

微积分基础教程

(Calculus Fundamentals)

您的姓名

2025 年 11 月 19 日

版权信息

本书仅提供电子版，固定版式。

版权所有 © 2025 by 您的姓名。保留一切权利。

前言

自牛顿与莱布尼茨独立创设微积分(1660–1680年代)以来,这门“变化的数学”已走过三个半世纪。三百年间,微积分从“计算变化率”演化为“描述一切可微结构”的元语言:数学不再只是工具,它已经从一门关于量的科学,演变为一门关于模式、结构和形式推理的宏大体系。

现代微积分以其严谨性而闻名,但其基石——极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义和由此构建的标准分析体系,正在向哲学化甚至宗教化方向发展:非直观性、逻辑严重形式化,过度僵化、挑战常识,和现实严重脱节正在演变成数学空想主义。

有鉴于此,格洛克以极度自下而上的方式重新思考整个微积分体系,成功建立可视化的格洛克代数空间,可视化范围从 $(-\infty^\infty, \infty^\infty)$ 每一个数都可见,并将 ∞, ε 定义为未解析数,分别表示无穷大和无穷小,突然之间,一切都变得如此简单,并由此带来以下颠覆性的数学结果:

极限被重新定义,简单而直观,极限的计算只是简单的数学计算,洛必达法则不再必要,神秘性已全部消失。

开闭区间被重新描述,无穷小的数值化定义使开区间基本消失,在极限状态下都是闭区间。

连续性、间断点等相关理论已消失,基本只保留描述性概念和常识。

数列与极限的收敛相关内容是为了传统趋近极限的表述,而无穷大和无穷小不再是一个趋近的概念,这部分内容已经没有意义。因此只保留数列的通项公式并作为统一的函数对待。

导数不再是一个莱布尼兹定义的神秘符号 $\frac{d}{dx}F(x)$,现在只是一个重新定义的点 x 位置的点微分的商,即 $dF(x)/dx$,和小学的除法运算没有什么不同,更强调计算结果是瞬时变化率或几何图形上的斜率。



图 1: 另一张图片, 位于右侧



图 2: 示例插图: 函数的几何图形展示

积分被重新定义, 删除积分定理等内容, 重新定义积分为微分的逆运算。具体变化为点积分简称为积分取代不定积分, 保留定积分并重新命名为区间积分对应区间微分。

自然常数 e 被重新定义为 $e = (1 + \varepsilon)^\infty$, 清晰而直观, 并拓展为自然常数序列 $e_n = (1 + n\varepsilon)^\infty$, 使其不再具有神秘性。

定义和定理中的函数只进行最小化覆盖, 即只包含一个定义域区间, 消除传统定义和定理的繁杂限制条件, 简单而清晰。

然而, 更严肃而重要的思考是, 我们为什么要接受数学基础/数理逻辑/集合论/数学分析这些所谓的数学家小圈子理论, 无论对于普通人还是科研人员既看不懂也没有任何实用价值。回归常识和简单, 我们真的需要数学家小圈子给我们解释为什么 $1 + 1 = 2$ 吗?

考德·格洛克

2025 年 11 月

重要提示

请确保您已安装 tcolorbox 宏包。

风险提示

不要在数学环境中使用
换行，请改用 align 或 split 环境。

目录

第一章 格洛克代数空间	1
1.1 初步理解无穷大和无穷小	1
1.2 格洛克代数空间	2
1.3 无穷大和无穷小的定义	4
1.4 极限的概念	6
第二章 导数与微分	7
2.1 导数的定义与几何意义	7

第一章 格洛克代数空间

本章首先从常识入手理解无穷大和无穷小，并得出基本的运算法则。在此基础上实现格洛克代数空间。最后给出无穷大和无穷小的正式定义和运算（规则）列表。

1.1 初步理解无穷大和无穷小

自微积分诞生以来，如何阐释、理解无穷大和无穷小以及由此引出的函数的极限一直是问题的核心，所以让我们以此为切入点，开始问题的探索。

格洛克：无穷大和无穷小的直观理解

无穷大和无穷小是具有特殊作用的两个数，分别用 ∞, ε 表示，对于 ∞ ，所有实数都是它的无穷小；对于 ε ，所有实数都是它的无穷大。

由此产生如下运算法则：对于任意实数 C

$$\infty + C = \infty$$

$$\varepsilon + C = C$$

这是基于 ∞, ε 本身的直观语义得出的。更进一步，基于数的性质，我们得到：

$$C_1\infty + C_2 = C_1 \left(\infty + \frac{C_2}{C_1} \right) = C_1\infty$$

$$C_1\varepsilon + C_2 = C_1 \left(\varepsilon + \frac{C_2}{C_1} \right) = C_2$$

$$C_1\infty^2 + C_2\infty = \infty(C_1\infty + C_2) = C_1\infty^2$$

$$C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon = \varepsilon(C_1\varepsilon + C_2) = C_2\varepsilon$$

