

Die Heisenberg'sche Unschärferelation anhand von diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Silas Alberti

Februar 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Heisenberg'sche Unschärferelation	3
2	Hauptteil	3
2.1	Grundprinzipien	4
2.2	Eindimensionale Bewegungen	5
2.2.1	Allgemeine Geschwindigkeit	7
2.3	Zweidimensionale Bewegungen	8
2.4	Die Unschärferelation	9
3	Perspektive	9
4	Anhang	9
4.1	Straightforwardness von Beweisen	9
4.2	Abbildungen	11
4.3	Literatur	11

1 Einleitung

Dank der heutzutage weit fortgeschrittenen Displaytechnologie in Form von UHD-Auflösungen und 4K-Fernsehern vergisst man schon fast, dass auch die geradezu lebensecht darstellenden Monitore, das Bild dennoch aus einer Vielzahl an einzelnen Pixeln zusammensetzen. Dem entgegen stellt sich die sogenannte Pixel-Art, die gezielt niedrigere Auflösungen als Stilmittel verwendet. Dabei setzt der Pixel-Artist das Bild meist akribisch Pixel für Pixel zusammen ohne von den Vorteilen höherer Bearbeitungsebenen zu profitieren, die moderne Software bietet.

Sehr interessant sind die Einschränkungen, die diese Form der Bilderstellung dem Künstler schafft. So sind grundlegende geometrische Formen wie gerade Linien nur parallel zu den Linien des Rasters möglich. Erst recht problematisch wird es für komplexere Formen wie z.B. Kreise, die sich zwar mehr und mehr approximieren, aber tatsächlich nie perfekt umsetzen lassen. In der Pixel-Art-Szene wurde aus dem Streben nach der bestmöglichen Approximation von Kreisen, Linien und ähnlichem bereits eine eigene Wissenschaft.

In der Realität außerhalb der Computer-Bildschirme hingegen – so könnte man sich im Angesicht dieser Unvollkommenheit zureden – existieren solche Probleme nicht; man könne ja unendlich weit „reinzoomen“ in unser Universum. Derartige Überlegungen finden ihren Höhepunkt z.B. in der Analysis, genauer in der Infinitesimalrechnung, die mathematische Sachverhalte bis in unendliche Genauigkeit darstellen kann.

Der elementare Gegensatz sind hier die mathematischen Begriffe *diskret* und *kontinuierlich*. Ein Computer-Bildschirm, der aus einer endlichen Anzahl an Pixeln besteht, kann nur diskretes fassen, während unser Universum (scheinbar) auch kontinuierliche Größen fassen kann. Mathematisch präziser formuliert, betrachtet die diskrete Mathematik nur endliche oder abzählbar unendliche Mengen, während die nicht-diskrete Mathematik (z.B. die Analysis) insbesondere eben auch überabzählbar unendliche Mengen wie die reellen Zahlen untersucht. So entstehen Konzepte wie die Stetigkeit einer Variable, die im Diskreten nicht existieren können.

Bereits gegen Ende des 19. Jh. stellte sich jedoch heraus, dass bisher für kontinuierlich gehaltene physikalische Größen und Phänomene wie die Ladung oder das Licht aus diskreten Grundeinheiten, sogenannten *quanta* bestehen (d.h. Elektronen

im Fall von Ladung; Photonen im Fall von Licht). Im Zuge dessen entwickelte sich Anfang des 20. Jh. die Quantenphysik, welche Phänomene und Größen, die nur feste diskrete Werte annehmen können, untersucht. Letzteres wird auch als *Quantelung* bezeichnet.

Als Gründervater der Quantenphysik gilt der deutsche Physiker Max Planck (* 1858; †1947), der erstmalig die Quantelung im Falle von Energie beschrieb. Nach ihm benannt ist auch die Planck-Länge

$$l_P \approx 1.616229 \cdot 10^{-35} m,$$

die der Anstoß für die in dieser Arbeit geführten Überlegungen ist. Der aktuellen – noch nicht bewiesenen – Theorie der Schleifenquantengravitation zufolge, die als die einzige weit entwickelte Alternative zur bekannteren String-Theorie gilt, ist nämlich das gesamte Universum durch die Planck-Länge quantisiert. Einfach dargestellt könnte man sagen, unser Universum bestehe aus Pixeln der Größe der Planck-Länge.

