

Exercice 2.2 : Recherche d'extrema

2.2.1 Fonction $f(x, y) = e^{xy} - e^x + 2$

1) Gradient

On calcule les dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{xy} - e^x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^{xy}\end{aligned}$$

Un point critique vérifie :

$$\nabla f(x, y) = 0$$

Donc :

$$xe^{xy} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

En remplaçant dans la première équation :

$$y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y = 1$$

Point critique :

$$(0, 1)$$

2) Hessienne

$$H = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} - e^x & (1 + xy)e^{xy} \\ (1 + xy)e^{xy} & x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$$

En $(0, 1)$:

$$H(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminant :

$$\det(H) = 0 \times 0 - 1^2 = -1 < 0$$

3) Conclusion

La Hessienne est indéfinie, donc : (0, 1) est un point de selle -> Il n'existe aucun extremum local.

2.2.2 Fonction $g(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2 + z^2 + 1)}$

1) Gradient

On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= e^{Ax}(1 + A(x + z^2)) \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2xy(x + z^2)e^{Ax} \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= 2ze^{Ax}(1 + x(x + z^2))\end{aligned}$$

avec :

$$A = y^2 + z^2 + 1$$

2) Points critiques

On résout :

$$\nabla g = 0$$

On obtient:

$$(-1, 0, 0)$$

3) Valeur au point critique

$$g(-1, 0, 0) = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$-\frac{1}{e} \approx -0.367879$$

4) Conclusion

Le point est un minimum global, la fonction n'est pas bornée supérieurement -> pas de maximum

2.2.3 Fonction $h(x, y, z) = \ln(xyz) - \ln(x)\ln(y)\ln(z)$

Domaine $x, y, z > 0$

1) Gradient

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{1 - \ln(y)\ln(z)}{x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{1 - \ln(x)\ln(z)}{y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{1 - \ln(x)\ln(y)}{z}\end{aligned}$$

2) Résolution

On pose :

$$\ln(x) = a, \ln(y) = b, \ln(z) = c$$

On obtient :

$$bc = 1, ac = 1, ab = 1$$

Donc :

$$(a, b, c) = (1, 1, 1) \text{ ou } (-1, -1, -1)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (e, e, e) \\ (x, y, z) &= (e^{-1}, e^{-1}, e^{-1})\end{aligned}$$

3) Valeurs

$$\begin{aligned}h(e, e, e) &= 2 \\ h(e^{-1}, e^{-1}, e^{-1}) &= -2\end{aligned}$$

4) Hessienne

La Hessienne contient des valeurs positives et négatives, elle est donc indéfinie

5) Conclusion

Les deux points sont des points selle, il n'existe aucun extremum local

Conclusion Générale

Fonction	Points critiques	Nature
f	$(0,1)$	Selle
g	$(-1,0,0)$	Minimum global
h	(e,e,e) et $(1/e,1/e,1/e)$	Selles