微积分基础教程

(Calculus Fundamentals)

您的姓名

2025 年 12 月 20 日

版权信息

本书仅提供电子版，固定版式。

前言

自牛顿与莱布尼茨独立创设微积分(1660–1680年代）以来，这门“变化的数学”已走过三个半世纪。三百年间，微积分从“计算变化率”演化为“描述一切可微结构”的元语言：数学不再只是工具，它已经从一门关于量的科学，演变为一门关于模式、结构和形式推理的宏大体系。

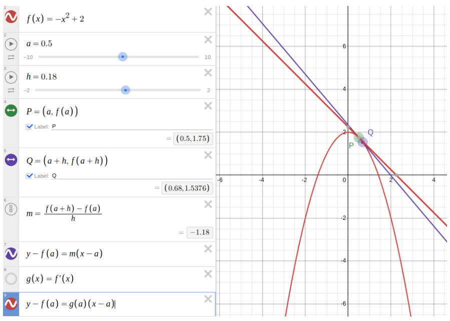


图 1: **另一张图片，位于右侧**

现代微积分以其严谨性而闻名，但其基石——极限的 $\epsilon - \delta$ 定义和由此构建的标准分析体系，正在向哲学化甚至宗教化方向发展：非直观性、逻辑严重形式化，过度僵化、挑战常识，和现实严重脱节正在演变成数学空想主义。

有鉴于此，格洛克以极度自下而上的方式重新思考整个微积分体系，成功建立可视化的格洛克代数空间，可视化范围从 $(-\infty^{\infty}, \infty^{\infty})$ 每一个数都可见，并将 ∞, ϵ 定义为未解析数，分别表示无穷大和无穷小，突然之间，一切都变得如此简单，并由此带来以下颠覆性的数学结果：

极限被重新定义，简单而直观，极限的计算只是简单的数学计算，洛必达法则不再必要，神秘性已全部消失。

开闭区间被重新描述，无穷小的数值化定义使开区间基本消失，在极限状态下都是闭区间。

连续性、间断点等相关理论已消失，基本只保留描述性概念和常识。

数列与极限的收敛相关内容是为了传统趋近极限的表述，而无穷大和无穷小不再是一个趋近的概念，这部分内容已经没有意义。因此只保留数列的通项公式并作为统一的函数对待。

导数不再是一个莱布尼兹定义的神秘符号 $\frac{d}{dx}F(x)$，现在只是一个重新定义的点 x 位置的点微分的商，即 $dF(x)/dx$，和小学的除法运算没有什么不同，更强调计算结果是瞬时变化率或几何图形上的斜率。

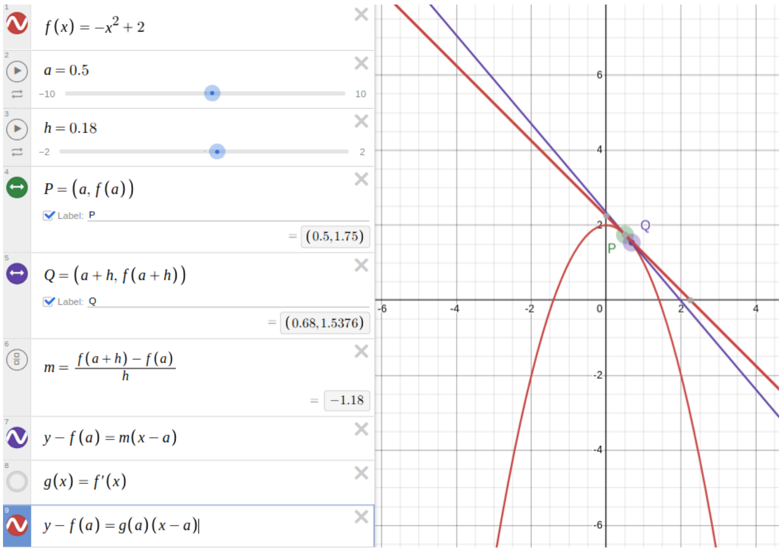


图 2: **示例插图：函数的几何图形展示**

积分被重新定义，删除积分定理等内容，重新定义积分为微分的逆运算。具体变化为点积分简称为积分取代不定积分，保留定积分并重新命名为区间积分对应区间微分。

自然常数 e 被重新定义为 $e = (1 + \epsilon)^{\infty}$，清晰而直观，并拓展为自然常数序列 $e_n = (1 + n\epsilon)^{\infty}$，使其不再具有神秘性。

定义和定理中的函数只进行最小化覆盖，即只包含一个定义域区间，消除传统定义和定理的繁杂限制条件，简单而清晰。

然而，更严肃而重要的思考是，我们为什么要接受数学基础/数理逻辑/集合论/数学分析这些所谓的数学家小圈子理论，无论对于普通人还是科研人员既看不懂也没有任何实用价值。回归常识和简单，我们真的需要数学家小圈子给我们解释为什么 $1 + 1 = 2$ 吗?

考德 · 格洛克

2025 年 11 月

重要提示

请确保您已安装 tcolorbox 宏包。

风险提示

不要在数学环境中使用

换行，请改用 align 或 split 环境。

目录

第一章 格洛克代数空间 **1**

1.1 初步理解无穷大和无穷小 1

1.2 格洛克代数空间 2

1.3 无穷大和无穷小的定义 4

第二章 函数和极限 **9**

2.1 理解函数 9

2.2 参数方程 12

2.3 函数的极限 14

2.4 自然常数和自然对数 17

2.5 泰勒展开在极限计算中的应用 20

第三章 点微分和导数 **23**

3.1 极限变化量与点微分 23

3.2 导数和导数公式 26

3.3 导数的运算法则 31

3.4 参数方程求导 37

3.5 高阶导数 39

3.6 泰勒级数和麦克劳林级数 39

3.7 欧拉公式 46

3.8 微分公式和运算法则 49

第四章 导数和微分的应用 **53**

4.1 极限计算 53

4.2 函数单调性 54

4.3 函数的极值 56

4.4 函数的渐近线 59

4.5 牛顿法解方程 61

第五章 不定积分和积分方法 **65**
5.1 不定积分的基本概念 . . . 65
5.2 不定积分的主要性质 . . . 67
5.3 基本积分公式 . . . 68
5.4 积分技术 . . . 70

