >$ tel que :

Q un ensemble de marquages sur $N \cup \{\omega\}$, avec

$$\forall\ k \neq 0,\ \omega + k = \omega,\ \omega - k = \omega,\ \omega > k$$

Δ l'ensemble des arcs reliant deux éléments de Q par le franchissement d'une transition de R

λ étiquette les arcs du graphe par le nom de la transition

$\mathbf{q_0}$ $= M_0$

Graphe de couverture

- Deux étapes :
  - construire l'arborescence de couverture,
  - replier l'arborescence de couverture en fusionnant les marquages identiques.

Arbre de couverture (1)

1- Pour toute transition t faire

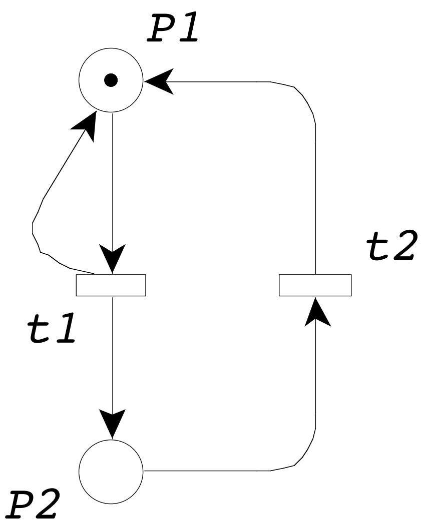
  si M_0 [t> M' alors

    insérer M' dans l'arbre

    si M' > M_0 alors

      pour tout p tq M'(p) > M_0 (p)

        M'(p) := ω



$$(1, 0)\ [t1{>}\ (1, 1)$$

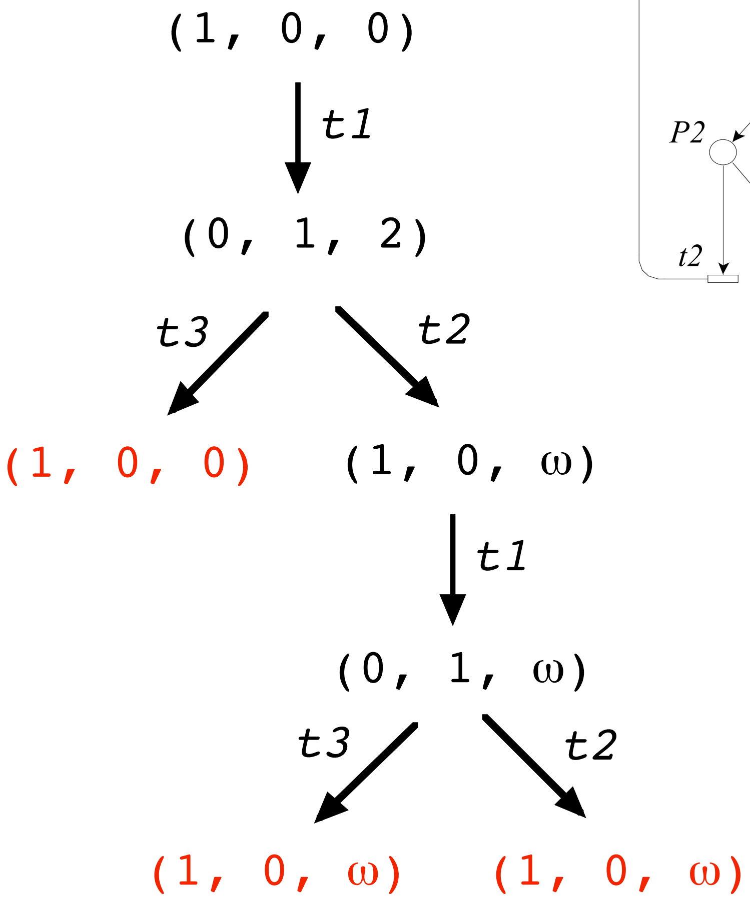
$$(1,\ 0) \xrightarrow{t1} (1,\ \omega)$$

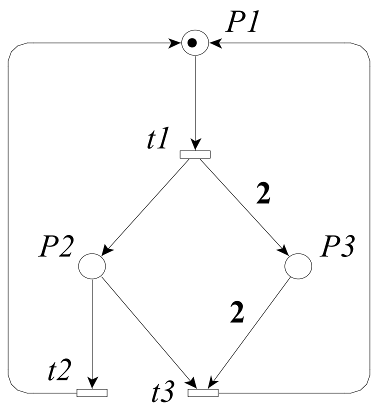
E. Encrenaz-Tiphène / C. Dutheillet

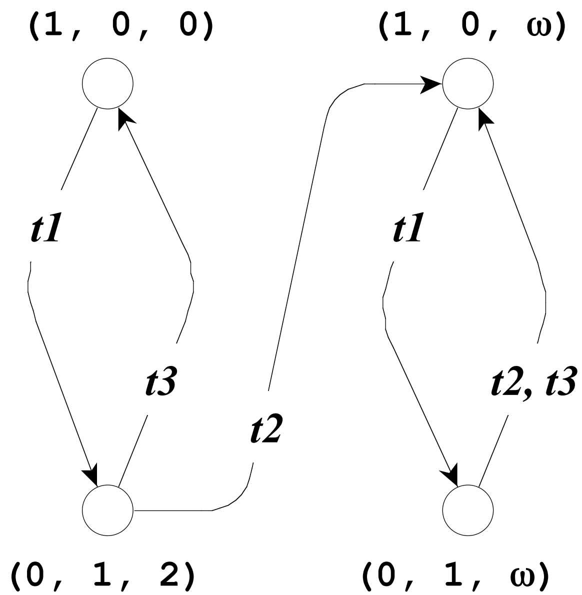
Arbre de couverture (2)

```
2- Pour chaque nouveau marquage M de l'arbre faire :
      soit σ tq M0 [σ > M.
      si ∃ M'= M le long de σ, alors M n'a pas de successeur
      sinon
      Pour toute transition t faire
         si M [t> alors
            ∀ p, M'(p) = M(p) + C(p, t)
            si ∃ M", M0 [s1 > M" [s2 > M' et M" < M' alors
               pour tout p tq M"(p) < M'(p) faire
                  M'(p) = ω
            insérer M' dans l'arbre
```

