

微积分基础教程

(Calculus Fundamentals)

您的姓名

2025 年 11 月 30 日

版权信息

本书仅提供电子版，固定版式。

版权所有 © 2025 by 您的姓名。保留一切权利。

前言

自牛顿与莱布尼茨独立创设微积分(1660–1680年代)以来,这门“变化的数学”已走过三个半世纪。三百年间,微积分从“计算变化率”演化为“描述一切可微结构”的元语言:数学不再只是工具,它已经从一门关于量的科学,演变为一门关于模式、结构和形式推理的宏大体系。

现代微积分以其严谨性而闻名,但其基石——极限的 $\epsilon - \delta$ 定义和由此构建的标准分析体系,正在向哲学化甚至宗教化方向发展:非直观性、逻辑严重形式化,过度僵化、挑战常识,和现实严重脱节正在演变成数学空想主义。

有鉴于此,格洛克以极度自下而上的方式重新思考整个微积分体系,成功建立可视化的格洛克代数空间,可视化范围从 $(-\infty^\infty, \infty^\infty)$ 每一个数都可见,并将 ∞, ϵ 定义为未解析数,分别表示无穷大和无穷小,突然之间,一切都变得如此简单,并由此带来以下颠覆性的数学结果:

极限被重新定义,简单而直观,极限的计算只是简单的数学计算,洛必达法则不再必要,神秘性已全部消失。

开闭区间被重新描述,无穷小的数值化定义使开区间基本消失,在极限状态下都是闭区间。

连续性、间断点等相关理论已消失,基本只保留描述性概念和常识。

数列与极限的收敛相关内容是为了传统趋近极限的表述,而无穷大和无穷小不再是一个趋近的概念,这部分内容已经没有意义。因此只保留数列的通项公式并作为统一的函数对待。

导数不再是一个莱布尼兹定义的神秘符号 $\frac{d}{dx}F(x)$,现在只是一个重新定义的点 x 位置的点微分的商,即 $dF(x)/dx$,和小学的除法运算没有什么不同,更强调计算结果是瞬时变化率或几何图形上的斜率。



图 1: 另一张图片, 位于右侧



图 2: 示例插图: 函数的几何图形展示

积分被重新定义, 删除积分定理等内容, 重新定义积分为微分的逆运算。具体变化为点积分简称为积分取代不定积分, 保留定积分并重新命名为区间积分对应区间微分。

自然常数 e 被重新定义为 $e = (1 + \epsilon)^\infty$, 清晰而直观, 并拓展为自然常数序列 $e_n = (1 + n\epsilon)^\infty$, 使其不再具有神秘性。

定义和定理中的函数只进行最小化覆盖, 即只包含一个定义域区间, 消除传统定义和定理的繁杂限制条件, 简单而清晰。

然而, 更严肃而重要的思考是, 我们为什么要接受数学基础/数理逻辑/集合论/数学分析这些所谓的数学家小圈子理论, 无论对于普通人还是科研人员既看不懂也没有任何实用价值。回归常识和简单, 我们真的需要数学家小圈子给我们解释为什么 $1 + 1 = 2$ 吗?

考德 · 格洛克

2025 年 11 月

重要提示

请确保您已安装 tcolorbox 宏包。

风险提示

不要在数学环境中使用
换行，请改用 align 或 split 环境。

目录

第一章 格洛克代数空间	1
1.1 初步理解无穷大和无穷小	1
1.2 格洛克代数空间	2
1.3 无穷大和无穷小的定义	4
1.4 极限的概念	8
第二章 函数和极限	9
2.1 理解函数	9
2.2 函数的极限	11
2.3 自然常数和自然对数	14
2.4 泰勒展开在极限计算中的应用	17
第三章 点微分和导数	19
3.1 瞬时变化量与点微分	19
第四章 积分和积分方法	21
4.1 导数的定义与几何意义	21