第六章 常微分方程 **81**
6.1 一阶常微分方程 . . . 81
6.2 二阶线性常微分方程 . . . 88

第七章 定积分 **95**
7.1 区间微分和区间积分 . . . 95
7.2 定积分的主要性质 . . . 98

第八章 定积分的应用 **105**
8.1 曲线的弧长 . . . 105
8.2 曲线之间的面积 . . . 109
8.3 极坐标下的面积和弧长 . . . 113
8.4 旋转体的体积 . . . 117

第九章 积分和积分方法 **121**
9.1 导数的定义与几何意义 . . . 121

第十章 向量代数 **123**
10.1 参数化曲面积 . . . 123
10.2 1 . . . 127
10.3 2 . . . 128
10.4 3 . . . 129
10.5 4 . . . 130
10.6 5 . . . 131
10.7 6 . . . 132
10.8 7 . . . 133
10.9 8 . . . 134
10.10 格林公式 . . . 136

第十一章 初等向量分析 **149**
11.1 向量的微分与积分 . . . 149

第一章　格洛克代数空间

本章首先从常识入手理解无穷大和无穷小，并得出基本的运算法则。在此基础上实现格洛克代数空间。最后给出无穷大和无穷小的正式定义和运算（规则）列表。

1.1　初步理解无穷大和无穷小

自微积分诞生以来，如何阐释、理解无穷大和无穷小以及由此引出的函数的极限一直是问题的核心，所以让我们以此为切入点，开始问题的探索。

格洛克：无穷大和无穷小的直观理解

无穷大和无穷小是具有特殊作用的两个数，分别用 ∞,ϵ 表示，对于 ∞，所有实数都是它的无穷小；对于 ϵ，所有实数都是它的无穷大。

由此产生如下运算法则：对于任意实数 C

$$\infty + C = \infty$$

$$\epsilon + C = C$$

这是基于 ∞,ϵ 本身的直观语义得出的。更进一步，基于数的性质，我们得到：

$$C_1\infty + C_2 = C_1\left(\infty + \frac{C_2}{C_1}\right) = C_1\infty$$

$$C_1\epsilon + C_2 = C_1\left(\epsilon + \frac{C_2}{C_1}\right) = C_2$$

$$C_1\infty^2 + C_2\infty = \infty(C_1\infty + C_2) = C_1\infty^2$$

$$C_1\epsilon^2 + C_2\epsilon = \epsilon(C_1\epsilon + C_2) = C_2\epsilon$$

这和 200 多年来的传统解释完全不同，甚至相反。传统解释中并不认为无穷大和无穷小是数，因此不能直接进行数学运算，强调它是一个无限趋近的“动态”过程，因此理解起来要困难复杂得多。

格洛克的直观解释如果可以成立，会使微积分学变得简单而清晰，这就需要建立一个直观而简单的可视化代数模型来阐释其合理性。

1.2 格洛克代数空间

格洛克代数环轴

和传统的实数数轴不同，格洛克数轴是一个圆环，圆环长度固定为 ∞ ，并将其分割为相等的 ∞ 段，每段长度为 1, 将数轴逆时针依次标注 0, 1, 2, ...，顺时针标注为 -1, -2, ...，这样我们就得到了一个覆盖 $(-\infty, \infty)$ 数字空间的环形数轴。

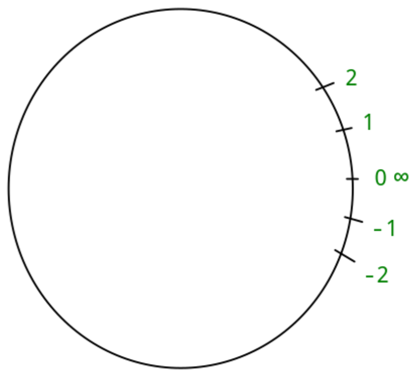


图 1.1: **格洛克代数环轴**

下图是格洛克环轴展开后的样子，在数轴的右端标注的是单位刻度的长度量级 $\infty^0 = 1$，因此称为格洛克 0 阶数轴。

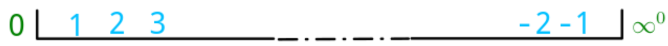


图 1.2: **格洛克 0 阶数轴**

需要注意的是，$\infty, -\infty$ 和原点 0 重合，这意味着数值大小达到 ∞ 时需要进位，以表示 ∞ 量级或更大的数。基于同样的原理，我们还需要量级更小的单位，即 ϵ，用来进位到格洛克 0 阶数轴。

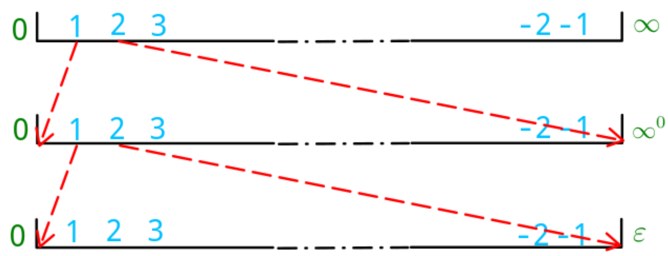


图 1.3: **宏空间和微空间**

∞ 以及更大的量级称为**格洛克宏空间**，对应的，ϵ 以及更小的量级称为**格洛克微空间**，图 1.3 表示了格洛克宏空间 1 轴，格洛克 0 轴和格洛克微空间 1 轴。

