

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KỸ THUẬT VÀ KHOA HỌC MÁY TÍNH



BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN
GIẢI TÍCH 1 - MT1003
ĐỀ TÀI: VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1
GVHD: THS. ĐÀO THỊ THANH XUÂN
NHÓM 05 – LỚP CN02KHM1 – HK251

DANH SÁCH THÀNH VIÊN

STT	Họ và Tên	MSSV	Điểm số	Chữ ký
1	Dương Gia Bảo	2410611		
2	Đinh Nhật Huy	2410824		
3	Phạm Thái Duy Bảo	2411715		
4	Trần Tuấn Kiệt	2410821		
5	Trần Thái Hòa	2551895		
6	Nguyễn Hoàng Minh Khang	2551900		
7	Đặng Nguyễn Thiên Phúc	2551919		
8	Cao Lê Khiết	2551902		

TP. Hồ Chí Minh, tháng 11 năm 2025

Mục lục

1	Khái niệm phương trình vi phân cấp 1.	3
1.1	Khái niệm phương trình vi phân cấp 1.	3
1.2	Nghiệm tổng quát.	3
1.3	Phương trình vi phân cấp 1.	3
2	Phương pháp giải.	3
2.1	Phương pháp giải.	3
2.2	Ví dụ.	4
3	Bài toán lãi suất đưa về phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.	4
3.1	Lý thuyết.	4
3.2	Dạng tổng quát.	5
3.3	Phương pháp giải.	5
4	Các dạng bài toán lãi suất	5
4.1	Trả góp đều / Rút tiền đều	6
4.2	Gửi tiền đều	6
4.3	Không gửi/rút thêm	6
5	Giải Bài tập	7
5.1	Bài 1	7
5.2	Bài 2	8
5.3	Bài 3	9
5.4	Bài 4	10
5.5	Bài 5	11
5.6	Bài 6	12
5.7	Bài 7	13
5.8	Bài 8	14
5.9	Bài 9	15
5.10	Bài 10	16
5.11	Bài 11	17
5.12	Bài 12	18

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, chúng em xin cảm ơn khoa Kỹ thuật và Khoa học Máy tính, Trường Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia TP.HCM đã đưa bộ môn Giải tích 1 vào chương trình giảng dạy và kế hoạch học tập của chúng em, trong thời gian học môn này, chúng em đã học được rất nhiều kiến thức bổ ích, thiết thực trong thực tế cũng như cho quá trình học tập sau này của chúng em. Chúng em cũng xin gửi lời cảm ơn đến cô Đào Thị Thanh Xuân đã tận tình giảng dạy trong thời gian học tập trên lớp của cô quả thực rất chất lượng và góp phần rất lớn trong quá trình giúp chúng em hoàn thành bài báo cáo bài tập lớn lần này.

Tuy nhiên, vì vốn kiến thức còn hạn hẹp cũng như khả năng vận dụng còn hạn chế nên chúng em không thể tránh khỏi những sai sót không đáng có trong quá trình thực hiện bài tập cũng như soạn nên bài báo cáo này. Vì vậy chúng em cũng kính mong cô xem xét, đánh giá và góp ý để chúng em có thể thực hiện tốt hơn ở các bài tập lớn sau. Chúng em xin trân trọng cảm ơn.

NỘI DUNG CHÍNH

1 Khái niệm phương trình vi phân cấp 1.

1.1 Khái niệm phương trình vi phân cấp 1.

Phương trình vi phân là phương trình chứa đạo hàm cấp 1 hoặc vi phân cấp 1 của 1 hoặc vài hàm cần tìm.

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1 là:

$$F(x, y, y') = 0$$

1.2 Nghiệm tổng quát.

Nghiệm tổng quát của của phương trình vi phân cấp một $F(x, y, y') = 0$ là biểu thức tổng quát của tập hợp vô hạn các hàm, thỏa mãn phương trình vi phân. Có thể được xác định ở dạng tường minh $y = F(x, C)$ hoặc dạng ẩn $\Phi(x, y, C) = 0$ với C là hằng số tùy ý.

