微积分基础教程

(Calculus Fundamentals)

您的姓名

2025 年 12 月 13 日

版权信息

本书仅提供电子版，固定版式。

前言

自牛顿与莱布尼茨独立创设微积分(1660–1680年代)以来，这门“变化的数学”已走过三个半世纪。三百年间，微积分从“计算变化率”演化为“描述一切可微结构”的元语言：数学不再只是工具，它已经从一门关于量的科学，演变为一门关于模式、结构和形式推理的宏大体系。

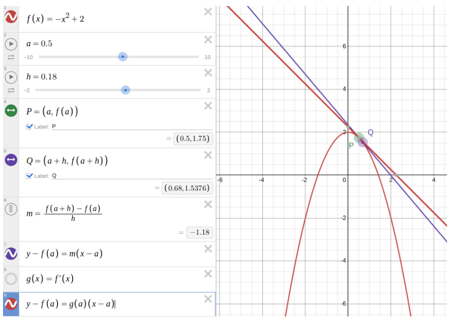


图 1: **另一张图片，位于右侧**

现代微积分以其严谨性而闻名，但其基石——极限的 $\epsilon - \delta$ 定义和由此构建的标准分析体系，正在向哲学化甚至宗教化方向发展：非直观性、逻辑严重形式化，过度僵化、挑战常识，和现实严重脱节正在演变成数学空想主义。

有鉴于此，格洛克以极度自下而上的方式重新思考整个微积分体系，成功建立可视化的格洛克代数空间，可视化范围从 $(-\infty^{\infty}, \infty^{\infty})$ 每一个数都可见，并将 ∞, ϵ 定义为未解析数，分别表示无穷大和无穷小，突然之间，一切都变得如此简单，并由此带来以下颠覆性的数学结果：

极限被重新定义，简单而直观，极限的计算只是简单的数学计算，洛必达法则不再必要，神秘性已全部消失。

开闭区间被重新描述，无穷小的数值化定义使开区间基本消失，在极限状态下都是闭区间。

连续性、间断点等相关理论已消失，基本只保留描述性概念和常识。

数列与极限的收敛相关内容是为了传统趋近极限的表述，而无穷大和无穷小不再是一个趋近的概念，这部分内容已经没有意义。因此只保留数列的通项公式并作为统一的函数对待。

导数不再是一个莱布尼兹定义的神秘符号 $\frac{d}{dx}F(x)$，现在只是一个重新定义的点 x 位置的点微分的商，即 $dF(x)/dx$，和小学的除法运算没有什么不同，更强调计算结果是瞬时变化率或几何图形上的斜率。

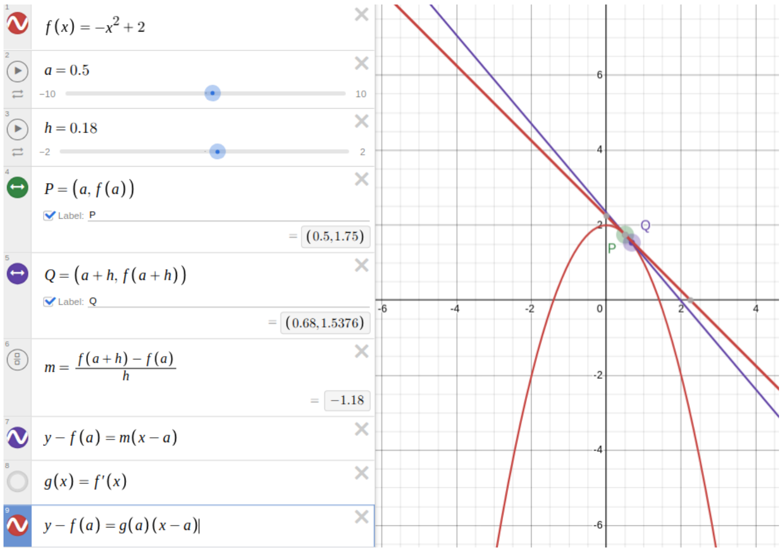


图 2: **示例插图：函数的几何图形展示**

积分被重新定义，删除积分定理等内容，重新定义积分为微分的逆运算。具体变化为点积分简称为积分取代不定积分，保留定积分并重新命名为区间积分对应区间微分。

自然常数 e 被重新定义为 $e = (1+\epsilon)^{\infty}$，清晰而直观，并拓展为自然常数序列 $e_n = (1+n\epsilon)^{\infty}$，使其不再具有神秘性。

定义和定理中的函数只进行最小化覆盖，即只包含一个定义域区间，消除传统定义和定理的繁杂限制条件，简单而清晰。

然而，更严肃而重要的思考是，我们为什么要接受数学基础/数理逻辑/集合论/数学分析这些所谓的数学家小圈子理论，无论对于普通人还是科研人员既看不懂也没有任何实用价值。回归常识和简单，我们真的需要数学家小圈子给我们解释为什么 $1+1=2$ 吗?

考德 · 格洛克

2025 年 11 月

重要提示

请确保您已安装 tcolorbox 宏包。

风险提示

不要在数学环境中使用

换行，请改用 align 或 split 环境。

目录

第一章　格洛克代数空间

本章首先从常识入手理解无穷大和无穷小，并得出基本的运算法则。在此基础上实现格洛克代数空间。最后给出无穷大和无穷小的正式定义和运算（规则）列表。

1.1　初步理解无穷大和无穷小

自微积分诞生以来，如何阐释、理解无穷大和无穷小以及由此引出的函数的极限一直是问题的核心，所以让我们以此为切入点，开始问题的探索。

格洛克：无穷大和无穷小的直观理解

无穷大和无穷小是具有特殊作用的两个数，分别用 ∞, ϵ 表示，对于 ∞，所有实数都是它的无穷小；对于 ϵ，所有实数都是它的无穷大。

由此产生如下运算法则：对于任意实数 C

$$\infty + C = \infty$$
$$\epsilon + C = C$$

这是基于 ∞, ϵ 本身的直观语义得出的。更进一步，基于数的性质，我们得到：

$$C_1\infty + C_2 = C_1\left(\infty + \frac{C_2}{C_1}\right) = C_1\infty$$
$$C_1\epsilon + C_2 = C_1\left(\epsilon + \frac{C_2}{C_1}\right) = C_2$$
$$C_1\infty^2 + C_2\infty = \infty(C_1\infty + C_2) = C_1\infty^2$$
$$C_1\epsilon^2 + C_2\epsilon = \epsilon(C_1\epsilon + C_2) = C_2\epsilon$$

这和 200 多年来的传统解释完全不同，甚至相反。传统解释中并不认为无穷大和无穷小是数，因此不能直接进行数学运算，强调它是一个无限趋近的“动态”过程，因此理解起来要困难复杂得多。

格洛克的直观解释如果可以成立，会使微积分学变得简单而清晰，这就需要建立一个直观而简单的可视化代数模型来阐释其合理性。

1.2　格洛克代数空间

格洛克代数环轴

和传统的实数数轴不同，格洛克数轴是一个圆环，圆环长度固定为 ∞ ，并将其分割为相等的 ∞ 段，每段长度为 1, 将数轴逆时针依次标注 0, 1, 2, ...，顺时针标注为 -1, -2, ...，这样我们就得到了一个覆盖 $(-\infty, \infty)$ 数字空间的环形数轴。

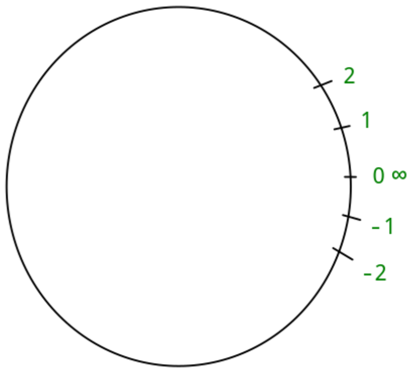


图 1.1: **格洛克代数环轴**

下图是格洛克环轴展开后的样子，在数轴的右端标注的是单位刻度的长度量级 $\infty^0 = 1$，因此称为格洛克 0 阶数轴。

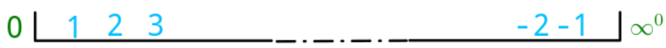


图 1.2: **格洛克 0 阶数轴**

需要注意的是，$\infty, -\infty$ 和原点 0 重合，这意味着数值大小达到 ∞ 时需要进位，以表示 ∞ 量级或更大的数。基于同样的原理，我们还需要量级更小的单位，即 ϵ，用来进位到格洛克 0 阶数轴。

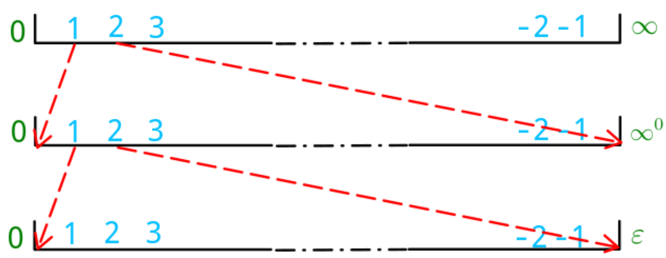


图 1.3: **宏空间和微空间**

∞ 以及更大的量级称为**格洛克宏空间**，对应的，ϵ 以及更小的量级称为**格洛克微空间**，图 1.3 表示了格洛克宏空间 1 轴，格洛克 0 轴和格洛克微空间 1 轴。

宏空间 1 轴覆盖区间 $[0, \infty^2)$，单位刻度大小为 1∞，将 1 单位刻度放大 ∞ 倍，得到格洛克 0 轴。
格洛克 0 轴覆盖区间 $[0, \infty)$，单位刻度大小为 1，将 1 单位刻度放大 ∞ 倍，得到微空间 1 轴。
微空间 1 轴覆盖区间 $[0, 1)$，单位刻度大小为 $\frac{1}{\infty}$，即 1ϵ。
将宏空间和微空间以同样的方式分别向上和向下延展，形成完整的格洛克代数空间。

宏空间和微空间

这是一个相对的概念，如 ∞^{n+1} 是 ∞^n 的宏空间，∞^n 是 ∞^{n+1} 的微空间；ϵ^n 是 ϵ^{n+1} 的宏空间，ϵ^{n+1} 是 ϵ^n 的微空间。
宏空间是微空间的无穷大，微空间是宏空间的无穷小。

格洛克代数空间

完整格洛克代数空间如图 1.4 所示。

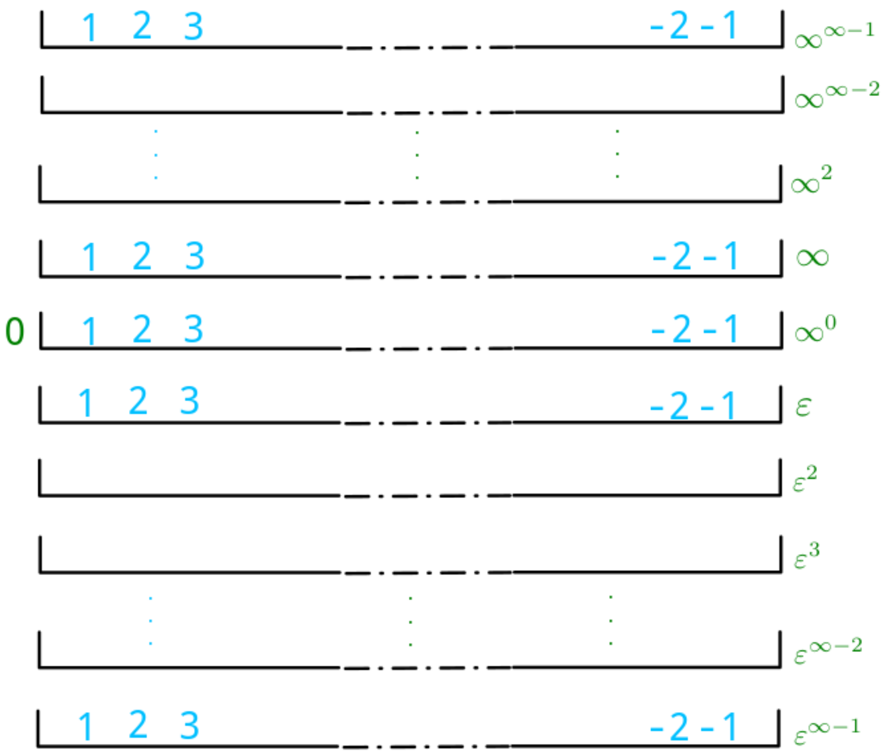


图 1.4: **格洛克代数空间**

由于指数进位回 $0, \infty^\infty$ 和 ϵ^∞ 回归原点 0, 图中未予显示。
格洛克代数空间最大覆盖范围 $[0, \infty^\infty)$，最小单位刻度 $1\epsilon^{\infty-1}$，可以满足任何数值的可视化标注。

需要注意的是，由于所有可描述的实数都是 ∞ 的无穷小，正数 C 只能标注在任一轴的最左侧的相对无穷小区间；同样的，负数 -C 只能标注在最右侧的相对无穷小区间。

例 1.2.1. 在格洛克代数空间上标注：
(1) $a = 0.5\infty + 1$，　(2) $b = 2\infty - 2$，　(3) $c = a + b$。

解：

$$\begin{aligned} c &= a + b \\ &= (0.5\infty + 1) + (2\infty - 2) \\ &= (0.5\infty + 2\infty) + (1 - 2) \\ &= 2.5\infty - 1 \end{aligned}$$

a，b，c 如图 *1.5* 所示。

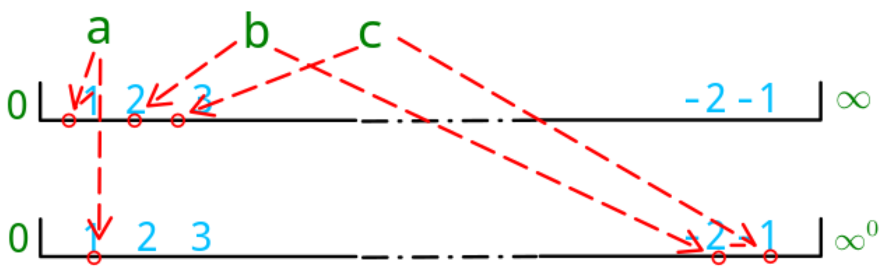


图 1.5: **数值标注**

1.3 无穷大和无穷小的定义

经过前面两节关于无穷大和无穷小的讨论和格洛克代数空间的形成，下面给出无穷大和无穷小的正式定义。

定义 1.1. 无穷大和无穷小
设 ∞, ϵ 是未解析数（*unsolved number*），∞ 是正整数，表示无穷大，ϵ 表示无穷小。

性质列表
(*1*) ∞, ϵ 互为倒数，即 $\infty \cdot \epsilon = 1$ 。
(*2*) 对于任意实数 C，整数 n，$\infty^{n+1} + C\infty^n = \infty^{n+1}$，$\epsilon^n + C\epsilon^{n+1} = \epsilon^n$。
(*3*) ϵ 是最小的正数，$-\epsilon$ 是最大的负数，$0^+ = \epsilon$，$0^- = -\epsilon$。

(*4*) 对于任意实数 C，$C^+ = C + \epsilon$, $C^- = C - \epsilon$。
(*5*) 等效重定义。如果关于 ∞ 的表达式 $g(\infty)$ 的值仍是无穷大，那么 ∞ 可以重定义为 $g(\infty)$，记作：$\infty \leftarrow g(\infty), \epsilon \leftarrow \frac{1}{g(\infty)}$。
(*6*) 对于 $n > 1$ 有，$\log_n \infty < \sqrt[n]{\infty} < \infty < \infty^n < n^\infty < \infty!$。

性质（1）对无穷大和无穷小的关系进行了标准化，使得数学属性更加清晰，高阶无穷大和无穷小的比较和转换变成了数学计算，而不是逻辑分析。

对于性质（2），当 $n = 0$ 时有

$$\infty + C = \infty \tag{1.1}$$

$$1 + C\epsilon = 1 \tag{1.2}$$

将（1.1）两边同时减去 ∞，将（1.2）两边同时减去 1, 得到

$$C = 0 \tag{1.3}$$

$$C\epsilon = 0 \tag{1.4}$$

（1.3）说明在格洛克宏空间 1 轴（1 阶无穷大）的视角来看，无论 C 多么大，都是 ∞ 的无穷小，格洛克宏空间 1 轴上的值都为 0；（1.4）说明了在格洛克 0 轴（实数轴）的视角来看，无论 n 多么大，$n\epsilon$ 都是无穷小，在格洛克 0 轴上的值都为 0。这也是后续章节进行极限计算时的正确结果。
性质（2）本质上是将本章第一节关于无穷大和无穷小的运算规则进行了合并。

性质（3）可以合并到性质（4），分开是为了突出 0 的特殊性。C^+ 表示实数 C 右侧最靠近它的数，C^- 表示 C 左侧最靠近它的数。这可以用格洛克微空间展开的术语进行理解。

格洛克微空间展开

对于展开点 C，取单位长度区间 $[C, C+1]$ 并放大 ∞ 倍数，当我们将 C 点与微空间 1 轴的 0 对齐，将会“看到”最靠近 C 右侧的坐标刻度是 1ϵ。类似地，取单位长度区间 $[C-1, C]$ 并放大 ∞ 倍数，将 C-1 点与微空间 1 轴的 0 对齐，将会“看到”最靠近 C 左侧的坐标刻度是 -1ϵ。如图 1.6 所示。
事实上，我们也可以指定 $C^+ = C + n\epsilon$, $C^- = C - n\epsilon$，结果也是正确的。从格洛克 0 轴（或实数轴）的角度来看，无论我们指定靠近 C 的距离是多么小，无论是百万分之一还是千万分之一，都是 $n\epsilon$ 的无穷大。

关于性质（5），传统的无穷大和无穷小并没有明确的等阶划分，事实上覆盖了整个格洛克代数空间。通过等效重定义，我们可以得到一个明确的计算结果。如

$$f(\infty) = \log_n \infty$$

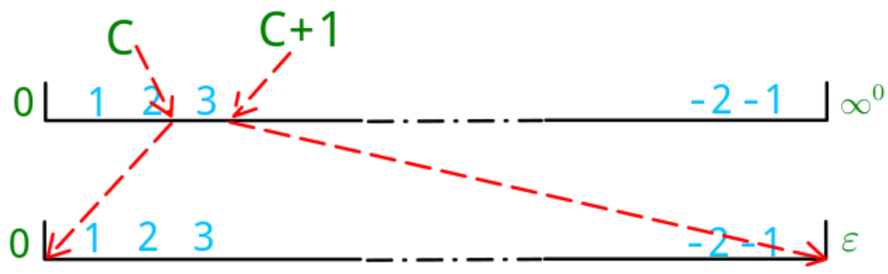


图 1.6: **格洛克微空间展开**

$$
\begin{aligned}
&= \log_n n^\infty \qquad (\infty \leftarrow n^\infty) \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

