Rapport – Exercice 4 SVD

1. Introduction

Dans cet exo, nous étudions la SVD (décomposition en valeurs singulières) de 2 matrices ainsi que la construction de la pseudo-inverse de Moore–Penrose. L'objectif est d'analyser la structure interne des matrices et de résoudre des systèmes linéaires même lorsque les matrices ne sont pas inversibles ou ne sont pas carrées.

2. Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)

2.1 Définition Théorique

Toute matrice réelle A ∈ R^(m×n) admet une décomposition de la forme :

$$\mathbf{A = U\,\Sigma\,V^T}$$

Où U et V sont des matrices orthogonales et Σ est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières σ_i ≥ 0.

2.2 Interprétation Géométrique

La SVD permet d'interpréter une matrice comme la composition de deux rotations (ou changements de base) et d'un étirement le long d'axes principaux. Les valeurs singulières mesurent l'intensité de cet étirement.

2.3 Application au Cas 1

Pour la matrice A, les valeurs singulières obtenues sont : (40, 20, 10, 0). La présence d'une valeur singulière nulle implique que le rang de A est 3 et que la matrice n'est pas inversible.

Pour la matrice B, les valeurs singulières sont approximativement : (16.458, 12.160, 4.871, 4.307).

La matrice est de rang maximal mais n'est pas carrée, donc non inversible au sens classique.

3. Pseudo-Inverse de Moore–Penrose

La pseudo-inverse d'une matrice A est définie par :

$$\mathbf{A^+ = V\,\Sigma^+\,U^T}$$

Elle permet de résoudre des systèmes linéaires incompatibles ou sous-déterminés en fournissant la solution de norme minimale ou la solution en moindres carrés.

4. Résolution des Systèmes Linéaires (Cas 2)

On considère le vecteur $b = (6, -1, -4, 6)$.

4.1 Résolution de Ax = b

La solution est donnée par $\mathbf{x = A^+ b}$. On obtient : $x = (-2.55, -2.55, 5, 3.1, 2.1)$. Le système est compatible et la solution obtenue est de norme minimale.

4.2 Résolution de Bx = b

Le système est incompatible. La pseudo-inverse fournit alors la solution en moindres carrés qui minimise $||Bx - b||$. La solution approchée est : $x \approx (2.442, 0, -2.197, 2.982, 0)$.