1 Определения

1. Логические операции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание.
1) Конъюнкция - это сложное логическое выражение, которое считается истинным в том и только том случае, когда оба простых выражения являются истинными, во всех остальных случаях данное сложеное выражение ложно.

Обозначение: $F = A \wedge B$.

Таблица истинности для конъюнкции:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2) Дизъюнкция - это сложное логическое выражение, которое истинно, если хотя бы одно из простых логических выражений истинно и ложно тогда и только тогда, когда оба простых логических выраженныя ложны.

Обозначение: $F = A \vee B$.

Таблица истинности для дизъюнкции:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3) Отрицание - это сложное логическое выражение, в котором если исходное логическое выражение истинно, то результат отрицания будет ложным, и наоборот, если исходное логическое выражение ложно, то результат отрицания будет истинным.

Обозначение: $F = \neg A$

Таблица истинности для отрицания:

A	$\neg A$
0	1
1	0

2. Логические операции: импликация, XOR (исключающее или) и эквивалентность.
1) Импликация - это сложное логическое выражение, которое истинно во всех случаях, кроме случая, когда из истины следует ложь. То есть данная логическая операция связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (A), а второе (B) является следствием.

Обозначение: $F = A \rightarrow B$

Таблица истинности для импликации:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2) XOR (исключающее или) - это сложное логическое выражение, которое является истинным тогда и только тогда, когда оба простых логических выражения имеют разную истинность.

Обозначение: F = A $\oplus$ B

Таблица истинности для исключающего или:

A	B	A $\oplus$ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3) Эквивалентность - это сложное логическое выражение, которое является истинным тогда и только тогда, когда оба простых логических выражения имеют одинаковую истинность.

Обозначение: F = A $\leftrightarrow$ B

Таблица истинности для эквивалентности:

A	B	A $\leftrightarrow$ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Булевы функции. Задание таблицей истинности и вектором значений.

1) Булева функция - функция от N аргументов из N-ой степени множества E = {0,1} в множество E = {0,1}. То есть:

$$f : E_2^n \to E_2, E_2 = \{0, 1\}$$

Булеву функцию от N переменных можно задать *таблицей истинности*:

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$
0	0	...	0	0	f(0, 0, ..., 0, 0)
0	0	...	0	1	f(0, 0, ..., 0, 1)
...	...	...	...	...	...
1	1	...	1	0	f(1, 1, ..., 1, 0)
1	1	...	1	1	f(1, 1, ..., 1, 1)

Значения переменных можно не хранить если принять соглашение о перечислении наборов переменных в определенном порядке. Обычно таким порядком принимается порядок возрастания целых чисел, заданных наборами переменных как двоичными числами. (Еще этот порядок называют *установленным*). Таблицу истинности можно "транспонировать" , выписав последнюю строку:

$$f(0, 0, ..., 0, 0), f(0, 0, ..., 0, 1), ..., f(1, 1, ..., 1, 1)$$

Такой способ задания булевой функции называется задание вектором значений.

4. Существенные и фиктивные переменные булевой функции.
Переменная x_i называется *существенной* переменной функции булевой функции f, если существует такой набор значений $a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n$, что:

$$f(a_1, ..., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ..., a_n) \neq f(a_1, ..., a_{i-1}, 1, a_{i+1}, ..., a_n)$$

В противном случае переменная x_i называется *фиктивной*.

5. Дизъюнктивная нормальная форма.
Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) - это представление булевой формулы в виде дизъюнкции конъюнктов литералов. Любая булева формула может быть приведена к ДНФ. *Литерал* - это x или $\overline{x}$, где x - некая логическая переменная. *Конъюнкт* - это конъюнкция литералов. Например, $x1 \wedge x2 \wedge x3$ - конъюнкт. k-дизъюнктивной нормальной формой называют ДНФ, в которой каждая конъюнкция содержит ровно k литералов.

6. Множество, подмножество, равенство множеств.
Множество — это совокупность каких-то элементов, полностью определяемая своими элементами. Элементами множества могут быть другие множества.
Будем говорить, что элемент x *принадлежит* множеству A, если он является его элементом. Обозначение: $x \in A$ (эта запись означает утверждение и принимает логические значения "истина" , "ложь" – входит или не входит в множество).
Если любой элемент множества A принадлежит множеству B, то множество A называется *подмножеством* множества B, обозначение $A \subseteq B$.
Равенство множеств A = B — это утверждение, которое означает, что множества состоят из одних и тех же элементов. То есть: любой элемент множества A принадлежит множеству B и любой элемент множества B принадлежит множеству A.
Есть уникальное множество - *пустое*, - которое не содержит никаких элементов. Обозначение: $\varnothing$.
Если элементов в множестве мало, его можно задать, указав все эти элементы (в фигурные скобки). Порядок не играет роли. Поэтому {a, b, c, d} = {d, a, c, b}.
Количество элементов в множестве A, если оно конечно, непустое, обозначается |A| и называется *мощностью множества*.

7. Операции с множествами: объеднинение, пересечение, разность, симметрическая разность. Диаграммы Эйлера-Венна.
1) *Объединение множеств*. Обозначение $A \cup B$. Это множество, состоящее в точности из тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.
2) *Пересечение множеств*. Обозначение $A \cap B$. Это множество, состоящее в точности из тех элементов, которые принадлежат обоим множествам A и B.
3) *Разность множеств*. Обозначение $A \setminus B$. Это множество, состоящее в точности из тех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B.

4) *Симметрическая разность множеств*. Обозначение $A \triangle B$. Это множество, состоящее в точности из тех элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств: либо A, либо B.
5) *Диаграммы Эйлера-Венна* - геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между множествами, для наглядного представления. При этом способе множество изображается условным кругом (или другой геометрической фигурой) и предполагается, что внутренность круга изображает элементы множества. (Я думаю, нарисовать сможете).

