微积分基础教程

(Calculus Fundamentals)

您的姓名

2025 年 11 月 20 日

版权信息

本书仅提供电子版，固定版式。

前言

自牛顿与莱布尼茨独立创设微积分（1660–1680 年代）以来，这门“变化的数学”已走过三个半世纪。三百年间，微积分从“计算变化率”演化为“描述一切可微结构”的元语言：数学不再只是工具，它已经从一门关于量的科学，演变为一门关于模式、结构和形式推理的宏大体系。

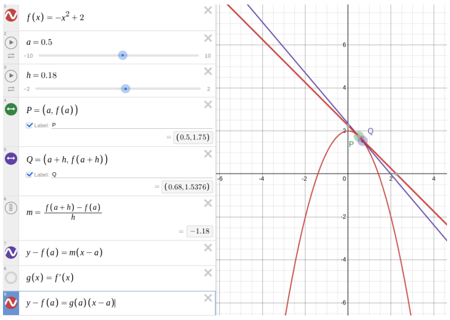

图 1: **另一张图片，位于右侧**

现代微积分以其严谨性而闻名，但其基石——极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义和由此构建的标准分析体系，正在向哲学化甚至宗教化方向发展：非直观性、逻辑严重形式化，过度僵化、挑战常识，和现实严重脱节正在演变成数学空想主义。

有鉴于此，格洛克以极度自下而上的方式重新思考整个微积分体系，成功建立可视化的格洛克代数空间，可视化范围从 $(-\infty^{\infty}, \infty^{\infty})$ 每一个数都可见，并将 ∞, ε 定义为未解析数，分别表示无穷大和无穷小，突然之间，一切都变得如此简单，并由此带来以下颠覆性的数学结果：

极限被重新定义，简单而直观，极限的计算只是简单的数学计算，洛必达法则不再必要，神秘性已全部消失。

开闭区间被重新描述，无穷小的数值化定义使开区间基本消失，在极限状态下都是闭区间。

连续性、间断点等相关理论已消失，基本只保留描述性概念和常识。

数列与极限的收敛相关内容是为了传统趋近极限的表述，而无穷大和无穷小不再是一个趋近的概念，这部分内容已经没有意义。因此只保留数列的通项公式并作为统一的函数对待。

导数不再是一个莱布尼兹定义的神秘符号 $\frac{d}{dx}F(x)$，现在只是一个重新定义的点 x 位置的点微分的商，即 $dF(x)/dx$，和小学的除法运算没有什么不同，更强调计算结果是瞬时变化率或几何图形上的斜率。

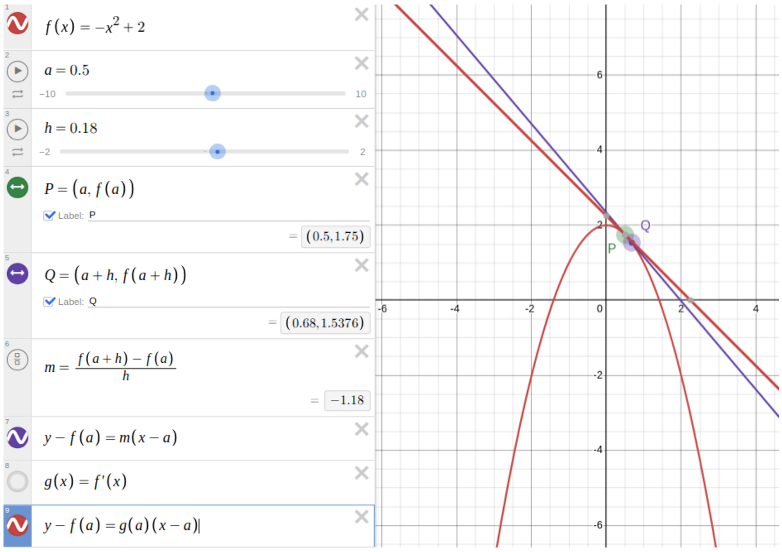

图 2: **示例插图：函数的几何图形展示**

积分被重新定义，删除积分定理等内容，重新定义积分为微分的逆运算。具体变化为点积分简称为积分取代不定积分，保留定积分并重新命名为区间积分对应区间微分。

自然常数 e 被重新定义为 $e = (1+\varepsilon)^{\infty}$，清晰而直观，并拓展为自然常数序列 $e_n = (1+n\varepsilon)^{\infty}$，使其不再具有神秘性。