Tatsächlich wäre es demnach nicht möglich in unserem Universum einen perfekten Kreis zu erschaffen.

Des Weiteren lässt sich die Planck-Zeit definieren

$$t_P \approx 5.39116 \cdot 10^{-44} s,$$

die in der Schleifenquantengravitation die diskrete Grundeinheit der Zeit ist. Damit wäre sie im Kontext der eben bereits aufgefassten Computerbildschirm-Analogie mit der vergangenen Zeit zwischen zwei Frames z.B. eines digitalen Videos vergleichbar.

Ohne Anspruch auf physikalische Treffsicherheit spielt diese Arbeit mit dem Konzept von diskreten Raum- und Zeiteinheiten unter der Annahme, dass die nicht unterschritten werden können. Wir werden grundlegende Teilchenbewegungen modellieren mit dem Ziel, herauszufinden, welche Implikationen diese Diskretheit birgt.

Ich möchte nochmals betonen, dass ich keinesfalls behaupte, von den physikalischen Details auch nur annähernd Ahnung zu haben – die tatsächliche moderne Quantenphysik ist wesentlich komplexer. Es handelt sich hierbei um rein mathematische Überlegungen, die keinen Zusammenhang zu echten physikalischen Phänomenen anstreben. Das Ziel ist es sich dem Konzept des Diskreten zu Nähern und herauszufinden, was für Folgen dies unter anderem haben könnte.

Im Laufe der Arbeit werde ich öfters Parallelen zu quantenphysikalischen Phänomenen ziehen, die eher als Anekdote zu sehen sind.

1.1 Die Heisenberg'sche Unschärferelation

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

2 Hauptteil

Begeben wir uns also auf die tiefstmögliche Ebene. Im Zentrum der folgenden Überlegungen wird ein „Teilchen“ der Größe einer Planck-Länge stehen. Dabei sei der Begriff als ein reines mathematisches Objekt zu verstehen, ohne direkte physikalische Interpretation.

Im Folgenden werden wir die Konzepte *Ort* und *Zeit* benötigen. Bevor die deren Struktur konkretisieren, betrachten wir sie erstmal als abstrakte Konzepte.

Definition 1. (a) Wir können eine Menge \mathbb{X} als **diskreter Raum** bezeichnen, wenn sie maximal abzählbar unendlich ist, d.h. wenn

$$|\mathbb{X}| \leq \aleph_0,$$

und außerdem eine **Nachbarschaftsfunktion** $\delta : \mathbb{X}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ existiert mit

- (i) $\forall x \in \mathbb{X} \quad \exists x_0 \in \mathbb{X} : \quad \delta(x, x_0) = 1,$
- (ii) $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{X} : \quad \delta(x_0, x_1) = \delta(x_1, x_0),$
- (iii) $\forall x \in \mathbb{X} : \quad \delta(x, x) = 0.$

Ein $x \in \mathbb{X}$ bezeichnen wir als **Position**. Wenn für $x_0, x_1 \in \mathbb{X}$ gilt, dass $\delta(x_0, x_1) = 1$ bezeichnen wir sie als **benachbart**, andernfalls als **nicht benachbart**.

(b) Wir können eine Menge \mathbb{T} als **diskrete Zeit** bezeichnen, wenn sie maximal abzählbar unendlich ist, d.h. wenn

$$|\mathbb{T}| \leq \aleph_0,$$

und außerdem eine **Nachfolgerfunktion** $\mu : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ existiert, wobei $\forall t \in \mathbb{T} : \mu(t) \neq t$. Ein $t \in \mathbb{T}$ bezeichnen wir als **Zeitpunkt**.

So wird \mathbb{X} in der Praxis z.B. ein durch ganzzahlige, kartesische Koordinaten beschreibbarer euklidischer Raum¹ sein. Die Zeit \mathbb{T} werden wir im Laufe dieser Arbeit durch die ganzen Zahlen umsetzen, wobei $\mu(t) := t + 1$ sei.

Definition 2. *Es sei Φ ein **Teilchen**. Des Weiteren bezeichne $x \in \mathbb{X}$ eine Position und $t \in \mathbb{T}$ einen Zeitpunkt. Wir sagen*

$$\Phi \bowtie_t x,$$

wenn sich Φ an der Position x zum Zeitpunkt t befindet.