这和 200 多年来的传统解释完全不同，甚至相反。传统解释中并不认为无穷大和无穷小是数，因此不能直接进行数学运算，强调它是一个无限趋近的“动态”过程，因此理解起来要困难复杂得多。

格洛克的直观解释如果可以成立，会使微积分学变得简单而清晰，这就需要建立一个直观而简单的可视化代数模型来阐释其合理性。

1.2 格洛克代数空间

格洛克代数环轴

和传统的实数数轴不同，格洛克数轴是一个圆环，圆环长度固定为 ∞ ，并将其分割为相等的 ∞ 段，每段长度为 1，将数轴逆时针依次标注 $0, 1, 2, \dots$ ，顺时针标注为 $-1, -2, \dots$ ，这样我们就得到了一个覆盖 $(-\infty, \infty)$ 数字空间的环形数轴。

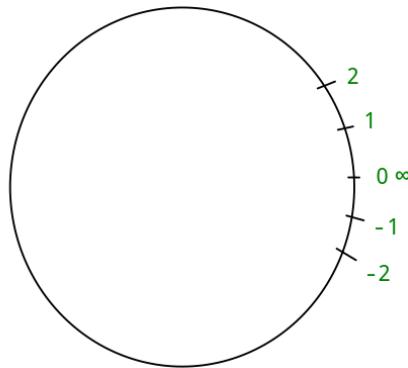


图 1.1: 格洛克代数环轴

下图是格洛克环轴展开后的样子，在数轴的右端标注的是单位刻度的长度量级 $\infty^0 = 1$ ，因此称为格洛克 0 阶数轴。

$$0 \boxed{1 \ 2 \ 3} \dots \boxed{-2 \ -1} \ \infty^0$$

图 1.2: 格洛克 0 阶数轴

需要注意的是， $\infty, -\infty$ 和原点 0 重合，这意味着数值大小达到 ∞ 时需要进位，以表示 ∞ 量级或更大的数。基于同样的原理，我们还需要量级更小的单位，即 ε ，用来进位到格洛克 0 阶数轴。

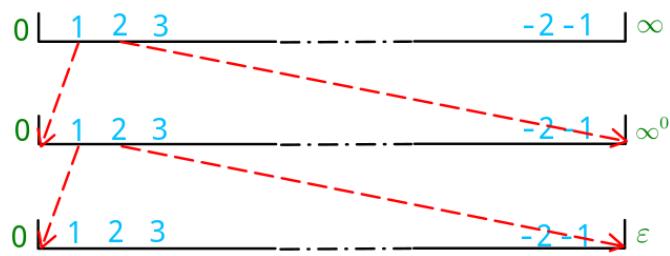


图 1.3: 宏空间和微空间

∞ 以及更大的量级称为格洛克宏空间，对应的， ε 以及更小的量级称为格洛克微空间，图 1.3 表示了格洛克宏空间 1 轴，格洛克 0 轴和格洛克微空间 1 轴。

宏空间 1 轴覆盖区间 $[0, \infty^2)$, 单位刻度大小为 1∞ , 将 1 单位刻度放大 ∞ 倍, 得到格洛克 0 轴。

格洛克 0 轴覆盖区间 $[0, \infty)$, 单位刻度大小为 1, 将 1 单位刻度放大 ∞ 倍, 得到微空间 1 轴。

微空间 1 轴覆盖区间 $[0, 1)$, 单位刻度大小为 $\frac{1}{\infty}$, 即 1ε 。

将宏空间和微空间以同样的方式分别向上和向下延展, 形成完整的格洛克代数空间。

宏空间和微空间

这是一个相对的概念, 如 ∞^{n+1} 是 ∞^n 的宏空间, ∞^n 是 ∞^{n+1} 的微空间; ε^n 是 ε^{n+1} 的宏空间, ε^{n+1} 是 ε^n 的微空间。

