

Chapitre 4

Calculabilité

- 1 Fonction Turing-Calculable
- 2 Thèse de Church
- 3 Machine de Turing et Langages
- 4 Combinaison de Machines de Turing

Fonction Turing-Calculable

Introduction

- Une Machine de Turing est un modèle pour un ordinateur avec un temps de calcul très grand et un bon espace de calcul.
- Il est possible de simuler un ordinateur sur une machine de turing.

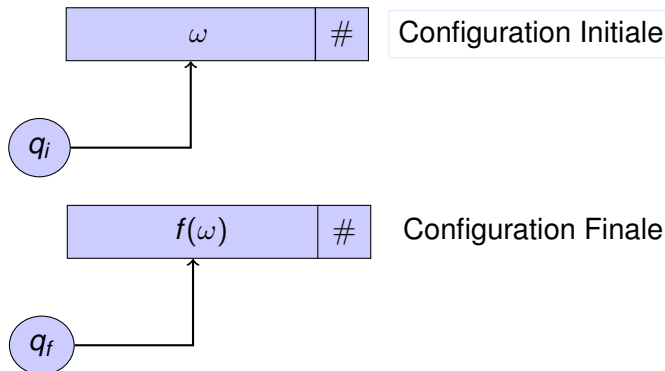
Fonction Turing-Calculable

- Une fonction $f(x)$ est dite **Turing calculable** (*T-calculable*) si ses valeurs peuvent être calculées par une Machine de Turing.
- L'argument x de la fonction est le mot contenu sur le ruban d'entrée de la MT. Quand la MT (le calculateur) s'arrête, la valeur de $f(x)$ est inscrite sur le ruban.
- Cette valeur peut apparaître sous une représentation bien déterminée qui peut être une représentation en Base 2. Dans ce cas le codomaine de $f(x)$ est $\{0, 1\}$.

Fonction Turing-Calculable

Définition(Fonction Turing-Calculable)

- Une MT calcule une fonction $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, si, pour tout mot d'entrée ω , elle s'arrête toujours dans une configuration où $f(\omega)$ se trouve sur le ruban.



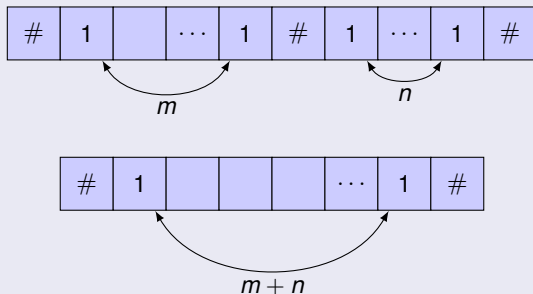
Fonction Turing-Calculable

Exercice 1

- Montrer que la fonction $ADD(m, n)$ est T-Calculable $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

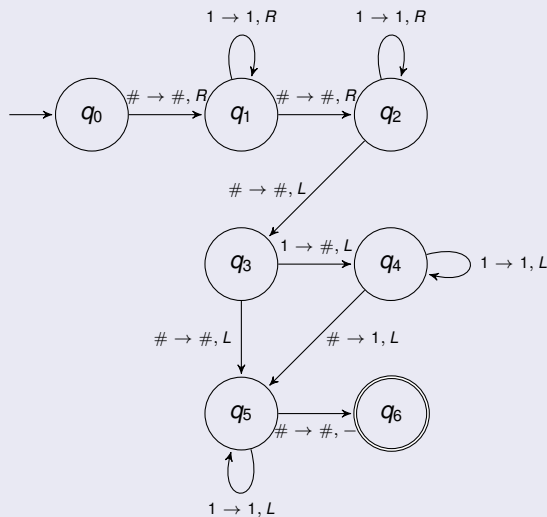
Exercice 1 - Solution

- On avance jusqu'au 2^{ème} délimiteur droit #, le décaler d'une case vers la gauche et ensuite remplacer le premier délimiteur # rencontré par 1.



