Formulario di Statistica

Statistica descrittiva

I dati

Unità statistiche e popolazione

I dati rappresentano informazioni di una **popolazione**, ovvero l'intera collezione di unità statistiche sulle quali si cerca l'informazione.

Esistono due tipi di popolazioni:

- **popolazione reale**: unità che hanno una esistenza fisica, sono popolazioni effettive e quindi finite, possono essere osservate in modo completo (**censimento**) o parziale (**campionamento**)
- **popolazione virtuale**: hanno un'esistenza concettuale e sono derivate dalla potenziale replicabilità a piacere della sperimentazione; sono potenzialmente *infinite* e quindi esaminabili solo in modo parziale

censimento: si esaminano *tutte* le unità di una popolazione reale, con riferimento a determinate caratteristiche di interesse

Per popolazioni reali i censimenti sono raramente effettuati, si opta più spesso per un campione.

campionamento: si esamina un *sottoinsieme* finito di unità statistiche, appartenenti ad una *popolazione reale* o *virtuale*, selezionate mediante l'esperimento di campionamento.

L'**esperimento di campionamento** è un particolare esperimento, assimilabile all'estrazione casuale di alcuni elementi da un'urna.

È un **esperimento casuale (aleatorio)** dal momento che risultano possibili una pluralità di esiti (campioni osservati) e prima di effettuare il campionamento non è possibile individuare con certezza quale potenziale campione verrà selezionato (**variabilità campionaria**).

Affinché il campione porti informazioni sull'intera popolazione, la sua estrazione deve essere casuale.

- il campione va scelto in modo che rifletta le **caratteristiche della popolazione**
- Esistono vari **piani di campionamento**, il più semplice è il **campionamento casuale semplice**, assimilabile all'estrazione casuale con reinserimento di elementi da un'urna.

Tipi di Statistica

I metodi statistici si possono dividere in due grandi classi.

- **Statistica descrittiva**: metodi per la descrizione, la presentazione e la sintesi dei dati disponibili, al fine di individuarne la struttura essenziale. Le finalità sono principalmente di tipo descrittivo, poichè si sintetizzano le informazioni disponibili, che riguardano la totalità della popolazione. anche quando i dati disponibili rappresentano un campione estratto da una popolazione, nella statistica descrittiva non se ne tiene conto.

- **Statistica inferenziale**: sono metodo per ricavare dai dati campionari informazioni sulla popolazione di riferimento e per quantificare la fiducia da accordare a tali informazioni. Si utilizza metodi del **calcolo delle probabilità**

Statistica descrittiva

Gli elementi più rilevanti:

- Metodi grafici e numerici per descrivere e sintetizzare i dati osservati
- Distinzione fra tecniche di **analisi univariata** (relative ad una singola caratteristica) e tecniche di **analisi multivariata**, ovvero per lo studio congiunto di due o più caratteristiche di interesse.
- alcune nozioni di base sono utili anche per la statistica inferenziale.
- Come premessa ad una analisi inferenziale, è sempre opportuno effettuare uno studio descrittivo con riferimento al particolare campione osservato.

Analisi esplorativa

Un'analisi esplorativa dei dati ha l'obbiettivo di:

- capire come i dati sono stati raccolti e se sono di natura osservazionale o sperimentale
- individuare le unità statistiche, discutere la presenza di dati mancanti ed, eventualmente *ripulire* il dataset
- codificare e riorganizzare i dati nella forma più conveniente per l'analisi
- utilizzare metodo grafici e numerici per ricavare alcune informazioni preliminari sui dati osservati

Si suppone che i dati siano già stati acquisiti e siano disponibili nella forma di **matrice dei dati** (anche detto **data frame**), questi sono cosiddetti **dati grezzi** ad esempio:

unità	Genere	età	Livello istruzione	Dis
Andrea	M	28	3	5.0
claudio	M	17	2	7.5
Lucia	F	20	3	NA
...	...	...	...	...

con **NA** si intende un dato mancante.

La matrice dei dati fornisce informazioni sulla popolazione in esame con riferimento a:

- Genere: Maschio (M) o Femmina (F) - variabile qualitativa nominale
- Età: età in anni - variabile quantitativa discreta
- Livello di istruzione: 1 = nessuna istruzione, 2 = scuola dell'obbligo, 3 = diploma, 4 = laurea - variabile qualitativa ordinale
- Dis: distanza dal luogo di lavoro in km - variabile quantitativa continua

Ogni **riga** corrisponde a un'unità statistica e contiene i valori su essa relativi delle caratteristiche dmolteplicresse.

Ogni **colonna** corrisponde ad una caratteristica di interesse e contiene i valori di tale caratteristica rilevati sulle varie unità statistiche.

Variabili statistiche

Una **variabile** è una caratteristica delle unità statistiche che, al variare dell'unità, può assumere una pluralità di valori.

Le **modalità** di una variabile sono i valori che essa può assumere. Sono, in genere, aggettivi, valori numerici o espressioni verbali.

Le variabili si indicano con le lettere maiuscole, ad esempio Y, mentre una generica modalità si indica con *y*. L'insieme *Y* è l'insieme di tutte le possibili modalità di Y.

Le variabili si possono classificare nel seguente modo:

- **Variabili qualitative** (categoriali): se le modalità sono espresse in forma verbale, in particolare si individuano:
  - **variabili qualitative sconnesse** (normali): non è possibile individuare un ordinamento naturale delle modalità (es. genere, colore degli occhi)
  - **variabili qualitative ordinali**: è possibile invece individuare un ordinamento naturale delle modalità (es. livello di istruzione)
  - **Variabile dicotomica** (binaria): se una variabile qualitativa ha soltanto due modalità
- **Variabili quantitative** (numeriche): se le modalità sono espresse in forma numerica (diverse dalle codifiche numeriche). in particolare si individuano:
  - **variabili quantitative discrete**: se *Y* è un insieme finito o al più numerabile (es. numero di figli, ètà)
  - **variabili quantitative continue**: se *Y* è un insieme continuo (ad esempio distanza, altezza, reddito). si noti che la continuità ca intensa come una potenziale continuità co come opportuno **riferimento semplificativo**

Una variabile quantitativa può essere con una **scala di intervalli**, se non esiste uno zero naturale e non arbitrario (ad esempio "temperatura", perchè lo 0 è convenzionale e non ha senso dire che 30° è il doppio di 15°). Una variabile quantitativa è con una **scala di rapporti** se invece esiste uno zero con tali caratteristiche (es. peso, altezza, reddito).

Nello studio congiunto di due o più variabili si parla di analisi statistica bivariata o, in generale, multivariata.

La variabile *Y* viene rilevata su una popolazione (campione) costruita da *n* unità e si ottiene una successione di modalità osservate $(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$ dove $y_i \ i = 1, \ldots, n$ è il valore assunto da *Y* con riferimento all'unità i-esima.

Si definisce **Variabile statistica** la rilevazione $(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$ di una certa variabile *Y* su una determinata popolazione (campione). È una colonna della matrice dei dati.

Il valore che occupa la posizione i-esima, $y_{(i)}$, si dice avere **rango** *i*

Con **supporto** si intende un insieme delle modalità di Y effettivamente osservate nella popolazione, indicata con S_Y. il numero di elementi all'interno di S_Y sarà sempre minore o uguale a *n*.

Distribuzioni di frequenza

Frequenza assoluta

I dati grezzi (la variabile statistica), pur rappresentando pienamente il contenuto dell'osservazione, usualmente non permettono di cogliere in modo chiaro le caratteristiche del fenomeno in esame.

E utile passare dai dati in forma grazza ad una **tabella di frequenza** che fornisca una sintesi dei dati in un formato facile da capire.

un esempio:

Genere	Frequenza
M	5
F	7
Totale	12

Una tabella di frequenza riferita ad una **variabile statistica qualitativa** è detta **serie statistica**

Se la **variabile statistica** è **quantitativa continua**, si osservano (a meno di effetti di arrotondamento) tante modalità distinte quante sono le unità statistiche.

è conveniente definire **classi di modalià** contigue e contare le unità che appartengono a ciascuna classe.

Le classi vanno definite in modo che: non siano ne troppe ne troppo poche. Una regola indicativa è di utilizzare circa $\sqrt{n}$ classi.

Una **tabella (distribuzione) di frequenza** con modalità raggruppate in classi:

Classi	$y_0 \dashv y_1$	$\dots$	$y_{i-1} \dashv y_i$	$\dots$	$y_{J-1} \dashv y_J$	**Totale**
Freq	f_1	$\dots$	f_i	$\dots$	f_J	$\sum_{i=1}^{J} f_i$

nota che il simbolo $\dashv$ indica che l'estremo sinistro è incluso nella classe, mentre quello destro no, in notazione matematica standard: $[y_{i-1}, y_i)$.

Frequenza relativa

La **frequenza relativa** di una modalità y_j, o di una classe di modalità $y_{j-1} \dashv y_j$, è la proporzione p_j di unità statistiche portatrici di tale modalità o classe di modalità. corrisponde a:

$$p_j = \frac{f_j}{\sum_{j=1}^{J} f_j} = \frac{f_j}{n}, \quad j = 1, \dots, J$$

Si possono definire anche le **frequenze relative percentuali** definite come $p_j 100, j = 1, \dots, J$

Qualora si abbia un solo dato, la variabile statistica è detta **degenere**

Frequenze cumulative

Quando si hanno **variabili con modalità ordinabili**, può essere utile considerare la frequenza con cui si presentano modalità di ordine inferiore o uguale ad un certo valore.

La **frequenza assoluta cumulata** F_j o la **frequenza relativa cumulata** P_j definiscono la frequenza assoluta o relativa di modalità o classi di modalità non superiori alla j-esima, $j = 1, \ldots, J$

Si ottengono cumulando progressivamente le frequenze, più precisamente:

$$F_j = \sum_{i=1}^{j} f_i, \quad P_j = \sum_{i=1}^{j} p_i, \quad j = 1, \ldots, J$$

Altri tipi di distribuzioni di frequenza

SERIE STORICA

Quando si misura un fenomeno nel tempo, si ottiene una distribuzione di frequenza che prende il nome di serie storica (temporale).

Esempio. Si considera il numero di occupati in Italia dal 1997 al 2001.

Anno	No. occupati (in migliaia)
1997	20207
1998	20435
1999	20692
2000	21080
2001	21514

SERIE SPAZIALE

Quando si misura un fenomeno nello spazio, si ottiene una distribuzione di frequenza che prende il nome di serie spaziale (territoriale).

Esempio. Si considera il numero di occupati in Italia nel 2002, suddivisi per ripartizione territoriale.

Ripartizione territoriale	No. occupati (in migliaia)
Nord	11461
Centro	4513
Sud e Isole	6286

Rappresentazioni grafiche

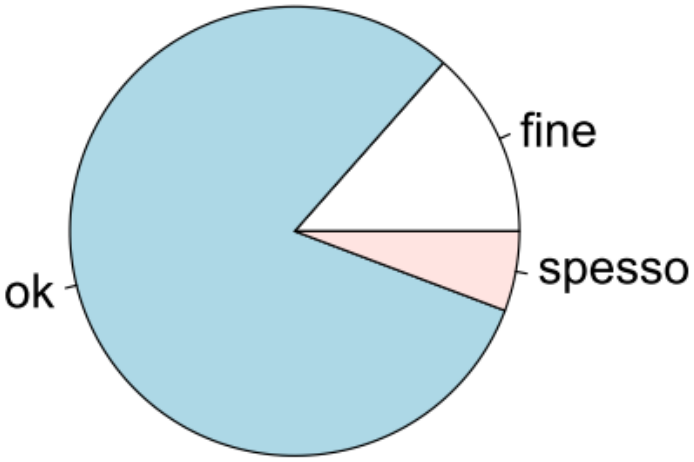
Oltre alle tabelle di frequenza, risulta utile introdurre alcune rappresentazioni grafiche, dette **diagramma statistici** (grafici)

- Per dati categoriali si possono utilizzare, ad esempio:
  - **diagrammi circolari** (o a torta)
  - **diagrammi a rettangoli**
  - **diagrammi a rettangoli multipli**
- Per dati numerici si possono utilizzare, ad esempio:
  - **diagrammi a bastoncini**
  - **istogrammi**
  - **poligoni di frequenza**
  - **stima della densità**
  - **funzione di ripartizione empirica**
  - **diagrammi di dispersione**
  - **box-plot**

Diagrammi circolari

I diagrammi circolari (a torta) sono utili per rappresentare serie statistiche sconnesse, riferite a dati qualitativi nominali o eventualmente ordinali (dati categoriali). L'area del settore circolare deve essere proporzionale alla frequenza della modalità corrispondente.

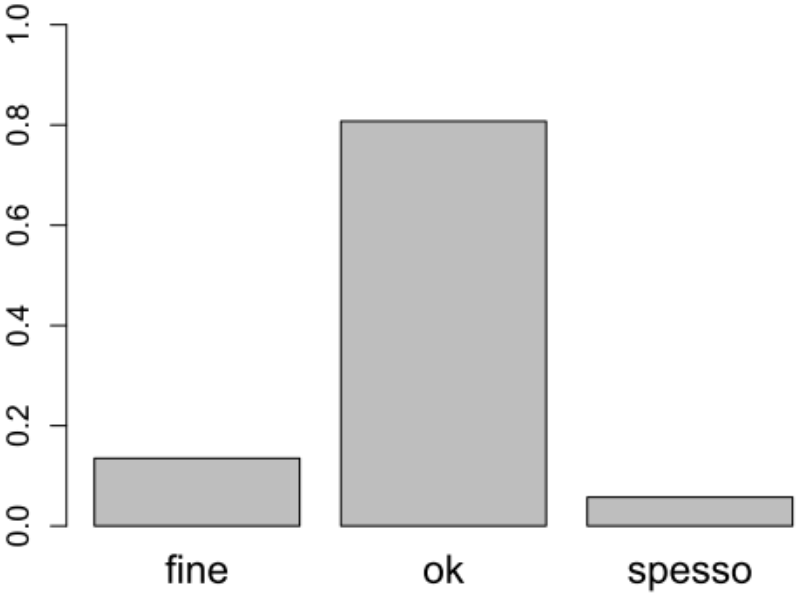
Esempio. Perni (continua). Considerando i dati riferiti alla produzione dei perni, le diverse modalità relative al diametro sono rappresentate dagli spicchi della torta, la cui dimensione Ł proporzionale alla corrispondente frequenza.



Diagrammi a Barre

I diagrammi a rettangoli (a barre) sono utili per rappresentare serie statistiche sconnesse, riferite a dati qualitativi nominali o eventualmente ordinali (dati categoriali). Le altezze dei rettangoli sono proporzionali alle frequenze delle modalità. Le basi hanno la stesa dimensione e sono separate per non implicare alcuna continuità.

Esempio. Perni (continua). Considerando i dati riferiti alla produzione dei perni, si ottiene il seguente diagramma a rettangoli.