宏空间 1 轴覆盖区间 $[0,\infty^2)$，单位刻度大小为 1∞，将 1 单位刻度放大 ∞ 倍，得到格洛克 0 轴。
格洛克 0 轴覆盖区间 $[0,\infty)$，单位刻度大小为 1，将 1 单位刻度放大 ∞ 倍，得到微空间 1 轴。
微空间 1 轴覆盖区间 $[0,1)$，单位刻度大小为 $\frac{1}{\infty}$，即 1ϵ。
将宏空间和微空间以同样的方式分别向上和向下延展，形成完整的格洛克代数空间。

宏空间和微空间

这是一个相对的概念，如 ∞^{n+1} 是 ∞^n 的宏空间，∞^n 是 ∞^{n+1} 的微空间；ϵ^n 是 ϵ^{n+1} 的宏空间，ϵ^{n+1} 是 ϵ^n 的微空间。
宏空间是微空间的无穷大，微空间是宏空间的无穷小。

格洛克代数空间

完整格洛克代数空间如图 1.4 所示。

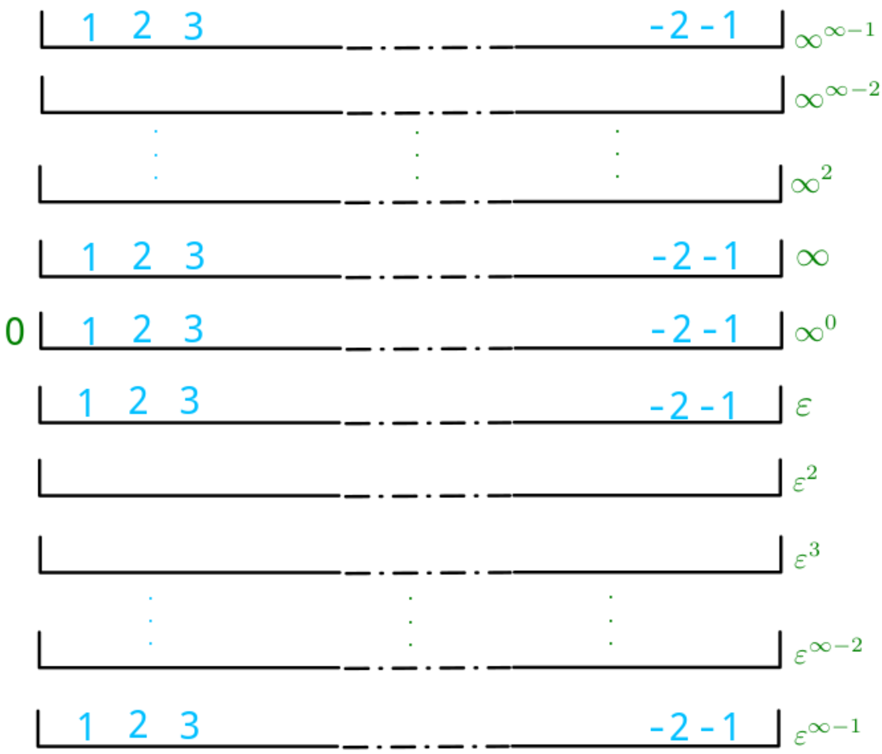


图 1.4: **格洛克代数空间**

由于指数进位回 0,∞^∞ 和 ϵ^∞ 回归原点 0, 图中未予显示。
格洛克代数空间最大覆盖范围 $[0,\infty^\infty)$，最小单位刻度 $1\epsilon^{\infty-1}$，可以满足任何数值的可视化标注。

需要注意的是，由于所有可描述的实数都是 ∞ 的无穷小，正数 C 只能标注在任一轴的最左侧的相对无穷小区间；同样的，负数 -C 只能标注在最右侧的相对无穷小区间。

例 1.2.1. *在格洛克代数空间上标注：*
(1) $a = 0.5\infty + 1$, (2) $b = 2\infty - 2$, (3) $c = a + b$。

解：

$$\begin{aligned} c &= a + b \\ &= (0.5\infty + 1) + (2\infty - 2) \\ &= (0.5\infty + 2\infty) + (1 - 2) \\ &= 2.5\infty - 1 \end{aligned}$$

a，b，c 如图 1.5 所示。

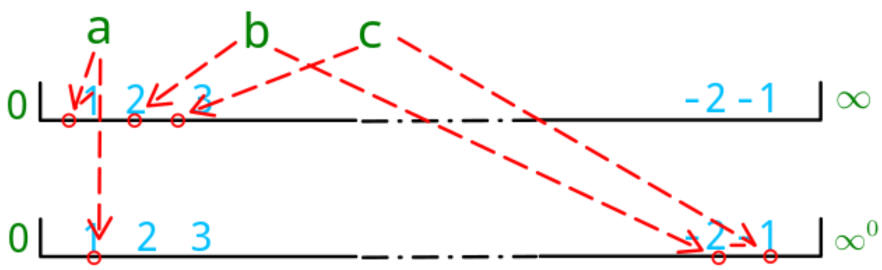


图 1.5: **数值标注**

1.3 无穷大和无穷小的定义

经过前面两节关于无穷大和无穷小的讨论和格洛克代数空间的形成，下面给出无穷大和无穷小的正式定义。

定义 1.1. *无穷大和无穷小*
设 ∞, ϵ 是未解析数（unsolved number），∞ 是正整数，表示无穷大，ϵ 表示无穷小。

性质列表
(1) ∞, ϵ 互为倒数，即 $\infty \cdot \epsilon = 1$ 。
(2) 对于任意实数 C，整数 n，$\infty^{n+1} + C\infty^n = \infty^{n+1}$，$\epsilon^n + C\epsilon^{n+1} = \epsilon^n$。
(3) ϵ 是最小的正数，$-\epsilon$ 是最大的负数，$0^+ = \epsilon$，$0^- = -\epsilon$。

