ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

BÀI TẬP LỚN

GIẢI TÍCH 1 – MT1003

ĐỀ TÀI: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TÁCH BIẾN

Giảng viên hướng dẫn: **TS. Đào Huy Cường**
Lớp: L12: **Nhóm: 10**

Danh sách thành viên

Sinh viên thực hiện	MSSV	Điểm số	Chữ ký
Lương Hải Phong	2412640		
Bùi Tấn Đạt	2410653		
Trần Doãn Ngọc	2412303		
Nguyễn Văn Phú	2412678		
Nguyễn Gia Hưng	2411359		
Nguyễn Thiên Đức	2410821		
Trần Nhật Quang	2412859		

TP. Hồ Chí Minh, tháng 11/2024

NHẬN XÉT CỦA GIẢNG VIÊN

BẢNG PHÂN CÔNG VÀ ĐÁNH GIÁ VIỆC HOÀN THÀNH CÔNG VIỆC

HỌ VÀ TÊN	MSSV	NHIỆM VỤ	NHẬN XÉT
Lương Hải Phong	2412640	Soạn Latex	
Nguyễn Thiên Đức	2410821	Soạn Latex	
Bùi Tấn Đạt	2410653	Nội dung lí thuyết	
Trần Doãn Ngọc	2412303	Giải bài tập	
Nguyễn Văn Phú	2412678	Giải bài tập	
Nguyễn Gia Hưng	2411359	Kiểm tra bài tập và lập trình MatLab	
Trần Nhật Quang	2412859	Làm Canva thuyết trình	

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, chúng em xin cảm ơn khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa- Đại học Quốc gia TP.HCM đã đưa bộ môn Giải tích 1 vào chương trình giảng dạy và kế hoạch học tập của chúng em, trong thời gian học môn này, chúng em đã học được rất nhiều kiến thức bổ ích, thiết thực trong thực tế cũng như cho quá trình học tập sau này của chúng em. Chúng em cũng xin gửi lời cảm ơn đến thầy Đào Huy Cường đã tận tình giảng dạy, cũng như giải đáp các vấn đề thắc mắc của nhóm em, thời gian học tập trên lớp của thầy quả thực rất chất lượng và góp phần rất lớn trong quá trình giúp chúng em hoàn thành bài báo cáo bài tập lớn lần này.

Tuy nhiên, vì vốn kiến thức còn hạn hẹp cũng như khả năng vận dụng còn hạn chế nên chúng em không thể tránh khỏi những sai sót không đáng có trong quá trình thực hiện bài tập cũng như soạn nên bài báo cáo này. Vì vậy chúng em cũng kính mong thầy xem xét, đánh giá và góp ý để chúng em có thể thực hiện tốt hơn ở các bài tập lớn sau.

Chúng em xin trân trọng cảm ơn.

PHẦN MỞ ĐẦU

Phương trình vi phân tách biến (Separable Equations) là một loại phương trình vi phân cấp 1 có thể giải thông qua phương pháp tách biến, tức là tách các ẩn số (biến) của phương trình ban đầu vào hai vế sao cho mỗi vế chứa một biến độc lập.

Kĩ thuật giải phương trình vi phân tách biến này được sử dụng đầu tiên bởi **James Bernoulli** (năm 1960) khi giải một bài toán về con lắc và **Leibniz** (trong một lá thư gửi tới **Huygens** vào năm 1961). Sau này, **John Bernoulli** đã giải thích phương pháp chung về phương trình này trong một bài báo xuất bản vào năm 1964.

Phương trình vi phân tách biến thường được biểu diễn dưới dạng:

$$g(x)\,dx + f(y)\,dy = 0 \tag{1}$$

hoặc

$$g(x)h(y)\,dx + f(x)q(y)\,dy = 0 \tag{2}$$

hoặc

$$y' = f(x)g(y) \tag{3}$$

NỘI DUNG CHÍNH

1 Khái niệm phương trình vi phân tách biến

Khái niệm

Phương trình vi phân tách biến (Separable Equations) là một loại phương trình vi phân cấp 1 có thể giải thông qua phương pháp tách biến, tức là tách các ẩn số (biến) của phương trình ban đầu vào hai vế sao cho mỗi vế chứa một biến độc lập.

Phương trình vi phân tách biến là phương trình vi phân bậc nhất trong đó biểu thức của dy/dx có thể được phân tích thành hàm số có chứa biến x nhân với hàm số có chứa biến y. Nói cách khác, ta có thể biểu diễn nó dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

Cái tên tách biến xuất phát từ thực tế ta có thể tách biểu thức bên vế phải thành một hàm của x và một hàm của y. Tương đương, nếu $f(y) \neq 0$ chúng ta có thể viết dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Với *h(y)=1/f(y)*.

Để giải phương trình này, ta viết lại nó ở dạng vi phân

$$h(y)dy = g(x)dx$$

sao cho tất cả các thành phần có chứa y đều nằm ở một vế của phương trình và các thành phần có chứa x đều nằm ở vế bên kia. Sau đó, chúng ta đi lấy tích phân cả hai vế của phương trình:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx \qquad (*)$$

Phương trình (*) xác định y một cách ngầm định như một hàm của x. Trong một số trường hợp thì chúng ta có thể giải phương trình để tìm ra y theo x.

Chúng ta sử dụng Quy tắc Mắc xích để biện luận cho quá trình này: Nếu h và g thỏa mãn (*), thì

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$\Rightarrow h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Tóm lại, để giải phương trình vi phân tách biến, ta thực hiện hai bước chính: đầu tiên, tách riêng các biến x và y vào hai vế trái và phải của phương trình, sau đó chúng ta tiến hành tích phân cả hai vế của phương trình.

2 Một vài ví dụ về phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 1: Giải phương trình vi phân

$$2 \cdot \frac{y'}{x} = 3x^3 - 2$$

Giải

$$\begin{aligned}
2 \cdot \frac{y'}{x} &= 3x^3 - 2 \\
\Rightarrow 2y' &= 3x^4 - 2x \\
\Rightarrow 2\frac{dy}{dx} &= 3x^4 - 2x \\
\Rightarrow 2dy &= (3x^4 - 2x)dx \\
\Rightarrow \int dy &= \frac{1}{2}\int (3x^4 - 2x)dx \\
\Rightarrow y &= \frac{3}{10}x^5 - \frac{x^2}{2} + C
\end{aligned}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình vi phân

$$5yy' = 6x^3 - x$$

Giải

$$\begin{aligned}
5yy' &= 6x^3 - x \\
\Rightarrow\ 5y\frac{dy}{dx} &= 6x^3 - x \\
\Rightarrow\ \int 5y dy &= \int (6x^3 - x)dx \\
\Rightarrow\ \frac{5}{2}y^2 &= \frac{3}{2}x^4 - \frac{x^2}{2} + C \\
\Rightarrow\ y &= \frac{\sqrt{15}}{5}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}x + C
\end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân