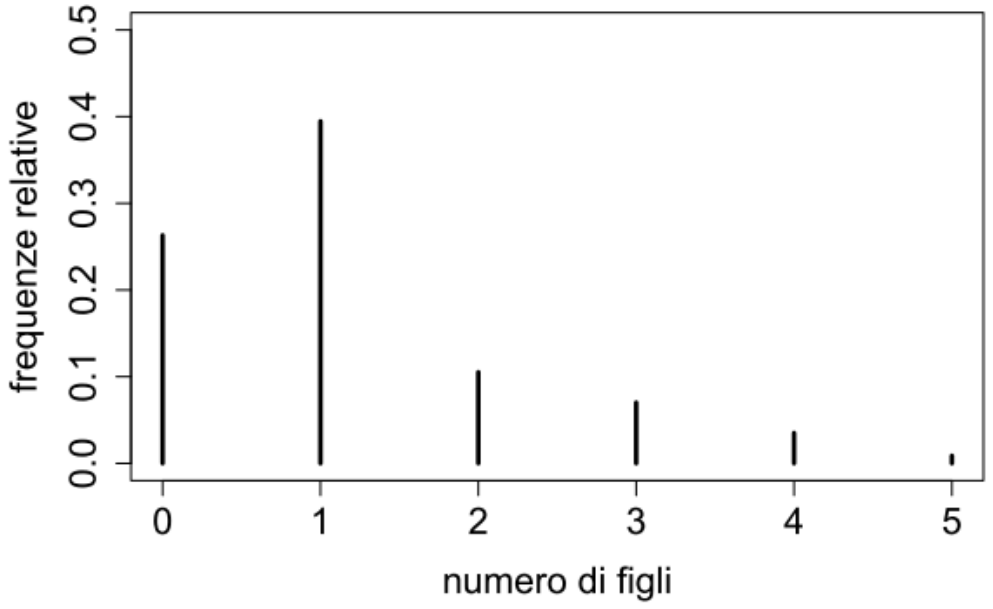


I rettangoli hanno la base uguale e sono separati per non implicare alcuna continuità. Le altezze sono proporzionali alle frequenze delle modalità; si considerano le frequenze relative affinché il confronto abbia senso.

Diagrammi a bastoncini

I **diagrammi a bastoncini** servono per rappresentare **distribuzioni di frequenza assoluta o relativa**, riferite a dati qualitativi discreti. L'altezza dei bastoncini è proporzionale o pari alla frequenza, assoluta o relativa, della modalità.

Esempio. Figli. Si considera il numero di figli con riferimento alle famiglie residenti in un determinato territorio. La distribuzione di frequenza relativa Ł rappresentata con il seguente diagramma.



Istogrammi

Gli **istogrammi** si utilizzano per rappresentare **distribuzioni di frequenza assoluta o relativa** con modalità raggruppate in classi, riferite usualmente a **dati quantitativi continui**.

L'istogramma è un insieme di rettangoli adiacenti, ognuno rappresentativo di una classe, posti su un piano cartesiano, il valore indicato è rappresentato **dall'area**.

Il rettangolo corrispondente alla i-esima classe e ha come intervallo $[y_{j-1}, y_j]$ e ha:

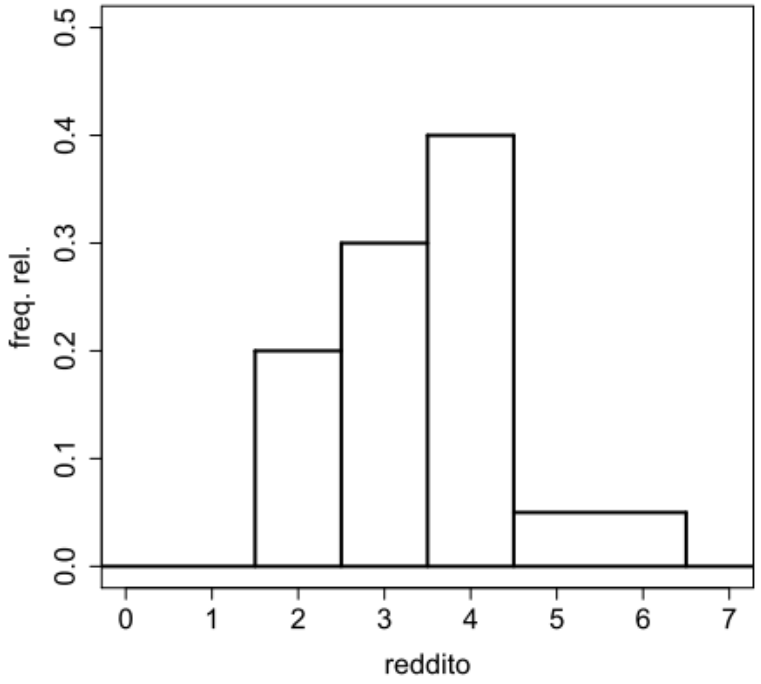
- altezza (e quindi area) proporzionale a, oppure pari a, $f_j/(y_j - y_{j-1})$: **istogramma delle frequenze assolute**
- altezza (e quindi area) proporzionale a, oppure pari a, $p_j/(y_j - y_{j-1})$: **istogramma delle frequenze relative**

Se i rettangoli hanno la stessa base, allora l'altezza è proporzionale a f_j o p_j.

Esempio. Reddito. Si consideri la seguente seriazione riferita alla variabile reddito (lordo mensile in migliaia di euro)

Reddito	**1.5 ⊣ 2.5**	**2.5 ⊣ 3.5**	**3.5 ⊣ 4.5**	**4.5 ⊣ 6.5**	**Tot.**
Freq.	0.2	0.3	0.4	0.1	1

L'associato istogramma della frequenze relative corrisponde a

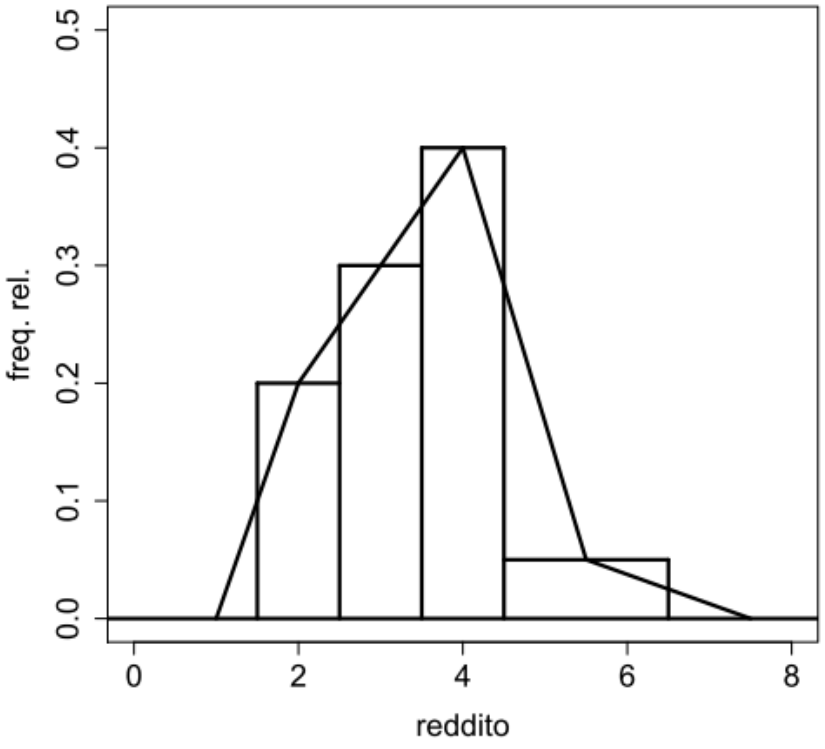


Poligoni di frequenza

Un poligono di frequenza è uno smussamento locale dell'istogramma.

Il poligono si ottiene unendo i punti di mezzo dei lati superiori dei rettangoli dell'istogramma con una linea spezzata.

Esempio. Reddito (continua). Si consideri la seriazione riferita alla variabile reddito. Partendo dall'associato istogramma si ottiene il corrispondente poligono di frequenza.



Stima della densità

In alternativa all'istogramma, è possibile definire una stima della distribuzione delle frequenze tramite una curva che risulti essere più smussata (in questo modo si tiene conto che la variabile è continua).

Date le osservazioni $y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n$, la funzione che rappresenta la **stima della densità con il metodo del nucleo** è definita come:

$$f_n(y) = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{y - y_i}{b}\right), \quad y \in \mathbb{R}$$

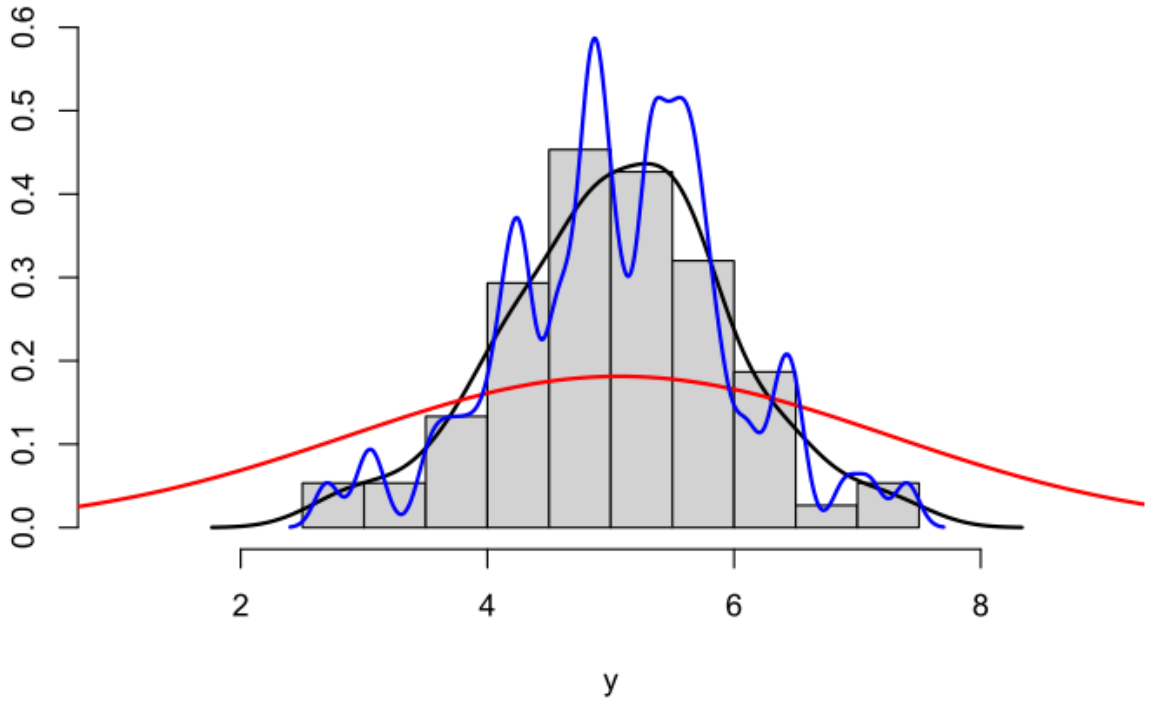
dove $K(\cdot)$ è detta **nucleo** (kernal) , b > 0 è la **banda** e **R** è l'insieme dei numeri reali.

Ad ogni dato y_i si sovrappone non un rettangolo ma una curva che risulta essere più smussata. La sua altezza è proporzionale alla frequenza dei punti e la sua ampiezza dipende dalla banda b.

Si possono scegliere diversi nuclei K(·), che devono soddisfare ad alcune proprietà; in particolare, $K(u) \geq 0$ e $\int u^2 K(u) du = 1$.

È importante scegliere la banda b in modo opportuno (in genere i software operano una scelta ottimale): se b è troppo grande il grafico risulta appiattito, mentre se b è troppo piccolo il grafico si avvicina ad un grafico a bastoncini.

Dato un insieme di osservazioni numeriche, si costruisce l'istogramma delle frequenze relative, la stima della densità con scelta ottimale per b (**nero**), con b troppo grande (rosso) e troppo piccolo (blu).



Funzione di ripartizione empirica

Un'ulteriore rappresentazione grafica per **dati quantitativi**, e che risulta in molti casi particolarmente efficace, è fornita dalla **funzione di ripartizione empirica**.

La funzione di ripartizione empirica è una funzione il cui valore nel punto $y \in \mathbb{R}$ corrisponde al rapporto tra il numero di osservazioni minori o uguali a *y* e il numero totale di osservazioni.

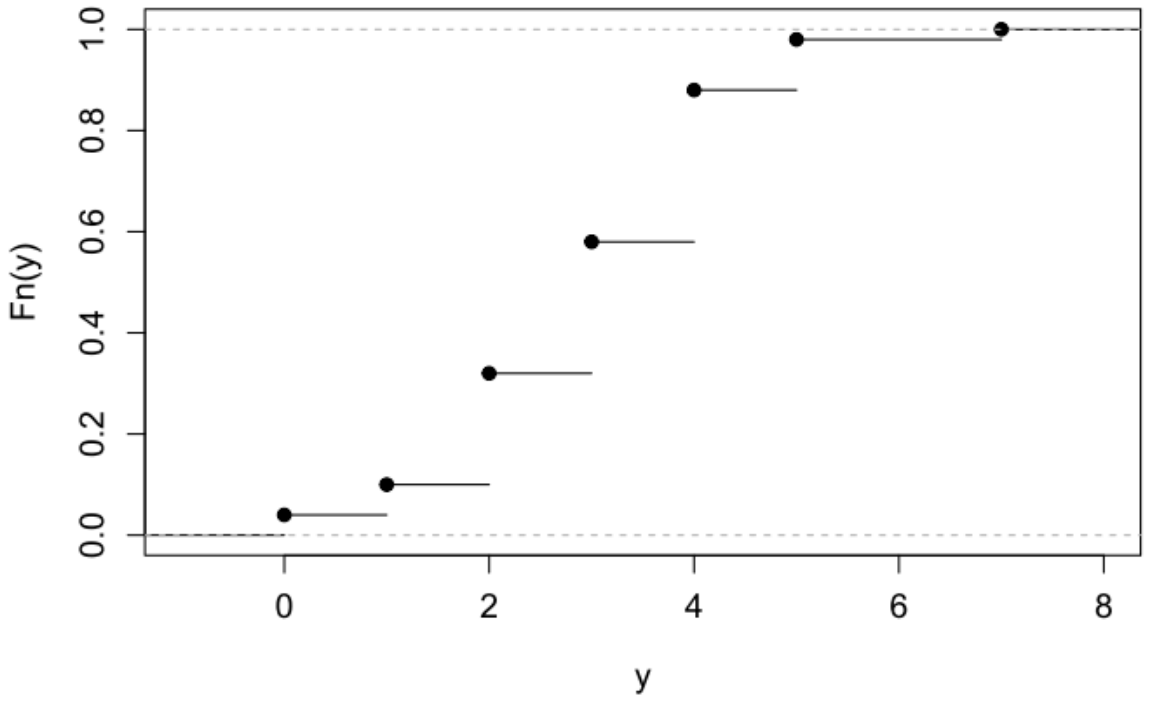
$$F_n(y) = \frac{no.oss. \leq y}{no.totaleoss}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Al variare di *y* fornisce la proporzione cumulata di unità statistiche che presentano modalità minori o uguali a *y* ed è quindi una funzione a gradini.

