1. Podać dwie ostatnie cyfry 71^{71} w rozwinięciu dziesiętnym

z tw. Eulera:

$\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(5^2) = 2(2-1) \cdot 5(5-1) = 40$

$\varphi(50) = 20$

$\varphi(25) = 10$

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

$71^{71} = 71^{40} \cdot 71^{20} \cdot 71^{10} \cdot 71 =$

$= 1 \pmod{100} \cdot 1 \pmod{50} \cdot 1 \pmod{25} \cdot 71 = 71 \pmod{100}$,

czyli dwie ostatnie cyfry to 71.

2. $x \equiv 2 \pmod 5$

$x \equiv 3 \pmod 7$

$x \equiv 4 \pmod{13}$

$x = 5i + 2$

z chińskiego twierdzenia o reszcie:

najmniejsze i spełniające drugie równanie to $i = 3$,

czyli $x \equiv 17 \pmod{5 \cdot 7}$.

$x = 35t + 17$

analogicznie $t = 0$ spełnia trzecie równanie:

$x \equiv$ [illegible] $\cdot 17 \bmod (5 \cdot 7 \cdot 13)$

$x = 17$ – najmniejsze rozwiązanie

$x = 17 + (5 \cdot 7 \cdot 13)k$ – rozwiązanie ogólne

4. Załóżmy, że $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą ($a \geq 2$.

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + a^1 + 1)$$

Z tego wynika, że:

$$a-1 \mid a^n - 1$$

Z zał. $a^n - 1$ jest pierwsze, więc:

$a - 1 = 1$ v $a-1 = a^n - 1$

$a = 2$ $n = 1$

W tym wypadku dla $a = 5$ mamy

kontrprzykład: $5-1 = 4$, a z zał.

$a^n - 1$ jest liczbą pierwszą.

Zatem a musi być równe 2.

7. Podać dwa ostatnie cyfry $9^{8^{7^{6^{\cdots^{1}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym

z tw. Eulera:

$$\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(5^2) = 2(2-1) \cdot 5(5-1) = 40$$

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

$$9^{40320} \equiv 9^{40 \cdot 1008} \equiv 1 \pmod{100},$$ z tego wynika, że dwie ostatnie cyfry to 01.

8. Weźmy dwa kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego

a_n, a_{n-1}.

Chcemy pokazać:

$$NWD(a_n, a_{n-1}) = 1$$

D-d korzystając z algorytmu Euklidesa:

$$NWD(a_n, a_{n-1}) = NWD(a_{n-2} + a_{n-1}, a_{n-1}) \stackrel{(*)}{=}$$

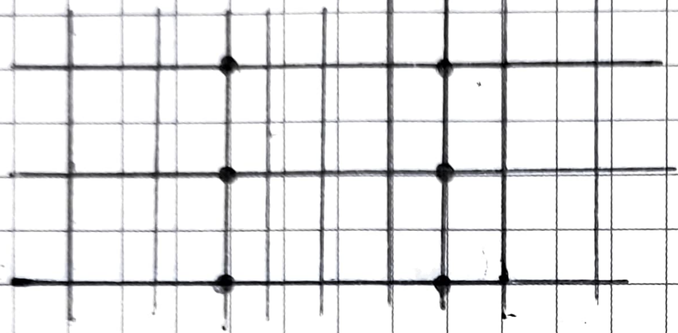
$$= NWD(a_{n-1}, a_{n-2}) = NWD(a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-2}) =$$

$$= NWD(a_{n-2}, a_{n-3}) = \ldots = NWD(a_1, a_0) = NWD(1, 0) = 1 \quad \text{cnd.}$$

$* \; a_{n-2} < a_{n-1}$:

$$(a_{n-2} + a_{n-1}) \pmod{a_{n-1}} = a_{n-2}$$

11. Poprowadźmy 3 proste poziome i 9 pionowych po naszej płaszczyźnie.



Każdy punkt przecięcia pomalowano jednym kolorem - pistacjowym lub morelowym - więc dla każdej pionowej linii mamy $2^3 = 8$ możliwych układów kolorów. Mamy po 9 pionowych linii, więc z zasady szufladkowej kolory punktów na którejś linii się powtórzą.

Nazwijmy te proste k i l. Na k mamy na pewno 2 punkty w tym samym kolorze (z zasady szufladkowej), a l ma taki sam układ, więc te punkty tworzą prostokąt.