$$2 \cdot \frac{y'}{x} = 3x^3 - 2,\ \text{ biết } y(1) = 0$$

Giải

$$\begin{aligned}
2 \cdot \frac{y'}{x} &= 3x^3 - 2 \\
\Rightarrow\ 2y' &= 3x^4 - 2x \\
\Rightarrow\ 2\frac{dy}{dx} &= 3x^4 - 2x \\
\Rightarrow\ 2dy &= (3x^4 - 2x)dx \\
\Rightarrow\ \int dy &= \frac{1}{2}\int (3x^4 - 2x)dx \\
\Rightarrow\ y &= \frac{3}{10}x^5 - \frac{x^2}{2} + C \\
\text{Ta có: }\ y(1) &= \frac{3}{10} \cdot 1 - \frac{1}{2} + C = 0 \\
\Rightarrow\ C &= \frac{1}{5} \\
\text{Vậy: } y &= \frac{3}{10}x^5 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân

$$5yy' = 6x^3 - x,\ \text{ biết } y(0) = \sqrt{2}$$

Giải

$$5yy' = 6x^3 - x$$
$$\Rightarrow 5y\frac{dy}{dx} = 6x^3 - x$$
$$\Rightarrow \int 5y dy = \int (6x^3 - x) dx$$
$$\Rightarrow \frac{5}{2}y^2 = \frac{3}{2}x^4 - \frac{x^2}{2} + C$$
$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{15}}{5}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}x + C$$
$$\text{Ta có: } \; y(0) = \frac{\sqrt{15}}{5}\cdot 0^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot 0 + C = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow C = \sqrt{2}$$
$$\text{Vậy: } y = \frac{\sqrt{15}}{5}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}x + \sqrt{2}$$

3 Ứng dụng của phương trình vi phân tách biến (Mô hình tăng trưởng tự nhiên, mô hình Logistic, bài toán nhiệt Newton, bài toán trộn hỗn hợp và dòng chảy, bài toán về mạch điện với mạch RL hoặc RC,...)

Ví dụ 1: Trong một đợt dịch bệnh, giả sử số người nhiễm bệnh lúc nào cũng tăng theo quy tắc: tốc độ tăng tỉ lệ với lượng hiện tại. Nếu 1000 người bị nhiễm khi bệnh được phát hiện lần đầu tiên và 1200 người bị nhiễm bệnh 7 ngày sau đó, thì có khoảng bao nhiêu người sẽ bị nhiễm sau khi dịch bệnh được phát hiện lần đầu tiên 12 ngày?

Giải

Để giải bài toán này, ta sẽ sử dụng mô hình tăng trưởng tự nhiên trong dịch bệnh, với phương trình vi phân sau:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Trong đó:

- $P(t)$ là số người nhiễm bệnh tại thời điểm t
- k là tốc độ tăng trưởng của dịch bệnh.

Tiếp theo ta đi giải phương trình vi phân tách biến:

$$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \frac{dP}{P} = kd(t)$$
$$\Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int kd(t)$$
$$\Leftrightarrow ln|P| = kt + C$$
$$\Leftrightarrow |P| = e^C e^{kt}$$
$$\Rightarrow P = \pm e^C e^{kt} = C_0 e^{kt}$$
$$\Rightarrow P = P_0 e^{kt}$$

Với P_0 là số ca bệnh ở thời điểm phát hiện ra dịch bệnh (t=0).

Theo đề bài ta có

$$P_0 = 1000 \text{ (người)}$$
$$P_7 = 1000e^{7k} = 1200 \text{ (người)}$$
$$\Rightarrow e^{7k} = \frac{6}{5} \Rightarrow 7k = \ln(\frac{6}{5}) \Rightarrow k = \frac{1}{7}\ln(\frac{6}{5})$$

$\Rightarrow$ Số ca nhiễm sau 12 ngày là:

$$P_{12} = 1000e^{12k}$$
$$= 1000e^{12\cdot\frac{1}{7}\ln(\frac{6}{5})} \approx 1367 \text{ (người)}$$
$$\text{hoặc } P_{12} = 1000e^{12k} = 1000(e^{7k})^{\frac{12}{7}}$$
$$= 1000 \cdot (\frac{6}{5})^{\frac{12}{7}} \approx 1367 \text{ (người)}$$

Vậy số người nhiễm bệnh sau 12 ngày kể từ khi dịch bệnh được phát hiện lần đầu tiên là khoảng 1367 người

Ví dụ 2: Một bể chứa 20 kg muối hòa tan trong 5000 lít nước. Người ta rót vào bể nước muối có nồng độ 0.03 kg/lít với tốc độ 25 lít/phút. Dung dịch được khuấy đều và rót ra khỏi bể với cùng tốc độ. Tính lượng muối còn lại trong bể sau nửa giờ?

Giải

Gọi $y(t)$ là lượng muối (kg) có trong bể tại thời điểm t (phút), kể từ lúc bắt đầu rót nước muối vào $\Rightarrow y(0) = 20$
$V(t)$ là lượng nước (lít) trong bể tại thời điểm t (phút) $\Rightarrow V(t) = 5000$

Phương trình tốc độ thay đổi lượng muối có bên trong bể:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= 0.03 \times 25 - \frac{y(t)}{5000} \times 25 \\
\Rightarrow \frac{dy}{dt} &= \frac{150 - y}{200} \Rightarrow \frac{dy}{150 - y} = \frac{dt}{200} \\
\Rightarrow \int \frac{dy}{150 - y} &= \int \frac{dt}{200} \Rightarrow -\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C \\
\Rightarrow |150 - y| &= e^C \cdot e^{\frac{-t}{200}} \\
\Rightarrow 150 - y &= C_0 \cdot e^{\frac{-t}{200}} \\
\Rightarrow y &= 150 - C_0 \cdot e^{\frac{-t}{200}}
\end{aligned}$$

Ta có: $y(0) = 20 \Leftrightarrow 150 - C_0 e^0 = 20 \Leftrightarrow C_0 = 130$
$\Rightarrow y = 150 - 130e^{\frac{-t}{200}}$
Lượng muối trong bể sau nửa giờ là: $y = 150 - 130e^{\frac{-30}{200}} \approx 38.1$ kg

Ví dụ 3: Một lon nước Cocacola ở nhiệt độ phòng có nhiệt độ là 72°F được đặt vào ngăn mát của một tủ lạnh có nhiệt độ là 44°F. Sau nửa giờ đồng hồ thì nhiệt độ lon nước là 61°F. Hỏi nhiệt độ của lon Cocacola đó sau nửa giờ tiếp theo là bao nhiêu?

