Valemid mahuti ruumala jaoks ja funktsioon MinuPytt

Siim Erik Pugal

21. mai 2020. a.

Sissejuhatus

Mahuti on jagatud kolmeks osaks, millest kaks on koonuse kujulised ja keskmine osa silndri kujuga. Valemid silindri ja koonuste jaoks on tuletatud kahes osas, et leida, mis on mahutis oleva vee ruumala.

Silindri ruumala

Idee mahuti keskmise osa ehk silindri ruumala leidmiseks on kogu silndri ruumalast lahutada tühja osa ruumala, mida vesi mahutis ei täida.

Täissilindri ruumala

Rajad Descartes'i koordinaatsüsteemis:

$$\begin{gathered} -R \leq x \leq R, \\ -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, \\ 0 \leq z \leq L. \end{gathered}$$

$$\iiint_E dV = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^L dx\, dy\, dz = 2L \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \pi R^2 L \tag{1}$$

Tühja osa ruumala

Rajad Descartes'i koordinaatsüsteemis: (vt. Joonis 1.)

$$\begin{gathered} 0 \leq x \leq \sqrt{R^2 - [y + (H - R)]^2}, \\ 0 \leq y \leq 2R - H, \\ 0 \leq z \leq L. \end{gathered}$$

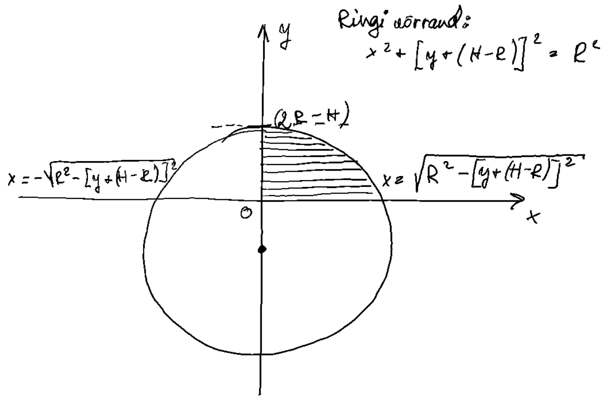
$$\begin{aligned} \iiint_E dV &= 2 \int_0^L \int_0^{2R-H} \int_0^{\sqrt{R^2-[y+(H-R)]^2}} dx\, dy\, dz = 2 \int_0^L dz \int_0^{2R-H} dy \int_0^{\sqrt{R^2-[y+(H-R)]^2}} dx = \\ &= 2L \int_0^{2R-H} \sqrt{R^2 - [y + (H-R)]^2}\, dy = L \left[\frac{\pi R^2}{2} - R^2 \arcsin\left(\frac{H-R}{R}\right) - (H-R)\sqrt{2HR - H^2} \right] \end{aligned} \tag{2}$$

Silindrilise osa ruumala

$$\begin{aligned} V &= \pi R^2 L - L \left[\frac{\pi R^2}{2} - R^2 \arcsin\left(\frac{H-R}{R}\right) - (H-R)\sqrt{2HR - H^2} \right] = \\ &= \frac{\pi R^2 L}{2} + L R^2 \arcsin\left(\frac{H-R}{R}\right) + L(H-R)\sqrt{2HR - H^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Antud kuju on valitud sellepärast, et funktsioonis $MinuPytt(R, L, l, H)$ saab väärtus H olla vahemikus $0 \leq H \leq 2R$.

Joonis 1: Silindri ristlõige XY-tasandis: integreerimisrajad silindri tühja osa jaoks



Koonuse ruumala

Terve koonuse ruumala

Descartes'i koordinaatides: Rajad tulenevad lõputu koonuse valemist $R^2z^2 = l^2x^2 + l^2y^2$, mis avaneb z-telje positiivses suunas.

$$\begin{gathered}-R \leq x \leq R, \\ -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, \\ \tfrac{l}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h.\end{gathered}$$

$$\begin{aligned} V = \iiint_E dV &= \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_{\frac{l}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} dx\,dy\,dz = \\ &= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(l - \frac{l}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right) dy = \\ &= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} h\,dy - \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{l}{R}\sqrt{x^2+y^2}\,dy = \\ &= \pi R^2 l - \frac{2}{3}\pi R^2 l = \frac{1}{3}\pi R^2 l \end{aligned} \tag{4}$$

Osalise koonuse ruumala

Idee koonuse ruumala jaoks on kõigepealt tuletada valem, mis leiab ruumala poole koonuse ulatuses. Selle mõttekäik ja tuletus on sõnastatud järgnevalt:

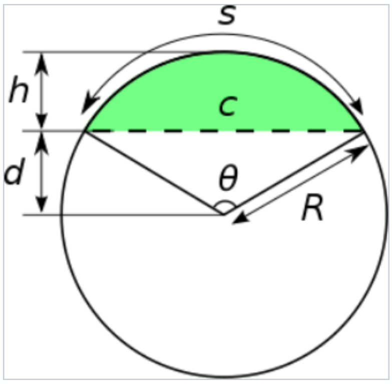
$$\begin{gathered}\text{Koonuse kõrgus} = l \\ \text{Koonuse põhja raadius} = R \\ \text{Koonuse keskmise telje ja lõigitava pinna vaheline kaugus} = d, 0 \leq d \leq R\end{gathered}$$

