MDL – lista 11

4. Załóżmy, że graf $G = (X \cup Y, E)$ jest grafem dwudzielnym i hamiltonowskim. Wówczas cykl Hamiltona musi przechodzić naprzemiennie przez wierzchołki z X i Y.

Załóżmy: $|X| > |Y|$ oraz graf G zawiera cykl Hamiltona C. Załóżmy, że pierwszym wierzchołkiem cyklu będzie $v \in Y$. Gdy cykl przejdzie przez $2|Y|$ krawędzi to ten cykl wróci do v. Widzimy, że cykl odwiedził wszystkie wierzchołki z Y, ale pozostawił on $|X| - |Y|$ wierzchołków z X. Wiemy, że cykl Hamiltona przechodzi przez wszystkie wierzchołki grafu, zatem cykl C nie jest cyklem Hamiltona.

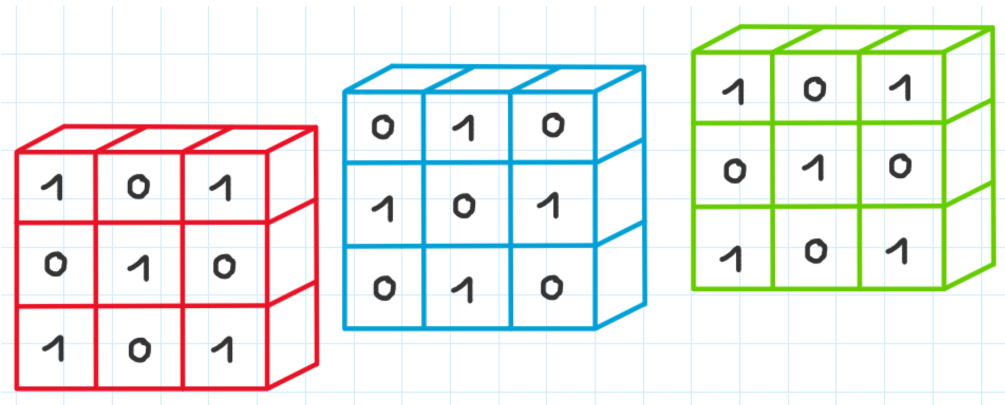
Załóżmy, że pierwszym wierzchołkiem cyklu będzie $v \in X$. Cykl odwiedziłby wówczas wszystkie wierzchołki z Y, a ostatnim wierzchołkiem byłby wierzchołek z X. Wiemy, że jest to graf dwudzielny, więc nie możemy wrócić do v, w związku z czym nie jest to cykl.

Analogicznie dla $|Y| > |X|$.

Zatem zbiory X i Y muszą być równoliczne.

Skoczek porusza się naprzemiennie po polach białych i czarnych, więc możemy jego ruchy zaprezentować jako graf dwudzielny. Niech skoczek rozpoczyna ruch z dowolnego pola. Nie będzie on w stanie obejść wszystkich pól szachownicy i wrócić na początkowe, gdyż szachownica ma wymiary $5x5$, więc liczba pól białych będzie różna od liczby pól czarnych, dlatego nie uzyskamy cyklu Hamiltona na grafie ruchów.

5. Ponumerujmy pojedyncze pola kostki tak, jak na rysunku poglądowym:



Wówczas możemy utworzyć graf dwudzielny $G = (A \cup B, E)$, gdzie A to zbiór jedynek, a B to zbiór zer, ponieważ mysz może poruszać się jedynie na sąsiednie pole od zjedzonego.

$|A| = 14$
$|B| = 13$

Mysz zaczyna jedzenie od jednego z rogów (czyli jedynki) i kolejno będzie zjadać zera i jedynki. Po kilkunastu takich powtórzeniach dojdzie do sytuacji, że mysz zje 13 jedynek i przejdzie do 13-stego zera, a ten jak wiemy z mocy zbioru B będzie ostatnim polem ze zbioru B, z którego przejdzie do ostatniej jedynki.

Jak możemy zauważyć, środkowe pole ma numer 0, czyli jest to pole ze zbioru B, dlatego mysz nie może skończyć jedzenia na środkowym polu kostki, gdyż zawsze ostatnim polem będzie jedynka.

6. Załóżmy, że graf G jest turniejem o n wierzchołkach. Chcemy pokazać, że G zawiera ścieżkę Hamiltona (co najmniej jedną) za pomocą indukcji.

D-d indukcyjny:

Podstawa indukcji:

$n = 1$, gdzie n – liczba wierzchołków.
Istnieje ścieżka Hamiltona, która zawiera jeden wierzchołek.

Krok indukcyjny:

Załóżmy, że każdy turniej o n wierzchołach zawiera ścieżkę Hamiltona (co najmniej jedną). Chcemy pokazać, że każdy turniej o $n+1$ wierzchołkach zawiera ścieżkę Hamiltona (co najmniej jedną).

Weźmy dowolny turniej T, który ma n wierzchołków. Wiemy, że zawiera on ścieżkę Hamiltona, na podstawie założenia indukcyjnego. Naszą indukcję chcemy pokazać dla $n+1$ wierzchołków, dlatego musimy wziąć dowolny wierzchołek v i dorzucić go do T w taki sposób, aby T nadal było turniejem. Niech wierzchołki T nazywają się w taki sposób, aby ścieżka Hamiltona prezentowała się tak:

$v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$

Dorzućmy wierzchołek v, tak jak to było opisane wyżej. Mamy 3 możliwości:

1) Jeśli $(v, v_1) \in T$ to otrzymujemy ścieżkę Hamiltona:
   $v, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$
2) Jeśli $(v_n, v) \in T$ to otrzymujemy ścieżkę Hamiltona:
   $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n, v$
3) Załóżmy, że 1) i 2) nie zachodzą, wtedy $(v_1, v) \in T$ oraz $(v, v_n) \in T$. Jesteśmy znaleźć takie $i \in [1, n-1]$, że $(v_i, v) \in T$ oraz $(v, v_{i+1}) \in T$. Otrzymujemy ścieżkę Hamiltona:
   $v_1, v_2, \dots, v_i, v, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v_n$

Zatem każdy turniej musi zawierać ścieżkę Hamiltona.