Giải

Theo định luật Newton, tốc độ làm lạnh (giảm nhiệt) của vật thể tỉ lệ với hiệu của nhiệt độ vật thể và nhiệt độ môi trường xung quanh
Ta có phương trình: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$
Trong đó:

- T là nhiệt đô của vật
- T_s là nhiệt độ của môi trường xung quanh
- k là hằng số tỉ lệ $k < 0$

Ta đi tách biến rồi lấy tích phân hai vế:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{T - T_s} &= kdt \Rightarrow \int \frac{dT}{T - T_s} = \int kdt \\
\Leftrightarrow \ln|T - T_s| &= kt + C \Rightarrow |T - T_s| = e^{kt+C} \\
\Rightarrow T - T_s &= \pm e^C \cdot e^{kt} \\
\Rightarrow T &= T_s + C_0 e^{kt} \text{ (với } C_0 = T_0 - T_s)
\end{aligned}$$

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\begin{aligned} T &= T_s + (T_0 - T_s)e^{kt} = 44 + (72 - 44)e^{kt} \\ &= 44 + 28e^{kt} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} T_{30} &= 44 + 28e^{30k} = 61 \Rightarrow e^{30k} = \frac{17}{28} \\ \Rightarrow T_{60} &= 44 + 28e^{60k} = 44 + 28(e^{30k})^2 \\ &= 44 + 28 \cdot (\frac{17}{28})^2 \approx 54.32 \text{ °F} \end{aligned}$$

Vậy nhiệt độ của lon nước Cocacola sau nửa giờ tiếp theo là vào khoảng 54,32°F

4 Nhận xét về phương trình vi phân tách biến

Nhận xét về phương trình vi phân tách biến:
- Giúp mô hình hóa và dự đoán những thay đổi của các hiện tượng tự nhiên, kỹ thuật và xã hội.
- Được áp dụng cho nhiều lĩnh vực như vật lý, hóa học, sinh học, kinh tế và môi trường như mô hình tăng trưởng tự nhiên, mô hình dịch bệnh, nhiệt độ, và các quá trình hóa học. Một ví dụ tiêu biểu là mô hình tăng trưởng dân số hoặc sự phát triển của bệnh dịch
- Đơn giản hóa các bài toán phức tạp, dễ dàng tìm nghiệm bằng phương pháp tích phân. Tuy nhiên, nếu hai hàm số f(x) và g(y) phức tạp, việc tính toán có thể trở nên khó khăn, rắc rối và phức tạp hơn.
- Các ứng dụng thực tiễn (phản ứng hóa học, gia tăng dân số, cân bằng nồng độ, ...) đều sử dụng khá nhiều đén phương trình vi phân tách biến.
- **Chỉ áp dụng với phương trình có thể tách biến được:** Một hạn chế khá lớn của phương trình vi phân tách biến là phương trình phải có khả năng đưa về dạng tách biến được. Có nhiều phương trình vi phân trên thực tế không thể tách biến một cách đơn giản, do đó ta phải áp dụng các phương pháp giải khác như đưa phương trình về dạng đẳng cấp, phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 hoặc phương trình Bernoulli.

Kết luận: Phương trình vi phân tách biến là một công cụ cơ bản, hữu ích, có tính ứng dụng cao. Có mục đích phục vụ cho khoa học và kỹ thuật.

5 Giải bài tập trong sách James Stewart Calculus 6th Edition

Câu 1:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

C1: Giải bằng phương pháp truyền thống

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + C$$
$$\Leftrightarrow y = \pm e^C x \Leftrightarrow y = Cx$$

C2: Giải bằng Matlab

```
% Bài 1: Giải phương trình vi phân dy/dx = y/x
function bai_1;
syms x y(x)
ode = diff(y, x) == y/x;
sol = dsolve(ode);
disp(['y(x)= ', char(sol)]);
```

Hình 1: *Nội dung nhập vào Matlab*

Kết quả

```
>> bai1
y(x)= C1*x
```

Hình 2: *Đáp án câu 1*

Câu 2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{e^y}$$

C1: Giải bằng phương pháp truyền thống

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{e^y} \Leftrightarrow e^y dy = \sqrt{x}dx \Leftrightarrow \int e^y dy = \int \sqrt{x}dx$$
$$\Leftrightarrow e^y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \Leftrightarrow y = \ln(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C)$$

C2: Giải bằng Matlab

```
% Bài 2: Giải phương trình vi phân dy/dx = sqrt(x)/e^y
function bai2;
syms x y(x)
ode = diff(y, x) == sqrt(x)/exp(y);
sol = dsolve(ode);
disp(['y(x)= ', char(sol)]);
```

Hình 3: *Nội dung nhập vào Matlab*

```
>> bai_2
y(x)= log(C1 + (2*x^(3/2))/3)
```

Hình 4: *Đáp án câu 2*

Câu 12:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ycos(x)}{1+y^2}, \quad y(0) = 1$$

C1: Giải bằng phương pháp truyền thống

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x}{1+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+y^2}{y}\,dy = \cos x\,dx \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y}+y\right)\,dy = \cos x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{y}+y\right)\,dy = \int \cos x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| + \frac{y^2}{2} = \sin x + C$$

Ta có:

$$y(0) = 1 \Rightarrow \ln 1 + \frac{1}{2} = \sin 0 + C$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy: } \ln|y| + \frac{y^2}{2} = \sin x + \frac{1}{2}$$

C2: Giải bằng Matlab

```
% Bài 12: Giải phương trình vi phân dy/dx = (y*cos(x))/(1 + y^2) với y(0) = 1
function bai_12;
syms x y(x)
ode = diff(y, x) == (y * cos(x))/(1 + y^2);
cond = y(0) == 1;
sol = dsolve(ode, cond);
disp(['y(x)= ', char(sol)]);
fplot(sol, [0, 10]);
title('Đồ thị của hàm y(x)');
xlabel('x');
ylabel('y(x)');
grid on;
```

Hình 5: *Nội dung nhập vào Matlab*

```
>> bai12
y(x)= exp(sin(x) + 1/2)*exp(-wrightOmega(2*sin(x) + 1)/2)
```

Hình 6: *Đáp án câu 12*

Câu 20:

$$f'(x) = f(x)(1 - f(x)), \quad f(0) = \frac{1}{2}$$

C1: Giải bằng phương pháp truyền thống

$$\begin{aligned}
& f'(x) = f(x)(1 - f(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{df}{dx} = f(x)(1 - f(x)) \Leftrightarrow \frac{df}{f(x)(1 - f(x))} = dx \\
\Leftrightarrow\ & \int \frac{df}{f(x)(1 - f(x))} = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{1 - f(x)} df = \int dx \\
\Leftrightarrow\ & \ln|f(x)| - \ln|1 - f(x)| = x + C \Leftrightarrow \ln|\frac{f(x)}{1 - f(x)}| = x + C \\
\Leftrightarrow\ & \frac{f(x)}{1 - f(x)} = \pm e^C e^x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{1 - f(x)} = Ce^x
\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = Ce^0 \Rightarrow C = 1 \\
\Rightarrow \frac{f(x)}{1 - f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x - e^x f(x) \\
\Leftrightarrow f(x) + e^x f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x)\,(1 + e^x) = e^x \\
\Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}
\end{aligned}$$