(*4*) 对于任意实数 C，$C^+=C+\epsilon$, $C^-=C-\epsilon$。
(*5*) 等效重定义。如果关于 ∞ 的表达式 $g(\infty)$ 的值仍是无穷大，那么 ∞ 可以重定义为 $g(\infty)$，记作：$\infty \leftarrow g(\infty), \epsilon \leftarrow \frac{1}{g(\infty)}$。
(*6*) 对于 $n>1$ 有，$\log_n \infty < \sqrt[n]{\infty} < \infty < \infty^n < n^\infty < \infty!$。

性质（1）对无穷大和无穷小的关系进行了标准化，使得数学属性更加清晰，高阶无穷大和无穷小的比较和转换变成了数学计算，而不是逻辑分析。

对于性质（2），当 $n=0$ 时有

$$\infty + C = \infty \tag{1.1}$$

$$1 + C\epsilon = 1 \tag{1.2}$$

将（1.1）两边同时减去 ∞，将（1.2）两边同时减去 1, 得到

$$C = 0 \tag{1.3}$$

$$C\epsilon = 0 \tag{1.4}$$

（1.3）说明在格洛克宏空间 1 轴（1 阶无穷大）的视角来看，无论 C 多么大，都是 ∞ 的无穷小，格洛克宏空间 1 轴上的值都为 0；（1.4）说明了在格洛克 0 轴（实数轴）的视角来看，无论 n 多么大，$n\epsilon$ 都是无穷小，在格洛克 0 轴上的值都为 0。这也是后续章节进行极限计算时的正确结果。
性质（2）本质上是将本章第一节关于无穷大和无穷小的运算规则进行了合并。

性质（3）可以合并到性质（4），分开是为了突出 0 的特殊性。C^+ 表示实数 C 右侧最靠近它的数，C^- 表示 C 左侧最靠近它的数。这可以用格洛克微空间展开的术语进行理解。

格洛克微空间展开
对于展开点 C，取单位长度区间 $[C, C+1]$ 并放大 ∞ 倍数，当我们将 C 点与微空间 1 轴的 0 对齐，将会“看到”最靠近 C 右侧的坐标刻度是 1ϵ。类似地，取单位长度区间 $[C-1, C]$ 并放大 ∞ 倍数，将 C-1 点与微空间 1 轴的 0 对齐，将会“看到”最靠近 C 左侧的坐标刻度是 -1ϵ。如图 1.6 所示。
事实上，我们也可以指定 $C^+=C+n\epsilon$, $C^-=C-n\epsilon$，结果也是正确的。从格洛克 0 轴（或实数轴）的角度来看，无论我们指定靠近 C 的距离是多么小，无论是百万分之一还是千万分之一，都是 $n\epsilon$ 的无穷大。

关于性质（5），传统的无穷大和无穷小并没有明确的等阶划分，事实上覆盖了整个格洛克代数空间。通过等效重定义，我们可以得到一个明确的计算结果。如

$$f(\infty) = \log_n \infty$$

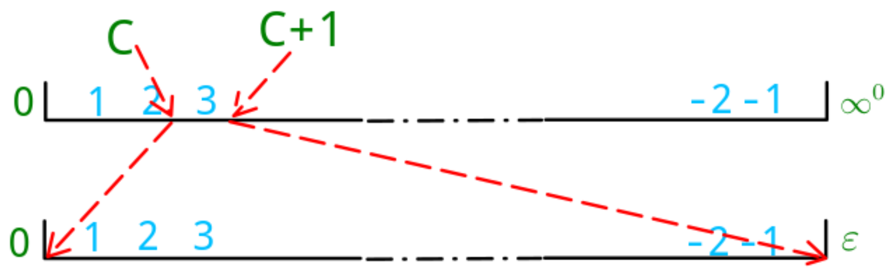


图 1.6: **格洛克微空间展开**

$$
\begin{aligned}
&= \log_n n^{\infty} \qquad (\infty \leftarrow n^{\infty}) \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

观察对数函数的图形，它是一个增长异常缓慢的函数，因此 $\log_n \infty$ 是一个非常低阶的无穷大，通过等效重定义，我们得到了一个明确的无穷大结果，本质上我们改变了无穷大在宏空间的位置，但没有改变传统无穷大的结果，这在极限计算时很有用。

性质（6）明确了不等式的各项位于不同阶的格洛克宏空间，不等式的左侧都是右侧的无穷小，体现了如下运算规则：

$$
\begin{aligned}
\log_n \infty + \sqrt[n]{\infty} + \infty + \infty^n + n^{\infty} + \infty! \\
= \sqrt[n]{\infty} + \infty + \infty^n + n^{\infty} + \infty! \\
= \infty + \infty^n + n^{\infty} + \infty! \\
= \infty^n + n^{\infty} + \infty! \\
= n^{\infty} + \infty! \\
= \infty!
\end{aligned}
$$

虽然不等式的每一项都是无穷大，但它们的增长速度比值都达到了无穷大的量级，严格的证明需要后续知识的支撑，这里只进行说明性的证明：

增长顺序链：对数函数 $\ll$ 幂函数 $\ll$ 指数函数 $\ll$ 阶乘函数

对数函数增长得极其缓慢，它是“加法”的逆运算（将乘法转化为加法），而幂函数仍涉及乘法。通过将无穷大“放大”，可以看出两者的差距巨大：

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt[n]{\infty}}{\log_n \infty} &= \frac{\sqrt[n]{\infty^n}}{\log_n \infty^n} \qquad (\infty \leftarrow \infty^n) \\
&= \frac{\infty}{n \log_n \infty} \qquad (\infty \leftarrow n^{\infty}) \\
&= \frac{1}{n} \frac{n^{\infty}}{\infty}
\end{aligned}
$$

在幂函数家族内部，指数越大，增长越快，即 $\sqrt[n]{x} \ll x \ll x^n$
幂函数 x^n 只进行有限次的乘法（n 次），而指数函数 b^x 涉及无限次的乘法（x 次 b 相乘）。
阶乘函数 $x!$ 的乘数是不断增大的 $(1, 2, 3, \ldots, x)$，而指数函数 n^x 的乘数是固定的 n，即

$$\frac{n^\infty}{\infty!} = \underbrace{\left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n}\right)}_{C_n\ (\text{常数})} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{\infty}\right)}_{P_x\ (\text{收敛部分})}$$