La nozione di funzioni di ripartizione empirica è utile per una rappresentazione grafica delle frequenze relative cumulate, in particolare per variabili quantitative discrete

Esempio. Si consideri la seguente tabella delle frequenze relative e relative cumulate riferita ad una variabile quantitativa discreta. Di seguito viene rappresentata la corrispondente funzione di ripartizione empirica

Y	0	1	2	3	4	5	7	Totale
Freq. rel.	0.04	0.06	0.22	0.26	0.30	0.10	0.02	1
Freq. rel. cum.	0.04	0.10	0.32	0.58	0.88	0.98	1.00	1



Diagrammi di dispersione

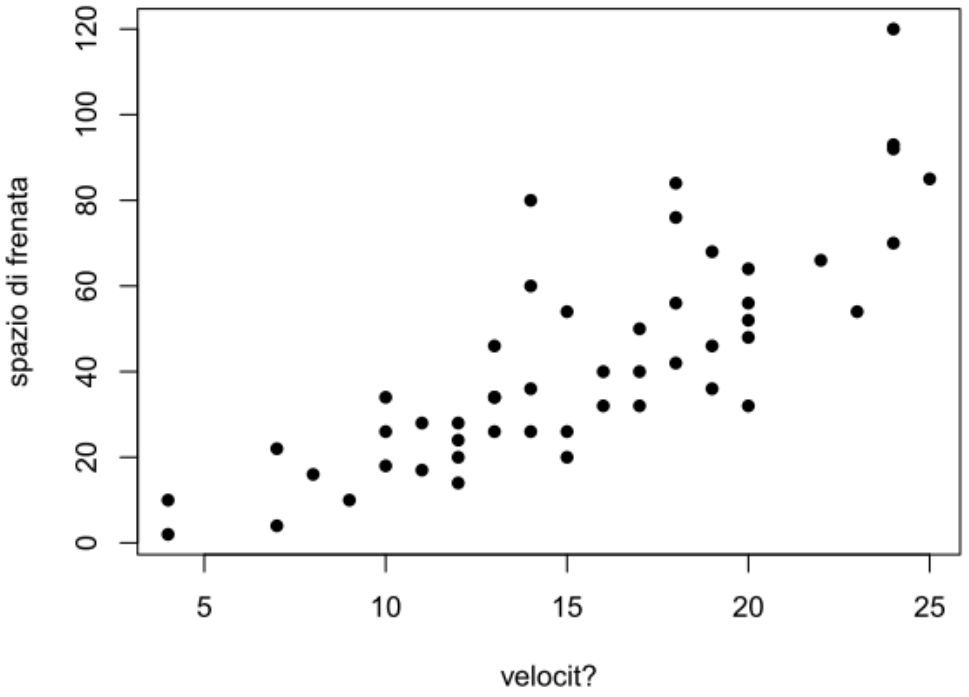
In molti casi, per ogni unità statistica vengono raccolti dati di più variabili.

Nel caso di due **variabili quantitative**, per una prima analisi della relazione tra le variabili si possono usare i **diagrammi di dispersione** (scatter plot).

se x_i, y_i sono i valori delle due variabili, il diagramma di dispersione si ottiene rappresentando i punti in un piano cartesiano.

Per più di due variabili, si possono ottenere i diagrammi di dispersione per ogni coppia di variabili.

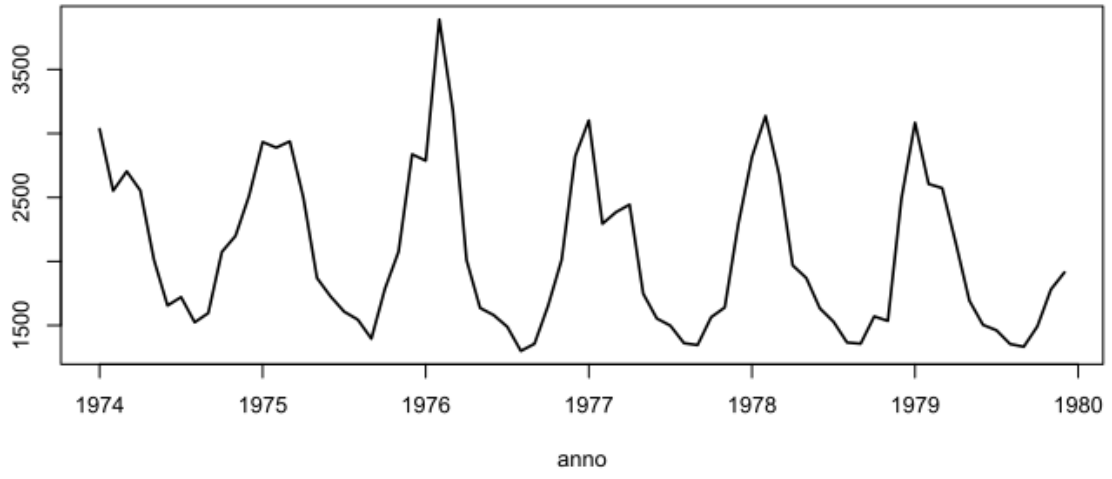
Esempio. Velocità. Si dispone di dati riferiti alla velocità, in miglia orarie, e allo spazio di frenata, in piedi, per n = 50 automobili degli anni ’20. Si costruisce il seguente diagramma di dispersione.



Lo spazio di frenata aumenta al crescere della velocità, con una relazione che che si discosta leggermente da quella lineare.

Se i dati bivariati presentano una **componente temporale**, si ha una serie storica. In questo caso, si possono rappresentare i dati in funzione del tempo utilizzando un particolare diagramma di dispersione con i punti uniti da una linea spezzata.

Esempio. Patologie polmonari. Si considerano i dati riferiti al numero di decessi mensili per patologie polmonari (bronchiti, asma, enfisema) rilevati nel Regno Unito dal 1974 al 1979.



I decessi, come prevedibile, aumentano nei mesi invernali inoltre, tra il 1975 e il 1976, c'è stato un evidente aumento del numero dei decessi.

Indici sintetici

È interessante indagare i seguenti aspetti dei dati:

- la **posizione**, cioè il centro dei dati
- la **variabilità**, cioè la dispersione dei dati
- la forma della distribuzione di frequenza, considerando in particolare la **simmetria** e la **curtosi** (pesantezza delle code)

Si presentano anche alcuni **indici sintetici** che descrivino la posizione, la variabilità, la simmetria e la curtosi di una variabile statistica.

Nel caso in cui i dati derifine da un indagine campionaria, gli indici vengono detti indici campionari.

Indici di posizione: media aritmetica

Un aspetto rilevante dei dati è rappresentato dal suo **centro**, cioè dal punto attorno al quale le modalità osservate si dispongono.

Un **indice di posizione** è espresso nell'ordine di grandezza di Y e individua tale centro, che costituisce, in alcuini casi, il baricentro della distribuzione di frequenza.

La **media aritmetica** che è l'indice di posizione più noto, si può calcolare per una variabile quantitativa Y e si indica con $E(Y)$, con μ_Y o semplicemente con μ.

Se si dispone dei dati grezzi $y_1, \ldots, y_n$, allora:

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Se, con riferimento ad una variabile quantitativa discreta Y , si dispone della tabella di frequenza assoluta o relativa, allora:

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{J} y_j f_j = \sum_{j=1}^{J} y_j p_j$$

Qualora si abbiano delle classi di modalità, si può approssimare la media aritmetica sostituendo ad ogni classe il punto medio di essa $m_j = (y_{j-1} + y_j)/2$:

La media aritmetica risente della presenza di osservazioni anomale o estreme (outliers).

La media aritmetica soddisfa le seguenti proprietà.

1. **Proprietà di Cauchy**: Sia $S_Y = y_1, \ldots, y_J$ con $y_1 < \ldots < y_J$ allora:

   $$y_1 \leq E(Y) \leq y_J$$

   La media è compresa tra il più piccolo e il più grande valore osservato.

2. **Proprietà di baricentro**: Sia $Y - E(Y)$ la variabile scarto di Y dalla sua media E(Y), allora:

$$E(Y - E(Y)) = 0$$

Infatti, considerando i dati grezzi e le modalità osservate $y_i - E(Y), j = 1, \ldots, J$ della variabile Y-E(Y), si ha:

$$E(Y - E(Y)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - E(Y))$$

$$= E(Y) - \frac{1}{n}nE(Y) = 0$$

3. **proprietà di linearità**. sia aY + b, a, b $\in \mathbb{R}$, una trasformata lineare della variabile Y, allora:

$$E(aY + b) = aE(Y) + b$$

Indice di posizione: mediana

La mediana si può calcolare per una variabile qualitativa ordinale o quantitativa Y e si indica con $y_{0.5}$ ed è quel valore che, rispetto all'ordinamento non decrescente delle osservazioni, le divide in due parti uguali. è il valore centrale.

Se si dispone dei dati grezzi $y_1, \ldots, y_n$, ordinati secondo un ordinamento non decrescente, allora la mediana di $y_{0.5}$ corrisponde

- alla modalità che si trova nelle posizione (n+1)/2 se *n* è **dispari**, cioè $y_{0.5} = y_{(n+1)/2}$
- alle modalità che si trovano nelle posizioni n/2 e (n/2)+1 se *n* è **pari**, cioè $y_{0.5} = (y_{(n/2)}$ e $y_{0.5} = y_{(n/2+1)})/2$

Nel caso di variabili quantitative con n pari, si può avere anche un intervallo di valori $[y_{n/2}, y_{(n/2)+1}]$ che soddisfano alla definizione di mediana. In questo caso si può prendere il punto di mezzo come mediana convenzionale.

Se si dispone soltanto della **distribuzione di frequenza relativa o assoluta**, si può operare nel seguente modo.

Si suppone che le modalità del supporto S Y = $y_1, \ldots, y_J$ siano ordinate in senso crescente.

Se sono note solo le frequenze relative $p_j, j = 1, \ldots, J$, e quindi la dimensione n della popolazione non risulta nota, allora la mediana corrisponde alla modalità y_j che presenta frequenza relativa cumulata più piccola tale che $P_j \geq 0.5$.

Se esiste una modalità y_j tale che $P_j = 0.5$, allora sia y_j che y_{j+1} soddisfano la definizione di mediana.

Quantili

La mediana può venire interpretata come un particolare **quantile di livello** α, con α ∈ (0, 1), indicato con la scrittura y_α .

Data una variabile qualitativa ordinale o quantitativa Y , y_α è quel valore che, rispetto all'ordinamento non decrescente delle osservazioni, risulta preceduto da α100% osservazioni e seguito da (1 − α)100% osservazioni, a meno degli effetti di discretezza.

è evidente che, se $\alpha = 0.5$, si ottiene la definizione di mediana.

I quantili di livello $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$ vengono chiamati **quartili** e dividono le osservazioni ordinate in 4 parti uguali.

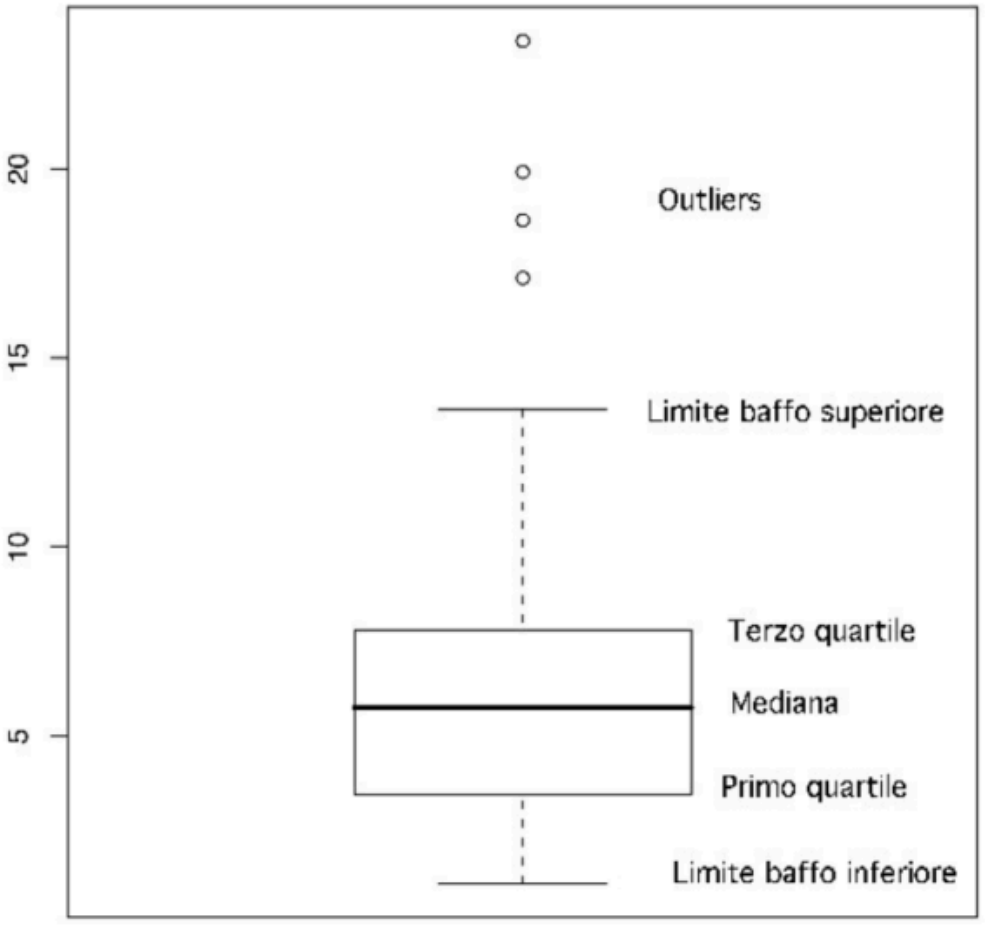
I quantili di livello $\alpha = 0.10, 0.20, \ldots, 0.90$ vengono chiamati **decili** e dividono le osservazioni ordinate in 10 parti uguali.

I quantili di livello $\alpha = 0.01, 0.02, \ldots, 0.99$ vengono chiamati **percentili** e dividono le osservazioni ordinate in 100 parti uguali.

Nel caso di variabili quantitative si può avere anche un intervallo di valori che soddisfano alla definizione di quantile. In questo caso si può prendere il punto di mezzo come **quantile convenzionale**.

Boxplot

Il diagramma a scatola e baffi (box and whiskers plot), abbreviato spesso in boxplot, fornisce una sintesi grafica efficace dell'insieme di dati basata sui quantili.



La **scatola** contiene il 50% centrale della distribuzione di frequenza ed Ł delimitata dal primo quartile $y_{0.25}$ e dal terzo quartile $y_{0.75}$.

In corrispondenza della **mediana** $y_{0.5}$ viene tracciata una linea.

I **baffi** si prolungano fino al valore minimo e massimo osservati o fino ai percentili $y_{0.01}$ e $y_{0.99}$. La lunghezza dei baffi può venire specificata in modo alternativo con l'obiettivo di far emergere potenziali valori anomali (**outliers**).

Esistono diverse varianti a seconda del software utilizzato.