第一章 格洛克代数空间

本章首先从常识入手理解无穷大和无穷小，并得出基本的运算法则。在此基础上实现格洛克代数空间。最后给出无穷大和无穷小的正式定义和运算（规则）列表。

1.1 初步理解无穷大和无穷小

自微积分诞生以来，如何阐释、理解无穷大和无穷小以及由此引出的函数的极限一直是问题的核心，所以让我们以此为切入点，开始问题的探索。

格洛克：无穷大和无穷小的直观理解

无穷大和无穷小是具有特殊作用的两个数，分别用 ∞, ϵ 表示，对于 ∞ ，所有实数都是它的无穷小；对于 ϵ ，所有实数都是它的无穷大。

由此产生如下运算法则：对于任意实数 C

$$\infty + C = \infty$$

$$\epsilon + C = C$$

这是基于 ∞, ϵ 本身的直观语义得出的。更进一步，基于数的性质，我们得到：

$$C_1\infty + C_2 = C_1 \left(\infty + \frac{C_2}{C_1} \right) = C_1\infty$$

$$C_1\epsilon + C_2 = C_1 \left(\epsilon + \frac{C_2}{C_1} \right) = C_2$$

$$C_1\infty^2 + C_2\infty = \infty(C_1\infty + C_2) = C_1\infty^2$$

$$C_1\epsilon^2 + C_2\epsilon = \epsilon(C_1\epsilon + C_2) = C_2\epsilon$$

这和 200 多年来的传统解释完全不同，甚至相反。传统解释中并不认为无穷大和无穷小是数，因此不能直接进行数学运算，强调它是一个无限趋近的“动态”过程，因此理解起来要困难复杂得多。

格洛克的直观解释如果可以成立，会使微积分学变得简单而清晰，这就需要建立一个直观而简单的可视化代数模型来阐释其合理性。

1.2 格洛克代数空间

格洛克代数环轴

和传统的实数数轴不同，格洛克数轴是一个圆环，圆环长度固定为 ∞ ，并将其分割为相等的 ∞ 段，每段长度为 1，将数轴逆时针依次标注 $0, 1, 2, \dots$ ，顺时针标注为 $-1, -2, \dots$ ，这样我们就得到了一个覆盖 $(-\infty, \infty)$ 数字空间的环形数轴。



图 1.1: 格洛克代数环轴

下图是格洛克环轴展开后的样子，在数轴的右端标注的是单位刻度的长度量级 $\infty^0 = 1$ ，因此称为格洛克 0 阶数轴。

$$0 \boxed{1 \ 2 \ 3} \dots \boxed{-2 \ -1} \ \infty^0$$

图 1.2: 格洛克 0 阶数轴

需要注意的是， $\infty, -\infty$ 和原点 0 重合，这意味着数值大小达到 ∞ 时需要进位，以表示 ∞ 量级或更大的数。基于同样的原理，我们还需要量级更小的单位，即 ϵ ，用来进位到格洛克 0 阶数轴。



图 1.3: 宏空间和微空间

∞ 以及更大的量级称为格洛克宏空间，对应的， ϵ 以及更小的量级称为格洛克微空间，图 1.3 表示了格洛克宏空间 1 轴，格洛克 0 轴和格洛克微空间 1 轴。

宏空间 1 轴覆盖区间 $[0, \infty^2)$, 单位刻度大小为 1∞ , 将 1 单位刻度放大 ∞ 倍, 得到格洛克 0 轴。

格洛克 0 轴覆盖区间 $[0, \infty)$, 单位刻度大小为 1, 将 1 单位刻度放大 ∞ 倍, 得到微空间 1 轴。

微空间 1 轴覆盖区间 $[0, 1)$, 单位刻度大小为 $\frac{1}{\infty}$, 即 1ϵ 。

将宏空间和微空间以同样的方式分别向上和向下延展, 形成完整的格洛克代数空间。

宏空间和微空间

这是一个相对的概念, 如 ∞^{n+1} 是 ∞^n 的宏空间, ∞^n 是 ∞^{n+1} 的微空间; ϵ^n 是 ϵ^{n+1} 的宏空间, ϵ^{n+1} 是 ϵ^n 的微空间。

宏空间是微空间的无穷大, 微空间是宏空间的无穷小。

格洛克代数空间

完整格洛克代数空间如图 1.4 所示。



图 1.4: 格洛克代数空间

由于指数进位回 $0, \infty^\infty$ 和 ϵ^∞ 回归原点 0, 图中未予显示。

格洛克代数空间最大覆盖范围 $[0, \infty^\infty)$, 最小单位刻度 $1\epsilon^{\infty-1}$, 可以满足任何数值的可视化标注。