Graphe de couverture - exemple







Graphe de couverture

Propriétés

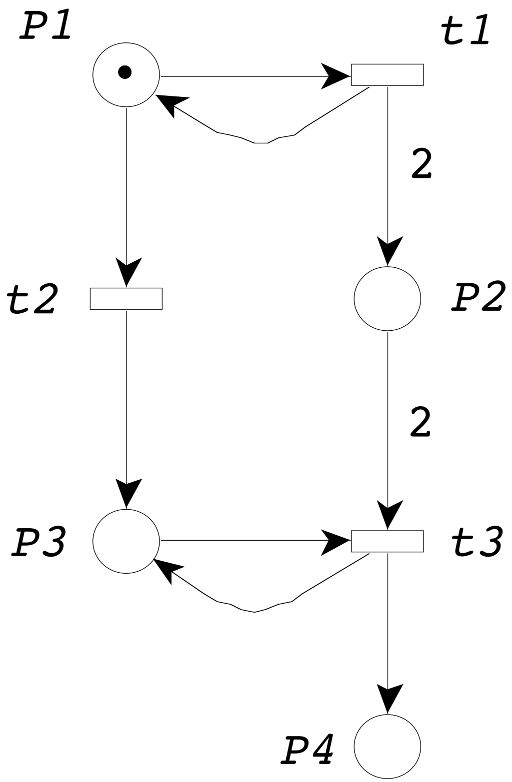
- Le graphe de couverture est fini
- Le réseau est borné si le graphe de couverture ne contient pas de noeud dont une composante (au moins) a la valeur ω.

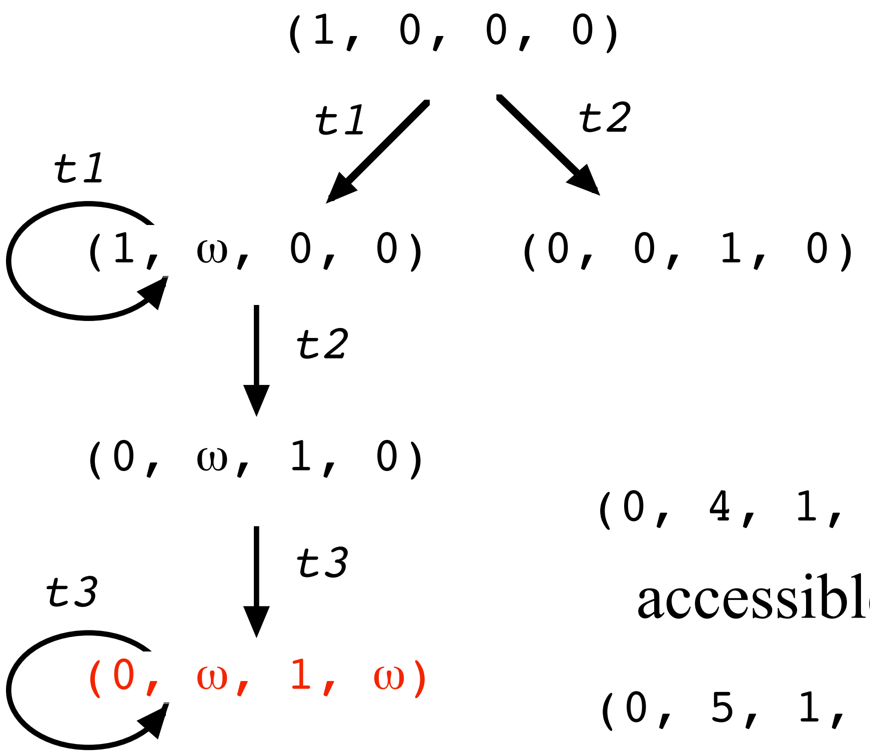
  Dans ce cas, le graphe de couverture est identique au graphe d'accessibilité

Perte d'information sur le graphe de couverture

- Le symbole ω introduit une perte d'information
- D'une manière générale, le graphe de couverture ne permet pas de répondre à des questions sur
  - L'accessibilité d'un marquage
  - La vivacité du réseau
- Des réseaux ayant des comportements différents peuvent avoir le même graphe de couverture

Graphe de couverture et accessibilité





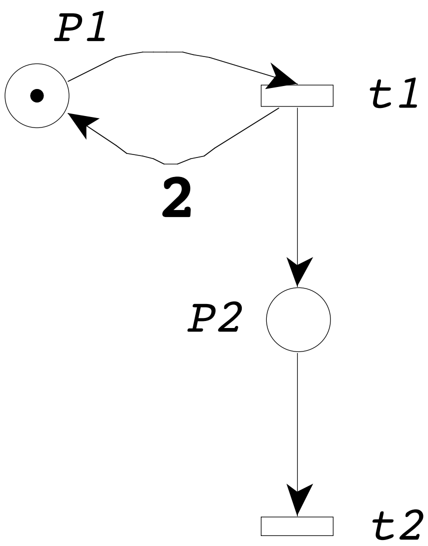
(0, 4, 1, 1) :

accessible

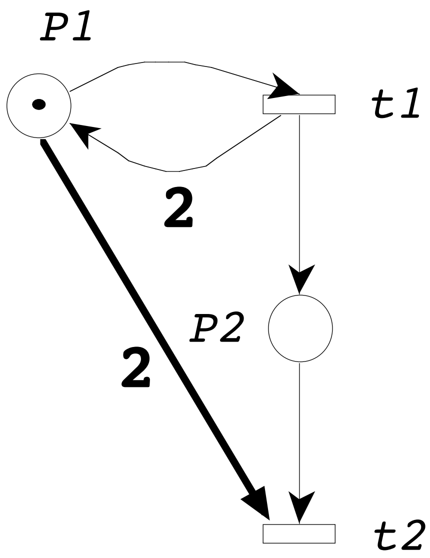
(0, 5, 1, 7) :

pas accessible

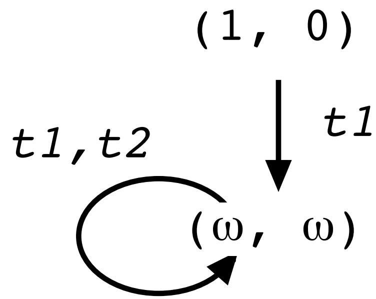
Graphe de couverture et comportement



vivant



La séquence t1t2
est bloquante



E. Encrenaz-Tiphène / C. Dutheillet
Thanks to P.R. & J.G.H.

Réseau non borné et vivacité

- t n'est pas vivante s'il y a dans le graphe de couverture une composante fortement connexe puits dans laquelle t n'apparaît pas.

- <R,M_o> n'est pas vivant s'il y a dans le graphe de couverture une composante fortement connexe puits dans laquelle au moins une transition n'apparaît pas.