C2: Giải bằng Matlab

```
function bai_20;
syms f(x)
ode = diff(f, x) == f*(1 - f);
% Điều kiện ban đầu
cond = f(0) == 1/2;
% Giải phương trình vi phân
sol = dsolve(ode, cond);
disp(['f(x)= ', char(sol)]);
% Vẽ đồ thị của hàm f(x)
fplot(sol, [-5, 5]);
title('Đồ thị của hàm f(x)');
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
grid on;
```

Hình 7: *Nội dung nhập vào Matlab*

```
>> bai20
f(x)= exp(x)/(exp(x) + 1)
```

Hình 8: *Đáp án câu 20*

Câu 24:

$$e^{-y}y' + \cos x = 0$$

C1: Giải bằng phương pháp truyền thống

$$\begin{aligned}
&e^{-y}y' + \cos x = 0\\
&\Leftrightarrow e^{-y}\cdot\frac{dy}{dx} = -\cos x \Leftrightarrow e^{-y}dy = -\cos x dx\\
&\Leftrightarrow \int e^{-y}dy = -\int \cos x dx \Leftrightarrow e^{-y} = \sin x \ + C\\
&\Leftrightarrow -y = \ln(\sin x + C) \Leftrightarrow y = -\ln(\sin x + C)
\end{aligned}$$

C2: Giải bằng Matlab

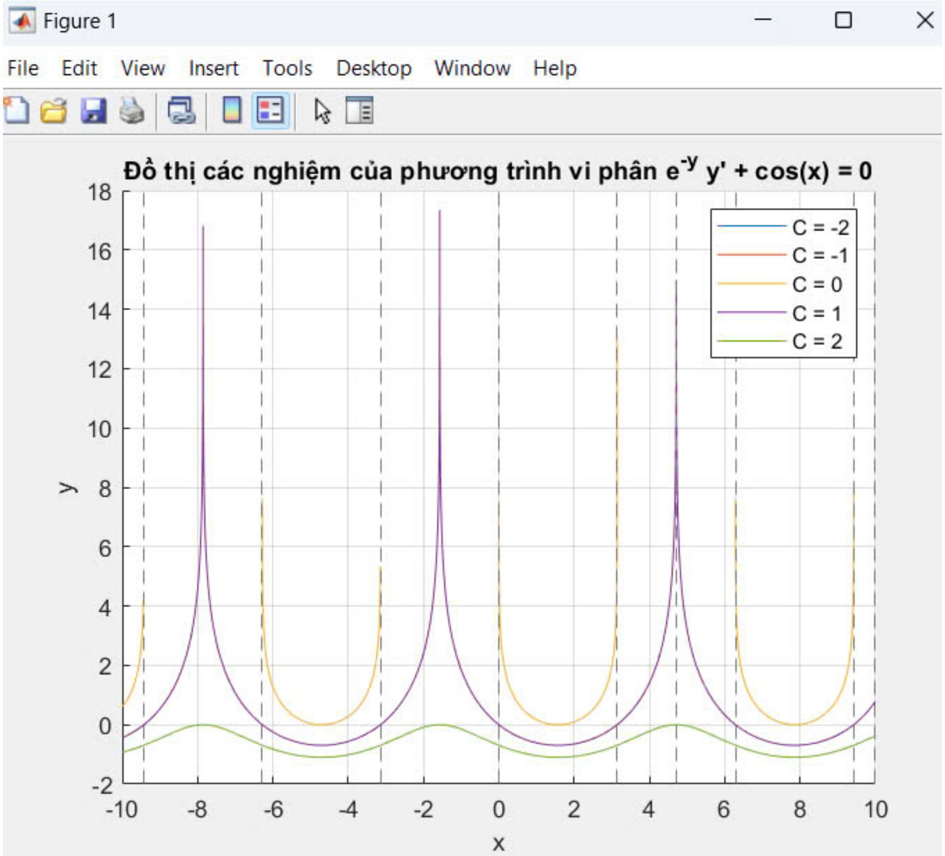
```
% Câu 24: Giải phương trình vi phân e^(-y).y' + cos(x) = 0 và vẽ đồ thị
function bai24;
syms y(x)
% Định nghĩa phương trình vi phân
ode = diff(y, x) == -cos(x) * exp(y);

% Giải phương trình vi phân
sol = dsolve(ode);
disp(['y(x)= ', char(sol)]);
y_sol = matlabFunction(sol);
x_vals = linspace(-10, 10, 1000);

% Vẽ đồ thị cho các giá trị khác nhau của hằng số C
figure;
hold on;
```

Hình 9: *Nội dung nhập vào Matlab*

```
>> bai_24
y(x)= -log(C1 + sin(x))
```

Hình 10: *Đáp án câu 24*

Vẽ đồ thị



Hình 11: *Đồ thị y=-ln(sinx+C) với 1 số C khác nhau)*

Câu 35: Dịch: Trong bài 13 của phần 9.1, ta có mô hình học tập dưới dạng vi phân trong đó P(t) đo lường hiệu suất của 1 người đang học 1 kỹ năng sau thời gian đào tạo t, P_{max} là mức hiệu suất tối đa, và k là 1 hằng số dương, giải phương trình vi phân để tìm biểu thức của P(t). Tính giới hạn của biểu thức?

Giải

$$\frac{dp}{dt} = \text{k(M - P)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{dp}{M-P} = \text{kdt} \Rightarrow \int \frac{dp}{M-P} = \int kdt$$
$$\Rightarrow -\ln|M-P| = kt + C \Rightarrow M - P = C_0 e^{-kt}$$
$$\Leftrightarrow \text{P} = M - C_0 e^{-kt}$$

Sau một khoảng thời gian dài ($t \to \infty$) thì:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = M - C_0 e^{-k\infty} \approx M$$

Vậy giới hạn của biểu thức này khi tiến tới ∞ là M

```
function bai35
    % Bài 35: Giải phương trình vi phân dP/dt = k(M - P) và tìm giới hạn của nó
    syms P(t) k M P0 C0
    % Phương trình vi phân
    ode = diff(P, t) == k * (M - P);
    % Điều kiện ban đầu tổng quát
    cond = P(0) == P0;
    % Giải phương trình vi phân
    sol = dsolve(ode, cond);
    % Thay thế (M - P0) bằng C0
    sol = subs(sol, M - P0, C0);
    % Hiển thị nghiệm
    disp(['P(t)= ', char(sol)]);
    % Tìm giới hạn của P(t) khi t -> ∞
    limit_P_t = limit(sol, t, inf);
    % Hiển thị giới hạn
    disp('Giới hạn của P(t) khi t -> ∞ là:');
    disp(limit_P_t);
```

