微积分基础教程

(Calculus Fundamentals)

您的姓名

2025 年 11 月 30 日

版权信息

本书仅提供电子版，固定版式。

前言

自牛顿与莱布尼茨独立创设微积分(1660–1680年代)以来，这门“变化的数学”已走过三个半世纪。三百年间，微积分从“计算变化率”演化为“描述一切可微结构”的元语言：数学不再只是工具，它已经从一门关于量的科学，演变为一门关于模式、结构和形式推理的宏大体系。

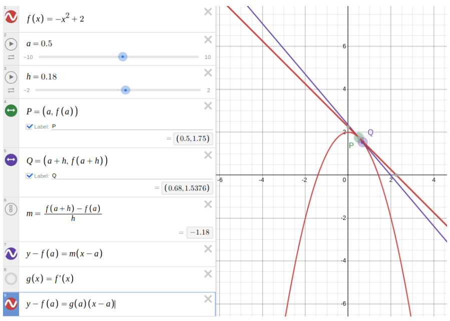

图 1: **另一张图片，位于右侧**

现代微积分以其严谨性而闻名，但其基石——极限的 $\epsilon - \delta$ 定义和由此构建的标准分析体系，正在向哲学化甚至宗教化方向发展：非直观性、逻辑严重形式化，过度僵化、挑战常识，和现实严重脱节正在演变成数学空想主义。

有鉴于此，格洛克以极度自下而上的方式重新思考整个微积分体系，成功建立可视化的格洛克代数空间，可视化范围从 $(-\infty^{\infty}, \infty^{\infty})$ 每一个数都可见，并将 ∞, ϵ 定义为未解析数，分别表示无穷大和无穷小，突然之间，一切都变得如此简单，并由此带来以下颠覆性的数学结果：

极限被重新定义，简单而直观，极限的计算只是简单的数学计算，洛必达法则不再必要，神秘性已全部消失。

开闭区间被重新描述，无穷小的数值化定义使开区间基本消失，在极限状态下都是闭区间。

连续性、间断点等相关理论已消失，基本只保留描述性概念和常识。

数列与极限的收敛相关内容是为了传统趋近极限的表述，而无穷大和无穷小不再是一个趋近的概念，这部分内容已经没有意义。因此只保留数列的通项公式并作为统一的函数对待。

导数不再是一个莱布尼兹定义的神秘符号 $\frac{d}{dx}F(x)$，现在只是一个重新定义的点 x 位置的点微分的商，即 $dF(x)/dx$，和小学的除法运算没有什么不同，更强调计算结果是瞬时变化率或几何图形上的斜率。

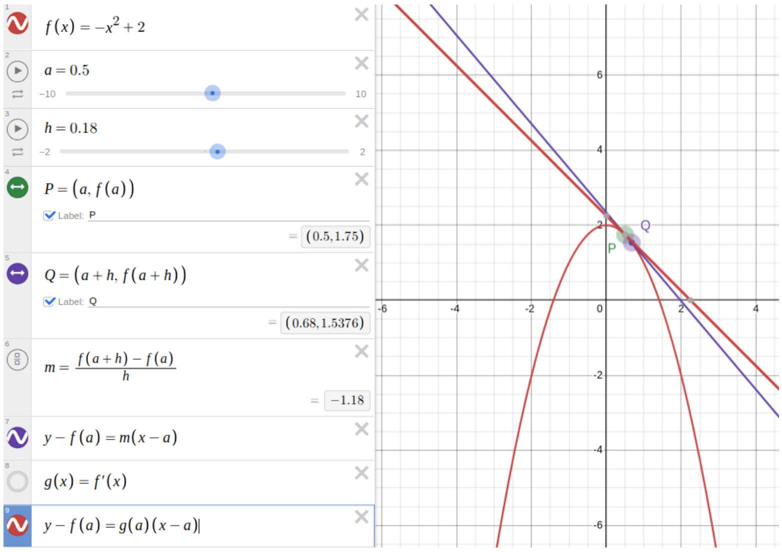

图 2: **示例插图：函数的几何图形展示**

积分被重新定义，删除积分定理等内容，重新定义积分为微分的逆运算。具体变化为点积分简称为积分取代不定积分，保留定积分并重新命名为区间积分对应区间微分。

自然常数 e 被重新定义为 $e = (1+\epsilon)^{\infty}$，清晰而直观，并拓展为自然常数序列 $e_n = (1+n\epsilon)^{\infty}$，使其不再具有神秘性。

定义和定理中的函数只进行最小化覆盖，即只包含一个定义域区间，消除传统定义和定理的繁杂限制条件，简单而清晰。

然而，更严肃而重要的思考是，我们为什么要接受数学基础/数理逻辑/集合论/数学分析这些所谓的数学家小圈子理论，无论对于普通人还是科研人员既看不懂也没有任何实用价值。回归常识和简单，我们真的需要数学家小圈子给我们解释为什么 $1+1=2$ 吗?