Nghiệm của phương trình vi phân tương ứng với một giá trị C cụ thể được gọi là nghiệm riêng. Nghiệm của phương trình vi phân không tương ứng với một giá C cụ thể nào được gọi là nghiệm kỳ dị. Thường xuất hiện ở điểm đặc biệt hoặc giới hạn của nghiệm tổng quát.

1.3 Phương trình vi phân cấp 1.

Phương trình vi phân có dạng:

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

Gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Trong đó $P(x)y$ và $Q(x)$ là các hàm liên tục.

Nếu $Q(x) = 0$ thì phương trình được gọi là **phương trình thuần nhất**.

Nếu $Q(x) \neq 0$ thì phương trình được gọi là **phương trình không thuần nhất**.

2 Phương pháp giải.

2.1 Phương pháp giải.

Bước 1: Tìm biểu thức $A(x) = e^{-\int P(x) dx}$.

Bước 2: Tìm biểu thức $B(x) = \int \frac{Q(x)}{A(x)} dx$.

Bước 3: Nghiệm tổng quát là $y = A(x)[B(x) + C]$.

2.2 Ví dụ.

Giải phương trình $y' + \frac{1}{x}y = 3x$ với điều kiện $y(1) = 1$.

Ta có:

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = 3x$$

Tính:

$$A(x) = e^{-\int P(x) dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

$$B(x) = \int \frac{Q(x)}{A(x)} dx = \int 3x \cdot x dx = \int 3x^2 dx = x^3$$

Nghiệm tổng quát:

$$y = A(x)[B(x) + C] = \frac{1}{x}(x^3 + C)$$

Áp dụng điều kiện ban đầu $x = 1, y = 1$:

$$1 = \frac{1}{1}(1^3 + C) \Rightarrow C = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$y = x^2$$

3 Bài toán lãi suất đưa về phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

3.1 Lý thuyết.

Giả sử số tiền $A(t)$ tăng trưởng theo lãi suất liên tục r trong khoảng thời gian rất nhỏ dt . Khi đó, số tiền tăng thêm là:

$$dA = rA(t) dt$$

Giả sử có thêm một hàm $f(t)$ biểu diễn dòng tiền vào hoặc ra tại thời điểm t . Khi đó, phương trình vi phân mô tả sự thay đổi của số tiền là:

$$\frac{dA}{dt} = rA(t) - f(t)$$

Tương đương, ta có phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất:

$$A'(t) - rA(t) = -f(t)$$

3.2 Dạng tổng quát.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp một có dạng:

$$y'(t) + P(t)y(t) = Q(t)$$

Trong bài toán tài chính, ta có:

- $y(t) = A(t)$: số tiền hoặc số dư nợ
- $P(t) = -r$: hệ số lãi suất (hằng số hoặc hàm theo thời gian)
- $Q(t) = -f(t)$: dòng tiền vào/ra

Do đó, mọi bài toán lãi suất liên tục đều đưa về dạng tuyến tính cấp một.

3.3 Phương pháp giải.

Xét phương trình:

$$A'(t) - rA(t) = -f(t)$$

Nhân cả hai vế của phương trình với nhân tử tích phân $e^{\int P(t) dt} = e^{-rt}$, ta được:

$$e^{-rt}A'(t) - re^{-rt}A(t) = -f(t)e^{-rt}$$

Nhận thấy vế trái là đạo hàm của tích:

$$(A(t)e^{-rt})' = -f(t)e^{-rt}$$

Lấy tích phân hai vế:

$$A(t)e^{-rt} = -\int f(t)e^{-rt} dt + C$$

Suy ra nghiệm tổng quát:

$$A(t) = e^{rt} \left(C - \int f(t)e^{-rt} dt \right)$$

4 Các dạng bài toán lãi suất

Giả sử $f(t)$ là một hằng số K .