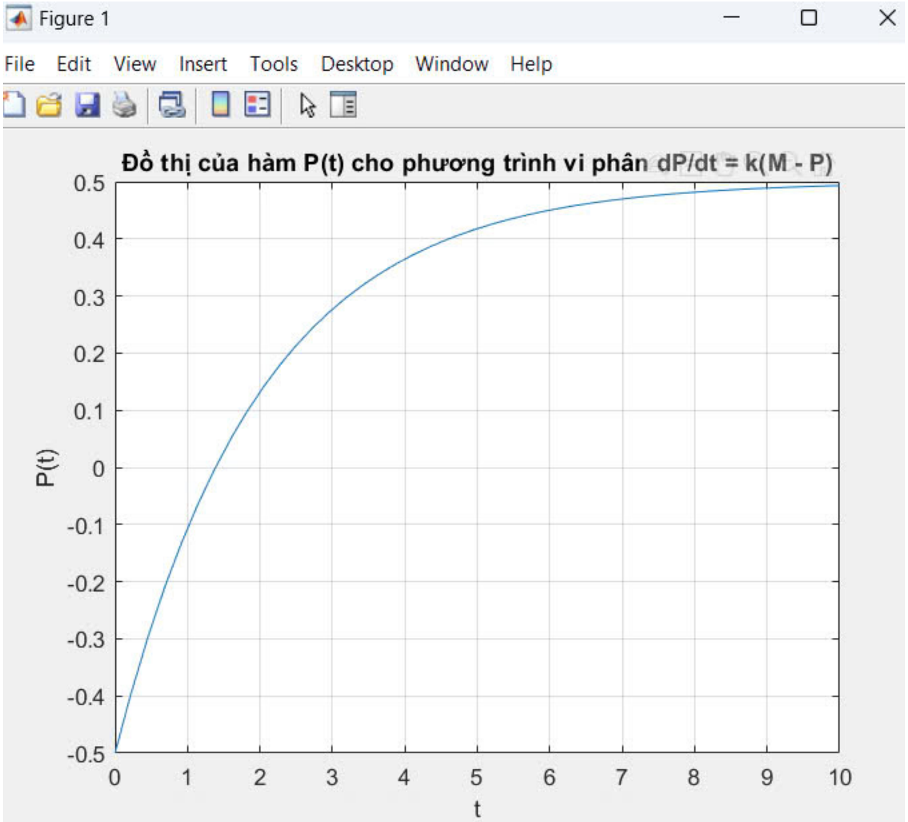
```
        P_func = matlabFunction(sol, 'Vars', [t, k, M, C0]);
        t_vals = linspace(0, 10, 1000);
        % Nhập các giá trị của k, M và C0 từ người dùng
        k = input('Nhập giá trị của hằng số k: ');
        M = input('Nhập giá trị của mức hiệu suất tối đa M: ');
        C0 = input('Nhập giá trị của hằng số C0: ');

        % Vẽ đồ thị
        figure;
        fplot(@(t) P_func(t, k, M, C0), [0, 10]);
        title('Đồ thị của hàm P(t) cho phương trình vi phân dP/dt = k(M - P)');
        xlabel('t');
        ylabel('P(t)');
        grid on;
    end
```

Hình 12: *Nội dung nhập vào Matlab*

```
>> bai35
P(t)= M - C0*exp(-k*t)
```

Hình 13: *Đáp án câu 35*

Đồ thị



Hình 14: *Đồ thị biểu diễn P(t) theo thời gian*

Bài 36: Dịch: Trong phản ứng hóa học cơ bản, mỗi phân tử của các chất phản ứng A và B tạo ra 1 phân tử chất sản phẩm C: $A + B \to C$. Theo định luật tác động khối lượng, tốc độ phản ứng tỷ lệ thuận với tích của nồng độ của A và B:

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B]$$

Do đó, nếu nồng độ ban đầu của A, B và C lần lượt là $M_a = a(mol/l)$, $M_b = b(mol/l)$ và $M_c = x(mol/l)$ thì ta có

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

a/ Giả sử $a \neq b$, tìm x(t), sử dụng thực tế rằng nồng độ ban đầu của C bằng 0 (x=0)
b/ Tìm x(t) biết $a = b$, Biểu thức này được rút gọn thế nào nếu $M_c = \frac{1}{2}a$ sau 20 giây?

Giải

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) \\
&\Leftrightarrow \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt \\
&\Leftrightarrow \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int kdt \\
&\Leftrightarrow \int (\frac{A}{(a-x)} + \frac{-A}{(b-x)})dx = \int kdt \\
&\Leftrightarrow -\ln|a-x|^A + \ln|b-x|^A = kt \\
&\Leftrightarrow A\ln|\frac{b-x}{a-x}| = kt \\
&\Leftrightarrow \frac{b-x}{a-x} = e^{\frac{kt}{A}} \\
&\Leftrightarrow 1 + \frac{b-a}{a-x} = e^{\frac{kt}{A}} \\
&\Leftrightarrow \frac{b-a}{e^{\frac{kt}{A}} - 1} = a - x \\
&\Rightarrow x = a - \frac{b-a}{e^{\frac{e^k t}{t}} - 1}
\end{aligned}
$$

b) Theo yêu cầu bài toán ta có: $a = b = c$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = k(c-x)^2 \Leftrightarrow \frac{dx}{(c-x)^2} = kdt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dx}{(c-x)^2} = \int kdt \Rightarrow \frac{1}{c-x} = kt + C$$

Có: $x = \frac{1}{2}a \quad$ khi $t = 20 \Rightarrow k = \frac{1}{10C}$

$\Rightarrow$ Biểu thức được rút gọn là: $x = C - \frac{10C}{t}$

```
function bai36_b
    % Bài 36(b): Giải phương trình vi phân dx/dt = k(a - x)^2 với điều kiện a = b và vẽ đồ thị
    syms x(t) a k
    % Phương trình vi phân
    ode = diff(x, t) == k * (a - x)^2;
    % Điều kiện ban đầu
    cond = x(0) == 0;
    % Giải phương trình vi phân
    sol = dsolve(ode, cond);
    disp(['x(t) = ', char(sol)]);
        x_func = matlabFunction(sol, 'Vars', [t, a, k]);
        t_vals = linspace(0, 20, 1000);
        a = input('Nhập nồng độ ban đầu của chất phản ứng A và B (a): ');
        k = input('Nhập giá trị của hằng số k: ');
        % Vẽ đồ thị
        figure;
        fplot(@(t) x_func(t, a, k), [0, 20]);
        title('Đồ thị của x(t) cho phương trình vi phân dx/dt = k(a - x)^2');
        xlabel('t');
        ylabel('x(t)');
        grid on;
  end
```

Hình 15: *Nội dung nhập vào Matlab*

```
>> bai36_b
x(t) = (a^2*k*t)/(a*k*t + 1)
```

Hình 16: *Đáp án câu 36*

Câu 39: Dịch: Một dung dịch glucose được truyền vào tĩnh mạch đi vào máu với một tốc độ không đổi r. Khi glucose được thêm vào, nó sẽ được chuyển hóa thành các chất khác và bị loại bỏ khỏi dòng máu với một tốc độ tỷ lệ thuận với nồng độ C=C(t) tại thời điểm đó. Do đó, mô hình cho nồng độ dung dịch glucose trong dòng máu là:

