# MDL – lista 13

8. Niech $G = \{V, E\}$ będzie grafem, gdzie wierzchołki oznaczają uczniów, a każda krawędź między wierzchołkami oznacza, że ci uczniowie się przyjaźnią.

Z treści zadania: $V = 2n$, $\forall v \in V \deg(v) \geq n$

Dla $n = 1$:

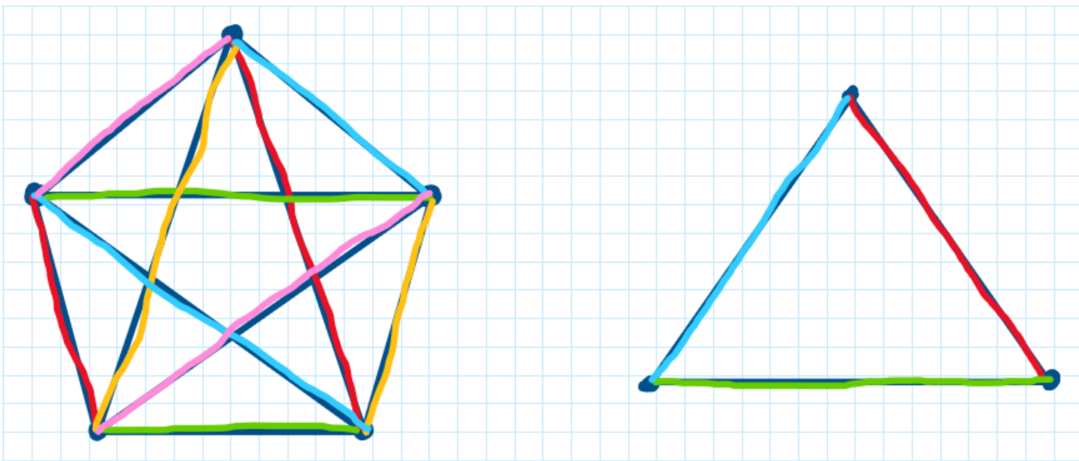
otrzymujemy parę uczniów, którzy się przyjaźnią, więc możemy ich usadzić w jednej ławce.

Dla $n > 1$:

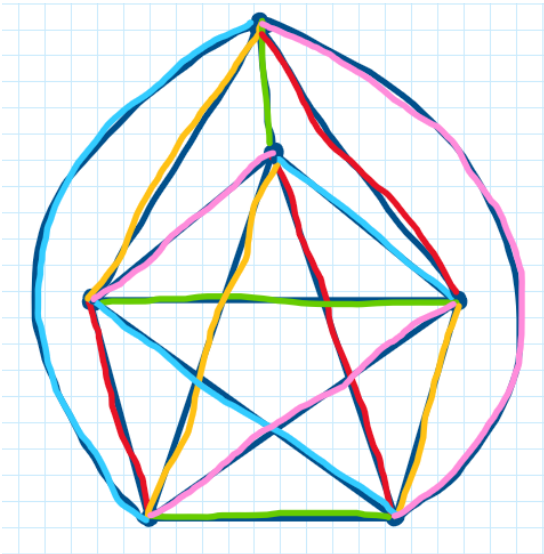
mamy $2n$ uczniów, więc w grafie są przynajmniej 3 wierzchołki, a $\deg(v) \geq \frac{|V|}{2}$, gdzie $v$ to dowolny wierzchołek w grafie, więc spełnione są założenia twierdzenia Diraca, czyli ten graf zawiera cykl Hamiltona (jest on parzysty, ponieważ mamy $2n$ wierzchołków). Aby połączyć uczniów w pary, możemy wziąć co drugą krawędź z tego cyklu i w ten sposób usadzać ich w ławkach. Wybór krawędzi „co drugą" można zrobić na dwa sposoby.