Điều kiện ban đầu:

$$A(0) = e^{r \cdot 0} \left(C - \int f(t)e^{-rt} dt \right) = Ce^{r \cdot 0} = \frac{e^{r \cdot 0}K}{e^{r \cdot 0}r} = C - \frac{K}{r}$$

Suy ra:

$$C = A(0) + \frac{K}{r}$$

4.1 Trả góp đều / Rút tiền đều

Với $f(t) = K$, ta có phương trình vi phân:

$$A'(t) = rA(t) - K$$

Nghiệm tổng quát:

$$A(t) = \frac{K}{r} + \left(A_0 - \frac{K}{r} \right) e^{rt}$$

4.2 Gửi tiền đều

Nếu mỗi tháng hoặc mỗi năm gửi vào ngân hàng một khoản đều đặn K , ta có phương trình vi phân:

$$A'(t) = rA(t) + K$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$A(t) = -\frac{K}{r} + \left(A_0 + \frac{K}{r} \right) e^{rt}$$

4.3 Không gửi/rút thêm

Khi $f(t) = 0$, tức là không có dòng tiền vào hoặc ra, ta có phương trình:

$$A'(t) = rA(t)$$

Nghiệm tổng quát:

$$A(t) = A(0) \cdot e^{rt}$$

5 Giải Bài tập

5.1 Bài 1

Đề bài. Tháng 6/2019, ông A mua trả góp 1 chiếc Ti Vi 4k trị giá 45 triệu đồng. Biết lãi suất trả góp là 1% mỗi tháng. Biết mỗi tháng ông A trả 2 triệu. Hãy xác định thời điểm ông A trả góp xong?

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là số tiền ông A còn nợ sau t (tháng).

R là lãi suất trả góp mỗi tháng.

M là số tiền ông A trả mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền ông A nợ theo t :

$$\frac{dS}{dt} = r \times S(t) - M$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.01 \times S(t) - 2 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.01 \times S(t) = -2 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.01 \times t})' dt = \int (-2 \times 10^6 \times e^{-0.01 \times t}) dt$$

$$\Rightarrow S(t) \times e^{-0.01 \times t} = 2 \times 10^8 \times e^{-0.01 \times t} + C$$

$$\Rightarrow S(t) = 2 \times 10^8 + C \times e^{0.01 \times t}$$

$$S(0) = 45 \times 10^6 \Rightarrow C = -155 \times 10^6$$

$$S(t_0) = 0 \Rightarrow 0 = 2 \times 10^8 - 155 \times 10^6 \times e^{0.01 \times t_0}$$

$$\Rightarrow t_0 \approx 25,4892 \text{ tháng}$$

Vậy thời điểm ông A trả góp xong là tháng 8/2021.

5.2 Bài 2

Đề bài. Tháng 2/2019, bà T mua trả góp 1 xe máy tay ga có giá 62 triệu đồng. Bà T trả ngay 16 triệu, phần còn lại bà T trả góp với lãi suất 1.5% mỗi tháng. Biết mỗi tháng bà T trả 1 triệu. Hãy tính thời gian bà T cần để trả hết tiền mua xe?

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là số tiền bà T còn nợ sau t (tháng).

R là lãi suất trả góp mỗi tháng.

M là số tiền bà T trả mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền bà T nợ theo t :

$$\frac{dS}{dt} = r \times S(t) - M$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.015 \times S(t) - 1 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.015 \times S(t) = -1 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.015 \times t})' dt = \int (-10^6 \times e^{-0.015 \times t}) dt$$

$$\Rightarrow S(t) \times e^{-0.015 \times t} = 10^8 \times e^{-0.015 \times t} + C$$

$$\Rightarrow S(t) = 10^8 + C \times e^{0.015 \times t}$$

$$S(0) = 46 \times 10^6 \Rightarrow C = -\frac{62}{3} \times 10^6$$

$$S(t_0) = 0 \Rightarrow 0 = 10^8 - \frac{62}{3} \times 10^6 \times e^{0.015 \times t_0}$$

$$\Rightarrow t_0 \approx 78,07 \text{ tháng}$$

Vậy thời điểm bà T cần trả góp xong là 79 tháng.

