

Bài tập

1)

Gọi $S(t)$ là số tiền ông A còn nợ sau t (tháng).

R là lãi suất trả góp mỗi tháng.

M là số tiền ông A trả mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền ông A nợ theo t:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= r \times S(t) - M \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= 0.01 \times S(t) - 2 \times 10^6 \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.01 \times S(t) &= -2 \times 10^6 \\ = > \int (S(t) \times e^{-0.01 \times t})' dt &= \int (-2 \times 10^6 \times e^{-0.01 \times t}) dt \\ = > S(t) \times e^{-0.01 \times t} &= 2 \times 10^8 \times e^{-0.01 \times t} + C \\ = > S(t) &= 2 \times 10^8 + C \times e^{0.01 \times t} \\ S(0) = 45 \times 10^6 &= > C = -155 \times 10^6 \\ S(t_0) = 0 \Rightarrow 0 &= 2 \times 10^8 - 155 \times 10^6 \times e^{0.01 \times t_0} \\ \Rightarrow t_0 &\approx 25,4892 \text{ tháng}\end{aligned}$$

Vậy thời điểm ông A trả góp xong là tháng 8/2021.

Bài 2

Gọi :

- . $S(t)$ là số tiền Bà T còn nợ sau t (tháng).
- . R là lãi suất trả góp mỗi tháng.
- . M là số tiền Bà T trả mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền Bà T nợ theo t:

$$\begin{aligned}* \frac{dS}{dt} &= r \times S(t) - M \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= 0.015 \times S(t) - 1 \times 10^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.015 \times S(t) = -1 \times 10^6 \\
& \Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.015t})' dt = \int (-10^6 \times e^{-0.015t}) dt \\
& \Rightarrow S(t) \times e^{-0.015t} = 10^8 \times e^{-0.015t} + C \\
& \Rightarrow S(t) = 10^8 + C \times e^{0.015t} \\
& * S(0) = 46 \times 10^6 \\
& \Rightarrow C = -\frac{62}{3} \times 10^6 \\
& * S(t_0) = 0 \\
& \Rightarrow 0 = 10^8 - \frac{62}{3} \times 10^6 \times e^{0.015t_0} \\
& \Rightarrow t_0 \approx 78,07 \text{ tháng}
\end{aligned}$$

Vậy thời điểm Bà T cần trả góp xong là 79 tháng.

3)

Gọi $S(t)$ là số tiền ông A còn nợ sau t (năm).

R là lãi suất trả góp mỗi năm.

M là số tiền ông A trả mỗi năm.

$$M = 12 \times 2 \times 10^7 = 24 \times 10^7$$

Tốc độ thay đổi của số tiền ông A nợ theo t :

$$\begin{aligned}
& \frac{dS}{dt} = r \times S(t) - M \\
& \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.12 \times S(t) - 24 \times 10^7 \\
& \Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.12 \times S(t) = -24 \times 10^7 \\
& \Rightarrow \int (S(t) \times e^{-0.12t})' dt = \int (-24 \times 10^7 \times e^{-0.12t}) dt \\
& \Rightarrow S(t) \times e^{-0.12t} = 2 \times 10^9 \times e^{-0.12t} + C \\
& \Rightarrow S(t) = 2 \times 10^9 + C \times e^{0.12t} \\
& S(15) = 0 = C = -2 \times 10^9 \times e^{-1.8}
\end{aligned}$$

$$S(0) = 2 \times 10^9 - 2 \times 10^9 \times e^{-1.8} \times e^{0.12 \times 0}$$

$$P_0 = 2.2 \times 10^9 - S(0) = 530,597,776 \text{ đồng}$$

Bài 4

Gọi :

- . $S(t)$ là số tiền bạn H còn nợ sau t (tháng).
- . R là lãi suất trả góp mỗi tháng.
- . M là số tiền bạn H trả mỗi tháng.
- . P_0 là phần tiền bạn H trả trước