需要注意的是，由于所有实数都是 ∞ 的无穷小，正数 C 只能标注在任一轴的最左侧的相对无穷小区间；同样的，负数 $-C$ 只能标注在最右侧的相对无穷小区间。

例 1.2.1. 在格洛克代数空间上标注：

$$(1) a = 0.5\infty + 1, \quad (2) b = 2\infty - 2, \quad (3) c = a + b.$$

解：

$$\begin{aligned} c &= a + b \\ &= (0.5\infty + 1) + (2\infty - 2) \\ &= (0.5\infty + 2\infty) + (1 - 2) \\ &= 2.5\infty - 1 \end{aligned}$$

a, b, c 如图 1.5 所示。

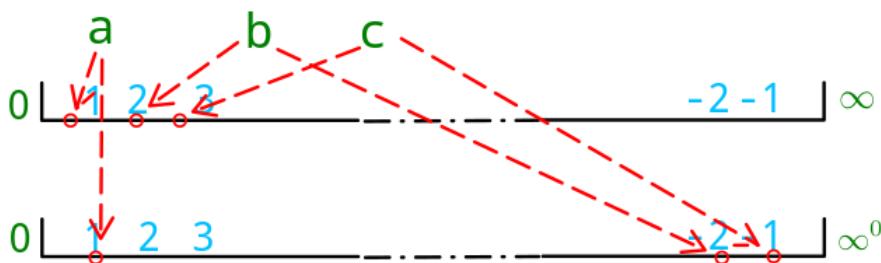


图 1.5: 数值标注

1.3 无穷大和无穷小的定义

经过前面两节关于无穷大和无穷小的讨论和格洛克代数空间的形成，下面给出无穷大和无穷小的正式定义。

定义 1.1. 无穷大和无穷小

设 ∞, ϵ 是未解析数 (*unsolved number*)， ∞ 是正整数，表示无穷大， ϵ 表示无穷小。

性质列表

- (1) ∞, ϵ 互为倒数，即 $\infty \cdot \epsilon = 1$ 。
- (2) 对于任意实数 C ，整数 n ， $\infty^{n+1} + C\infty^n = \infty^{n+1}$ ， $\epsilon^n + C\epsilon^{n+1} = \epsilon^n$ 。
- (3) ϵ 是最小的正数， $-\epsilon$ 是最大的负数， $0^+ = \epsilon$ ， $0^- = -\epsilon$ 。
- (4) 对于任意实数 C ， $C^+ = C + \epsilon$ ， $C^- = C - \epsilon$ 。

(5) 对于 $n > 1$ 有, $\log_n \infty < \sqrt[n]{\infty} < \infty < \infty^n < n^\infty < \infty!$ 。

(6) 等效重定义。如果关于 ∞ 的表达式 $g(\infty)$ 的值仍是无穷大, 那么 ∞ 可以重定义为 $g(\infty)$, 记作: $\infty \leftarrow g(\infty), \epsilon \leftarrow \frac{1}{g(\infty)}$ 。

性质 (1) 对无穷大和无穷小的关系进行了标准化, 使得数学属性更加清晰, 高阶无穷大和无穷小的比较和转换变成了数学计算, 而不是逻辑分析。

对于性质 (2), 当 $n = 0$ 时有

$$\infty + C = \infty \quad (1.1)$$

$$1 + C\epsilon = 1 \quad (1.2)$$

将 (1.1) 两边同时减去 ∞ , 将 (1.2) 两边同时减去 1, 得到

$$C = 0 \quad (1.3)$$

$$C\epsilon = 0 \quad (1.4)$$

(1.3) 说明在格洛克宏空间 1 轴 (1 阶无穷大) 的视角来看, 无论 C 多么大, 都是 ∞ 的无穷小, 格洛克宏空间 1 轴上的值都为 0; (1.4) 说明了在格洛克 0 轴 (实数轴) 的视角来看, 无论 n 多么大, $n\epsilon$ 都是无穷小, 在格洛克 0 轴上的值都为 0。这也是后续章节进行极限计算时的正确结果。

性质 (2) 本质上是将本章第一节关于无穷大和无穷小的运算规则进行了合并。

性质 (3) 可以合并到性质 (4), 分开是为了突出 0 的特殊性。 C^+ 表示实数 C 右侧最靠近它的数, C^- 表示 C 左侧最靠近它的数。这可以用格洛克微空间展开的术语进行理解。

格洛克微空间展开

对于展开点 C , 取单位长度区间 $[C, C + 1]$ 并放大 ∞ 倍数, 当我们将 C 点与微空间 1 轴的 0 对齐, 将会“看到”最靠近 C 右侧的坐标刻度是 1ϵ 。类似地, 取单位长度区间 $[C - 1, C]$ 并放大 ∞ 倍数, 将 $C - 1$ 点与微空间 1 轴的 0 对齐, 将会“看到”最靠近 C 左侧的坐标刻度是 -1ϵ 。如图 1.6 所示。