Indici di posizione: moda

La moda si può calcolare per variabili qualitative o quantitative, si indica con y_{mo} e corrisponde alla modalità che si verifica con maggior frequenza.

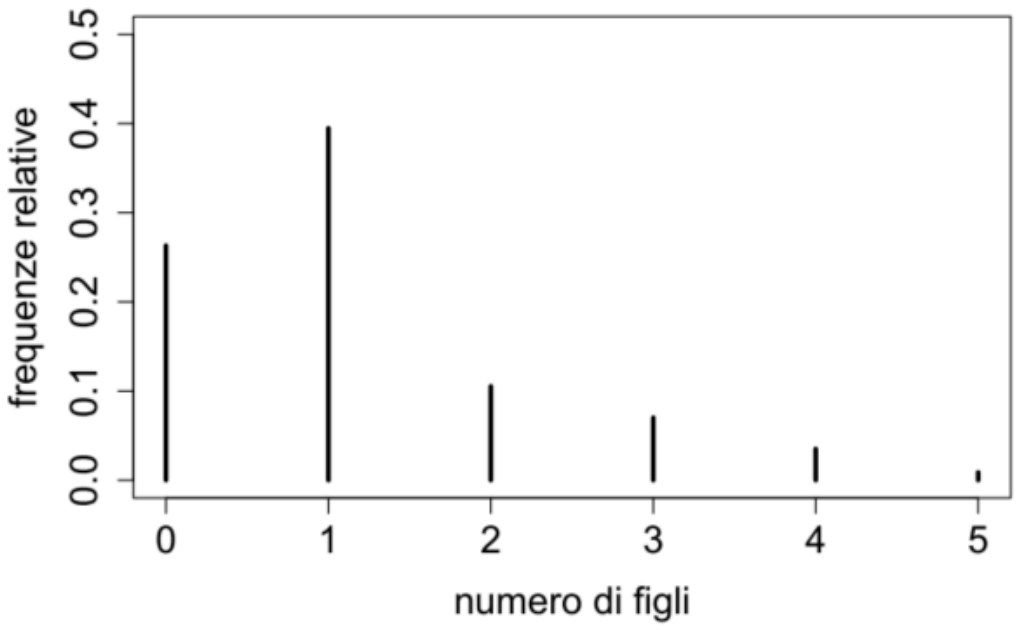
La moda di una variabile statistica Y corrisponde al valore y_{mo} del supporto S_Y a cui è associata la frequenza, relativa o assoluta, più alta.

La moda è la modalità più comune e non è detto che sia unica.

La moda è un indice di posizione molto grezzo. Può non individuare il centro dei dati. Ci possono essere distribuzioni **unimodali**, **bimodali** o **multimodali**.

Nel caso in cui si abbia una tabella di frequenza con modalità raggruppate in classi, si può individuare la classe modale, soltanto se le classi hanno tutte la stessa ampiezza.

Esempio. Figli (continua). Si considera il numero di figli con riferimento alle famiglie residenti in un determinato territorio.



Dalla analisi del diagramma a bastoncini si conclude facilmente che $y_{mo} = 1$ e la distribuzione è unimodale.

Indici di variabilità

L'individuazione del centro di un insieme di dati, tramite opportuni indici di posizione, può non essere sufficiente per descrivere in modo completo la associata distribuzione di frequenza.

Si presentano i seguenti **indici di variabilità** utili per **variabili quantitative**:

- **campo di variazione**
- **scarto interquantilico**
- **varianza (e scarto quadratico medio)**
- **coefficiente di variazione**

Non si considerano gli indici di variabilità per **variabili qualitative**, detti anche **indici di mutabilità**.

La variabilità di una variabile statistica si traduce nella diversificazione delle modalità osservate. Se Y è quantitativa, tale diversificazione si intende sia come diversità di valori osservati sia come distanza fra essi.

Indici di variabilità: campo di variazione

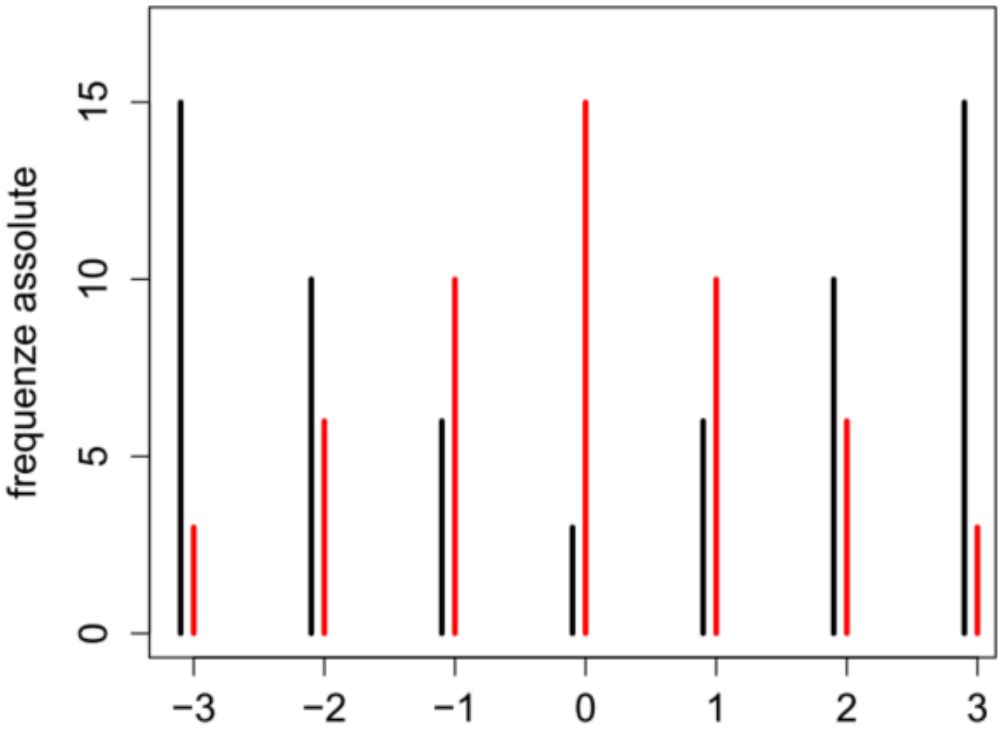
Sia Y una variabile statistica quantitativa. Il **campo di variazione** (range) corrisponde a

$$R_Y = y_{(n)} - y_{(1)}$$

ossia alla differenza tra l'osservazione più grande e l'osservazione più piccola.

Se Y è degenere, allora $R_Y = 0$, altrimenti $R_Y > 0$.

R Y è sensibile alla presenza di valori anomali. Inoltre è un indice piuttosto povero, come dimostra il seguente graco dove si considerano le distribuzioni di frequenza di due diverse variabili statistiche (rappresentate in nero e in rosso) con lo stesso campo di variazione ma diversa variabilità.



Indici di variabilità: scarto interquartilico

Lo **scarto interquartilico** di una variabile statistica quantitativa Y corrisponde a

$$SI_Y = y_{0.75} - y_{0.25}$$

ossia alla differenza tra il terzo e il primo quartile.

$$SI_Y$$

esprime la lunghezza dell'intervallo dove cade il 50% centrale della distribuzione di frequenza. Nel boxplot corrisponde all'ampiezza della scatola

L'indice SI Y può essere nullo anche per variabili non degeneri; ad esempio, si annulla per Y = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 5), poichè $y_{0.75} = y_{0.25} = 2$. In presenza di poche osservazioni nomale ha proprietà di robustezza.

Indici di variabilità: varianza e scarto quadratico medio

Il più importante indice di variabilità per variabili quantitative è la **varianza**, che si indica con $V(Y)$, con σ_Y^2 o semplicemente con σ^2 .

Data una variabile statistica Y con media aritmetica E(Y), si ha:

$$V(Y) = E[(Y - E(Y))^2]$$

La varianza è la media aritmetica della variabile scarto $Y - E(Y)$ elevata al quadrato e misura la dispersione dei dati attorno alla media. L'unità di misura è pari a quella dei dati elevata al quadrato.

Lo scarto quadratico medio di Y, indicato con σ_Y o con σ, è la radice quadrata aritmetica (l'unica positiva) della varianza

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$$

è nella stessa unità di misura di Y.

Se si dispone dei dati grezzi $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, e si è preventivamente calcolata $E(Y)$, allora la varianza corrisponde a

$$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - E(Y))^2$$

Se si dispone della **distribuzione di frequenza assoluta o relativa**

$$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J}(y_j - E(Y))^2 f_j = \sum_{j=1}^{J}(y_j - E(Y))^2 p_j$$

La varianza soddisfa le seguenti proprietà:

1. **Proprietà di non negatività**: $V(Y) \geq 0$ e $V(Y) = 0$ se e solo se Y è degenere.
2. **Formula per il calcolo**:

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

3. **Proprietà di invarianza per traslazione**:

$$V(Y+b) = V(Y), \quad b \in \mathbb{R}$$

4. **Proprietà di omogeneità di secondo grado**:

$$V(aY) = a^2 V(Y), \quad a \in \mathbb{R}$$

Indici di variabilità: coefficiente di variazione

Con riferimento a **variabili statistiche che assumono solo valori positivi** si può introdurre un indice adimensionale di variabilità detto **coefficiente di variazione**.

$$CV_Y = \frac{\sigma_Y}{E(Y)}$$

è un indice di variabilità relativa, nel senso che misura la variabilità dei dati tenendo conto dell'ordine di grandezza del fenomeno.

Essendo un numero puro, permette il confronto tra insiemi di dati diversi, ad esempio, con unità di misura diverse o con valori medi molto distanti.

Una **variabile statistica** con **media nulla** e **varianza unitaria** è detta **standardizzata**.

Con la standardizzazione dei dati possono emergere più chiaramente alcune ulteriori caratteristiche della distribuzione di frequenza, oltre la posizione e la variabilità.

Simmetria e asimmetria

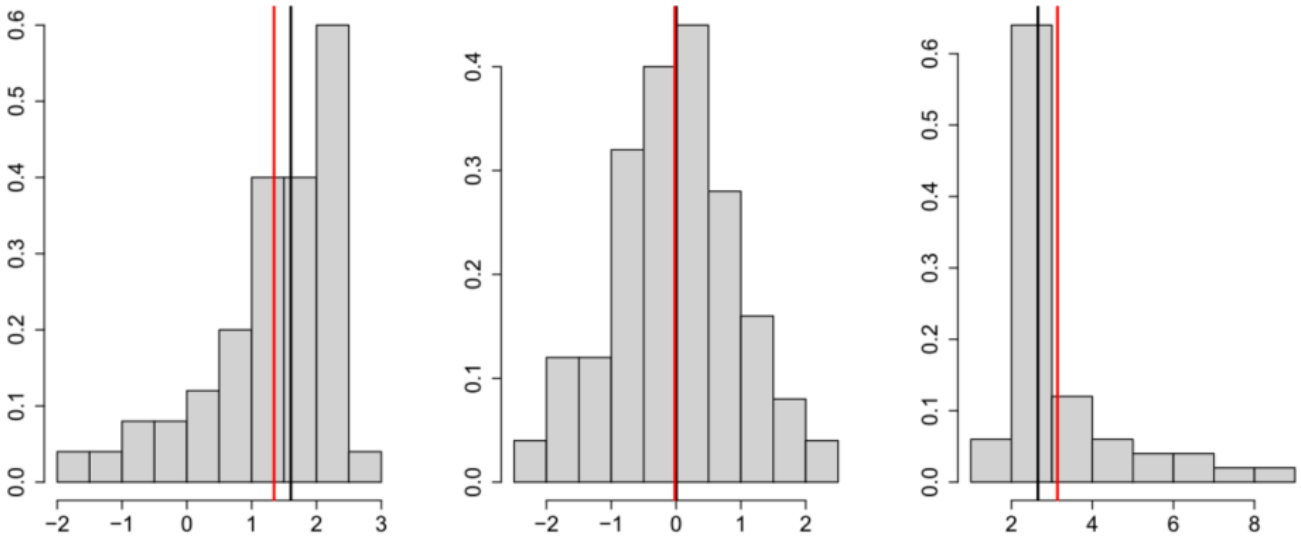
Una **distribuzione di frequenza** (ad esempio rappresentata con un istogramma o un diagramma a bastoncini) è **simmetrica** se la sua metà di destra si sovrappone alla sua metà di sinistra (dove la metà è identicata dalla mediana).

si noti che:

- se l'assimetria è **positiva** media > mediana
- se la distribuzione è **simmetrica** media = mediana
- se l'assimetria è **negativa** media < mediana

Per una distribuzione di frequenza unimodale e simmetrica si ha che: media ≈ mediana ≈ moda.

Nel grafici sottostanti la linea **nera** indica la mediana e la linea rossa indica la media.



Nel primo grafico si ha una distribuzione di frequenza con asimmetria negativa, nel terzo una distribuzione di frequenza con asimmetria positiva, mentre nel secondo c'è una sostanziale simmetria.

Indice di simmetria

Data una variabile statistica quantitativa Y , con media aritmetica E(Y), l'indice indice di simmetria più utilizzato è:

$$\gamma_Y = \frac{E[(Y - E(Y))^3]}{\sigma_Y^3}$$

dove $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$ è lo scarto quadratico medio di Y .

Se si dispone dei **dati grezzi** $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, e si sono preventivamente calcolati $E(Y)$ e σ_Y , allora l'indice di simmetria corrisponde a

$$\gamma_Y = \frac{1/n \sum_{i=1}^{n} (y_i - E(Y))^3}{\sigma_Y^3}$$

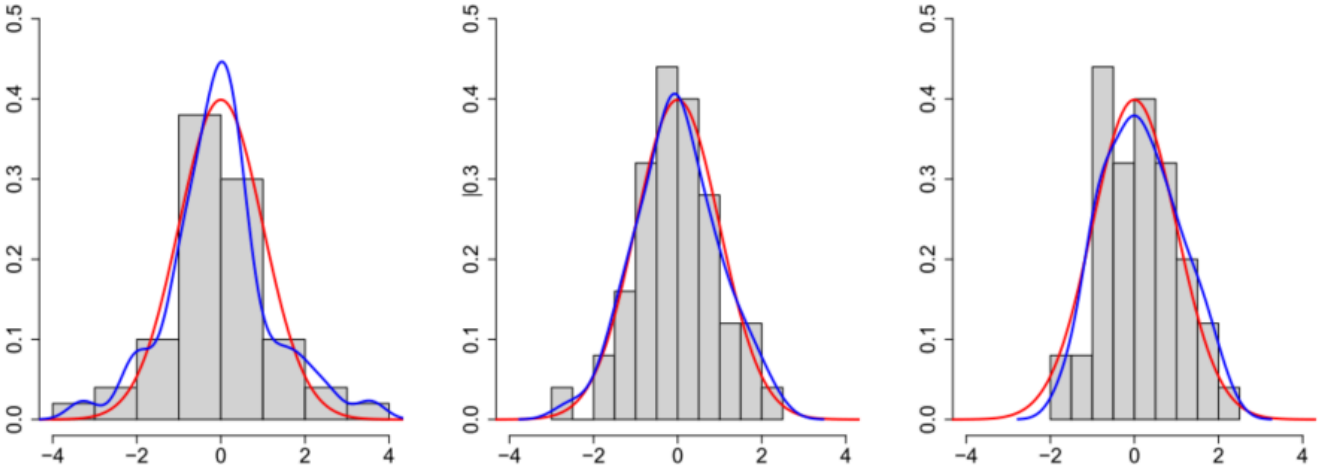
- Se la distribuzione di frequenza è **simmetrica**, $\gamma_Y \approx 0$;
- se c'è **asimmetria negativa**, $\gamma_Y < 0$;
- se c'è **asimmetria positiva**, $\gamma_Y > 0$.