观察对数函数的图形，它是一个增长异常缓慢的函数，因此 $\log_n \infty$ 是一个非常低阶的无穷大，通过等效重定义，我们得到了一个明确的无穷大结果，本质上我们改变了无穷大在宏空间的位置，但没有改变传统无穷大的结果，这在极限计算时很有用。

性质（6）明确了不等式的各项位于不同阶的格洛克宏空间，不等式的左侧都是右侧的无穷小，体现了如下运算规则：

$$
\begin{aligned}
&\log_n \infty + \sqrt[n]{\infty} + \infty + \infty^n + n^\infty + \infty! \\
&= \sqrt[n]{\infty} + \infty + \infty^n + n^\infty + \infty! \\
&= \infty + \infty^n + n^\infty + \infty! \\
&= \infty^n + n^\infty + \infty! \\
&= n^\infty + \infty! \\
&= \infty!
\end{aligned}
$$

虽然不等式的每一项都是无穷大，但它们的增长速度比值都达到了无穷大的量级，严格的证明需要后续知识的支撑，这里只进行说明性的证明：

增长顺序链：对数函数 $\ll$ 幂函数 $\ll$ 指数函数 $\ll$ 阶乘函数

对数函数增长得极其缓慢，它是“加法”的逆运算（将乘法转化为加法），而幂函数仍涉及乘法。通过将无穷大“放大”，可以看出两者的差距巨大：

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt[n]{\infty}}{\log_n \infty} &= \frac{\sqrt[n]{\infty^n}}{\log_n \infty^n} \qquad (\infty \leftarrow \infty^n) \\
&= \frac{\infty}{n \log_n \infty} \qquad (\infty \leftarrow n^\infty) \\
&= \frac{1}{n} \frac{n^\infty}{\infty}
\end{aligned}
$$

在幂函数家族内部，指数越大，增长越快，即 $\sqrt[n]{x} \ll x \ll x^n$
幂函数 x^n 只进行有限次的乘法（n 次），而指数函数 b^x 涉及无限次的乘法（x 次 b 相乘）。
阶乘函数 $x!$ 的乘数是不断增大的 $(1, 2, 3, \ldots, x)$，而指数函数 n^x 的乘数是固定的 n，即

$$\frac{n^\infty}{\infty!} = \underbrace{\left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n}\right)}_{C_n\ (\text{常数})} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{\infty}\right)}_{P_x\ (\text{收敛部分})}$$

可以通过函数的图形陡峭程度直观理解这种增长速度差异。

例 1.3.1. 数列用符号 $\{f(n)\}$ 表示，其中 $f(n)$ 是通项公式。如果 $n \to \infty$，$f(n) = C$ 那么数列是收敛的；如果 $n \to \infty$，$f(n) = \infty$ 那么数列是发散的；否则数列既不收敛也不发散。
判断下列数列的收敛性：
(1) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$ (2) $\left\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\right\}$ (3) $\left\{n - \frac{1}{n}\right\}$

解:
(1)

$$\begin{aligned} f(n) &= (-1)^n \frac{1}{n} \\ f(\infty) &= (-1)^\infty \frac{1}{\infty} \\ &= (-1)^\infty \epsilon \end{aligned}$$

$f(\infty) = \epsilon = 0$，如果 ∞ 为偶数；$f(\infty) = -\epsilon = 0$，如果 ∞ 为奇数。
综合奇偶两种情况，$f(\infty) = 0$，数列收敛。
(2)

$$\begin{aligned} f(n) &= (-1)^n \frac{n+1}{n} \\ f(\infty) &= (-1)^\infty \frac{\infty+1}{\infty} \\ &= (-1)^\infty \frac{\infty}{\infty} \\ &= (-1)^\infty \end{aligned}$$

数列在 *1* 和 *-1* 之间来回振荡，既不收敛也不发散。
(3)

$$f(n) = n - \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
f(\infty) &= \infty - \frac{1}{\infty} \\
&= \infty - \epsilon \\
&= \infty
\end{aligned}$$

数列发散。

通过上面的例子可以看出，关于无穷大和无穷小的计算完全符合数学运算法则，比传统的基于数学分析的形式化方法简单而清晰。

例 1.3.2.

$$\begin{aligned}
f(\infty) &= \frac{\sqrt{\infty+3}}{\infty} \\
&= \frac{\sqrt{(\infty^2-3)+3}}{\infty^2-3} \qquad (\infty \leftarrow \infty^2-3) \\
&= \frac{\infty}{\infty^2} \\
&= \frac{1}{\infty} \\
&= \epsilon \\
&= 0
\end{aligned}$$

通过等效重定义，我们精确计算出了表达式的结果，无需进行繁琐的形式化数学分析。

格洛克观点

格洛克代数空间的建立可以使我们抛弃传统的基于语言的数学逻辑，转而专注于简单精确的数学计算。后续章节我们将会看到微积分学是多么的简单，大量晦涩的定义、定理将被抛弃，一切变得如此不可思议。

第二章　函数和极限

函数是数学中一个核心概念，它描述了变量之间的一种对应关系。简单来说，函数将一个输入值（自变量）映射到一个输出值（因变量）。函数的概念起源于 17 世纪的莱布尼茨和牛顿，用于描述物理现象，如运动和变化。

传统的函数表示是一种泛化的表示，试图包容一切，解决一切问题，自变量和函数值（因变量）之间的关系抽象成规则，试图解决一切假想中的问题；因此在描述定义、定理时需要晦涩的前提限制条件，并形成抽象的形式化定义。本文或格洛克描述的函数只有一种，自变量和函数值之间的关系由自变量表达式确定，保持具体而简单。

极限是微积分的基础概念，它描述了函数在某个点附近的行为，即使函数在该点未定义或不连续。极限的概念由柯西和魏尔斯特拉斯在 19 世纪正式化，用于处理无穷小和无穷大。

基于格洛克代数空间，定义域的区间和函数的连续性进行了重新表述，极限概念被重新定义，一切变得简单而直观。

2.1　理解函数

函数是数学中描述对应关系的一种基本且非常重要的概念。通常写作 $y = f(x)$。

函数的关键特点

唯一性对应 (Uniqueness)：对于定义域内的每一个输入值 x，函数都只能对应一个唯一的输出值 $f(x)$。

定义域 (Domain)：所有允许的输入值 x 的集合。

例如，在函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 中，x 不能为 0，所以定义域是除 0 以外的所有实数。

值域 (Range)：值域是实际输出值的集合。

函数的输入输出关系通过自变量表达式来描述，通常有几何图形来对应表示。例如函数 $f(x) = x^2 + 1$，在几何图形上表现为抛物线。

定义域区间

函数的定义域通常是数轴上的一个或多个连续的数值范围，因此我们常用区间符号来表示它。
圆括号 (a,b) 表示不包含端点（开区间）。表示 $a<x<b$，以及区间边界是 ∞ 或 $-\infty$ 的情况。
方括号 $[a,b]$ 表示包含端点（闭区间）。表示 $a\leq x\leq b$。

开区间转换为闭区间

依据格洛克无穷大和无穷小定义的性质（4），有

$(a,b)\Rightarrow[a+\epsilon,b-\epsilon]\qquad(a,\infty)\Rightarrow[a+\epsilon,\infty)$

$\infty)$ 既可以理解为开区间也可以理解为闭区间，根据具体的问题进行不同的理解。

分段函数

分段函数将定义域分成若干互不相交的子区间，并在每个子区间上定义一个子函数。
分段函数常用大括号表示，例如：

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & \text{if } x<0\\ x, & \text{if } x\geq 0\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{if } x<0\\ \frac{1}{x}, & \text{if } x>0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{if } x<1\\ 3x-1, & \text{if } x\geq 1\end{cases}$$

还有一些常见的特殊分段函数：
阶跃函数 (Step Function)：分段函数由常数函数组成。例如，单位阶跃函数（Unit Step Function）。
分段线性函数 (Piecewise Linear Function)：分段函数由线段（线性函数）组成。
通过以上讨论，我们现在可以明确：**函数的概念和性质总是作用于单一定义域区间**。

复合函数

复合函数指的是将两个或多个函数组合起来，形成一个新的函数。具体来说，如果有函数 (f) 和 (g)，则它们的复合函数记作 $f\circ g$，定义为 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$，其中，先计算 $g(x)$，再计算 f。
复合函数 $f\circ g$ 的定义域同时受到 g 和 f 定义域的双重约束。
$f\circ g$ 和 $g\circ f$ 通常并不相同，也就是说复合函数的顺序很重要。

例 2.1.1. 假设 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$。

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2+1$$

反函数

反函数就是“逆转”原函数的操作，将输出变回输入。函数 $f(x)$ 的反函数通常表示为 $f^{-1}(x)$。

反函数存在条件

（1）一对一性: 每个 x 对应唯一的 y，并且每个 y 对应唯一的 x。

（2）覆盖性: 函数的值域覆盖整个定义域。

反函数的性质

（1）$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$。

（2）原函数和反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称。

例 2.1.2. 假设 $f(x)=2x+1$, $g(x)=\frac{1}{x}$，求反函数并验证恒等性质。

解： 设 $y=f(x)=2x+1$，那么 $x=\frac{y-1}{2}$，交换变量 x, y，得到 $y=\frac{x-1}{2}$，反函数

$$f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

恒等式

$$f(f^{-1}(x))=f(\frac{x-1}{2})=2\cdot\frac{x-1}{2}+1=x$$
$$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(2x+1)=\frac{(2x+1)-1}{2}=x$$

所以 $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$。

设 $y=g(x)=\frac{1}{x}$，那么 $x=\frac{1}{y}$，交换变量 x, y，得到 $y=\frac{1}{x}$，反函数

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$$

恒等式

$$f(f^{-1}(x))=f(\frac{1}{x})=\frac{1}{1/x}=x$$
$$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{1}{1/x}=x$$

所以 $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$。

2.2 函数的极限

函数极限是微积分中的一个基本概念，它描述了一个函数在自变量（输入值）接近某一给定值时，它的函数值（输出值）所表现出的趋势。

函数极限的直观理解

（1）函数 $f(x)$ 在 x 趋近于 a 时的极限是 L，记作 $\lim_{x\to a} f(x) = L$。

（2）当 x 无限地接近 a（但不等于 a）时，函数值 $f(x)$ 会无限地接近一个确定的值 L。

（3）$f(x)$ 在 $x = a$ 处是否有定义，以及 $f(a)$ 的值是多少，并不影响 $\lim_{x\to a} f(x)$ 的结果。极限关注的是趋近过程，而非终点的值。

从上面直觉出发，逐渐演变完善了极限的 $\epsilon - \delta$ 定义。$\epsilon - \delta$ 定义为极限提供了逻辑严密性，但代价是牺牲了直觉性、增加了学习难度和操作复杂性。

格洛克极限定义

格洛克采用逆向思维，并以可视化的格洛克代数空间和无穷大无穷小的定义作为逻辑支撑，给出极限的定义。

定义 2.1 (函数的极限). 对于函数 $f(x)$, $x \to a \iff x = a \pm \epsilon$，函数 $f(x)$ 在 x 趋近于 a 时的极限

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a \pm \epsilon) = f(a)$，如果 a 位于定义域区间内。

(2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a + \epsilon)$，如果 a 位于定义域区间左边界。

(3) $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a - \epsilon)$，如果 a 位于定义域区间右边界。

对于（2）和（3），如果 a 是闭区间边界，极限值应用 $f(a)$ 仍然成立。

格洛克将传统极限的动态趋近描述转换成了静态描述，因为在格洛克微空间“看到了”最接近 a 的极限位置。由此不再需要晦涩难解的逻辑推理描述，简单直接地进行极限计算。

例 2.2.1. 计算极限

(1) $\lim_{x\to 1}(2x+1)$ (2) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-x+5}{2x^3+4x^2-1}$ (3) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ (4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

解：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(2x+1) = 2\cdot(1)+1 = 3$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-x+5}{2x^3+4x^2-1} = \frac{3\infty^3-\infty+5}{2\infty^3+4\infty^2-1} = \frac{3\infty^3}{2\infty^3} = \frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(2+\epsilon)^2-4}{(2+\epsilon)-2} = \frac{4\epsilon+\epsilon^2}{\epsilon} = 4+\epsilon = 4$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+\epsilon}-1}{\epsilon}$

$$=\frac{(\sqrt{1+\epsilon}-1)(\sqrt{1+\epsilon}+1)}{\epsilon(\sqrt{1+\epsilon}+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}+1}=\frac{1}{2}$$

上例（3）和（4）略去了计算左极限，因为左右极限相等。

函数的连续性

(1) 在定义域区间内函数总是连续的，在闭区间左边界右连续，在闭区间右边界左连续。

(2) 如果分段函数的分段点有定义，分段子函数分别为 f_1, f_2，并且有 $f_1(a-\epsilon)=f_2(a+\epsilon)=f(a)$，那么分段函数在分段点处连续。

函数的连续性是显而易见的，换句话说，函数 $f(x)$ 的值随着自变量 x 的连续变化而连续变化。函数图形可视化的证明了函数的连续性。事实上，证明函数的连续性很容易进入逻辑上的循环证明。

讨论函数的连续性只有在函数的两个相邻区间的分段点处才有意义，格洛克采用分段函数的方式描述了这种情况，分段子函数 f_1, f_2 可以相同，也可以不同。具有苛刻定义的非常规函数因失去一般性不在这里进行讨论。

例 2.2.2. 计算极限

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0}|x|$

解：

(1) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\epsilon}=-\infty$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{\epsilon}=\infty$

左右极限不相等，极限不存在。

(2) $\lim_{x\to 0^-}|x|=|-\epsilon|=\epsilon=0$ $\lim_{x\to 0^+}|x|=|\epsilon|=0$

分段点 0 左右极限相等，极限存在，极限值为 0。

分段点 0 有定义且函数值为 0，所以函数在分段点 0 处连续。

例 2.2.3. 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

解： 这是一个著名的极限问题，传统上使用夹逼定理进行求解。

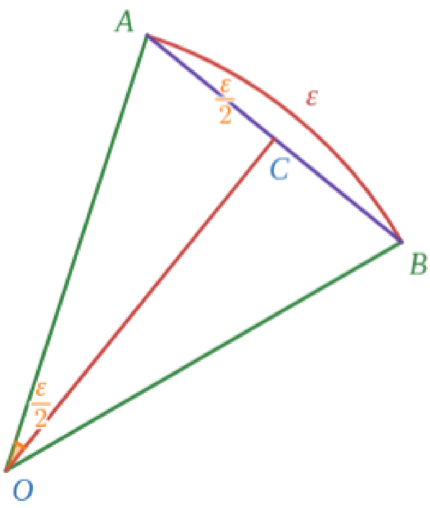


图 2.1: **单位圆上的弧**

当光滑曲线上的两点 A, B 越来越接近时，曲线弧 AB 与割线 AB 逐渐重合，换句话说，只要 A, B 两点的距离足够小，$\widehat{AB} = |AB|$，如图 2.1 所示。
我们取弧长 $\widehat{AB} = \epsilon$，得到如下关系：

$$|AB| = \epsilon, \quad \angle AOB = \epsilon, \quad |AC| = \angle AOC = \frac{\epsilon}{2}$$

根据三角公式

$$sin\frac{\epsilon}{2} = \frac{AC}{OA} = AC = \frac{\epsilon}{2}$$
$$\cos\frac{\epsilon}{2} = \frac{OC}{OA} = \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}$$

现在我们可以计算极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\epsilon}{\epsilon} &= \frac{2\sin\frac{\epsilon}{2}\cos\frac{\epsilon}{2}}{\epsilon}\\ &= \frac{2\cdot\frac{\epsilon}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}}{\epsilon}\\ &= \sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

例 2.2.4. 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$$

解： 利用半角公式有 $\cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos\epsilon}{\epsilon}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-1+2\sin^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{\epsilon} \\
&= \frac{2\cdot\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}{\epsilon} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon = 0
\end{aligned}
$$

极限的 $\epsilon-\delta$ 定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义。如果存在一个实数 L，使得：

对于任意给定的正数 ϵ (无论它多么小)，总存在一个正数 δ (它通常依赖于 ϵ)，使得当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-L|<\epsilon$ 成立。

则称 L 是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

2.3 自然常数和自然对数

自然常数 e 是数学中一个重要的无理数，常作为自然对数的底数出现。它大约等于 2.71828，并在许多自然现象、增长模型（如复利）和极限计算中扮演关键角色。

e 最早由瑞士数学家雅各布 · 伯努利（Jacob Bernoulli）在研究复利问题时发现，后来由莱昂哈德 · 欧拉（Leonhard Euler）在 18 世纪正式引入符号”e”（源自”exponential”，指数的）。

e 可以定义为以下极限：

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty = (1+\epsilon)^\infty$$

从格洛克代数空间的角度看，自然常数是一个未解析的无穷大无穷小计算表达式。使用无穷大等效重定义 $\infty \leftarrow f(\infty)$，格洛克给出自然常数的定义。

定义 2.2. 自然常数

设 $f(\infty)$ 是关于 ∞ 的表达式，即 $f(\infty)$ 位于格洛克宏空间；$f(\epsilon)$ 是关于 ϵ 的表达式，即 $f(\epsilon)$ 位于格洛克微空间。自然常数 e 定义为

$$e = \left(1+\frac{1}{f(\infty)}\right)^{f(\infty)} \tag{2.1}$$

$$e = (1+f(\epsilon))^{1/f(\epsilon)} \tag{2.2}$$

需要明确的是，即使 $f(\infty), f(\epsilon)$ 是负值时，自然常数的定义仍然有效。

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{\infty}\right)^{-\infty} = \left(\frac{\infty-1}{\infty}\right)^{-\infty} = \left(\frac{\infty}{\infty-1}\right)^{\infty} \\ &= \left(1+\frac{1}{\infty-1}\right)^{\infty-1} \cdot \left(1+\frac{1}{\infty-1}\right) \\ &= e\cdot(1+\epsilon) \\ &= e\end{aligned}$$

自然对数，记作 $\ln(x)$，是以 e 为底的对数函数，它是 $\log_e(x)$ 的简写。

定理 2.1. 自然恒等式

$$(1+a\cdot\epsilon)^b = e^{ab\cdot\epsilon} = 1+ab\cdot\epsilon \tag{2.3}$$

$$a^\epsilon = e^{\ln a\cdot\epsilon} = 1+\ln a\cdot\epsilon \tag{2.4}$$

$$\ln(1+a\cdot\epsilon) = a\cdot\epsilon \tag{2.5}$$

证明

$$\begin{aligned}(1+a\cdot\epsilon)^b &= (1+a\cdot\epsilon)^{\frac{1}{a\epsilon}\cdot a\epsilon\cdot b} \\ &= e^{ab\cdot\epsilon} \\ &= (1+ab\cdot\epsilon)^{\frac{1}{ab\cdot\epsilon}\cdot(ab\cdot\epsilon)} \\ &= 1+ab\cdot\epsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^\epsilon &= e^{\ln a^\epsilon} = e^{\epsilon\cdot\ln a} \\ &= (1+\epsilon\cdot\ln a)^{\frac{1}{\epsilon\cdot\ln a}\cdot(\epsilon\cdot\ln a)} \\ &= 1+\ln a\cdot\epsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(1+a\cdot\epsilon) &= \ln e^{a\cdot\epsilon} \\ &= a\cdot\epsilon\cdot\ln e \\ &= a\cdot\epsilon\end{aligned}$$

