

# 微积分基础教程

(Calculus Fundamentals)

您的姓名

2025 年 11 月 18 日

## 版权信息

本书仅提供电子版，固定版式。

版权所有 © 2025 by 您的姓名。保留一切权利。

# 前言

自牛顿与莱布尼茨独立创设微积分(1660–1680年代)以来,这门“变化的数学”已走过三个半世纪。三百年间,微积分从“计算变化率”演化为“描述一切可微结构”的元语言:数学不再只是工具,它已经从一门关于量的科学,演变为一门关于模式、结构和形式推理的宏大体系。

现代微积分以其严谨性而闻名,但其基石——极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义和由此构建的标准分析体系,正在向哲学化甚至宗教化方向发展:非直观性、逻辑严重形式化,过度僵化、挑战常识,和现实严重脱节正在演变成数学空想主义。

有鉴于此,格洛克以极度自下而上的方式重新思考整个微积分体系,成功建立可视化的格洛克代数空间,可视化范围从 $(-\infty^\infty, \infty^\infty)$ 每一个数都可见,并将 $\infty, \varepsilon$ 定义为未解析数,分别表示无穷大和无穷小,突然之间,一切都变得如此简单,并由此带来以下颠覆性的数学结果:

极限被重新定义,简单而直观,极限的计算只是简单的数学计算,洛必达法则不再必要,神秘性已全部消失。

开闭区间被重新描述,无穷小的数值化定义使开区间基本消失,在极限状态下都是闭区间。

连续性、间断点等相关理论已消失,基本只保留描述性概念和常识。

数列与极限的收敛相关内容是为了传统趋近极限的表述,而无穷大和无穷小不再是一个趋近的概念,这部分内容已经没有意义。因此只保留数列的通项公式并作为统一的函数对待。

导数不再是一个莱布尼兹定义的神秘符号 $\frac{d}{dx}F(x)$ ,现在只是一个重新定义的点 $x$ 位置的点微分的商,即 $dF(x)/dx$ ,和小学的除法运算没有什么不同,更强调计算结果是瞬时变化率或几何图形上的斜率。

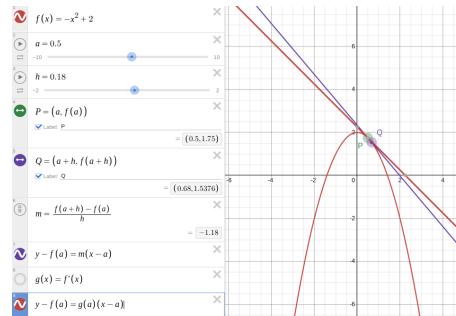


图 1: 另一张图片, 位于右侧



图 2: 示例插图: 函数的几何图形展示

积分被重新定义, 删除积分定理等内容, 重新定义积分为微分的逆运算。具体变化为点积分简称为积分取代不定积分, 保留定积分并重新命名为区间积分对应区间微分。

自然常数  $e$  被重新定义为  $e = (1 + \varepsilon)^\infty$ , 清晰而直观, 并拓展为自然常数序列  $e_n = (1 + n\varepsilon)^\infty$ , 使其不再具有神秘性。

定义和定理中的函数只进行最小化覆盖, 即只包含一个定义域区间, 消除传统定义和定理的繁杂限制条件, 简单而清晰。

然而, 更严肃而重要的思考是, 我们为什么要接受数学基础/数理逻辑/集合论/数学分析这些所谓的数学家小圈子理论, 无论对于普通人还是科研人员既看不懂也没有任何实用价值。回归常识和简单, 我们真的需要数学家小圈子给我们解释为什么  $1 + 1 = 2$  吗?