2.1 Grundprinzipien

Benachbarte Punkte sind Punkte im Abstand einer Planck-Länge. Der Nachfolger eines Zeitpunkts, ist ein Zeitpunkt in einer Planck-Zeit Abstand. Interessanterweise gilt

$$c = \frac{l_P}{t_P},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Die in der Physik gemeinhin akzeptierte Annahme, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht überschritten werden kann, übersetzen wir mit Postulat 1 in unser mathematisches Modell.

Postulat 1. *Es sei Φ ein Teilchen. Des Weiteren gelte für ein $x_0 \in \mathbb{X}$ und ein $t \in \mathbb{T}$*

$$\Phi \bowtie_t x_0.$$

Wenn für ein $x_1 \in \mathbb{X}$

$$\Phi \bowtie_{\mu(t)} x_1$$

gilt, dann muss $\delta(x_0, x_1) = 1$ oder $x_0 = x_1$ gelten.

Dieses Geschwindigkeitslimit bezeichnen wir im Folgenden als *Maximalgeschwindigkeit*, um nicht das Wort Lichtgeschwindigkeit verwenden zu müssen.

¹In der Realität ist der Raum wahrscheinlich nicht euklidisch (vgl. Raumkrümmung in der Relativitätstheorie).

2.2 Eindimensionale Bewegungen

Im eindimensionalen Fall können wir den Raum durch die ganze Zahlen darstellen, d.h. $\mathbb{X} := \mathbb{Z}$. Die Nachbarschaftsfunktion δ ist in diesem Fall definiert durch

$$\delta(x_0, x_1) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } |x_0 - x_1| = 1, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Betrachten wir also ein Teilchen Φ , für das $\Phi \times_0 0$ gelte. Stellen wir uns Φ zum Zeitpunkt 0 an der Stelle 0 einer horizontalen Zahlengeraden vor mit den positiven Zahlen zur Rechten. Eine Bewegung von Φ mit Maximalgeschwindigkeit nach rechts, ließe sich nun folgendermaßen beschreiben:

$$\Phi \times_0 0, \quad \Phi \times_1 1, \quad \Phi \times_2 2, \quad \Phi \times_3 3, \dots$$

Was ist allerdings, wenn Φ sich langsamer bewegt? Mal angenommen, es bewege sich in halber Maximalgeschwindigkeit: Da es sich in einem Zeitschritt um entweder genau eine Einheit oder gar keine bewegen muss, ist es nicht möglich innerhalb einer Zeiteinheit eine halbe Maximalgeschwindigkeit umzusetzen.

Wenn sich Φ allerdings in zwei Zeiteinheiten um insgesamt eine Raumeinheit bewegt, dann ist die effektive Geschwindigkeit tatsächlich die halbe Maximalgeschwindigkeit. Ähnlich wie also Pixel-Artists gerade Linien oder Kreise approximieren, so können wir Bewegungen auf anderen Geschwindigkeiten als der Maximalgeschwindigkeit approximieren durch abwechselndes Verweilen und Bewegen auf Maximalgeschwindigkeit.

Es gibt zwei Arten, eine Bewegung auf halber Geschwindigkeit in den ersten beiden Zeitschritten zu vollziehen:

$$\Phi \times_0 0, \Phi \times_1 0, \Phi \times_2 1 \quad \text{und} \quad \Phi \times_0 0, \Phi \times_1 1, \Phi \times_2 1.$$

Wie entscheidet sich also, wo sich Φ zum Zeitpunkt 1 befindet? Da beide gerade aufgezeigten Varianten – aus unserem Blickwinkel – vollkommen gleichwertig sind, müssten wir, um ein deterministisches Gesetz für die Bewegung von Φ zu haben, arbiträr eine der beiden Varianten bevorzugen. Wenn wir dies nicht tun wollen, bleibt es uns nur übrig, die Voraussetzung des Determinismus aufzugeben – genau wie es die Quantenphysik auch tat.

So sagen wir nun also: Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ befindet sich Φ zum Zeitpunkt 1 an Position 0 und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ befindet es sich an Position 1 zu diesem Zeitpunkt. In anderen Worten:

$$P(\Phi \propto_1 0) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(\Phi \propto_1 1) = \frac{1}{2}.$$

Im Folgenden werden wir uns allerdings gar nicht dafür interessieren, an welcher Position sich Φ zum Zeitpunkt 1 letztlich befinden wird; uns interessiert lediglich mit welcher Wahrscheinlichkeit es sich wo befindet. Eine Interpretation der Quantenmechanik besagt, dass für bestimmte Objekte mit probabilistischen Eigenschaften – ähnlich zu denen unseres Teilchens – sich ohne „Messung“ gar nicht erst entscheidet, welche der verschiedenen möglichen Eigenschaften das betrachte Objekt tatsächlich einnimmt; es befindet sich in einer *Superposition* aus den verschiedenen Möglichkeiten. Genauso können wir sagen, dass Φ zum Zeitpunkt 1 in einer Superposition der Positionen 0 und 1 ist.

