Exercice 1 - Ajustement par la méthode des moindres carrés

1) Données initiales :

t	0	1	2	3	4	5	6
X_t	90	73,8	60	49,5	40,5	33	27

2) Transformation logarithmique : Z(t) = ln(X(t)) :

si X_t suit une loi exponentielle $X_t \approx Ae^{\alpha t}$, alors : $\ln(X_t) = \ln(A) + \alpha t$

On calcule Z_t pour chaque valeur t :

$$Z_t \approx at + b$$

où a est la pente et b l'ordonnée à l'origine.

2) Moindres carrés :

Pour une régression linéaire simple $Z = at + b$, les estimateurs moindres carrés sont :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})(Z_i - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}$$

$$b = \bar{Z} - a\bar{t}$$

3) Résultat numérique (droite d'ajustement)

En calculant :

$$a \approx -0.20052$$

$$b \approx 4.50030$$

Donc la droite ajustée est : $\boxed{Z_t \approx -0.20052\, t + 4.50030}$

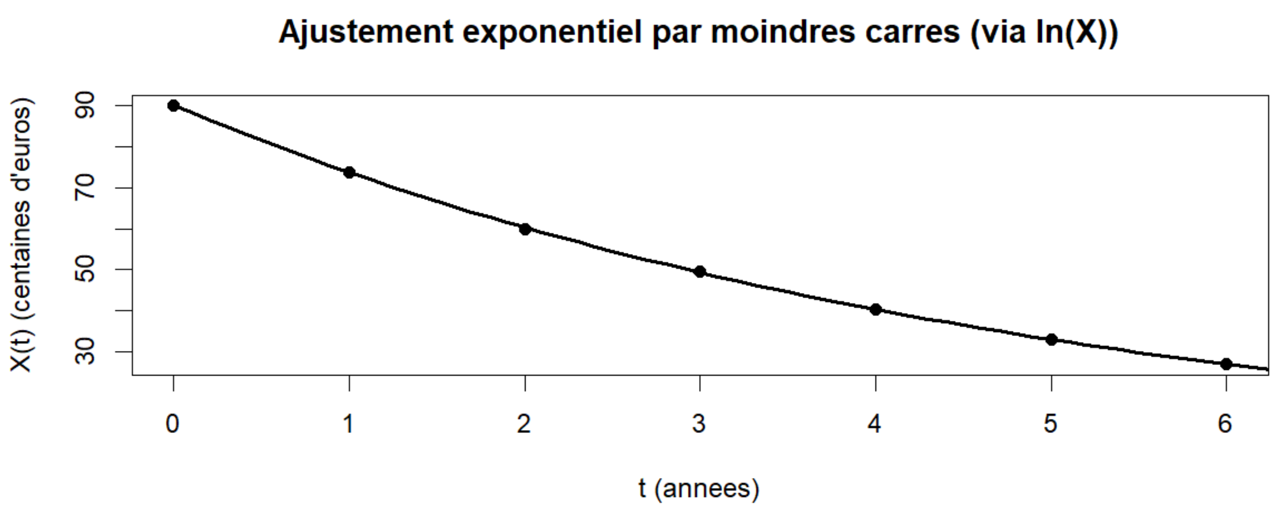
4) Modèle exponentiel sur X_t

Comme $Z_t = \ln(X_t)$, on revient à X_t en exponentiant :

$$X_t \approx e^b\, e^{at}$$

Avec $e^b \approx 90.0445$, on obtient :

$$\boxed{X_t \approx 90.0445\; e^{-0.20052\, t}}$$



5) Estimation au bout de 10 ans

On remplace $t = 10$:

$$X_{10} \approx 90.0445\; e^{-0.20052\times 10} \approx 12.12$$

Donc :

- $X_{10} \approx 12.12$ *centaines d'euros*
- soit environ $12.12 \times 100 \approx 1212$€

$$\boxed{\text{Valeur estimée après 10 ans } \approx 1212\ \text{€}}$$

tableaux de calcul:

R Global Environment

Values	
a	-0.200523690763118
A	90.0445204954283
b	4.50030422019175
n	7L
S_tt	28
S_tZ	-5.61466334136731
t	num [1:7] 0 1 2 3 4 5 6
t_bar	3
t_grid	num [1:101] 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 ...
t_pred	10
X	num [1:7] 90 73.8 60 49.5 40.5 33 27
X_fit	num [1:101] 90 88.3 86.5 84.8 83.1 ...
x10	12.1225494909733
Z	num [1:7] 4.5 4.3 4.09 3.9 3.7 ...
Z_bar	3.89873314790239