考德 · 格洛克

2025 年 11 月

重要提示

请确保您已安装 tcolorbox 宏包。

风险提示

不要在数学环境中使用
换行，请改用 align 或 split 环境。

目录

第一章　格洛克代数空间

本章首先从常识入手理解无穷大和无穷小，并得出基本的运算法则。在此基础上实现格洛克代数空间。最后给出无穷大和无穷小的正式定义和运算（规则）列表。

1.1　初步理解无穷大和无穷小

自微积分诞生以来，如何阐释、理解无穷大和无穷小以及由此引出的函数的极限一直是问题的核心，所以让我们以此为切入点，开始问题的探索。

格洛克：无穷大和无穷小的直观理解
无穷大和无穷小是具有特殊作用的两个数，分别用 ∞,ϵ 表示，对于 ∞，所有实数都是它的无穷小；对于 ϵ，所有实数都是它的无穷大。
由此产生如下运算法则：对于任意实数 C

$$\infty + C = \infty$$
$$\epsilon + C = C$$

这是基于 ∞,ϵ 本身的直观语义得出的。更进一步，基于数的性质，我们得到：

$$C_1\infty + C_2 = C_1\left(\infty + \frac{C_2}{C_1}\right) = C_1\infty$$
$$C_1\epsilon + C_2 = C_1\left(\epsilon + \frac{C_2}{C_1}\right) = C_2$$
$$C_1\infty^2 + C_2\infty = \infty(C_1\infty + C_2) = C_1\infty^2$$
$$C_1\epsilon^2 + C_2\epsilon = \epsilon(C_1\epsilon + C_2) = C_2\epsilon$$

这和 200 多年来的传统解释完全不同，甚至相反。传统解释中并不认为无穷大和无穷小是数，因此不能直接进行数学运算，强调它是一个无限趋近的“动态”过程，因此理解起来要困难复杂得多。
格洛克的直观解释如果可以成立，会使微积分学变得简单而清晰，这就需要建立一个直观而简单的可视化代数模型来阐释其合理性。

1.2 格洛克代数空间

格洛克代数环轴

和传统的实数数轴不同，格洛克数轴是一个圆环，圆环长度固定为 ∞ ，并将其分割为相等的 ∞ 段，每段长度为 1, 将数轴逆时针依次标注 0, 1, 2, ...，顺时针标注为 -1, -2, ...，这样我们就得到了一个覆盖 $(-\infty, \infty)$ 数字空间的环形数轴。

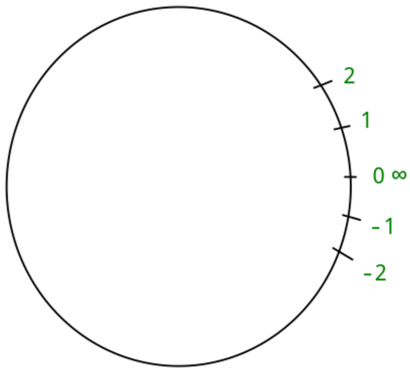

图 1.1: **格洛克代数环轴**

下图是格洛克环轴展开后的样子，在数轴的右端标注的是单位刻度的长度量级 $\infty^0 = 1$，因此称为格洛克 0 阶数轴。

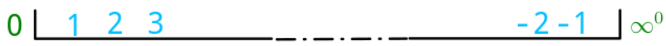

图 1.2: **格洛克 0 阶数轴**

需要注意的是，$\infty, -\infty$ 和原点 0 重合，这意味着数值大小达到 ∞ 时需要进位，以表示 ∞ 量级或更大的数。基于同样的原理，我们还需要量级更小的单位，即 ϵ，用来进位到格洛克 0 阶数轴。

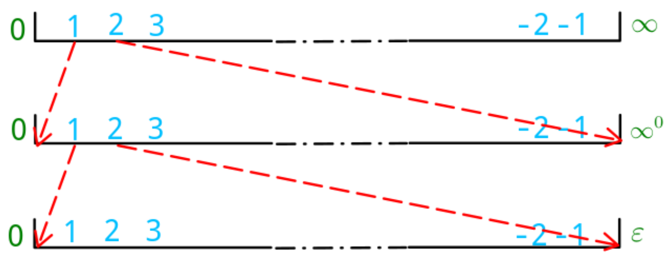

图 1.3: **宏空间和微空间**

∞ 以及更大的量级称为**格洛克宏空间**，对应的，ϵ 以及更小的量级称为**格洛克微空间**，图 1.3 表示了格洛克宏空间 1 轴，格洛克 0 轴和格洛克微空间 1 轴。

宏空间 1 轴覆盖区间 $[0,\infty^2)$，单位刻度大小为 1∞，将 1 单位刻度放大 ∞ 倍，得到格洛克 0 轴。
格洛克 0 轴覆盖区间 $[0,\infty)$，单位刻度大小为 1，将 1 单位刻度放大 ∞ 倍，得到微空间 1 轴。
微空间 1 轴覆盖区间 $[0,1)$，单位刻度大小为 $\frac{1}{\infty}$，即 1ϵ。
将宏空间和微空间以同样的方式分别向上和向下延展，形成完整的格洛克代数空间。