可以通过函数的图形陡峭程度直观理解这种增长速度差异。

例 1.3.1. 数列用符号 $\{f(n)\}$ 表示，其中 $f(n)$ 是通项公式。如果 $n \to \infty$，$f(n) = C$ 那么数列是收敛的；如果 $n \to \infty$，$f(n) = \infty$ 那么数列是发散的；否则数列既不收敛也不发散。
判断下列数列的收敛性：
(1) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$ (2) $\left\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\right\}$ (3) $\left\{n - \frac{1}{n}\right\}$

解:
(1)

$$\begin{aligned} f(n) &= (-1)^n \frac{1}{n} \\ f(\infty) &= (-1)^\infty \frac{1}{\infty} \\ &= (-1)^\infty \epsilon \end{aligned}$$

$f(\infty) = \epsilon = 0$，如果 ∞ 为偶数；$f(\infty) = -\epsilon = 0$，如果 ∞ 为奇数。
综合奇偶两种情况，$f(\infty) = 0$，数列收敛。
(2)

$$\begin{aligned} f(n) &= (-1)^n \frac{n+1}{n} \\ f(\infty) &= (-1)^\infty \frac{\infty+1}{\infty} \\ &= (-1)^\infty \frac{\infty}{\infty} \\ &= (-1)^\infty \end{aligned}$$

数列在 *1* 和 *-1* 之间来回振荡，既不收敛也不发散。
(3)

$$f(n) = n - \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \infty - \frac{1}{\infty} \\ &= \infty - \epsilon \\ &= \infty \end{aligned}$$

数列发散。

通过上面的例子可以看出，关于无穷大和无穷小的计算完全符合数学运算法则，比传统的基于数学分析的形式化方法简单而清晰。

例 1.3.2.

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \frac{\sqrt{\infty+3}}{\infty} \\ &= \frac{\sqrt{(\infty^2-3)+3}}{\infty^2-3} \qquad (\infty \leftarrow \infty^2 - 3) \\ &= \frac{\infty}{\infty^2} \\ &= \frac{1}{\infty} \\ &= \epsilon \\ &= 0 \end{aligned}$$

通过等效重定义，我们精确计算出了表达式的结果，无需进行繁琐的形式化数学分析。

格洛克观点

格洛克代数空间的建立可以使我们抛弃传统的基于语言的数学逻辑，转而专注于简单精确的数学计算。后续章节我们将会看到微积分学是多么的简单，大量晦涩的定义、定理将被抛弃，一切变得如此不可思议。

第二章　函数和极限

函数是数学中一个核心概念，它描述了变量之间的一种对应关系。简单来说，函数将一个输入值（自变量）映射到一个输出值（因变量）。函数的概念起源于 17 世纪的莱布尼茨和牛顿，用于描述物理现象，如运动和变化。
传统的函数表示是一种泛化的表示，试图包容一切，解决一切问题，自变量和函数值（因变量）之间的关系抽象成规则，试图解决一切假想中的问题；因此在描述定义、定理时需要晦涩的前提限制条件，并形成抽象的形式化定义。本文或格洛克描述的函数只有一种，自变量和函数值之间的关系由自变量表达式确定，保持具体而简单。
极限是微积分的基础概念，它描述了函数在某个点附近的行为，即使函数在该点未定义或不连续。极限的概念由柯西和魏尔斯特拉斯在 19 世纪正式化，用于处理无穷小和无穷大。
基于格洛克代数空间，定义域的区间和函数的连续性进行了重新表述，极限概念被重新定义，一切变得简单而直观。

2.1　理解函数

函数是数学中描述对应关系的一种基本且非常重要的概念。通常写作 $y = f(x)$。

函数的关键特点
唯一性对应 (Uniqueness)：对于定义域内的每一个输入值 x，函数都只能对应一个唯一的输出值 $f(x)$。
定义域 (Domain)：所有允许的输入值 x 的集合。
例如，在函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 中，x 不能为 0，所以定义域是除 0 以外的所有实数。
值域 (Range)：值域是实际输出值的集合。

函数的输入输出关系通过自变量表达式来描述，通常有几何图形来对应表示。例如函数 $f(x) = x^2 + 1$，在几何图形上表现为抛物线。

定义域区间

函数的定义域通常是数轴上的一个或多个连续的数值范围，因此我们常用区间符号来表示它。

圆括号 (a, b) 表示不包含端点（开区间）。表示 $a < x < b$，以及区间边界是 ∞ 或 $-\infty$ 的情况。

方括号 $[a, b]$ 表示包含端点（闭区间）。表示 $a \leq x \leq b$。

开区间转换为闭区间

依据格洛克无穷大和无穷小定义的性质（4），有

$(a, b) \Rightarrow [a + \epsilon, b - \epsilon] \qquad (a, \infty) \Rightarrow [a + \epsilon, \infty)$

$\infty)$ 既可以理解为开区间也可以理解为闭区间，根据具体的问题进行不同的理解。

分段函数

分段函数将定义域分成若干互不相交的子区间，并在每个子区间上定义一个子函数。

分段函数常用大括号表示，例如：

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{if } x < 0 \\ x, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{if } x < 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{if } x < 1 \\ 3x - 1, & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

还有一些常见的特殊分段函数：

阶跃函数 (Step Function)：分段函数由常数函数组成。例如，单位阶跃函数（Unit Step Function）。

分段线性函数 (Piecewise Linear Function)：分段函数由线段（线性函数）组成。

通过以上讨论，我们现在可以明确：**函数的概念和性质总是作用于单一定义域区间**。

复合函数

复合函数指的是将两个或多个函数组合起来，形成一个新的函数。具体来说，如果有函数 (f) 和 (g)，则它们的复合函数记作 $f \circ g$，定义为 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ，其中，先计算 $g(x)$，再计算 f。