定义和定理中的函数只进行最小化覆盖，即只包含一个定义域区间，消除传统定义和定理的繁杂限制条件，简单而清晰。

然而，更严肃而重要的思考是，我们为什么要接受数学基础/数理逻辑/集合论/数学分析这些所谓的数学家小圈子理论，无论对于普通人还是科研人员既看不懂也没有任何实用价值。回归常识和简单，我们真的需要数学家小圈子给我们解释为什么 $1+1=2$ 吗？

考德 · 格洛克

2025 年 11 月

重要提示

请确保您已安装 tcolorbox 宏包。

风险提示

不要在数学环境中使用
换行，请改用 align 或 split 环境。

目录

第一章　格洛克代数空间

本章首先从常识入手理解无穷大和无穷小，并得出基本的运算法则。在此基础上实现格洛克代数空间。最后给出无穷大和无穷小的正式定义和运算（规则）列表。

1.1　初步理解无穷大和无穷小

自微积分诞生以来，如何阐释、理解无穷大和无穷小以及由此引出的函数的极限一直是问题的核心，所以让我们以此为切入点，开始问题的探索。

格洛克：无穷大和无穷小的直观理解
无穷大和无穷小是具有特殊作用的两个数，分别用 ∞, ε 表示，对于 ∞，所有实数都是它的无穷小；对于 ε，所有实数都是它的无穷大。
由此产生如下运算法则：对于任意实数 C

$$\infty + C = \infty$$
$$\varepsilon + C = C$$

这是基于 ∞, ε 本身的直观语义得出的。更进一步，基于数的性质，我们得到：

$$C_1\infty + C_2 = C_1\left(\infty + \frac{C_2}{C_1}\right) = C_1\infty$$
$$C_1\varepsilon + C_2 = C_1\left(\varepsilon + \frac{C_2}{C_1}\right) = C_2$$
$$C_1\infty^2 + C_2\infty = \infty(C_1\infty + C_2) = C_1\infty^2$$
$$C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon = \varepsilon(C_1\varepsilon + C_2) = C_2\varepsilon$$

这和 200 多年来的传统解释完全不同，甚至相反。传统解释中并不认为无穷大和无穷小是数，因此不能直接进行数学运算，强调它是一个无限趋近的“动态”过程，因此理解起来要困难复杂得多。
格洛克的直观解释如果可以成立，会使微积分学变得简单而清晰，这就需要建立一个直观而简单的可视化代数模型来阐释其合理性。

1.2 格洛克代数空间

格洛克代数环轴

和传统的实数数轴不同，格洛克数轴是一个圆环，圆环长度固定为 ∞ ，并将其分割为相等的 ∞ 段，每段长度为 1, 将数轴逆时针依次标注 0, 1, 2, ...，顺时针标注为 -1, -2, ...，这样我们就得到了一个覆盖 $(-\infty, \infty)$ 数字空间的环形数轴。

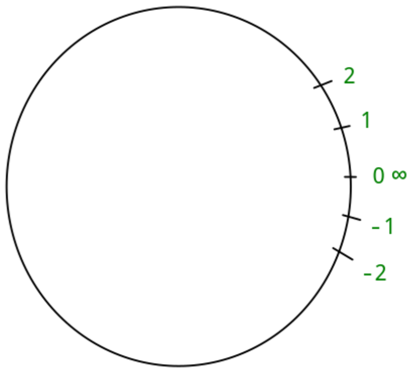

图 1.1: **格洛克代数环轴**

下图是格洛克环轴展开后的样子，在数轴的右端标注的是单位刻度的长度量级 $\infty^0 = 1$，因此称为格洛克 0 阶数轴。

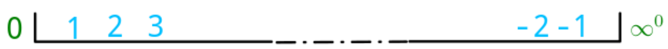

图 1.2: **格洛克 0 阶数轴**

需要注意的是，$\infty, -\infty$ 和原点 0 重合，这意味着数值大小达到 ∞ 时需要进位，以表示 ∞ 量级或更大的数。基于同样的原理，我们还需要量级更小的单位，即 ε，用来进位到格洛克 0 阶数轴。

