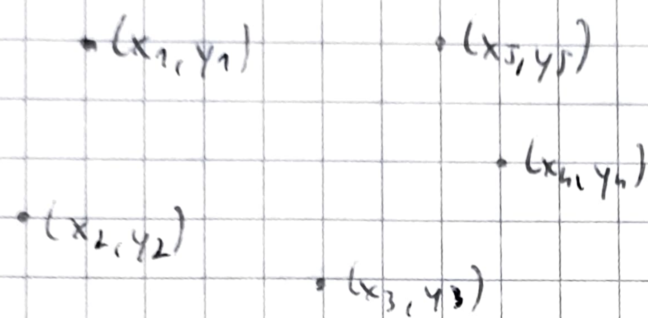
2.



$x \in \mathbb{Z}$

$y \in \mathbb{Z}$

$$S = \left(\frac{|x_i - x_j|}{2}^{(1)}, \frac{|y_i - y_j|}{2}^{(2)} \right)$$

Aby punkt x_S był punktem kratowym (1) i (2) muszą być całkowite, czyli parzystość x_i i x_j oraz y_i i y_j musi być taka sama.

Są 4 szufladki z parzystością x i y:

PP | NN | PN | NP

a posiadamy pięć punktów, więc z zasady szufladkowania Dirichleta w którejś szufladce będą dwa punkty.

3. Weźmy sumy:

$A_1 = a_1$

$A_2 = a_1 + a_2$

$A_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$A_n = a_1 + \ldots + a_n$

Mamy dwa przypadki:

1) któraś z sum dzieli się przez n

2) wpp. mamy $n-1$ reszt z dzielenia (od 1 do $n-1$)

2) Z zasady szufladkowania Dirichleta przynajmniej dwie sumy mają taką samą resztę. Niech będą to A_k i A_m, gdzie $k \leq m$.

$a \equiv c \pmod{n} \wedge b \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a - b \equiv c - d \pmod{n}$

$a = A_m$, $b = A_k$, $c = d$, czyli:

$A_m - A_k \equiv 0 \pmod{n}$, więc:

$n \mid A_m - A_k$

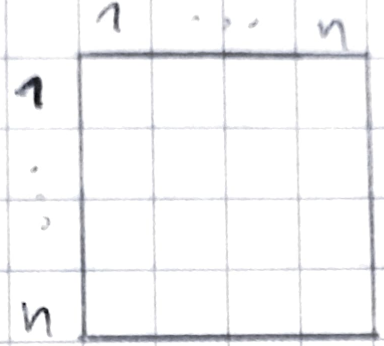
4. Weźmy ciągi:

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{1\ldots1}_{n+1}$$

Mamy tylko n możliwych reszt z dzielenia przez n (od 0 do $n-1$).

Szukamy reszty 0. Mamy $n+1$ ciągów, więc z zasady szufladkowania Dirichleta przynajmniej dwie (n) reszty się powtórzą. Jeśli weźmiemy te (n) dwa ciągi i od większego odejmiemy mniejszy to dostaniemy liczbę, której reszta z dzielenia przez n wynosi 0. cnd.

5.



Mamy $\underline{2n+2}$ sum

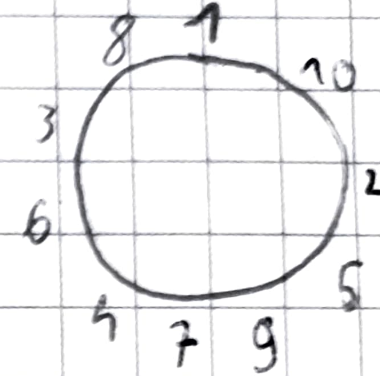
(wierszy i kolumn, dwie przekątne).

Każda suma należy do zakresu $[-n, n]$ (same -1 lub 1).

W tym zakresie jest $2n+1$ liczb, a wszystkich sum mamy $2n+2$,

czyli któraś musi się powtórzyć.

6. $\sum_{i=1}^{10} i = \frac{(10)(11)}{2} = 55$



Postawmy w dowolnym miejscu 1. Zostanie nam jeszcze 9 cyfr, które sumują się do 54. Podzielmy to na trzy trójki i dajmy do każdej po 17 $(17 \cdot 3 = 51)$. Zostało nam jeszcze 3 z sumy, które możemy dać do dowolnej grupy, czyli z zasady szufladkowej Dirichleta któraś z tych trójek musi się sumować przynajmniej do 18.

7. Niech d będzie dzielnikiem liczb: $\frac{a}{NWD(a,b)}$, $\frac{b}{NWD(a,b)}$ (1)

czyli:

$$d \mid \frac{a}{NWD(a,b)} \qquad d \mid \frac{b}{NWD(a,b)}$$

$$d \cdot NWD(a,b) \mid a \qquad d \cdot NWD(a,b) \mid b$$

Z tego wynika, że $d \cdot NWD(a,b)$ jest dzielnikiem a oraz b.

$NWD(a,b)$ to największy wspólny dzielnik a i b, więc:

$d \cdot NWD(a,b) \leq NWD(a,b)$, czyli $d=1$, a

obie liczby (1) są względnie pierwsze.