8. Законы Моргана (с обобщением на произвольное семейство множеств).
Законы де Моргана задают правило взятия отрицания от конъюнкции и дизъюнкции:

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$
$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

(Доказывается по таблицам истинности).
Равенства обобщаются на случай нескольких переменных:

$$\neg(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n) = \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge ... \wedge \neg x_n$$
$$\neg(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n) = \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee ... \vee \neg x_n$$

Доказательство (для первой формулы, анналогично для второй):

1. База: Выражение верно для n = 2: $\neg(x_1 \vee x_2) = \neg x_1 \wedge \neg x_2$
2. Предположение: Пусть верно для n = k - 1:
$$\neg(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_{k-1}) = \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge ... \wedge \neg x_{k-1}$$
3. Шаг: проверим для n = k. Сделаем замену $y = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_{k-1}$
$$\neg(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_k) = \neg(y \vee x_k) = \neg y \wedge \neg x_k = \neg(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_{k-1}) \wedge \neg x_k =$$
$$= \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge ... \wedge \neg x_{k-1} \wedge \neg x_k$$
(Последний переход выполнен по предположению индукции)

(*) На языке множеств законы де Моргана формулируются так: (I) элемент x не принадлежит объединению семейства множеств тогда и только тогда, когда он не принадлежит ни одному из этих множеств; (II) элемент x не принадлежит пересечению семейства множеств тогда и только тогда, когда он не принадлежит хотя бы одному из этих множеств. В таком виде законы де Моргана применимы и к бесконечным семействам множеств.

9. Закон контрапозиции.
Принцип контрапозиции - теорема равносильна обратной к противоположной. Тождество

$$x \to y = \neg y \to \neg x$$

выражает принцип контрапозиции. Этот принцип часто используется в математических доказательствах: вместо доказательства утверждения «если А, то Б» зачастую удобнее изменить посылку и доказывать равносильное утверждение «если не Б, то не А». Проверка тождества легко производится по таблице истинности.

10. Правило суммы.
Правило суммы для множеств. Если какое-то множество A разделено на две части B и C, не имеющие общих элементов, то |A| = |B| + |C|. (определение из чернивика книги. не примут - тыкните их в собственную книгу)
Комбинаторное правило суммы. Пусть объект A можно выбрать M способами, а объект B можно выбрать N способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбрать A или B можно M + N способами.

11. Метод математической индукции.
Доказательства по индукции применяются, когда есть последовательность утверждений

$$A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...$$

и мы хотим доказать, что все они верны. Принцип индукции говорит, что для этого достаточно сделать две вещи:

1. Базис индукции: надо доказать, что A_1 (первое утверждение в цепочке) верно.

2. Шаг индукции: надо доказать (для произвольного n), что A_{n+1} верно, предполагая известным, что A_n верно.

Мы должны доказать, что из A_n следует A_{n+1}. Доказав следование и базу, мы можем применить шаг индукции к A_1 и получить A_2. Постепенно применяя шаг, мы дойдем до любого A_n.

12. Формула включений и исключений.
Формула включений-исключений обобщает правило суммы и даёт выражение для объединения нескольких, возможно пересекающихся, множеств.

Пример для двух множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Пример для трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Общий вид:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + ... + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - ... + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| +$$

$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + ... - (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

Удобно представить итоговую формулу в более компактном виде. Для этого введём обозначения. Через S будем обозначать подмножество множества {1, ..., n}, каждое такое подмножество выделяет некоторое семейство подмножеств

$$\{A_i : i \in S\}$$

Через A_S обозначим пересечение всех множеств, входящих в семейство S, т.е.

$$A_S = \bigcap_{i \in S} A_i$$

В таких обозначениях формула включений-исключений записывается достаточно компактно:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{S \neq \varnothing} (-1)^{|S|+1} |A_S|$$

13. Правило произведения.
Из лекций: Если есть N способов выбрать 1-ый объект и после каждого выбора есть M способов выбрать 2-ой объект, то всего есть $N \times M$ способов выбрать два объекта.
Из книги: Правило произведения. Если объект интересующего нас вида строится в несколько шагов (1, 2, ..., k), и на каждом шаге есть выбор из какого-то числа вариантов $(m_1, m_2, ..., m_k)$, причём количество выборов на каждом шаге не зависит от сделанных ранее выборов, то общее количество объектов N равно произведению количеств вариантов выбора для каждого из шагов: $N = m_1 \times m_2 \times ... \times m_k$.

14. Комбинаторные числа. Число перестановок, число подмножеств размера k у n-элементного множества
Пусть $A = \{a_1, ..., a_n\}$ - множество из n элементов.
Комбинаторный объект - это подмножество с определенными свойствами из элементов множества A.
Комбинаторное число (связанное с комбинаторным объектом) - это количество комбинаторных объектов этого вида.
Некоторые комбинаторные числа имеют собственные названия и устоявшиеся обозначения.

В комбинаторике *размещением из n по k* называется упорядоченный набор из k различных элементов из некоторого множества различных k элементов. (1,3,2,5) — это 4-элементное размещение из 6-элементного множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановка — это упорядоченный набор из чисел 1, 2, ..., n, в котором числу i сопоставляется i-ый элемент из набора. Другими словами, это биекция на множестве $\{1, 2, ..., n\}$. Например, (2, 1, 3) — это перестановка (1, 2, 3). Число всех перестановок обозначают за P_n. Так как перестановка — это то же самое, что размещение по n элементам, то

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Сочетаниями из n по k называется набор k элементов, выбранных из данного множества, содержащего n различных элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Сочетанием с повторениями называются сочетания, в которых каждый элемент набора может встречаться несколько раз. Количество сочетаний с повторениями из n по k равно $C^k_{n+k-1} = C^{n-1}_{n+K-1}$. (можно доказать с помощью метода точек и перегородок).

15. Характеристическая функция и её использование при подсчёте числа элементов множества.