Curtosi e indice di curtosi

La **curtosi** corrisponde ad un allontanamento dalla distribuzione di frequenza normale (o gaussiana), che viene considerata come riferimento.

Una **distribuzione platicurtica (ipornormale)** presenta un maggiore appiattimento e code leggere, mentre una **distribuzione leptocurtica** (**ipernormale**) manifesta un maggiore allungamento e code pesanti.

Istogramma, densità normale e stima della densità nel caso di distribuzione leptocurtica (sinistra), distribuzione normocurtica (centro) e distribuzione platicurtica (destra).



Data una variabile statistica quantitativa Y , con media aritmetica $E(Y)$, l'indice indice di curtosi più utilizzato è

$$\beta_Y = \frac{E[(Y - E(Y))^4]}{\sigma_Y^4}$$

Se si dispone dei dati grezzi $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, e si sono preventivamente calcolati $E(Y)$ e σ_Y , allora l'indice di curtosi corrisponde a:

$$\beta_Y = \frac{1/n \sum_{i=1}^{n} (y_i - E(Y))^4}{\sigma_Y^4}$$

Se la distribuzione di frequenza Ł normocurtica, $\beta_Y \approx 3$; se è leptocurtica, $\beta_Y > 3$; se Ł platicurtica, $\beta_Y < 3$.

Analisi multivariate

Le analisi descrittive multivariate sono relative allo studio congiunto di due o più variabili statistiche.

L'analisi congiunta di due variabili può fornire conclusioni interessanti sulla manifestazione di un fenomeno che si articola nell'osservazione congiunta di due suoi aspetti particolari.

Distribuzione di frequenza

Si considerano due variabili *X* e *Y*. La loro osservazione su n unità statistiche fornisce i dati grezzi $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n.$

A partire dai dati grezzi si possono determinare le distribuzioni di frequenza assoluta e relativa che si possono distinguere in:

- **distribuzione congiunta**: se si considerano le frequenze delle unità che presentano congiuntamente la modalità $x_l, r = 1, \ldots, m$ della prima variabile e la modalità $y_s, s = 1, \ldots, k$ della seconda
- **distribuzione marginale**: se si considera la distribuzione relativa ad una singola variabile
- distribuzione condizionata: se si considera la distribuzione di frequenza relativa ad una sinola variabile considerando soltanto le unità statistiche che assumono una determinata modalità dell'altra

Si può operare allo stesso modo anche se si hanno modalità raggruppate in classi.

Rappresentazione grafiche

Se si dispone dei **dati grezzi**, riferiti a due variabili quantitative, si può disegnare un **grafico di dispersione (scatterplot)**, dove le coppie (x_i, y_i) sono rappresentate come punti nel piano, i cui assi corrispondo alle due variabili.

Studio della dipendenza

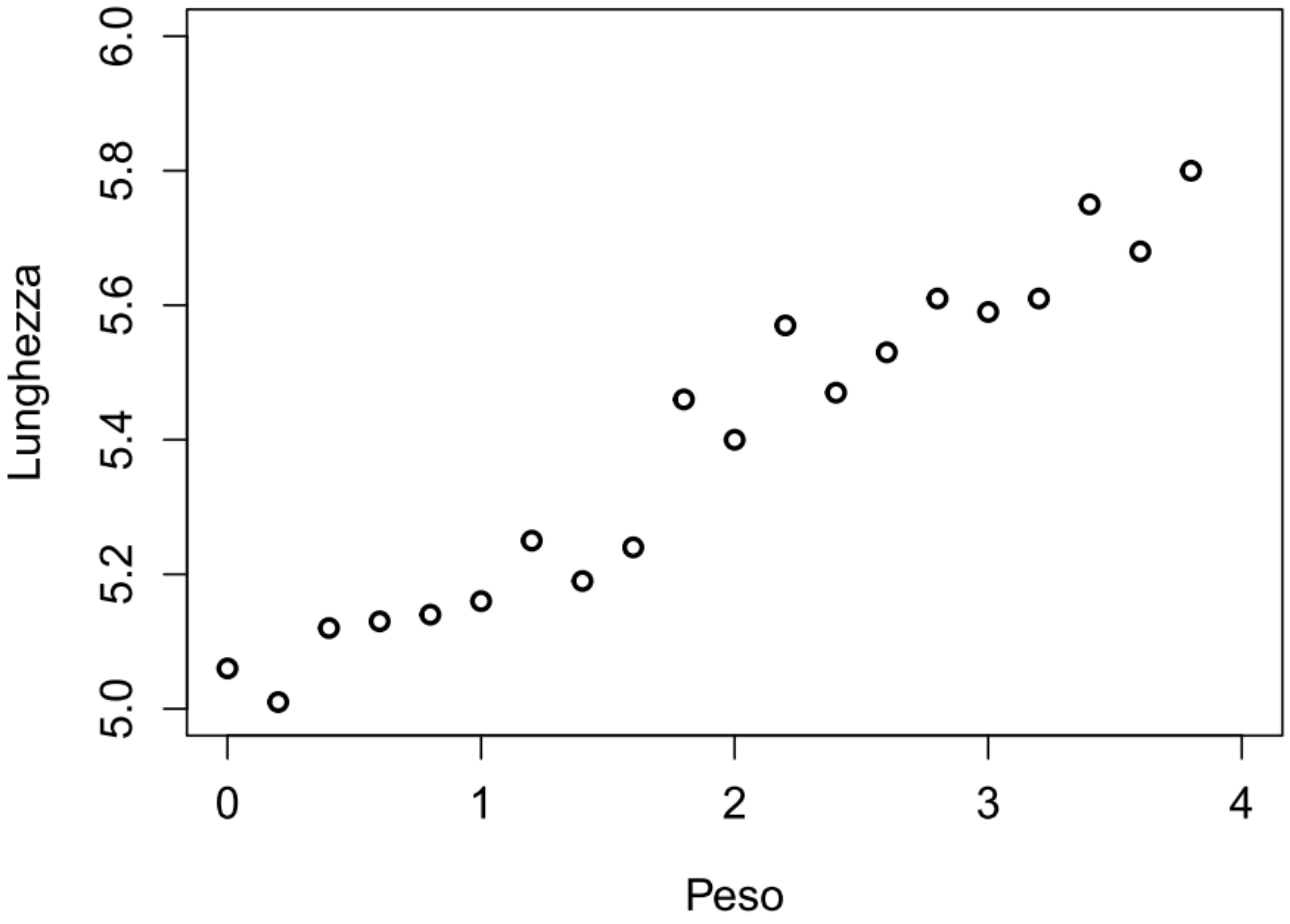
In alcuni casi X e Y vengono tratte in modo **simmetrico**

In altri casi, come nell'esempio sottostante,è necessario individuare la variabile dipendente (risposta) e la variabile indipendente (esplicativa); X e Y sono trattate in modo non simmetrico.

Esempio. Molla. Si considerano i dati sulla misura in cm di una molla sottoposta a n = 20 pesi diversi in Kg

Peso(kg)	Lunghezza(cm)	Peso(kg)	Lunghezza(cm)
0.0	5.06	2.0	5.40
0.2	5.01	2.2	5.47
0.4	5.12	2.4	5.47
0.6	5.13	2.6	5.53
0.8	5.14	2.8	5.61
1.0	5.16	3.0	5.59
1.2	5.25	3.2	5.61
1.4	5.19	3.4	5.75
1.6	5.24	3.6	5.68
1.8	5.46	3.8	5.80

Produce il seguente grafico di dispersione:



Si evidenziano tre situazioni tipiche di coppie di variabili:

- le due variabili sono qualitative: **analisi di dipendenza** o (**connessione**)
- una variabile è qualitativa e l'altra quantitativa: **analisi di dipendenza in media**
- le due variabili sono quantitative: **analisi di correlazione** e **analisi di regressione**

Se si hanno più di due variabili, si possono analizzare le relazioni tra le variabili connesse, a due a due, per una analisi complessiva si possono utilizzare i metodi piø generali, propri della statistica descrittiva multivariata.

Analisi di dipendenza

Si considerano due **variabili statistiche** *X* e *Y* qualitative (categoriali) e si vuole indagare l'esistenza o meno di associazione (dipendenza) tra le modalità corrispondenti.

Esempio: Attitudine. Si analizza l'attitudine musicale X e pittorica Y di n = 15 individui con la seguente scala di modalità: sufficiente (S), buona (B), ottima (O). I dati vengono sintetizzati nella seguente tabella di frequenza congiunta, detta tabella di contingenza

		Y			
		S	B	O	
X	S	1	3	0	4
	B	1	3	2	6

	O	2	1	2	5
	4	7	4	15	

Ad esempio, il valore 3 nella prima riga indica che ci sono 3 individui con attitudine musicale sufficiente e attitudine musicale buona.

Distribuzioni di frequenza

Una tabella di frequenza è di fatto una distribuzione doppia di frequenza. Inoltre, risulta utile per indagare le relazioni esistenti tra le modalità delle due variabili.

Dalla tabella di contingenza si ricavano le seguenti **distribuzioni di frequenza assoluta**:

- **conginuta**: $(x_r, y_s), n_{rs}, r = 1, \dots, m, s = 1, \dots, k$
- **marginale di** X: $x_r, n_{r+}, r = 1, \dots, m$
- **marginale di** Y: $y_s, n_{+s}, s = 1, \dots, k$
- **condizionata di** X **dato** Y $= y_s$: $x_r, n_{rs}, r = 1, \dots, k$
- **condizionata di** Y **dato** X $= x_r$: $y_s, n_{rs}, s = 1, \dots, m$

Le frequenze marginali di X e di Y corrispondono, rispettivamente, ai totali di riga e di colonna.

Le frequenze condizionate di X e di Y corrispondono, rispettivamente, ai valori di colonna e di riga individuati dalle condizioni $Y = y_s$ e $X = x_r$

Le **distribuzioni di frequenza relativa** si ottengono dividendo per i corrispondenti totali. In particolare, le distribuzioni congiunta e marginali si dividono per n, le distribuzioni condizionate per i totali di riga o di colonna corrispondenti alla condizione.

Indipendenza statistica

Si parla di **indipendenza statistica** quando tutte le distribuzioni condizionate di Y dato $X = x_r$, $r = 1, \dots, m$, sono uguali, e quindi uguali alla distribuzione marginale di Y.

Analoghe considerazioni si possono fare per le distribuzioni condizionate di X dato $Y = y_s$, $s = 1, \dots, k$, e per la distribuzione marginale di X.

In tal caso, il valore assunto da una variabile non influenza il valore assunto dall'altra.

Indice di connessione

La *distanza* fra le frequenze osservate in una tabella di contingenza e le frequenze attese nel caso di indipendenza è misurata dall'**indice di connessione** χ^2 $$\chi^2 = \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^k \frac{(n_{rs} - \hat{n}_{rs})^2}{\hat{n}_{rs}}$$

dove $\hat{n}_{rs} = (n_{r+} n_{+s})/n$ è la frequenza attesa nel caso di indipendenza.

L'indice χ^2 vale 0 quando tutte le frequenze osservate coincidono con quelle attese, e quindi vi è indipendenza fra le due variabili.

Viceversa, tanto maggiori sono i valori osservati di χ^2, tanto più le due variabili saranno connesse (statisticamente dipendenti). Il valore massimo dell'indice è n min$(m-1, k-1)$. I valori m e k indicano, rispettivamente, il numero di righe e di colonne della tabella di contingenza.

Quindi si ottiene una quantità che assume valori nell'intervallo $[0, 1]$. Se vale 0 le variabili sono statisticamente indipendenti, se vale 1 si ha dipendenza statistica piena tra X e Y .

Dipendenza in media

Le variabili vengono analizzate in modo **asimmetrico** perché si studia la dipendenza in media della **variabile quantitativa** Y dai livelli della **variabile qualitativa** X.

Due variabili Y ed X si diranno indipendenti in media se la media condizionata di Y dato X è la stessa per ogni valore assunto da X, ovvero se

$$E(Y|X = x_r) = E(Y)$$

per ogni possibile $x_r, r = 1, \ldots, m$.

Viceversa, se le varie medie condizionate sono diverse, allora le due variabili si diranno **dipendenti in media**.

Se due variabili sono indipendenti allora sono anche indipendenti in media, mentre non è vero il viceversa.

Covarianza

Si vuole misurare l'intensità del **legame lineare** tra due variabili **quantitative** e la direzione della relazione.

Una misura della dipendenza lineare fra due variabili quantitative X e Y , con media E(X) e E(Y), Ł data dalla **covarianza**

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))(y_i - E(Y))$

Spesso si indica con σ_{XY} , che ne richiama il legame con la varianza che corrisponde a $V(X) = \sigma_X^2 = \sigma_{XX}$

Coefficiente di correlazione lineare

Vale la **diseguaglianza di Cauchy-Schwarz**:

$$-\sigma_X \sigma_Y \leq \sigma_{XY} \leq \sigma_X \sigma_Y$$

Una misura normalizzata della dipendenza lineare è il **coefficiente di correlazione lineare** definito da

$$\rho_{XY} = Corr(X, Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Dalla diseguazianda di cauchy-Schwarz si ha che $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

Se $\rho_{XY} > 0$ x'è **relazione lineare crescente** fra X e Y; nel caso in cui $\rho_{XY} = 1$ i punti(x_i, y_i) sono allineati su una retta di pendenza positiva.

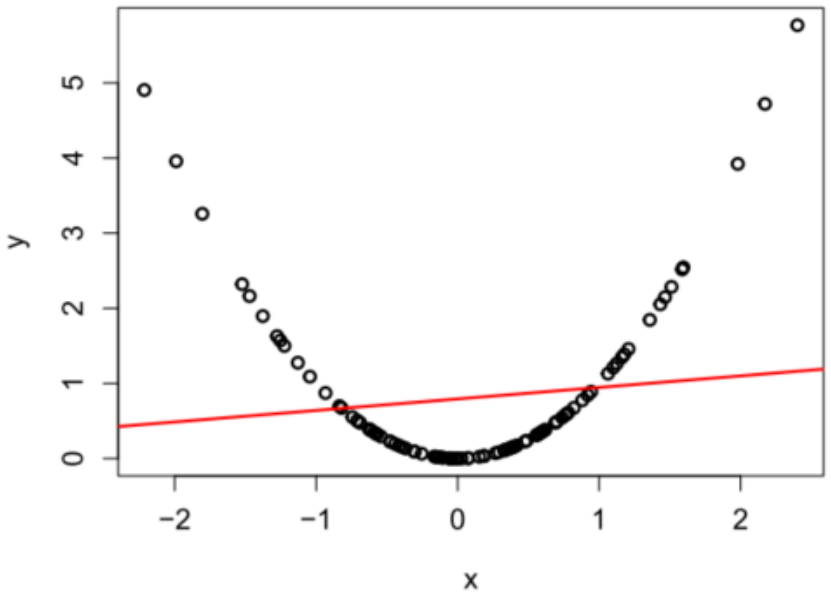
Se $\rho_{XY} < 0$ x'è **relazione lineare decrescente** fra X e Y; nel caso in cui $\rho_{XY} = -1$ i punti(x_i, y_i) sono allineati su una retta di pendenza negativa.