宏空间和微空间

这是一个相对的概念，如 ∞^{n+1} 是 ∞^n 的宏空间，∞^n 是 ∞^{n+1} 的微空间；ϵ^n 是 ϵ^{n+1} 的宏空间，ϵ^{n+1} 是 ϵ^n 的微空间。
宏空间是微空间的无穷大，微空间是宏空间的无穷小。

格洛克代数空间

完整格洛克代数空间如图 1.4 所示。

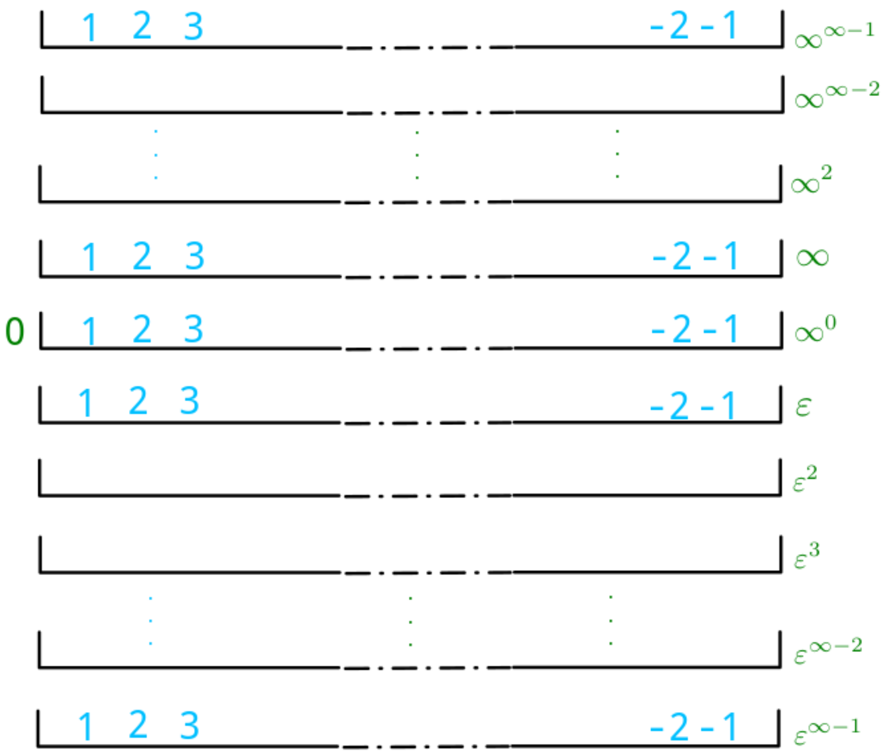

图 1.4: **格洛克代数空间**

由于指数进位回 0,∞^∞ 和 ϵ^∞ 回归原点 0, 图中未予显示。
格洛克代数空间最大覆盖范围 $[0,\infty^\infty)$，最小单位刻度 $1\epsilon^{\infty-1}$，可以满足任何数值的可视化标注。

需要注意的是，由于所有实数都是 ∞ 的无穷小，正数 C 只能标注在任一轴的最左侧的相对无穷小区间；同样的，负数 -C 只能标注在最右侧的相对无穷小区间。

例 1.2.1. 在格洛克代数空间上标注：
(1) $a = 0.5\infty + 1$,　(2) $b = 2\infty - 2$,　(3) $c = a + b$。

解：

$$
\begin{aligned}
c &= a + b \\
&= (0.5\infty + 1) + (2\infty - 2) \\
&= (0.5\infty + 2\infty) + (1 - 2) \\
&= 2.5\infty - 1
\end{aligned}
$$

a，b，c 如图 *1.5* 所示。

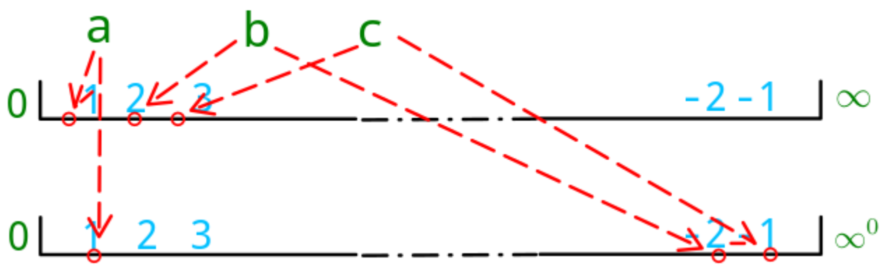

图 1.5: **数值标注**

1.3　无穷大和无穷小的定义

经过前面两节关于无穷大和无穷小的讨论和格洛克代数空间的形成，下面给出无穷大和无穷小的正式定义。

定义 1.1. *无穷大和无穷小*
设 ∞, ϵ 是未解析数（unsolved number），∞ 是正整数，表示无穷大，ϵ 表示无穷小。

性质列表

(1) ∞, ϵ 互为倒数，即 $\infty \cdot \epsilon = 1$ 。
(2) 对于任意实数 C，整数 n，$\infty^{n+1} + C\infty^n = \infty^{n+1}$，$\epsilon^n + C\epsilon^{n+1} = \epsilon^n$。
(3) ϵ 是最小的正数，$-\epsilon$ 是最大的负数，$0^+ = \epsilon$，$0^- = -\epsilon$。
(4) 对于任意实数 C，$C^+ = C + \epsilon$，$C^- = C - \epsilon$。

