ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KỸ THUẬT VÀ KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN

GIẢI TÍCH 1 – MT1003

ĐỀ TÀI: VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1

GVHD: ĐOÀN THỊ THANH XUÂN

NHÓM 05 – LỚP CN02KHM1 – HK251

DANH SÁCH THÀNH VIÊN

STT	Họ và Tên	MSSV	Điểm số	Chữ ký
1	Dương Gia Bảo	2410611		
2	Đinh Nhật Huy	2410824		
3	Phạm Thái Duy Bảo	2411715		
4	Trần Tuấn Kiệt	2410821		
5	Trần Thái Hòa	2551895		
6	Nguyễn Hoàng Minh Khang	2551900		
7	Đặng Nguyễn Thiên Phúc	2551919		
8	Cao Lê Khiết	2551902		

TP. Hồ Chí Minh, tháng 06 năm 2025

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, chúng em xin cảm ơn khoa Kỹ thuật và Khoa học Máy tính, Trường Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia TP.HCM đã đưa bộ môn Giải tích 1 vào chương trình giảng dạy và kế hoạch học tập của chúng em, trong thời gian học môn này, chúng em đã học được rất nhiều kiến thức bổ ích, thiết thực trong thực tế cũng như cho quá trình học tập sau này của chúng em. Chúng em cũng xin gửi lời cảm ơn đến cô Đào Thị Thanh Xuân đã tận tình giảng dạy trong thời gian học tập trên lớp của cô quả thực rất chất lượng và góp phần rất lớn trong quá trình giúp chúng em hoàn thành bài báo cáo bài tập lớn lần này.

Tuy nhiên, vì vốn kiến thức còn hạn hẹp cũng như khả năng vận dụng còn hạn chế nên chúng em không thể tránh khỏi những sai sót không đáng có trong quá trình thực hiện bài tập cũng như soạn nên bài báo cáo này. Vì vậy chúng em cũng kính mong cô xem xét, đánh giá và góp ý để chúng em có thể thực hiện tốt hơn ở các bài tập lớn sau. Chúng em xin trân trọng cảm ơn.

NỘI DUNG CHÍNH

1 Khái niệm phương trình vi phân cấp 1.

1.1 Khái niệm phương trình vi phân cấp 1.

Phương trình vi phân là phương trình chứa đạo hàm cấp 1 hoặc vi phân cấp 1 của 1 hoặc vài hàm cần tìm.

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1 là:

$$F(x, y, y') = 0$$

1.2 Nghiệm tổng quát.

Nghiệm tổng quát của của phương trình vi phân cấp một $F(x, y, y') = 0$ là biểu thức tổng quát của tập hợp vô hạn các hàm, thỏa mãn phương trình vi phân. Có thể được xác định ở dạng tường minh $y = F(x, C)$ hoặc dạng ẩn $\Phi(x, y, C) = 0$ với C là hằng số tùy ý.

Nghiệm của phương trình vi phân tương ứng với một giá trị C cụ thể được gọi là nghiệm riêng. Nghiệm của phương trình vi phân không tương ứng với một giá C cụ nào được gọi là nghiệm kỳ dị. Thường xuất hiện ở điểm đặc biệt hoặc giới hạn của nghiệm tổng quát.

1.3 Phương trình vi phân cấp 1.

Phương trình vi phân có dạng:

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

Gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Trong đó $P(x)y$ và $Q(x)$ là các hàm liên tục.

Nếu $Q(x) = 0$ thì phương trình được gọi là **phương trình thuần nhất**.

Nếu $Q(x) \neq 0$ thì phương trình được gọi là **phương trình không thuần nhất** .

2 Phương pháp giải.

2.1 Phương pháp giải.

Bước 1: Tìm biểu thức $A(x) = e^{-\int P(x)\,dx}$.

Bước 2: Tìm biểu thức $B(x) = \int \frac{Q(x)}{A(x)}\,dx$.

Bước 3: Nghiệm tổng quát là $y = A(x)[B(x) + C]$.