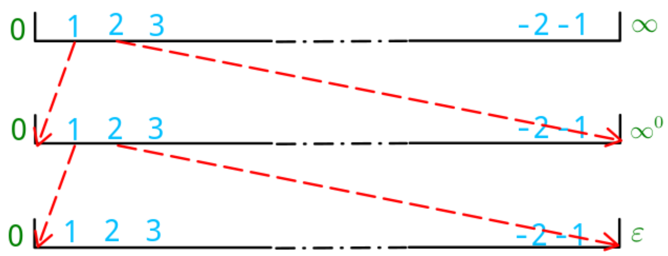

图 1.3: **宏空间和微空间**

∞ 以及更大的量级称为**格洛克宏空间**，对应的，ε 以及更小的量级称为**格洛克微空间**，图 1.3 表示了格洛克宏空间 1 轴，格洛克 0 轴和格洛克微空间 1 轴。

宏空间 1 轴覆盖区间 $[0,\infty^2)$，单位刻度大小为 1∞，将 1 单位刻度放大 ∞ 倍，得到格洛克 0 轴。
格洛克 0 轴覆盖区间 $[0,\infty)$，单位刻度大小为 1，将 1 单位刻度放大 ∞ 倍，得到微空间 1 轴。
微空间 1 轴覆盖区间 $[0,1)$，单位刻度大小为 $\frac{1}{\infty}$，即 1ε。
将宏空间和微空间以同样的方式分别向上和向下延展，形成完整的格洛克代数空间。

宏空间和微空间

这是一个相对的概念，如 ∞^{n+1} 是 ∞^n 的宏空间，∞^n 是 ∞^{n+1} 的微空间；ε^n 是 ε^{n+1} 的宏空间，ε^{n+1} 是 ε^n 的微空间。
宏空间是微空间的无穷大，微空间是宏空间的无穷小。

格洛克代数空间
完整格洛克代数空间如图 1.4 所示。

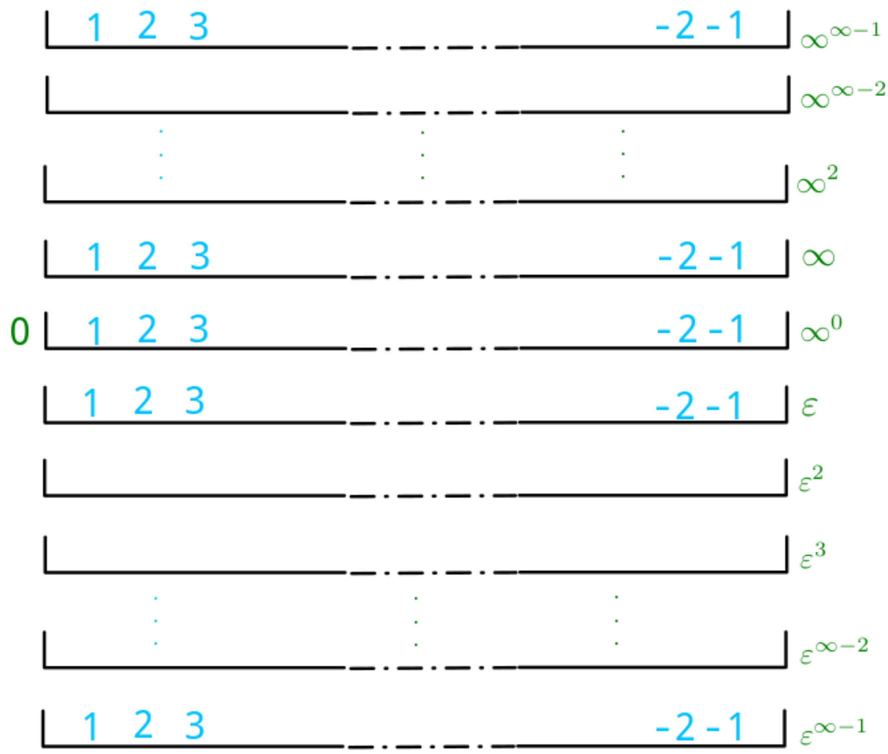

图 1.4: **格洛克代数空间**

由于指数进位回 0,∞^∞ 和 ε^∞ 回归原点 0, 图中未予显示。
格洛克代数空间最大覆盖范围 $[0,\infty^\infty)$，最小单位刻度 $1\varepsilon^{\infty-1}$，可以满足任何数值的可视化标注。

需要注意的是，由于所有实数都是 ∞ 的无穷小，正数 C 只能标注在任一轴的最左侧的相对无穷小区间；同样的，负数 -C 只能标注在最右侧的相对无穷小区间。

例 1.2.1. 在格洛克代数空间上标注：
(1) $a = 0.5\infty + 1$, (2) $b = 2\infty - 2$, (3) $c = a + b$。