复合函数 $f \circ g$ 的定义域同时受到 g 和 f 定义域的双重约束。

$f \circ g$ 和 $g \circ f$ 通常并不相同，也就是说复合函数的顺序很重要。

例 2.1.1. 假设 $f(x)=x^2$，$g(x)=x+1$。

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2+1$$

反函数

反函数就是“逆转”原函数的操作，将输出变回输入。函数 $f(x)$ 的反函数通常表示为 $f^{-1}(x)$。

反函数存在条件

（1）一对一性: 每个 x 对应唯一的 y，并且每个 y 对应唯一的 x。

（2）覆盖性: 函数的值域覆盖整个定义域。

反函数的性质

（1）$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$。

（2）原函数和反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称。

例 2.1.2. 假设 $f(x)=2x+1$，$g(x)=\frac{1}{x}$，求反函数并验证恒等性质。

解: 设 $y=f(x)=2x+1$，那么 $x=\frac{y-1}{2}$，交换变量 x，y，得到 $y=\frac{x-1}{2}$，反函数

$$f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

恒等式

$$f(f^{-1}(x))=f(\frac{x-1}{2})=2\cdot\frac{x-1}{2}+1=x$$
$$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(2x+1)=\frac{(2x+1)-1}{2}=x$$

所以 $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$。

设 $y=g(x)=\frac{1}{x}$，那么 $x=\frac{1}{y}$，交换变量 x，y，得到 $y=\frac{1}{x}$，反函数

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$$

恒等式

$$f(f^{-1}(x))=f(\frac{1}{x})=\frac{1}{1/x}=x$$
$$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{1}{1/x}=x$$

所以 $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$。

2.2 参数方程

参数方程是一个非常重要的数学概念，尤其在描述运动轨迹和复杂曲线时非常方便。
函数关系是参数方程的一种特殊情况，而参数方程提供了描述更广泛几何图形和运动的更灵活方式。

在平面直角坐标系中，我们通常用一个含有 x 和 y 的方程（普通方程）来表示一条曲线。
普通方程（或笛卡尔方程）：$y=f(x)$ 或 $F(x,y)=0$。
参数方程（Parametric Equation）则是引入一个参数（通常用 t 或 θ 表示），将曲线上点的坐标 (x,y) 分别表示成这个参数的函数：

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \qquad (t \text{ 为参数})$$

当参数 t 在一个指定的范围内变化时，对应的 (x,y) 坐标点就描绘出一条曲线。在物理学中，参数 t 常常代表时间。

使用参数方程有几个显著的优点：
描述运动轨迹更自然：如果 t 代表时间，那么 $x=f(t)$ 和 $y=g(t)$ 就直接描述了一个物体在 t 时刻的横坐标和纵坐标，非常适合描述质点运动。
表示复杂曲线更简单：有些曲线的普通方程非常复杂，甚至无法写出，但它们的参数方程却相对简单。例如摆线 (Cycloid)。
表示非函数关系：普通方程 $y=f(x)$ 只能表示一个 x 对应一个 y 的函数关系。但对于圆这样的曲线（一个 x 对应两个 y），用参数方程表示更为简洁。

常见曲线的参数方程

普通方程与参数方程的互化
（1）参数方程化为普通方程：核心思想是消去参数 t。

例 2.2.1. 将 $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=4t^2 \end{cases}$ 化为普通方程。
从第一个方程解出 t：$t=\frac{x-1}{2}$
代入第二个方程：$y=4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$
化简：$y=4\cdot\frac{(x-1)^2}{4}=(x-1)^2$
结果：普通方程为 $y=(x-1)^2$ *(开口向上的抛物线)*。

曲线类型	**普通方程**	**参数方程**	**参数的范围**
直线	$y - y_0 = m(x - x_0)$	$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$	$t \in (-\infty, \infty)$
圆	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	$\begin{cases} x = h + r\cos\theta \\ y = k + r\sin\theta \end{cases}$	$\theta \in [0, 2\pi)$
椭圆	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$	$\theta \in [0, 2\pi)$
抛物线	$y^2 = 2px$	$\begin{cases} x = \frac{p}{2}t^2 \\ y = pt \end{cases}$	$t \in (-\infty, \infty)$

例 2.2.2. 将 $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$ 化为普通方程。
利用三角恒等式：$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
解出 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$：$\cos\theta = x/3, \sin\theta = y/3$
代入恒等式：$(x/3)^2 + (y/3)^2 = 1$
化简：$x^2 + y^2 = 9$
结果：普通方程为 $x^2 + y^2 = 9$ *(圆心在原点，半径为 3 的圆)*。

(2) 普通方程化为参数方程：核心思想是选择一个合适的参数 t。
选择参数没有固定方法，但通常选择 x 或 y 或它们的组合，或选择一个有几何意义的角。

例 2.2.3. 将直线 $y = 3x - 5$ 化为参数方程。
设 $x = t$：
代入原方程：$y = 3t - 5$
结果：$\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 5 \end{cases}$

例 2.2.4. 将椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 化为参数方程。
改写方程：$(\frac{x}{4})^2 + (\frac{y}{3})^2 = 1$
利用三角恒等式，设 $\frac{x}{4} = \cos\theta$ 和 $\frac{y}{3} = \sin\theta$：
结果：$\begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$ *(θ 为参数)*

参数方程是用一个独立的变量 t 来间接描述 x 和 y 的关系。

2.3 函数的极限

函数极限是微积分中的一个基本概念，它描述了一个函数在自变量（输入值）接近某一给定值时，它的函数值（输出值）所表现出的趋势。

函数极限的直观理解

（1）函数 $f(x)$ 在 x 趋近于 a 时的极限是 L，记作 $\lim_{x\to a} f(x) = L$。

（2）当 x 无限地接近 a（但不等于 a）时，函数值 $f(x)$ 会无限地接近一个确定的值 L。

（3）$f(x)$ 在 $x = a$ 处是否有定义，以及 $f(a)$ 的值是多少，并不影响 $\lim_{x\to a} f(x)$ 的结果。极限关注的是趋近过程，而非终点的值。

