1. Graf będzie sprawdzany za pomocą DFS. Każdy z wierzchołków będzie oznaczony jednym z 3 stanów: szary – nieodwiedzony; czerwony/niebieski – odwiedzony, przeciwne, rozłączne zbiory.

Algorytm:

1. Odwiedzamy dowolny wierzchołek i nadajemy mu czerwony kolor.
2. Idziemy do jego kolejnego sąsiada i sprawdzamy, czy jest on pokolorowany:
    a. Jeśli nie to nadajemy mu kolor przeciwny do wierzchołka poprzedniego
    b. Jeśli tak, to gdy ma on ten sam kolor co wierzchołek poprzedni to ten graf nie jest dwudzielny i kończymy algorytm.
3. Jeśli wszystkie wierzchołki zostały pokolorowane to ten graf jest dwudzielny.
4. Jeśli sąsiedzi się skończą to cofamy się do poprzedniego wierzchołka.
5. Powtarzamy 2.

3. Drzewo to graf acykliczny, czyli: G jest drzewem ⇔ $\forall_{u,v\in G}$ zawiera dokładnie jedną ścieżkę u – v.

Implikacja w prawo:
Załóżmy, że G jest drzewem i dwa dowolne wierzchołki $u, v \in G$. Wówczas, skoro G jest drzewem to wiemy, że z u do v istnieje dokładnie jedna ścieżka. Jeśli istniałoby ich więcej, to wtedy w grafie istniałby cykl, a to jest sprzeczne z założeniem.

Implikacja w lewo:
Załóżmy, że $\forall_{u,v\in G}$ w grafie istnieje dokładnie jedna ścieżka z u do v. Na podstawie tego wiemy, że jest to graf spójny (istnieje ścieżka $\forall_{u,v\in G}$) oraz graf acykliczny (istnieje tylko jedna ścieżka między u i v).

Implikacja zachodzi w obie strony, więc graf G jest drzewem.

6. Q_k – k-wymiarowa kostka

Podzielmy zbiór wierzchołków Q_k:

P - zbiór wierzchołków z parzystą liczba jedynek

N - zbiór wierzchołków z nieparzystą liczba jedynek

Wierzchołki, które sąsiadują różnią się jedną współrzędną, czyli taki wierzchołek różni się o jedną jedynkę od swojego sąsiada. Czyli wierzchołek ze zbioru P nie może sąsiadować z wierzchołkiem ze zbioru P, więc sąsiaduje z wierzchołkiem ze zbioru N. Analogicznie w zbiorze N. Więc:

$\forall_{\{u,v\}\in Q_k} u \in P \land v \in N$, czyli Q_k jest grafem dwudzielnym.

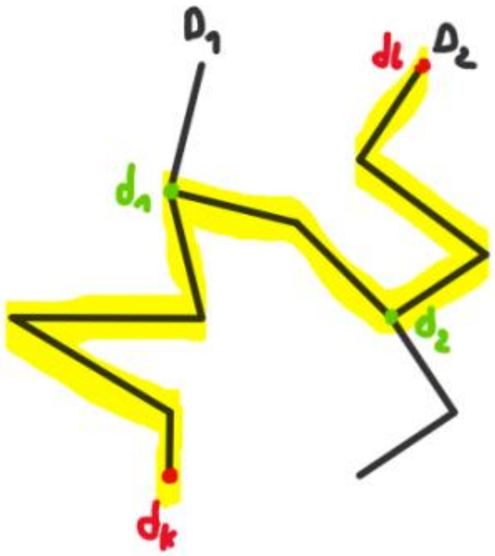
8. Weźmy dwie najdłuższe ścieżki grafu spójnego D_1 i D_2. Załóżmy nie wprost, że nie mają one wspólnego wierzchołka.

Weźmy dowolny wierzchołek na D_1 i nazwijmy go d_1. Analogicznie zróbmy na D_2 i nazwijmy ten wierzchołek d_2. Graf jest spójny, więc istnieje ścieżka z d_1 do d_2 długości przynajmniej 1. Weźmy teraz ten koniec ścieżki D_1, którego odległość od wierzchołka d_1 jest większa/równa połowie długości tej ścieżki i nazwijmy go d_k, analogicznie na D_2 – d_l. Wówczas:

$d_k - d_1 \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$,

$d_l - d_2 \geq \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$, gdzie k i l to odpowiednio długości ścieżek D_1 i D_2.

Wtedy jesteśmy w stanie poprowadzić ścieżkę z d_k do d_l, przechodzącą przez wierzchołki d_1 i d_2, która będzie najdłuższą ścieżką długości przynajmniej: $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + 1 \geq min\,(k, l)$. Jest to sprzeczne z założeniem, więc dwie najdłuższe ścieżki w grafie spójnym muszą mieć wspólny wierzchołek.



9. Mamy grafy $G = (V, E)$ i $\bar{G} = (V, E')$, gdzie $\bar{G}$ jest dopełnieniem G. Musimy wykazać, że przynajmniej jeden z tych grafów jest grafem spójnym.

Należy udowodnić:
G nie jest grafem spójnym $\Longrightarrow$ $\bar{G}$ jest grafem spójnym

D-d:
Załóżmy, że G nie jest grafem spójnym.
Z założenia wiemy, że G ma co najmniej dwie spójne składowe. $\bar{G}$ jest dopełnieniem G, więc wiemy, że G i $\bar{G}$ mają takie same zbiory wierzchołków (definicja dopełnienia grafu). Weźmy dowolne wierzchołki $u, v \in V$ i rozpatrzmy dwa przypadki.

1. u i v są w różnych spójnych składowych grafu G, więc:
   $\{u, v\} \notin E \Rightarrow \{u, v\} \in E'$, a to oznacza, że między dwoma wierzchołkami w grafie $\bar{G}$ istnieje ścieżka, czyli $\bar{G}$ jest spójny.

2. u i v są w tej samej spójnej składowej grafu G.
   Wtedy wiemy, że istnieje jeszcze przynajmniej jedna spójna składowa z przynajmniej jednym wierzchołkiem. Weźmy taki wierzchołek i nazwijmy go p. Czyli $\{u, v\} \in E \Rightarrow \{u, v\} \notin E'$. Wiemy też, że $\{u, p\} \notin E$ i $\{p, v\} \notin E$, a z tego wiemy, że $\{u, p\} \in E'$ i $\{p, v\} \in E'$, a to oznacza, że dla dowolnych u i v w grafie $\bar{G}$ istnieje ścieżka $\{u, p, v\}$, więc $\bar{G}$ jest spójny.