例 2.3.1. 计算极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x &= \left(1+\frac{2}{\infty}\right)^{\infty} \\ &= \left(1+\frac{2}{\infty}\right)^{\frac{\infty}{2}\cdot 2}\end{aligned}$$

$$= e^2$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x} &= \frac{\ln(1+3\epsilon)}{\epsilon}\\ &= \frac{\ln e^{3\epsilon}}{\epsilon} = \frac{3\epsilon}{\epsilon}\\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= \frac{e^\epsilon-1}{\epsilon}\\ &= [(1+\epsilon)^{\infty\cdot\epsilon}-1]\cdot\frac{1}{\epsilon}\\ &= \frac{(1+\epsilon)-1}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon}\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} &= \frac{a^\epsilon-1}{\epsilon}\\ &= \frac{(1+\ln a\cdot\epsilon)-1}{\epsilon}\\ &= \frac{\ln a\cdot\epsilon}{\epsilon}\\ &= \ln a\end{aligned}$$

例 2.3.2. 计算极限 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}$，$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} &= \frac{\ln(1+\epsilon)}{1-(1+\epsilon)}\\ &= \frac{\ln e^\epsilon}{-\epsilon}\\ &= \frac{\epsilon}{-\epsilon} = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} &= \frac{\ln\infty}{\sqrt[n]{\infty}}\\ &= \frac{\ln\infty^n}{\sqrt[n]{\infty^n}} \qquad (\infty\leftarrow\infty^n)\\ &= \frac{n\ln\infty}{\infty} = 0\end{aligned}$$

自然恒等式是极限运算

显然，定理 2.1 的恒等结果是在舍弃更高阶无穷小后的极限运算结果，例如极限计算

$$\frac{e^{\epsilon^2}-1-\epsilon^2}{\epsilon^4}$$

我们不能简单的应用定理 2.1，那样分子将为 0，此时正确的方法是使用“平滑”的泰勒展开来得到更高阶无穷小，从而计算出正确的结果。

定理 2.1 的意义在于简化指数函数导数公式的推导，免去复杂的逻辑推理。

2.4 双曲函数

2.5 泰勒展开在极限计算中的应用

泰勒展开（Taylor Series Expansion）是计算涉及 e, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ 等基本函数的极限时，一个非常强大且高效的工具。

它主要利用函数在某一点（通常是 $x=0$，即麦克劳林展开）附近的多项式近似来简化分子和分母。

常用函数的麦克劳林展开式 $(x \to 0)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{2.6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{2.7}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \tag{2.8}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{2.9}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{2.10}$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{2.11}$$

例 2.5.1. 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+\epsilon)}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} &= \frac{\ln(\cos\epsilon)}{\epsilon^2} = \frac{\ln\left(1-\frac{1}{2}\epsilon^2\right)}{\epsilon^2}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}\epsilon^2}{\epsilon^2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4} &= \frac{e^{\epsilon^2}-1-\epsilon^2}{\epsilon^4} \\ &= \frac{\left(1+\epsilon^2+\frac{1}{2}\epsilon^4\right)-1-\epsilon^2}{\epsilon^4} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\epsilon^4}{\epsilon^4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 2.5.2. 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\epsilon}{\epsilon}=\frac{\epsilon}{\epsilon}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos\epsilon}{\epsilon}=\frac{1-(1-\frac{1}{2}\epsilon^2)}{\epsilon}=\frac{1}{2}\epsilon=0$$

使用泰勒展开计算极限的要点：
(1) 确定阶数：根据分母的无穷小阶数来确定分子和分母需要展开到的阶数。目标是让分子中最低次项（非零项）的阶数与分母的阶数相等。
(2) 抵消低阶项：展开后，分子中的低阶项（如常数项、一次项等）通常会相互抵消，只剩下与分母同阶或更高阶的无穷小项。
(3) 提取主部：保留分子分母中最低次项的系数，即可求出极限。
我们在学习泰勒级数之前，提前利用泰勒级数的展开式来简化复杂极限的计算，避免进行不必要的复杂逻辑分析。

循环论证

复杂多项式的泰勒级数展开在计算极限时很强大和直观，但是注意不能用它来证明极限和导数的推导，因为泰勒级数是在极限和导数的理论框架下推导出来的。否则可能会出现循环论证的逻辑错误。

第三章　点微分和导数

传统上，微分是描述函数在某一点附近变化的线性近似。这也是微积分学混乱而难学的根源之一。

格洛克利用全新定义的无穷小概念，对微分进行了重新定义：微分是函数在某一点的极限变化量。并和导数进行了统一，形成微分表达式。

导数是描述函数在某一点变化率的精确数值。传统的极限理解方式和计算方法让初学者对导数的学习曲线非常陡峭，莱布尼兹的导数定义符号 $\frac{d}{dx}F(x)$ 大大增加了导数的神秘性。

格洛克弃用莱布尼兹导数表示符号，回归常识，重新描述导数为微分表达式的变换，即导数是函数微分和自变量微分的商。与传统导数概念描述不同的是，导数本质上是一个二级定义，它不是原子定义，而是建立在微分定义之上。

3.1　极限变化量与点微分

通过前面二章的学习，我们具备了解决瞬时速度和切线问题的理论框架，以此为切入点，引出点微分的概念。

瞬时速度问题

我们首先考察平均速度的问题，如果位移函数 $S = F(x)$，其中自变量 x 表示时间，那么在 t_1, t_2 时间间隔内的平均速度表示为

$$\overline{v} = \frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1}$$

如果我们用 Δt 表示时间间隔，即 $\Delta t = t_2 - t_1$，那么平均速度又可以表示为

$$\overline{v} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}$$

可以看出，计算平均速度的公式很简单，计算也很容易。

我们现在的问题是如何计算 $x = t$ 时刻的瞬时速度？问题的难点在于速度的计算要求时间间隔必须存在，唯一的办法是不断缩小时间间隔 Δt，以此来获取一个近似的 t 时刻的瞬时速度。Δt 越小，得到的平均速度就越接近瞬时速度。

基于格洛克代数空间，我们在数值 t 处进行格洛克微空间展开，获取最小的时间间隔 ϵ，得到 t 时刻的瞬时速度

$$v = \frac{F(t+\epsilon) - F(t)}{\epsilon}$$

对于任意时刻 x，我们得到数学描述的速度函数

$$v(x) = \frac{F(x+\epsilon) - F(x)}{\epsilon} \tag{3.1}$$

这是一个极限运算，可以用我们在第二章的极限计算方法计算出 $v(x)$ 函数。

例 3.1.1. *假设一个物体沿直线运动，其位移 S（单位：米，m）随时间 t（单位：秒，s）变化的函数关系为：*

$$S(t) = 3t^2 + 5t - 2$$

计算该物体在 $t = 2$ 秒时的瞬时速度。

解：

首先求解瞬时速度函数 $v(t)$:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{S(t+\epsilon) - S(t)}{(t+\epsilon) - t} \\
&= \frac{[3(t+\epsilon)^2 + 5(t+\epsilon) - 2] - (3t^2 + 5t - 2)}{\epsilon} \\
&= \frac{(3t^2 + 6t\cdot\epsilon + 3\epsilon^2 + 5t + 5\epsilon - 2) - (3t^2 + 5t - 2)}{\epsilon} \\
&= \frac{6t\cdot\epsilon + 5\epsilon + 3\epsilon^2}{\epsilon} \\
&= 6t + 5 + 3\epsilon \\
&= 6t + 5
\end{aligned}$$

有了速度函数，现在我们可以计算物体在 $t = 2$ 秒时的瞬时速度

$$v(2) = 6 \cdot (2) + 5 = 17$$

切线斜率问题

几何上，直线的斜率可通过已知的两点坐标计算

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

切线是一条“刚好触碰”曲线上某一点的直线。对于曲线 $y = F(x)$ 上的某一点 P，如果我们要计算经过 P 点切线的斜率，会遇到和上面计算瞬时速度相同的

问题，我们还需要曲线上额外的一点 Q，即计算割线 PQ 的斜率来近似 P 点切线的斜率。Q 越接近 P，计算的割线斜率就越接近 P 点切线的斜率。

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

令 $\Delta x = x_Q - x_P$，并使 Δx 足够小，曲线 $y = F(x)$ 上经过 P 点切线的斜率可近似表示为

$$m_P \approx \frac{F(x_P + \Delta x) - F(x_P)}{\Delta x}$$

我们在数值 x_P 处进行格洛克微空间展开，获取最小的 PQ 间隔 ϵ，得到 P 点切线的斜率

$$m_P = \frac{F(x_P + \epsilon) - F(x_P)}{\epsilon}$$

对于曲线上的任意点 $(x, F(x))$，切线的斜率函数表示为

$$m(x) = \frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{\epsilon} \tag{3.2}$$

例 3.1.2. *计算抛物线 $y = x^2$ 在点 $(2, 4)$ 处的切线斜率，并求出通过该点的切线方程。*

解:

首先求解抛物线的切线斜率函数 $m(x)$:

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{\epsilon} \\ &= \frac{(x + \epsilon)^2 - x^2}{\epsilon} \\ &= \frac{(x^2 + 2x \cdot \epsilon + \epsilon^2) - x^2}{\epsilon} \\ &= \frac{2x \cdot \epsilon + \epsilon^2}{\epsilon} \\ &= 2x + \epsilon \\ &= 2x \end{aligned}$$

有了斜率函数，现在我们可以计算抛物线 $y = x^2$ 在点 $(2, 4)$ 处的切线斜率

$$m(2) = 2 \cdot (2) = 4$$

切线方程 (点斜式):

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 4 &= 4(x - 2) \\ y &= 4x - 8 + 4 \\ y &= 4x - 4 \end{aligned}$$

从上面两个例子可以看出，速度问题和切线斜率问题虽然完全不同，但在解决问题的数学方法上却完全相同：我们需要找到自变量的极限变化量和对应函数的极限变化量，通过除法得到要解决问题的极限变化率。由此引出和传统定义完全不同的微分概念和定义：

定义 3.1. 微分
对于函数 $F(x)$，自变量 x 通过格洛克微空间展开的方式获得 $(x, F(x)$ 极限变化量的过程称为微分。如果 $\delta = f(\epsilon)$ 是无穷小的表达式，微分用符号 d 表示，那么
(*1*) $dx = (x+\delta) - x$，称为微分自变量。
(*2*) $dF(x) = F(x+\delta) - F(x)$，称为微分表达式。
(*3*) 基于最简计算原则，通常取 $\delta = \epsilon$。

对于（1）包含两层含义，首先定义了微分点 x，然后是自变量极限变化量的大小 $\delta = \epsilon$，这是最简单的表示，也可以是无穷小的表达式。
对于（2）首先是一个微分表达式而不是一个直接计算结果的值，因为进行极限计算

$$F(x+\epsilon) - F(x) = F(x) - F(x) = 0$$

其次 $dF(x)$ 是与 x 相对应的极限变化量，也就是随着 x 的变化，$dF(x)$ 也随之变化。最后，定义中给出的是 x 右侧的极限变化量，取左侧或同时取两侧也是正确的，定义中未明确是为了保持简单。因此 $dF(x)$ 可以表示为

$$dF(x) = F(x+\epsilon) - F(x) = F(x) - F(x-\epsilon) = F(x+\epsilon/2) - F(x-\epsilon/2)$$

对于定义域的闭区间边界只能取右侧或左侧极限变化量。
因此，(3.1）和（3.2）可以统一表示为

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

微分表达式与微分自变量的比值称为微分变化率，极限变化率或瞬时变化率，传统上统一定义为导函数，简称导数。

3.2 导数和导数公式

有了微分的定义，我们在此基础上定义导函数。导函数简称导数。

定义 3.2. 导函数

微分表达式与微分自变量的比值函数称为导函数。如果原函数用 $f(x)$ 表示，那么导函数用 $f'(x)$ 表示。

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

需要注意的是，对于 $\frac{d}{dx}f(x)$，我们不使用 $\frac{d}{dx}$ 作为导数的表示符号，而是作为除法表达式。

导数用来描述函数相对其自变量的微分变化率，极限变化率或瞬时变化率，或者几何上的曲线切线的斜率。

如果 $F(x)$ 表示原函数，那么通常用 $f(x)$ 表示导函数，有时也用 $F'(x)$ 表示导函数。

例 3.2.1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$，求函数在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率，并求出通过该点的切线方程。

解：

首先求导函数 $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} \\
&= \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{(x+\epsilon) - \epsilon} \\
&= \frac{1/(x+\epsilon) - 1/x}{\epsilon} \\
&= \frac{x - (x+\epsilon)}{x(x+\epsilon)} \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{-\epsilon}{x(x+\epsilon)} \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= -\frac{1}{x^2 + x \cdot \epsilon} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

有了导函数，现在我们可以计算函数在点 $(1, f(1)) = (1, 1)$ 处的切线斜率

$$f'(1) = -\frac{1}{(1)^2} = -1$$

切线方程 *(点斜式):*

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= m(x - x_0) \\
y - 1 &= (-1) \cdot (x - 1) \\
y &= -x + 1 + 1 \\
y &= -x + 2
\end{aligned}$$

常用导函数公式

求解导函数，需要同时进行代数运算和极限运算，从示例可以看出，即使是简单的原函数，求解导函数也相当繁琐。因此有必要推导一些常用函数的导函数形成导函数公式，避免重复进行极限的繁琐计算。

（1）常数函数 $f(x) = C$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} = \frac{C - C}{\epsilon} = 0$$

所以，常数函数的导函数为 0，即

$$f'(x) = \frac{dC}{dx} = 0 \tag{3.3}$$

（2）幂函数 $f(x) = x^n$

当 n 为整数时，考虑二项式定理

$$\begin{aligned}(x+\epsilon)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\epsilon^k \\ &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\epsilon + \binom{n}{2}x^{n-2}\epsilon^2 + \cdots + \epsilon^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx^n}{dx} &= \frac{(x+\epsilon)^n - x^n}{\epsilon} \\ &= \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\epsilon + \binom{n}{2}x^{n-2}\epsilon^2 + \cdots + \epsilon^n\right] - x^n}{\epsilon} \\ &= nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\epsilon + \cdots + \epsilon^{n-1} \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

当 n 为一般实数时上面的公式也成立，通常需要依赖于指数和对数函数的导数公式，本节稍后作为例题进行推导。

所以，幂函数的导数公式

$$f'(x) = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{3.4}$$

（3）指数函数 $f(x) = e^x$，$f(x) = a^x$

使用上一章的自然恒等式 $e^\epsilon = 1 + \epsilon$，$a^\epsilon = 1 + \ln a \cdot \epsilon$

$$\begin{aligned}\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+\epsilon} - e^x}{\epsilon} \\ &= \frac{e^x \cdot (e^\epsilon - 1)}{\epsilon}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^x \cdot \frac{e^\epsilon - 1}{\epsilon} \\
&= e^x \cdot \frac{(1+\epsilon) - 1}{\epsilon} \\
&= e^x \cdot 1 = e^x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{da^x}{dx} &= \frac{a^{x+\epsilon} - a^x}{\epsilon} \\
&= \frac{a^x \cdot (a^\epsilon - 1)}{\epsilon} \\
&= a^x \cdot \frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon} \\
&= a^x \cdot \frac{(1 + \ln a \cdot \epsilon) - 1}{\epsilon} \\
&= a^x \ln a
\end{aligned}
$$

所以，指数函数的导数公式

$$f'(x) = \frac{e^x}{dx} = e^x \tag{3.5}$$

$$f'(x) = \frac{a^x}{dx} = a^x \ln a \tag{3.6}$$

(4) 对数函数 $f(x) = \ln x$, $f(x) = \log_a x$
使用上一章的自然恒等式 $\ln(1 + a\epsilon) = a\epsilon$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\ln x}{dx} &= \frac{\ln(x+\epsilon) - \ln x}{\epsilon} \\
&= \ln \frac{x+\epsilon}{x} \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \ln(1 + \frac{1}{x} \cdot \epsilon) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\log_a x}{dx} &= \frac{\log_a(x+\epsilon) - \log_a x}{\epsilon} \\
&= \log_a \frac{x+\epsilon}{x} \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \log_a(1 + \frac{\epsilon}{x}) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{\ln(1 + \frac{\epsilon}{x})}{\ln a} \cdot \frac{1}{\epsilon}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{\epsilon}{x} \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{1}{x \ln a}
\end{aligned}
$$

所以，对数函数的导数公式

$$f'(x) = \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} \tag{3.7}$$

$$f'(x) = \frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x \ln a} \tag{3.8}$$

例 3.2.2. 推导幂函数 $f(x) = x^n$ 的导数公式。

$$
\begin{aligned}
\frac{dx^n}{dx} &= \frac{(x+\epsilon)^n - x^n}{\epsilon} \\
&= \left(e^{n \ln(x+\epsilon)} - e^{n \ln x}\right) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \left(e^{n \ln x + n \ln(1+\frac{\epsilon}{x})} - e^{n \ln x}\right) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \left(e^{n \ln x + \frac{n\epsilon}{x}} - e^{n \ln x}\right) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= e^{n \ln x} \cdot \left(e^{\frac{n\epsilon}{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= x^n \cdot \frac{(1 + \frac{n\epsilon}{x}) - 1}{\epsilon} \\
&= x^n \cdot \frac{n}{x} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

（5）三角函数 $f(x) = \sin x$，$f(x) = \cos x$

对于 $f(x) = \sin x$，考虑使用和角公式 $\sin(x+\epsilon) = \sin x \cdot \cos \epsilon + \cos x \cdot \sin \epsilon$。

$$
\begin{aligned}
\frac{d \sin x}{dx} &= \frac{\sin(x+\epsilon) - \sin x}{\epsilon} \\
&= \frac{(\sin x \cdot \cos \epsilon + \cos x \cdot \sin \epsilon) - \sin x}{\epsilon} \\
&= \frac{\sin x(\cos \epsilon - 1) + \cos x \cdot \sin \epsilon}{\epsilon} \\
&= \sin x \cdot \frac{\cos \epsilon - 1}{\epsilon} + \cos x \cdot \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

对于 $f(x) = \cos x$，考虑使用和角公式 $\cos(x+\epsilon) = \cos x \cos \epsilon - \sin x \sin \epsilon$。

$$\frac{d \cos x}{dx} = \frac{\cos(x+\epsilon) - \cos x}{\epsilon}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos x \cos \epsilon - \sin x \sin \epsilon - \cos x}{\epsilon} \\
&= \frac{\cos x(\cos \epsilon - 1) - \sin x \sin \epsilon}{\epsilon} \\
&= \cos x \cdot \frac{\cos \epsilon - 1}{\epsilon} - \sin x \cdot \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} \\
&= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