从上面直觉出发，逐渐演变完善了极限的 $\epsilon - \delta$ 定义。$\epsilon - \delta$ 定义为极限提供了逻辑严密性，但代价是牺牲了直觉性、增加了学习难度和操作复杂性。

格洛克极限定义

格洛克采用逆向思维，并以可视化的格洛克代数空间和无穷大无穷小的定义作为逻辑支撑，给出极限的定义。

定义 2.1 (函数的极限)**.** 对于函数 $f(x)$, $x \to a \iff x = a \pm \epsilon$，函数 $f(x)$ 在 x 趋近于 a 时的极限

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a \pm \epsilon) = f(a)$，如果 a 位于定义域区间内。

(2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a + \epsilon)$，如果 a 位于定义域区间左边界。

(3) $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a - \epsilon)$，如果 a 位于定义域区间右边界。

对于（2）和（3），如果 a 是闭区间边界，极限值应用 $f(a)$ 仍然成立。

格洛克将传统极限的动态趋近描述转换成了静态描述，因为在格洛克微空间“看到了”最接近 a 的极限位置。由此不再需要晦涩难解的逻辑推理描述，简单直接地进行极限计算。

例 2.3.1. 计算极限

(1) $\lim_{x\to 1}(2x+1)$ (2) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-x+5}{2x^3+4x^2-1}$ (3) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ (4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

解：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 2\cdot(1)+1 = 3$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-x+5}{2x^3+4x^2-1} = \dfrac{3\infty^3-\infty+5}{2\infty^3+4\infty^2-1} = \dfrac{3\infty^3}{2\infty^3} = \dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(2+\epsilon)^2-4}{(2+\epsilon)-2} = \dfrac{4\epsilon+\epsilon^2}{\epsilon} = 4+\epsilon = 4$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+\epsilon}-1}{\epsilon}$$
$$=\frac{(\sqrt{1+\epsilon}-1)(\sqrt{1+\epsilon}+1)}{\epsilon(\sqrt{1+\epsilon}+1)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}+1}=\frac{1}{2}$$

上例（3）和（4）略去了计算左极限，因为左右极限相等。

函数的连续性

（1）在定义域区间内函数总是连续的，在闭区间左边界右连续，在闭区间右边界左连续。

（2）如果分段函数的分段点有定义，分段子函数分别为 f_1, f_2，并且有 $f_1(a-\epsilon)=f_2(a+\epsilon)=f(a)$，那么分段函数在分段点处连续。

函数的连续性是显而易见的，换句话说，函数 $f(x)$ 的值随着自变量 x 的连续变化而连续变化。函数图形可视化的证明了函数的连续性。事实上，证明函数的连续性很容易进入逻辑上的循环证明。

讨论函数的连续性只有在函数的两个相邻区间的分段点处才有意义，格洛克采用分段函数的方式描述了这种情况，分段子函数 f_1, f_2 可以相同，也可以不同。具有苛刻定义的非常规函数因失去一般性不在这里进行讨论。

例 2.3.2. 计算极限

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$　　(2) $\lim_{x\to 0}|x|$

解：

$$(1)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\epsilon}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{\epsilon}=\infty$$

左右极限不相等，极限不存在。

$$(2)\ \lim_{x\to 0^-}|x|=|-\epsilon|=\epsilon=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}|x|=|\epsilon|=0$$

分段点 0 左右极限相等，极限存在，极限值为 0。

分段点 0 有定义且函数值为 0，所以函数在分段点 0 处连续。

例 2.3.3. 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

解： 这是一个著名的极限问题，传统上使用夹逼定理进行求解。

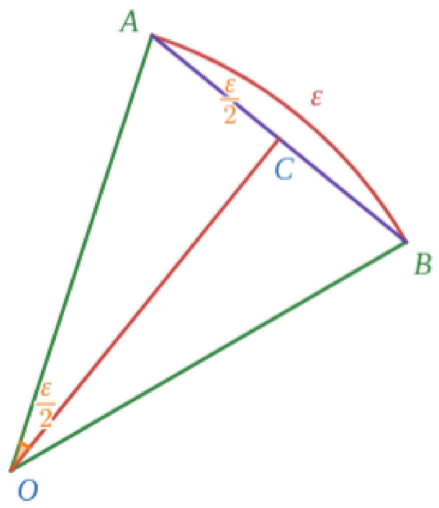


图 2.1: **单位圆上的弧**

当光滑曲线上的两点 A, B 越来越接近时，曲线弧 AB 与割线 AB 逐渐重合，换句话说，只要 A, B 两点的距离足够小，$\widehat{AB} = |AB|$，如图 *2.1* 所示。
我们取弧长 $\widehat{AB} = \epsilon$，得到如下关系：

$$|AB| = \epsilon, \quad \angle AOB = \epsilon, \quad |AC| = \angle AOC = \frac{\epsilon}{2}$$

根据三角公式

$$sin\frac{\epsilon}{2} = \frac{AC}{OA} = AC = \frac{\epsilon}{2}$$
$$\cos\frac{\epsilon}{2} = \frac{OC}{OA} = \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}$$

现在我们可以计算极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\epsilon}{\epsilon} &= \frac{2\sin\frac{\epsilon}{2}\cos\frac{\epsilon}{2}}{\epsilon} \\ &= \frac{2\cdot\frac{\epsilon}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}}{\epsilon} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

例 2.3.4. 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$$

解： 利用半角公式有 $\cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos\epsilon}{\epsilon}$$

$$= \frac{1 - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{\epsilon}$$
$$= \frac{2 \cdot \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}{\epsilon}$$
$$= \frac{1}{2}\epsilon = 0$$

极限的 $\epsilon - \delta$ 定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义。如果存在一个实数 L，使得：