事实上, 我们也可以指定 $C^+ = C + n\epsilon$, $C^- = C - n\epsilon$, 结果也是正确的。从格洛克 0 轴 (或实数轴) 的角度来看, 无论我们指定靠近 C 的距离是多么小, 无论是百万分之一还是千万分之一, 都是 $n\epsilon$ 的无穷大。

性质 (5) 明确了不等式的各项位于不同阶的格洛克宏空间, 不等式的左侧都是右侧的无穷小, 体现了如下运算规则:

$$\log_n \infty + \sqrt[n]{\infty} + \infty + \infty^n + n^\infty + \infty!$$



图 1.6: 格洛克微空间展开

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[n]{\infty} + \infty + \infty^n + n^\infty + \infty! \\
 &= \infty + \infty^n + n^\infty + \infty! \\
 &= \infty^n + n^\infty + \infty! \\
 &= n^\infty + \infty! \\
 &= \infty!
 \end{aligned}$$

虽然不等式的每一项都是无穷大，但它们的增长速度比值都达到了无穷大的量级，这可以由函数图形进行直观的观察，这里略去繁琐的证明过程。

关于性质 (6)，传统的无穷大和无穷小并没有明确的等阶划分，事实上覆盖了整个格洛克代数空间。通过等效重定义，我们可以得到一个明确的计算结果。如

$$\begin{aligned}
 f(\infty) &= \log_n \infty \\
 &= \log_n n^\infty \quad (\infty \leftarrow n^\infty) \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

观察对数函数的图形，它是一个增长异常缓慢的函数，因此 $\log_n \infty$ 是一个非常低阶的无穷大，通过等效重定义，我们得到了一个明确的无穷大结果，本质上我们改变了无穷大在宏空间的位置，但没有改变传统无穷大的结果，这在极限计算时很有用。

例 1.3.1. 数列用符号 $\{f(n)\}$ 表示，其中 $f(n)$ 是通项公式。如果 $n \rightarrow \infty$, $f(n) = C$ 那么数列是收敛的；如果 $n \rightarrow \infty$, $f(n) = \infty$ 那么数列是发散的；否则数列既不收敛也不发散。

判断下列数列的收敛性：

- (1) $\{(-1)^n \frac{1}{n}\}$ (2) $\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\}$ (3) $\{n - \frac{1}{n}\}$

解：

(1)

$$f(n) = (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$f(\infty) = (-1)^\infty \frac{1}{\infty}$$

$$f(\infty) = (-1)^\infty \epsilon$$

$f(\infty) = \epsilon = 0$, 如果 ∞ 为偶数; $f(\infty) = -\epsilon = 0$, 如果 ∞ 为奇数。

综合奇偶两种情况, $f(\infty) = 0$, 数列收敛。

(2)

$$f(n) = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

$$f(\infty) = (-1)^\infty \frac{\infty+1}{\infty}$$

$$f(\infty) = (-1)^\infty \frac{\infty}{\infty}$$

$$f(\infty) = (-1)^\infty$$

数列在 1 和 -1 之间来回振荡, 既不收敛也不发散。

(3)

$$f(n) = n - \frac{1}{n}$$

$$f(\infty) = \infty - \frac{1}{\infty}$$

$$f(\infty) = \infty - \epsilon$$

$$f(\infty) = \infty$$

数列发散。

通过上面的例子可以看出, 关于无穷大和无穷小的计算完全符合数学运算法则, 比传统的基于数学分析的形式化方法简单而清晰。

例 1.3.2.