Характеристическая функция - это функция, определённая на множестве X, которая указывает на принадлежность элемента x, принадлежащего X, подмножеству A.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

Можно определить понятие мощности подмножества A на множестве X, используя характеристическую функцию:

$$|A| = \sum_{x \in X} \chi_A(x)$$

16. Функции. Область определения и множество значений.

Функцией из множества A в множество B мы назовём такое соответствие, которое сопоставляет некоторым элементам множества A какой-то элемент множества B. Данному $x \in A$ (его называют аргументом функции) функция f из A в B либо не сопоставляет никакого элемента в B, либо сопоставляет ровно один такой элемент y.

Область определения функции f из A в B состоит в точности из тех элементов x множества A, которым сопоставлен элемент f(x) множества B.

Обозначение: $Dom(f) = \{a | a \in A; \exists b : f(a) = b\}$

Элементы $f(x)$ для всех x из области определения функции f образуют *множество значений* функции f.

Обозначение: $Range(f) = \{b | \exists a \in A : f(a) = b\}$

17. Биномиальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона.

Хорошо известны формулы раскрытия скобок (формулы сокращенного умножения). Например, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Оказывается, что есть подобная формула для любой целой неотрицательной степени — *бином Ньютона*:

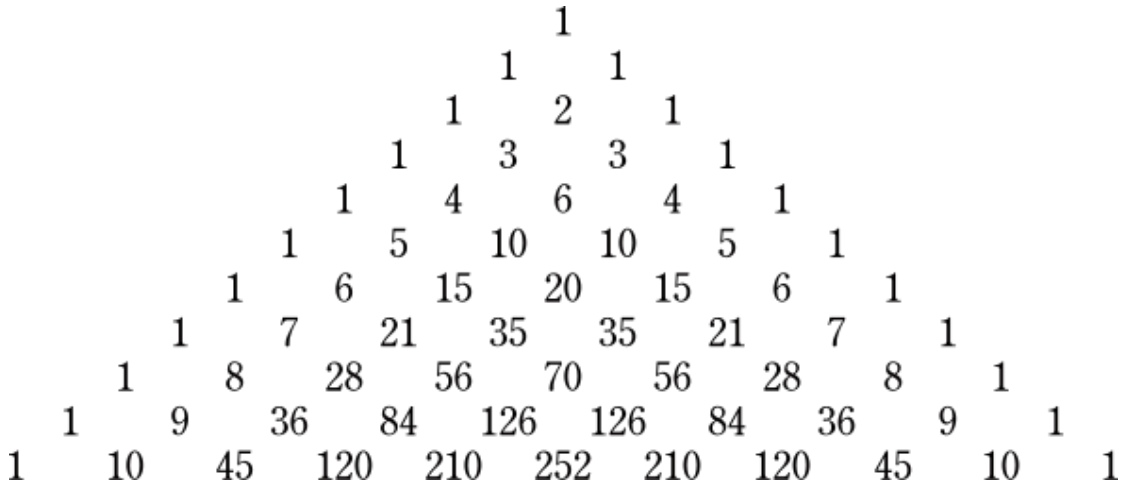
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$\binom{n}{k}$ *— биномальный коэфициент.*

Свойства биномальных коэффициентов:

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- k-й коэффициент есть количество сочетаний из n по k - 1.
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

18. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение
Треугольник Паскаля - бесконечная треугольная таблица, в которой на вершине и по боковым сторонам стоят единицы, каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предшествующей строке.



Пусть T (n, k) - k-й в нумерации с нуля элемент n-й строки. Свойства:

- $T(n,k) = \binom{n}{k}$
- Симметричность строк: T(n, k) = T(n, n - k), n - строка, k - столбец.
- Возрастание чисел в первой половине строки: $T(n,i) \leqslant T(n,i+1), 0 \leqslant i < n/2, i \in Z$
- $\sum_{k=0}^{n} T(n,k) = 2^n$
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k T(n,k) = 0, n \neq 0$

Рекуррентная соотношение - последовательность, в которой каждый следующий член выражается через предыдущие элементы и, возможно, номер элемента.
Рекуррентная формула - формула вида $a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-p})$, выражающая каждый член последовательности a_n через p предыдущих членов и возможно номер члена последовательности n.

19. Образы и прообразы множеств. Полный прообраз.
Пусть функция f из множества A в множество B устанавливает соответствие между элементами множеств A и B. Пусть $X \subseteq A$ – подмножество множества A. Функция f сопоставляет ему *образ* $f(X) \subseteq B$ подмножества X. По определению f(X) состоит в точности из тех элементов множества B, которые являются значениями элементов из X. Используя введённые нами для множеств обозначения, это можно записать как

$$f(X) = \{b | \exists x \in X : b = f(x)\}$$

Совокупность всех тех элементов $a \in A$, образом которых является данный элемент $b = f(a)$, $f(a) \in B$, называется *прообразом* элемента b и обозначается $f^{-1}(b)$
Подмножеству $Y \subseteq B$ можно сопоставить *полный прообраз* $f^{-1}(Y) \subseteq A$ подмножества Y. По определению $f^{-1}(Y)$ состоит в точности из тех элементов A, значения которых лежат в Y. Или формально:

$$f^{-1}(Y) = \{a | f(a) \in Y\}$$

20. Отображения (всюду определённые функции). Инъекции, сюръекции и биекции.
Отображение множества A в множество B - функция, которому каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие элемент $b \in B$.
Пусть $f : A \to B$. Тогда функция f называется:

1) *Инъективной (или инъекцией)*, если:

$$(b = f(a_1)) \ \& \ (b = f(a_2)) \Rightarrow (a_1 = a_2)$$

2) *Сюръективной (или сюръекцией)*, если:

$$\forall b \in B \ \exists a \in A : b = f(a)$$

3) *Биективной (или биекцией)*, если *она сюръективна и инъективна.* Биекции также называют *взаимно-однозначными функциями.*

21. Бинарные отношения. Транзитивность, симметричность, рефлексивность.
Бинарным отношением между множествами A и B называется подмножество R произведения $A \times B$. В том случае, когда A = B, мы говорим просто об отношении R на A.