(5) 对于 $n>1$ 有，$\log_n\infty<\sqrt[n]{\infty}<\infty<\infty^n<n^\infty<\infty!$。
(6) 等效重定义。如果关于 ∞ 的表达式 $g(\infty)$ 的值仍是无穷大，那么 ∞ 可以重定义为 $g(\infty)$，记作：$\infty\leftarrow g(\infty),\epsilon\leftarrow\frac{1}{g(\infty)}$。

性质（1）对无穷大和无穷小的关系进行了标准化，使得数学属性更加清晰，高阶无穷大和无穷小的比较和转换变成了数学计算，而不是逻辑分析。

对于性质（2），当 $n=0$ 时有

$$\infty+C=\infty \tag{1.1}$$

$$1+C\epsilon=1 \tag{1.2}$$

将（1.1）两边同时减去 ∞，将（1.2）两边同时减去 1, 得到

$$C=0 \tag{1.3}$$

$$C\epsilon=0 \tag{1.4}$$

（1.3）说明在格洛克宏空间 1 轴（1 阶无穷大）的视角来看，无论 C 多么大，都是 ∞ 的无穷小，格洛克宏空间 1 轴上的值都为 0；（1.4）说明了在格洛克 0 轴（实数轴）的视角来看，无论 n 多么大，$n\epsilon$ 都是无穷小，在格洛克 0 轴上的值都为 0。这也是后续章节进行极限计算时的正确结果。
性质（2）本质上是将本章第一节关于无穷大和无穷小的运算规则进行了合并。

性质（3）可以合并到性质（4），分开是为了突出 0 的特殊性。C^+ 表示实数 C 右侧最靠近它的数，C^- 表示 C 左侧最靠近它的数。这可以用格洛克微空间展开的术语进行理解。

格洛克微空间展开
对于展开点 C，取单位长度区间 $[C,C+1]$ 并放大 ∞ 倍数，当我们将 C 点与微空间 1 轴的 0 对齐，将会“看到”最靠近 C 右侧的坐标刻度是 1ϵ。类似地，取单位长度区间 $[C-1,C]$ 并放大 ∞ 倍数，将 C-1 点与微空间 1 轴的 0 对齐，将会“看到”最靠近 C 左侧的坐标刻度是 -1ϵ。如图 1.6 所示。
事实上，我们也可以指定 $C^+=C+n\epsilon$, $C^-=C-n\epsilon$，结果也是正确的。从格洛克 0 轴（或实数轴）的角度来看，无论我们指定靠近 C 的距离是多么小，无论是百万分之一还是千万分之一，都是 $n\epsilon$ 的无穷大。

性质（5）明确了不等式的各项位于不同阶的格洛克宏空间，不等式的左侧都是右侧的无穷小，体现了如下运算规则：

$$\log_n\infty+\sqrt[n]{\infty}+\infty+\infty^n+n^\infty+\infty!$$

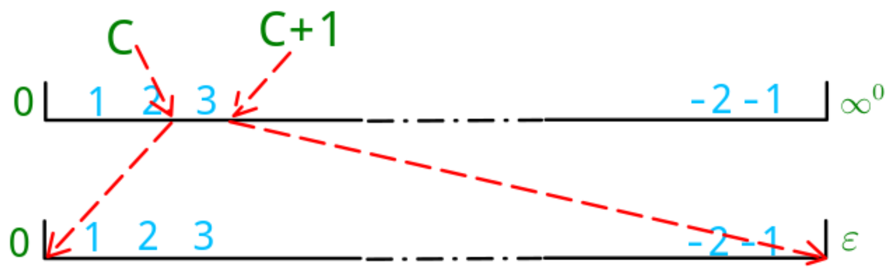

图 1.6: **格洛克微空间展开**

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt[n]{\infty} + \infty + \infty^n + n^\infty + \infty! \\
&= \infty + \infty^n + n^\infty + \infty! \\
&= \infty^n + n^\infty + \infty! \\
&= n^\infty + \infty! \\
&= \infty!
\end{aligned}
$$

虽然不等式的每一项都是无穷大，但它们的增长速度比值都达到了无穷大的量级，这可以由函数图形进行直观的观察，这里略去繁琐的证明过程。

关于性质（6），传统的无穷大和无穷小并没有明确的等阶划分，事实上覆盖了整个格洛克代数空间。通过等效重定义，我们可以得到一个明确的计算结果。如

$$
\begin{aligned}
f(\infty) &= \log_n \infty \\
&= \log_n n^\infty \qquad (\infty \leftarrow n^\infty) \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

观察对数函数的图形，它是一个增长异常缓慢的函数，因此 $\log_n \infty$ 是一个非常低阶的无穷大，通过等效重定义，我们得到了一个明确的无穷大结果，本质上我们改变了无穷大在宏空间的位置，但没有改变传统无穷大的结果，这在极限计算时很有用。