所以，三角函数的导数公式

$$f'(x) = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x \tag{3.9}$$

$$f'(x) = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \tag{3.10}$$

这些是常用的基本函数导数公式，其它直接推导相对复杂的函数，我们在后续章节中利用导数的运算法则进行推导。

基本函数导数公式

函数$f(x)$	导数$f'(x)$
C（常数）	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot }x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

3.3 导数的运算法则

假设 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$ 都是可导函数，C 是常数。

（1）常数与函数积的导数 $(Cu)' = Cu'$

$$\frac{dCu(x)}{dx} = \frac{Cu(x+\epsilon) - Cu(x)}{\epsilon} = C \cdot \frac{u(x+\epsilon) - u(x)}{\epsilon} = C \cdot \frac{du(x)}{dx}$$

（2）和或差的导数 $(u \pm v)' = u' \pm v'$

$$\begin{aligned}\frac{d[u(x)+v(x)]}{dx} &= \frac{[u(x+\epsilon)+v(x+\epsilon)] - [u(x)+v(x)]}{\epsilon} \\ &= \frac{u(x+\epsilon) - u(x)}{\epsilon} + \frac{v(x+\epsilon) - v(x)}{\epsilon} \\ &= \frac{du(x)}{dx} + \frac{dv(x)}{dx} = u' + v'\end{aligned}$$

例 3.3.1. 求 $f(x) = x^5 + \ln x$ 的导数。

$$f'(x) = (x^5)' + (\ln x)' = 5x^{5-1} + \frac{1}{x} = 5x^4 + \frac{1}{x}$$

(3) 积的导数（乘法法则）$(uv)' = u'v + uv'$

积的导数可参考图 3.1 进行计算。

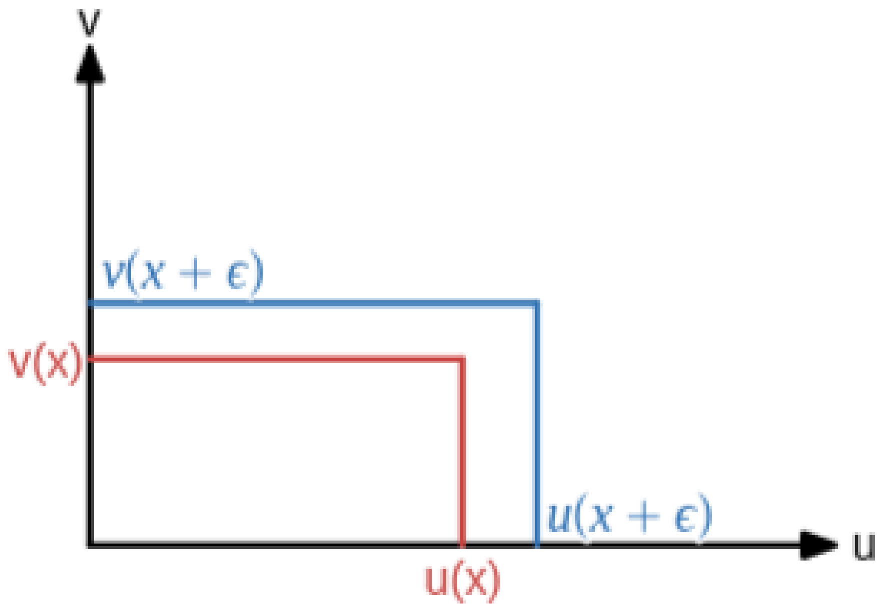


图 3.1: **积的导数**

$$\frac{d[u(x)v(x)]}{dx} = \frac{u(x+\epsilon)v(x+\epsilon) - u(x)v(x)}{\epsilon}$$

$$= \frac{[u(x+\epsilon) - u(x)]v(x) + u(x)[v(x+\epsilon) - v(x)] + [u(x+\epsilon) - u(x)] \cdot [v(x+\epsilon) - v(x)]}{\epsilon}$$

$$= \frac{du(x)}{dx} \cdot v(x) + u(x) \cdot \frac{dv(x)}{dx} + \frac{[u(x+\epsilon) - u(x)] \cdot [v(x+\epsilon) - v(x)]}{\epsilon^2} \cdot \epsilon$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + u'(x)v'(x)\cdot\epsilon$$
$$= u'v + uv'$$

例 3.3.2. 求 $g(x) = x\cos x$ 的导数。

$$g'(x) = (x)'\cos x + x(\cos x)' = 1\cdot\cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$$

（4）商的导数（除法法则）

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

仍然参考图 3.1 进行面积变换。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \left[\frac{u(x+\epsilon)}{v(x+\epsilon)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{u(x+\epsilon)v(x) - u(x)v(x+\epsilon)}{v(x+\epsilon)v(x)\cdot\epsilon} \\
&= \frac{[u(x+\epsilon) - u(x)]\cdot v(x) - u(x)\cdot[v(x+\epsilon) - v(x)]}{v(x+\epsilon)v(x)\cdot\epsilon} \\
&= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x+\epsilon)v(x)} \\
&= \frac{u'v - uv'}{v^2}
\end{aligned}$$

例 3.3.3. 求 $f(x) = \tan x$ 的导数。

$$\begin{aligned}
(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

所以

$$(\tan x)' = \sec^2 x \tag{3.11}$$

例 3.3.4. 求 $f(x) = \sec x$ 的导数。

$$\begin{aligned}
(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right) &= \frac{(1)'\cdot\cos x - (1)\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{0\cdot\cos x - (-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x\tan x
\end{aligned}$$

所以

$$(\sec x)' = \sec x\tan x \tag{3.12}$$

（5）链式法则（复合函数求导）
如果 $y = f(u)$ 且 $u = g(x)$，那么 y 对 x 的导数：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad 或 \quad [f(g(x))]' = f'(u) \cdot g'(x)$$

链式法则是除法运算的简单算术变换，可以用相对速度的概念进行理解。

例 3.3.5. 求 $h(x) = e^{2x}$ 的导数。
令 $u = 2x$，则 $h(x) = e^u$。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d(e^u)}{du} \cdot \frac{d(2x)}{dx} = e^u \cdot 2 = 2e^{2x}$$

（6）反函数的导数
假设 f 是一个可导的单调函数，并且 $u(x) = f(x)$ 有反函数 $v(x) = f^{-1}(x)$，那么 $u(x)$ 和 $v(x)$ 互为反函数。我们想要推导出 $v'(x)$ 用 $u'(x)$ 表示的公式。
首先，由反函数的定义，知道

$$u(v(x)) = x$$

等式两边关于 x 求导 (使用链式法则):

$$[u(v(x))]' = (x)'$$

左边应用链式法则，右边直接求导得到 1。所以有：

$$u'(v) \cdot v'(x) = 1$$

将 $v'(x)$ 单独提出来:

$$v'(x) = \frac{1}{u'(v)}$$

所以如果 $u(x)$, $v(x)$ 互为反函数，则用反函数表示的导数公式为：

$$v'(x) = \frac{1}{u'(v)} \tag{3.13}$$

例 3.3.6. 假设 $f(x) = x^3$，那么反函数为 $f(x) = x^{1/3}$。求反函数的导数。
首先，表示为标准公式形式，$u(x) = x^3$, $v(x) = x^{1/3}$
那么，

$$u'(x) = 3x^2,\ u'(v) = 3\left[x^{1/3}\right]^2 = 3x^{2/3}$$

反函数的导数

$$v'(x) = \frac{1}{u'(v)} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

例 3.3.7. 求 $\arctan x$ 的导数。

首先，表示为标准公式形式，$v(x) = \arctan x$, $u(x) = \tan x$

那么，$u(v) = \tan(\arctan x) = x$,

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + u^2(x) \\
u'(v) &= 1 + u^2(v) = 1 + x^2 \\
v'(x) &= \frac{1}{u'(v)} = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

函数 $\arctan x$ 的导数

$$
(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{3.14}
$$

（7）隐函数求导

如果一个函数关系不能写成 $y = f(x)$（或 $z = f(x, y)$ 等）的显式形式，而是以一个包含自变量和因变量的方程 $F(x, y) = 0$（或 $F(x, y, z) = 0$ 等）给出，那么 y（或 z）就是由该方程所确定的 x（或 x, y）的隐函数。

例如：$x^2 + y^2 = 1 \qquad e^y + xy = 5$

对于由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = y(x)$，求导的基本思路是利用链式法则，将 y 视为 x 的函数，对原方程两边同时关于 x 求导。

隐函数求导步骤

（1）视为复合函数：将方程 $F(x, y) = 0$ 中的因变量 y 看作是自变量 x 的函数，即 $y = y(x)$。

（2）两边求导：对原方程 $F(x, y) = 0$ 的等号两边同时关于 x 求导。

在求导过程中，所有包含 y 的项（如 $y^2, xy, \sin(y)$ 等）都必须使用链式法则。例如，

$\frac{d(y^2)}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx}$;

$\frac{d(xy)}{dx}$ 需使用乘积法则和链式法则：

$\frac{d(x)}{dx} \cdot y + x \cdot \frac{d(y)}{dx} = 1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}$。

（3）分离导数：整理求导后的方程，将含有 $\frac{dy}{dx}$（或 y'）的项移到方程的一边，不含 $\frac{dy}{dx}$ 的项移到另一边。

（4）解出导数：解出 $\frac{dy}{dx}$ 的表达式。

例 3.3.8. 求由方程 $x^2 + y^2 = 25$ 确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$。

两边求导：对 $x^2 + y^2 = 25$ 两边关于 x 求导：

$$
\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(25)}{dx}
$$

$\frac{d(x^2)}{dx}=2x$，$\frac{d(y^2)}{dx}=2y\cdot\frac{dy}{dx}$(链式法则)，$\frac{d(25)}{dx}=0$，得到方程：

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

分离导数：将含 $\frac{dy}{dx}$ 的项保留，其余项移项：

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=-2x$$

解出导数：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

例 3.3.9. 求 $\arcsin x$ 的导数。

设 $y=\arcsin x$，对等式两边取 sin：

$$\sin y=x$$

对等式两边关于 x 求导：

$$\frac{d(\sin y)}{dx}=\frac{d(x)}{dx}$$

$$\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=1$$

解出 $\frac{dy}{dx}$：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}$$

现在我们需要用 x 来表示 $\cos y$。我们使用三角恒等式 $\sin^2 y+\cos^2 y=1$：

$$\cos^2 y=1-\sin^2 y$$

$$\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y}$$

因为我们最初定义 $\sin y=x$，所以代入：

$$\cos y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

$\arcsin x$ 的值域是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。在这个区间内，$\cos y$ 总是非负数 ($\cos y\geq 0$)。因此，我们只取正根：

$$\cos y=\sqrt{1-x^2}$$

将此结果代回：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

函数 $\arcsin x$ 的导数

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.15}$$

3.4 泰勒级数和麦克劳林级数

我们在上一章的末尾展示了泰勒级数在计算极限时的强大应用。

对于一个在某点 a 处无限可导的函数 $f(x)$，我们希望用一个多项式来近似表示它，并且要求这个多项式在 $x=a$ 及其附近与原函数 $f(x)$ 有相同的值和相同的各阶导数值。这个多项式就是泰勒多项式（Taylor Polynomial），当其项数趋于无穷时，就变成了泰勒级数。

泰勒级数的推导

我们假设要找一个 n 次多项式 $P_n(x)$ 来近似 $f(x)$，以 $x=a$ 为中心点：

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

目标是确定系数 $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$。

（1）确定 c_0

我们要求多项式在 $x=a$ 处的值与函数值相等：

$$P_n(a) = f(a)$$

代入 $P_n(x)$ 的表达式：

$$\begin{aligned} &P_n(a) = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots \\ &P_n(a) = c_0 \end{aligned}$$

因此，第一个系数 c_0 为：

$$c_0 = f(a)$$

（2）确定 c_1

我们要求多项式在 $x=a$ 处的一阶导数值与函数的一阶导数值相等：

$$P_n'(a) = f'(a)$$

先求 $P_n(x)$ 的一阶导数：

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots$$

代入 $x=a$：

$$\begin{aligned} &P_n'(a) = c_1 + 2c_2(0) + 3c_3(0) + \cdots \\ &P_n'(a) = c_1 \end{aligned}$$

因此，第二个系数 c_1 为：

$$c_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!}$$

（3）确定 c_2

我们要求多项式在 $x = a$ 处的二阶导数值与函数的二阶导数值相等：

$$P_n''(a) = f''(a)$$

先求 $P_n'(x)$ 的导数，即 $P_n(x)$ 的二阶导数：

$$P_n''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots$$

代入 $x = a$：

$$\begin{aligned} P_n''(a) &= 2c_2 + 0 + 0 + \cdots \\ P_n''(a) &= 2c_2 \end{aligned}$$

因此，第三个系数 c_2 为：

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!}$$

（4）确定 c_k (一般项)

通过归纳法，我们可以看到一般的规律。对于第 k 阶导数 $P_n^{(k)}(x)$，当 $x = a$ 时，所有包含 $(x-a)$ 因子的项都为零，只剩下常数项：

$$P_n^{(k)}(x) = k!c_k + \text{包含}(x-a)\text{的项}$$

因此，我们要求：

$$\begin{aligned} P_n^{(k)}(a) &= f^{(k)}(a) \\ k!c_k &= f^{(k)}(a) \end{aligned}$$

解出系数 c_k：

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

将所有系数 c_k 代回原来的多项式表达式，并将项数 n 延伸至无穷大，就得到了泰勒级数的表达式。

对于一个在点 a 处无限可导的函数 $f(x)$，其泰勒级数为：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{3.16}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \tag{3.17}$$

a: 级数的中心点或展开点。级数在离 a 越近的地方，近似效果越好。
$f^{(n)}(a)$: 函数 $f(x)$ 的 n 阶导数在点 $x=a$ 处的值。
$n!$: n 的阶乘。

麦克劳林级数

麦克劳林级数是泰勒级数的一个特殊情况，即展开点 $a=0$ 时的泰勒级数。
麦克劳林级数是函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n \tag{3.18}$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots \tag{3.19}$$

泰勒级数本质上是利用函数在一点（a）处的值和各阶导数值来构造一个无限阶多项式，使该多项式能够完全匹配原函数在该点处的局部行为。

例 3.4.1. 函数 $f(x)=e^x$ 的麦克劳林级数
(*1*) 计算函数及其各阶导数
我们需要计算函数 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的各阶导数值 $f^{(k)}(0)$。

k	$f^{(k)}(x)$ (第 k 阶导数)	$f^{(k)}(0)$ (在 $x=0$ 处的值)
0	$f(x)=e^x$	$f(0)=e^0=1$
1	$f'(x)=e^x$	$f'(0)=e^0=1$
2	$f''(x)=e^x$	$f''(0)=e^0=1$
3	$f'''(x)=e^x$	$f'''(0)=e^0=1$
k	$f^{(k)}(x)=e^x$	$f^{(k)}(0)=e^0=1$

可以看出，对于函数 $f(x)=e^x$，在 $x=0$ 处的任意阶导数值都等于 1，即 $f^{(k)}(0)=1$。
(*2*) 代入麦克劳林级数公式
将计算得到的导数值 $f^{(k)}(0)=1$ 代入麦克劳林级数公式：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$$

(*3*) 展开级数
将求和符号展开，列出级数的前几项：

$$e^x=\frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots$$

$$e^x = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

由于 $0! = 1$ 且 $x^0 = 1$ (对于 $x \neq 0$)，我们得到最终的麦克劳林级数（即 e^x 的泰勒级数）：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{3.20}$$

如果想以任意点 a 为中心展开 $f(x) = e^x$，则各阶导数值：$f^{(k)}(a) = e^a$。泰勒级数：

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a}{k!}(x-a)^k$$
$$e^x = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

可以看出，这个形式是 (e^a) 乘以 $\left(1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots\right)$，这与 e^{x-a} 的麦克劳林级数相乘，符合指数函数的性质 $e^x = e^a \cdot e^{x-a}$。

例 3.4.2. 函数 $f(x) = \sin x$ 的麦克劳林级数

(*1*) 计算函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值

我们需要计算 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的各阶导数的值 $f^{(n)}(0)$：

第 *0* 阶：	$f(x) = \sin x$	$f(0) = \sin(0) = 0$
第 *1* 阶：	$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = \cos(0) = 1$
第 *2* 阶：	$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = -\sin(0) = 0$
第 *3* 阶：	$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -\cos(0) = -1$
第 *4* 阶：	$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$
第 *5* 阶：	$f^{(5)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1$

(*2*) 观察周期规律

我们可以看到 $f^{(n)}(0)$ 的值以 $0, 1, 0, -1$ 为周期重复出现：

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin x$	0
1	$\cos x$	1
2	$-\sin x$	0
3	$-\cos x$	-1
4	$\sin x$	0
5	$\cos x$	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

这意味着只有当 n 是奇数 $(n = 2k + 1)$ 时，系数才非零。
当 $n = 1, 5, 9, \ldots$ 时，$f^{(n)}(0) = 1$
当 $n = 3, 7, 11, \ldots$ 时，$f^{(n)}(0) = -1$
(*3*) 将计算出的 $f^{(n)}(0)$ 值代入麦克劳林级数公式：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \cdots \\
\sin x &= 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots
\end{aligned}
$$

(*4*) 写出级数的求和形式
该级数只包含奇数次幂项，且符号正负交替，我们可以用一个求和符号来表示它：

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

这就是函数 $f(x) = \sin x$ 的麦克劳林级数。

常用的麦克劳林级数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{3.21}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{3.22}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{3.23}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{3.25}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{3.26}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \tag{3.27}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \tag{3.28}$$

例 3.4.3. 计算极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4} &= \frac{\cos(\epsilon)-1+\frac{1}{2}\epsilon^2}{\epsilon^4}\\ &= \frac{\left(1-\frac{\epsilon^2}{2!}+\frac{\epsilon^4}{4!}\right)-1+\frac{1}{2}\epsilon^2}{\epsilon^4}\\ &= \frac{\frac{\epsilon^4}{4!}}{\epsilon^4}=\frac{1}{4!}\end{aligned}$$

例 3.4.4. 使用泰勒展开式来近似计算 $\sqrt{2}$。

我们希望近似计算 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=2$ 处的值。

为了使计算简化且收敛更快，我们应该选择一个离 2 近且容易计算其函数值和导数值的点 a。

最佳选择是 $a=1$ 或 $a=4$，因为 $\sqrt{1}=1$ 和 $\sqrt{4}=2$ 都是整数。我们选择 $a=1$。

所以，我们对 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $a=1$ 处进行泰勒展开，并令 $x=2$ 进行计算。