Для бинарных отношений часто используется инфиксная форма записи:

$$aRb \stackrel{Def}{=} (a, b) \in R \subset A \times B$$

Пусть $R \subset A^2$. Тогда отношение R называется:

рефлексивным,	если $\forall a \in A \ (aRa)$
антирефликсивным,	если $\forall a \in A \ \neg(aRa)$
симметричным,	если $\forall a, b \in A \ (aRb \Rightarrow bRa)$
антисимметричным,	если $\forall a, b \in A \ (aRb \ \& \ bRa \Rightarrow a = b)$
транзитивным,	если $\forall a, b, c \in A \ (aRb \ \& \ bRc \Rightarrow aRc)$
линейным,	если $\forall a, b \in A \ (a = b \vee aRb \vee bRa)$

22. Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения.
Бинарные отношения — это множества пар элементов, связанных этими отношениями, поэтому к отношениям применимы все операции, выполняемые над множествами. Пусть $P \subseteq A \times A$ и $Q \subseteq A \times A$, тогда:

1) Пересечение отношений $P \cap Q$ - отношение, которое содержит только те упорядоченные пары, которые есть и в P и в Q:

$$P \cap Q = \{(x, y) \mid (x, y) \in P \wedge (x, y) \in Q\}$$

2) Объединение отношений $P \cup Q$ - отношение, которое содержит все упорядоченные пары отношения P и все упорядоченные пары отношения Q:

$$P \cup Q = \{(x, y) \mid (x, y) \in P \vee (x, y) \in Q\}$$

3) Разность отношений $P \setminus Q$ - отношение, которое содержит только те упорядоченные пары, которые содержатся в P, но не содержатся в Q:

$$P \setminus Q = \{(x, y) \mid (x, y) \in P \wedge (x, y) \notin Q\}$$

4) Симметрическая разность отношений $P \triangle Q$ - отношение, которое содержит только те упорядоченные пары, которые содержатся в объединении P и Q, но не содержатся в пересечении P и Q:

$$P \triangle Q = \{(x, y) \mid (x, y) \in (P \cup Q) \wedge (x, y) \notin (P \cap Q)\}$$

5) Дополнение отношения P - это отношение, состоящее из всех пар $(x, y) \in (A \times A)$, которые не входят в отношение P:

$$\bar{P} = \{(x, y) \mid (x, y) \in (A \times A) \wedge (x, y) \notin P\}$$

6) Обратным отношением P^{-1} к P называется такое отношение, которое содержит пару (x, y) тогда и только тогда, когда P содержит пару (y, x):

$$P^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in P\}$$

23. Композиция бинарных отношений

Пусть $R_1 \subset A \times C$ - отношение между A и C, а $R_2 \subset C \times B$ - отношение между C и B. *Композицией* двух отношений R_1 и R_2 называется отношение $R \subset A \times B$ между A и B, определяемое следующим образом:

$$R \stackrel{Def}{=} R_1 \circ R_2 \stackrel{Def}{=} \{(a, b) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ \exists c \in C \ (aR_1c \ \& \ cR_2b)\}$$

Другими словами, $aR_1 \circ R_2b \iff \exists c \in C \ (aR_1c \ \& \ cR_2b)$.

24. Отношения эквивалентности.

Отношение на некотором множестве, которое одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно, называют *отношением эквивалентности.*

Классы эквивалентности - непересекающиеся подмножества множества X, при этом любые два элемента одного класса находятся в отношении R, а любые два элемента разных классов не находятся в отношении R.

25. Графы. Основные определения: ребра, вершины, степени вершин.

Граф G - совокупность двух множеств - непустого множества V (множества вершин) и множества E двухэлементных подмножеств множества V (E - множество ребер).

$$E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$$

Степень вершины u - количество вершин, смежных с u. Обозначение: $d(u)$.

26. Пути и циклы в графах.
Путь - последовательность вершин $v_1, v_2, ..., v_n$, такая что $\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$: v_i и v_{i+1} - соединены ребром.
Простой путь - путь, такой что в нем все вершины различны.
Цикл - путь, такой что $v_1 = v_n$
Простой цикл - цикл, все вершины которого, кроме первой и последней различны.

27. Отношение достижимости (связанности) и компоненты связности графа.
Говорят, что вершина v достижима из вершины u, если существует путь $v_1, v_2, ..., v_n$, где $v_1 = u$, а $v_n = v$. Связность вершины u и v означает их достижимость друг из друга.
Обозначение связности: $u \to v$
Основные свойства:
1) $u \to u \ \forall u \in V$
2) если $u \to v$, то $v \to u$ (для неор.графов)
3) Транзитивность (для неор.графов): если $u \to v$ и $v \to w$, то $u \to w$
Компонента связности - подмножество множества вершин V графа G такое, что любая пара вершин в этом подмножестве связаны, а также любая вершина этого подмножества не связана с любой другой не из этого подмножества.
Компонента связности - класс эквивалентности по отношению достижимости (валидно, т.к. отношение достижимости является отношением эквивалентности, это следует из свойств).

28. Правильные раскраски графов. Формулировка критерия 2 - раскрашиваемости
Раскраска вершин графа называется правильной, если концы каждого ребра покрашены в разные цвета. *2-раскрашиваемые графы* - это графы, которые можно правильно раскрасить в 2 цвета. Граф 2-раскрашиваемый, когда в нем нет циклов нечетной длины.
Теорема. 2 - раскраска описанного типа возможна тогда и только тогда, когда в графе нет циклов нечётной длины.

29. Двудольные графы. Двудольные и двураскрашиваемые графы.

Граф G(V, E) называется *двудольным*, если множество V может быть разбито на два непересекающихся множества V_1 и V_2 ($V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \varnothing$), причем всякое ребро из E инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 (соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2). Множества V_1 и V_2 называются *долями* двудольного графа.
2-раскрашиваемые графы - это графы, которые можно правильно раскрасить в 2 цвета. Граф является 2-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда является двудольным.