5.3 Bài 3

Đề bài. Đầu năm 2019 ông A mua một căn hộ chung cư có giá 2.2 tỷ. Vì không đủ tiền trả nên ông A đề nghị bên bán cho ông trả trước một phần tiền (gọi là P_0), phần còn lại ông A vay vốn ngân hàng với lãi suất 12% một năm trả trong vòng 15 năm. Biết mỗi tháng ông A trả 20 triệu đồng. Hãy tính P_0 ?

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là số tiền ông A còn nợ sau t (năm).

R là lãi suất trả góp mỗi năm.

M là số tiền ông A trả mỗi năm.

$$M = 12 \times 2 \times 10^7 = 24 \times 10^7$$

Tốc độ thay đổi của số tiền ông A nợ theo t :

$$\frac{dS}{dt} = r \times S(t) - M$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.12 \times S(t) - 24 \times 10^7$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.12 \times S(t) = -24 \times 10^7$$

$$\Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.12 \times t})' dt = \int (-24 \times 10^7 \times e^{-0.12 \times t}) dt$$

$$\Rightarrow S(t) \times e^{-0.12 \times t} = 2 \times 10^9 \times e^{-0.12 \times t} + C$$

$$\Rightarrow S(t) = 2 \times 10^9 + C \times e^{0.12 \times t}$$

$$S(15) = 0 \Rightarrow C = -2 \times 10^9 \times e^{-1.8}$$

$$\text{Số tiền ban đầu: } S(0) = 2 \times 10^9 - 2 \times 10^9 \times e^{-1.8}$$

$$\text{Số tiền phải trả trước: } P_0 = 2.2 \times 10^9 - S(0) = 530,597,776 \text{ đồng}$$

5.4 Bài 4

Đề bài. Bạn H mua trả góp một chiếc điện thoại Iphone XS Max có giá 27 triệu đồng tại một cửa hàng với lãi suất là 0.8% một tháng và trả mỗi tháng 1 triệu trong vòng 18 tháng. Biết bạn H trả trước một phần tiền (gọi là P_0). Hãy tính P_0 ?

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là số tiền bạn H còn nợ sau t (tháng).

R là lãi suất trả góp mỗi tháng.

M là số tiền bạn H trả mỗi tháng.

P_0 là phần tiền bạn H trả trước.

Tốc độ thay đổi của số tiền bạn H nợ theo t :

$$\frac{dS}{dt} = r \times S(t) - M$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.008 \times S(t) - 10^6$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.008 \times S(t) = -10^6$$

$$\Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.008 \times t})' dt = \int (-10^6 \times e^{-0.008 \times t}) dt$$

$$\Rightarrow S(t) \times e^{-0.008 \times t} = 125 \times 10^6 \times e^{-0.008 \times t} + C$$

$$\Rightarrow S(t) = 125 \times 10^6 + C \times e^{0.008 \times t}$$

$$S(0) = 27 \times 10^6 - P_0$$

$$\Rightarrow 27 \times 10^6 - P_0 = 125 \times 10^6 + C \times e^{0.008 \times 0}$$

$$\Rightarrow C = 27 \times 10^6 - P_0 - 125 \times 10^6$$

$$S(18) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 125 \times 10^6 + (27 \times 10^6 - P_0 - 125 \times 10^6) \times e^{0.008 \times 18}$$

$$P_0 \approx 10,235,969 \text{ (đồng)}$$

5.5 Bài 5

Đề bài. Tháng 1/2019 ông C mua trả góp 1 chiếc xe máy có giá 42 triệu với lãi suất 1% / tháng. Hãy tính số tiền ông C phải trả mỗi tháng nếu ông C trả góp trong 18 tháng.