我们需要计算函数 $f(x)$ 及其各阶导数在 $a=1$ 处的值：

阶数n	导数$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$f(x)=x^{1/2}$	$f(1)=1$
1	$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$f'(1)=\frac{1}{2}$
2	$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}$	$f''(1)=-\frac{1}{4}$
3	$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-5/2}$	$f'''(1)=\frac{3}{8}$
4	$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-7/2}$	$f^{(4)}(1)=-\frac{15}{16}$

将 $f(x)=\sqrt{x}$ 和 $a=1$ 代入公式：

$$\begin{aligned}\sqrt{x}&=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\dots\\ \sqrt{x}&=1+\frac{1/2}{1!}(x-1)+\frac{-1/4}{2!}(x-1)^2+\frac{3/8}{3!}(x-1)^3+\dots\\ \sqrt{x}&=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{3/8}{6}(x-1)^3-\dots\\ \sqrt{x}&=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3-\dots\end{aligned}$$

将 $x=2$ 代入展开式，则 $x-1=1$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}&\approx 1+\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{8}(1)^2+\frac{1}{16}(1)^3-\dots\\ \sqrt{2}&\approx 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\dots\end{aligned}$$

我们使用三阶泰勒多项式 $P_3(2)$ 来近似:

$$
\begin{aligned}
P_3(2) &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\
&= \frac{16}{16} + \frac{8}{16} - \frac{2}{16} + \frac{1}{16} \\
&= \frac{16+8-2+1}{16} \\
&= \frac{23}{16} = 1.4375
\end{aligned}
$$

泰勒近似值 $P_3(2)$*:* 1.4375
$\sqrt{2}$ 的真实值 *(精确到五位小数):* 1.41421

可以看到，三阶泰勒展开式已经给出了一个相对接近的近似值。如果我们计算更高阶的项，近似值会更精确。例如，使用四阶近似 $P_4(2)$ (加上 $-\frac{5}{128}$) 得到:

$$\frac{23}{16} - \frac{5}{128} = \frac{184}{128} - \frac{5}{128} = \frac{179}{128} \approx 1.3984375$$

虽然四阶的近似值反而比三阶的更差，这是因为泰勒展开的误差项并非单调的，并且 $x = 2$ 离展开中心 $a = 1$ 较远，导致展开式收敛速度较慢。

更好的方法是使用二项式级数:
这是一个二项式级数（Binomial Series）的展开，它就是 $\sqrt{1+u}$ 在 $u = 0$ 处的麦克劳林展开（$a = 1$ 处的泰勒展开）:

$$\sqrt{x} = \sqrt{1 + (x-1)}$$

令 $u = x - 1$，则

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \dots$$

代入 $x = 2$，得 $u = 1$，所以:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256} - \frac{21}{1024} + \dots$$

这个级数收敛于 $\sqrt{2}$，但由于 $u = 1$ 是级数的收敛半径 $|u| < 1$ 的边界，所以收敛速度较慢。

3.5 欧拉公式

如果 θ 是实数，即某个角度的弧度度量，则复指数函数 $e^{i\theta}$ 定义为

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{3.29}$$

这是最著名的欧拉公式，它建立了自然对数的底数 e、虚数单位 i 和三角函数之间的深刻联系。
在复平面上，欧拉公式 $e^{i\theta}$ 表示一个模长为 1 的复数，其位置在单位圆上，并且与正实轴的夹角为 θ（逆时针为正）。
欧拉公式可以通过将麦克劳林级数 e^x 中的 x 正式替换为 $i\theta$ 并推导得出

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

其中最后一步来自 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的麦克劳林级数。
欧拉公式是复数从直角坐标形式 $x + iy$ 转换到极坐标形式 $re^{i\theta}$ 的关键：

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

欧拉恒等式 (Euler's Identity)
当我们在欧拉公式中取 $\theta = \pi$（即 $180°$）时，得到一个被誉为"数学中最美公式"的恒等式：

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$$

因为 $\cos\pi = -1$ 且 $\sin\pi = 0$，所以：

$$\mathbf{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

这个恒等式以简洁的形式将数学中五个最重要的常数 $e, i, \pi, 1, 0$ 以及三种基本运算（加法、乘法、指数）完美地结合在一起。

例 3.5.1. 证明和角公式

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \sin(a+b) = \cos a\sin b + \sin a\cos b$$

要证明和角公式，我们可以利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

应用欧拉公式于 a 和 b

$$e^{ia} = \cos a + i\sin a \qquad e^{ib} = \cos b + i\sin b$$

将这两个表达式相乘:

$$
\begin{aligned}
e^{i(a+b)} &= e^{ia} \cdot e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\
e^{i(a+b)} &= \cos a \cos b + i \cos a \sin b + i \sin a \cos b + i^2 \sin a \sin b \\
e^{i(a+b)} &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b)
\end{aligned}
$$

与欧拉公式的形式对比：$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$

实部:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{3.30}$$

虚部:

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b \tag{3.31}$$

由此，我们证明了余弦 *(实部)* 和正弦 *(虚部)* 和角公式。

这个证明利用了复数的性质和欧拉公式，将三角函数的和角问题简化到了复数乘法的框架内。

3.6 微分公式和运算法则

如果导数已知，那么通过变换可以得到原函数的微分公式，即

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \iff df(x) = f'(x)\,dx \tag{3.32}$$

因为 $dx = \epsilon \neq 0$，所以式 3.21 的变换恒成立。

函数在单一定义域区间内总是可微（可导）的，在闭区间的左边界向右可微（可导），在闭区间的右边界向左可微（可导）。

根据前面的基本函数导数公式，很容易得到微分公式。

基本函数微分公式

$dF(x)$	$f'(x)\,dx$
dC (常数)	0
dx^n	$nx^{n-1}\,dx$
de^x	$e^x\,dx$
da^x	$a^x \ln a\,dx$
$d\ln x$	$\frac{1}{x}\,dx$
$d\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}\,dx$
$d\sin x$	$\cos x\,dx$
$d\cos x$	$-\sin x\,dx$
$d\tan x$	$\sec^2 x\,dx$
$d\cot x$	$-\csc^2 x\,dx$
$x{\to}0sinxd\sec x$	$\sec x\tan x\,dx$
$d\csc x$	$-\csc x\cot x\,dx$
$d\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
$d\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
$d\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}\,dx$
$d\mathrm{arccot}\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}\,dx$

类似地，我们可以通过导数运算法则得到微分运算法则：
令 $u=u(x)$，$v=v(x)$，那么

$$dCu = Cdu = Cu'\,dx \tag{3.33}$$

$$d(u\pm v) = du \pm dv = u'\,dx \pm v'\,dx \tag{3.34}$$

$$d(uv) = vdu + udv + du\cdot dv = vu'\,dx + uv'\,dx \tag{3.35}$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv + du\cdot dv}{v^2} = \frac{vdu-udv}{v^2} \tag{3.36}$$

$$du(v(x)) = u'(v)\cdot dv = u'(v)\cdot v'\,dx \tag{3.37}$$

$d(uv)$ 和 $d\frac{u}{v}$ 的中间项中，我们保留了 $du\cdot dv = u'\,dx\cdot v'\,dx = u'v'\,d^2x$，这是一个二阶无穷小，正常情况下极限计算后为 0，如公式右侧结果所示。考虑到微分减法，如 $d(uv)-vdu-udv = du\cdot dv$，在与二阶无穷小比值的情况下，这会得到正确结果。

例 3.6.1. 复合函数 $\sin^3 x$ 微分展开

$$u(x) = x^3, \quad v(x) = \sin x$$

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= 3x^2 \to u'(v) = 3\sin^2 x \\
v'(x) &= \cos x \\
d\sin^3 x &= u'(v) \cdot v'\,dx = 3\sin^2 x \cos x\,dx
\end{aligned}
$$

例 3.6.2. 复合函数 $e^{\cos(2x)}$ 微分展开

$$
\begin{aligned}
de^{\cos(2x)} &= e^{\cos(2x)} \cdot d\cos(2x) \\
&= e^{\cos(2x)} \cdot (-\sin(2x)) \cdot d2x \\
&= -2\sin(2x)e^{\cos(2x)}\,dx
\end{aligned}
$$

因为常数的导数为 0，所以我们有

$$d[f(x) + C] = df(x) + dC = df(x) = f'(x)\,dx$$

对于本节的微分公式，如果从公式的右侧向左侧计算

$$f'(x)\,dx = d[f(x) + C] \tag{3.38}$$

第四章　导数和微分的应用

本章我们利用导数和微分来解决一些数学上的问题，如函数的单调性、渐近线和极值等。

4.1　函数单调性

单调函数是指在给定区间上是增函数或减函数的函数。具有单调性的区间 I 称为单调区间。

定义 4.1. 单调函数
设函数 $y = f(x)$ 的单一区间定义域为 D，区间 $I \subseteq D$。对于区间 I 上自变量的任意值 x，我们有以下分类：
(*1*) 单调递增，如果微分 $df(x) > 0$。
(*2*) 单调递减，如果微分 $df(x) < 0$。
$df(x) = f(x+\epsilon) - f(x) = f(x) - f(x-\epsilon)$，在区间 I 的左边界右微分，在区间 I 的右边界左微分。

单调函数的主要特点：
(1) 最值：单调函数在闭区间上的最大值和最小值一定在区间的端点处取到。
(2) 零点：如果单调函数在其区间端点处函数值的符号相反，则该函数在区间内有且仅有一个零点。
(3) 可逆性：严格单调函数存在反函数。

例 4.1.1. 函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $I = (-\infty, +\infty)$ 上的单调性。

$$\begin{aligned} df(x) &= (x+\epsilon)^3 - x^3 = 3x^2\epsilon + 3x\epsilon^2 + \epsilon^3 \\ &= 3x^2\epsilon + \epsilon^3 > 0 \end{aligned}$$

因为 $x^2 \geq 0$，可以看出，对于任意 $x \in I$，$df(x) > 0$ 恒成立，所以函数 $f(x) = x^3$ 单调递增。

在一般情况下，我们可以根据单调性的定义直接进行计算来判断函数的单调性。因为 $df(x) = f'(x)\,dx$，$dx = \epsilon > 0$ 不会改变正负符号，因此当函数相对复杂时，可以考虑利用导函数 $f'(x)$ 的符号来判断：

（1）若在区间 I 上 $f'(x) > 0$，则函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增。

（2）若在区间 I 上 $f'(x) < 0$，则函数 $f(x)$ 在 I 上单调递减。

(3) 若在区间 I 上 $f'(x) \geq 0$，且仅在有限个点上 $f'(x) = 0$，则函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增。

(4) 若在区间 I 上 $f'(x) \leq 0$，且仅在有限个点上 $f'(x) = 0$，则函数 $f(x)$ 在 I 上单调递减。

对于（3）和（4）的理解要点：

$f'(x) \geq 0$ (非负)：这意味着函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不减的（即增函数）。函数值 $f(x)$ 永远不会随着 x 的增大而减小。

$f'(x) = 0$ (有限点)：这意味着函数曲线只有在孤立的几个点上有水平切线（即瞬时增长率为零）。

例 4.1.2. 判定函数 $f(x) = xe^{-x}$ 的单调性。

(3) 求导数

首先，使用乘积法则 $(uv)' = u'v + uv'$ 对函数 $f(x)$ 求导：

设 $u = x$ 和 $v = e^{-x}$。则 $u' = 1$ 和 $v' = -e^{-x}$。

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1) \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) \\ &= e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \end{aligned}$$

(2) 分析导数的符号

由于 e^{-x} 对于所有的实数 x 恒为正 $(e^{-x} > 0)$，因此导数 $f'(x)$ 的符号完全由因子 $(1-x)$ 决定。

令 $f'(x) = 0$ 找到临界点：

$$e^{-x}(1-x) = 0$$

因为 $e^{-x} \neq 0$，所以我们解 $1 - x = 0$，得到：

$$x = 1$$

(3) 确定单调区间

当 $x < 1$ 时单调递增：取 $x = 0$ 检验。$1 - x = 1 - 0 = 1 > 0$。因此，$f'(x) = e^{-x}(1-x) > 0$。函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上单调递增。

当 $x > 1$ 时单调递减：取 $x = 2$ 检验。$1 - x = 1 - 2 = -1 < 0$。因此，$f'(x) = e^{-x}(1-x) < 0$。函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减。

函数在 $x = 1$ 处达到局部最大值，$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$。

4.2 函数的极值

函数极值（Extremum）是局部极大值（Local Maximum）和局部极小值（Local Minimum）的统称，反映了函数在其定义域的局部范围内的最大或最小性。

定义 4.2. 函数极值
对于函数 $f(x)$ 区间内某一点 $x = c$:
（1）$f(c)$ 是局部极大值，如果：$f(c) > f(c-\epsilon)$ 并且 $f(c) > f(c+\epsilon)$
（2）$f(c)$ 是局部极小值，如果：$f(c) < f(c-\epsilon)$ 并且 $f(c) < f(c+\epsilon)$

我们在 $x = c$ 的最小微区间 $[c-\epsilon,\ c+\epsilon]$ 进行极值定义和判断，彻底消除了传统极值定义的模糊化表述。
从图像上看，局部极大值点就像是函数图形上的山顶，局部极小值点就像是函数图形上的山谷底部。

例 4.2.1. 判断 $x = 0$ 是否是函数的极值点，$f(x) = x^2$，$g(x) = x^3$。
对于 $f(x) = x^2$：

$$f(0) - f(0-\epsilon) = (0)^2 - (-\epsilon)^2 = -\epsilon^2 < 0$$
$$f(0) - f(0+\epsilon) = (0)^2 - (\epsilon)^2 = -\epsilon^2 < 0$$

所以 $f(0) < f(0-\epsilon)$ 并且 $f(0) < f(0+\epsilon)$，$f(0)$ 是函数 $f(x) = x^2$ 的局部极小值。
对于 $g(x) = x^3$：

$$g(0) - g(0-\epsilon) = (0)^3 - (-\epsilon)^3 = \epsilon^3 > 0$$
$$g(0) - g(0+\epsilon) = (0)^3 - (\epsilon)^3 = -\epsilon^3 < 0$$

所以 $x = 0$ 不是函数 $g(x) = x^3$ 的极值点。

定理 4.1. 极值判定
对于函数 $f(x)$ 区间内某一点 $x = c$，如果 $f'(c) = 0$ 并且 $f'(c-\epsilon) \cdot f'(c+\epsilon) < 0$，那么 c 是函数 $f(x)$ 的极值点。并且
（1）$f(c)$ 是局部极大值，如果：$f'(c-\epsilon) > 0$ 或者 $f'(c+\epsilon) < 0$
（2）$f(c)$ 是局部极小值，如果：$f'(c-\epsilon) < 0$ 或者 $f'(c+\epsilon) > 0$

如果：$f'(c-\epsilon) > 0$，说明 c 点左侧单调递增，如果 $f'(c+\epsilon) < 0$，说明 c 点右侧单调递减，因此 $f(c)$ 是极大值。极小值的情况正好相反。

例 4.2.2. 求函数 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 的所有极值点及极值。
求导数：$f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3$
求驻点（令 $f'(x) = 0$）：

$$
\begin{aligned}
&3x^2 - 3 = 0 \\
&3(x^2 - 1) = 0 \\
&x^2 = 1
\end{aligned}
$$

解得驻点：$x_1 = -1$，$x_2 = 1$。
判断极值：

$$
\begin{aligned}
&f'(-1-\epsilon) = 3(-1-\epsilon)^2 - 3 = 6\epsilon + 3\epsilon^2 > 0 \\
&f'(-1+\epsilon) = 3(-1+\epsilon)^2 - 3 = -6\epsilon + 3\epsilon^2 < 0 \\
&f'(1-\epsilon) = 3(1-\epsilon)^2 - 3 = -6\epsilon + 3\epsilon^2 < 0 \\
&f'(1+\epsilon) = 3(1+\epsilon)^2 - 3 = 6\epsilon + 3\epsilon^2 > 0
\end{aligned}
$$

$x_1 = -1$ 是极大值点，$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$
$x_2 = 1$ 是极小值点，$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$

例 4.2.3. 求函数 $f(x) = x \ln x$ 的极值。
由于函数定义域要求 $x > 0$，因此我们只在开区间 $(0, \infty)$ 上求解。
求导数：使用乘积法则 $(uv)' = u'v + uv'$，其中 $u = x, v = \ln x$。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \\
&= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1
\end{aligned}
$$

求驻点（令 $f'(x) = 0$）：$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$
解得驻点：$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$。
判断极值：

$$
\begin{aligned}
f'\left(\frac{1}{e} - \epsilon\right) &= \ln\left(\frac{1}{e} - \epsilon\right) + 1 = \ln\left(\frac{1 - e\epsilon}{e}\right) + 1 \\
&= \ln(1 - e\epsilon) - \ln e + 1 \\
&= -e\epsilon < 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'\left(\frac{1}{e}+\epsilon\right) &= \ln\left(\frac{1}{e}+\epsilon\right)+1 = \ln\left(\frac{1+e\epsilon}{e}\right)+1 \\
&= \ln(1+e\epsilon)-\ln e+1 \\
&= e\epsilon > 0
\end{aligned}
$$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ 是极小值点，$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\cdot\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

极值与最值（全局极值）的区别

极值是一个局部性的概念，而最值是全局性的概念。
可以有多个局部极值，最多只有一个最大值和一个最小值。
局部极大值不一定大于局部极小值，最大值必然是所有函数值的最大。
最值需要评估所有极值和区间边界的值，并选取最大值或最小值。

求解闭区间最值需要比较函数在所有驻点和闭区间端点处的函数值。

例 4.2.4. 求函数 $f(x) = x - 2\sin x$ 在闭区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值。
求一阶导数：$f'(x) = (x - 2\sin x)' = 1 - 2\cos x$
求驻点（令 $f'(x) = 0$）：$1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$
在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内，满足 $\cos x = 1/2$ 的点为：

$$x = \frac{\pi}{3}$$

计算函数值：比较区间端点和驻点处的函数值。

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0 - 2\sin(0) = 0 - 0 = 0 \\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2(1) \\
&\approx 1.57 - 2 = -0.43 \\
f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \\
&\approx 1.047 - 1.732 = -0.685
\end{aligned}
$$

比较结果：最大值：$f(0) = 0$，最小值：$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -0.685$

4.3 函数的渐近线

渐近线（Asymptote）是一条直线，当函数曲线上的点无限远离原点（即 x 或 y 坐标趋于无穷大）时，该曲线与这条直线之间的距离趋近于零。
简单来说，渐近线就是函数图形在无穷远处无限靠近却永远不会相交的直线。

渐近线主要分为三类：垂直渐近线，水平渐近线和斜渐近线。

垂直渐近线 (Vertical Asymptote)
垂直渐近线是形如 $x = a$ 的竖直线。

定义 4.3. 垂直渐近线
如果当 x 从左侧或右侧趋近于某个有限值 a 时，函数 $f(x)$ 的值趋向于正无穷 *(*∞*)* 或负无穷 *(*$-\infty$*)*，即：

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a - \epsilon) = \pm\infty \tag{4.1}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a + \epsilon) = \pm\infty \tag{4.2}$$