Il valore assoluto $|\rho_{XY}|$ indica la forza del legame lineare

Se $\rho_{XY} = 0$, c'è assenza di legame lineare tra X e Y , che sono dette incorrelate (ma non necessariamente indipendenti).

L'incorrelazione è una forma di indipendenza più debole dell'indipendenza statistica: la seconda implica la prima, ma non vale necessariamente il viceversa.

Tra X e Y c'è un legame quadratico perfetto, che il coefficiente di correlazione lineare, che vale 0.12, non misura.



Anche per **variabili qualitative ordinali** X e Y è possibile definire un indice che misura l'intensità (come l'indice χ^2) e il verso dell'associazione.

Dati i valori osservati $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$, si considerano i **ranghi** (posizione dell'unità statistica dopo aver ordinato i valori in senso crescente), calcolati separatamente per ciascuna delle due variabili.

Si definisce **indice di correlazione tra i ranghi di Spearman** ρ^S_{XY}, il coefficiente di correlazione lineare calcolato sui ranghi invece che sulle osservazioni (e ci sono osservazioni uguali, si considera come rango il valore medio delle loro posizioni).

Il coefficiente ρ^S_{XY} si può utilizzare anche per **variabili quantitative**, come alternativa robusta a ρ_{XY}. Un'ulteriore alternativa è rappresentata dall'**indice di correlazione di Kendall**.

Regressione lineare semplice

Si analizzano congiuntamente di due o più **variabili quantitative**. È una generalizzazione dell'analisi di dipendenza in media.

In generale, con l'analisi di regressione si studia la media condizionata di una **variabile risposta** Y in funzione di una (regressione semplice) o più (regressione multipla) **variabili esplicative** $X_1, \ldots, X_p, p \geq 1$.

Si considera la **regressione lineare semplice**, dove tra la variabile risposta Y e l'unica variabile esplicativa X si ipotizza una relazione lineare.

In particolare, per descrivere il comportamento in media di Y in funzione di X si può considerare l'equazione della retta

$$y_i = a + bx_i + errore, \quad i = 1, \ldots, 20$$

dove *a* indica la lunghezza attesa della molla nel caso in cui il peso sia nulla e *b* determina il verso e l'intensità della relazione lineare tra *X* e *Y*.

Il termine di errore evidenzia il fatto che la relazione lineare non si adatta perfettamente ai dati $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, 20$

Il modello di regressione lineare semplice (modello lineare) è definito dall'equazione

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

dove $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$ sono i valori osservati per la **variabile dipendente** Y e per la **variabile esplicativa** X

I valori ε_i speficicano gli **errori**, mentre *a* e *b* sono i **coefficienti di regressione**., con *a* l'intercetta e *b* il coefficiente angolare della **retta di regressione** $y = a + bx$

L'interesse è rivolto al comportamento complessivo e non a ciò che avviene per le single coppie di ooesservazioni.

Metodo dei minimi quadrati

I *coefficenti di regressione* bib sibi bitum sibi oaranetru da stunare sulla base dei dati osservati, in modo che la retta di regressione si adatti bene alle osservazioni

Per stimare i coefficienti di regressione può essere ragionevole cercare i valori di *a* e *b* che minimizzano la **somma dei quadrati degli errori**

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

Il metodo presentato è detto **metodo dei minimi quadrati** e le stime ottenute, indicate con $\hat{a}$ e $\hat{b}$, sono le **stime dei minimi quadrati** che corrispondono a

$$\hat{a} = E(Y) - \hat{b}E(X), \quad \hat{b} = \frac{Cov(X, Y)}{V(X)}$$

La retta $y = \hat{a} + \hat{b}x$ è detta **retta di regressione stimata (retta dei minimi quadrati)**.

Tra l'**analisi di regressione** e l'**analisi di correlazione** ci sono differenze e punti di contatto.

- Nella correlazione, c'è **simmetria** tra le due variabili, mentre nella regressione c'è **assimetria**: si suppone di fissare i valori x_i per vedere come variano i valori y_i.
- Nella regressione si opera come se i valori x_i fossero stati fissati a priori e ottenuti senza errore
- Il coefficente angolare stimato della retta regressione $\hat{b}$ è direttamente proprizionale al coefficente di correlazione lineare ρ_{XY}

$$\hat{b} = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

Valori stimati dal modello e residui stimati

Una volta calcolate le stime $\hat{a}$ e $\hat{b}$ per i coefficienti di regressione, si possono determinare i **valori stimati dal modello**

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

I **residui stimati** sono le differenze tra i valori osservati e i valori stimati dal modello:

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

cioè la stima degli errori (residui) basata sulle osservazioni.

Coefficiente di determinazione

Il modello lineare è utile solo nel caso di relazione lineari tra Y e X.

Con l'obbiettivo di valutare la bontà del modello di regressione. si vuole individuare un indice in grado di valutare l'adatttamento globale del modello ai dati, oltre che la sua capcità esplicativa per il fenomento Y.

La varianza $V(Y)$ associata alla variabile statistica Y (**varianza totale**) può essere vista come somma della quota $V(\hat{Y})$ descritta dal modello (**varianza spiegata**) e della quota $V(\hat{\varepsilon})$ rimanente (**varianza residua**)

$$V(Y) = V(\hat{Y}) + V(\hat{\varepsilon})$$

dove $\hat{Y}$ e $\hat{\varepsilon}$ sono, rispettivamente, i valori stimati dal modello e i residui stimati.

Un indice di bontà di adattamento del modello lineare è dato dal **coefficiente di determinazione** R^2, che corrisponde alla proporzione di varianza di Y spiegata dal modello di regressione

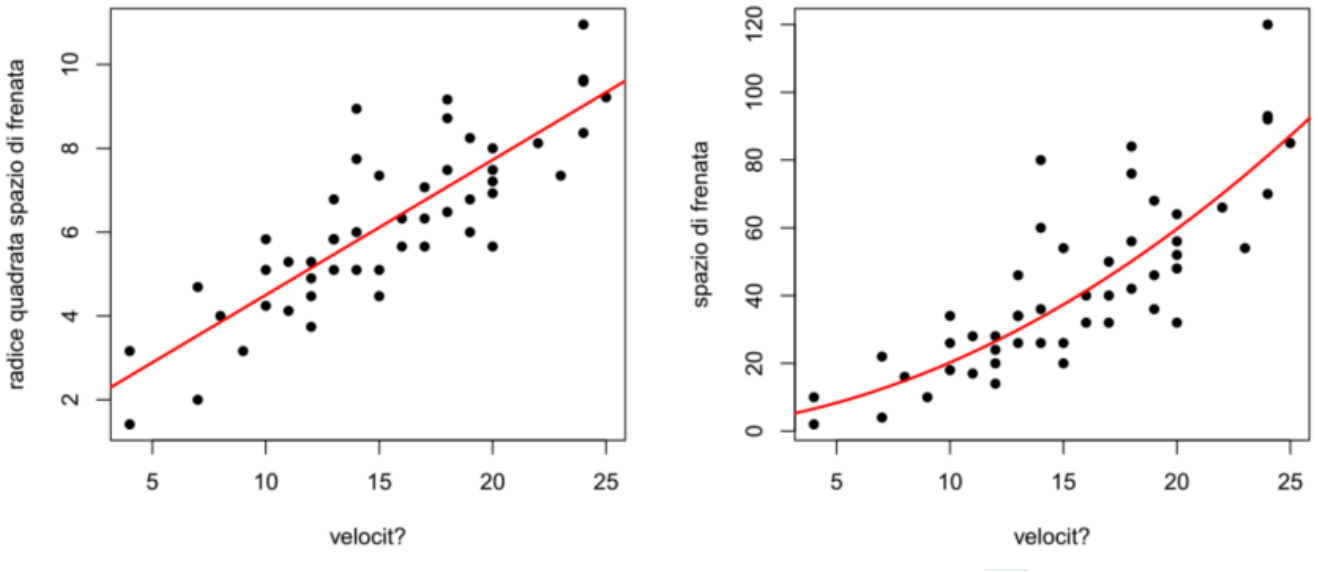
$$R^2 = \frac{\sum_i (\hat{y}_i - E(\hat{Y}))^2/n}{\sum_i (y_i - E(Y))^2/n} = \frac{\text{varianza spiegata}}{\text{varianza totale}}$$

$$= 1 - \frac{\sum_i (\hat{\varepsilon}_i - E(\hat{\varepsilon}))^2/n}{\sum_i (y_i - E(Y))^2/n} = 1 - \frac{\text{varianza residua}}{\text{varianza totale}}$$

Un adattamento poco soddisfacente della retta di regressione ai dati può essere migliorato ricorrendo ad un **cambiamento di scala** della variabile risposta e/o della variabile esplicativa.

In alcuni casi, un cattivo adattamento può essere dovuto alla presenza di valori anomali, riconducibili a errori di misurazione o ad unità con caratteristiche particolari.

Le trasformazioni più comuni sono $\log(Y)$, $\sqrt{Y}$ e $\frac{1}{Y}$.



Nel grafico di sinistra si riportano i dati osservati $(\sqrt{y_i}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, e la retta di regressione stimata $\sqrt{y} = 1.277 + 0.322x$. L'adattamento sembra migliorato, infatti $R^2 = 0.709$.

Calcolo delle probabilità

da fare

Inferenza statistica

Utilizzo

Viene utilizzata per studiare una popolazione in maniera parziale.

Viene usata per:

- ricavare dai dati campionari informazioni sulla popolazione di interesse
- Quantificare la fiducia da assegnare a tali informazioni

L'obiettivo è quello di arrivare a conclusioni valide per tutta la popolazione, basandosi su un campione.

Campionamento

Si effettuano indagini campionarie quando:

- presenza di vincoli di tempo e/o problemi di costo
- la popolazione di interesse può essere infinita e virtuale
- la rilevazione potrebbe distruggere le unità statistiche o essere potenzialmente dannosa
- la precisione dei risultati nelle rilevazioni censuarie potrebbe non essere adeguata

È essenziale che i dati campionari possano essere interpretati come risultato di un esperimento aleatorio, perché altrimenti verrebbe meno la rappresentatività del campione e la possibilità di ricavare informazioni utili sulla popolazione (fenomeno) di interesse (inferenza).

Campioni casuali semplici

Sono formati da n realizzazioni indipendenti (con $n \geq 1$) di un esperimento base, nelle medesime condizioni.

Le unità vengono selezionate dalla popolazione di riferimento in modo che ognuna abbia la stessa probabilità di essere scelta (con popolazioni numerose un campionamento con reinserimento o meno non cambia sostanzialmente il risultato).

I dati osservati sono riferiti ad una caratteristica di interesse, rilevata sulle n unità statistiche che costituiscono il campione.

L'**ipotesi fondamentale** su cui poggia l'inferenza statistica è che i dati campionari x sono una realizzazione di un vettore di variabili casuali $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Nell'inferenza statistica c'è un rovesciamento di punto hanno lo stesso modello probabilistico e non si influenzanolistico non è noto in modo completo. Il processo in questione Ł, in definitiva, la popolazione (fenomeno) oggetto di indagine.

Nel **campionamento casuale semplice**, le variabili casuali $X_1, \ldots, X_n$ sono **indipendenti e identicamente distribuite**, cioè con lo stesso modello probabilistico e tali da non influenzarsi a vicenda.

Modelli statistici paramentrici

i quali Dato un campione casuale semplice $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, **la distribuzione di probabilità** delle singole variabili casuali dipende dalla natura dei dati e del fenomeno oggetto di indagine.

La distribuzione assunta per le variabili casuali del campione dipende da costanti ignote dette **parametri**, ad esempio, $p, \mu, \sigma^2, \lambda, \ldots$ o o più parametri, indicati generalmente come $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, con $ Nell'*inferenza statistica parametrica* si assume che la distribuzione delle variabili casuali del campione sia nota a meno dei valori dei parametri, che corrispondono tipicamente agli aspetti di interesse dell'analisi.

Vengono usate le seguenti assunzioni, che definiscono un **modello statistico parametrico** per i dati di un campione casuale semplice:

- le variabili casuali $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono indipendenti
- tutte le X_i hanno la stessa distribuzione di probabilità
- tale distribuzione è nota a meno dei valori di un numero o più parametri, indicati generalmente come $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k), d \geq 1$

Lo scopo dell'inferenza statistica parametrica è utilizzare i dati osservati $x_1, \ldots, x_n$ per ottenere informazioni su θ, i cui possibili valori appartengono ad un certo insieme Θ detto **spazio parametrico**.

La **scelta del modello** è molto importante, poiché le conclusioni inferenziali dipendono fortemente dalle assunzioni fatte.

Nella specificazione del modello statistico parametrico, è importante considerare:

- la natura dei dati (qualitativi o quantitativi, discreti o continui, ecc.)\times \ldots \times {0,1} = {0,1}^n , $cioè l'insieme di tutti i possibili vettori$n$-
- gli aspetti notevoli presenti nei dati come posizione, variabilità, simmetria, curtosi, ecc.
- tutte le informazioni sul meccanismo generatore dei dati.

Esistono anche modelli per **dati dipendenti** e/o **non identicamente distribuiti** (ad esempio per serie storiche e spaziali), e modelli che prescindono dalla forma della distribuzione di probabilità delle variabili casuali del campione (modelli non parametrici)

Lo spazio parametrico è $\Theta = (0, 1)$ e lo spazio campionario è $S_X = 0, 1X \ldots X0, 1 = 0, 1^n$, cioè l'insieme di tutti i possibili vettori $n-$dimensionali costituiti da 0 e 1.

Se le n osservazioni sono state effettuate in modo indipendente e nelle medesime condizioni, è ragionevole ipotizzare che $X_i, i = 1, \ldots, n$ siano indipendenti con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$.

Si può verificare graficamente l'ipotesi di normalità considerando istogrammi e q-q plot, μ è la misura vera dell'oggetto in esame e σ^2 è riconducibile alla precisione dello strumento di misura.

Verifica del modello

Talvolta in casi complessi si necessita un **controllo empirico del modello**

alcuni strumenti possono essere:

- l'**istogramma delle frequenze relative** e la **stima della densità**
- i grafici dei quantili (**q-q plot**)

L'istogramma e la stima della densità basate sui dati campionari possono essere interpretate, in ambito inferenziale, come stime della funzione di densità

Procedure inferenziali

Si possono individuare *tre classi* generali di procedure che affrontano i problemi inferenziali, con riferimento al parametro di interesse θ:

- la **stima puntuale**: si vuole ottenere, sulla base dell'osservazione *x*, una congettura puntuale su θ
- la **stima intervallare** o **regione di confidenza**: si vuole ottenere, sulla base dell'osservazione *x*, un sottoinsieme (intervallo) di Θ in cui è plausibilmente incluso θ
- **verifica di ipotesi**: data una congettura o un'ipotesi su θ, si vuole verificare, sulla base dell'osservazione *x*, se essa è accettabile (cioè in accordo con i dati *x*).