例 1.3.1. 数列用符号 $\{f(n)\}$ 表示，其中 $f(n)$ 是通项公式。如果 $n \to \infty$，$f(n) = C$ 那么数列是收敛的；如果 $n \to \infty$，$f(n) = \infty$ 那么数列是发散的；否则数列既不收敛也不发散。

判断下列数列的收敛性：

(1) $\{(-1)^n \frac{1}{n}\}$ (2) $\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\}$ (3) $\{n - \frac{1}{n}\}$

解：

(1)

$$f(n) = (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$f(\infty) = (-1)^\infty \frac{1}{\infty}$$
$$f(\infty) = (-1)^\infty \epsilon$$

$f(\infty) = \epsilon = 0$，如果 ∞ 为偶数；$f(\infty) = -\epsilon = 0$，如果 ∞ 为奇数。
综合奇偶两种情况，$f(\infty) = 0$，数列收敛。
(2)

$$f(n) = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$
$$f(\infty) = (-1)^\infty \frac{\infty+1}{\infty}$$
$$f(\infty) = (-1)^\infty \frac{\infty}{\infty}$$
$$f(\infty) = (-1)^\infty$$

数列在 *1* 和 *-1* 之间来回振荡，既不收敛也不发散。
(3)

$$f(n) = n - \frac{1}{n}$$
$$f(\infty) = \infty - \frac{1}{\infty}$$
$$f(\infty) = \infty - \epsilon$$
$$f(\infty) = \infty$$

数列发散。

通过上面的例子可以看出，关于无穷大和无穷小的计算完全符合数学运算法则，比传统的基于数学分析的形式化方法简单而清晰。

例 1.3.2.

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \frac{\sqrt{\infty+3}}{\infty} \\ &= \frac{\sqrt{(\infty^2-3)+3}}{\infty^2-3} \qquad (\infty \leftarrow \infty^2-3) \\ &= \frac{\infty}{\infty^2} \\ &= \frac{1}{\infty} \\ &= \epsilon \\ &= 0 \end{aligned}$$

通过等效重定义，我们精确计算出了表达式的结果，无需进行繁琐的形式化数学分析。

格洛克观点

格洛克代数空间的建立可以使我们抛弃传统的基于语言的数学逻辑，转而专注于简单精确的数学计算。后续章节我们将会看到微积分学是多么的简单，大量晦涩的定义、定理将被抛弃，一切变得如此不可思议。

例 1.3.3. 求函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$ 的定义域。

1.4 极限的概念

定义 1.2 (极限的 $\epsilon - \delta$ 定义)**.** 对于函数 $f(x)$，如果存在实数 L，使得对任意给定的 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有 $|f(x) - L| < \epsilon$，则称 L 为函数 $f(x)$ 在点 a 处的极限，记为 $\lim_{x \to a} f(x) = L$。
设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义。如果存在一个实数 L，使得：对于任意给定的正数 ϵ (无论它多么小)，总存在一个正数 δ (它通常依赖于 ϵ)，使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - L| < \epsilon$ 成立。
则称 L 是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

定理 1.1 (极限的四则运算)**.** 设 $\lim_{x \to a} f(x)$ 和 $\lim_{x \to a} g(x)$ 都存在，则有：

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \quad \text{其中} \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

第二章　函数和极限

函数是数学中一个核心概念，它描述了变量之间的一种对应关系。简单来说，函数将一个输入值（自变量）映射到一个输出值（因变量）。函数的概念起源于 17 世纪的莱布尼茨和牛顿，用于描述物理现象，如运动和变化。

传统的函数表示是一种泛化的表示，试图包容一切，解决一切问题，自变量和函数值（因变量）之间的关系抽象成规则，试图解决一切假想中的问题；因此在描述定义、定理时需要晦涩的前提限制条件，并形成抽象的形式化定义。本文或格洛克描述的函数只有一种，自变量和函数值之间的关系由自变量表达式确定，保持具体而简单。

极限是微积分的基础概念，它描述了函数在某个点附近的行为，即使函数在该点未定义或不连续。极限的概念由柯西和魏尔斯特拉斯在 19 世纪正式化，用于处理无穷小和无穷大。

基于格洛克代数空间，定义域的区间和函数的连续性进行了重新表述，极限概念被重新定义，一切变得简单而直观。

2.1　理解函数

函数是数学中描述对应关系的一种基本且非常重要的概念。通常写作 $y = f(x)$。

函数的关键特点

唯一性对应 (Uniqueness)：对于定义域内的每一个输入值 x，函数都只能对应一个唯一的输出值 $f(x)$。

定义域 (Domain)：所有允许的输入值 x 的集合。

例如，在函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 中，x 不能为 0，所以定义域是除 0 以外的所有实数。

值域 (Range)：值域是实际输出值的集合。

函数的输入输出关系通过自变量表达式来描述，通常有几何图形来对应表示。例如函数 $f(x) = x^2 + 1$，在几何图形上表现为抛物线。

定义域区间

函数的定义域通常是数轴上的一个或多个连续的数值范围，因此我们常用区间符号来表示它。
圆括号 (a, b) 表示不包含端点（开区间）。表示 $a < x < b$，以及区间边界是 ∞ 或 $-\infty$ 的情况。
方括号 $[a, b]$ 表示包含端点（闭区间）。表示 $a \le x \le b$。