那么直线 $x = a$ 就是函数 $f(x)$ 的垂直渐近线。

对于有理函数（即两个多项式的比 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$），垂直渐近线通常出现在使分母 $Q(x)$ 为零，但分子 $P(x)$ 不为零的点 $x = a$ 处。

例 4.3.1. 求函数 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 的垂直渐近线。
分母 $x - 2 = 0$ 时，$x = 2$，此时分子 $1 \neq 0$。
检查极限：

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2 - \epsilon) &= \frac{1}{(2 - \epsilon) - 2} \\ &= \frac{1}{-\epsilon} = -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2 + \epsilon) &= \frac{1}{(2 + \epsilon) - 2} \\ &= \frac{1}{\epsilon} = \infty\end{aligned}$$

所以，直线 $x = 2$ 是垂直渐近线。

水平渐近线 (Horizontal Asymptote)
水平渐近线是形如 $y = b$ 的水平线。

定义 4.4. 水平渐近线
如果当 x 趋向于正无穷 *(*∞*)* 或负无穷 *(*$-\infty$*)* 时，函数 $f(x)$ 的值趋近于某个有限值 b，即：

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = f(\infty) = b \tag{4.3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(-\infty) = b \tag{4.4}$$

那么直线 $y = b$ 就是函数 $f(x)$ 的水平渐近线。

例 4.3.2. 求函数 $f(x)=\frac{3x^2-5}{2x^2+x}$ 的水平渐近线。
检查极限：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty) &= \frac{3\infty^2-5}{2\infty^2+x} \\ &= \frac{3\infty^2}{2\infty^2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

所以水平渐近线为：$y=\frac{3}{2}$。

斜渐近线 (Slant/Oblique Asymptote))
斜渐近线是形如 $y=kx+b$ 的斜直线（其中 $k\neq 0$）。

定义 4.5. 斜渐近线
如果函数 $f(x)$ 满足：

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{f(\pm\infty)}{\pm\infty} \tag{4.5}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx] = f(\pm\infty)-k(\pm\infty) \tag{4.6}$$

且 k 和 b 都是有限的实数，那么直线 $y=kx+b$ 就是函数 $f(x)$ 的斜渐近线。

对于有理函数 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$，只有当分子的次数恰好比分母的次数高 1 ($n=m+1$) 时，函数才可能存在斜渐近线。

例 4.3.3. 求函数 $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ 的斜渐近线。
分子次数 $n=2$，分母次数 $m=1$，$n=m+1$，存在斜渐近线。

$$\begin{aligned}k &= \frac{f(\infty)}{\infty} = \frac{\infty^2+1}{(\infty-1)\cdot\infty} \\ &= \frac{\infty^2+1}{\infty^2-\infty} = \frac{\infty^2}{\infty^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= f(\infty)-k(\infty) = \frac{\infty^2+1}{\infty-1}-\infty \\ &= \frac{\infty^2+1}{\infty-1}-\frac{\infty^2-\infty}{\infty-1} \\ &= \frac{\infty+1}{\infty-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

因此，直线 $y=x+1$ 是斜渐近线。

4.4 牛顿法解方程

牛顿法是一种高效的数值计算方法，广泛应用于各种需要求解非线性方程的工程和科学计算领域。

牛顿法的核心思想是用切线来逐步逼近函数 $f(x)$ 的根（即函数图形与 x 轴的交点）：

（1）初始点：首先，选择一个接近真实解的初始猜测值 x_0。

（2）切线逼近：在函数曲线 $y = f(x)$ 上，找到点 $(x_n, f(x_n))$。

（3）局部线性化：用该点的切线来代替曲线在 x_n 附近的走势（这是对函数进行局部线性化的操作）。

（4）求新近似解：找到这条切线与 x 轴的交点 x_{n+1}。这个 x_{n+1} 通常会比 x_n 更接近方程的真实解。

（5）迭代：重复以上步骤，用 x_{n+1} 作为新的猜测值，不断迭代，直到相邻两次近似值的差小于预设的精度要求，或者函数值 $|f(x_{n+1})|$ 足够接近零。

牛顿法背后的几何结构如图所示。

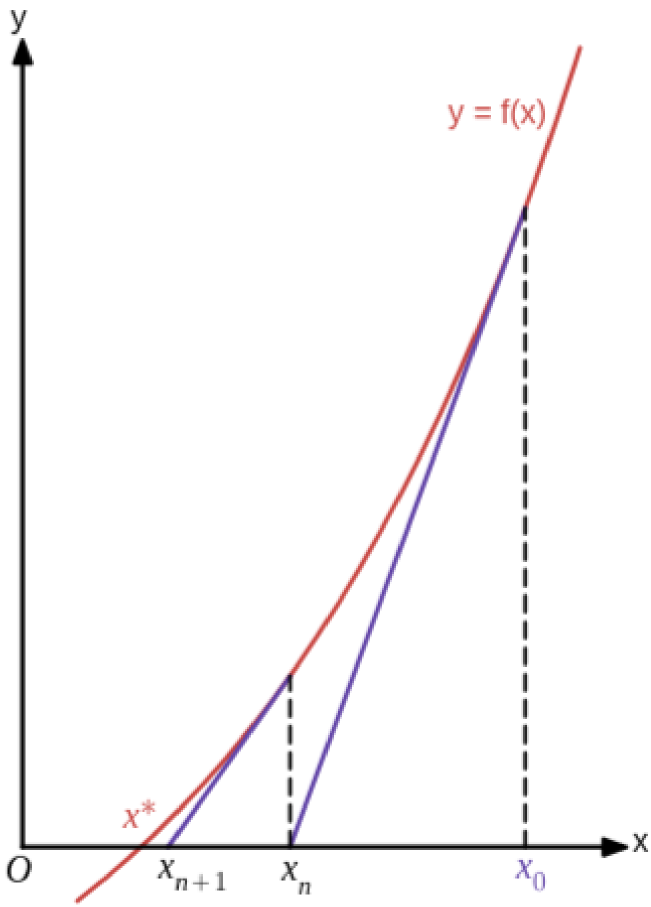


图 4.1: **牛顿法解方程**

迭代公式代数推导

从代数的角度，牛顿法是基于函数的泰勒级数展开。

我们假设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的精确解，即 $f(x^*)=0$，而 x_n 是当前的一个近似解。令 $\Delta x = x^* - x_n$，则 $x^* = x_n + \Delta x$。

将 $f(x)$ 在 x_n 处进行泰勒级数展开：

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \cdots$$

由于我们寻找的是根 x^*，所以 $f(x^*)=0$。代入 $x = x^*$：

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x^* - x_n)^2 + \cdots$$

牛顿法的关键在于截断：我们只保留泰勒级数的前两项（即用切线进行线性近似），忽略高阶项（二阶及更高阶的项）：

$$0 \approx f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)$$

将 x^* 用下一个近似值 x_{n+1} 代替，并解出 x_{n+1}：

$$\begin{aligned}
&0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \\
&f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n) \\
&x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}
\end{aligned}$$

最终得到牛顿法的迭代公式：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

其中，$f'(x_n)$ 是函数 $f(x)$ 在 x_n 处的导数（切线的斜率）。

牛顿法优点与限制

收敛速度快：在解的附近，通常具有二阶收敛的特性，这意味着每次迭代正确的小数位数大致会翻倍，收敛速度非常快。

需要导数：要求函数 $f(x)$ 可导，并且每次迭代都需要计算导数值 $f'(x_n)$。

对初值敏感：如果初始值 x_0 离真实根太远，或者在迭代过程中 $f'(x_n)$ 接近于零（即切线接近水平），方法可能不收敛或收敛到错误的根。

例 4.4.1. 求解 $e^{-x} = x$ 的根

求解方程 $e^{-x} = x$ 的根。这等价于求解函数 $f(x) = e^{-x} - x = 0$ 的根。

原函数：$f(x) = e^{-x} - x$

导数：$f'(x) = (e^{-x} - x)' = -e^{-x} - 1$

确定迭代公式

将 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 代入牛顿法的迭代公式 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1} = x_n + \frac{e^{-x_n} - x_n}{e^{-x_n} + 1}$$

开始迭代

首先，通过观察或作图，我们可以找到一个合理的初始猜测。

当 $x = 0$ 时，$f(0) = e^0 - 0 = 1$；当 $x = 1$ 时，$f(1) = e^{-1} - 1 \approx 0.368 - 1 = -0.632$。

由于函数值在 *0* 和 *1* 之间变号，所以根在 $[0, 1]$ 区间内。我们取初始值 $x_0 = 0.5$：

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} \approx 0.566311003197 \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.567143165035 \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 0.56714329041
\end{aligned}$$

经过 *3* 次迭代，我们得到的近似解 $x_3 \approx 0.56714329041$ 已经达到了极高的精度。

这个例子强调了牛顿法的优势：对于具有良好导数性质的函数，它能以二次收敛速度迅速找到方程的根。

第五章　不定积分和积分方法

不定积分的概念起源于 17 世纪，由艾萨克 · 牛顿和戈特弗里德 · 莱布尼兹独立发展，作为微积分学的基础。
不定积分也称为反导函数或原函数，它本质上是求导数的逆运算，用于找到一个函数的“原始形式”。

5.1　不定积分的基本概念

考虑微分表达式 $dF(x) = F(x+\epsilon) - F(x)$，我们希望用数学的方法由微分 $dF(x)$ 返回原函数 $F(x)$，这时我们可以定义一个专用符号如 $\int$ 来表示这种运算操作，即

$$\int dF(x) = F(x)$$

由此我们可以进行一些基本运算：

$$\int dx = x \qquad \int d(\ln x + \sin x) = \ln x + \sin x$$

$$F(x) = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \int dF(x) = x^2 + 2x + 3$$

接下来考虑微分的导数展开形式：

$$dF(x) = f(x)\,dx \tag{5.1}$$

如果等式（5.1）从右向左计算：

$$f(x)\,dx = d(F(x) + C) = [F(x+\epsilon) + C] - [F(x) + C] = F(x+\epsilon) - F(x) \tag{5.2}$$

其中 C 为任意常数。也就是说导函数 $f(x)$ 对应的不是唯一原函数 $F(x)$，而是一个原函数集合 $F(x) + C$。所以我们有

$$\int f(x)\,dx = \int d(F(x) + C) = F(x) + C \tag{5.3}$$

如果我们将等式（5.2）看作众所周知的常识，为了避免计算中间过程的繁琐性，作为一种约定，我们省略微分表达式中的常数项 C，而只是在最终结果中列出。这样等式（5.3）就变成：

$$\int f(x)\,dx = \int dF(x) = F(x) + C \tag{5.4}$$

这样，我们就完成了由导函数推导计算原函数的过程，并可据此总结出不定积分的定义。

定义 5.1. 不定积分

不定积分是微分的逆运算，作用于微分表达式并解析出原函数。用符号 $\int$ 表示不定积分，我们有

$$\int dF(x) = F(x) \tag{5.5}$$

对于以导函数表示的微分展开形式，不定积分的运算结果是原函数（相对于导函数）的集合，即

$$\int f(x)\,dx = \int dF(x) = F(x) + C \tag{5.6}$$

在不定积分表达式中微分自变量 dx 也称为积分自变量。

不定积分与微分的互逆关系

微分：给定一个函数 $F(x)$，求其导数 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$。

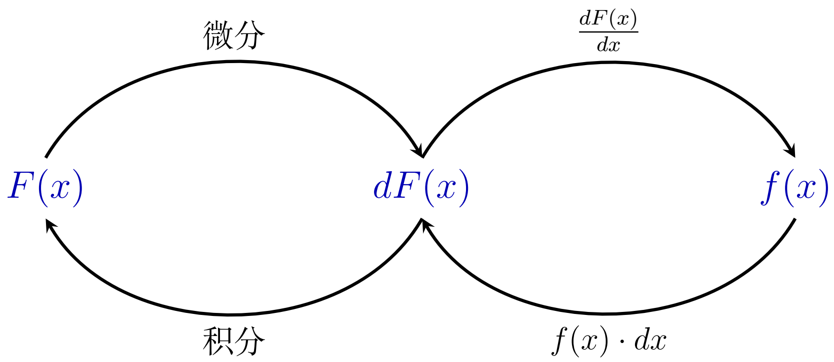
不定积分：给定一个函数 $f(x)$，求其原函数 $F(x)$，即 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$。

逆运算体现：不定积分正是微分（求导数）的逆过程。如果对一个函数先求导，再求不定积分，会回到原来的函数（相差一个常数 C）。

$$\int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

如果对一个函数先求不定积分，再求导，就会回到原来的函数。

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x)$$



5.2 不定积分的主要性质

1. 导数与不定积分的互逆关系

不定积分与微分（求导数）是互逆运算。

不定积分的导数等于被积函数：

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

函数的微分（导数）的不定积分等于该函数与任意常数之和：

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

其中，C 是积分常数。

2. 积分的基本运算法则

（1）常数倍的积分

常数因子可以提到积分号的外面（其中 k 是不为零的常数）：

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \tag{5.7}$$

（2）和（差）的积分

有限个函数的和（差）的积分等于各个函数的积分的和（差）：

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \tag{5.8}$$

（3）乘积的链式法则

基于微分的链式法则：

$$\int u'(v)\cdot v'\,dx = \int u'(v)\,dv = \int\,du(v) = u(v(x)) + C \tag{5.9}$$

例 5.2.1. 计算积分 $\int(2\cos x + \sin x)\,dx$。

$$\begin{aligned}\int(2\cos x + \sin x)\,dx &= \int 2\cos x\,dx + \int \sin x\,dx \\ &= 2\cdot\int\,d\sin x + \int\,d(-\cos x) \\ &= (2\sin x + C_1) - (\cos x + C_2) \\ &= 2\sin x - \cos x + C\end{aligned}$$

在上面的计算中 C_1 和 C_2 被合并成了一个常数项 C，在实际的计算中，C_1 和 C_2 可以省略。

例 5.2.2. 计算积分 $\int \tan x\,dx$。

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\cos x}\,d(-\cos x) = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\cos x\end{aligned}$$

对照链式法则公式：

$$\begin{aligned} u' = \frac{1}{x} \qquad u = \ln x \qquad v = \cos x \\ \Longrightarrow u'(v) = \frac{1}{\cos x} \qquad u(v) = \ln(\cos x)\end{aligned}$$

所以

$$\int \tan x\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\cos x = -\int d\ln|\cos x| = -\ln|\cos x| + C$$

3. 不定积分的几何意义

不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 表示由函数 $f(x)$ 的所有原函数组成的曲线族。

对于曲线族中的任意一条曲线 $y = F(x) + C_1$ 和 $y = F(x) + C_2$，在横坐标 x_0 处的切线斜率都等于 $f(x_0)$，因此它们是互相平行的。

这个曲线族中的任意一条曲线，都可以通过将其中任一条曲线沿 y 轴方向作平移得到。

5.3 基本积分公式

将第三章的导数公式或微分公式进行适当变换，即可得到常用积分公式。

基本积分公式

$$(1)\ \int k\,du = ku + C \quad (\text{其中} k \text{ 是常数})$$

$$(2)\ \int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$(3)\ \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

$$(4)\ \int e^u\,du = e^u + C$$

$$(5)\ \int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(6)\ \int \sin u\,du = -\cos u + C$$

(7) $\int \cos u\, du = \sin u + C$

(8) $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

(9) $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

(10) $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

(11) $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

(12) $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$

(13) $\int \cot u\, du = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc u| + C$

(14) $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

(15) $\int \csc u\, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C = \ln|\csc u - \cot u| + C$

(16) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\, du = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (a>0)$

(17) $\int \frac{1}{a^2+u^2}\, du = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (a\neq 0)$

(18) $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\, du = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C \quad (a>0)$

对于公式（10）：

$$\begin{aligned}\int \sec u \tan u\, du &= \int \frac{1}{\cos u}\cdot\frac{\sin u}{\cos u}\, dx \\ &= \int \frac{d(-\cos u)}{(\cos u)^2} = -\frac{1}{-2+1}(\cos u)^{-2+1} \\ &= \frac{1}{\cos u} = \sec u\end{aligned}$$

对于公式（14）：

$$\begin{aligned}\int \sec u\, du &= \int \sec u \cdot \frac{\sec u + \tan u}{\sec u + \tan u}\, du \\ &= \int \frac{\sec u(\sec u + \tan u)}{\sec u + \tan u}\, du \\ &= \int \frac{\sec^2 u + \sec u \tan u}{\sec u + \tan u}\, du\end{aligned}$$

令 $w = \sec u + \tan u$，回忆导数公式：

$$\frac{d\sec u}{du} = \sec u \tan u \qquad \frac{d\tan u}{du} = \sec^2 u$$

$$\frac{dw}{du} = \frac{d}{du}(\sec u + \tan u) = \sec u \tan u + \sec^2 u$$
$$dw = (\sec^2 u + \sec u \tan u)\, du$$

将换元结果 w 和 dw 代入原积分表达式：

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2 u + \sec u \tan u}{\sec u + \tan u}\, du &= \int \frac{1}{w}\, dw \\ &= \ln|w| + C \\ &= \ln|\sec u + \tan u| + C\end{aligned}$$

因此，我们推导出：

$$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

对于公式（16），（17），（18），我们可以利用微分公式从右侧向左侧推导出结果。积分公式的直接推导我们在稍后的积分方法中给出。

5.4 积分技术

本节主要聚焦于不定积分的求解方法。

1. 换元法

换元法用于简化积分变量，通过引入新变量 $u = g(x)$ ，使积分形式更简单。步骤：

(1) 选择 $u = g(x)$，计算 $du = g'(x)\, dx$。

(2) 用 u 和 du 替换原积分。

(3) 求新积分，然后反代回 x。

(4) 添加常数 C。

适用场景：复合函数，如 $\int f(g(x))g'(x)\, dx$。

注意：替换后积分应完全用 u 表示。

例 5.4.1. 计算不定积分。

(1) $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$

令 $u = x^2 + 1$，则 $du = d(x^2+1) = 2x\, dx$，所以 $x\, dx = \frac{1}{2}\, du$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1}\, dx = \int \sqrt{x^2+1} \cdot x\, dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + C\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}
$$

(2) $\int e^{3x-5}\,dx$

令 $u = 3x - 5$，则 $du = d(3x-5) = 3\,dx$，所以 $dx = \frac{1}{3}\,du$

$$
\begin{aligned}
\int e^{3x-5}\,dx &= \int e^u \cdot \frac{1}{3}\,du = \frac{1}{3}\int e^u\,du \\
&= \frac{1}{3}e^u + C \\
&= \frac{1}{3}e^{3x-5} + C
\end{aligned}
$$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

令 $u = x^2 + 4$，则 $du = d(x^2+4) = 2x\,dx$，所以 $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{1}{2}\,du\right) \\
&= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right) + C \\
&= u^{1/2} + C = \sqrt{x^2+4} + C
\end{aligned}
$$