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

a) Giả sử nồng độ tại thời điểm t = 0 là C_0. Xác định nồng độ tại thời điểm bất kì bằng cách giải phương trình vi phân
b) Giả sử $C_0 < r/k$. Tính $\lim_{t\to\infty} C(t)$

Giải

a) Ta có

$$\frac{dC}{dt} = r - kC \Leftrightarrow \frac{dC}{r - kC} = dt$$
$$\Rightarrow \int \frac{dC}{r - kC} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{k}\ln|r - kC| = t + C$$
$$\Leftrightarrow \ln|r - kC| = -kt + C \Rightarrow r - kC = C_0 e^{-kt}$$
$$\Rightarrow C = \frac{r - C_0 e^{-kt}}{k}$$

Giải bằng Matlab:

```
function bai39_a;
    % Bài 39(a): Giải phương trình vi phân dC/dt = r - kC và vẽ đồ thị
    syms C(t) r k C0
    % Phương trình vi phân
    ode = diff(C, t) == r - k * C;
    % Điều kiện ban đầu
    cond = C(0) == C0;
    % Giải phương trình vi phân
    sol = dsolve(ode, cond);
    % Hiển thị nghiệm
    disp(['C(t) = ', char(sol)]);
     C_func = matlabFunction(sol, 'Vars', [t, r, k, C0]);
     t_vals = linspace(0, 20, 1000);
     % Nhập các giá trị của r, k và C0
     r = input('Nhập giá trị của tốc độ r: ');
     k = input('Nhập giá trị của hằng số k: ');
     C0 = input('Nhập giá trị của nồng độ ban đầu C(0): ');
     % Vẽ đồ thị
     figure;
     fplot(@(t) C_func(t, r, k, C0), [0, 20]);
     title('Đồ thị của C(t) cho phương trình vi phân dC/dt = r - kC');
     xlabel('t');
     ylabel('C(t)');
     grid on;
  end
```

Hình 17: *Nội dung nhập vào Matlab*

```
>> bai39_a
C(t) = (r - exp(-k*t)*(r - C0*k))/k
```

Hình 18: *Đáp án câu 39a*

b) Ta có:

$$C_0 < \frac{r}{k} \Rightarrow C = \frac{r - C_0 e^{-kt}}{k} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} C(t) = \frac{r - C_0 e^{-k\infty}}{k}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} C(t) \approx \frac{r}{k}$$

Câu 41: Dịch: Một bể chứa 1000 lít nước muối bên trong có chứa 15 kg muối đã được hòa tan. Người ta cho nước tinh khiết chảy vào bể với vận tốc 10 lít/phút. Dung dịch được khuấy đều và cho thoát ra khỏi bể với cùng vận tốc. Hỏi còn bao nhiêu kg muối trong bể (a) sau t phút và (b) sau 20 phút?

Giải

Gọi y(t) là lượng muối trong bể (tính bằng kg) tại thời điểm t (phút).
Tốc độ thay đổi lượng muối trong bể được xác định bởi phương trình vi phân:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \text{Tốc độ muối vào} - \text{Tốc độ muối ra} = 10 \cdot 0 - 10 \cdot \frac{y(t)}{1000} \\ &= -\frac{y(t)}{100}\end{aligned}$$

Ta đi tách biến và giải phương trình vi phân tách biến:

$$\frac{dy}{y(t)} = -\frac{1}{100}dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y(t)} = \int -\frac{1}{100}dt$$
$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{t}{100} + C \Rightarrow |y| = e^{-\frac{t}{100}+C} \Rightarrow y = C_0 e^{-\frac{t}{100}}$$

Mà ở thời điểm ban đầu (t=0) thì trong bình có chứa 15kg muối $\Rightarrow$ $C_0 = 15$
$\Rightarrow$ Phương trình biểu diễn lượng muối theo thời gian t là: $y = 15e^{-\frac{t}{100}}$
$\Rightarrow$ Ở thời điểm 20 phút lượng muối trong bình là:
$y = 15e^{-\frac{20}{100}} \approx 12.28 \quad (kg)$

Kết quả khi sử dụng Matlab

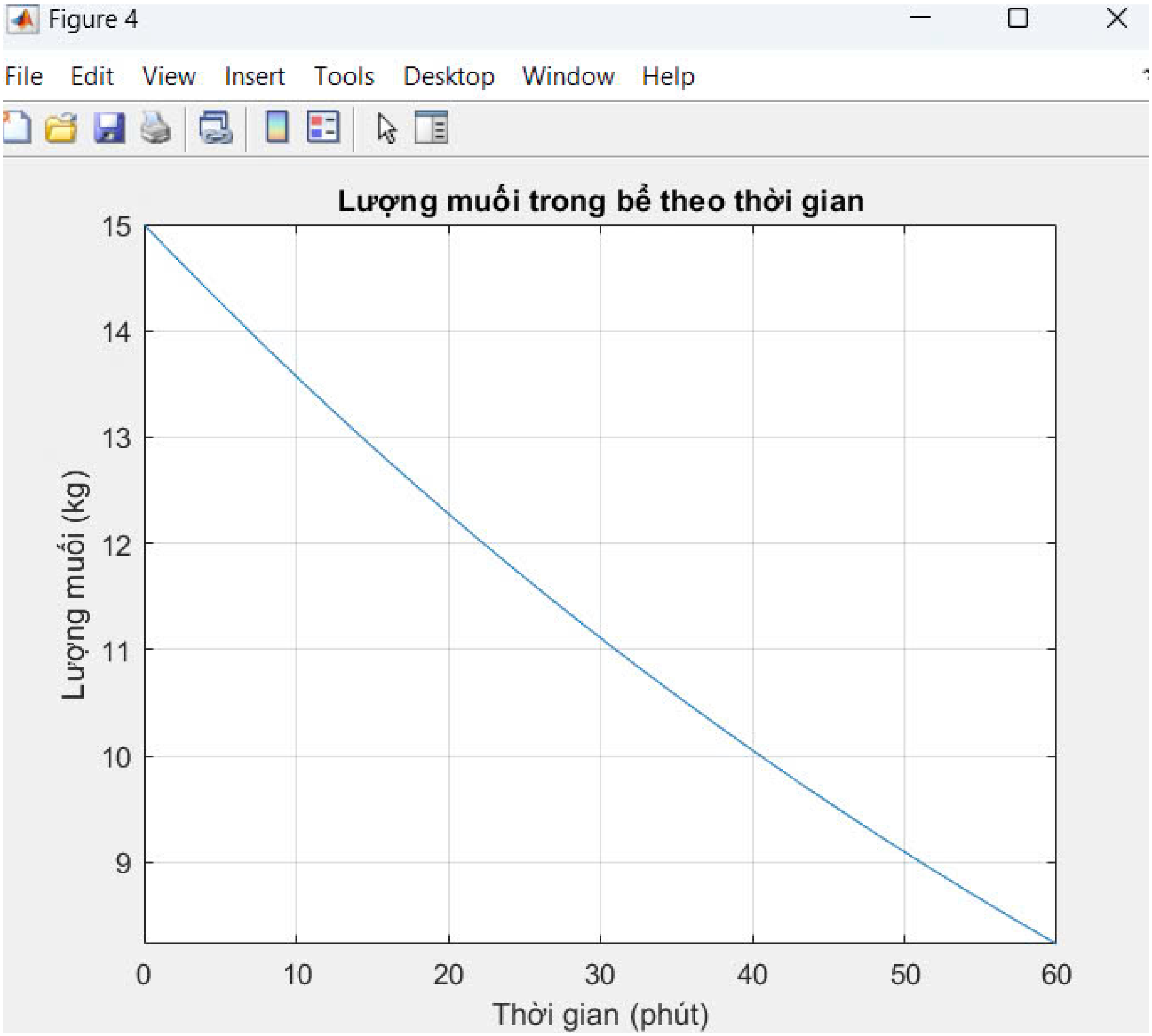
```
    function bai41
        % Bài 41: Tính lượng muối trong bể sau t phút và sau 20 phút
        S0 = 15; % Lượng muối ban đầu (kg)
        V = 1000; % Thể tích của bể (L)
        Qin = 10; % Tốc độ dòng nước vào (L/phút)
        Qout = 10; % Tốc độ dòng nước ra (L/phút)
        t_max = 60; % Thời gian tối đa để vẽ đồ thị (phút)
        syms S(t) t
        % Thiết lập phương trình vi phân
        dSdt = - (Qout / V) * S;
        ode = diff(S, t) == dSdt;
        % Điều kiện ban đầu
        cond = S(0) == S0;
        % Giải phương trình vi phân
        sol = dsolve(ode, cond);
        % Hiển thị nghiệm
        disp(['S= ', char(sol)]);
    % Chuyển đổi nghiệm thành hàm ẩn danh để vẽ đồ thị
    S_func = matlabFunction(sol, 'Vars', t);
    % Tính lượng muối sau 20 phút
    t_20 = 20;
    S_20 = S_func(t_20);
    fprintf('Lượng muối trong bể sau %d phút: %.2f kg\n', t_20, S_20);
    % Vẽ đồ thị
    figure;
    fplot(S_func, [0, t_max]);
    title('Lượng muối trong bể theo thời gian');
    xlabel('Thời gian (phút)');
    ylabel('Lượng muối (kg)');
    grid on;
end
```