考德·格洛克

2025 年 11 月

### 重要提示

请确保您已安装 tcolorbox 宏包。

## 风险提示

不要在数学环境中使用  
换行，请改用 align 或 split 环境。



# 目录

<b>第一章 格洛克代数空间</b>	<b>1</b>
1.1 初步理解无穷大和无穷小 . . . . .	1
1.2 格洛克代数空间 . . . . .	2
1.3 无穷大和无穷小的定义 . . . . .	4
1.4 极限的概念 . . . . .	5
<b>第二章 导数与微分</b>	<b>7</b>
2.1 导数的定义与几何意义 . . . . .	7



# 第一章 格洛克代数空间

本章首先从常识入手理解无穷大和无穷小，并得出基本的运算法则。在此基础上实现格洛克代数空间。最后给出无穷大和无穷小的正式定义和运算（规则）列表。

## 1.1 初步理解无穷大和无穷小

自微积分诞生以来，如何阐释、理解无穷大和无穷小以及由此引出的函数的极限一直是问题的核心，所以让我们以此为切入点，开始问题的探索。

### 格洛克：无穷大和无穷小的直观理解

无穷大和无穷小是具有特殊作用的两个数，分别用  $\infty, \varepsilon$  表示，对于  $\infty$ ，所有实数都是它的无穷小；对于  $\varepsilon$ ，所有实数都是它的无穷大。

由此产生如下运算法则：对于任意实数  $C$

$$\infty + C = \infty$$

$$\varepsilon + C = C$$

这是基于  $\infty, \varepsilon$  本身的直观语义得出的。更进一步，基于数的性质，我们得到：

$$C_1\infty + C_2 = C_1 \left( \infty + \frac{C_2}{C_1} \right) = C_1\infty$$

$$C_1\varepsilon + C_2 = C_1 \left( \varepsilon + \frac{C_2}{C_1} \right) = C_2$$

$$C_1\infty^2 + C_2\infty = \infty(C_1\infty + C_2) = C_1\infty^2$$

$$C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon = \varepsilon(C_1\varepsilon + C_2) = C_2\varepsilon$$

这和 200 多年来的传统解释完全不同，甚至相反。传统解释中并不认为无穷大和无穷小是数，因此不能直接进行数学运算，强调它是一个无限趋近的“动态”过程，因此理解起来要困难复杂得多。

格洛克的直观解释如果可以成立，会使微积分学变得简单而清晰，这就需要建立一个直观而简单的可视化代数模型来阐释其合理性。

## 1.2 格洛克代数空间

### 格洛克代数环轴

和传统的实数数轴不同，格洛克数轴是一个圆环，圆环长度固定为  $\infty$ ，并将其分割为相等的  $\infty$  段，每段长度为 1，将数轴逆时针依次标注  $0, 1, 2, \dots$ ，顺时针标注为  $-1, -2, \dots$ ，这样我们就得到了一个覆盖  $(-\infty, \infty)$  数字空间的环形数轴。



图 1.1: 格洛克代数环轴

下图是格洛克环轴展开后的样子，在数轴的右端标注的是单位刻度的长度量级  $\infty^0 = 1$ ，因此称为格洛克 0 阶数轴。

$$0 \boxed{1 \ 2 \ 3} \dots \boxed{-2 \ -1} \ \infty^0$$

图 1.2: 格洛克 0 阶数轴

需要注意的是， $\infty, -\infty$  和原点 0 重合，这意味着数值大小达到  $\infty$  时需要进位，以表示  $\infty$  量级或更大的数。基于同样的原理，我们还需要量级更小的单位，即  $\varepsilon$ ，用来进位到格洛克 0 阶数轴。

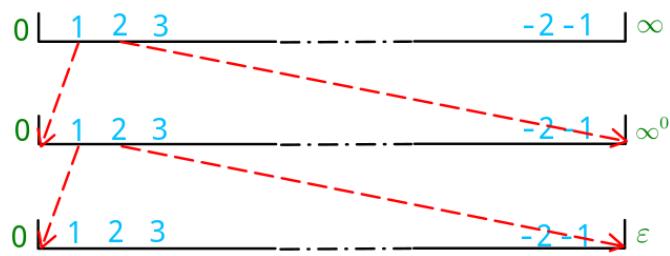


图 1.3: 宏空间和微空间

$\infty$  以及更大的量级称为格洛克宏空间，对应的， $\varepsilon$  以及更小的量级称为格洛克微空间，图 1.3 表示了格洛克宏空间 1 轴，格洛克 0 轴和格洛克微空间 1 轴。

宏空间 1 轴覆盖区间  $[0, \infty^2)$ , 单位刻度大小为  $1\infty$ , 将 1 单位刻度放大  $\infty$  倍, 得到格洛克 0 轴。

