

Ülesanne kiiruse valemi kohta

Tallinnast Viljandisse on ligikaudu 160 km. Üheaegselt alustasid sõitu Tallinnast Viljandisse BMW i8 ja Mazda RX Vision. BMW keskmine kiirus oli 10 km/h suurem kui Mazdal ja jõudis Viljandisse 2 min varem kui Mazda. Leia autode keskmised kiirused (km/h) ja aeg, mis kummagil autol kulus vahemaa läbimiseks (min).

Lahendus

$s := 160$ Kogu teepikkus, mille autod peavad läbima

Olgu aeg, millega BMW antud teepikkuse läbis t_1 ja Mazda t_2 .

Kui BMW jõudis Viljandisse varem kui Mazda, siis $t_1 < t_2$, sest BMW oli kiirem ja seega kulus tal vähem aega. Ülesande lahendamiseks soovime leida seost, kus mõlemad pooled on võrdsed, ehk BMW ajale tuleb juurde liita mingi tundmat ajahulk t ehk $t_1 + t = t_2$ või Mazda ajast maha lahutada mingi tundmatu t ehk $t_1 = t_2 - t$. See tundmatu t on teksti põhjal suurus 2 min ehk $t = 2$. Kumb kirjalpilt algsest valida on täiesti meeldevaldne. Antud juhul valin esimese $t_1 + t = t_2$.

Vaatame nüüd sarnast seost kiirusega. Olgu kiirus, millega BMW antud teepikkuse läbis v_1 ja Mazda v_2

Kui BMW jõudis Viljandisse varem kui Mazda, siis $v_1 > v_2$, sest BMW keskmine kiirus oli küllap suurem kui ta varem kohale jõudis. Ülesande lahendamiseks soovime leida seost, kus mõlemad pooled on võrdsed, ehk BMW kiirusest tuleb maha lahutada mingi tundmat kiirusehulk v ehk $v_1 - v = v_2$ või Mazda ajale juurde liita mingi tundmatu v ehk $v_1 = v_2 + v$. See tundmatu v on teksti põhjal suurus 10 km/h ehk $v = 10$. Kumb kirjalpilt algsest valida on täiesti meeldevaldne. Antud juhul valin teise $v_1 = v_2 + v$.

Kirjutame antud seosed välja.

Kasutame antud juhul meile teadatuntud kiiruse valemit:

$$t_1 + 2 \text{ min} = t_2 \quad (1)$$

$$v_1 = v_2 + 10 \text{ km/h} \quad (2)$$

$$v = \frac{s}{t} \quad (3)$$

Asendame valemi (3) valemisse (2). Samas on lubatud (3) valemist muuta kujule $t = s/v$ ja asendada esimesse. Valik on jällegi meelevaldne.

$$t_1 + 2 = t_2 \quad (1)$$

$$\frac{s}{t_1} = \frac{s}{t_2} + 10 \quad (2)$$

Kuna teepikkused, mille mõlemad autod läbivad on samad siis $s_1 = s_2 = s = 160 \text{ km}$.

$$t_1 + 2 = t_2 \quad (1)$$

$$\frac{160}{t_1} = \frac{160}{t_2} + 10 \quad (2)$$

Järgmiseks on vaja aeg $t = 2 \text{ min}$ vaja teisendada kas tundidesse või keskmine kiirus $v = 10 \text{ km/h}$ vaja teisendada sellisesse dimensiooni, mis sisaldab minuteid. Näiteks km/min või m/min. Kuna II variant mulle ei meeldi ja reeglina kiirust niimoodi ei avaldata, siis valin I variandi ja teisendan minutid tundidesse ehk

$$t = 2 \text{ min} = 2 \frac{1}{60} \text{ h} = \frac{2}{60} \text{ h} = 0.033 \text{ h}$$

Peale teisendust avaldan (1) seosest t_1 ja asendan valemisse (2).

$$t_1 = t_2 - \frac{1}{30} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{160}{t_2 - \frac{1}{30}} = \frac{160}{t_2} + 10 \quad (4)$$

$$\frac{160}{t_1} = \frac{160}{t_2} + 10 \quad (2)$$

Lihtsustan avaldist (4).

Saame

$$10 \cdot t_2^2 - \frac{1}{3} \cdot t_2 - \frac{16}{3} = 0 \quad (5)$$

$$D := \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 4 \cdot 10 \cdot \left(\frac{-16}{3}\right) = 213.444$$

$$\sqrt{D} = 14.61$$

$$t_{21} := \frac{-\left(\frac{-1}{3}\right) + \sqrt{D}}{2 \cdot 10} = 0.747 \quad \text{h}$$

$$t_{22} := \frac{-\left(\frac{-1}{3}\right) - \sqrt{D}}{2 \cdot 10} = -0.714 \quad \text{h}$$

Ruutvõrrandis ruutjuure all olev avaldis ehk diskriminant
 $D = b^2 - 4ac$. Kirjutasin eraldi paremaks arvutamiseks välja.

$$aeg2 := t_{21} \cdot 60 = 44.829 \quad \text{min}$$

Ehk Mazda läbis 160 km ajaga $aeg2 = 44.829 \quad \text{min}$.

Negatiivset aega me antud ülesande puhul kasutada ei saa.
 Seega see on väärilahend.

Kontroll

:

$$10 \cdot t_{21}^2 - \frac{1}{3} \cdot t_{21} - \frac{16}{3} = 0$$

Avaldame kontrolli jaoks t_1 :

$$t_1 := t_{21} - \frac{1}{30} = 0.714 \quad \text{h}$$

$$aeg1 := t_1 \cdot 60 = 42.829 \quad \text{min}$$

Ehk BMW läbis 160 km ajaga $aeg1 = 42.829 \quad \text{min}$

Kontrollime seose (2) vasakut ja paremat poolt:

$$vp := \frac{160}{t_1} = 224.146$$

=>

$$vp = pp \quad \text{Klapivad :)}$$

$$pp := \frac{160}{t_{21}} + 10 = 224.146$$

Kui vastused siin ei klapiks, on viga seostes
 (1) või (2). Kui need on korras, siis võib olla
 viga (4) võrdusest t_2 avaldamises nagu mul
 algsetl.

Vaatame huvi pärast, mis oli kummagi auto keskmine kiirus:

$$v_1 := \frac{160}{t_{21}} + 10 = 224.146 \quad \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \text{Ehk BMW keskmine kiirus oli ca } 224.146 \text{ km/h.}$$

$$v_2 := v_1 - 10 = 214.146 \quad \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \text{Ehk Mazda keskmine kiirus oli ca } 214.146 \text{ km/h.}$$

Järeldus: Tüübid sõitsid ikka päris kiiresti, kui BMW keskmine kiirus oli

$$v_1 = 224.146 \quad \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \text{ja } 160 \text{ km läbimiseks kulus tal } t_1 = 0.714 \quad \text{tundi ehk ligikaudu}$$

$a_{eg1} = 42.829$ minutit. Samas Mazda ei teinud ka väga pahasti. Tema keskmine kiirus oli

$$v_2 = 214.146 \quad \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \text{ja aeg, mis tal kulus antud teekonna jaoks oli } t_{21} = 0.747 \quad \text{tundi}$$

ehk ligikaudu $a_{eg2} = 44.829$ minutit.