开区间转换为闭区间

依据格洛克无穷大和无穷小定义的性质（4），有

$$(a,b) \Rightarrow [a+\epsilon, b-\epsilon] \qquad (a,\infty) \Rightarrow [a+\epsilon,\infty)$$

$\infty)$ 既可以理解为开区间也可以理解为闭区间，根据具体的问题进行不同的理解。

分段函数

分段函数将定义域分成若干互不相交的子区间，并在每个子区间上定义一个子函数。
分段函数常用大括号表示，例如：

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{if } x < 0 \\ x, & \text{if } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{if } x < 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{if } x < 1 \\ 3x-1, & \text{if } x \ge 1 \end{cases}$$

还有一些常见的特殊分段函数：
阶跃函数 (Step Function)：分段函数由常数函数组成。例如，单位阶跃函数 (Unit Step Function)。
分段线性函数 (Piecewise Linear Function)：分段函数由线段（线性函数）组成。
通过以上讨论，我们现在可以明确：**函数的概念和性质总是作用于单一定义域区间**。

复合函数

复合函数本质上是自变量的函数（表达式）变换并受到变换函数的额外约束。例如复合函数 $f(g(x))$，我们可以理解为函数 $f(y)$，并通过 $y = g(x)$ 变换得到的。事实上，函数变换更常见，因此不作为一个单独的函数分类提出。

2.2 函数的极限

函数极限是微积分中的一个基本概念，它描述了一个函数在自变量（输入值）接近某一给定值时，它的函数值（输出值）所表现出的趋势。

函数极限的直观理解

（1）函数 $f(x)$ 在 x 趋近于 a 时的极限是 L，记作 $\lim_{x\to a} f(x) = L$。
（2）当 x 无限地接近 a（但不等于 a）时，函数值 $f(x)$ 会无限地接近一个确定的值 L。
（3）$f(x)$ 在 $x = a$ 处是否有定义，以及 $f(a)$ 的值是多少，并不影响 $\lim_{x\to a} f(x)$ 的结果。极限关注的是趋近过程，而非终点的值。
从上面直觉出发，逐渐演变完善了极限的 $\epsilon - \delta$ 定义。$\epsilon - \delta$ 定义为极限提供了逻辑严密性，但代价是牺牲了直觉性、增加了学习难度和操作复杂性。

格洛克极限定义

格洛克采用逆向思维，并以可视化的格洛克代数空间和无穷大无穷小的定义作为逻辑支撑，给出极限的定义。

定义 2.1 (函数的极限). 对于函数 $f(x)$, $x \to a \iff x = a \pm \epsilon$，函数 $f(x)$ 在 x 趋近于 a 时的极限

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a \pm \epsilon) = f(a)$，如果 a 位于定义域区间内。
(2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a + \epsilon)$，如果 a 位于定义域区间左边界。
(3) $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a - \epsilon)$，如果 a 位于定义域区间右边界。

对于（2）和（3），如果 a 是闭区间边界，极限值应用 $f(a)$ 仍然成立。

格洛克将传统极限的动态趋近描述转换成了静态描述，因为在格洛克微空间"看到了"最接近 a 的极限位置。由此不再需要晦涩难解的逻辑推理描述，简单直接地进行极限计算。

例 2.2.1. 计算极限

(1) $\lim_{x\to 1}(2x+1)$ (2) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-x+5}{2x^3+4x^2-1}$ (3) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ (4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

解:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 2\cdot(1)+1 = 3$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-x+5}{2x^3+4x^2-1} = \dfrac{3\infty^3-\infty+5}{2\infty^3+4\infty^2-1} = \dfrac{3\infty^3}{2\infty^3} = \dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(2+\epsilon)^2-4}{(2+\epsilon)-2} = \dfrac{4\epsilon+\epsilon^2}{\epsilon} = 4+\epsilon = 4$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+\epsilon}-1}{\epsilon}$

$$=\frac{(\sqrt{1+\epsilon}-1)(\sqrt{1+\epsilon}+1)}{\epsilon(\sqrt{1+\epsilon}+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}+1}=\frac{1}{2}$$

上例（3）和（4）略去了计算左极限，因为左右极限相等。

函数的连续性

(1) 在定义域区间内函数总是连续的，在闭区间左边界右连续，在闭区间右边界左连续。

(2) 如果分段函数的分段点有定义，分段子函数分别为 f_1, f_2，并且有 $f_1(a-\epsilon)=f_2(a+\epsilon)=f(a)$，那么分段函数在分段点处连续。

函数的连续性是显而易见的，换句话说，函数 $f(x)$ 的值随着自变量 x 的连续变化而连续变化。函数图形可视化的证明了函数的连续性。事实上，证明函数的连续性很容易进入逻辑上的循环证明。

讨论函数的连续性只有在函数的两个相邻区间的分段点处才有意义，格洛克采用分段函数的方式描述了这种情况，分段子函数 f_1, f_2 可以相同，也可以不同。具有苛刻定义的非常规函数因失去一般性不在这里进行讨论。