格洛克 0 轴覆盖区间  $[0, \infty)$ , 单位刻度大小为 1, 将 1 单位刻度放大  $\infty$  倍, 得到微空间 1 轴。

微空间 1 轴覆盖区间  $[0, 1)$ , 单位刻度大小为  $\frac{1}{\infty}$ , 即  $1\varepsilon$ 。

将宏空间和微空间以同样的方式分别向上和向下延展, 形成完整的格洛克代数空间。

### 宏空间和微空间

这是一个相对的概念, 如  $\infty^{n+1}$  是  $\infty^n$  的宏空间,  $\infty^n$  是  $\infty^{n+1}$  的微空间;  $\varepsilon^n$  是  $\varepsilon^{n+1}$  的宏空间,  $\varepsilon^{n+1}$  是  $\varepsilon^n$  的微空间。

宏空间是微空间的无穷大, 微空间是宏空间的无穷小。

### 格洛克代数空间

格洛克代数空间如图 1.4 所示。



图 1.4: 格洛克代数空间

由于指数进位回  $0, \infty^\infty$  和  $\varepsilon^\infty$  回归原点 0, 图中未予显示。

格洛克代数空间最大覆盖范围  $[0, \infty^\infty)$ , 最小单位刻度  $1\varepsilon^{\infty-1}$ , 可以满足任何数值的可视化标注。

**例 1.2.1.** 在格洛克代数空间上标注:

$$(1) a = 0.5\infty + 1, \quad (2) b = 2\infty - 2, \quad (3) c = a + b.$$

解:

$$\begin{aligned} c &= a + b \\ &= (0.5\infty + 1) + (2\infty - 2) \\ &= (0.5\infty + 2\infty) + (1 - 2) \\ &= 2.5\infty - 1 \end{aligned}$$

$a, b, c$  如图 1.5 所示。

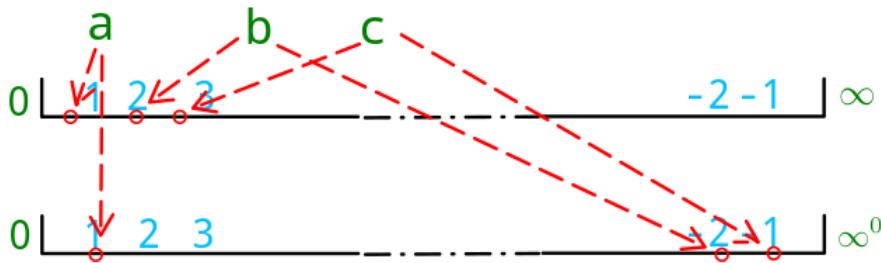


图 1.5: 数值标注

### 1.3 无穷大和无穷小的定义

经过前面两节关于无穷大和无穷小的讨论和格洛克代数空间的形成, 下面给出无穷大和无穷小的正式定义。

#### 定义 1.1. 无穷大和无穷小

设  $\infty, \varepsilon$  是未解析数 (*unsolved number*),  $\infty$  是正整数, 表示无穷大,  $\varepsilon$  表示无穷小。

#### 性质列表

- (1)  $\infty, \varepsilon$  互为倒数, 即  $\infty \cdot \varepsilon = 1$ 。
- (2) 对于任意实数  $C$ , 正数  $n$ ,  $\infty^{n+1} + C\infty^n = \infty^{n+1}, \varepsilon^n + C\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n$ 。
- (3)  $\varepsilon$  是最小的正数,  $-\varepsilon$  是最大的负数,  $\varepsilon = 0^+, -\varepsilon = 0^-$ 。
- (4) 对于  $n > 1$  有,  $\log_n \infty < \sqrt[n]{\infty} < \infty < \infty^n < n^\infty < \infty!$ 。

**例 1.3.1.** 求函数  $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$  的定义域。

## 1.4 极限的概念

**定义 1.2** (极限的  $\epsilon - \delta$  定义). 对于函数  $f(x)$ , 如果存在实数  $L$ , 使得对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 都存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有  $|f(x) - L| < \epsilon$ , 则称  $L$  为函数  $f(x)$  在点  $a$  处的极限, 记为  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

**定理 1.1** (极限的四则运算). 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  都存在, 则有:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{其中 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$



## 第二章 导数与微分

### 2.1 导数的定义与几何意义

函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的导数定义为：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数表示函数在某点变化率的精确度量。