Hình 19: *Nội dung nhập vào Matlab*

```
>> bai41
S= 15*exp(-t/100)
Lượng muối trong bể sau 20 phút: 12.28 kg
```

Hình 20: *Đáp án câu 41*

Đồ thị



Hình 21: *Đồ thị biểu diễn lượng muối trong bình theo thời gian t*

Câu 42: Dịch: Một căn phòng có sức chứa 180 m^3, ban đầu trong phòng có chứa 0.15% carbon dioxide. Người ta cho không khí trong lành hơn chỉ có 0.05 % carbon dioxide được bơm vào phòng với tốc độ 2 m^3/phút và không khí hỗn hợp bên trong phòng thoát ra với tốc độ tương tự. Tìm tỷ lệ phần trăm carbon dioxide trong phòng theo thời gian. Điều gì sẽ xảy ra sau khi bơm không khí vào trong một khoảng thời gian dài?

Giải

Gọi y(t) là lượng khí CO_2 còn lại trong phòng tại thời điểm t (phút).
Tốc độ thay đổi phòng được xác định bởi phương trình vi phân:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \text{Tốc độ vào} - \text{Tốc độ ra}\\ &= 2\cdot 0.05\% - 2\cdot\frac{y(t)}{180} = \frac{0.09-y}{90}\end{aligned}$$

Tách biến và tích phân hai vế ta được:

$$\frac{dy}{0.09-y} = \frac{dt}{90} \Rightarrow \int \frac{dy}{0.09-y} = \int \frac{dt}{90}$$
$$\Leftrightarrow -\ln|0.09-y| = \frac{t}{90} + C \Rightarrow 0.09 - y = C_0 e^{-\frac{t}{90}}$$
$$\Rightarrow y = 0.09 - C_0 e^{-\frac{t}{90}} \quad (m^3)$$

Mà ở thời điểm ban đầu (t=0) lượng khí CO_2) trong phòng là:

$$y_0 = 0.09 - C_0 = 0.15\% \cdot 180 = 0.27 \quad (m^3)$$
$$\Rightarrow C_0 = -0.18 \Rightarrow y = 0.09 + 0.18e^{-\frac{t}{90}}$$

$\Rightarrow$ Tỉ lệ phầm trăm khí CO_2 trong phòng được xác định bằng hàm số

$$g(t) = (\frac{0.09}{180} + \frac{0.18}{180}e^{-\frac{t}{90}}) \cdot 100 = 0.05 + 0.1e^{-\frac{t}{90}} \quad (\%)$$

Sau một khoảng thời gian dài $(t \to \infty)$ thì:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0.05 + 0.1e^{-\frac{\infty}{90}} \approx 0.05$$

Vậy sau một khoảng thời gian dài thì tỷ lệ phần trăm lượng CO_2 của không khí trong phòng dần tiến về mức CO_2 của không khí được bơm vào là 0.05%