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là số tiền ông C còn nợ sau t (tháng).

R là lãi suất trả góp mỗi tháng.

M là số tiền ông C trả mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền ông C nợ theo t :

$$\frac{dS}{dt} = r \times S(t) - M$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.01 \times S(t) - M$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.01 \times S(t) = -M$$

$$\Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.01 \times t})' dt = \int (-M \times e^{-0.01 \times t}) dt$$

$$\Rightarrow S(t) \times e^{-0.01 \times t} = 100 \times M \times e^{-0.01 \times t} + C$$

$$\Rightarrow S(t) = 100 \times M + C \times e^{0.01 \times t}$$

$$\begin{cases} S(0) = 100 \times M + C = 42 \times 10^6 \\ S(18) = 100 \times M + C \times e^{0.01 \times 18} = 0 \end{cases}$$

$$C \approx -212,962,993$$

$$M \approx 2,549,629 \text{ đồng}$$

Vậy mỗi tháng ông C phải trả 2,549,629 đồng.

5.6 Bài 6

Đề bài. Tháng 1/2019 bà A gửi tiết kiệm một khoản tiền 100 triệu với lãi suất 0.4%/ tháng. Mỗi tháng bà A rút 2 triệu đồng để chu cấp cho cháu nội còn nhỏ. Hãy tính thời gian tối đa bà A có thể chu cấp cho cháu mình từ khoản tiền gửi trên?

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là số tiền bà A còn sau t (tháng).

R là lãi suất của tiết kiệm mỗi tháng.

M là số tiền bà A rút mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền bà A còn theo t :

$$\frac{dS}{dt} = r \times S(t) - M$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.004 \times S(t) - 2 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.004 \times S(t) = -2 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.004 \times t})' dt = \int (-2 \times 10^6 \times e^{-0.004 \times t}) dt$$

$$\Rightarrow S(t) \times e^{-0.004 \times t} = 5 \times 10^8 \times e^{-0.004 \times t} + C$$

$$\Rightarrow S(t) = 5 \times 10^8 + C \times e^{0.004 \times t}$$

$$S(0) = 10^8$$

$$\Rightarrow 10^8 = 5 \times 10^7 + C \times e^{0.004 \times 0}$$

$$\Rightarrow C = 5 \times 10^7$$

$$\Rightarrow S(t) = 5 \times 10^7 + 5 \times 10^7 \times e^{0.004 \times t}$$

Thời gian tối đa mà bà A có thể chu cấp cho cháu:

$$S(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 5 \times 10^7 + C \times e^{0.004 \times t_0}$$

$$\Rightarrow t_0 \approx 55,78 \text{ (tháng)}$$

$$\text{Lấy } t_0 = 55$$

Vậy thời gian mà bà A có thể chu cấp cho cháu mình là tới tháng 7/2024.

5.7 Bài 7

Đề bài. Để lập kế hoạch mua nhà riêng, anh K mở sổ tiết kiệm 100 triệu tại ngân hàng với lãi suất huy động cố định là 6%/ năm. Mỗi tháng anh K gửi vào sổ tiết kiệm của mình 10 triệu đồng. Hãy tính thời gian tối thiểu anh K cần để có thể mua được căn nhà có giá 1.5 tỷ đồng?

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là số tiền anh K tiết kiệm được sau t (năm).

R là lãi suất huy động mỗi năm.