例 2.2.2. 计算极限

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$　　(2) $\lim_{x\to 0}|x|$

解：

(1) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\epsilon}=-\infty$　　$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{\epsilon}=\infty$

左右极限不相等，极限不存在。

(2) $\lim_{x\to 0^-}|x|=|-\epsilon|=\epsilon=0$　　$\lim_{x\to 0^+}|x|=|\epsilon|=0$

分段点 *0* 左右极限相等，极限存在，极限值为 *0*。

分段点 *0* 有定义且函数值为 *0*，所以函数在分段点 *0* 处连续。

例 2.2.3. 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

解： 这是一个著名的极限问题，传统上使用夹逼定理进行求解。

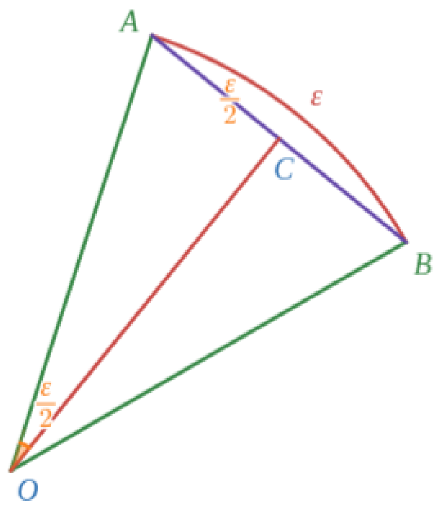

图 2.1: **单位圆上的弧**

当光滑曲线上的两点 A, B 越来越接近时，曲线弧 AB 与割线 AB 逐渐重合，换句话说，只要 A, B 两点的距离足够小，$\widehat{AB} = |AB|$，如图 2.1 所示。
我们取弧长 $\widehat{AB} = \epsilon$，得到如下关系：

$$|AB| = \epsilon, \quad \angle AOB = \epsilon, \quad |AC| = \angle AOC = \frac{\epsilon}{2}$$

根据三角公式

$$\begin{aligned} sin\frac{\epsilon}{2} &= \frac{AC}{OA} = AC = \frac{\epsilon}{2} \\ \cos\frac{\epsilon}{2} &= \frac{OC}{OA} = \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

现在我们可以计算极限

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\epsilon}{\epsilon} &= \frac{2\sin\frac{\epsilon}{2}\cos\frac{\epsilon}{2}}{\epsilon} \\ &= \frac{2\cdot\frac{\epsilon}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}}{\epsilon} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

例 2.2.4. 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$$

解： 利用半角公式有 $\cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$，所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \frac{1-\cos\epsilon}{\epsilon} \\ &= \frac{1-1+2\sin^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{\epsilon} \\ &= \frac{2\cdot\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon = 0\end{aligned}$$

极限的 $\epsilon - \delta$ 定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义。如果存在一个实数 L，使得：
对于任意给定的正数 ϵ (无论它多么小)，总存在一个正数 δ (它通常依赖于 ϵ)，使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - L| < \epsilon$ 成立。
则称 L 是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

2.3 自然常数和自然对数

自然常数 e 是数学中一个重要的无理数，常作为自然对数的底数出现。它大约等于 2.71828，并在许多自然现象、增长模型（如复利）和极限计算中扮演关键角色。
e 最早由瑞士数学家雅各布 · 伯努利（Jacob Bernoulli）在研究复利问题时发现，后来由莱昂哈德 · 欧拉（Leonhard Euler）在 18 世纪正式引入符号”e”（源自”exponential”，指数的）。

e 可以定义为以下极限：

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty = (1+\epsilon)^\infty$$

从格洛克代数空间的角度看，自然常数是一个未解析的无穷大无穷小计算表达式。使用无穷大等效重定义 $\infty \leftarrow f(\infty)$，格洛克给出自然常数的定义。

定义 2.2. 自然常数

设 $f(\infty)$ 是关于 ∞ 的表达式，即 $f(\infty)$ 位于格洛克宏空间；$f(\epsilon)$ 是关于 ϵ 的表达式，即 $f(\epsilon)$ 位于格洛克微空间。自然常数 e 定义为

$$e = \left(1 + \frac{1}{f(\infty)}\right)^{f(\infty)} \tag{2.1}$$

$$e = (1 + f(\epsilon))^{1/f(\epsilon)} \tag{2.2}$$

需要明确的是，即使 $f(\infty), f(\epsilon)$ 是负值时，自然常数的定义仍然有效。

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)^{-\infty} &= \left(\frac{\infty - 1}{\infty}\right)^{-\infty} = \left(\frac{\infty}{\infty - 1}\right)^{\infty} \\
&= \left(1 + \frac{1}{\infty - 1}\right)^{\infty - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{\infty - 1}\right) \\
&= e \cdot (1 + \epsilon) \\
&= e
\end{aligned}$$