Statistiche campionarie

La statistica inferenziale è caratterizzata da una componente di incertezza, poiché i dati campionari *x* sono interpretati come realizzazione di un vettore casuale X, ripetendo l'esperimento si ottengono dati diversi dal primo.

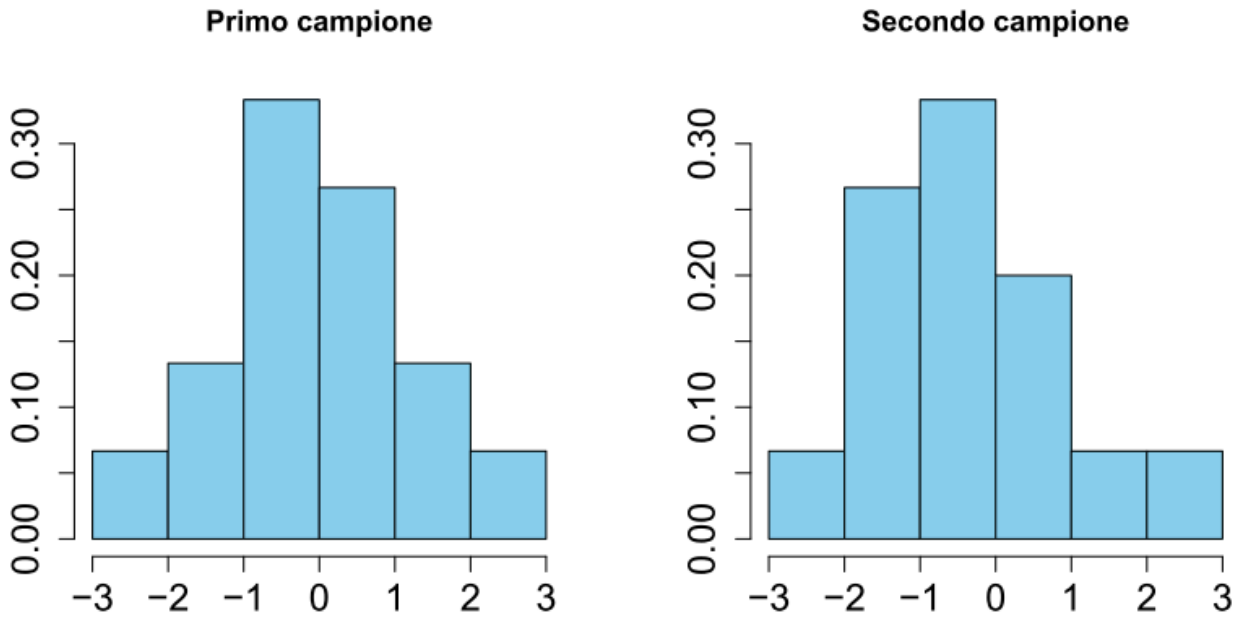
Si chiama **statistica campionaria** ogni trasformata $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ che sintetizza opportunamente il campione $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

La distribuzione di probabilità T, che è una funzione di $X = (X_1, \ldots, X_n)$, dipende dal parametro incognito θ. Quindi, va intesa **sotto** θ, cioè nell'ipotesi che θ sia il vero valore del parametro, qualunque esso sia.

Dato un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_n)$, sono esempi di statistiche campionarie:

- la **somma campionaria** $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, la media campionaria $\overline{X} = n^{-1} S_n$, la **varianza campionaria** $S^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$
- le **statistiche ordinate** $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$, dove $X_{(1)}$ è la variabile casuale che occupa l'i-esima posizione del campione.
- la **variabile casuale minimo** $X_{(1)}$= min $X_1, \ldots, X_n$ e la **variabile casuale massimo** $X_{(n)}$ = max $X_1, \ldots, X_n$
- la **mediana campionaria**, definita da $X_{((n+1)/2)}$ se *n* è dispari, e da $(X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)})/2$ se *n* è pari
- i **momenti campionari**, centrati e non centrati: $n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}*n)^re n^{-1}\sum*{i=1}^n X_i^r, con r \in \mathbb{N}^+$

anche se due rilevazioni campionare hanno due risultati diversi, si possono ricondurre al medesimo esperimento osservando gli istogrammi prodotti dai due campioni.



Somma e media campionaria

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale semplice tratto da una determinata popolazione. Si definiscono, rispettivamente, la **somma campionaria** (somma del campione) e la **media campionaria** (media del campione) le variabili casuali $$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \overline{X}*n* = *\frac{1}{n}* *\sum*{i=1}^n X_i = \frac{S_n}{n}$$

Poiché $X_1, \ldots, X_n$ sono **indipendenti** e **identicamente distribuite** (quindi anche la stessa media μ e la stessa varianza σ^2), allora:

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\mu \quad V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n\sigma^2$$

$$E(\overline{X}_n) = \frac{E(S_n)}{n} = \mu \quad V(\overline{X}_n) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Se le variabili casuali $X_1, \ldots, X_n$ sono **gaussiane** $N(\mu, \sigma^2)$, allora anche somma e media campionaria sono variabili casuali gaussiane, più precisamente:

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2), \quad \overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

Valgono, inoltre, i seguenti risultati con riferimento a variabili casuali $X_1, \ldots, X_n$ indipendenti:

- se $X_i \sim Bi(K_i, p), i = 1, \ldots, n$, allora $S_n \sim Bi(\sum_{i=1}^n K_i, p)$
- se $X_i \sim P(\lambda_i), i = 1, \ldots, n$, allora $S_N \sim P(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$
- se $X_i \sim X^2(r_i), i = 1 \ldots, n$, allora $S_n \sim X^2(\sum_{i=1}^n r_i)$

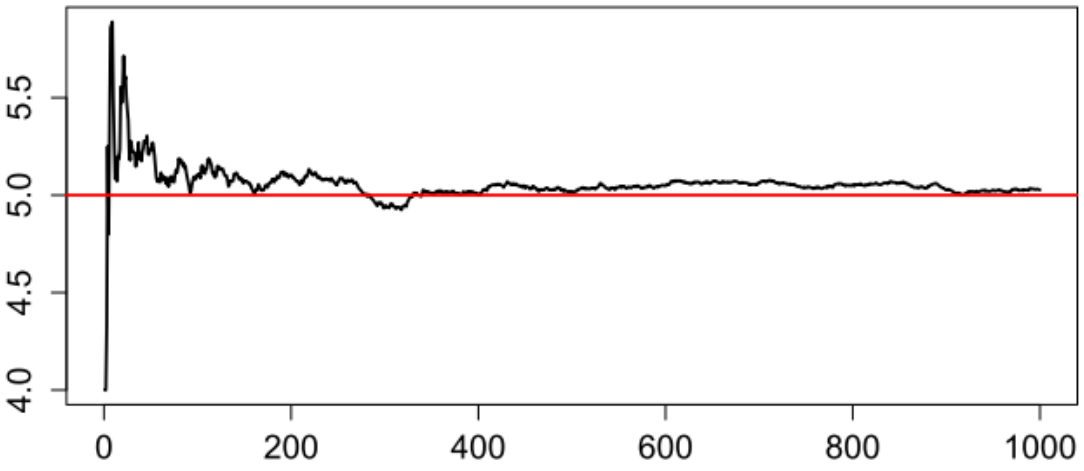
La media campionaria $\overline{X}_n$ è utile in un ambito inferenziale quando si vuole fare inferenza su μ (media della popolazione).
Quindi, la media campionaria $\overline{X}_n$ definisce uno **Stimatore** per μ e il suo valore osservato $\overline{x}_n$ che corrisponde alla media calcolata sul campione, viene utilizzato come **Stima** per μ.

Al crescere di *n*, la variabile casuale media campionaria ha una distribuzione di probabilità sempre più concentrata attorno alla media della popolazione μ.

Formalmente, si afferma che vale la **legge debole dei grandi numeri**, cioè che, nelle condizioni poste in precedenza, se $n \to \infty$:

$$\overline{X}_n \overset{p}{\to} \mu$$

Con la scrittura $\overset{p}{\to}$ si intende la **convergenza in probabilità**, una notazione di convergenza probabilistica illustrata nel seguente esempio



Al crescere di *n*, la distribuzione di probabilità della media campionaria è sempre più concentrata attorno alla media della popolazione μ.

Dice che, sotto condizioni generali, la distribuzione di probabilità della media campionaria tende ad una distribuzione normale al crescere di *n*, indipendentemente dalla distribuzione delle singole variabili casuali del campione

Per le variabili casuali **somma** e **media campionaria** vale un importante risultato: il **teorema limite centrale**.

Data una successione di variabili casuali $X_i, i \geq 1$, indipendenti e identicamente distribuite, con media μ e varianza $\sigma^2 \neq 0$ finite, allora la **Somma standardizzata** e la **media campionaria standardizzata** coincidono e sono tali che, per $n \to \infty$:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{d}{\to} Z \sim N(0,1)$$

La scrittura $\overset{d}{\to}$ indica la **convergenza in distribuzione**: al crescere di *n* la distribuzione di probabilità è sempre più simile a quella di Z.

Per *n* fissato sufficientemente elevato (almeno n > 30), valgono le seguenti utili approssimazioni:

$$\overline{X}_n \dot{\sim} N(\mu, \sigma^2/n), \quad S_n \dot{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$$

dove $\dot{\sim}$ indica la distribuzione approssimata.

Per il teorema limite centrale, se *n* è sufficientemente elevato, si possono ancora utilizzare le **distribuzioni gaussiane** (approssimate), valgono le seguenti approssimazioni:

$$P(a < \overline{X}_n \leq b) \doteq \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$P(a < S_n \leq b) \doteq \Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Varianza campionaria

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale semplice tratto da una determinata popolazione, si definisce **varianza campionaria** la variabile casuale

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

La varianza campionaria può venire calcolata utilizzando la seguente regola di calcolo:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$$

Poiché $X_i, i = 1, \ldots, n$ sono **indipendenti** e **identicamente distribuite** (quindi anche la stessa media μ e la stessa varianza σ^2), allora:

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2$$

La **varianza campionaria** S^2 è utile in ambito inferenziale quando, utilizzando i dati campionari, si vuole fare inferenza su σ^2 (varianza della popolazione).

Nel caso si abbia un *n* piccolo si usa la **varianza campionaria corretta**:

$$S_c^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{n-1}^{1}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

Da cui:

$$E(S_c^2) = \frac{n}{n-1}E(S^2) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

Qualora le variabili casuali $X_1, \ldots, X_n$ siano **gaussiane** $N(\mu, \sigma^2)$, allora la varianza campionaria e la varianza campionaria corretta hanno una distribuzione di probabilità legata al modello X^2:

$$\frac{n}{\sigma^2}S^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{\sigma^2} \sim X^2(n-1)$$

Dove $X^2(n-1)$ indica un modello chi-quadrato di parametro (gradi di libertà) n-1.

La variabile casuale media si può standardizzare con:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Se al posto di σ si considera $S_c = \sqrt{S_c^2}$ si ha la variabile casuale chiamata **media campionaria studentizzata**, e si ha che:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_c/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

dove $t(n-1)$ indica una variabile casuale *t* Student con *n* - 1 gradi di libertà.

Date due variabili casuali con distribuzione $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, le associate varianze campionarie (indipendenti), si può verificare che:

$$\frac{[nS_X^2/\sigma_X^2]/(n-1)}{[nS_Y^2/\sigma_Y^2]/(m-1)} \sim F(n-1, m-1)$$

Dove F(n-1, m-1) indica una variabile casuale F di Fisher con (n-1) e (m-1) gradi di libertà.

Stima puntuale - Stime

Formule e Esempi

Frequenza relativa

Si ottiene dividendo la frequenza assoluta per il numero totale di osservazioni.

$$p_j = \frac{f_j}{\sum_{j=1}^{J} f_j} = \frac{f_j}{n}, \quad j = 1, \ldots, J$$

Esempio: se in un campione di 100 persone 30 sono di genere femminile, la frequenza relativa del genere femminile è:

$$p_F = \frac{30}{100} = 0.3$$

Frequenza cumulata

$$F_j = \sum_{i=1}^{j} f_i, \quad P_j = \sum_{i=1}^{j} p_i, \quad j = 1, \ldots, J$$

Esempio: Colesterolo (continua). Considerando i dati sul livello di colesterolo sierico

Liv. colesterolo (mg/100 ml)	F_j (età 25-34)	F_j (età 55-64)	P_j (età 25-34)	P_j (età 55-64)
$80 \vdash 120$	13	5	0.012	0.004
$120 \vdash 160$	163	53	0.153	0.043
$160 \vdash 200$	605	318	0.567	0.259
$200 \vdash 240$	904	776	0.847	0.632
$240 \vdash 280$	1019	1057	0.955	0.861
$280 \vdash 320$	1053	1185	0.987	0.965
$320 \vdash 360$	1062	1220	0.995	0.994
$360 \vdash 400$	1067	1227	1	1

Stima della densità

$$f_n(y) = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{y - y_i}{b}\right), \quad y \in \mathbb{R}$$

Funzione di ripartizione empirica

$$F_n(y) = \frac{no.oss. \leq y}{no.totaleoss}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Indici di posizione: media aritmetica

Se si dispone dei dati grezzi $y_1, \ldots, y_n$, allora:

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Se, con riferimento ad una variabile quantitativa discreta Y , si dispone della tabella di frequenza assoluta o relativa, allora:

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{J} y_j f_j = \sum_{j=1}^{J} y_j p_j$$

La media aritmetica soddisfa le seguenti proprietà.

1. **Proprietà di Cauchy**: Sia $S_Y = y_1, \ldots, y_J$ con $y_1 < \ldots < y_J$ allora:

   $$y_1 \leq E(Y) \leq y_J$$

   La media è compresa tra il più piccolo e il più grande valore osservato.
2. **Proprietà di baricentro**: Sia $Y - E(Y)$ la variabile scarto di Y dalla sua media E(Y), allora:

   $$E(Y - E(Y)) = 0$$

   Infatti, considerando i dati grezzi e le modalità osservate $y_i - E(Y), j = 1, \ldots, J$ della variabile Y-E(Y), si ha:

   $$E(Y - E(Y)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - E(Y))$$

   $$= E(Y) - \frac{1}{n} n E(Y) = 0$$
3. **proprietà di linearità**. sia aY + b, a, b $\in \mathbb{R}$, una trasformata lineare della variabile Y, allora:

   $$E(aY + b) = aE(Y) + b$$

Indice di posizione: mediana

Se si dispone dei dati grezzi $y_1, \ldots, y_n$, ordinati secondo un ordinamento non decrescente, allora la mediana di $y_{0.5}$ corrisponde

- se *n* è **dispari**: alla posizione (n+1)/2, cioè $y_{0.5} = y_{(n+1)/2}$
- se *n* è **pari**: alla media delle posizioni n/2 e (n/2)+1, cioè $y_{0.5} = \frac{y_{(n/2)} + y_{(n/2+1)}}{2}$

Indici di posizione: moda

La moda di una variabile statistica Y corrisponde al valore y_{mo} del supporto S_Y a cui è associata la frequenza, relativa o assoluta, più alta.