替换法的关键在于选择正确的 u，使 du 能够简化或消除原积分式中剩余的 x 变量。

2. 分部积分法

分部积分法源于乘积求导法则：

$$(uv)' = u'v + uv'$$

对等式两边求积分：

$$\int (uv)'\,dx = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$

等式的左边 $\int (uv)'\,dx = \int\ d(uv) = uv$，因此：

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv$$

稍作移项，就得到了分部积分公式：

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{5.10}$$

分部积分法的核心在于将一个难以求解的积分 $\int u\,dv$ 转化为一个相对更容易求解的积分 $\int v\,du$。

例 5.4.2. 求 $\int xe^x\,dx$。
首先将积分转化为 $\int u\,dv$ 的形式：$\int xe^x\,dx = \int x\,de^x$。
对照公式，$u = x, \quad v = e^x$，所以

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= \int x\,de^x \\ &= x\cdot e^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

例 5.4.3. 求 $\int \ln x\,dx$。
对照公式，$u = \ln x, \quad v = x$，所以

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \ln x\cdot x - \int x\,d\ln x \\ &= x\ln x - \int x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\,dx \\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

例 5.4.4. 求解 $\int x\cos x\,dx$。
首先将积分转化为 $\int u\,dv$ 的形式：$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x$。
对照公式，$u = x, \quad v = \sin x$，所以

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x\,d\sin x \\ &= x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx \\ &= x\sin x - (-\cos x) \\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

例 5.4.5. 求解 $\int x^2e^x\,dx$。

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= \int x^2\,de^x = x^2\cdot e^x - \int e^x\,dx^2 \\ &= x^2e^x - \int e^x\cdot 2x\,dx = x^2e^x - 2\int x\,de^x \\ &= x^2e^x - 2\left[x\cdot e^x - \int e^x\,dx\right] \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C\end{aligned}$$

分部积分法重要的不是用 u 和 v 进行变量替换，而是形成 $\int u\,dv$ 的形式，然后写出紧凑并且逻辑连贯的解题过程。

3. 部分分式法

部分分式法是一种代数技巧，用于将有理函数（即两个多项式的比值）分解为几个更简单的分式之和。这种分解是积分有理函数时非常重要的一步，因为它能将复杂的积分问题转化为更容易解决的基本积分形式。

（1）适用条件与预处理

部分分式法仅适用于真有理函数的积分，即分子多项式的次数低于分母多项式的次数。

如果是非真有理函数（分子次数 $\geq$ 分母次数），必须先使用多项式长除法将其分解为一个多项式（可直接积分）和一个真有理函数，然后对剩下的真有理函数部分应用部分分式法。例如

$$\int \frac{x^3+x}{x^2-4}\,dx$$

需要先进行长除法：$\frac{x^3+x}{x^2-4} = x + \frac{5x}{x^2-4}$。接下来只需要对 $\frac{5x}{x^2-4}$ 应用部分分式法。

（2）部分分式分解的步骤

部分分式法的核心在于分解分母。一旦分母被分解成因子，就可以根据这些因子的类型来构建部分分式。

步骤一：分解分母

将分母多项式分解为实系数的一次因子（形如 $ax+b$）和不可再分解的二次因子（形如 ax^2+bx+c，其中 $b^2-4ac<0$）的乘积。

步骤二：构建部分分式根据分母分解的因子类型，构造待定的部分分式形式。主要有以下四种情况：

分母因子类型	对应的部分分式形式
I. 不同的线性因子$(ax+b)$	$\frac{A}{ax+b}$
II. 重复的线性因子$(ax+b)^n$	$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\dots$
III. 不同的不可分解二次因子(ax^2+bx+c)	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
IV. 重复的不可分解二次因子$(ax^2+bx+c)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\dots$

步骤三：确定待定系数

将构建的部分分式相加，然后与原始的分子多项式设为相等。有以下两种常用方法确定待定系数（$A,B,C,\dots$）：

特值法对于线性因子，选择能使分母中某个因子为零的 x 值代入方程，从而快速求解一些系数。

系数比较法: 将方程两边多项式按 x 的幂次展开并合并同类项，然后比较等式两边 x^n 项的系数，得到一个线性方程组，求解该方程组。

步骤四：进行积分
将确定系数后的部分分式代回积分式中，然后分别对每一项进行积分。
线性因子项 $\int \frac{A}{ax+b}\,dx$ 通常使用对数 $\frac{A}{a}\ln|ax+b|+C$。
不可分解二次因子项 $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ 通常需要配方，拆分成 ln 形式和 arctan 形式的组合。

例 5.4.6. 求积分 $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$。
步骤一：分解分母
分母 x^2-5x+6 可分解为 $(x-2)(x-3)$。
步骤二：构建部分分式（类型 I）

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

步骤三：确定待定系数
通分并比较分子：

$$1=A(x-3)+B(x-2)$$

所以，

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

步骤四：进行积分

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx &= \int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx\\ &= \int \frac{1}{x-3}\,dx-\int\frac{1}{x-2}\,dx\\ &= \ln|x-3|-\ln|x-2|+C\\ &= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C\end{aligned}$$

例 5.4.7. 求积分：

$$\int \frac{x^3+4x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$$

步骤一：分解分母与构建部分分式
分母已经分解：$x(x^2+1)^2$。
x: 不同的线性因子。
$(x^2+1)^2$: 重复的不可分解二次因子。根据分解规则，构造部分分式：

$$\frac{x^3+4x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

步骤二：确定待定系数

通分并比较分子：

$$x^3+4x^2-x+1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x$$

展开并分组：

$$\begin{aligned}
&x^3+4x^2-x+1\\
&=A(x^4+2x^2+1)+(Bx^2+Cx)(x^2+1)+Dx^2+Ex\\
&=Ax^4+2Ax^2+A+Bx^4+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+Ex\\
&=(A+B)x^4+(C)x^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+(A)
\end{aligned}$$

比较等式两边 x^n 项的系数：

x的幂次	左边系数	右边系数	得到的方程
x^4	0	$A+B$	(1) $A+B=0$
x^3	1	C	(2) $C=1$
x^2	4	$2A+B+D$	(3) $2A+B+D=4$
x^1	-1	$C+E$	(4) $C+E=-1$
x^0(常数项)	1	A	(5) $A=1$

求解系数：
由 (5) 得 $A=1$。
由 (2) 得 $C=1$。
将 $A=1$ 代入 (1) 得 $1+B=0\Rightarrow B=-1$。
将 $C=1$ 代入 (4) 得 $1+E=-1\Rightarrow E=-2$。
将 $A=1$ 和 $B=-1$ 代入 (3) 得 $2(1)+(-1)+D=4\Rightarrow 1+D=4\Rightarrow D=3$。
分解结果：

$$\frac{x^3+4x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+1}+\frac{3x-2}{(x^2+1)^2}$$

步骤三：进行积分

$$\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{1-x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{3x-2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

第一项 (线性因子)

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|$$

第二项 (不同的二次因子) 将分子拆开：

$$\int\frac{1-x}{x^2+1}\,dx=\int\frac{1}{x^2+1}\,dx-\int\frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)$$
$$= \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

第三项 *(重复的二次因子)* 将分子拆开:

$$\int \frac{3x-2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$\int \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$: 使用代换 $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2}du = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{3}{2(x^2+1)}$$

$\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx$: 需要使用三角代换 $x = \tan\theta$, $dx = \sec^2\theta\,d\theta$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{(\tan^2\theta+1)^2}\sec^2\theta\,d\theta &= \int \frac{2}{(\sec^2\theta)^2}\sec^2\theta\,d\theta \\
&= 2\int \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta = 2\int \cos^2\theta\,d\theta \\
&= 2\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \int (1+\cos(2\theta))\,d\theta \\
&= \theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) = \theta + \sin\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

因为 $x = \tan\theta$, 所以 $\theta = \arctan x$。
由三角函数关系可知 $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 且 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$。所以

$$\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx = \arctan x + \frac{x}{x^2+1}$$

最终结果
将所有部分相加:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^3+4x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \ln|x| + \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{3}{2(x^2+1)} - \left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right) \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{3}{2(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1} + C \\
&= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| - \frac{2x+3}{2(x^2+1)} + C
\end{aligned}$$

可以看到，包含重复因子和二次因子的分解步骤与基础情况相同，但确定系数和积分求解过程会复杂很多。

部分分式法是微积分中处理有理函数积分的基础工具，关键在于正确分解分母并准确构造部分分式。

4. 三角函数积分法

三角函数的积分通常需要结合三角恒等式和换元法来求解。

(1) 降幂与倍角恒等式积分（针对偶次幂）

当积分中包含 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的偶次幂时，核心策略是使用降幂公式将其转化为 $\cos(2nx)$ 的线性组合。

核心公式：

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

例 5.4.8. 求积分 $\int \cos^2 x\,dx$。

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x\,dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx && \text{(使用降幂公式)}\\
&= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx + \int \cos 2x\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C && \text{(使用 } u = 2x \text{ 换元)}\\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C
\end{aligned}$$

例 5.4.9. 求积分 $\int \sin^4 x\,dx$。

第一次降幂：将 $\sin^4 x$ 视为 $(\sin^2 x)^2$，使用降幂公式 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$。

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^2\,dx\\
&= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx
\end{aligned}$$

第二次降幂：对 $\cos^2 2x$ 使用降幂公式 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$，其中 $\theta = 2x$。

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos(2\cdot 2x)}{2} = \frac{1+\cos 4x}{2}$$

代入并积分：

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx &= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\right) + C \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}
$$

（2）奇次幂的积分（u 换元法）

当积分形如 $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$，且 m 或 n 至少有一个是正奇数时，我们使用 u 换元法。

留下一个奇数次幂的因子（如 $\sin x$ 或 $\cos x$）作为 du 的一部分。

将剩余的偶次幂因子利用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 的关系，转化成另一个三角函数。

例 5.4.10. 求积分 $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$。

$m = 3$ 是奇数，我们留下一个 $\sin x$：

变形：$\sin^3 x\cos^2 x = \sin^2 x\cos^2 x\cdot\sin x = (1-\cos^2 x)\cos^2 x\cdot\sin x$

换元：令 $u = \cos x$，则 $du = -\sin x\,dx$，即 $\sin x\,dx = -du$。

代入：

$$
\begin{aligned}
\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\cdot\sin x\,dx \\
&= \int (1-u^2)u^2(-du) \\
&= \int (u^4 - u^2)\,du \\
&= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C
\end{aligned}
$$

例 5.4.11. 求积分 $\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx$。

$n = 5$ 是奇数，我们留下一个 $\cos x$ 作为 du 的部分。

变形：提取一个 $\cos x$，将剩余的 $\cos^4 x$ 转化为 $\sin x$ 的形式。

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x\cos^5 x &= \sin^2 x\cos^4 x\cdot\cos x \\
&= \sin^2 x(\cos^2 x)^2\cdot\cos x \\
&= \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2\cdot\cos x
\end{aligned}
$$

换元：令 $u = \sin x$，则 $du = \cos x\,dx$。

代入并积分：

$$
\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx = \int u^2(1-u^2)^2\,du
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int u^2(1-2u^2+u^4)\,du \\
&= \int (u^2-2u^4+u^6)\,du \\
&= \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C
\end{aligned}
$$

替换回 x：

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

(3) 万能换元法（针对三角有理函数）

对于任何形如 $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ 的有理函数积分（R 是关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的多项式的比），万能换元法保证能将其转化为关于新变量 t 的有理函数积分，理论上总能求解。

核心换元：令 $t = \tan\frac{x}{2}$。

核心替换关系：

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

例 5.4.12. 求积分 $\int \frac{1}{3+5\cos x}\,dx$。

代入万能换元公式：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{3+5\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{3+5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{\frac{3(1+t^2)+5(1-t^2)}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1+t^2}{(3+3t^2)+(5-5t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{2}{8-2t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{4-t^2}\,dt
\end{aligned}
$$

部分分式分解：

$$\frac{1}{4-t^2} = \frac{1}{(2-t)(2+t)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+t} + \frac{1}{2-t}\right)$$

积分：

$$\int \frac{1}{4-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2+t} + \frac{1}{2-t}\right)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|2+t| - \ln|2-t|\right) + C$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C$$

替换回 x：

$$\int \frac{1}{3+5\cos x}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

(4) 其它 u 换元应用

对于涉及 $\sec x$, $\tan x$, $\csc x$, $\cot x$ 的积分，常常通过恒等式将其转化为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的形式，或直接使用特定的 u 换元。

例 5.4.13. 求积分 $\int \tan^3 x\,dx$。

变形：$\tan^3 x = \tan x \cdot \tan^2 x = \tan x(\sec^2 x - 1)$

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan x \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx$$

第一个积分（u 换元）：$\int \tan x \sec^2 x\,dx$

令 $u = \tan x$，则 $du = \sec^2 x\,dx$

$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}\tan^2 x$$

第二个积分（基础公式）：$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$

合并：

$$\int \tan^3 x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

相对来说微分很简单，但积分却不是。在求函数的导数时，通常很清楚必须应用哪个公式，但应该使用哪种方法来积分给定函数可能并不明显。由于本节的积分问题都集中在对应的方法上，因此通常很清楚对给定的积分时使用什么方法。无论如何，熟练掌握基础公式的推导过程和基本应用是提高积分技术的基础。

第六章　常微分方程

常微分方程（Ordinary Differential Equations, ODE）是数学中描述变化率的重要工具，广泛应用于物理、工程、生物等领域。

常微分方程涉及未知函数及其导数的方程，其中未知函数只有一个自变量（通常是时间或空间变量）。例如，$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 就是一个一阶常微分方程。

阶数：方程中最高导数的阶数。一阶涉及一阶导数，二阶涉及二阶导数，以此类推。

线性 vs. 非线性：线性 ODE 的未知函数及其导数以线性形式出现（无乘积或幂次），如 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$。

齐次 vs. 非齐次：齐次方程的右边为 0，非齐次有非零项。

通解 vs. 特解：通解包含任意常数，特解通过初始条件确定。

6.1　一阶常微分方程

一阶 ODE 的形式为 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$。常见类型包括可分离、线性、齐次等。

可分离方程

如果方程可写成 $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$，则可分离。

求解步骤：

（1）分离变量

假设 $h(y) \neq 0$，将 $h(y)$ 除到等号左边，并将 dx 乘到等号右边，得到微分形式：

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$$

为了简化表示，我们通常用 $p(y) = \frac{1}{h(y)}$ 来表示左边只含 y 的部分。方程变为：

$$p(y)dy = g(x)dx$$

（2）积分

对等式的两边分别进行不定积分：

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx + C$$

其中 C 是任意常数。

(3) 得到通解

执行积分后，通常可以得到一个包含 x, y 和常数 C 的隐式解，即方程的通解。如果可能，也可以进一步解出 y 关于 x 的显式解。

例 6.1.1. 求解 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$（假设 $x \neq 0$, $y \neq 0$）。

分离变量得 $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$。

两边积分：

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\
&\ln|y| = \ln|x| + C \\
&e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+C} \\
&|y| = e^C \cdot |x| \\
&y = Ax \qquad (A = \pm e^C, \quad \text{其中 } A \text{ 为任意非零常数})
\end{aligned}$$

方程通解：$y(x) = Ax$。

这是一个比例增长模型，如人口增长率与人口成正比。

例 6.1.2. 求解微分方程：$\frac{dy}{dx} = x^2 y$。

分离变量：假设 $y \neq 0$，将 y 除到左边，dx 乘到右边：

$$\frac{1}{y}dy = x^2 dx$$

积分：对两边分别积分：

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x^2\,dx + C$$
$$\ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + C$$

得到通解（显式解）：将通解转化为显式形式（解出 y）：

$$|y| = e^{\frac{1}{3}x^3 + C} = e^C e^{\frac{1}{3}x^3}$$

令 $A = \pm e^C$（A 为任意非零常数），则：

$$y = Ae^{\frac{1}{3}x^3}$$

如果考虑到 $y=0$ 也是原方程的一个解（即 $y\equiv 0$），并且 $y\equiv 0$ 可以包含在上述通解中（令 $A=0$），所以最终的通解为：

$$y = Ae^{\frac{1}{3}x^3} \quad (\text{其中}A\text{ 是任意常数})$$

线性方程

一阶线性微分方程的标准形式可以表示为：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

其中：
y 是未知函数（因变量），它是 x 的函数。
$\frac{dy}{dx}$ 是 y 对 x 的一阶导数。
$P(x)$ 和 $Q(x)$ 是只与自变量 x 有关的已知函数（或常数）。

求解步骤：
求解一阶线性微分方程的标准方法是利用积分因子法。
（1）确定积分因子 $I(x)$
积分因子 $I(x)$ 定义为：

$$\begin{aligned} I(x) &= e^{\int P(x)\,dx} \\ I'(x) &= e^{\int P(x)\,dx} \cdot \left(\int P(x)\,dx\right)' = I(x)P(x) \end{aligned}$$

注意：在计算 $\int P(x)\,dx$ 时，可以不加任意常数 C，因为 C 最终会被消去。
（2）求解过程
将标准形式的微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 两边同乘以积分因子 $I(x)$：

$$I(x)\frac{dy}{dx} + I(x)P(x)y = I(x)Q(x)$$

关键在于，等式的左边正好是函数乘积 $I(x)y$ 的导数：

$$\frac{d}{dx}[I(x)y] = I(x)\frac{dy}{dx} + I(x)P(x)y$$

所以原方程变为：

$$\frac{d}{dx}[I(x)y] = I(x)Q(x)$$

（3）积分并得到通解
对上式两边关于 x 进行积分：

$$I(x)y = \int I(x)Q(x)\,dx + C$$

其中 C 是积分常数。
最后，解出 y，得到方程的通解：

$$y = \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)Q(x)\, dx + C \right]$$

例 6.1.3. 求解微分方程：

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$$

确定 $P(x)$ 和 $Q(x)$：$P(x) = \frac{2}{x}$，$Q(x) = x$
计算积分因子 $I(x)$：

$$\int P(x)\, dx = \int \frac{2}{x}\, dx = 2\ln|x| = \ln(x^2)$$
$$I(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\ln(x^2)} = x^2$$

应用公式或直接求解：将原方程乘以 $I(x) = x^2$：

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = x^3$$

左边可以写成 $\frac{d}{dx}(x^2y)$：

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = x^3$$

积分：

$$\int \frac{d}{dx}(x^2y)\, dx = \int x^3\, dx$$
$$x^2y = \frac{1}{4}x^4 + C$$

得到通解：

$$y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4}x^4 + C\right)$$
$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{C}{x^2}$$

一阶线性方程的求解公式是：

$$y = e^{-\int P(x)\, dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)\, dx}\, dx + C \right]$$

这个公式是通用且可靠的。

齐次方程

一个一阶常微分方程可以写成：

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

如果函数 $f(x,y)$ 是一个零次齐次函数，它总是可以写成只依赖于 $\frac{y}{x}$ 的某个函数 $g\left(\frac{y}{x}\right)$。