- <R,M_o> n'est pas pseudo-vivant s'il y a dans le graphe de couverture un nœud sans successeur.

Puissance d'expression des RdP

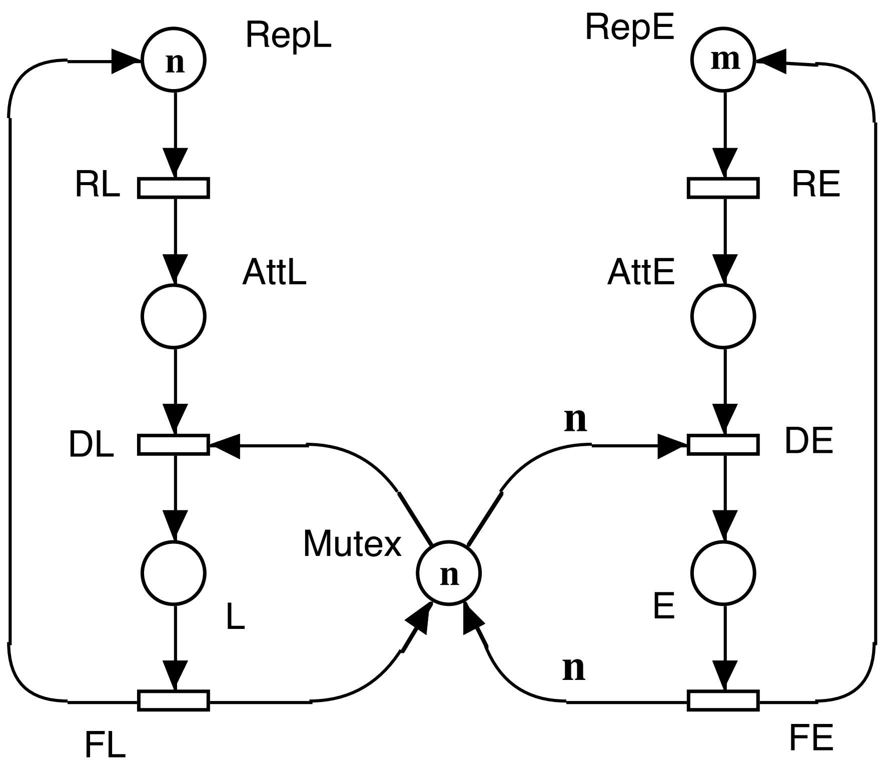
- Les réseaux de Petri n'ont pas la puissance d'expression de la machine de Turing
  - On ne sait pas représenter certains problèmes avec des données infinies
    - Lecteur/Ecrivain avec un nombre infini de lecteurs

- Extension du modèle par l'introduction d'arcs inhibiteurs
  - Définissent le nombre maximum de jeton que peut contenir une place pour que la transition soit franchissable

n Lecteurs / m Ecrivains

Lectures et Ecritures exclusives entre elles
Ecritures exclusives entre elles

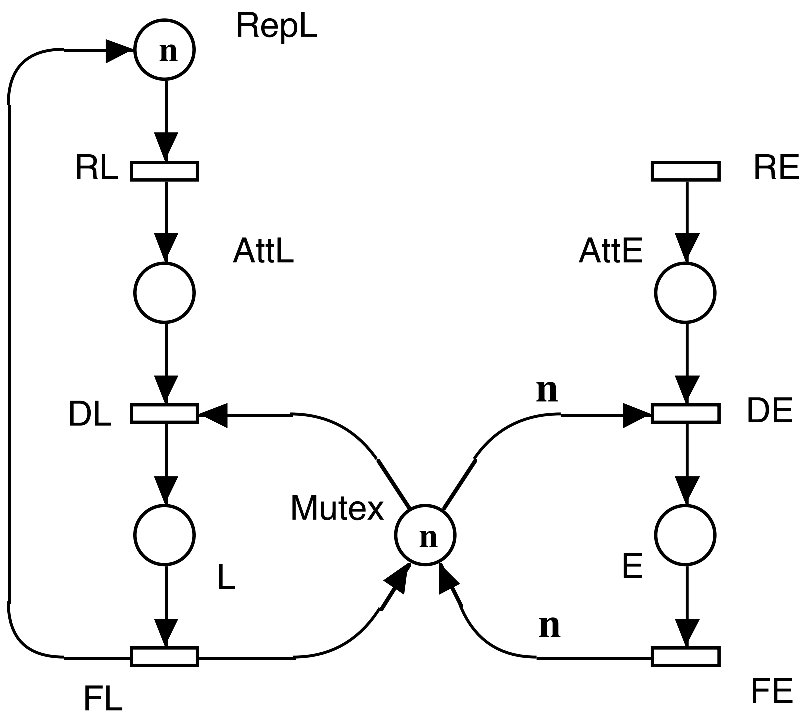
Lecteur :
- Requête Lecture
- Début Lecture
- Fin Lecture



Ecrivain :
- Requête Ecriture
- Début Ecriture
- Fin Ecriture

n Lecteurs / nombre infini d'écrivains

Lectures et Ecritures exclusives entre elles
Ecritures exclusives entre elles



Nombre infini de lecteurs ?

- La séquence $(RL.DL)^n$ doit être franchissable pour toute valeur de n.

- Le marquage

  $M_n = M_0 + n.C.\sigma$ σ = vecteur caractéristique de la séquence

  doit être accessible pour toute valeur de n

- Donc la séquence (RL.DL) ne peut décrémenter le marquage d'aucune place

Nombre infini de lecteurs (suite) ?

- Toute séquence où une écriture commence après la fin de n lectures doit être franchissable :

  M_0 [$(RL.DL)^n.FL^n$ .RE.DE >

- Soit M_0 [RL.DL> M

  Puisque la séquence ne décrémente pas le marquage, $M \geq M_0$

- Donc M [$(RL.DL)^n.FL^n$ .RE.DE >

  M_0 [$(RL.DL)^{n+1}.FL^n$ .RE.DE >

  Une écriture peut commencer alors qu'il y a une lecture en cours !