Definition 3. Die Position eines Teilchen Φ sei vollständig charakterisiert durch eine Charakterisierungsfunktion $\psi : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \rightarrow [0; 1]$ mit

$$\forall x \in \mathbb{X} \quad \forall t \in \mathbb{T} : \quad P(\Phi \propto_t x) = \psi(x, t).$$

Korollar 1. Da es sich bei gegebenem t bei ψ um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung in x handelt, gilt

$$\sum_{x \in \mathbb{X}} \psi(x, t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Aufgrund von Korollar 1 betrachten wir von nun an bei einem gegebenen Zeitpunkt t_0 nur noch die Werte von ψ mit $\psi(x, t_0) \neq 0$. Alle anderen Werte seien dann implizit 0.

Wir wissen also, dass bei einer Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ eben $\psi(0, 0) = 1$, $\psi(0, 1) = \frac{1}{2}$ und $\psi(1, 1) = \frac{1}{2}$ gilt. Zum Zeitpunkt 2 sollte nun erwartungsgemäß $\psi(0, 2) = 0$ und $\psi(1, 2) = 1$ gelten, womit sich Φ in zwei Zeiteinheiten um eine Längeneinheit bewegt hat. Wir erinnern uns allerdings daran, dass wir durch ψ nur die Superpositionen verschiedener einzelner Bewegungen simulieren. Im Falle von $\Phi \propto_1 0$ bewegt sich Φ also zum Zeitpunkt 2 um eine Einheit weiter; bei $\Phi \propto_1 1$ bleibt es hingegen stehen. Die Gesetzmäßigkeiten für die Fortbewegung von Φ unterscheiden sich hier also

in beiden Fällen. Eine Grundvoraussetzung sei es allerdings, dass wir eindeutige Gesetze haben, die für alle Positionen und Zeitpunkte gleichermaßen gelten.

Dieses Problem könnte durch eine weitere Variable gelöst werden, die zum Zeitpunkt 1 variiert wird, je nach dem, ob sich bewegt wurde oder nicht. Diese könnte dann für den Zeitpunkt 2 zur Entscheidung zwischen Bewegen und Nichtbewegen genutzt werden. Wir entscheiden uns jedoch bewusst gegen eine solche Variable und betrachten dagegen die Folgerungen, die der Verzicht auf eine solche bietet.

Postulat 2. *Es sei ψ eine Charakterisierungsfunktion, für die beliebige Gesetzesmäßigkeiten gelten. Dann gelte für alle Charakterisierungsfunktionen ψ_0 und ψ_1 dieselben Gesetzesmäßigkeiten insofern sie*

$$\psi(x, t) = a \cdot \psi_0(x, t) + b \cdot \psi_1(x, t) \quad \forall x \in \mathbb{X} \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

mit $a, b \in [0, 1]$ und $a + b = 1$ erfüllen.

Wir können also unsere Funktion ψ in ψ_0 mit $\psi_0(0, 1) = 1$ und ψ_1 mit $\psi_1(1, 1) = 1$ für $a = b = \frac{1}{2}$ aufteilen. Es gilt unter Anwendung derselben Gesetzesmäßigkeiten, wie wir bei ψ verwendeten, für ψ_0 , dass $\psi_0(0, 2) = \frac{1}{2}$ und $\psi_0(1, 2) = \frac{1}{2}$ und für ψ_1 , dass $\psi_1(1, 2) = \frac{1}{2}$ und $\psi_1(2, 2) = \frac{1}{2}$.

Durch das gewichtete Summieren erhalten wir wiederum für ψ , dass $\psi(0, 2) = \frac{1}{4}$, $\psi(1, 2) = \frac{1}{2}$ und $\psi(2, 2) = \frac{1}{4}$. Der Erwartungswert der Position von Φ ist also immer noch bei $x = 1$; nur die Varianz hat sich durch Postulat 2 vergrößert.