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \frac{\sqrt{\infty+3}}{\infty} \\ &= \frac{\sqrt{(\infty^2-3)+3}}{\infty^2-3} \quad (\infty \leftarrow \infty^2-3) \\ &= \frac{\infty}{\infty^2} \\ &= \frac{1}{\infty} \\ &= \epsilon \\ &= 0 \end{aligned}$$

通过等效重定义，我们精确计算出了表达式的结果，无需进行繁琐的形式化数学分析。

格洛克观点

格洛克代数空间的建立可以使我们抛弃传统的基于语言的数学逻辑，转而专注于简单精确的数学计算。后续章节我们将会看到微积分学是多么的简单，大量晦涩的定义、定理将被抛弃，一切变得如此不可思议。

例 1.3.3. 求函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$ 的定义域。

1.4 极限的概念

定义 1.2 (极限的 $\epsilon - \delta$ 定义). 对于函数 $f(x)$ ，如果存在实数 L ，使得对任意给定的 $\epsilon > 0$ ，都存在 $\delta > 0$ ，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $|f(x) - L| < \epsilon$ ，则称 L 为函数 $f(x)$ 在点 a 处的极限，记为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义。如果存在一个实数 L ，使得：对于任意给定的正数 ϵ (无论它多么小)，总存在一个正数 δ (它通常依赖于 ϵ)，使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - L| < \epsilon$ 成立。
则称 L 是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

定理 1.1 (极限的四则运算). 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 都存在，则有：

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{其中 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

第二章 函数和极限

函数是数学中一个核心概念，它描述了变量之间的一种对应关系。简单来说，函数将一个输入值（自变量）映射到一个输出值（因变量）。函数的概念起源于 17 世纪的莱布尼茨和牛顿，用于描述物理现象，如运动和变化。

传统的函数表示是一种泛化的表示，试图包容一切，解决一切问题，自变量和函数值（因变量）之间的关系抽象成规则，试图解决一切假想中的问题；因此在描述定义、定理时需要晦涩的前提限制条件，并形成抽象的形式化定义。本文或格洛克描述的函数只有一种，自变量和函数值之间的关系由自变量表达式确定，保持具体而简单。

极限是微积分的基础概念，它描述了函数在某个点附近的行为，即使函数在该点未定义或不连续。极限的概念由柯西和魏尔斯特拉斯在 19 世纪正式化，用于处理无穷小和无穷大。

基于格洛克代数空间，定义域的区间和函数的连续性进行了重新表述，极限概念被重新定义，一切变得简单而直观。

2.1 理解函数

函数是数学中描述对应关系的一种基本且非常重要的概念。通常写作 $y = f(x)$ 。

函数的关键特点

唯一性对应 (Uniqueness)：对于定义域内的每一个输入值 x ，函数都只能对应一个唯一的输出值 $f(x)$ 。

定义域 (Domain)：所有允许的输入值 x 的集合。

例如，在函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 中， x 不能为 0，所以定义域是除 0 以外的所有实数。

值域 (Range)：值域是实际输出值的集合。

函数的输入输出关系通过自变量表达式来描述，通常有几何图形来对应表示。例如函数 $f(x) = x^2 + 1$ ，在几何图形上表现为抛物线。

定义域区间

函数的定义域通常是数轴上的一个或多个连续的数值范围，因此我们常用区间符号来表示它。

圆括号 (a, b) 表示不包含端点（开区间）。表示 $a < x < b$ ，以及区间边界是 ∞ 或 $-\infty$ 的情况。

方括号 $[a, b]$ 表示包含端点（闭区间）。表示 $a \leq x \leq b$ 。

开区间转换为闭区间

依据格洛克无穷大和无穷小定义的性质 (4)，有

$$(a, b) \Rightarrow [a + \epsilon, b - \epsilon] \quad (a, \infty) \Rightarrow [a + \epsilon, \infty)$$

∞ 既可以理解为开区间也可以理解为闭区间，根据具体的问题进行不同的理解。

分段函数

分段函数将定义域分成若干互不相交的子区间，并在每个子区间上定义一个子函数。

分段函数常用大括号表示，例如：

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{if } x < 0 \\ x, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{if } x < 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{if } x < 1 \\ 3x - 1, & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

还有一些常见的特殊分段函数：

阶跃函数 (Step Function)：分段函数由常数函数组成。例如，单位阶跃函数 (Unit Step Function)。

分段线性函数 (Piecewise Linear Function)：分段函数由线段（线性函数）组成。

通过以上讨论，我们现在可以明确：**函数的概念和性质总是作用于单一定义域区间。**

复合函数

复合函数本质上是自变量的函数（表达式）变换并受到变换函数的额外约束。例如复合函数 $f(g(x))$ ，我们可以理解为函数 $f(y)$ ，并通过 $y = g(x)$ 变换得到的。事实上，函数变换更常见，因此不作为一个单独的函数分类提出。