30. Подграфы. Изоморфизм графов. Клики и независимые множества.
Граф $G'(V', E')$ называется *подграфом* графа G(V, E), если $V' \subset V$ & $E' \subset E$.

Изоморфизм графов. Говорят, что два графа, $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$, *изоморфны*, если существует биекция $h : V_1 \to V_2$, такая что две вершины u и v графа G_1 смежны тогда и только тогда, когда вершины $h(u)$ и $h(v)$ смежны в графе G_2.
Кликой называется такое подмножество вершин графа, каждая пара которых связана ребром.
Независимым множеством называется такое подмножество вершин графа, никакая пара которых не связана ребром.

31. Эйлеровы циклы.
Цикл называется *эйлеровым*, если он проходит по всем рёбрам графа, причём только один раз.
Критерии существования. Эйлеров цикл существует в неориентированном графе тогда и только тогда когда выполнены условия:
1) Граф связен.
2) Все вершины имеют четную степень.
3) Цикл проходит через все ребра.
Эйлеров цикл существует в ориентированном графе тогда и только тогда когда выполнены условия:
1) Граф сильно связен.
2) Для любой вершины v верно $d^-(v) = d^+(v)$

32. Деревья. Полные бинарные деревья.
Дерево - связный граф без простых циклов длины $\geqslant 3$. Для деревьев выполняются эти свойства:
1) G - связный граф, где нельзя удалить ни одного ребра без нарушения связности.
2) G - связный граф, где число рёбер на единицу меньше числа вершин.
3) G - связный граф, где для любых двух вершин u, v существует единственный простой путь из u в v.
4) G - связный граф, где нет простых циклов длины больше 2.
(Все 4 определения эквиваленты)

Еще свойства деревьев:
1) Для любых трёх вершин дерева, пути между парами этих вершин имеют ровно одну общую вершину.
2) Из любого связного неориентированном графа можно получить дерево удалением части ребер. (Полученное дерево будет называться остовным деревом исходного графа).
3) В любом дереве есть висячая вершина.

Полное бинарное дерево глубины n — неориентированный граф-дерево, вершины которого — двоичные слова длины не больше n, а рёбра соединяют слова, которые можно получить друг из друга добавлением (или исключением соответственно) символа в конец слова. Корень дерева — пустое слово.

33. Ориентированные графы, основные определения.
Ориентированный граф (орграф) - такой граф, в котором направление ребра

имеет значение; ребра (v, u) и (u, v) - разные. Записать можно следующим образом: $E = \{(A, B), (C, D), ...\}$. Часто ребра в орграфе называют *дугами.*
Для орграфов и неорграфов верно, что $u \to v$, $v \to w \Rightarrow u \to w$.
Для ориентированных графов отличают входящую степень $d^-(v)$ — количество входящих в вершину ребер, то есть ребер вида (u, v), и исходящую степень $d^+(v)$ — количество исходящих ребер, то есть ребер вида (v, u).
Путь, простой путь, цикл, простой цикл - эквивалентно определениям для неорграфа.

34. Компоненты сильной связности ориентированного графа.
Будем говорить, что вершины u и v сильно связны, когда $u \to v$ и $v \to u$. Обозначается как $u \leftrightarrow v$.
Компонента сильной связности — определено только для орграфов; аналогично обычной компоненте связности, но между любой парой вершин в компоненте должна быть сильная связность.
Теорема: Вершины ориентированного графа можно однозначно разбить на непересекающиеся группы, называемые сильно связными компонентами, при этом:

1) Каждая вершина графа попадает ровно в одну группу;

2) Любые две вершины из одной группы сильно связаны;

3) Любые две вершины из двух разных групп не являются сильно связанными (в одну из сторон — или даже в обе — пути нет).

35. Отношения частичного порядка (строгие и нестрогие), линейные порядки
Отношение порядка - антисимметричное транзитивное отношение.
Нестрогое отношение порядка - рефлексивное отношение порядка.
Строгое отношение порядка - антирефлексивное отношение порядка.
Линейное отношение порядка - отношение порядка, обладающее свойством линейности $(\forall a, b \in A\ (a = b \vee aRb \vee bRa))$.
Частичное отношение порядка - отношение порядка, не обладающее свойством линейности.

Обычно отношение строгого порядка (линейного или частичного) обозначается знаком $\prec$, а отношение нестрогого порядка - знаком $\preceq$.

36. Отношение непосредственного следования
Отношение непосредственного следования - это отношение порядка $\prec$, такое что если $x < y$, то $\nexists z : x < z \wedge z < y$. Кратко записывается так:

$$\prec = \{(x, y) \mid (x < y) \wedge \neg(\exists z : x < z \wedge z < y)\}$$

37. Изоморфные отношения частичного порядка
Отношения частичного порядка $R_1 \subseteq A \times A$ и $R_2 \subseteq B \times B$ называются изоморфными, если существует такая биекция $f : A \to B$, что для $\forall x, y$ $xR_1y \iff f(x)R_2f(y)$

2 Теоремы с доказательствами

1. Разложение в ДНФ булевой функции.
Теорема: Любая булева функция представима в виде дизъюнкции конъюнктов её переменных и может быть записана так:

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{\{(\sigma_1,...,\sigma_n) \mid f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1\}} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}$$

Замечание: запись x^σ означает буквально:

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \sigma = 1 \\ \bar{x}, \sigma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы доказать данную теорему, докажем теорему о разложении булевой функции по k переменным.
Теорема: о разложении булевой функции по переменным.

$$f(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \wedge ... \wedge x_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1, ..., \sigma_m, x_{m+1}, ..., x_n)$$