M là số tiền tiết kiệm anh K gửi vào mỗi năm.

$$M = 12 \times 10^7$$

Tốc độ thay đổi của số tiền anh K tiết kiệm theo t :

$$\frac{dS}{dt} = r \times S(t) + M$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.06 \times S(t) + 12 \times 10^7$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.06 \times S(t) = 12 \times 10^7$$

$$\Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.06 \times t})' dt = \int (12 \times 10^7 \times e^{-0.06 \times t}) dt$$

$$\Rightarrow S(t) \times e^{-0.06 \times t} = -2 \times 10^9 \times e^{-0.06 \times t} + C$$

$$\Rightarrow S(t) = -2 \times 10^9 + C \times e^{0.06 \times t}$$

$$S(0) = 10^8 \Rightarrow C = 21 \times 10^8$$

$$S(t_0) = 1.5 \times 10^9 = -2 \times 10^9 + 21 \times 10^8 \times e^{0.06 \times t_0}$$

$$\Rightarrow t_0 \approx 8.51376 \approx 9 \text{ năm}$$

$$\frac{dS}{dt} = r \times S(t) + M$$

$$\frac{dS}{dt} = 0.06 \times S(t) + 12 \times 10^7$$

$$\frac{dS}{dt} - 0.06 \times S(t) = 12 \times 10^7$$

Nhân cả hai vế với $e^{-0.06t}$:

$$(S(t) \times e^{-0.06t})' = 12 \times 10^7 \times e^{-0.06t}$$

$$S(t) \times e^{-0.06t} = -2 \times 10^9 \times e^{-0.06t} + C$$

$$S(t) = -2 \times 10^9 + C \times e^{0.06t}$$

Với điều kiện ban đầu $S(0) = 10^8$:

$$C = 21 \times 10^8$$

Khi $S(t_0) = 1.5 \times 10^9$:

$$1.5 \times 10^9 = -2 \times 10^9 + 21 \times 10^8 \times e^{0.06t_0}$$
$$t_0 = 8.51376 \approx 9 \text{ năm}$$

5.8 Bài 8

Đề bài. Đầu năm 2019 ông C mua trả góp 1 chiếc ô tô với giá 680 triệu đồng trong 60 tháng. Hãy tính lãi suất theo năm ông phải trả biết lãi ghép hàng tháng và mỗi tháng ông C phải trả 12 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là số tiền ông C còn phải trả sau t (tháng).

R là lãi suất trả góp mỗi tháng.

M là số tiền ông C trả mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền ông C phải trả theo t :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= r \times S(t) - M \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= r \times S(t) - 12 \times 10^6 \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} - r \times S(t) &= -12 \times 10^6 \\ \Rightarrow \int (S(t) \times e^{-r \times t})' dt &= \int (-12 \times 10^6 \times e^{-r \times t}) dt \\ \Rightarrow S(t) \times e^{-r \times t} &= \frac{12 \times 10^6}{r} \times e^{-r \times t} + C \\ \Rightarrow S(t) &= \frac{12 \times 10^6}{r} + C \times e^{r \times t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(0) &= 680 \times 10^6 \\ \Rightarrow 680 \times 10^6 &= \frac{12 \times 10^6}{r} + C \times e^{r \times 0} \\ \Rightarrow C &= 680 \times 10^6 - \frac{12 \times 10^6}{r} \\ \Rightarrow S(t) &= \frac{12 \times 10^6}{r} + \left(680 \times 10^6 - \frac{12 \times 10^6}{r}\right) \times e^{r \times t} \\ S(60) &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \frac{12 \times 10^6}{r} + \left(680 \times 10^6 - \frac{12 \times 10^6}{r}\right) \times e^{r \times 60} \\ \Rightarrow r &\approx 0,0019 = 0.19\% \text{ (lãi suất theo tháng)} \\ \text{Lãi suất theo năm:} \\ 12 \times \ln(1 + r_t) &= r_n \\ \Rightarrow 12 \times \ln(1 + 0.19\%) &\approx 2.27\% \\ \text{Vậy lãi suất theo năm ông phải trả là } 2.27\%.\end{aligned}$$

5.9 Bài 9

Đề bài. Một công ty Bảo hiểm nhân thọ cung cấp sản phẩm cho trẻ dưới 18 tuổi như sau: khách hàng tham gia bảo hiểm mỗi năm đóng 15 triệu, lãi suất cố định là 3%/ năm đến 18 tuổi, lãi ghép hàng năm, hết hạn hợp đồng khách hàng nhận lại toàn bộ số tiền đã đóng và tiền lãi. Bà A mua cho con trai 6 tuổi gói bảo hiểm trên. Hãy tính số tiền con trai bà A nhận được khi kết thúc hợp đồng bảo hiểm?