2.2 Ví dụ.

Giải phương trình $y' + \frac{1}{x}y = 3x$ với điều kiện $y(1) = 1$.

Ta có:

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = 3x$$

Tính:

$$A(x) = e^{-\int P(x)\,dx} = e^{-\int \frac{1}{x}\,dx} = \frac{1}{x}$$

$$B(x) = \int \frac{Q(x)}{A(x)}\,dx = \int 3x \cdot x\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3$$

Nghiệm tổng quát:

$$y = A(x)[B(x) + C] = \frac{1}{x}(x^3 + C)$$

Áp dụng điều kiện ban đầu $x = 1, y = 1$:

$$1 = \frac{1}{1}(1^3 + C) \Rightarrow C = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$y = x^2$$

3 Bài toán lãi suất đưa về phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

3.1 Lý thuyết.

Giả sử số tiền $A(t)$ tăng trưởng theo lãi suất liên tục r trong khoảng thời gian rất nhỏ dt. Khi đó, số tiền tăng thêm là:

$$dA = rA(t)\,dt$$

Giả sử có thêm một hàm $f(t)$ biểu diễn dòng tiền vào hoặc ra tại thời điểm t. Khi đó, phương trình vi phân mô tả sự thay đổi của số tiền là:

$$\frac{dA}{dt} = rA(t) - f(t)$$

Tương đương, ta có phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất:

$$A'(t) - rA(t) = -f(t)$$

3.2 Dạng tổng quát.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp một có dạng:

$$y'(t) + P(t)y(t) = Q(t)$$

Trong bài toán tài chính, ta có:

- $y(t) = A(t)$: số tiền hoặc số dư nợ
- $P(t) = -r$: hệ số lãi suất (hằng số hoặc hàm theo thời gian)
- $Q(t) = -f(t)$: dòng tiền vào/ra

Do đó, mọi bài toán lãi suất liên tục đều đưa về dạng tuyến tính cấp một.

3.3 Phương pháp giải.

Xét phương trình:

$$A'(t) - rA(t) = -f(t)$$

Nhân cả hai vế của phương trình với nhân tử tích phân $e^{\int P(t)\,dt} = e^{-rt}$, ta được:

$$e^{-rt}A'(t) - re^{-rt}A(t) = -f(t)e^{-rt}$$

Nhận thấy vế trái là đạo hàm của tích:

$$(A(t)e^{-rt})' = -f(t)e^{-rt}$$

Lấy tích phân hai vế:

$$A(t)e^{-rt} = -\int f(t)e^{-rt}\,dt + C$$

Suy ra nghiệm tổng quát:

$$A(t) = e^{rt}\left(C - \int f(t)e^{-rt}\,dt\right)$$

4 Các dạng bài toán lãi suất

Giả sử $f(t)$ là một hằng số K.
Điều kiện ban đầu:

$$A(0) = e^{rt}\left(C - \int f(t)e^{-rt}\,dt\right) = Ce^{r\cdot 0} = \frac{e^{r\cdot 0}K}{e^{r\cdot 0}r} = C - \frac{K}{r}$$

Suy ra:

$$C = A(0) + \frac{K}{r}$$

4.1 Trả góp đều / Rút tiền đều

Với $f(t) = K$, ta có phương trình vi phân:

$$A'(t) = rA(t) - K$$

Nghiệm tổng quát:

$$A(t) = \frac{K}{r} + \left(A_0 - \frac{K}{r}\right) e^{rt}$$

4.2 Gửi tiền đều

Nếu mỗi tháng hoặc mỗi năm gửi vào ngân hàng một khoản đều đặn K, ta có phương trình vi phân:

$$A'(t) = rA(t) + K$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$A(t) = -\frac{K}{r} + \left(A_0 + \frac{K}{r}\right) e^{rt}$$

4.3 Không gửi/rút thêm

Khi $f(t) = 0$, tức là không có dòng tiền vào hoặc ra, ta có phương trình:

$$A'(t) = rA(t)$$

Nghiệm tổng quát:

$$A(t) = A(0) \cdot e^{rt}$$