Причем дизъюнкция берется по всем возможным наборам $(\sigma_1, ..., \sigma_m) \in \{0, 1\}^m$.
Доказательство: Рассмотрим значение формулы на наборе значений $(a_1, ..., a_n)$. Имеем:

$$\Big(\bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \wedge ... \wedge x_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1, ..., \sigma_m, x_{m+1}, ..., x_n) \Big)(a_1, ..., a_n) =$$

$$= \bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_m)} a_1^{\sigma_1} \wedge ... \wedge a_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1, ..., \sigma_m, a_{m+1}, ..., a_n)$$

Достаточно очевидно, что $a^\sigma = 1$, если $a = \sigma$, иначе $a^\sigma = 0$:

a	σ	a^σ
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Следовательно, все конъюнкции, в которых $\exists i : a_i \neq \sigma_i$, равны 0 и их можно опустить, поэтому остается только одно слагаемое, для которого $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $(a_i = \sigma_i)$. Следовательно:

$$\bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_m)} a_1^{\sigma_1} \wedge ... \wedge a_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1, ..., \sigma_m, a_{m+1}, ..., a_n) =$$

$$= a_1^{a_1} \wedge ... \wedge a_m^{a_m} \wedge f(a_1, ..., a_m, a_{m+1}, ..., a_n) = f(a_1, a_2, ..., a_n)$$

■

Веренмся к первоначальной задаче. Достаточно очевидно, что искомое разложение в ДНФ - это разложение функции по всем переменным, m = n. (При таком разложении полностью исчезает часть с f(...)).

2. Обощенный закон Моргана.

$$\neg(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n) = \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge ... \wedge \neg x_n$$
$$\neg(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n) = \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee ... \vee \neg x_n$$

Доказательство (для первой формулы, анналогично для второй):

1. База: Выражение верно для n = 2: $\neg(x_1 \vee x_2) = \neg x_1 \wedge \neg x_2$
2. Предположение: Пусть верно для n = k - 1:

$$\neg(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_{k-1}) = \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge ... \wedge \neg x_{k-1}$$

3. Шаг: проверим для n = k. Сделаем замену $y = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_{k-1}$

$$\neg(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_k) = \neg(y \vee x_k) = \neg y \wedge \neg x_k = \neg(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_{k-1}) \wedge \neg x_k =$$
$$= \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge ... \wedge \neg x_{k-1} \wedge \neg x_k$$

(Последний переход выполнен по предположению индукции)

3. Формула включений и исключений.
Теорема:

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i \Big| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap ... \cap A_n|$$

Доказательство (по индукции):
1) База индукции: докажите по диаграммам Эйлера-Венна для n = 2, 3
2) Предположение индукции: пусть верно для n - 1

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \Big| = \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-2} |A_1 \cap ... \cap A_{n-1}|$$

Дальше, нужно заметить, что из-за того, что операция пересечения ассоциативна по операции объединения, то верно вот что:

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)$$

Кроме того, надо заметить, что для штуки, которую мы получили, верно предположение индукции (мы можем её разложить):

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n) \Big| = \sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| + ... + (-1)^{n-2} |A_1 \cap ... \cap A_{n-1} \cap A_n|$$

3) А теперь, зная все формулы выше, мы делаем шаг индукции:

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i \ \Big| = \Big|\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cup A_n \ \Big|$$

По формуле для n = 2 раскрываем эту скобку:

$$\Big|\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cup A_n \ \Big| = \Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \ \Big| + |A_n| - \ \Big|\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cap A_n \ \Big| =$$

$$= \Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \ \Big| + |A_n| - \ \Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n) \ \Big| =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-2} |A_1 \cap ... \cap A_{n-1}|\right) + |A_n| -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-2} |A_1 \cap ... \cap A_{n-1} \cap A_n|\right) =$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n-1} |A_i| + |A_n|\Big) - \left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n|\right) + ... -$$

$$-(-1)^{n-2} |A_1 \cap ... \cap A_{n-1} \cap A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap ... \cap A_n|$$

■

4.Число k-элементных подмножеств n-элементного множества есть $\binom{n}{k}$

Будем выбирать элементы множества по очереди. Первый элемент можно выбрать n способами, второй (n - 1) способами (годятся все, кроме первого, уже выбранного), третьий (n - 2) способами, и т.д пока не выберем k элементов. По правилу произведения всего способов выбрать таким образом есть

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-k+1)$$

способ. Однако так мы посчитали не число возможных подмножеств, а число упорядоченных списков. Получается, нужно не обращать внимания на позицию элемента в списке. Всего можно составить k! таких упорядоченных списков из k элементов (k! - количество способов переставить элементы в списке). Значит количество способов выбрать k-элементное подмножество из n-элементного множества равно

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{1}{k!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

■

5. Бином Ньютона. Формула для биномиальных коэффициентов. Теорема:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Доказательство (по индукции):

1) База индукции: n = 1

$$(a+b)^1 = a+b = a^1b^0 + a^0b^1 = \binom{1}{0} a^1b^0 + \binom{1}{1} a^0b^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$$

2) Пусть верно для n:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

3) Докажем для n + 1:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\Big) =$$

$$a \times \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\Big) + b \times \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\Big)$$

Вынесем из первой скобки одно слагаемое при k = 0, а из второй скобки слагаемое при k = n:

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\Big) =$$

$$= a^{n+1} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k\Big) + b^{n+1} + \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\Big)$$

Сделаем сдвиг в сумме во второй скобке. Будем проходиться не от 0 до n - 1, а от 1 до n. Тогда, чтобы сумма осталась неизменной нужно из всех k под знаком суммы отнять единчку. Получаем:

$$a^{n+1} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k\Big) + b^{n+1} + \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\Big) =$$

$$= a^{n+1} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k\Big) + b^{n+1} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k\Big) =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k\Big) =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \Big) =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a^{n-k+1} b^k (\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}) \Big) =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a^{n-k+1} b^k \times \binom{n+1}{k} \Big) =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k$$

■

6. Основные свойства треугольника Паскаля: симметричность строк, возрастание чисел в первой половине строки.
1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, следовательно все строки треугольника Паскаля симметричны. (доказывается раскрытием обоих частей).
2) Решить неравенство $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$. Получаем, что оно выполняется только при $k \leqslant \frac{n}{2}$. Из симметричности получаем возрастание в первой половине строки и убывание во второй половине строки.