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là tổng số tiền bà A đã đóng và tiền lãi sau t (năm).

R là lãi suất ghép hàng năm.

M là số tiền tiết kiệm bà A đóng mỗi năm.

Tốc độ thay đổi của tổng số tiền theo t :

$$\frac{dS}{dt} = r \times S(t) + M$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.03 \times S(t) + 15 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.03 \times S(t) = 15 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.03 \times t})' dt = \int (15 \times 10^6 \times e^{-0.03 \times t}) dt$$

$$\Rightarrow S(t) \times e^{-0.03 \times t} = -5 \times 10^8 \times e^{-0.03 \times t} + C$$

$$\Rightarrow S(t) = -5 \times 10^8 + C \times e^{0.03 \times t}$$

$$S(0) = 0 \Rightarrow C = 5 \times 10^8$$

$$t_0 = 18 - 6 = 12$$

$$S(t_0) = S(12) = -5 \times 10^8 + 5 \times 10^8 \times e^{0.03 \times 12} \approx 216,664,707 \text{ đồng}$$

5.10 Bài 10

Đề bài. Một công ty Bảo hiểm nhân thọ cung cấp sản phẩm cho trẻ dưới 18 tuổi như sau: khách hàng tham gia bảo hiểm mỗi năm đóng 15 triệu, lãi suất cố định là 3%/ năm đến 18 tuổi, lãi ghép hàng năm, hết hạn hợp đồng khách hàng nhận lại toàn bộ số tiền đã đóng và tiền lãi. Bà A mua cho con trai gói bảo hiểm trên. Biết cuối năm 2018 con bà A đã nhận số tiền sau khi kết thúc hợp đồng bảo hiểm là 150 triệu đồng. Hãy tính xác định năm bà A tham gia bảo hiểm?

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là số tiền con bà A đang có theo t (năm).

R là lãi suất tham gia bảo hiểm mỗi năm.

M là số tiền bà A trả mỗi năm.

Tốc độ thay đổi của số tiền con bà A nhận được theo t :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= r \times S(t) + M \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= r \times S(t) + 15 \times 10^6 \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.03 \times S(t) &= 15 \times 10^6 \\ \Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.03 \times t})' dt &= \int (15 \times 10^6 \times e^{-0.03 \times t}) dt \\ \Rightarrow S(t) \times e^{-0.03 \times t} &= -\frac{15 \times 10^6}{0.03} \times e^{-0.03 \times t} + C \\ \Rightarrow S(t) &= -\frac{15 \times 10^6}{0.03} + C \times e^{0.03 \times t}\end{aligned}$$

$$S(0) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{15 \times 10^6}{0.03} + C \times e^{0.03 \times 0}$$

$$\Rightarrow C = \frac{15 \times 10^6}{0.03}$$

$$\Rightarrow S(t) = -\frac{15 \times 10^6}{0.03} + \frac{15 \times 10^6}{0.03} \times e^{0.03 \times t}$$

$$S(t_0) = 150 \times 10^6$$

$$\Rightarrow 150 \times 10^6 = -\frac{15 \times 10^6}{0.03} + \frac{15 \times 10^6}{0.03} \times e^{0.03 \times t_0}$$

$$\Rightarrow t_0 \approx 8.75 \text{ (năm)}$$

Vậy năm bà A tham gia Bảo hiểm là 2009.

5.11 Bài 11

Đề bài. Ông T vay vốn ngân hàng để làm trang trại. Lãi suất vay cố định là 3.6%/quý. Lãi ghép hàng tháng. Mỗi tháng ông T đều trả 22 triệu đồng. Đúng 3 năm sau thì ông trả hết khoản vay trên và tắt toán hợp đồng vay. Hãy tính số tiền ông T đã vay?