9. Przedstawmy turniej jako klikę, gdzie wierzchołkami są gracze, a krawędzie między nimi oznaczają mecz.

Dla $n$ nieparzystego przedstawmy graf w postaci wielokąta foremnego. Pokolorujmy każdy bok wielokąta i przekątne równoległe do niego innym kolorem. Każdy kolor oznacza jeden dzień turnieju. Otrzymujemy $n$ kolorowań, czyli taki turniej można rozegrać w co najmniej $n$ dni. Jest to najlepsze rozwiązanie, co widać na przykładzie minimalnym $n = 3$.

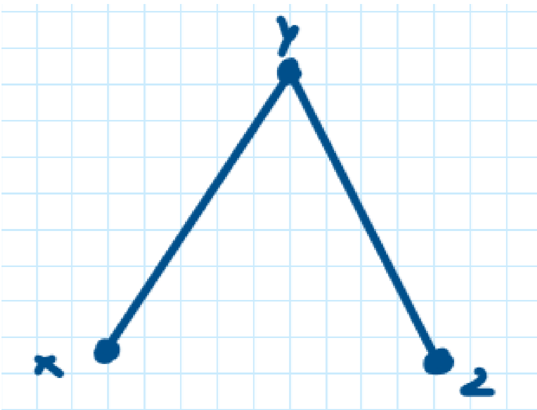


Dla parzystego $n$ możemy przedstawić graf w postaci wielokąta foremnego o $n - 1$ wierzchołkach i dodatkowym punkcie $P$, który jest połączony krawędziami z każdym wierzchołkiem wielokąta. Wielokąt kolorujemy analogicznie – otrzymujemy $n - 1$ kolorowań. Możemy zauważyć, że każdy wierzchołek wielokąta ma stopień $n - 2$, czyli każdy wierzchołek nie ma krawędzi w jednym z kolorów, dlatego możemy pokolorować krawędź pomiędzy wierzchołkiem, a $P$ tym pozostałym kolorem. W ten sposób nadal mamy $n-1$ kolorów. Jest to najlepsze rozwiązanie, gdyż każdy z graczy rozgrywa $n-1$ gier, a wiemy, że może on rozegrać tylko jedną grę dziennie, czyli turniej musi trwać co najmniej $n-1$ dni.



10. Czy w twierdzeniu Diraca można zastąpić założenie: $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ założeniem słabszym: $\deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$?

Kontrprzykład:




$\deg(x) = 1$

$\deg(y) = 2$

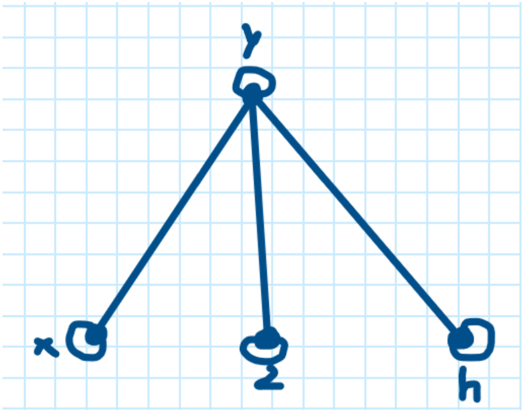
$\deg(z) = 1$

$n = 3 \rightarrow \frac{n-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1,$

czyli założenie słabsze jest spełnione, ale ten graf nie zawiera cyklu Hamiltona.

11. Skoro $G$ jest grafem spójnym to mogą w nim występować pętle, dlatego istnieje kontrprzykład, gdzie dla każdej pary wierzchołków $u$ i $v$ niepołączonych krawędzią zachodzi: $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$, a nie występuje w nim ścieżka Hamiltona.

Kontrprzykład:




$\deg(x) + \deg(z) = 4$

$\deg(x) + \deg(h) = 4$

$\deg(z) + \deg(\text{h}) = 4$

$n = 4 \ \rightarrow \ n - 1 = 4 - 1 = 3,$

czyli założenie jest spełnione, ale ten graf nie zawiera ścieżki Hamiltona.