微积分速成教程

你的名字

2025

目录

《微积分速成教程》 **1**

前言 **1**

第 1 章 格洛克代数空间 **2**
1.1 格洛克代数环轴 2
本书适合谁? 2
你将学会 2
使用说明 3

第 1 章 极限与连续 **3**
1.1 极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义 3

第 2 章 导数 **4**
2.1 导数的定义 4

第 3 章 积分 **5**
3.1 定积分的定义（黎曼和） 5

《微积分速成教程》

从零基础到会求导、会积分，200+ 例题，附答案与 GeoGebra 动态图

前言

自牛顿与莱布尼茨独立创设微积分（1660–1680 年代）以来，这门“变化的数学”已走过三个半世纪。三百年间，微积分从“计算变化率”演化为“描述一切可微结构”的元语言：数学不再只是工具，它已经从一门关于量的科学，演变为一门关于模式、结构和形式推理的宏大体系。

现代微积分以其严谨性而闻名，但其基石——极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义和由此构建的标准分析体系，正在向哲学化甚至宗教化方向发展：非直观性、逻辑严重形式化，过度僵化、挑战常识，和现实严重脱节正在演变成数学空想主义。

有鉴于此，格洛克以极度自下而上的方式重新思考整个微积分体系，成功建立**可视化的格洛克代数空间，可视化范围从 $(-\infty^{\infty}, \infty^{\infty})$ 每一个数都可见，并将 ∞, ε 定义为未解析数，分别表示无穷大和无穷小**，突然之间，一切都变得如此简单，并由此带来以下颠覆性的数学结果：

- **极限**被重新定义，简单而直观，极限的计算只是简单的数学计算，**洛必达法则**不再必要，神秘性已全部消失。
- **开闭区间**被重新描述，无穷小的数值化定义使开区间基本消失，在极限状态下都是闭区间。
- **连续性、间断点**等相关理论已消失，基本只保留描述性概念和常识。
- **数列与极限**的收敛相关内容是为了传统趋近极限的表述，而无穷大和无穷小不再是一个趋近的概念，这部分内容已经没有意义。因此只保留数列的通项公式并作为统一的函数对待。
- **导数**不再是一个莱布尼兹定义的神秘符号 $\frac{d}{dx}F(x)$，现在只是一个重新定义的点 x 位置的**点微分**的商，即 $dF(x)/dx$，和小学的除法运算没有什么不同，更强调计算结果是瞬时变化率或几何图形上的斜率。
- **积分**被重新定义，删除积分定理等内容，重新定义积分为微分的逆运算。具体变化为**点积分**简称为积分取代不定积分，保留定积分并重新命名为**区间积分**对应**区间微分**。
- **自然常数 e** 被重新定义为 $e = (1+\varepsilon)^{\infty}$，清晰而直观，并拓展为自然常数序列 $e_n = (1+n\varepsilon)^{\infty}$，使其不再具有神秘性。
- 定义和定理中的**函数**只进行最小化覆盖，即只包含一个定义域区间，消除传统定义和定理的繁杂限制条件，简单而清晰。

然而，更严肃而重要的思考是，我们为什么要接受**数学基础/数理逻辑/集合论/数学分析**这些所谓的数学家小圈子理论，无论对于普通人还是科研人员既看不懂也没有任何实用价值。回归常识和简单，我们真的需要数学家小圈子给我们解释为什么 **1 + 1 = 2** 吗?

考德・格洛克

2025 年 11 月 15 日

第 1 章 格洛克代数空间

自微积分诞生以来，如何阐释、理解无穷大和无穷小以及由此引出的函数的极限一直是问题的核心。

1.1 格洛克代数环轴

和传统的实数数轴不同，格洛克数轴是一个圆环，圆环长度固定为 ∞ ，并将其分割为相等的 ∞ 段，每段长度为 1, 将数轴逆时针依次标注 0, 1, 2, ⋯，顺时针标注为 -1, -2, ⋯，这样我们就得到了一个覆盖 $(-\infty, \infty)$ 数字空间的环形数轴。

图 1.1：格罗克代数环轴

本书适合谁?

- 高中生预习大学数学
- 大学生补基础
- 考研数学一/三冲刺
- 程序员自学数值计算

你将学会

1. 极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义
2. 导数的几何意义与链式法则
3. 定积分的黎曼和与牛顿-莱布尼茨公式
4. 泰勒展开与误差估计

使用说明

- 每节 = **概念 → 定理 → 证明 → 例题 → 练习**
- 公式用 $$ 包裹，支持放大
- 扫描二维码看 **B 站视频讲解**
- 答案在书末 PDF