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là số tiền ông T còn nợ sau t (tháng).

R là lãi suất vay mỗi tháng.

M là số tiền ông T trả mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền ông T nợ theo t :

$$\frac{dS}{dt} = r \times S(t) - M$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.036 \times S(t) - 22 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.036 \times S(t) = -22 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.036 \times t})' dt = \int (-22 \times 10^6 \times e^{-0.036 \times t}) dt$$

$$\Rightarrow S(t) \times e^{-0.036 \times t} = \frac{11}{18} \times 10^9 \times e^{-0.036 \times t} + C$$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{11}{18} \times 10^9 + C \times e^{0.036 \times t}$$

$$t_0 = 3 \times 12 = 36 \text{ tháng}$$

$$S(36) = 0 \Rightarrow C = -\frac{11}{18} \times 10^9 \times e^{-1.296}$$

$$S(0) = \frac{11}{18} \times 10^9 - \frac{11}{18} \times 10^9 \times e^{-1.296} \times e^{0.036 \times 0} \approx 443,896,381 \text{ đồng}$$

5.12 Bài 12

Đề bài. Để đáp ứng nhu cầu vốn kinh doanh, tháng 2/2019 công ty A huy động các nhân viên cho vay 4.5 tỷ đồng với lãi suất 1.5%/ tháng, lãi ghép hàng tháng. Mỗi tháng công ty trích từ doanh thu ra 230 triệu để trả lại cho các nhân viên. Hãy xác định thời điểm mà công ty hoàn trả hết tiền cho nhân viên?

Lời giải.

Gọi $S(t)$ là số tiền còn nợ của nhân viên (tháng).

R là lãi suất cho vay mỗi tháng.

M là số tiền công ty trả cho khoản vay mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền còn nợ theo t :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= r \times S(t) - M \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= 0.015 \times S(t) - 230 \times 10^6 \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.015 \times S(t) &= -230 \times 10^6 \\ \Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.015 \times t})' dt &= \int (-230 \times 10^6 \times e^{-0.015 \times t}) dt \\ \Rightarrow S(t) \times e^{-0.015 \times t} &= \frac{230 \times 10^6}{0.015} \times e^{-0.015 \times t} + C \\ \Rightarrow S(t) &= \frac{230 \times 10^6}{0.015} + C \times e^{0.015 \times t} \\ S(0) &= 4.5 \times 10^9 \\ \Rightarrow 4.5 \times 10^9 &= \frac{230 \times 10^6}{0.015} + C \times e^{0.015 \times 0} \\ \Rightarrow C &= 4.5 \times 10^9 - \frac{230 \times 10^6}{0.015} \\ \Rightarrow S(t) &= \frac{230 \times 10^6}{0.015} + \left(4.5 \times 10^9 - \frac{230 \times 10^6}{0.015}\right) \times e^{0.015 \times t} \\ S(t_0) &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \frac{230 \times 10^6}{0.015} + \left(4.5 \times 10^9 - \frac{230 \times 10^6}{0.015}\right) \times e^{0.015 \times t_0} \\ \Rightarrow t_0 &\approx 23.16 \text{ (tháng)}\end{aligned}$$

Vậy công ty mất khoảng 24 tháng để hoàn trả hết tiền cho nhân viên.

Quy đổi lãi suất:

A: Tiền gốc ban đầu.

Lãi kép tháng \Rightarrow lãi liên tục năm:

$$\begin{aligned}A(1 + r_{\text{tháng}})^{12} &= Ae^{r_{\text{năm}}} \\ \Rightarrow 12 \ln(1 + r_{\text{tháng}}) &= r_{\text{năm}}\end{aligned}$$

Lãi kép năm \Rightarrow lãi liên tục tháng:

$$A(1 + r_{\text{năm}}) = Ae^{12 \times r_{\text{tháng}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1 + r_{\text{năm}})}{12} = r_{\text{tháng}}$$