Tốc độ thay đổi của số tiền bạn H nợ theo t :

$$* \frac{dS}{dt} = r \times S(t) - M$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.008 \times S(t) - 10^6$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.008 \times S(t) = -10^6$$

$$= > \int (S(t) \times e^{-0.008 \times t})' dt = \int (-10^6 \times e^{-0.008 \times t}) dt$$

$$= > S(t) \times e^{-0.008 \times t} = 125 \times 10^6 \times e^{-0.008 \times t} + C$$

$$= > S(t) = 125 \times 10^6 + C \times e^{0.008 \times t}$$

$$S(0) = 27 \times 10^6 - P_0$$

$$= > 27 \times 10^6 - P_0 = 125 \times 10^6 + C \times e^{0.008 \times 0}$$

$$= > C = 27 \times 10^6 - P_0 - 125 \times 10^6$$

$$S(18) = 0$$

$$= > 0 = 125 \times 10^6 + 27 \times 10^6 - P_0 - 125 \times 10^6 \times e^{0.008 \times 18}$$

$$P_0 \approx 10235969(\text{đồng})$$

5)

Gọi $S(t)$ là số tiền ông C còn nợ sau t (tháng).

R là lãi suất trả góp mỗi tháng.

M là số tiền ông C trả mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền ông A nợ theo t :

$$\begin{aligned}
& \frac{dS}{dt} = r \times S(t) - M \\
& \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.01 \times S(t) - M \\
& \Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.01 \times S(t) = -M \\
& \Rightarrow > \int (S(t) \times e^{-0.01 \times t})' dt = \int (-M \times e^{-0.01 \times t}) dt \\
& \Rightarrow > S(t) \times e^{-0.01 \times t} = 100 \times M \times e^{-0.01 \times t} + C \\
& \Rightarrow > S(t) = 100 \times M + C \times e^{0.01 \times t} \\
& \left\{ \begin{array}{l} S(0) = 100 \times M + C = 42 \times 10^6 \\ S(18) = 100 \times M + C \times e^{0.01 \times 18} = 0 \end{array} \right. \\
& \left\{ \begin{array}{l} C \approx -212962993 \\ M \approx 2,549,629 \text{ đồng} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Vậy mỗi tháng ông C phải trả 2,549,629 đồng.

Bài 6

Gọi :

- . $S(t)$ là số tiền bà A còn sau t (tháng).
- . R là lãi suất của tiết kiệm mỗi tháng.
- . M là số tiền bà A rút mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền bà A còn theo t :

$$\begin{aligned}
& * \frac{dS}{dt} = r \times S(t) - M \\
& \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0.004 \times S(t) - 2 \times 10^6 \\
& \Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.004 \times S(t) = -2 \times 10^6 \\
& \Rightarrow > \int (S(t) \times e^{-0.004 \times t})' dt = \int (-2 \times 10^6 \times e^{-0.004 \times t}) dt \\
& \Rightarrow > S(t) \times e^{-0.004 \times t} = 5 \times 10^7 \times e^{-0.004 \times t} + C \\
& \Rightarrow > S(t) = 5 \times 10^7 + C \times e^{0.004 \times t} \\
& * S(0) = 10^8 \\
& \Rightarrow > 10^8 = 5 \times 10^7 + C \times e^{0.004 \times 0} \\
& \Rightarrow > C = -400 \\
& \Rightarrow > S(t) = 5 \times 10^7 + 400 \times e^{0.004 \times t}
\end{aligned}$$

. Thời gian tối đa mà bà A có thể chu cấp cho cháu

$$\begin{aligned} * S(t_0) &= 0 \\ &= > 0 = 5 \times 10^7 + 400 \times e^{0.004 \times t_0} \\ &= > t_0 \approx 55,78 \text{ (tháng)} \end{aligned}$$

*Lấy $t_0 = 55$

Vậy thời gian mà bà A có thể chu cấp cho cháu mình là tới tháng 7/2024

7)

Gọi $S(t)$ là số tiền anh K tiết kiệm được sau t (năm).

R là lãi suất huy động mỗi năm.

M là số tiền tiết kiệm anh K gửi vào mỗi năm.

$$M = 12 \times 10^7$$

Tốc độ thay đổi của số tiền anh K tiết kiệm theo t :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= r \times S(t) + M \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= 0.06 \times S(t) + 12 \times 10^7 \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.06 \times S(t) &= 12 \times 10^7 \\ = > \int (S(t) \times e^{-0.06 \times t})' dt &= \int (12 \times 10^7 \times e^{-0.06 \times t}) dt \\ = > S(t) \times e^{-0.06 \times t} &= -2 \times 10^9 \times e^{-0.06 \times t} + C \\ = > S(t) &= -2 \times 10^9 + C \times e^{0.06 \times t} \\ S(0) = 10^8 &= > C = 21 \times 10^8 \\ S(t_0) = 1.5 \times 10^9 &= -2 \times 10^9 + 21 \times 10^8 \times e^{0.06 \times t_0} \\ \Rightarrow t_0 &= 8.51376 \approx 9 \text{ năm} \end{aligned}$$