Arc inhibiteur

- Inh(p, t) = n
  -> t n'est franchissable que s'il y a moins de n jetons dans p

- Représenté avec une extrémité ronde

- Généralement pas pris en compte par les méthodes de vérification

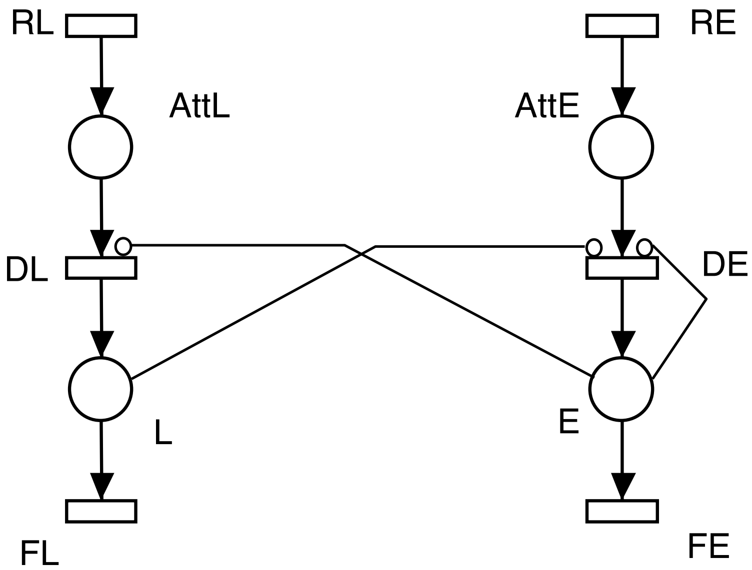
- On peut calculer le graphe des marquages accessibles et le graphe de couverture

- Certaines propriétés (caractère borné, accessibilité) deviennent indécidables

Nombre infini de lecteurs

Une lecture peut commencer s'il n'y a pas d'écriture en cours

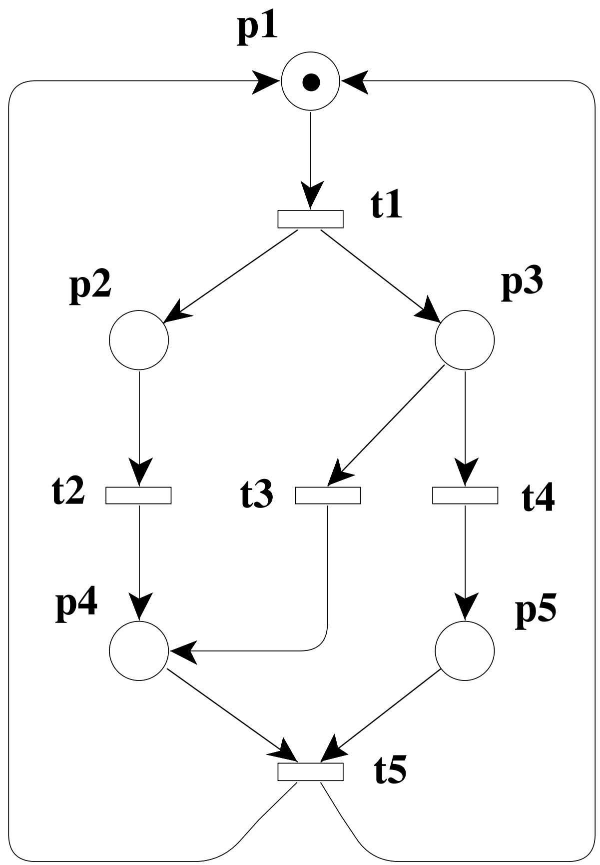
Une écriture peut commencer s'il n'y a ni lecture, ni écriture en cours



Conclusions

- Puissance d’expression supérieure aux automates, inférieure à la machine de Turing
- Beaucoup de propriétés sont décidables
  - Caractère borné
  - Accessibilité
  - Blocage, vivacité
- L’extension du modèle (arcs inhibiteurs) diminue le champ de propriétés décidables
  - Vivacité, accessibilité ne le sont plus
- Problème de représentation des systèmes complexes
  - Ajout d’information au niveau des jetons

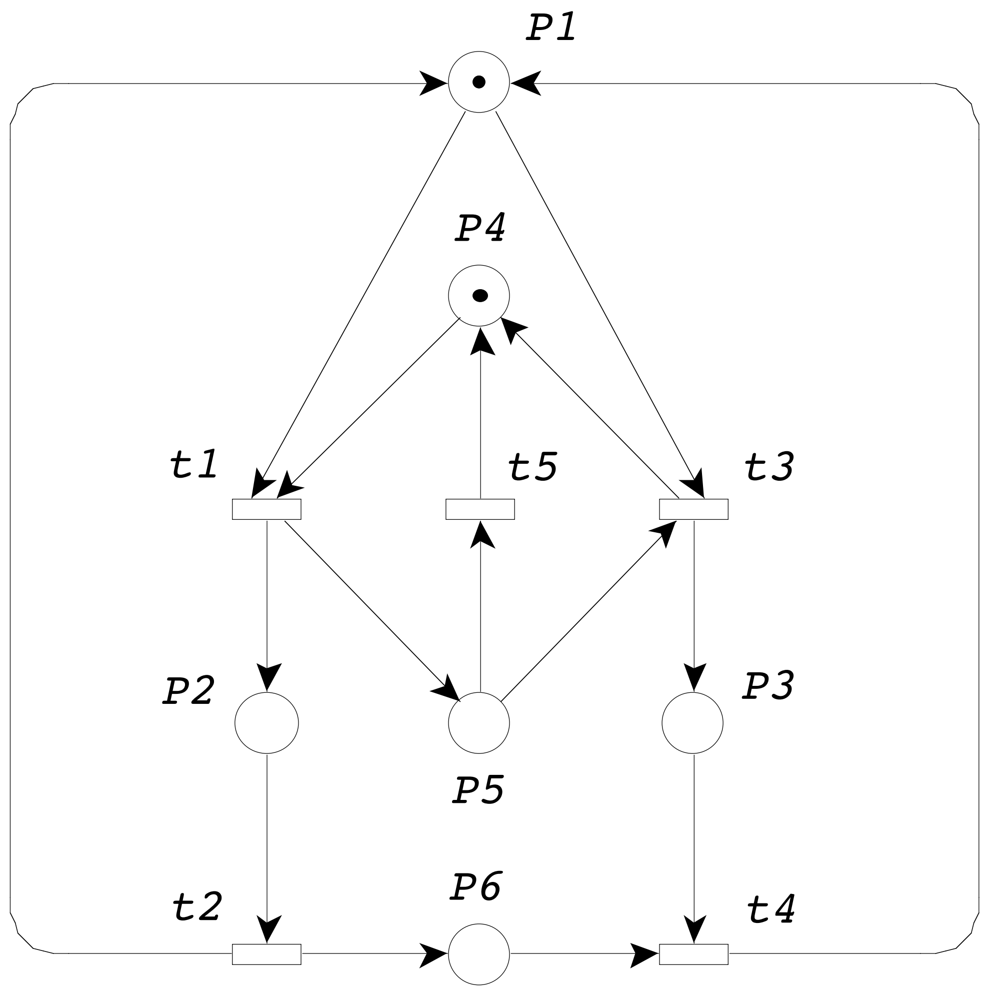
Exercice 3



- Ce réseau est-il
  - Borné ?
  - Quasi-vivant ?
  - Pseudo-vivant ?
  - Vivant ?