宏空间是微空间的无穷大, 微空间是宏空间的无穷小。

格洛克代数空间

完整格洛克代数空间如图 1.4 所示。

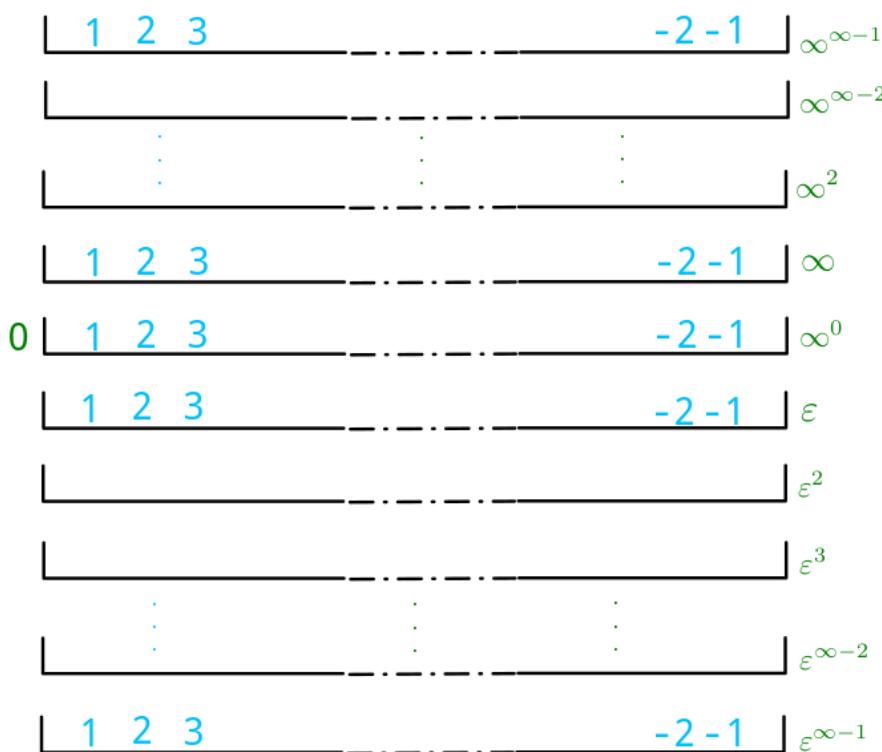


图 1.4: 格洛克代数空间

由于指数进位回 $0, \infty^\infty$ 和 ε^∞ 回归原点 0, 图中未予显示。

格洛克代数空间最大覆盖范围 $[0, \infty^\infty)$, 最小单位刻度 $1\varepsilon^{\infty-1}$, 可以满足任何数值的可视化标注。

需要注意的是，由于所有实数都是 ∞ 的无穷小，正数 C 只能标注在任一轴的最左侧的相对无穷小区间；同样的，负数 $-C$ 只能标注在最右侧的相对无穷小区间。

例 1.2.1. 在格洛克代数空间上标注：

$$(1) a = 0.5\infty + 1, \quad (2) b = 2\infty - 2, \quad (3) c = a + b.$$

解：

$$\begin{aligned} c &= a + b \\ &= (0.5\infty + 1) + (2\infty - 2) \\ &= (0.5\infty + 2\infty) + (1 - 2) \\ &= 2.5\infty - 1 \end{aligned}$$