Mittels mehrfachen Anwendens von Postulat 2 kann man ψ auch für die Zeitpunkte $t > 2$ bestimmen. Man wird erkennen, dass es sich bei ψ bei gegebenem t um eine Binomialverteilung mit Erwartungswert bei $x = \frac{1}{2}t$ handelt. Während sich also die Varianz von ψ immer weiter erhöht, bewegt sich der Erwartungswert exakt mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}$.

2.2.1 Allgemeine Geschwindigkeit

Für eine Geschwindigkeit v eines Teilchens muss gelten $|v| \leq 1$. Eine negative Geschwindigkeit könnte in diesem Kontext als Bewegung in negative x-Richtung aufgefasst werden, allerdings beschränken wir uns der Einfachheit auf den positiven Fall. Der negative Fall würde analog, nur mit anderen Vorzeichen, funktionieren, und ei-

ne Beachtung dessen würde die Komplexität der Gleichungen, nicht aber nicht die anzustrebende Einsicht erhöhen.

Naheliegender ist nun die Gesetzmäßigkeit, dass bei gegebenem $v \geq 0$, x_0 und t_0 mit $\psi(x_0, t_0) = 1$ gilt, dass $\psi(x_0, t_0 + 1) = 1 - v$ und $\psi(x_0 + 1, t_0 + 1) = v$. So befindet sich der Erwartungswert von ψ für $t = t_0 + 1$ bei $x = x_0 + v$. Innerhalb einer Zeiteinheit hat sich das Teilchen durchschnittlich also um v bewegt.

Durch mehrfache Anwendung von Postulat 2 erhält man die Rekursionsgleichung

$$\psi(x, t) = v \cdot \psi(x - 1, t - 1) + (1 - v) \cdot \psi(x, t - 1) \quad \forall t > t_0 \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Es lässt sich leicht beweisen, dass der Erwartungswert von ψ zum Zeitpunkt $t = t_0 + \Delta t$ genau $x = x_0 + v \cdot \Delta t$ ist. Durch diese Rekursionsgleichung ist also die Bewegung im eindimensionalen Fall vollständig beschrieben, weswegen wir uns nun der zweiten Dimension zuwenden.

2.3 Zweidimensionale Bewegungen

Ein zweidimensionaler, diskreter Raum könnte zum Beispiel durch $\mathbb{X} = \mathbb{Z}^2$ dargestellt werden. Ähnlich wie wir es im eindimensionalen Fall hatten, beschränken wir uns in dieser Arbeit der Übersichtlichkeit halber allerdings auf den 1. Quadranten, d.h. beide Komponenten einer Position seien positiv.

Es sei also $\mathbb{X} = \mathbb{N}^2$ und $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Neben der Geschwindigkeit $v \in [0; 1]$ muss nun für die Bewegung eines Teilchens ebenfalls eine Richtung $\theta \in [0; \tau/4]$ mit $\tau = 2\pi$ gegeben sein.

Betrachten wir nun zuerst den Fall $\theta = \tau/8 \hat{=} 45^\circ$. Außerdem gelte $\Phi \propto_0 (0, 0)$. Zum Zeitpunkt 1 kann Φ sich aufgrund unserer Grundvoraussetzung der maximalen Bewegung um eine Längeneinheit pro Zeitschritt nicht auf Position $(1, 1)$ befinden, was der geringsten, eindeutigen Bewegung im 45° -Winkel entspräche.

Bei einer Bewegung mit maximaler Geschwindigkeit befände sich Φ zum Zeitpunkt 1 in einer Superposition aus $(0, 1)$ und $(1, 0)$. Es gilt also $\psi((1, 0), 1) = \frac{1}{2}$ und $\psi((0, 1), 1) = \frac{1}{2}$.

Für ein allgemeines $\theta \in [0; \tau/4]$ können wir sagen $\psi((1, 0), 1) = \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}$ und $\psi((0, 1), 1) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}$. Der Erwartungswert der Position zum Zeitpunkt 1 ist damit $\left(\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}, \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)} \right)$. Der Winkel zur x-Achse ist also tatsächlich θ .