2.2 函数的极限

函数极限是微积分中的一个基本概念，它描述了一个函数在自变量（输入值）接近某一给定值时，它的函数值（输出值）所表现出的趋势。

函数极限的直观理解

- (1) 函数 $f(x)$ 在 x 趋近于 a 时的极限是 L ，记作 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。
- (2) 当 x 无限地接近 a (但不等于 a) 时，函数值 $f(x)$ 会无限地接近一个确定的值 L 。
- (3) $f(x)$ 在 $x = a$ 处是否有定义，以及 $f(a)$ 的值是多少，并不影响 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 的结果。极限关注的是趋近过程，而非终点的值。

从上面直觉出发，逐渐演变完善了极限的 $\epsilon - \delta$ 定义。 $\epsilon - \delta$ 定义为极限提供了逻辑严密性，但代价是牺牲了直觉性、增加了学习难度和操作复杂性。

格洛克极限定义

格洛克采用逆向思维，并以可视化的格洛克代数空间和无穷大无穷小的定义作为逻辑支撑，给出极限的定义。

定义 2.1 (函数的极限). 对于函数 $f(x)$, $x \rightarrow a \iff x = a \pm \epsilon$, 函数 $f(x)$ 在 x 趋近于 a 时的极限

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a \pm \epsilon) = f(a)$, 如果 a 位于定义域区间内。
- (2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a + \epsilon)$, 如果 a 位于定义域区间左边界。
- (3) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a - \epsilon)$, 如果 a 位于定义域区间右边界。

对于 (2) 和 (3)，如果 a 是闭区间边界，极限值应用 $f(a)$ 仍然成立。

格洛克将传统极限的动态趋近描述转换成了静态描述，因为在格洛克微空间“看到了”最接近 a 的极限位置。由此不再需要晦涩难解的逻辑推理描述，简单直接地进行极限计算。

例 2.2.1. 计算极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x + 5}{2x^3 + 4x^2 - 1} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

解：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 2 \cdot (1) + 1 = 3$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x + 5}{2x^3 + 4x^2 - 1} = \frac{3\infty^3 - \infty + 5}{2\infty^3 + 4\infty^2 - 1} = \frac{3\infty^3}{2\infty^3} = \frac{3}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(2 + \epsilon)^2 - 4}{(2 + \epsilon) - 2} = \frac{4\epsilon + \epsilon^2}{\epsilon} = 4 + \epsilon = 4$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \frac{\sqrt{1+\epsilon} - 1}{\epsilon} \\
 &= \frac{(\sqrt{1+\epsilon} - 1)(\sqrt{1+\epsilon} + 1)}{\epsilon(\sqrt{1+\epsilon} + 1)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon} + 1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

上例 (3) 和 (4) 略去了计算左极限, 因为左右极限相等。

函数的连续性

(1) 在定义域区间内函数总是连续的, 在闭区间左边界右连续, 在闭区间右边界左连续。

(2) 如果分段函数的分段点有定义, 分段子函数分别为 f_1, f_2 , 并且有 $f_1(a-\epsilon) = f_2(a+\epsilon) = f(a)$, 那么分段函数在分段点处连续。

函数的连续性是显而易见的, 换句话说, 函数 $f(x)$ 的值随着自变量 x 的连续变化而连续变化。函数图形可视化的证明了函数的连续性。事实上, 证明函数的连续性很容易进入逻辑上的循环证明。

讨论函数的连续性只有在函数的两个相邻区间的分段点处才有意义, 格洛克采用分段函数的方式描述了这种情况, 分段子函数 f_1, f_2 可以相同, 也可以不同。具有苛刻定义的非常规函数因失去一般性不在本节进行讨论。

例 2.2.2. 计算极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} |x|$$

解:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\epsilon} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{\epsilon} = \infty$$

左右极限不相等, 极限不存在。

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = |- \epsilon| = \epsilon = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = |\epsilon| = 0$$

分段点 0 左右极限相等, 极限存在, 极限值为 0。

分段点 0 有定义且函数值为 0, 所以函数在分段点 0 处连续。

例 2.2.3. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

解: 这是一个著名的极限问题, 传统上使用夹逼定理进行求解。

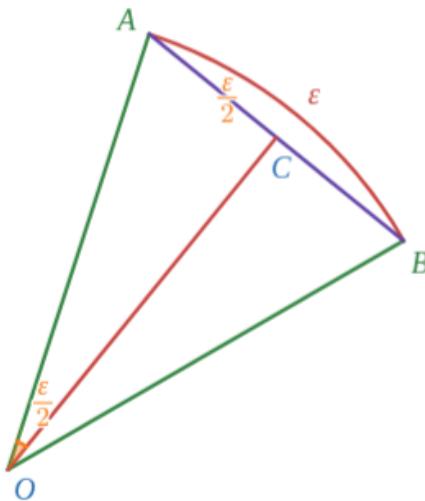


图 2.1: 单位圆上的弧

当光滑曲线上的两点 A, B 越来越接近时, 曲线弧 AB 与割线 AB 逐渐重合, 换句话说, 只要 A, B 两点的距离足够小, $\widehat{AB} = |AB|$, 如图 2.1 所示。