Bài 8

Gọi :

- . $S(t)$ là số tiền ông C còn phải trả sau t (tháng).
- . R là lãi suất trả góp mỗi tháng.
- . M là số tiền ông C trả mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền ông C phải trả theo t:

$$\begin{aligned}
 * \frac{dS}{dt} &= r \times S(t) - M \\
 \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= r \times S(t) - 12 \times 10^6 \\
 \Rightarrow \frac{dS}{dt} - r \times S(t) &= -12 \times 10^6 \\
 = & > \int (S(t) \times e^{-r \times t})' dt = \int (-12 \times 10^6 \times e^{-r \times t}) dt \\
 = & > S(t) \times e^{-r \times t} = \frac{12 \times 10^6}{r} \times e^{-r \times t} + C \\
 = & > S(t) = \frac{12 \times 10^6}{r} + C \times e^{r \times t} \\
 * S(0) &= 680 \times 10^6 \\
 = & > 680 \times 10^6 = \frac{12 \times 10^6}{r} + C \times e^{r \times 0} \\
 = & > C = 680 \times 10^6 - \frac{12 \times 10^6}{r} \\
 = & > S(t) = \frac{12 \times 10^6}{r} + (680 \times 10^6 - \frac{12 \times 10^6}{r}) \times e^{r \times t} \\
 * S(60) &= 0 \\
 = & > 0 = \frac{12 \times 10^6}{r} + (680 \times 10^6 - \frac{12 \times 10^6}{r}) \times e^{r \times 60} \\
 = & > r \approx 0,0019 = 0.19\% (\text{lãi suất theo tháng})
 \end{aligned}$$

Lãi suất theo năm

$$\begin{aligned}
 * 12 \times \ln(1 + r_t) &= r_n \\
 = & > 12 \times \ln(1 + 0.19\%) \approx 2.27\%
 \end{aligned}$$

Vậy lãi suất theo năm ông phải trả là 2.27%.

9)

Gọi $S(t)$ là tổng số tiền bà A đã đóng và tiền lãi sau t (năm).

R là lãi suất ghép hàng năm.

M là số tiền tiết kiệm bà A đóng mỗi năm.

Tốc độ thay đổi của tuổng số tiền theo t:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= r \times S(t) + M \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= 0.03 \times S(t) + 15 \times 10^6 \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.03 \times S(t) &= 15 \times 10^6 \\ = > \int (S(t) \times e^{-0.03 \times t})' dt &= \int (15 \times 10^6 \times e^{-0.03 \times t}) dt \\ = > S(t) \times e^{-0.06 \times t} &= -5 \times 10^8 \times e^{-0.03 \times t} + C \\ = > S(t) &= -5 \times 10^8 + C \times e^{0.03 \times t} \\ S(0) = 0 &\Rightarrow C = 5 \times 10^8 \\ t_0 = 18 - 6 &= 12 \\ S(t_0) = S(12) = -5 \times 10^8 + 5 \times 10^8 \times e^{0.03 \times 12} &\approx 216,664,707 đồng\end{aligned}$$

Bài 10

Gọi :

- . S(t) là số tiền con bà A đang có theo t (năm).
- . R là lãi suất tham gia bảo hiểm mỗi năm.
- . M là số tiền bà A trả mỗi năm.

Tốc độ thay đổi của số tiền con bà A nhận được theo t:

$$\begin{aligned}* \frac{dS}{dt} &= r \times S(t) + M \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= r \times S(t) + 15 \times 10^6 \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.03 \times S(t) &= 15 \times 10^6 \\ = > \int (S(t) \times e^{-0.03 \times t})' dt &= \int (15 \times 10^6 \times e^{-0.03 \times t}) dt \\ = > S(t) \times e^{-0.03 \times t} &= -\frac{15 \times 10^6}{0.03} \times e^{-0.03 \times t} + C \\ = > S(t) &= -\frac{15 \times 10^6}{0.03} + C \times e^{0.03 \times t} \\ * S(0) = 0 &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= > 0 = -\frac{15 \times 10^6}{0.03} + C \times e^{0.03 \times 0} \\
&= > C = \frac{15 \times 10^6}{0.03} \\
&= > S(t) = -\frac{15 \times 10^6}{0.03} + \frac{15 \times 10^6}{0.03} \times e^{0.03 \times t} \\
&\ast S(t_0) = 150 \times 10^6 \\
&= > 150 \times 10^6 = -\frac{15 \times 10^6}{0.03} + \frac{15 \times 10^6}{0.03} \times e^{0.03 \times t_0} \\
&= > t_0 \approx 8.75 \text{ (năm)}
\end{aligned}$$