Geschwindigkeit können wir nun noch umsetzen, indem wir – analog zum eindimensionalen Fall – eine Bewegung der Geschwindigkeit v als Superposition aus gar keiner Bewegung und der maximalen Bewegung darstellen, gewichtet jeweils mit $1 - v$ und v . So erhalten wir $\psi((0,0),1) = 1 - v$, $\psi((1,0),1) = \frac{v \cdot \sin(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}$ und $\psi((1,0),1) = \frac{v \cdot \cos(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}$. Als Betrag des Erwartungswertes erhalten wir dann

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{v \cdot \sin(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}\right)^2 + \left(\frac{v \cdot \cos(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{v^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))}{(\sin(\theta) + \cos(\theta))^2}} = \frac{v}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}. \end{aligned}$$

Wir wollen allerdings nicht, dass die zurückgelegte Distanz am Erwartungswert gemessen von θ abhängt, da dies mit der Auffassung von Bewegungen in der Realität nicht übereinstimmt. Daher charakterisieren wir unser Teilchen durch $v_e := \frac{v}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}$. Da $v \leq 1$ sein muss, und

2.4 Die Unschärferelation

3 Perspektive

4 Anhang

4.1 Straightforwardness von Beweisen

Im Laufe der Arbeit wird mehrmals das englische Wort „straightforward“ verwendet, um die Auslassung von Beweisen zu begründen. Grob übersetzt bedeutet das Wort „trivial“ oder auch „geradlinig durchführbar“. Da ich das englische Wort als so treffend, jedwede deutsche Übersetzung jedoch für unpassend empfand, habe ich es wörtlich verwendet. Hier werde ich kurz erläutern, warum und in genau welchen Fällen ich mich dafür entschieden habe Beweise auszulassen.

Als *straightforward* bezeichne ich Beweise deren Herausforderung – wenn sie nicht sowieso trivial sind – nicht wie häufig in dem Finden einer kreativen bis zu genialen Idee liegt, sondern stattdessen in der Komplexität der Notation. Mathematische Notation ist stets nur der Annäherungsversuch an natürliche bzw. zugrundeliegende Wahrheiten oder Gesetzmäßigkeiten, die schwierig zu fassen sind. Manchmal wirken

daher Zusammenhänge durch die Verschleierung der Notation als nicht-trivial, obwohl sie aus anderen Blickwinkeln betrachtet naheliegend bis zu offensichtlich sind. Beispielhaft lässt sich die Kettenregel in der Analysis nennen, die in Differentialquotienten (Leibniz-Notation) dargestellt naheliegend scheint,

$$\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dz} = \frac{dy}{dz},$$

in der Lagrange-Notation dagegen nicht,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Des Weiteren ist der formale Beweis der Kettenregel mittels der h-Methode wesentlich komplizierter als das intuitive Verständnis des zugrundeliegenden Zusammenhangs, ohne jedoch weitere wesentliche Erkenntnis für letzteres zu bieten. Ich möchte nicht behaupten, dass ein genaues Studium diese Beweises überhaupt keine Erkenntnis bieten kann, sondern nur, dass diese Erkenntnis sehr verschlüsselt ist und durch ein anderes Medium wahrscheinlich besser vermittelt werden kann.

Keinesfalls möchte ich die Wichtigkeit von Beweisen per se bestreiten und, um mit gutem Gewissen die Wahrheit der in der Arbeit behandelten Sachverhalte behaupten zu können, habe ich jeden der nicht angeführten Beweise selbst ausgearbeitet. Das ist wichtig, denn oft fallen einem im Beweisprozess Ausnahmen und Einschränkungen der zu zeigenden Aussage auf, die man vorher unter Umständen übersehen hatte. Für wahrhaftige Vollständigkeit müsste wohl jeder der ausgelassenen Beweise elaboriert werden, damit unter voller mathematischer Strenge von der Wahrheit der zu beweisenden Aussagen ausgegangen werden kann.

In dieser Arbeit ist dies jedoch nicht das Ziel; stattdessen soll sie dem Leser einen direkteren Mehrwert bieten. Technische Termumformungen u.ä. ohne signifikante Erkenntnis beim erstmaligen Betrachten stören lediglich den Lesefluss sowie die Dichte von relevanter Information in der Arbeit – mit hoher Wahrscheinlichkeit würden sie in den meisten Fällen sowieso übersprungen werden. Nicht zuletzt auch noch wegen der Längenbeschränkung auf 12 Seiten, habe ich mich daher dazu entschlossen, diejenigen Beweise, die – in meinen Augen – straightforward sind, auszulassen.

4.2 Abbildungen

4.3 Literatur