- Ce réseau admet-il un état d'accueil ?

Exercice 4 : construire le graphe d'accessibilité



Master Informatique - Spécialité SAR

NI405 - Modélisation des systèmes répartis

Introduction aux réseaux de Petri de haut-niveau (les réseaux colorés)

2 - Analyse

C. Dutheillet

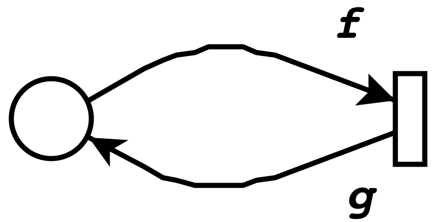
Analyse d’un modèle RdP coloré

- **Les modèles construits précédemment vérifient-ils la spécification ?**
- **Possibilité de réponse grâce à**
  - La construction du graphe d’accessibilité
  - Les invariants linéaires du réseau
  - La théorie des réductions
- **Essayer de tirer parti de la structure du modèle induite par les fonctions de couleur**

Pourquoi limiter les fonctions de couleur ?

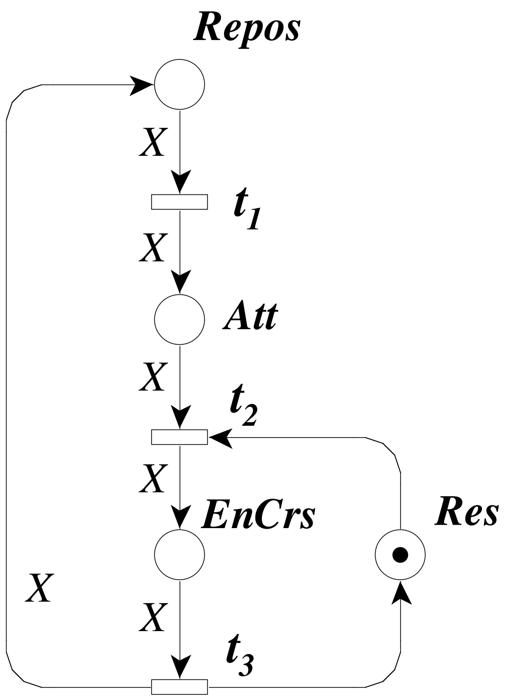
- **Pour préserver la lisibilité du modèle**
  - Tout réseau ordinaire peut être représenté…

Comme ça !



- **Parce que les propriétés des fonctions permettent d'obtenir des propriétés sur le franchissement**
  - On peut construire un graphe de classes
    - sans perte d'information
    - sans passer par la construction du graphe du réseau déplié

Exemple de la section critique simple



$C = \{c_1, c_2, c_3\}$

$M_0(Repos) = C.All$

$\boldsymbol{M_0}$

$Repos(c_1 + c_2 + c_3) + Res$

(t_1, c_1) (t_1, c_2) (t_1, c_3)

$Repos(c_2 + c_3) + Res + Att(c_1)$

$\boldsymbol{M_1}$

$Repos(c_1 + c_3) + Res + Att(c_2)$

$\boldsymbol{M_2}$

$Repos(c_1 + c_2) + Res + Att(c_3)$

$\boldsymbol{M_3}$

Vers l'utilisation des symétries

- **Dans le marquage initial,** t_1 **est franchissable pour toute instance de couleur marquant** *Repos*

- **Si on applique une permutation sur la couleur de la transition, les marquages obtenus sont identiques à cette permutation près**

$\boldsymbol{M_0}$

$Repos(c_1 + c_2 + c_3) + Res$

(t_1, c_1) $\qquad$ (t_1, c_3)

$\boldsymbol{c_1 \rightarrow c_3}$
$c_2 \rightarrow c_2$
$c_3 \rightarrow c_1$

$Repos(c_2 + c_3)$
$+ Res + Att(c_1)$
$\boldsymbol{M_1}$

$Repos(c_1 + c_2)$
$+ Res + Att(c_3)$
$\boldsymbol{M_3}$

Vers l'utilisation des symétries

- **On peut représenter cet ensemble de franchissements en utilisant des variables :**

$$Repos(x+y+z) + Res \xrightarrow{(t_1,\, z)} Repos(x + y) + Att(z) + Res$$

$$x, y, z \in C, \quad x \neq y \neq z$$

- **On obtient ensuite les franchissements réels en testant l'ensemble des instanciations possibles de x, y et z.**

- **Est-ce général ?**

Permutation sur un multi-ensemble

- **Soit A un ensemble, s une permutation sur A et a un multi-ensemble sur A**

$$s.a = s.\left(\sum_{x \in A} a(x).x\right) = \sum_{x \in A} a(x).s(x)$$

- **En particulier :** **s.a(s.x) = a(x)** (notation : s.c = s(c))
  - Le coefficient de s.x dans s.a est le coefficient de x dans a
- **Exemple :**

$$\boldsymbol{M(p) = c_1 + 2.c_2}$$

$$s.c_1 = c_3 \qquad s.c_2 = c_1 \qquad s.c_3 = c_2$$

$$s.M(p)(s.c_1) = M(p)(c_1) = 1$$

$$s.M(p)(s.c_2) = M(p)(c_2) = 2$$

$$\boldsymbol{s.M(p) = c_3 + 2.c_1}$$

Equivalence de franchissabilité

- **(t, c_t) est franchissable $\Leftrightarrow$**

$$M(p) \geq W^{-}(p, t)(c_t)$$

$$\forall c \in C(p), \quad M(p)(c) \geq W^{-}(p, t)(c_t)(c)$$

$$\forall c \in C(p), \quad s.M(p)(s.c) \geq s.W^{-}(p, t)(c_t)(s.c)$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{s.W^{-}(p, t)(c_t) = W^{-}(p, t)(s.c_t)}$

$$\forall c \in C(p), \quad s.M(p)(s.c) \geq W^{-}(p, t)(s.c_t)(s.c)$$

$$\forall c \in C(p), \quad s.M(p)(c) \geq W^{-}(p, t)(s.c_t)(c)$$

$(t, s.c_t)$ est franchissable à partir de s.M

Equivalence de franchissement

- **Après franchissement de (t, c_t) à partir de M :**

  $$\mathbf{M'(p) = M(p) - W^-(p, t)(c_t) + W^+(p, t)(c_t)}$$

  $s.M'(p) = s.M(p) - s.W^-(p, t)(c_t) + s.W^+(p, t)(c_t)$

  Dans le cas particulier où

  1) $s.W^-(p, t)(c_t) = W^-(p, t)(s.c_t)$
  2) $s.W^+(p, t)(c_t) = W^+(p, t)(s.c_t)$

  $s.M'(p) = s.M(p) - W^-(p, t)(s.c_t) + W^+(p, t)(s.c_t)$

$$\boxed{s.M \xrightarrow{(t,\ s.c_t)} s.M'}$$

Et donc ?

