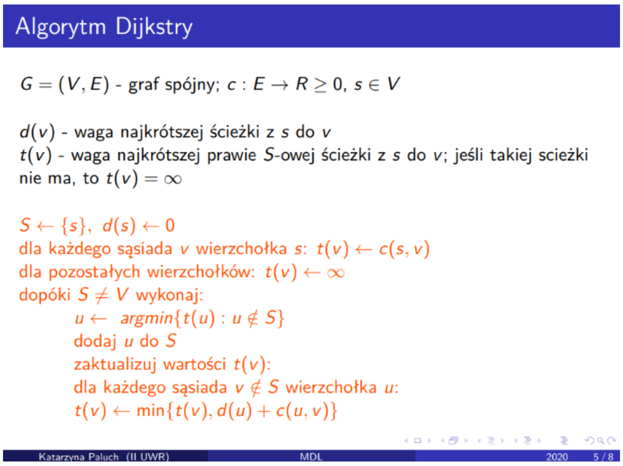
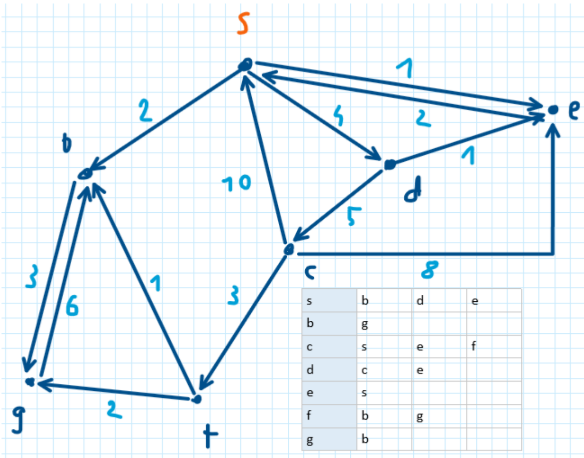
MDL – lista 12

5.





Algorytm:
Dodatkowo mamy tablicę K, gdzie każdy wierzchołek ma przypisane sąsiednie wierzchołki, do których można wykonać ruch.
$S \leftarrow \{s\}, d(s) \leftarrow 0$
dla każdego sąsiada v z K wierzchołka s: $t(v) \leftarrow c(s,v)$
dla pozostałych wierzchołków: $t(v) \leftarrow \infty$
dopóki $S \neq V$ wykonaj:

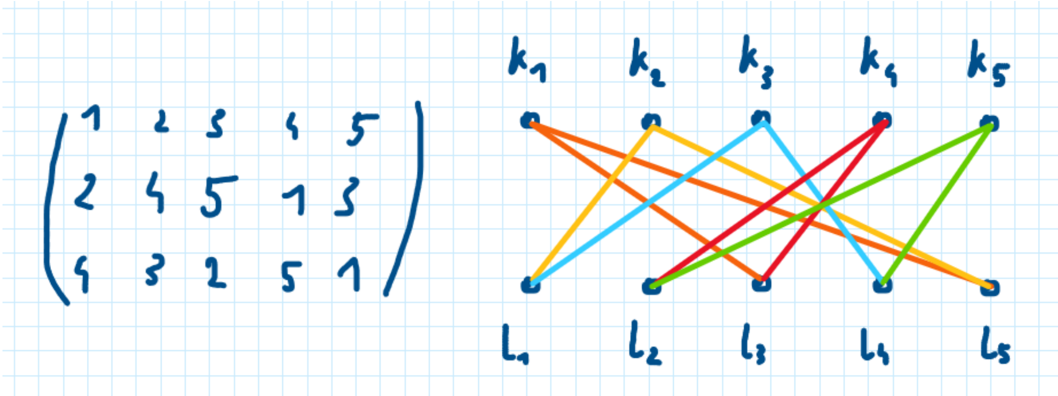
> $u \leftarrow argmin\{t(u): u \notin S\}$
> dodaj u do S
> zaktualizuj wartości t(v):
>> dla każdego sąsiada $v \notin S$ z K wierzchołka u:
>>> $t(v) \leftarrow min\{t(v), d(u) + c(u,v)\}$

8. Weźmy najdłuższą ścieżkę P w grafie i niech przechodzi ona kolejno przez wierzchołki $v_0, v_1, \dots, v_n$. Wiemy, że każdy wierzchołek ma 3. stopień, dlatego dla v_o muszą istnieć takie i oraz j, że $2 \leq i < j \leq n$ takie, gdzie $v_0 v_i$ oraz $v_o v_j$ są krawędziami grafu. Wiemy również, że $v_i, v_j \in P$, bo w przeciwnym razie P nie byłaby najdłuższą ścieżką, gdyż moglibyśmy dodać do P odpowiednio v_i lub v_j otrzymując ścieżkę dłuższą od P.

Mamy 3 przypadki:

a) Załóżmy, że i jest nieparzyste. Wówczas możemy utworzyć cykl biorąc ścieżkę od $v_0, v_1, \dots, v_i$ z P (ma nieparzystą długość) i dodając do niej krawędź $v_0 v_1$. Ten cykl jest parzystej długości.
b) Analogicznie dla nieparzystego j.
c) Załóżmy, że i oraz j są parzyste. Wówczas możemy utworzyć cykl biorąc ścieżkę od $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ z P (ma parzystą długość) i dodając do niej krawędzie $v_0 v_i$ oraz $v_0 v_j$. Ten cykl jest parzystej długości.

10. Niech $G = (K \cup L, E)$ będzie grafem dwudzielnym, gdzie $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ to zbiór kolumn, a $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ to zbiór liczb. Krawędź $k_i l_j \in E$, tylko jeśli w kolumnie k_i nie znajduje się liczba l_j.



Chcemy dodać kolejny wiersz do prostokąta łacińskiego. Aby to ucznić, musimy znaleźć skojarzenie doskonałe tego grafu, a następnie do każdej kolumny należy dodać skojarzoną z nią liczbę.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Skojarzenie doskonałe zawsze będzie istnieć w tym grafie, ponieważ każdy wierzchołek ma $n - m$ krawędzi, czyli dla każdego $K' \subseteq K$, jeśli $|K'| = x$, to $|N(K')| \geq x = |K'|$ oraz dla każdego $L' \subseteq L$, jeśli $|L'| = y$, to $|N(L')| \geq y = |L'|$, czyli spełniony jest warunek Halla.