解：

$$\begin{aligned} c &= a + b \\ &= (0.5\infty + 1) + (2\infty - 2) \\ &= (0.5\infty + 2\infty) + (1 - 2) \\ &= 2.5\infty - 1 \end{aligned}$$

a，b，c 如图 *1.5* 所示。

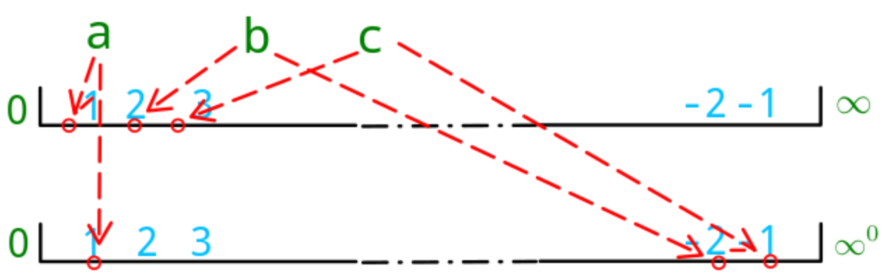

图 1.5: **数值标注**

1.3 无穷大和无穷小的定义

经过前面两节关于无穷大和无穷小的讨论和格洛克代数空间的形成，下面给出无穷大和无穷小的正式定义。

定义 1.1. 无穷大和无穷小
设 ∞, ε 是未解析数（*unsolved number*），∞ 是正整数，表示无穷大，ε 表示无穷小。

性质列表
(*1*) ∞, ε 互为倒数，即 $\infty \cdot \varepsilon = 1$ 。
(*2*) 对于任意实数 C，整数 n，$\infty^{n+1} + C\infty^n = \infty^{n+1}$，$\varepsilon^n + C\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n$。
(*3*) ε 是最小的正数，$-\varepsilon$ 是最大的负数，$0^+ = \varepsilon$，$0^- = -\varepsilon$。
(*4*) 对于任意实数 C，$C^+ = C + \varepsilon$，$C^- = C - \varepsilon$。
(*5*) 对于 $n > 1$ 有，$\log_n \infty < \sqrt[n]{\infty} < \infty < \infty^n < n^\infty < \infty!$。

性质（1）对无穷大和无穷小的关系进行了标准化，使得数学属性更加清晰，高阶无穷大和无穷小的比较和转换变成了数学计算，而不是逻辑分析。

对于性质（2），当 $n=0$ 时有

$$\infty + C = \infty \tag{1.1}$$

$$1 + C\varepsilon = 1 \tag{1.2}$$

将（1.1）两边同时减去 ∞，将（1.2）两边同时减去 1, 得到

$$C = 0 \tag{1.3}$$

$$C\varepsilon = 0 \tag{1.4}$$

（1.3）说明在格洛克宏空间 1 轴（1 阶无穷大）的视角来看，无论 C 多么大，都是 ∞ 的无穷小，格洛克宏空间 1 轴上的值都为 0；（1.4）说明了在格洛克 0 轴（实数轴）的视角来看，无论 n 多么大，$n\varepsilon$ 都是无穷小，在格洛克 0 轴上的值都为 0。这也是后续章节进行极限计算时的正确结果。

性质（2）本质上是将本章第一节关于无穷大和无穷小的运算规则进行了合并。

性质（3）可以合并到性质（4），分开是为了突出 0 的特殊性。C^+ 表示实数 C 右侧最靠近它的数，C^- 表示 C 左侧最靠近它的数。这可以用格洛克微空间展开的术语进行理解。

格洛克微空间展开

对于展开点 C，取单位长度区间 $[C, C+1]$ 并放大 ∞ 倍数，当我们将 C 点与微空间 1 轴的 0 对齐，将会“看到”最靠近 C 右侧的坐标刻度是 1ε。类似地，取单位长度区间 $[C-1, C]$ 并放大 ∞ 倍数，将 C-1 点与微空间 1 轴的 0 对齐，将会“看到”最靠近 C 左侧的坐标刻度是 -1ε。如图 1.6 所示。