我们取弧长 $\widehat{AB} = \epsilon$, 得到如下关系:

$$|AB| = \epsilon, \quad \angle AOB = \epsilon, \quad |AC| = \angle AOC = \frac{\epsilon}{2}$$

根据三角公式

$$\begin{aligned}\sin \frac{\epsilon}{2} &= \frac{AC}{OA} = AC = \frac{\epsilon}{2} \\ \cos \frac{\epsilon}{2} &= \frac{OC}{OA} = \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

现在我们可以计算极限

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} = \frac{2 \sin \frac{\epsilon}{2} \cos \frac{\epsilon}{2}}{\epsilon} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{\epsilon}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}}{\epsilon} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

例 2.2.4. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

解：利用半角公式有 $\cos x = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ，所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{1 - \cos \epsilon}{\epsilon} \\ &= \frac{1 - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{\epsilon} \\ &= \frac{2 \cdot \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon = 0 \end{aligned}$$

极限的 $\epsilon - \delta$ 定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义。如果存在一个实数 L ，使得：

对于任意给定的正数 ϵ （无论它多么小），总存在一个正数 δ （它通常依赖于 ϵ ），使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - L| < \epsilon$ 成立。

则称 L 是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

2.3 自然常数和自然对数

自然常数 e 是数学中一个重要的无理数，常作为自然对数的底数出现。它大约等于 2.71828，并在许多自然现象、增长模型（如复利）和极限计算中扮演关键角色。

e 最早由瑞士数学家雅各布·伯努利 (Jacob Bernoulli) 在研究复利问题时发现，后来由莱昂哈德·欧拉 (Leonhard Euler) 在 18 世纪正式引入符号“e”（源自“exponential”，指数的）。

e 可以定义为以下极限：

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty = (1 + \epsilon)^\infty$$

从格洛克代数空间的角度看，自然常数是一个未解析的无穷大无穷小计算表达式。使用无穷大等效重定义 $\infty \leftarrow f(\infty)$ ，格洛克给出自然常数的定义。

定义 2.2. 自然常数

设 $f(\infty)$ 是关于 ∞ 的表达式，即 $f(\infty)$ 位于格洛克宏空间； $f(\epsilon)$ 是关于 ϵ 的表达式，即 $f(\epsilon)$ 位于格洛克微空间。自然常数 e 定义为

$$e = \left(1 + \frac{1}{f(\infty)}\right)^{f(\infty)} \quad (2.1)$$

$$e = (1 + f(\epsilon))^{1/f(\epsilon)} \quad (2.2)$$

需要明确的是，即使 $f(\infty), f(\epsilon)$ 是负值时，自然常数的定义仍然有效。

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\infty}\right)^{-\infty} &= \left(\frac{\infty - 1}{\infty}\right)^{-\infty} = \left(\frac{\infty}{\infty - 1}\right)^\infty \\ &= \left(1 + \frac{1}{\infty - 1}\right)^{\infty-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{\infty - 1}\right) \\ &= e \cdot (1 + \epsilon) \\ &= e \end{aligned}$$

自然对数，记作 $\ln(x)$ ，是以 e 为底的对数函数，它是 $\log_e(x)$ 的简写。

定理 2.1. 自然恒等式

$$(1 + a \cdot \epsilon)^b = e^{ab \cdot \epsilon} = 1 + ab \cdot \epsilon \quad (2.3)$$