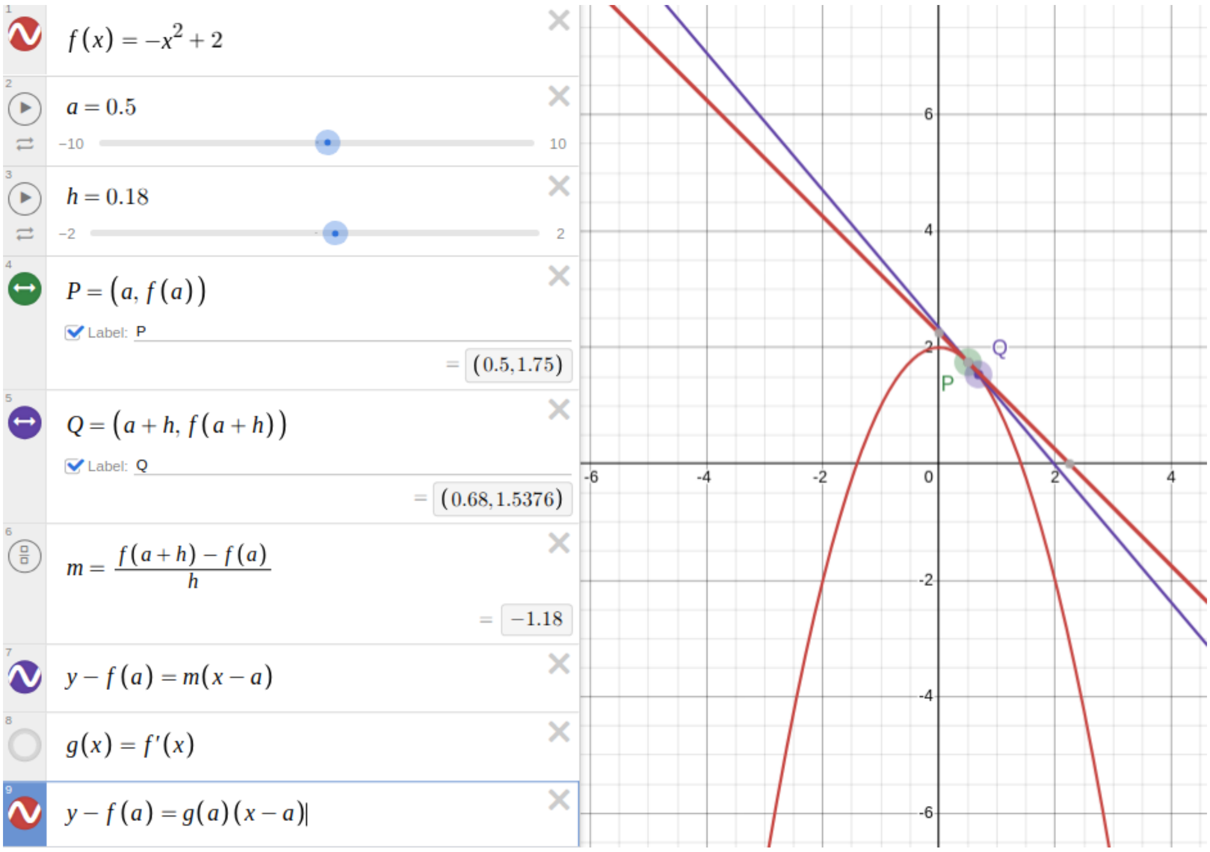

图 1: cover

图 0.1：微积分核心思想——无限逼近

第 1 章 极限与连续

1.1 极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义

定义 1.1（极限）
设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义。若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

时，有

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

则称

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \tag{1.1}$$

例题 1.1

证明：$\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$

解：
令 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon/3$。
当 $0 < |x-2| < \delta$ 时，

$$\begin{aligned} |(3x-1)-5| &= |3x-6| & (1) \\ &= 3|x-2| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon & (2) \end{aligned}$$

∴ 极限为 5. □

---

limit_graph

图 2: limit_graph

图 1.1：函数 $f(x) = 3x - 1$ 在 $x = 2$ 附近逼近 5

练习 1.1

1. 证明：$\lim_{x\to 1} x^2 = 1$
2. 计算：$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$

   答案见书末

第 2 章 导数

2.1 导数的定义

定义 2.1
函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，若极限

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{2.1}$$

存在，则称 $f'(x_0)$ 为 f 在 x_0 处的**导数**。

几何意义

导数 = 切线斜率

derivative

图 3: derivative

图 2.1：$f(x) = x^2$ 在 $x = 1$ 处的切线斜率为 2

常用导数表

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$

链式法则

若 $y = f(g(x))$，则

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

例：$y = \sin(x^2) \to y' = \cos(x^2) \cdot 2x$

第 3 章 积分

3.1 定积分的定义（黎曼和）

将 $[a, b]$ 分成 n 等份，$\Delta x = \frac{b-a}{n}$，取右端点：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\Delta x)\Delta x \tag{3.1}$$

牛顿-莱布尼茨公式

若 $F'(x) = f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

例题 3.1

计算：$\int_0^1 x^2dx$

解：
原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3$

$$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

换元积分法

令 $u=\sin x$，$du=\cos x dx$

$$\int \cos x \sin x dx=\int u du=\frac{1}{2}u^2+C=\frac{1}{2}\sin^2 x+C$$