a, b, c 如图 1.5 所示。

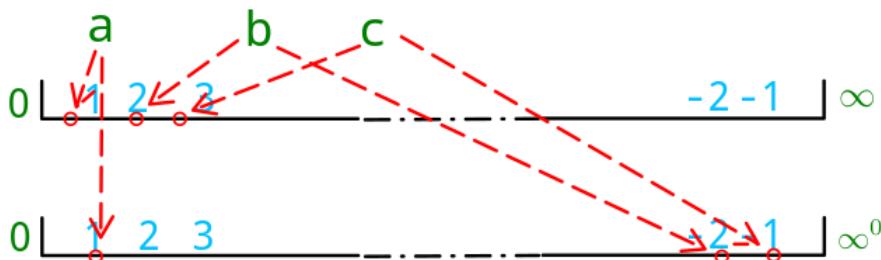


图 1.5：数值标注

1.3 无穷大和无穷小的定义

经过前面两节关于无穷大和无穷小的讨论和格洛克代数空间的形成，下面给出无穷大和无穷小的正式定义。

定义 1.1. 无穷大和无穷小

设 ∞, ε 是未解析数 (*unsolved number*)， ∞ 是正整数，表示无穷大， ε 表示无穷小。

性质列表

- (1) ∞, ε 互为倒数，即 $\infty \cdot \varepsilon = 1$ 。
- (2) 对于任意实数 C ，整数 n ， $\infty^{n+1} + C\infty^n = \infty^{n+1}$ ， $\varepsilon^n + C\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n$ 。
- (3) ε 是最小的正数， $-\varepsilon$ 是最大的负数， $0^+ = \varepsilon$ ， $0^- = -\varepsilon$ 。
- (4) 对于任意实数 C ， $C^+ = C + \varepsilon$ ， $C^- = C - \varepsilon$ 。
- (5) 对于 $n > 1$ 有， $\log_n \infty < \sqrt[n]{\infty} < \infty < \infty^n < n^\infty < \infty!$ 。

性质（1）对无穷大和无穷小的关系进行了标准化，使得数学属性更加清晰，高阶无穷大和无穷小的比较和转换变成了数学计算，而不是逻辑分析。

对于性质（2），当 $n = 0$ 时有

$$\infty + C = \infty, \quad 1 + C\varepsilon = 1$$

本质上是将本章第一节关于无穷大和无穷小的运算规则进行了合并。

性质（3）可以合并到性质（4），分开是为了突出 0 的特殊性。 C^+ 表示实数 C 右侧最靠近它的数， C^- 表示 C 左侧最靠近它的数。这可以用格洛克微空间展开的术语进行理解。

格洛克微空间展开

对于展开点 C ，取单位长度区间 $[C, C + 1]$ 并放大 ∞ 倍数，当我们把 C 点与微空间 1 轴的 0 对齐，将会“看到”最靠近 C 右侧的坐标刻度是 1ε 。类似地，取单位长度区间 $[C - 1, C]$ 并放大 ∞ 倍数，将 $C - 1$ 点与微空间 1 轴的 0 对齐，将会“看到”最靠近 C 左侧的坐标刻度是 -1ε 。如图 1.6 所示。

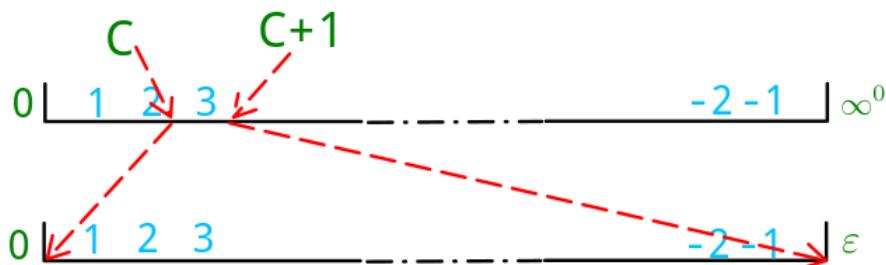


图 1.6: 格洛克微空间展开

事实上，我们也可以指定 $C^+ = C + n\varepsilon$, $C^- = C - n\varepsilon$ ，结果也是正确的。从格洛克 0 轴（或实数轴）的角度来看，无论我们指定靠近 C 的距离是多么小，无论是百万分之一还是千万分之一，都是 $n\varepsilon$ 的无穷大。

格洛克观点

格洛克代数空间的建立可以使我们抛弃传统的基于语言的数学逻辑，转而专注于简单精确的数学计算。后续章节我们将会看到微积分学是多么的简单，大量晦涩的定义、定理将被抛弃，一切变得如此不可思议。

例 1.3.1. 求函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$ 的定义域。

1.4 极限的概念

定义 1.2 (极限的 $\epsilon - \delta$ 定义). 对于函数 $f(x)$, 如果存在实数 L , 使得对任意给定的 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - L| < \epsilon$, 则称 L 为函数 $f(x)$ 在点 a 处的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义。如果存在一个实数 L , 使得: 对于任意给定的正数 ϵ (无论它多么小), 总存在一个正数 δ (它通常依赖于 ϵ), 使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $|f(x) - L| < \epsilon$ 成立。
则称 L 是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

定理 1.1 (极限的四则运算). 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 都存在, 则有:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{其中 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

第二章 导数与微分

2.1 导数的定义与几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义为：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数表示函数在某点变化率的精确度量。