因此，一阶齐次微分方程的标准形式可以写成：

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

一阶齐次微分方程通过代换 $u = \frac{y}{x}$ 转化为可分离变量方程来求解。

求解步骤：

齐次微分方程的求解方法是利用一个巧妙的变量代换，将其转化为可分离变量方程来求解。

（1）变量代换

令一个新的变量 u 为 $\frac{y}{x}$：

$$u = \frac{y}{x} \quad \implies \quad y = ux$$

（2）转换微分

对 $y = ux$ 两边关于 x 求导（使用乘积求导法则）：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = \frac{du}{dx}x + u\frac{dx}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

（3）代入原方程

将 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{y}{x}$ 代入原方程 $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$：

$$x\frac{du}{dx} + u = g(u)$$

（4）转化为可分离变量方程

将 u 移到等式右边：

$$x\frac{du}{dx} = g(u) - u$$

假设 $g(u) - u \neq 0$，现在方程变成了关于 x 和 u 的可分离变量方程：

$$\frac{1}{g(u) - u}du = \frac{1}{x}dx$$

（5）积分求解

对两边积分：

$$\int \frac{1}{g(u) - u}du = \int \frac{1}{x}dx + C$$

解出关于 u 和 x 的关系。
(6) 还原变量
用 $u = \frac{y}{x}$ 替换回 u，得到原方程关于 y 和 x 的通解。

例 6.1.4. 求解微分方程：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + x^2}{xy}$$

判断齐次性：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy} + \frac{x^2}{xy} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

由于右边可以表示成 $\frac{y}{x}$ 的函数

$$g\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \frac{1}{\frac{y}{x}}$$

所以是齐次方程。
变量代换：令 $u = \frac{y}{x}$，则 $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$。
代入方程：

$$x\frac{du}{dx} + u = u + \frac{1}{u}$$

分离变量：u 被抵消：

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$$
$$udu = \frac{1}{x}\,dx$$

积分求解：

$$\int u\,du = \int \frac{1}{x}\,dx + C$$
$$\frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C$$

还原变量：用 $u = \frac{y}{x}$ 替换：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln|x| + C$$
$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$$
$$y^2 = 2x^2(\ln|x| + C)$$

例 6.1.5. 求解微分方程：$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$
我们可以使用变量替换法来求解。
变量替换

设 $u = x + y$。对 $u = x + y$ 关于 x 求导：

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x + y) = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dx}$$

即

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

因此，我们可以将 $\frac{dy}{dx}$ 表示为：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

代入原方程

将 $u = x + y$ 和 $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$ 代入原方程：

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u}$$

分离变量

将方程整理为可分离变量的形式：

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{u} = \frac{u + 1}{u}$$

分离变量，得到：

$$\frac{u}{u + 1}\, du = dx$$

积分

对等式两边进行积分：

$$\int \frac{u}{u + 1}\, du = \int dx$$

对于左边的积分，可以将 $\frac{u}{u+1}$ 改写为 $1 - \frac{1}{u+1}$：

$$\int \left(1 - \frac{1}{u + 1}\right) du = \int dx$$

进行积分：

$$\int 1\, du - \int \frac{1}{u + 1}\, du = \int dx$$

$$u - \ln|u + 1| = x + C$$

其中 C 是任意常数。

还原变量

最后，用 $x + y$ 替换 u：

$$(x + y) - \ln|x + y + 1| = x + C$$

两边消去 x：

$$y - \ln|x+y+1| = C$$

原微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$ 的通解为：

$$y - \ln|x+y+1| = C$$

这是一个隐式解。

6.2 二阶线性常微分方程

一个二阶线性常微分方程的一般形式可以表示为：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

其中：
x 是自变量（通常是时间 t 或空间坐标）。
y 是因变量，它是 x 的函数，即 $y = y(x)$。
y' 和 y'' 分别是 y 对 x 的一阶和二阶导数。
"二阶" 指的是方程中出现的最高阶导数是二阶导数 y''。
齐次 (Homogeneous): 如果 $R(x) = 0$，方程为齐次方程。
非齐次 (Non-homogeneous): 如果 $R(x) \neq 0$，方程为非齐次方程。

齐次线性常系数方程
方程的一般形式为：

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

其中 P 和 Q 都是常数。
求解这类方程的关键步骤是引入一个特征方程。我们假设方程有一个形式为 $y = e^{rx}$ 的解（其中 r 是待定常数），代入原方程：

$$y' = re^{rx} \qquad y'' = r^2e^{rx}$$

代入原方程：

$$r^2e^{rx} + P(re^{rx}) + Q(e^{rx}) = 0$$

因为 $e^{rx} \neq 0$，两边除以 e^{rx}，得到特征方程：

$$r^2 + Pr + Q = 0$$

解出这个一元二次代数方程的两个根 r_1 和 r_2，它们被称为特征根。根据 $\Delta = P^2 - 4Q$ 的符号，特征根有三种情况，从而决定了微分方程的通解形式。

三种通解情况
微分方程的通解 $y(x)$ 是由两个线性无关的基本解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的线性组合构成：$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$（其中 C_1, C_2 为任意常数）。
（1）两不相等实根 $(\Delta > 0)$
特征根：r_1 和 r_2 是两个不相等的实数。
基本解：$y_1(x) = e^{r_1x}$ 和 $y_2(x) = e^{r_2x}$
通解：

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

物理意义 (例如阻尼振动)：通常对应于过阻尼情况，系统衰减到平衡位置，不发生振荡。
（2）两相等实根（重根）$(\Delta = 0)$
特征根：$r_1 = r_2 = r$（二重实根）。
基本解：$y_1(x) = e^{rx}$ 和 $y_2(x) = xe^{rx}$
通解：

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{rx}$$

物理意义 (例如阻尼振动)：对应于临界阻尼情况，系统以最快速度衰减到平衡位置，不发生振荡。
（3）共轭复根 $(\Delta < 0)$
特征根：$r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta$ （其中 $\alpha = -P/2, \beta = \sqrt{4Q - P^2}/2, i^2 = -1$）。
基本解：$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ 和 $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
通解：

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$$

物理意义 (例如阻尼振动)：对应于欠阻尼情况，系统在衰减过程中会发生振荡。

例 6.2.1. 求解微分方程：$y'' + 4y' - 12y = 0$。
首先，根据微分方程写出特征方程 $r^2 + Pr + Q = 0$。
这里 $P = 4$，$Q = -12$，所以特征方程是：

$$r^2 + 4r - 12 = 0$$

使用因式分解或求根公式来求解 r：

$$(r + 6)(r - 2) = 0$$

得到两个特征根：

$$r_1 = -6 \quad 和 \quad r_2 = 2$$

由于我们得到了两不相等实根 (即情况 *1*), 通解的形式为 $y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$。最终通解为:

$$y(x) = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$$

例 6.2.2. 求解微分方程：$y'' - 6y' + 9y = 0$。
特征方程：$r^2 - 6r + 9 = 0$
特征根：$(r-3)^2 = 0 \implies r_1 = r_2 = 3$ *(*重根*)*
通解 *(*情况 *2)*:

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{3x}$$

例 6.2.3. 求解微分方程：$y'' + 2y' + 5y = 0$。
特征方程：$r^2 + 2r + 5 = 0$
特征根 *(*使用求根公式 $r = \frac{-P\pm\sqrt{P^2-4Q}}{2}$*)*:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} \\ &= -1 \pm 2i \end{aligned}$$

即 $\alpha = -1$ 和 $\beta = 2$。
通解 *(*情况 *3)*:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)) \\ y(x) &= e^{-x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)) \end{aligned}$$

如果需要确定通解中的常数 C_1 和 C_2，这通常需要初始条件或边界条件才能确定。

非齐次线性常系数方程

非齐次二阶常微分方程的求解是建立在齐次方程求解基础之上的，因为它引入了外部驱动项（非齐次项）。
非齐次线性常微分方程的一般形式为：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

其中 $r(x)$ 是非齐次项（或驱动项），且 $r(x) \neq 0$。

求解结构：通解的叠加原理
非齐次方程的通解 $y(x)$ 总是由两部分组成，即叠加原理：

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

（1）齐次通解 (y_h): 对应于 $r(x) = 0$ 时（即齐次方程）的通解。

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

这一部分包含了两个任意常数 C_1 和 C_2，我们已在之前的讨论中解决了常系数齐次方程的求解。
（2）特解 (y_p): 满足原非齐次方程的任意一个特定解。

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x)$$

这一部分不包含任意常数。
求解非齐次方程的关键和挑战在于找到这个特解 $y_p(x)$。

待定系数法求解特解 y_p
这种方法适用于非齐次项 $r(x)$ 具有特定形式（多项式、指数函数、正弦/余弦函数或它们的乘积）的情况。
核心思想：猜测 $y_p(x)$ 的形式应与 $r(x)$ 的形式相似。

$r(x)$ 的形式	$y_p(x)$的初始猜测形式
Ae^{ax}	Ke^{ax}
Ax^n	$K_nx^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_0$
$A\cos(\omega x)$ 或$B\sin(\omega x)$	$K_1\cos(\omega x) + K_2\sin(\omega x)$
乘积：例如xe^{ax}	乘积：例如$(K_1x + K_0)e^{ax}$

修正规则 (当猜测形式与 y_h 重复时):
如果 y_p 的猜测形式的任何一项与 y_h 中的某一项相同（即是齐次方程的解），则必须将猜测形式乘以 x^s，其中 s 是使新的 y_p 猜测形式中所有项都不是齐次方程解的最小非负整数（通常 $s = 1$ 或 $s = 2$）。

例 6.2.4. *求解微分方程：$y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$。*
第 1 步：求解齐次通解 (y_h)
齐次方程：$y'' - 3y' - 4y = 0$
特征方程：$r^2 - 3r - 4 = 0$
特征根：$(r - 4)(r + 1) = 0 \implies r_1 = 4, r_2 = -1$
齐次通解：

$$y_h(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$$

第 2 步：求解特解 (y_p)
非齐次项 $r(x) = 2\sin(x)$。根据表格，猜测特解形式为：

$$y_p = A\cos(x) + B\sin(x)$$

（注意：由于 y_h 中不包含 $\cos(x)$ 或 $\sin(x)$ 项，不需要进行修正。）
求导：

$$y_p' = -A\sin(x) + B\cos(x)$$
$$y_p'' = -A\cos(x) - B\sin(x)$$

代入原方程 $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x)$：

$$(-A\cos x - B\sin x) - 3(-A\sin x + B\cos x) - 4(A\cos x + B\sin x) = 2\sin x$$
$$(-A - 3B - 4A)\cos x + (-B + 3A - 4B)\sin x = 2\sin x$$
$$(-5A - 3B)\cos x + (3A - 5B)\sin x = 2\sin x$$

系数对比：
$\cos(x)$ 系数*:* $-5A - 3B = 0$
$\sin(x)$ 系数*:* $3A - 5B = 2$
解线性方程组：$A = \frac{3}{17}$，$B = -\frac{5}{17}$
特解：

$$y_p(x) = \frac{3}{17}\cos(x) - \frac{5}{17}\sin(x)$$

将 y_h 和 y_p 相加写出通解：

$$y(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} + \frac{3}{17}\cos(x) - \frac{5}{17}\sin(x)$$

当非齐次项 $r(x)$ 的形式与齐次通解 y_h 中的某一项线性相关时，直接代入 $r(x)$ 的形式作为特解猜测会导致矛盾（即代入后左侧为零），因此必须应用修正规则。

例 6.2.5. 求解微分方程：$y'' - 2y' - 3y = 5e^{3x}$。
第 1 步：求解齐次通解 (y_h)
齐次方程：$y'' - 2y' - 3y = 0$
特征方程：$r^2 - 2r - 3 = 0$
特征根：$(r-3)(r+1) = 0 \implies r_1 = 3, r_2 = -1$
齐次通解：

$$y_h(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$$

第 2 步：求解特解 (y_p)
非齐次项 $r(x) = 5e^{3x}$。
初始猜测：如果没有重合，我们会猜测 $y_p = Ae^{3x}$。
检查重合：但是，我们的 y_h 中包含 C_1e^{3x} 这一项。这意味着 e^{3x} 是齐次方程的解，代入原方程左侧将得到 0，无法等于 $5e^{3x}$。

应用修正规则：由于 e^{3x} 是齐次解，我们需要将初始猜测乘以 x，即：

$$y_p = Axe^{3x}$$

(因为 xe^{3x} 不是齐次方程的解。)
求导并代入：现在我们必须计算 y_p' 和 y_p''：

$$\begin{aligned}
y_p' &= A(1 \cdot e^{3x} + x \cdot 3e^{3x}) = Ae^{3x}(1+3x) \\
y_p'' &= A[3e^{3x}(1+3x) + e^{3x}(3)] = Ae^{3x}(3+9x+3) \\
&= Ae^{3x}(6+9x)
\end{aligned}$$

将 y_p, y_p', y_p'' 代入原方程 $y'' - 2y' - 3y = 5e^{3x}$:

$$\begin{aligned}
&Ae^{3x}(6+9x) - 2 \cdot Ae^{3x}(1+3x) - 3 \cdot Axe^{3x} = 5e^{3x} \\
&Ae^{3x}[(6+9x) - 2(1+3x) - 3x] = 5e^{3x} \\
&Ae^{3x}[6+9x-2-6x-3x] = 5e^{3x} \\
&4Ae^{3x} = 5e^{3x} \\
&A = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

特解：

$$y_p(x) = \frac{5}{4}xe^{3x}$$

将 y_h 和 y_p 相加写出通解：

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{5}{4}xe^{3x}$$

单重根重合：$r(x) = 5e^{3x}$ 与 y_h 中的 C_1e^{3x} 重合，则 $s = 1$，特解形式为 Axe^{3x}。
双重根(重根)重合:如果齐次方程的特征根是重根 $r = 3$,即 $y_h = C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$,而 $r(x) = 5e^{3x}$。此时 e^{3x} 和 xe^{3x} 都是齐次解，则需乘以 x^2，特解形式为 Ax^2e^{3x}。

第七章　定积分

定积分的起源可以追溯到古希腊的“穷竭法”，它主要用来解决求不规则图形面积的问题。

现代定积分的系统理论是由牛顿（Isaac Newton）和莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz）在 17 世纪独立发展的微积分学奠定的基础。19 世纪，黎曼（Bernhard Riemann）提出了黎曼积分的定义，使其更严谨。

格洛克提出区间微分的概念，并据此进行区间积分，计算在格洛克微空间进行，极限计算得出微积分的基本定理，在理解上更加简单直接。

7.1　区间微分

考虑函数 $F(x)$ 的点微分：$dF(x) = f(x)\,dx$，在几何上，左侧是线性的极限变化量，右侧是一个高度为 $f(x)$，宽度为无穷小的微矩形的面积，如图 7.1 所示。

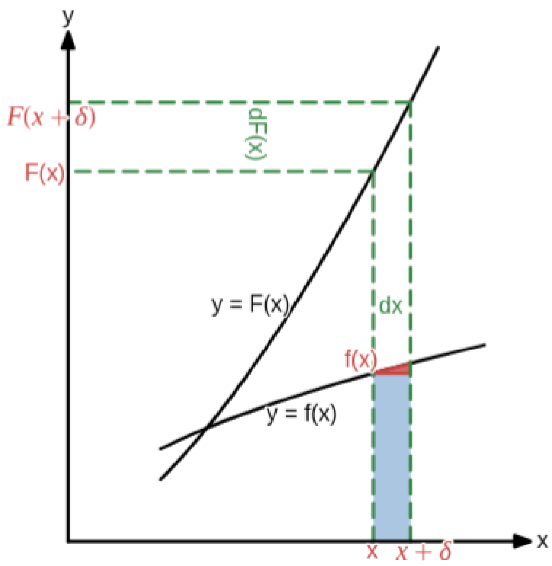


图 7.1: **微分的几何表示**

需要注意的是，微矩形的面积和对应点的 $F(x)$ 线性极限变化量精确相等。

接下来我们考虑图中函数 $f(x)$ 在区间 $[x, x+\delta]$ 投影到 x 轴（曲边梯形）的面积 S：

$$\begin{aligned}S &= f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(x+\delta) - f(x)] \cdot dx \\ &= f(x)\,dx + \frac{1}{2}\,df(x) \cdot dx \\ &= f(x)\,dx + \frac{1}{2}f'(x)\,d^2x\end{aligned}$$

很明显，在格洛克微空间，曲边和红色三角形斜边重合，如图 7.1 所示。$d^2x = \delta^2$，微三角形的面积是一个二阶无穷小，因此可以忽略，所以

$$S = f(x)\,dx = dF(x) = F(x+\delta) - F(x)$$

沿着这个思路，我们着手解决求不规则图形面积的问题。
考虑一个函数 $f(x)$，我们想要求曲线 $y = f(x)$、直线 $x = a$、$x = b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A。
计算这个面积的基本思路是：

（1）区间微分
分割：将区间 $[a, b]$ 分割成 ∞ 个小区间，区间宽度 $\delta = \frac{b-a}{\infty} = (b-a)\epsilon$。
向右微分：对于区间 $[a, b-\delta]$ 内任意分割点 x，微分形式：$dx = (x+\delta) - x = \delta$。
向左微分：对于区间 $[a+\delta, b]$ 内任意分割点 x，微分形式：$dx = x - (x-\delta) = \delta$。

（2）面积计算
向右微分 x 取值：

$$x = a, a+\delta, a+2\delta, \ldots, a+(\infty-2)\delta, a+(\infty-1)\delta$$

注意：$a+(\infty-1)\delta = b-\delta, a+(\infty-2)\delta = b-2\delta, \ldots$
向左微分 x 取值：

$$x = a+\delta, a+2\delta, \ldots, a+(\infty-2)\delta, a+(\infty-1)\delta, b$$

对应关系及面积计算见下表：

n值	x值	面积	$F(x)$线性变化量
0	$a+0\delta$	$f(a+0\delta)\,dx$	$F(a+1\delta) - F(a+0\delta)$
1	$a+1\delta$	$f(a+1\delta)\,dx$	$F(a+2\delta) - F(a+1\delta)$
2	$a+2\delta$	$f(a+2\delta)\,dx$	$F(a+3\delta) - F(a+2\delta)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty-2$	$a+(\infty-2)\delta$	$f(a+(\infty-2)\delta)\,dx$	$F(b-\delta) - F(b-2\delta)$
$\infty-1$	$a+(\infty-1)\delta$	$f(a+(\infty-1)\delta)\,dx$	$F(b) - F(b-\delta)$

a 和 b 分别是积分下限和积分上限，定义了积分的区间。

定积分的结果是一个确定的数值。

几何意义一般情况：定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 在几何上表示函数 $y = f(x)$ 的图像、直线 $x = a$、$x = b$ 和 x 轴所围成的有向面积。

在 x 轴上方的面积取正值。

在 x 轴下方的面积取负值。

第八章　积分和积分方法

8.1　导数的定义与几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义为：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数表示函数在某点变化率的精确度量。