自然对数，记作 $\ln(x)$，是以 e 为底的对数函数，它是 $\log_e(x)$ 的简写。

定理 2.1. 自然恒等式

$$(1 + a \cdot \epsilon)^b = e^{ab \cdot \epsilon} = 1 + ab \cdot \epsilon \tag{2.3}$$

$$a^\epsilon = e^{\ln a \cdot \epsilon} = 1 + \ln a \cdot \epsilon \tag{2.4}$$

$$\ln(1 + a \cdot \epsilon) = a \cdot \epsilon \tag{2.5}$$

证明

$$\begin{aligned}
(1 + a \cdot \epsilon)^b &= (1 + a \cdot \epsilon)^{\frac{1}{a\epsilon} \cdot a\epsilon \cdot b} \\
&= e^{ab \cdot \epsilon} \\
&= (1 + ab \cdot \epsilon)^{\frac{1}{ab \cdot \epsilon} \cdot (ab \cdot \epsilon)} \\
&= 1 + ab \cdot \epsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^\epsilon &= e^{\ln a^\epsilon} = e^{\epsilon \cdot \ln a} \\
&= (1 + \epsilon \cdot \ln a)^{\frac{1}{\epsilon \cdot \ln a} \cdot (\epsilon \cdot \ln a)} \\
&= 1 + \ln a \cdot \epsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(1 + a \cdot \epsilon) &= \ln e^{a \cdot \epsilon} \\
&= a \cdot \epsilon \cdot \ln e \\
&= a \cdot \epsilon
\end{aligned}$$

例 2.3.1. 计算极限

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} &= \left(1+\frac{2}{\infty}\right)^{\infty} \\
&= \left(1+\frac{2}{\infty}\right)^{\frac{\infty}{2}\cdot 2} \\
&= e^{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x} &= \frac{\ln(1+3\epsilon)}{\epsilon} \\
&= \frac{\ln e^{3\epsilon}}{\epsilon} = \frac{3\epsilon}{\epsilon} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} &= \frac{e^{\epsilon}-1}{\epsilon} \\
&= [(1+\epsilon)^{\infty\cdot\epsilon}-1]\cdot\frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{(1+\epsilon)-1}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} &= \frac{a^{\epsilon}-1}{\epsilon} \\
&= \frac{(1+\ln a\cdot\epsilon)-1}{\epsilon} \\
&= \frac{\ln a\cdot\epsilon}{\epsilon} \\
&= \ln a
\end{aligned}
$$

自然恒等式是极限运算

显然，定理 2.1 的恒等结果是在舍弃更高阶无穷小后的极限运算结果，例如极限计算

$$
\frac{e^{\epsilon^{2}}-1-\epsilon^{2}}{\epsilon^{4}}
$$

我们不能简单的应用定理 2.1，那样分子将为 0，此时正确的方法是使用“平滑”的泰勒展开来得到更高阶无穷小，从而计算出正确的结果。
定理 2.1 的意义在于简化指数函数导数公式的推导，免去复杂的逻辑推理。

2.4 泰勒展开在极限计算中的应用

泰勒展开（Taylor Series Expansion）是计算涉及 $e, \ln(x), \sin(x), \cos(x)$ 等基本函数的极限时，一个非常强大且高效的工具。
它主要利用函数在某一点（通常是 $x=0$，即麦克劳林展开）附近的多项式近似来简化分子和分母。
常用函数的麦克劳林展开式 $(x \to 0)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{2.6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{2.7}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \tag{2.8}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{2.9}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{2.10}$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{2.11}$$

例 2.4.1. 计算极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+\epsilon)}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} &= \frac{\ln(\cos\epsilon)}{\epsilon^2} = \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon^2\right)}{\epsilon^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\epsilon^2}{\epsilon^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} &= \frac{e^{\epsilon^2} - 1 - \epsilon^2}{\epsilon^4} \\ &= \frac{\left(1 + \epsilon^2 + \frac{1}{2}\epsilon^4\right) - 1 - \epsilon^2}{\epsilon^4} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\epsilon^4}{\epsilon^4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例 2.4.2. 计算极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\epsilon}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos\epsilon}{\epsilon} = \frac{1-(1-\frac{1}{2}\epsilon^2)}{\epsilon} = \frac{1}{2}\epsilon = 0$$

使用泰勒展开计算极限的要点：
（1）确定阶数：根据分母的无穷小阶数来确定分子和分母需要展开到的阶数。目标是让分子中最低次项（非零项）的阶数与分母的阶数相等。
（2）抵消低阶项：展开后，分子中的低阶项（如常数项、一次项等）通常会相互抵消，只剩下与分母同阶或更高阶的无穷小项。
（3）提取主部：保留分子分母中最低次项的系数，即可求出极限。
我们在学习泰勒级数之前，提前利用泰勒级数的展开式来简化复杂极限的计算，避免进行不必要的复杂逻辑分析。

循环论证

复杂多项式的泰勒级数展开在计算极限时很强大和直观，但是注意不能用它来证明极限和导数的推导，因为泰勒级数是在极限和导数的理论框架下推导出来的。否则可能会出现循环论证的逻辑错误。

第三章　点微分和导数

3.1　瞬时变化量与点微分

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义为：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数表示函数在某点变化率的精确度量。

第四章　积分和积分方法

4.1　导数的定义与几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义为：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数表示函数在某点变化率的精确度量。