$$a^\epsilon = e^{\ln a \cdot \epsilon} = 1 + \ln a \cdot \epsilon \quad (2.4)$$

$$\ln(1 + a \cdot \epsilon) = a \cdot \epsilon \quad (2.5)$$

证明

$$\begin{aligned} (1 + a \cdot \epsilon)^b &= (1 + a \cdot \epsilon)^{\frac{1}{a^\epsilon} \cdot a^\epsilon \cdot b} \\ &= e^{ab \cdot \epsilon} \\ &= (1 + ab \cdot \epsilon)^{\frac{1}{ab \cdot \epsilon} \cdot (ab \cdot \epsilon)} \\ &= 1 + ab \cdot \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^\epsilon &= e^{\ln a^\epsilon} = e^{\epsilon \cdot \ln a} \\ &= (1 + \epsilon \cdot \ln a)^{\frac{1}{\epsilon \cdot \ln a} \cdot (\epsilon \cdot \ln a)} \\ &= 1 + \ln a \cdot \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(1 + a \cdot \epsilon) &= \ln e^{a \cdot \epsilon} \\ &= a \cdot \epsilon \cdot \ln e \\ &= a \cdot \epsilon \end{aligned}$$

例 2.3.1. 计算极限

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= \left(1 + \frac{2}{\infty}\right)^\infty \\ &= \left(1 + \frac{2}{\infty}\right)^{\frac{\infty}{2} \cdot 2} \\ &= e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x} &= \frac{\ln(1 + 3\epsilon)}{\epsilon} \\ &= \frac{\ln e^{3\epsilon}}{\epsilon} = \frac{3\epsilon}{\epsilon} \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \frac{e^\epsilon - 1}{\epsilon} \\ &= [(1 + \epsilon)^{\infty \cdot \epsilon} - 1] \cdot \frac{1}{\epsilon} \\ &= \frac{(1 + \epsilon) - 1}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon} \\ &= \frac{(1 + \ln a \cdot \epsilon) - 1}{\epsilon} \\ &= \frac{\ln a \cdot \epsilon}{\epsilon} \\ &= \ln a\end{aligned}$$

自然恒等式是极限运算

显然，定理 2.1 的恒等结果是在舍弃更高阶无穷小后的极限运算结果，例如极限计算

$$\frac{e^{\epsilon^2} - 1 - \epsilon^2}{\epsilon^4}$$

我们不能简单的应用定理 2.1，那样分子将为 0，此时正确的方法是使用“平滑”的泰勒展开来得到更高阶无穷小，从而计算出正确的结果。

定理 2.1 的意义在于简化指数函数导数公式的推导，免去复杂的逻辑推理。

2.4 泰勒展开在极限计算中的应用

泰勒展开 (Taylor Series Expansion) 是计算涉及 e , $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ 等基本函数的极限时，一个非常强大且高效的工具。

它主要利用函数在某一点（通常是 $x = 0$ ，即麦克劳林展开）附近的多项式近似来简化分子和分母。

常用函数的麦克劳林展开式 ($x \rightarrow 0$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (2.6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (2.7)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (2.8)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (2.9)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (2.10)$$

例 2.4.1. 计算极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \frac{\ln(1+\epsilon)}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} &= \frac{\ln(\cos \epsilon)}{\epsilon^2} = \frac{\ln(1 - \frac{1}{2}\epsilon^2)}{\epsilon^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\epsilon^2}{\epsilon^2} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} &= \frac{e^{\epsilon^2} - 1 - \epsilon^2}{\epsilon^4} \\ &= \frac{(1 + \epsilon^2 + \frac{1}{2}\epsilon^4) - 1 - \epsilon^2}{\epsilon^4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例 2.4.2. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon}$$

$$y = \frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon}$$

$$1 + y\epsilon = a^\epsilon$$

$$\ln(1 + y\epsilon) = \ln a^\epsilon$$

$$y \cdot \epsilon = \ln a \cdot \epsilon$$

$$y = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

使用泰勒展开计算极限的要点：

- (1) 确定阶数：根据分母的无穷小阶数来确定分子和分母需要展开到的阶数。目标是让分子中最低次项（非零项）的阶数与分母的阶数相等。
- (2) 抵消低阶项：展开后，分子中的低阶项（如常数项、一次项等）通常会相互抵消，只剩下与分母同阶或更高阶的无穷小项。
- (3) 提取主部：保留分子分母中最低次项的系数，即可求出极限。

我们在学习泰勒级数之前，提前利用泰勒级数的展开式来简化复杂极限的计算，避免进行不必要的复杂逻辑分析。

第三章 点微分和导数

3.1 瞬时变化量与点微分

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义为：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数表示函数在某点变化率的精确度量。

第四章 积分和积分方法

4.1 导数的定义与几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义为：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数表示函数在某点变化率的精确度量。