7. Основные свойства треугольника Паскаля: формула для суммы чисел в строке, нижняя оценка на центральный коэффициент
Теорема 1: Сумма чисел в n-ой строке треугольника Паскаля $= 2^n$.

Доказательство: Вспомним, что в n-ой строке треугольника Паскаля лежат числа

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = \binom{n}{0} 1^0 1^{n-0} + \binom{n}{1} 1^1 1^{n-1} + ... + \binom{n}{n} 1^n 1^{n-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n$$

Теорема 2: Нижняя оценка на центральный коэффициент.

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

Доказательство:
1) Рассмотрим сумму 2n-ой строки треугольника Паскаля:

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + ... + \binom{2n}{2n} = 2^{2n}$$

2) Из возрастания биномальных коэффициентов следует, что:

$$\binom{2n}{n} \geqslant \binom{2n}{k}, \forall k \in \{1, 2, ..., 2n\}$$

3) Следовательно:

$$\underbrace{\binom{2n}{n} + ... + \binom{2n}{n}}_{2n+1} \geqslant \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + ... + \binom{2n}{2n}$$

4) Тогда:

$$(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + ... + \binom{2n}{2n}$$

5) Получаем:

$$(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant 2^{2n}$$

6) И наконец:

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

■

8. Число решений уравнения $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ в неотрицательных целых числах. (Задача Муавра.)

Есть ещё одна задача, где естественным (но не вполне очевидным) образом возникают числа сочетаний. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ в целых неотрицательных числах? Если это недостаточно наглядно, можно спросить иначе: есть k различных человек и n одинаковых монет. Сколькими способами можно раздать этим людям эти монеты? Каждый такой способ определяется тем, сколько монет получил каждый (но какие именно монеты — не учитывается, все монеты одинаковые). Это целые неотрицательные числа (допускаются варианты, где некоторые получили по нулю монет). Как найти это число? Представим себе, что наши n монет разложены в ряд. Прежде чем раздавать эти монеты, разделим их на k групп перегородками, и договоримся, кому идёт самая левая группа, кому вторая слева и т.д. Заметим, что мы допускаем случай, когда две перегородки оказываются рядом — это значит просто, что человеку, которому была назначена группа между ними, не повезло и в этом раскладе ему ни одной монеты не достанется. Каждому варианту раздачи (каждому решению уравнения в неотрицательных числах) соответствует последовательность из n монет и k - 1 перегородок. (Число перегородок на единицу меньше числа группы: первая группа стоит слева от первой перегородки, а последняя - справа от последней.) Наоборот, каждой последовательности из n монет и k - 1 перегородок соответствует некоторый способ раздачи монет. Поэтому надо подсчитать число способов расставить перегородки. А это совсем просто - каждый содержащее n монет и k - 1 перегородок. Это количество, как мы знаем, равно $\binom{n+k-1}{n}$ или $\binom{n+k-1}{k-1}$.

9. Основная теорема об отношениях эквивалентности (классы эквивалентности на множестве A — в точности разбиения множества A на подмножества)

Теорема: Любое отношение R, являющееся отношением эквивалентности на

множестве A, делит A на классы эквивалентности - непересекающиеся подмножества множества X, при этом любые два элемента одного класса находятся в отношении R, а любые два элемента разных классов не находятся в отношении R.

Доказательство: Для каждого $x \in A$ рассмотрим множество тех y, для которых верно $R(x, y)$. Обозначим его через [x]. Его можно было бы назвать «классом эквивалентности элемента x» - собственно говоря, так его и называют, но само по себе это название не гарантирует разбиения на классы, это ещё надо доказывать. А именно, нададоказать, что

1. объединение всех множеств вида [x] совпадает с множеством A;
2. два множества [x] и [y] либо не пересекаются, либо совпадают;
3. наконец, надо ещё доказать, что [x] = [y] в том и только том случае, когда R(x, y), то есть R совпадает с отношением «принадлежать одному классу».

По порядку:

1. В силу рефлексивности множество [x] содержит x в качестве своего элемента: $x \in [x]$, поскольку R(x, x). Отсюда следует, что объединение всех этих множеств совпадает с A. (Выйти за пределы A они не могут, так как мы рассматриваем отношение на множестве A и элементы множества A.)
2. Пусть для двух элементов $x, y \in A$ их классы [x] и [y] пересеклись. Это означает, что есть такой $z \in A$, что R(x, z) и R(y, z). Симметричность даёт R(z, y), после чего мы применяем транзитивность к R(x, z) и R(z, y) и заключаем, что R(x, y). Выведем отсюда, что [x] = [y]. В самом деле, если произвольный элемент t принадлежит [y], то R(y, t). Вспоминая, что R(x, y)и применяя транзитивность, получаем R(x, t), то есть $t \in [x]$. Мы доказали, таким образом, что $[y] \subseteq [x]$. Аналогично доказывается, что $[x] \subseteq [y]$, так что [x] = [y].
3. Если для каких-то x, y верно R(x, y), то x и y оба лежат в одном классе, а именно, в [x]. Обратно, если x и y лежат в каком-то [z], то по определению имеем R(z, x) и R(z, y), симметричность даёт R(x, z) и после этого транзитивность даёт R(x, y).

10. Нижняя оценка числа связных компонент в неориентированном графе.
Теорема: Число компонент связности в графе не меньше, чем разность количества вершин и ребер.

Доказательство (по индукции):
1) База индукции (n = 1): граф состоит из 1 вершины, которая является единственной компонентой связности в графе. Разность количества вершин(1) и ребер(0) равно 1, но компонента связности одна. База доказана.