Indici di variabilità: campo di variazione

$$R_Y = y_{(n)} - y_{(1)}$$

, **Esempio**: Inquinamento (continua). Con riferimento ai dati sulla misurazione dell'inquinamento da fumi si ottiene che

Dispositivo A: R = 15.64 − 14.40 = 1.20
Dispositivo B: R = 15.80 − 13.83 = 1.97

Indici di variabilità: scarto interquartilico

$$SI_Y = y_{0.75} - y_{0.25}$$

Esempio: Inquinamento (continua). Con riferimento ai dati sulla misurazione dell'inquinamento da fumi, si ottiene che, con il dispositivo A, SI = 0.27, mentre, con il dispositivo B, SI = 0.39. Questi valori indicano ancora una maggiore variabilità nelle misurazioni riferite al dispositivo B.

Indici di variabilità: varianza e scarto quadratico medio

$$V(Y) = E[(Y - E(Y))^2]$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$$

Se si dispone dei **dati grezzi** $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, e si è preventivamente calcolata $E(Y)$, allora la varianza corrisponde a

$$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - E(Y))^2$$

Se si dispone della **distribuzione di frequenza assoluta o relativa**

$$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J}(y_j - E(Y))^2 f_j = \sum_{j=1}^{J}(y_j - E(Y))^2 p_j$$

Esempio: Si consideri la seguente tabella di frequenza dalla quale si ricava che $E(Y) = 0.61$

y_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Totale**
f_i	109	65	22	3	1	200

$$V(Y) = \frac{1}{200}\sum_{j=0}^{4}(y_j - 0.61)^2 f_j = \frac{1}{200}\left[(0 - 0.61)^2 \cdot 109 + (1 - 0.61)^2 \cdot 65 \ldots\right]$$

inoltre: $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = 0.780$ La varianza soddisfa le seguenti proprietà:

1. **Proprietà di non negatività**: $V(Y) \geq 0$ e $V(Y) = 0$ se e solo se Y è degenere.
2. **Formula per il calcolo**:

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

3. **Proprietà di invarianza per traslazione**:

$$V(Y + b) = V(Y), \quad b \in \mathbb{R}$$

4. **Proprietà di omogeneità di secondo grado**:

$$V(aY) = a^2 V(Y), \quad a \in \mathbb{R}$$

Indici di variabilità: coefficiente di variazione

$$CV_Y = \frac{\sigma_Y}{E(Y)}$$

Esempio: Si consideri la seguente tabella di frequenza che riporta le merci e i passeggeri sbarcati, con riferimento agli scali portuali di alcune regioni italiane nel 1988.

Regione	Merci (migliaia di tonnellate)	Passeggeri (migliaia)
Friuli V.G.	22806	42
Veneto	21849	248
Emilia R.	12627	3
Marche	4937	266

Ci si chiede se è più variabile lo sbarco di merci (variabile X) o lo sbarco di passeggeri (variabile Y). Poichè $E(X) = 15554.75, V(X) = 53376636, E(Y) = 139.75, V(Y) = 13978.19$, si ha che

$$CV_X = 0.47, \quad CV_Y = 0.85$$

Indice di simmetria

$$\gamma_Y = \frac{E[(Y - E(Y))^3]}{\sigma_Y^3}$$

dove $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$ è lo scarto quadratico medio di Y .

Se si dispone dei **dati grezzi** $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, e si sono preventivamente calcolati $E(Y)$ e σ_Y , allora l'indice di simmetria corrisponde a

$$\gamma_Y = \frac{1/n \sum_{i=1}^{n} (y_i - E(Y))^3}{\sigma_Y^3}$$

Curtosi e indice di curtosi

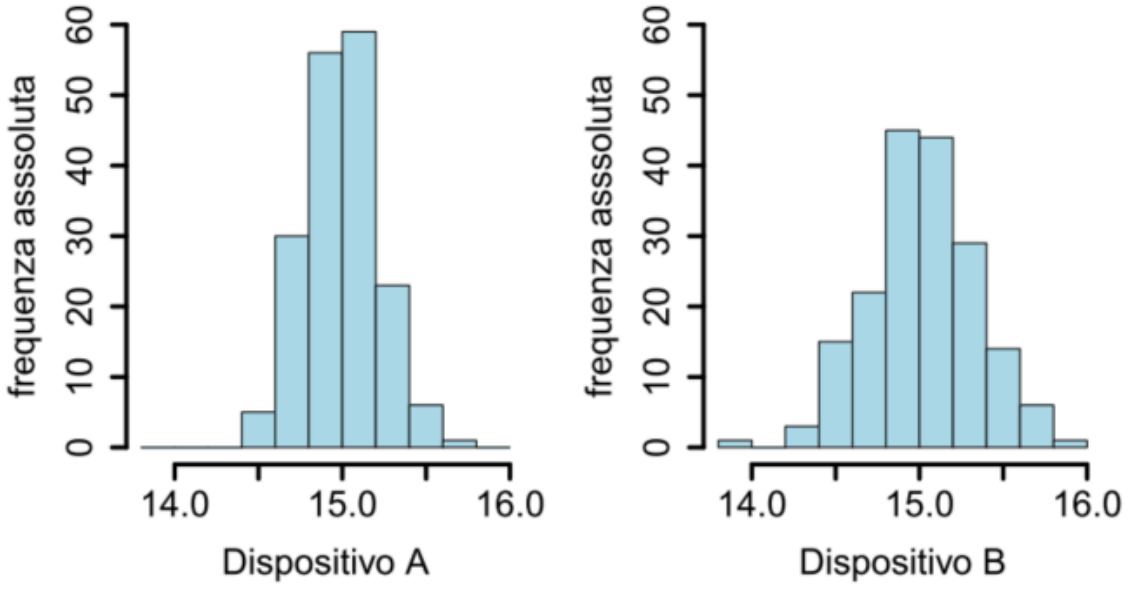
$$\beta_Y = \frac{E[(Y - E(Y))^4]}{\sigma_Y^4}$$

Se si dispone dei dati grezzi $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, e si sono preventivamente calcolati $E(Y)$ e σ_Y , allora l'indice di curtosi corrisponde a:

$$\beta_Y = \frac{1/n \sum_{i=1}^{n} (y_i - E(Y))^4}{\sigma_Y^4}$$

Se la distribuzione di frequenza Ł normocurtica, $\beta_Y \approx 3$; se è leptocurtica, $\beta_Y > 3$; se Ł platicurtica, $\beta_Y < 3$.

Esempio: Inquinamento (continua). Con riferimento ai dati sui due dispositivi anti-inquinamento, poichè media e mediana coincidono, si conclude che le distribuzioni di frequenza sono simmetriche; i valori dell'indice di simmetria sono pari a 0.095 e −0.225, rispettivamente.



Dalla analisi dell'istogramma, oltre alla conferma della sostanziale simmetria, si deduce che la seconda distribuzione presenta code più pesanti della prima. Infatti, i valori dell'indice di curtosi sono pari a 2.937 e 3.398, rispettivamente.

Indice di connessione

$$\chi^2 = \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^k \frac{(n_{rs} - \hat{n}_{rs})^2}{\hat{n}_{rs}}$$

dove $\hat{n}_{rs} = n_{r+} n_{+s}/n$ è la frequenza attesa nel caso di indipendenza.

Esempio: Attitudine (continua). Con riferimento alla analisi delle attitudini musicale e pittorica, se ci fosse indipendenza tra le due, ferme restanti le distribuzioni marginali, si avrebbe la seguente tabella di contingenza

	S	B	O	
S	1.067	1.867	1.066	4
B	1.600	2.800	1.600	6
O	1.333	2.333	1.334	5
	4	7	4	15

Si può calcolare facilmente l'indice χ^2 che è pari a 3.527. Quindi, si può dunque escludere l'indipendenza tra attitudine musicale e pittorica.

Dal momento che tale valore Ł lontano dal valore massimo $15 \cdot (3-1) = 30$, ed inoltre l'indice normalizzato vale 0.117, si conclude che i dati indicano una moderata connessione (dipendenza) tra le due variabili.

Dipendenza in media

$$E(Y|X = x_r) = E(Y)$$

Esempio. Geyser Old Faithful (continua). Si considerano i dati riferiti alle durate delle eruzioni del geyser Old Faithful e si indica con X il tipo di eruzione e con Y la durata della pausa.

Modalità x di X	Media condizionata di Y dato $X = x$
Corta	54.49
Lunga	79.99

Covarianza

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))(y_i - E(Y))$

In alternativa, si può calcolare utilizzando la **formula per il calcolo**

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - E(X)E(Y)$$

Coefficiente di correlazione lineare

$$\rho_{XY} = Cor(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Esempio: Molla (continua). Si considerano i dati sulla lunghezza della molla Y e sugli n = 20 diversi pesi X a cui viene sottoposta. Dai dati riportati nella tabella presentata in precedenza si ha che

$$E(X) = 1.9, E(Y) = 5.388, \quad V(X) = 1.33$$

$$V(Y) = 0.059, \quad Cov(X,Y) = 0.272$$

Da cui si ottiene che

$$\rho_{XY} = \frac{0.272}{\sqrt{1.33}\sqrt{0.059}} = 0.972$$

valore che indica una correlazione positiva molto forte tra X e Y.

Modello di regressione lineare semplice

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Metodo dei minimi quadrati

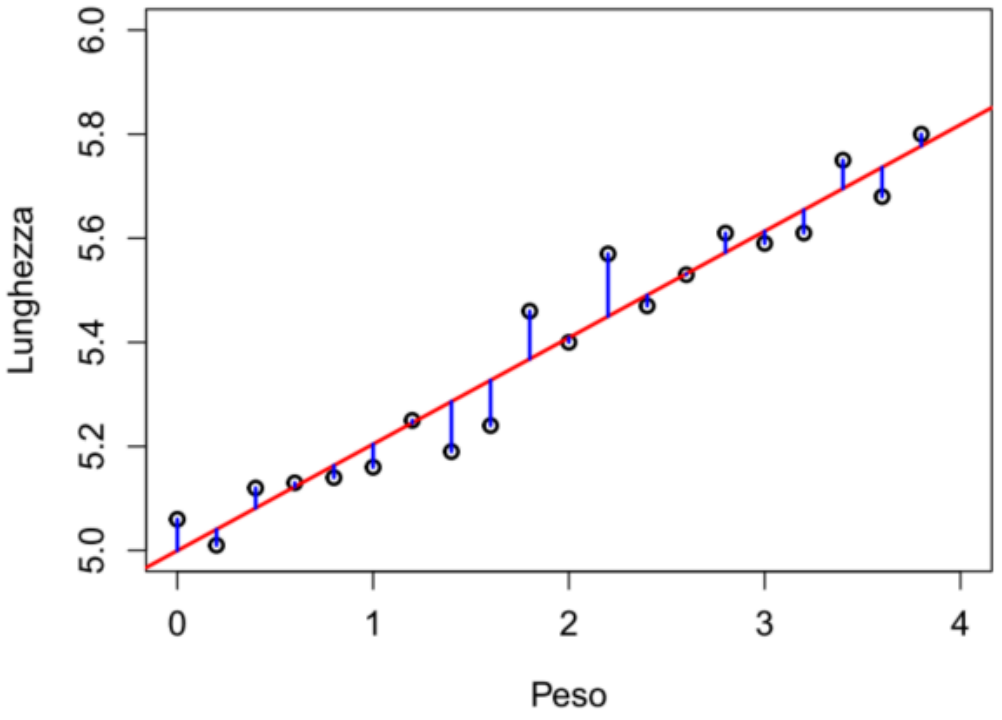
$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

$$\hat{a} = E(Y) - \hat{b}E(X), \quad \hat{b} = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$$

Esempio: Molla (continua). Con riferimento ai dati sulla lunghezza della molla e sui diversi pesi a cui viene sottoposta, si ottengono le seguenti stime per i coefficienti di regressione

$$\hat{b} = \frac{0.27215}{1.33} = 0.2046, \quad \hat{a} = 5.3885 - 0.2046 \cdot 1.9 = 4.9997.$$

Nel grafico seguente si riporta, oltre ai dati osservati, la retta di regressione stimata $y = 4.9997 + 0.2046x$ e i residui stimati $\varepsilon_i, i = 1, \ldots, 20$.



Con un peso di $2.5Kg$, si potrebbe prevedere un allungamento della molla pari a pari a $4.9997 - 0.2046 \cdot 2.5 = 5.51$

Valori stimati dal modello e residui stimati

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Coefficiente di determinazione

$$R^2 = \frac{\sum_i (\hat{y}_i - E(\hat{Y}))^2/n}{\sum_i (y_i - E(Y))^2/n} = \frac{\text{varianza spiegata}}{\text{varianza totale}}$$

$$=1-\frac{\sum_i(\hat{\varepsilon}i - E(\hat{\varepsilon}))^2/n}{\sum_i(y_i - E(Y))^2/n} = 1- \frac{\text{varianza residua}}{\text{varianza totale}}$$

$dove $E(\hat{Y}) = E(Y)$ è la media dei valori stimati dal modello e $E(\hat{\varepsilon}) = 0$ è la media dei residui stimati.$

$$R^2= \rho^2_{XY}$$

Esempio: Molla (continua). Con riferimento ai dati sulla lunghezza della molla e sui pesi, dal momento che $\rho_{XY} = 0.97$, si conclude che $R^2 = 0.97^2 = 0.9409$. Quindi il modello di regressione presenta una elevata capacità esplicativa per il fenomeno in esame.

Somma e media campionaria

Esempio: Procedura di controllo. Si è verificato un inconveniente su una linea di produzione che determina la presenza di 1/10 di pezzi difettosi. La procedura di controllo della qualità prevede che, se si individuano almeno 5 pezzi difettosi su n ≥ 1 scelti a caso, il processo viene posto in revisione. Sia S n la somma di n ≥ 1 variabili casuali Ber(1/10) indipendenti. Si cerca il valore di n tale che ci sia una probabilità pari a 0.9 di porre il processo in revisione. Quindi, n ≥ 1 deve essere tale che

$$P(S_n \geq 5) = P\left(\frac{S_n - (n/10)}{\sqrt{n9/100}} \geq \frac{5 - (n/10)}{\sqrt{n9/100}}\right) \doteq P\left(Z \geq \frac{5 - (n/10)}{\sqrt{n9/100}}\right)$$

Sia 0.9 con $Z \sim N(0,1)$. Poiché il valore critico $z_{0.9}$ = -1.282, si cerca *n* tale che $[5 - (n/10)]\sqrt{n9/100} \doteq$ -1.282, con $n \geq 50$.

Si ottiene come soluzione il valore 85.58, quindi n= 86, può essere una scelta ragionevole.

Comandi in R

```
print("Prossimamente anche in 32 bit!")
```