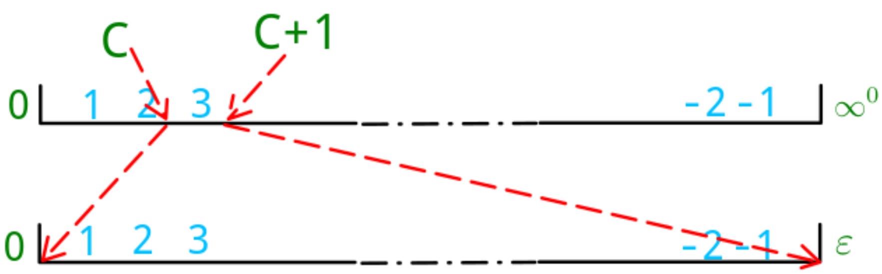

图 1.6: **格洛克微空间展开**

事实上，我们也可以指定 $C^+ = C + n\varepsilon$, $C^- = C - n\varepsilon$，结果也是正确的。从格洛克 0 轴（或实数轴）的角度来看，无论我们指定靠近 C 的距离是多么小，无论是百万分之一还是千万分之一，都是 $n\varepsilon$ 的无穷大。

性质（5）明确了不等式的各项位于不同阶的格洛克宏空间，不等式的左侧都是右侧的无穷小，体现了如下运算规则：

$$\begin{aligned}
&\log_n \infty + \sqrt[n]{\infty} + \infty + \infty^n + n^\infty + \infty! \\
&= \sqrt[n]{\infty} + \infty + \infty^n + n^\infty + \infty! \\
&= \infty + \infty^n + n^\infty + \infty! \\
&= \infty^n + n^\infty + \infty! \\
&= n^\infty + \infty! \\
&= \infty!
\end{aligned}$$

虽然不等式的每一项都是无穷大，但它们的增长速度比值都达到了无穷大的量级，这可以由函数图形进行直观的观察, 这里略去繁琐的证明过程。

例 1.3.1. 数列用符号 $\{f(n)\}$ 表示, 其中 $f(n)$ 是通项公式。如果 $n \to \infty$, $f(n) = C$ 那么数列是收敛的；如果 $n \to \infty$, $f(n) = \infty$ 那么数列是发散的；否则数列既不收敛也不发散。
判断下列数列的收敛性：
(1) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$ (2) $\left\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\right\}$ (3) $\left\{n - \frac{1}{n}\right\}$

解：
(1)

$$\begin{aligned}
f(n) &= (-1)^n \frac{1}{n} \\
f(\infty) &= (-1)^\infty \frac{1}{\infty} \\
f(\infty) &= (-1)^\infty \varepsilon
\end{aligned}$$

$f(\infty) = \varepsilon = 0$，如果 ∞ 为偶数；$f(\infty) = -\varepsilon = 0$，如果 ∞ 为奇数。
综合奇偶两种情况，$f(\infty) = 0$，数列收敛。
(2)

$$\begin{aligned}
f(n) &= (-1)^n \frac{n+1}{n} \\
f(\infty) &= (-1)^\infty \frac{\infty + 1}{\infty} \\
f(\infty) &= (-1)^\infty \frac{\infty}{\infty} \\
f(\infty) &= (-1)^\infty
\end{aligned}$$

数列在 *1* 和 *-1* 之间来回振荡，既不收敛也不发散。

(3)

$$
\begin{aligned}
f(n) &= n - \frac{1}{n} \\
f(\infty) &= \infty - \frac{1}{\infty} \\
f(\infty) &= \infty - \varepsilon \\
f(\infty) &= \infty
\end{aligned}
$$

数列发散。

通过上面的例子可以看出，关于无穷大和无穷小的计算完全符合数学运算法则，比传统的基于数学分析的形式化方法简单而清晰。

格洛克观点

格洛克代数空间的建立可以使我们抛弃传统的基于语言的数学逻辑，转而专注于简单精确的数学计算。后续章节我们将会看到微积分学是多么的简单，大量晦涩的定义、定理将被抛弃，一切变得如此不可思议。

例 1.3.2. 求函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$ 的定义域。

1.4 极限的概念

定义 1.2 (极限的 $\epsilon - \delta$ 定义). 对于函数 $f(x)$，如果存在实数 L，使得对任意给定的 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $|f(x) - L| < \epsilon$，则称 L 为函数 $f(x)$ 在点 a 处的极限，记为 $\lim_{x\to a} f(x) = L$。
设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义。如果存在一个实数 L，使得：
对于任意给定的正数 ϵ *(*无论它多么小*)*，总存在一个正数 δ *(*它通常依赖于 ϵ*)*，使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - L| < \epsilon$ 成立。
则称 L 是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

定理 1.1 (极限的四则运算). 设 $\lim_{x\to a} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a} g(x)$ 都存在，则有：

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \quad 其中 \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

第二章　导数与微分

2.1　导数的定义与几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义为：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数表示函数在某点变化率的精确度量。