Fonction Turing-Calculable

Exercice 1 - Solution



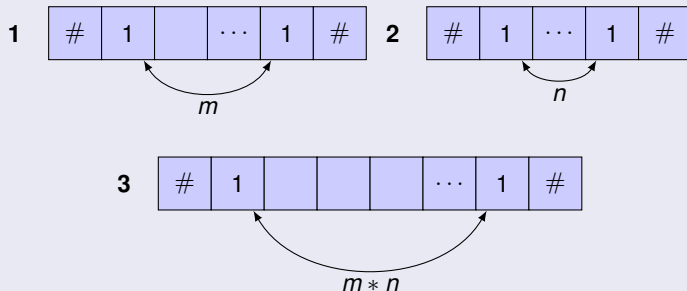
Fonction Turing-Calculable

Exercice 2

- Montrer que la fonction $MUL(m, n)$ est T-Calculable $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 - Solution

- On utilise une MT à trois rubans. Tant qu'il y a 1 dans le ruban1, on copie le contenu du ruban2 dans le ruban3.



Fonction Turing-Calculable

Exercice 2 - Solution (Pseudo-Code de La MT)

P_1 , P_2 et P_3 sont les têtes de L/E pointant respectivement les rubans 1, 2 et 3.

```

1  Début
2  | TantQue  $P_1$  pointe sur 1 Faire
3  |   TantQue  $P_2$  pointe sur 1 Faire
4  |   | écrire à la position  $P_3$  un 1
5  |   | avancer  $P_2$ 
6  |   | avancer  $P_3$ 
7  |   FinTantQue
8  |   reculer  $P_2$ 
9  |   TantQue  $P_2$  pointe sur 1 Faire
10 |   | reculer  $P_2$ 
11 |   FinTantQue
12 |   avancer  $P_2$ 
13 |   avancer  $P_1$ 
14 | FinTantQue
15 Fin
  
```

Thèse de Church

Thèse de Church

- Si il existe un algorithme qui calcule $f(x)$, Alors il existe une Machine de Turing qui exécute l'algorithme qui calcule $f(x)$.

Machine de Turing et Langages

Machine de Turing et Langages

- Il existe plusieurs langages non acceptés par des Machines de Turing
- Ce sont les langages qui ne peuvent pas être décrits par des algorithmes.

Langages rékursifs

- Un langage est rékursif s'il existe une MT engendrant L dans l'ordre des mots de longueur croissante. Les langages récursivement énumérables.

Langages récursivement énumérables

- Un langage L est récursivement énumérable s'il existe une MT \mathcal{M} engendrant L .

Combinaison de Machines de Turing

Machines de Turing de base

- On peut combiner des machines simples (de base sous programmes) pour obtenir une machine composée
- **Machines de base**
 - Machine d'écriture de symbole
 - Écriture d'un symbole correspondant sans déplacer la tête et indépendamment du contenu de la bande
 - Machine de déplacement de la tête
 - Une machine pour déplacer la tête de la bande à droite ou à gauche

Combinaison de Machines de Turing

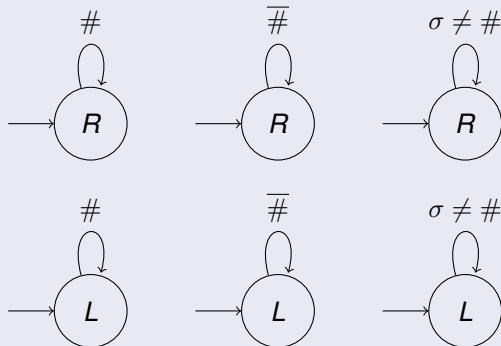
Machines de base (Abréviation)

- ❶ $R_{\#}$: qui trouve le premier blanc à droite
- ❷ $L_{\#}$: qui trouve le premier blanc à gauche
- ❸ $R_{\overline{\#}}$: qui trouve le premier non blanc à droite
- ❹ $L_{\overline{\#}}$: qui trouve le premier non blanc à gauche

Avec $\#$ représente le symbole blanc et σ représente un symbole quelconque du ruban ($\sigma \in \Gamma$)

Combinaison de Machines de Turing

Machines de base (Construction graphique)



Combinaison de Machines de Turing

Exemple de machine composée

- Une machine qui scanne la bande jusqu'à ce qu'elle trouve un non blanc. Elle revient à gauche et copie le symbole qu'elle trouve dans la case juste avant.
- L_σ : action reculer suivie de l'action remplacer le symbole courant par σ