- **Dans quel cas a-t-on : $s \circ f = f \circ s$?**
- **Soit C_i une classe de couleurs et f_i : C(t) -> Bag(C_i)**
  - Si $f_i = X_i^j$
    - Pour toute permutation s_i sur C_i
  - Si $f_i = C_i$.All
    - Pour toute permutation s_i sur C_i
  - Si $f_i = X_i^j$ ++ (donc C_i est ordonnée)
    - Pour toute rotation r_i sur C_i

- **Les contraintes sur les fonctions de couleur permettent donc de connaître les fonctions s *par construction***

Equivalence de marquages

- **Ensemble de symétries :**
  - A chaque classe non ordonnée C_i du réseau, on associe un groupe S_i de permutations,
  - A chaque classe ordonnée C_i du réseau, on associe un groupe S_i de rotations
  - L'ensemble S des symétries du réseau est défini par

$$S = \{<s_1, \ldots, s_n> \mid s_i \in S_i\}$$

- **Equivalence de marquages (≡) :**

$$M \equiv M' \Leftrightarrow \exists\, s \in S, M' = s.M$$

Classes de marquages

- **Pour tour marquage M, on peut définir Cl(M) :**

$$Cl(M) = \{ M' \mid \exists\, s \in S,\ M' = s.M\}$$

- **Propriétés fondamentales de Cl(M) :**
  - $M \xrightarrow{(t,\, c)} M' \;\Rightarrow\; \forall s \in S,\ \ s.M \xrightarrow{(t,\, s.c)} s.M'$
  - Si M_0 est symétrique ($\forall s \in S,\ \ s.M_0 = M_0$) et M est accessible,

    $\forall\ M' \in Cl(M)$, *M' est accessible*
  - $\forall s \in S$ tel que $s.M = M$,

    $$M \xrightarrow{(t,\, c)} M' \;\Rightarrow M \xrightarrow{(t,\, s.c)} s.M'$$

On peut donc aussi définir des classes de franchissements

Donc

- **En définissant une représentation adéquate des classes d'états,**
  - Sous classes dynamiques
  - Marquage symbolique
- **En définissant une règle de franchissement qui s'applique directement sur cette représentation,**
  - Règle de franchissement symbolique

On peut construire *directement* **un graphe de classes (graphe quotient) qui est une représentation exacte de l'ensemble des états accessibles**

Sous-classes dynamiques pour C non ordonnée

- **On groupe dans un ensemble (sous-classe dynamique) les objets de C_i qui ont le même marquage**

- **Exemple :**

$$Repos(c_1+c_2) + Att(c_3) + Res$$

$\Rightarrow$ $Repos(x + y) + Att(z) + Res$

$M(x) = M(y) \Rightarrow Z^1, \ |Z^1| = 2$

$M(z) \neq M(x)$ et $M(z) \neq M(y) \Rightarrow Z^2, \ |Z^2| = 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{Repos(Z^1) + Att(Z^2) + Res, \ |Z^1| = 2, \ |Z^2| = 1}$