Iga horisontaalne lõige on koonuses ringi kujuga. Need segmendid varieeruvad oma suuruse poolest, sest kui liikuda mööda koonust verikaalselt üles-alla, muutub ketta raadius. Oletame, et mingil kõrgusel z on ringil raadius r, mis moodustab nurga θ ringi keskkohaga (vt. Joonis 2). Saame valemi

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d}{r}, \tag{5}$$

ehk

$$\theta = 2\arccos\left(\frac{d}{r}\right). \tag{6}$$



Joonis 2: Koonuse ristlõige XY-tasandis

Olgu iga ketta paksus väljendatav seosega

$$dz = \frac{l}{R}\,dr. \tag{7}$$

Segmendi pindala:

$$\begin{aligned} A &= \frac{r^2}{2}\big(\theta - \sin(\theta)\big) = \frac{r^2}{2}\left[2\arccos\left(\frac{d}{r}\right) - \sin\left(2\arccos\left(\frac{d}{r}\right)\right)\right] \\ &= r^2\arccos\left(\frac{d}{r}\right) - d\sqrt{r^2 - d^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Seega on iga õhukese ketta ruumala väljendatav järgmise seosega:

$$dV = A\,dz = A\frac{l}{R}\,dr = \frac{l}{R}\left(r^2\arccos\left(\frac{d}{r}\right) - d\sqrt{r^2 - d^2}\right)dr. \tag{9}$$

Ruumala avaldub seega järgmisel kujul:

$$V = \int_{r=d}^{R} \frac{l}{R}\left(r^2\arccos\left(\frac{d}{r}\right) - d\sqrt{r^2 - d^2}\right)dr \tag{10}$$

Pärast seda kui Wolfram Mathematica minu arvutilt ligi 18 000 byte'i ära sõi, sai ta antud integraali vastuseks

$$V = -\frac{d \cdot l}{2R}\left[\arccos\left(d^2 - R^2\right) + R\sqrt{R^2 - d^2} + d^2\log(d) - d^2\log\left(R + \sqrt{R^2 - d^2}\right)\right] \tag{11}$$

See valem on peamiselt mõeldud kontrollimaks, kas meie rajad ja eeldused on korrektsed. Kui $d = 0$, siis $V = \frac{1}{6}\pi R^2 l$ ning $d = R$ korral on $V = 0$, seega on valem õigesti formuleeritud.

Kuna antud valem on pikk ja kohmakas ning $\log(d)$ võib väärtuse $d = 0$ korral hakata koodis probleeme tekitama, jätan ma selle valemi Mathematica jaoks välja ning kasutan valemi (10) lahendamiseks Mathematicas funktsiooni `NIntegrate[]`.

Hetkel määrab vee taset koonuses muutuja d. Selleks, et see asendada muutujaga H on vaja tuua sisse kaks tingimust. Esiteks, kui veetase on koonuses vahemikus $0 \leq H \leq R$, siis omab muutuja d kuju $d = R - H$. Teiseks: kui veetase on üle koonuse põhja raadiuse, siis on täiskoonuse ruumalast vaja maha lahutada tühja segmendi ruumala, mille korral hakkab kehtima tingimus $d = H - R$ ning koonuse ruumala hakatakse arvutama valemiga

$$V = V_{Tervekoonus} - V_{Poolkoonus} = \frac{\pi R^2 l}{6} - \int_{d}^{R} \frac{l}{R}\left(r^2\arccos\left(\frac{d}{r}\right) - d\sqrt{r^2 - d^2}\right)dr. \tag{12}$$

Kuna koonused on mahuti mõlemas otsas kirjeldatavad samade parameetritega, siis on nad sümmeetrilised ning mahutuvuse poolest võrdväärsed. Seega on kogu mahuti ruumala kirjeldatav valemiga

$$V_{Mahuti} = V_{Silinder} + 2 \cdot V_{Koonus} \tag{13}$$

In[201]:=
```
(*Kodutöö NR 2
 Siim Erik Pugal
 179411YAFB*)
MinuPytt[R_, L_, l_, H_] := Module[{Vs, Vk},
  If[H < 0, "Mahutis pole vett", If[H > 2 * R, "Vedeliku kõrgus ületab mahuti diameetri",
    Vs = π * R^2 * L / 2 + R^2 * ArcSin[(H - R) / R] + (H - R) * Sqrt[2 * H * R - H^2];
    If[H ≤ R, d = R - H;
     Vk = NIntegrate[l / R * (r^2 * ArcCos[d / r] - d * Sqrt[r^2 - d^2]), {r, d, R}];
     N[Vs + 2 * Vk], d = H - R;
     Vk = NIntegrate[l / R * (r^2 * ArcCos[d / r] - d * Sqrt[r^2 - d^2]), {r, d, R}];
     N[Vs + 2 * (π * R^2 * l / 3 - Vk)]
    ]]]
 ]

MinuPytt[6, 20, 5, 9]
Plot[MinuPytt[6, 20, 5, h], {h, 0, 12}]
```

Out[202]= 1500.91

Out[203]=