Vậy năm bà A tham gia Bảo hiểm là 2009.

11)

Gọi $S(t)$ là số tiền ông T còn nợ sau t (tháng).

R là lãi suất tvay mỗi tháng.

M là số tiền ông T trả mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền ông A nợ theo t :

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= r \times S(t) - M \\
\Rightarrow \frac{dS}{dt} &= 0.036 \times S(t) - 22 \times 10^6 \\
\Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.036 \times S(t) &= -22 \times 10^6 \\
= > \int (S(t) \times e^{-0.036 \times t})' dt &= \int (-22 \times 10^6 \times e^{-0.036 \times t}) dt \\
= > S(t) \times e^{-0.036 \times t} &= \frac{11}{18} \times 10^9 \times e^{-0.036 \times t} + C \\
= > S(t) &= \frac{11}{18} \times 10^9 + C \times e^{0.036 \times t} \\
t_0 = 3 \times 12 &= 36 \text{ tháng}
\end{aligned}$$

$$S(36) = 0 \Rightarrow C = -\frac{11}{18} \times 10^9 \times e^{-1.296}$$

$$S(0) = \frac{11}{18} \times 10^9 - \frac{11}{18} \times 10^9 \times e^{-1.296} \times e^{0.036 \times 0} \approx 443,896,381 \text{ đồng}$$

Bài 12

Gọi :

- . $S(t)$ là số tiền còn nợ của nhân viên (tháng).
- . R là lãi suất cho vay mỗi tháng.
- . M là số tiền công ty trả cho khoản vay mỗi tháng.

Tốc độ thay đổi của số tiền con bà A nhận được theo t:

$$\begin{aligned}
 * \frac{dS}{dt} &= r \times S(t) - M \\
 \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= 0.015 \times S(t) - 230 \times 10^6 \\
 \Rightarrow \frac{dS}{dt} - 0.015 \times S(t) &= -230 \times 10^6 \\
 = &> \int (S(t) \times e^{-0.015 \times t})' dt = \int (-230 \times 10^6 \times e^{-0.015 \times t}) dt \\
 = &> S(t) \times e^{-0.015 \times t} = \frac{230 \times 10^6}{0.015} \times e^{-0.015 \times t} + C \\
 = &> S(t) = \frac{230 \times 10^6}{0.015} + C \times e^{0.015 \times t} \\
 * S(0) &= 4.5 \times 10^9 \\
 = &> 4.5 \times 10^9 = \frac{230 \times 10^6}{0.015} + C \times e^{0.015 \times 0} \\
 = &> C = 4.5 \times 10^9 - \frac{230 \times 10^6}{0.015} \\
 = &> S(t) = \frac{230 \times 10^6}{0.015} + (4.5 \times 10^9 - \frac{230 \times 10^6}{0.015}) \times e^{0.015 \times t} \\
 * S(t_0) &= 0 \\
 = &> 0 = \frac{230 \times 10^6}{0.015} + (4.5 \times 10^9 - \frac{230 \times 10^6}{0.015}) \times e^{0.015 \times t_0} \\
 = &> t_0 \approx 23.16(\text{tháng})
 \end{aligned}$$

Vậy công ty mất khoảng 24 tháng để hoàn trả hết tiền cho nhân viên.

Quy đổi lãi suất:

A: Tiền gốc ban đầu

Lãi kép tháng \Rightarrow lãi liên tục năm:

$$A(1 + r_{\text{tháng}})^{12} = Ae^{r_{\text{năm}}}$$

$$\Rightarrow 12 \ln(1 + r_{tháng}) = r_{năm}$$

Lãi kép năm => lãi liên tục tháng:

$$A(1 + r_{năm}) = Ae^{12 \times r_{tháng}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1 + r_{năm})}{12} = r_{tháng}$$