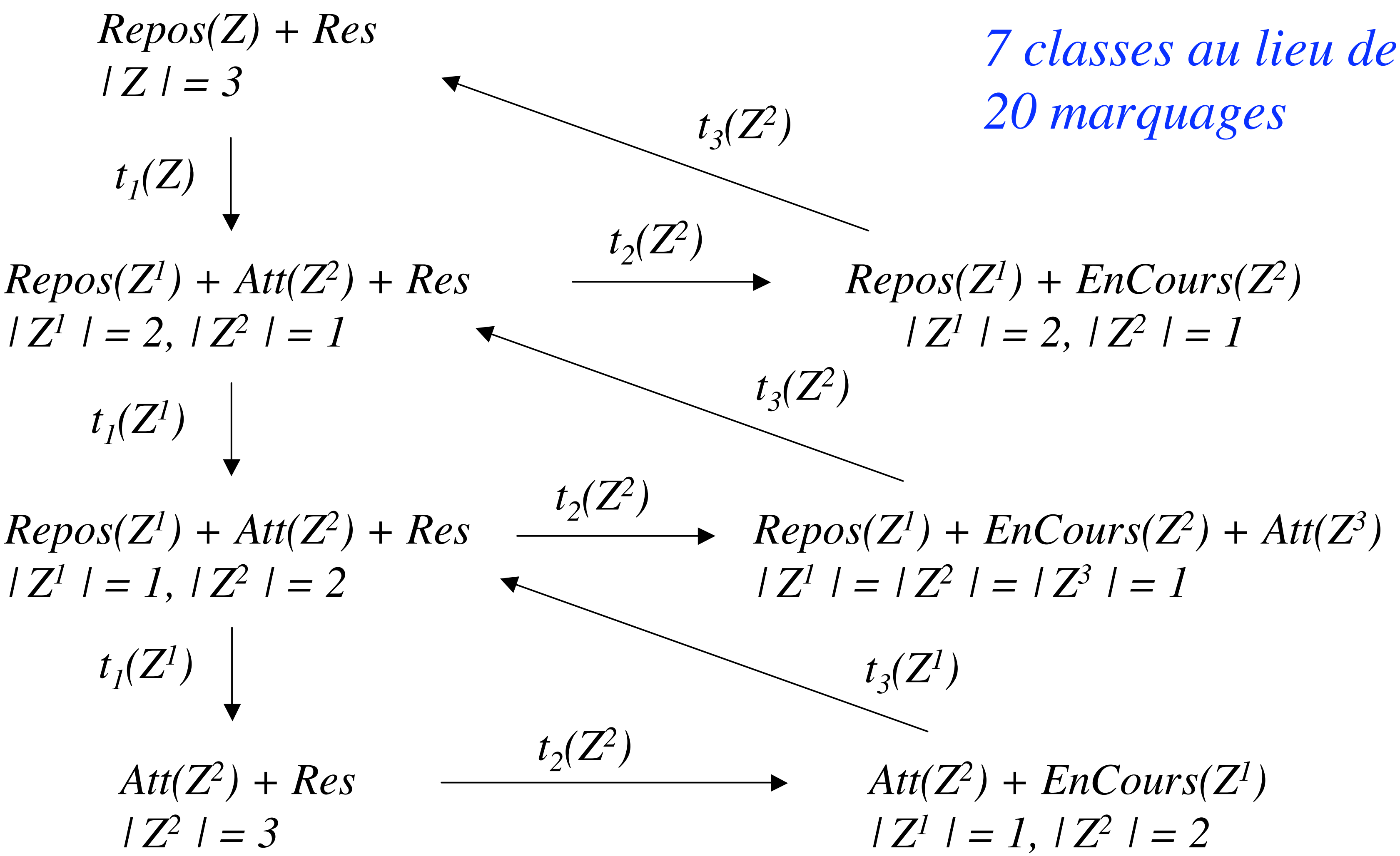
$Repos(c_2+c_3) + Att(c_1) + Res$

$Repos(c_1+c_3) + Att(c_2) + Res$

$Repos(c_1+c_2) + Att(c_3) + Res$

Exemple informel

7 classes au lieu de 20 marquages



Sous-classes dynamiques pour C ordonnée

- **Une sous-classe dynamique représente des objets qui ont le même marquage et**
  - qui doivent être consécutifs dans l'ordre d'énumération de la classe
  - tels que le successeur du dernier élément représenté par Z^i est représenté par Z^{i+1}
- **Exemple :**

$$Pense(c_2+c_4+c_5) + Mange(c_1+c_3) + F(c_5)$$

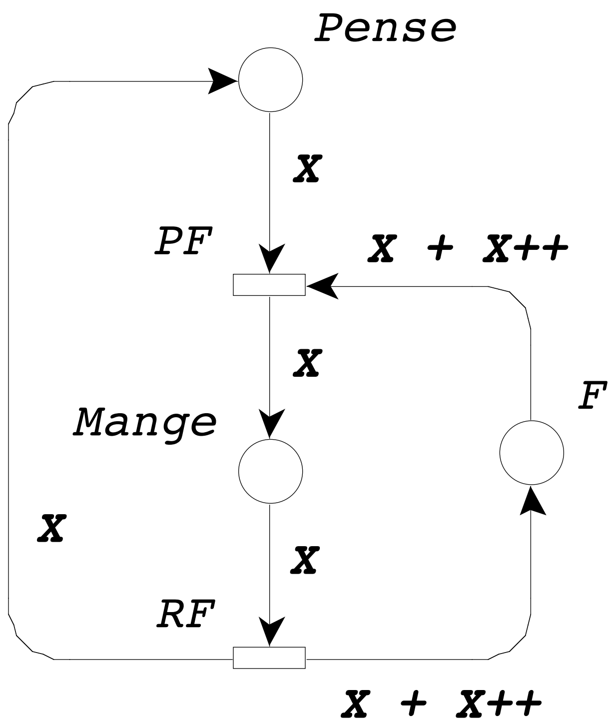
➠ *Une sous-classe dynamique par objet*

$$Pense(Z^2 + Z^4 + Z^5) + Mange(Z^1 + Z^3) + F(Z^5), \quad |Z^i| = 1$$

$$Pense(c_1 + c_3 + c_5) + Mange(c_2 + c_4) + F(c_1)$$
$$Pense(c_1 + c_2 + c_4) + Mange(c_3 + c_5) + F(c_2)$$
$$Pense(c_2 + c_3 + c_5) + Mange(c_1 + c_4) + F(c_3)$$

$$Pense(c_1 + c_3 + c_4) + Mange(c_2 + c_5) + F(c_4)$$
$$Pense(c_2 + c_4 + c_5) + Mange(c_1 + c_3) + F(c_5)$$

L'exemple des 5 philosophes



$$\boldsymbol{Pense(Z) + F(Z)}$$
$$\boldsymbol{| Z | = 5}$$

$$Pense(c_1+ c_2+ c_3+ c_4+c_5) + F(c_1+ c_2+ c_3+ c_4+c_5)$$

$$\downarrow PF(c_1)$$

$$Pense(\boldsymbol{c_2}+ \boldsymbol{c_3}+ \boldsymbol{c_4}+\boldsymbol{c_5}) + F(\boldsymbol{c_3}+ \boldsymbol{c_4}+\boldsymbol{c_5}) + Mange(\boldsymbol{c_1})$$

$$\boldsymbol{Pense(Z^1+Z^3) + F(Z^1)+ Mange(Z^2)}$$
$$\boldsymbol{| Z^1 | = 3, | Z^2 | = | Z^3 | = 1}$$

$$Pense(c_3+ c_4+ c_5+c_1) + F(c_4+ c_5+c_1) + Mange(c_2)$$
$$Pense(c_4+ c_5+ c_1+c_2) + F(c_5+ c_1+c_2) + Mange(c_3)$$
$$Pense(c_5+ c_1+ c_2+c_3) + F(c_1+ c_2+c_3) + Mange(c_4)$$
$$Pense(c_1+ c_2+ c_3+c_4) + F(c_2+ c_3+c_4) + Mange(c_5)$$

Règle de franchissement

- **Avant franchissement, on découpe les sous-classes dynamiques pour isoler les objets qui sont utilisés pour instancier les fonctions de couleur**
- <u>Exemple</u> **:**

$$\mathit{Repos}(Z) + \mathit{Res} \quad \Rightarrow \quad \mathit{Repos}(Z^1 + Z^{1,0}) + \mathit{Res}$$

$$|Z| = 3 \qquad\qquad |Z^1| = 2,\ |Z^{1,0}| = 1$$

$Z^{1,0}$ contient l'objet choisi pour instancier X, Z^1 ceux qui ne participent pas au franchissement

- **On applique ensuite la règle de franchissement classique**
- **On peut (doit) regrouper les objets ayant même marquage après le franchissement, et on peut (doit) renuméroter les sous-classes dynamiques**