Kết quả khi sử dụng Matlab

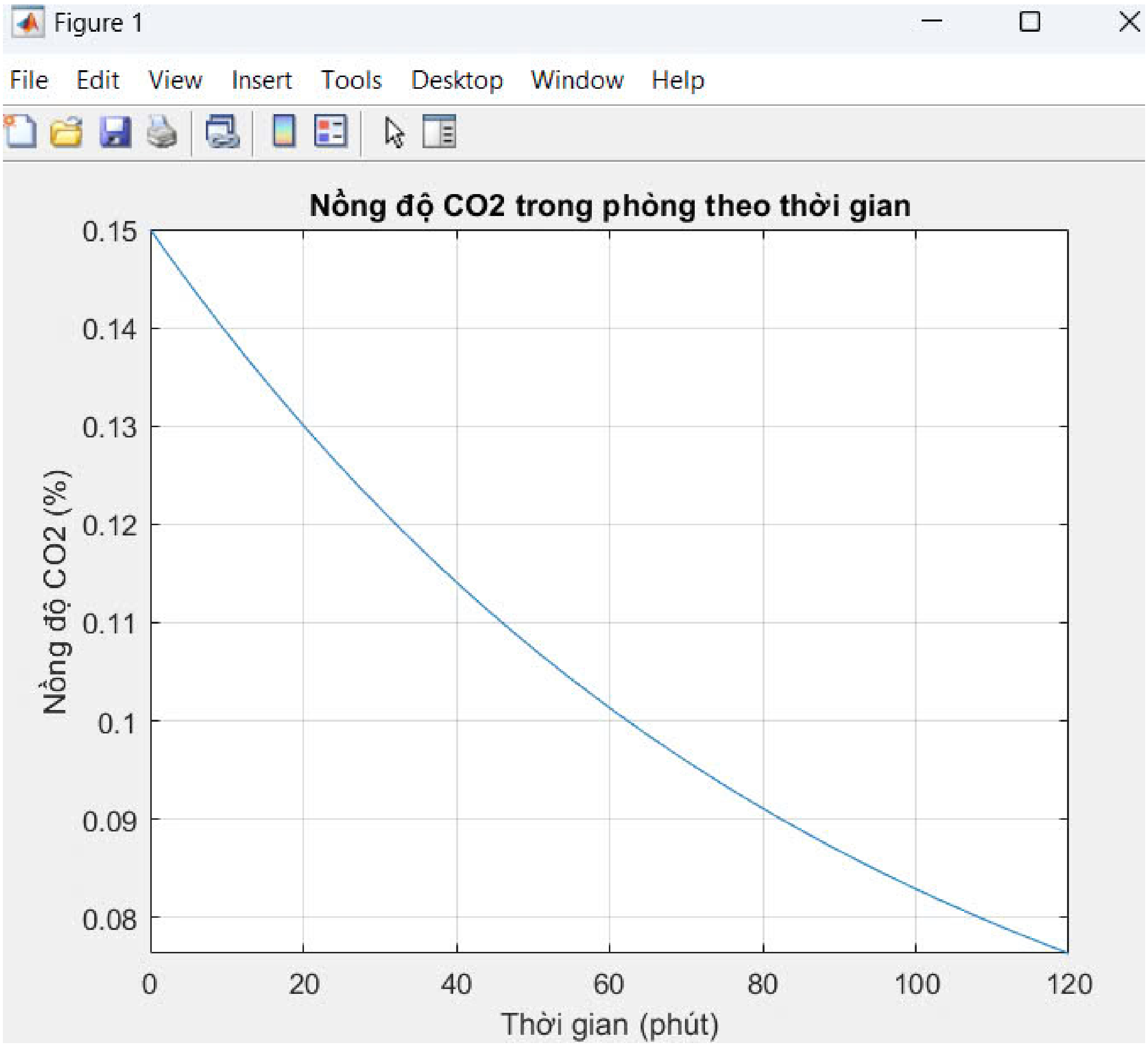
```
function bai42
    % Bài 42: Tính tỷ lệ phần trăm CO2 trong phòng theo thời gian và tìm giới hạn
    V = 180; % Thể tích phòng (m³)
    C0 = 0.15; % Nồng độ CO2 ban đầu (%)
    Cin = 0.05; % Nồng độ CO2 của không khí tươi (%)
    Q = 2; % Tốc độ dòng khí (m³/phút)
    t_max = 120; % Thời gian tối đa để vẽ đồ thị (phút)
    syms C(t)
    % Thiết lập phương trình vi phân
    dCdt = (Q / V) * (Cin - C);
    ode = diff(C, t) == dCdt;
    % Điều kiện ban đầu
    cond = C(0) == C0;
    % Giải phương trình vi phân
    sol = dsolve(ode, cond);
    % Hiển thị nghiệm dưới dạng phương trình của t
    disp('Nồng độ CO2 theo thời gian là:');
    disp(sol);
        % Chuyển đổi nghiệm thành hàm ẩn danh để vẽ đồ thị
        C_func = matlabFunction(sol, 'Vars', t);
        % Vẽ đồ thị
        figure;
        fplot(C_func, [0, t_max]);
        title('Nồng độ CO2 trong phòng theo thời gian');
        xlabel('Thời gian (phút)');
        ylabel('Nồng độ CO2 (%)');
        grid on;
        % Tính nồng độ CO2 trong thời gian dài (t -> ∞)
        limit_C_t = limit(sol, t, inf);
        fprintf('Nồng độ CO2 trong thời gian dài: %.4f%%\n', limit_C_t);
  end
```

Hình 22: *Nội dung nhập vào Matlab*

```
>> bai42
Nồng độ CO2 theo thời gian là:
exp(-t/90)/10 + 1/20
```

Hình 23: *Đáp án câu 42*

Đồ thị



Hình 24: *Đồ thị biểu diễn tỷ lệ phần trăm lượng CO_2 trong phòng theo thời gian t*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tài liệu

[1] N. Đình Huy, *Giáo trình Giải tích 1*, NXB Đại học Quốc Gia TP.HCM.

[2] J. Stewart, *Calculus*, 6th ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2008.

[3] *Cách sử dụng phần mềm MathWorks để lập trình Matlab*, https://www.scribd.com/doc/187313585/M%E1%BB%99t-s%E1%BB%91-l%E1%BB%87nh-Matlab-trong-gi%E1%BA%A3i-tich.

[4] *Ứng dụng của phương trình vi phân tách biến*, https://kkhtn.duytan.edu.vn/Home/ArticleDetail/vn/92/3359/ung-dung-phuong-trinh-vi-phan-cac-mo-hinh-tang-truong-dan-so.

TỔNG KẾT

Trong bài báo cáo này, chúng em đã trình bày về phương trình vi phân tách biến - một dạng phương trình vi phân bậc nhất đơn giản nhưng vô cùng quan trọng trong toán học và ứng dụng thực tiễn. Phương pháp tách biến cho phép giải phương trình bằng cách tách các biến số và thực hiện tích phân, từ đó tìm ra nghiệm tổng quát hoặc nghiệm riêng một cách hiệu quả.

Chúng em đã phân tích các ứng dụng thực tế của phương trình vi phân tách biến trong nhiều lĩnh vực như vật lý (mô tả chuyển động), hóa học (phản ứng hóa học), sinh học (tăng trưởng quần thể) và kinh tế (mô hình tăng trưởng). Ngoài ra, bài cáo cũng đã nhấn mạnh tầm quan trọng và các ứng dụng của phương trình vi phân tách biến trong việc giải quyết các bài toán thực tế và là cơ sở lí thuyết cho lập trình Matlab. Đồng thời, bài báo cáo cũng chỉ ra những hạn chế của phương pháp khi gặp phải các phương trình không thể tách biến và nhấn mạnh tầm quan trọng của việc nghiên cứu các phương pháp giải khác như biến đổi Laplace hay phương pháp số.

Tóm lại, phương trình vi phân tách biến không chỉ là một công cụ lý thuyết mà còn là nền tảng giải quyết các bài toán thực tiễn, giúp mô tả và phân tích các hiện tượng biến đổi liên tục trong đời sống và khoa học kỹ thuật.

BÀI BÁO CÁO CỦA NHÓM CHÚNG EM ĐẾN ĐÂY LÀ KẾT THÚC. CHÚNG EM XIN CẢM ƠN THẦY VÌ ĐÃ ĐỌC ĐẾN HẾT BÀI CỦA CHÚNG EM. CHÚNG EM XIN CHÂN THÀNH CẢM ƠN THẦY.