2) Шаг индукции ($n \mapsto n+1$): пусть для всех графов на n вершинах выполняется эта оценка, добавим еще одну вершину и рассмотрим случай связи, при котором сумма количества компонент связности и количество ребер наименьшая: выберем такой граф на n вершинах (C - количество компонент связности в этом графе, E - количество ребер в этом графе), чтобы в нем эта сумма была наименьшей и добавим к нему еще одну вершину. Заметим, что если связать новую вершину хотя бы одним ребром с k уже существовавшими компонентами связности, то количество ребер увеличится, как минимум, на k, а компонент связности станет на k - 1 меньше, чем в графе на n вершинах. (Если не связывать, то станет на одну больше, так как будет еще одна компонента связности, если связать компоненты связности, то они станут одной компонентой связности, то есть количество уменьшится на единицу.) Так как нужна наименьшая сумма, то нужно использовать, как можно меньше ребер: будем соединять вершину 1 ребром с каждой из k существовавших компонентов связности - ребер станет на k больше, а количество компонентов связности уменьшится на k - 1, то есть сумма компонентов связности и ребер нового графа будет такой: (C - (k - 1)) + (E + k) = C + E + 1. Но C + E + 1 > V + 1 из C + E > V. Значит для n + 1 верна оценка.
■

11. Доказательство критерия 2-раскрашиваемости неориентированного графа.
Формулировка: Раскраска вершин графа в два цвета так, чтобы рёбра соединяли вершины разных цветов, возможна когда и только тогда, когда в графе нет циклов нечётной длины.

Доказательство: Если в графе есть цикл нечётной длины, то его нельзя раскрасить: соседние вершины должны быть противоположных цветов, и дойдя до конца, мы получим противоречие. Чтобы доказать обратное, предположим, что циклов нечётной длины нет. Выберем некоторую вершину a и не ограничивая общности окрасим её в цвет 1. Для любой другой вершины b посмотрим, сколько рёбер в пути от a к b. Заметим, что если есть путь $a \to b$ с чётным числом рёбер, а также другой путь $a \to b$ с нечётным числом рёбер, то есть цикл с нечётным числом рёбер (из a в b по одному пути и из b в a - по другому). Это противоречит предположению. Таким образом, мы поделили вершины графа на два типа: соединённые с a путями чётной длины и путями нечётной длины. Если какая-то вершина соединена с a путями чётной длины, то её соседи соединены путями нечётной длины (один такой путь - через соседа - заведомо есть, а тогда и все пути имеют нечётную длину). Раскрасим те, что на чётном расстоянии в то же цвет, что и a, а те, что на нечётном - в другой. Требуемая раскраска одной компоненты связности построена. Остальные можно раскрашивать совершенно независимо от этой, так как нет ребёр, которые могли бы помешать.
■

12. Если G — минимально связный граф (удаление любого ребра приводит к несвязности), то G не содержит простых циклов длины больше двух

Пусть A = (удаление любого ребра G приводит к несвязности), B = (G не содержит простых циклов длины больше двух). Тогда доказать $A \to B$ есть то же самое, что доказать $\bar{B} \to \bar{A}$ (по принципу контрапозиции). Докажем $\bar{B} \to \bar{A}$.
Теорема: Если G содержит простой цикл длины больше двух, то G - не минимально связный граф.
==========Coming soon==========

13.
==========Coming soon==========

14.
==========Coming soon==========

15.
==========Coming soon==========

16.
==========Coming soon==========

17.Критерий обратимости остатка (вычета) по модулю N.
Теорема: Число a обратимо по модулю p тогда и только тогда, когда a и p взаимно просты, а именно наибольший общий делитель a и p равен единице.
Доказательство:

18. Малая теорема Ферма.
Теорема: Если p — простое число и a — целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.

Доказательство:

1. Пусть $f(x) = x^p$. Докажем, что $\forall x\ f(x) = x \ (mod\ p)$.
2. Докажем это:
   (a) $f(0) \equiv 0^p \equiv 0 \ (mod\ p)$
   (b) $f(1) \equiv 1^p \equiv 1 \ (mod\ p)$
   (c) $\forall x, y \notin \{0, 1\}\ f(x + y) \equiv$

$$\equiv (x+y)^p \equiv x^p + \binom{p}{1} x^{p-1}y^1 + ... + \binom{p}{p-1} x^1 y^{p-1} + y^p \equiv$$

$$\equiv x^p + \frac{p!}{1!(p-1)!} x^{p-1}y^1 + ... + \frac{p!}{(p-1)!1!} x^1 y^{p-1} + y^p \equiv$$

$$\equiv x^p + y^p \equiv f(x) + f(y) \ (mod\ p)$$

   (d) Т.к $f(x + y) \equiv f(x) + f(y) \ (mod\ p)$, то мы можем вычислить f для всех остальных x:

i. $f(2) \equiv f(1) + f(1) \equiv 1 + 1 \equiv 2 \ (mod\ p)$

ii. $f(3) \equiv f(2 + 1) \equiv f(2) + f(1) \equiv 2 + 1 \equiv 3 \ (mod\ p)$

iii. ...

iv. $f(x) \equiv f((x - 1) + 1) \equiv x - 1 + 1 \equiv x \ (mod\ p)$

3. Получаем, что $f(a) \equiv a^p \equiv a \ (mod\ p)$

4. Число p - простое, поэтому все остатки по модулю p взаимно просты с $p \Rightarrow \forall x \ \exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$ (по критерию обратимости).

5. Следовательно, $\exists a^{-1} : a^{-1} \cdot a \equiv 1 \ (mod\ p)$

6. *Тогда используя эту лемму:* "Если $a \equiv b \ (mod\ m)$ и $c \equiv d \ (mod\ m)$, то $ac \equiv bd \ (mod\ m)$ получаем:

$$\begin{cases} a^p \equiv a \ (mod\ p) \\ a^{-1} \equiv a^{-1} \ (mod\ p) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$$

■