Les philosophes (suite)

$$\boldsymbol{Pense(Z^1+Z^3) + F(Z^1) + Mange(Z^2)} \qquad \xrightarrow{RF(Z)} \qquad \boldsymbol{Pense(Z) + F(Z)}$$

$$\boldsymbol{|Z^1| = 3,\ |Z^2| = |Z^3| = 1} \qquad\qquad \boldsymbol{|Z| = 5}$$

$$Pense(Z^{1,0}+ Z^{1,1}+ Z^{1,2}+ Z^3) + F(Z^{1,0}+ Z^{1,1}+ Z^{1,2})+ Mange(Z^2)$$

$$|Z^i| = 1$$

$PF(Z^{1,0})$

$PF(Z^{1,1})$

$$Pense(Z^{1,1}+ Z^{1,2}+ Z^3) + F(Z^{1,2})+ Mange(Z^{1,0}+ Z^2)$$

$$\boldsymbol{Pense(Z^2+ Z^3+ Z^5) + F(Z^3)+ Mange(Z^1+ Z^4)}$$

$$|Z^i| = 1$$

$$Pense(Z^{1,0}+ Z^{1,2}+ Z^3) + F(Z^{1,0})+ Mange(Z^{1,1}+ Z^2)$$

$$\boldsymbol{Pense(Z^1+ Z^3+ Z^5) + F(Z^1)+ Mange(Z^2+ Z^4)}$$

$$|Z^i| = 1$$

Les philosophes : graphe symbolique

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large]
\begin{array}{c} Pense(Z) + F(Z) \\ |\, Z \,| = 5 \end{array}
\arrow[d, shift right=2, "PF(Z)"']
\\
\begin{array}{c} Pense(Z^1+Z^3) + F(Z^1) + Mange(Z^2) \\ |\, Z^1 \,| = 3,\ |\, Z^2 \,| = |\, Z^3 \,| = 1 \end{array}
\arrow[u, shift right=2, "RF(Z^2)"']
\arrow[d, shift right=3, "{PF(Z^{1,0}),\ PF(Z^{1,1})}"']
\arrow[d, shift right=1]
\\
\begin{array}{c} Pense(Z^2+Z^3+Z^5) + F(Z^3) + Mange(Z^1+Z^4) \\ |\, Z^i \,| = 1 \end{array}
\arrow[u, shift right=1]
\arrow[u, shift right=3, "{RF(Z^1),\ RF(Z^4)}"']
\end{tikzcd}
$$

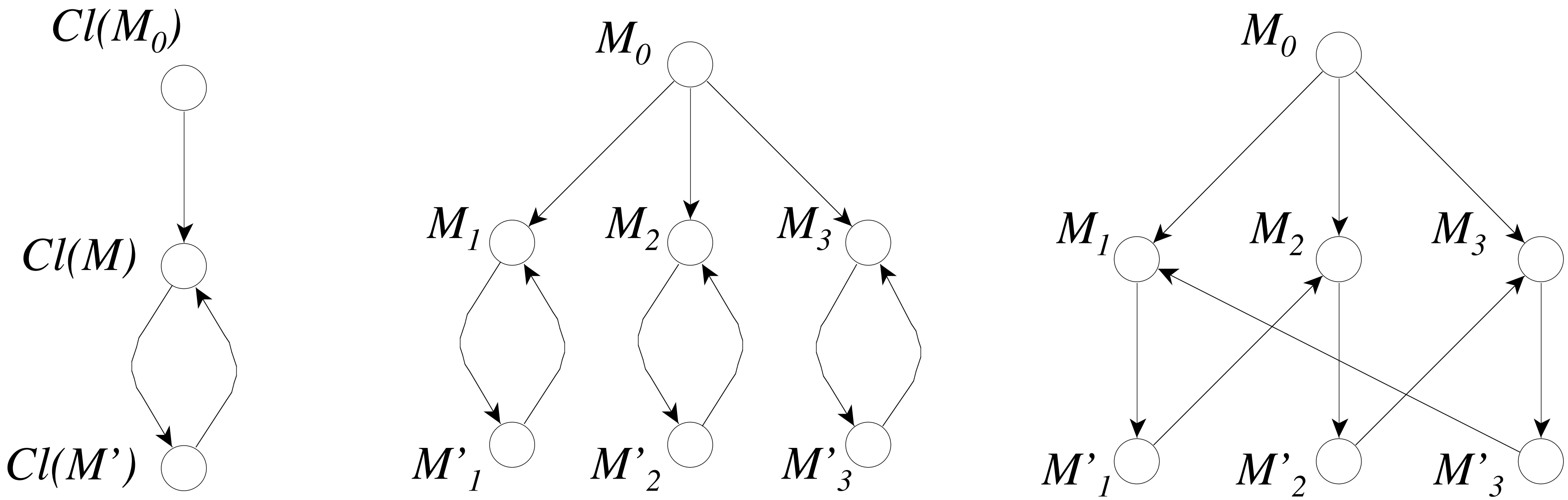
Que préserve le graphe symbolique ?

- **Tout marquage représenté par une classe (marquage symbolique) est accessible**
- **Tout marquage accessible est représenté par une classe**

- **Toute séquence de franchissement du GMA est représentée dans le graphe symbolique**
- **A toute séquence du graphe symbolique correspond une séquence du GMA**

Alors que manque-t-il ?

- **On ne sait pas distinguer les situations suivantes :**



➠ **Perte d'information sur les états d'accueil**

Peut-on représenter n'importe quel réseau de Petri ordinaire ?

- **Oui, mais…**
  - Aucun intérêt si on ne réduit ni la représentation du modèle, ni celle du graphe d'accessibilité ;
- **Le modèle présenté impose que tous les objets d'une même classe se comportent de manière identique**
  - Une classe regroupe un ensemble d'entités de même nature, susceptibles de marquer les mêmes places
- **Il faut pouvoir partitionner la classe en sous-ensembles (sous-classes statiques) d'éléments qui évoluent de manière différente :**

$$C_i = D_i^1 \cup D_i^2$$

  - Les éléments de D_i^1 évoluent différemment de ceux de D_i^2
  - Les fonctions de diffusion sont définies au niveau des sous-ensembles : D_i^1.All
  - Les techniques de construction du graphe symbolique continuent à s'appliquer

Conclusion

- **La construction du graphe symbolique s’applique sur n’importe quel réseau coloré mais**
  – Son efficacité dépend directement du degré de symétrie du système représenté : y a-t-il beaucoup de composants qui se comportent de manière identique ?
  – La structuration du modèle (limitaion des fonctions de couleurs) est nécessaire pour une construction directe et automatique
- **La plupart des propriétés du système peuvent être vérifiées à partir du graphe symbolique**