对于任意给定的正数 ϵ (无论它多么小)，总存在一个正数 δ (它通常依赖于 ϵ)，使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - L| < \epsilon$ 成立。

则称 L 是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限，记作：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

2.4 自然常数和自然对数

自然常数 e 是数学中一个重要的无理数，常作为自然对数的底数出现。它大约等于 2.71828，并在许多自然现象、增长模型（如复利）和极限计算中扮演关键角色。

e 最早由瑞士数学家雅各布 · 伯努利（Jacob Bernoulli）在研究复利问题时发现，后来由莱昂哈德 · 欧拉（Leonhard Euler）在 18 世纪正式引入符号”e”（源自”exponential”，指数的）。

e 可以定义为以下极限：

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty = (1 + \epsilon)^\infty$$

从格洛克代数空间的角度看，自然常数是一个未解析的无穷大无穷小计算表达式。使用无穷大等效重定义 $\infty \leftarrow f(\infty)$，格洛克给出自然常数的定义。

定义 2.2. 自然常数

设 $f(\infty)$ 是关于 ∞ 的表达式，即 $f(\infty)$ 位于格洛克宏空间；$f(\epsilon)$ 是关于 ϵ 的表达式，即 $f(\epsilon)$ 位于格洛克微空间。自然常数 e 定义为

$$e = \left(1 + \frac{1}{f(\infty)}\right)^{f(\infty)} \tag{2.1}$$

$$e = (1 + f(\epsilon))^{1/f(\epsilon)} \tag{2.2}$$

需要明确的是，即使 $f(\infty), f(\epsilon)$ 是负值时，自然常数的定义仍然有效。

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{\infty}\right)^{-\infty} = \left(\frac{\infty-1}{\infty}\right)^{-\infty} &= \left(\frac{\infty}{\infty-1}\right)^{\infty}\\ &= \left(1+\frac{1}{\infty-1}\right)^{\infty-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\infty-1}\right)\\ &= e\cdot(1+\epsilon)\\ &= e\end{aligned}$$

自然对数，记作 $\ln(x)$，是以 e 为底的对数函数，它是 $\log_e(x)$ 的简写。

定理 2.1. 自然恒等式

$$(1+a\cdot\epsilon)^b = e^{ab\cdot\epsilon} = 1+ab\cdot\epsilon \tag{2.3}$$

$$a^\epsilon = e^{\ln a\cdot\epsilon} = 1+\ln a\cdot\epsilon \tag{2.4}$$

$$\ln(1+a\cdot\epsilon) = a\cdot\epsilon \tag{2.5}$$

证明

$$\begin{aligned}(1+a\cdot\epsilon)^b &= (1+a\cdot\epsilon)^{\frac{1}{a\epsilon}\cdot a\epsilon\cdot b}\\ &= e^{ab\cdot\epsilon}\\ &= (1+ab\cdot\epsilon)^{\frac{1}{ab\cdot\epsilon}\cdot(ab\cdot\epsilon)}\\ &= 1+ab\cdot\epsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^\epsilon &= e^{\ln a^\epsilon} = e^{\epsilon\cdot\ln a}\\ &= (1+\epsilon\cdot\ln a)^{\frac{1}{\epsilon\cdot\ln a}\cdot(\epsilon\cdot\ln a)}\\ &= 1+\ln a\cdot\epsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(1+a\cdot\epsilon) &= \ln e^{a\cdot\epsilon}\\ &= a\cdot\epsilon\cdot\ln e\\ &= a\cdot\epsilon\end{aligned}$$

例 2.4.1. 计算极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x &= \left(1+\frac{2}{\infty}\right)^{\infty}\\ &= \left(1+\frac{2}{\infty}\right)^{\frac{\infty}{2}\cdot 2}\end{aligned}$$

$$= e^2$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x} &= \frac{\ln(1+3\epsilon)}{\epsilon}\\ &= \frac{\ln e^{3\epsilon}}{\epsilon} = \frac{3\epsilon}{\epsilon}\\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= \frac{e^\epsilon-1}{\epsilon}\\ &= [(1+\epsilon)^{\infty\cdot\epsilon}-1]\cdot\frac{1}{\epsilon}\\ &= \frac{(1+\epsilon)-1}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon}\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} &= \frac{a^\epsilon-1}{\epsilon}\\ &= \frac{(1+\ln a\cdot\epsilon)-1}{\epsilon}\\ &= \frac{\ln a\cdot\epsilon}{\epsilon}\\ &= \ln a\end{aligned}$$

例 2.4.2. 计算极限 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}$，$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} &= \frac{\ln(1+\epsilon)}{1-(1+\epsilon)}\\ &= \frac{\ln e^\epsilon}{-\epsilon}\\ &= \frac{\epsilon}{-\epsilon} = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} &= \frac{\ln\infty}{\sqrt[n]{\infty}}\\ &= \frac{\ln\infty^n}{\sqrt[n]{\infty^n}} \qquad (\infty\leftarrow\infty^n)\\ &= \frac{n\ln\infty}{\infty} = 0\end{aligned}$$

自然恒等式是极限运算

显然，定理 2.1 的恒等结果是在舍弃更高阶无穷小后的极限运算结果，例如极限计算

$$\frac{e^{\epsilon^2}-1-\epsilon^2}{\epsilon^4}$$

我们不能简单的应用定理 2.1，那样分子将为 0，此时正确的方法是使用“平滑”的泰勒展开来得到更高阶无穷小，从而计算出正确的结果。

定理 2.1 的意义在于简化指数函数导数公式的推导，免去复杂的逻辑推理。

2.5 泰勒展开在极限计算中的应用

泰勒展开（Taylor Series Expansion）是计算涉及 e, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ 等基本函数的极限时，一个非常强大且高效的工具。

它主要利用函数在某一点（通常是 $x=0$，即麦克劳林展开）附近的多项式近似来简化分子和分母。

常用函数的麦克劳林展开式 $(x\to 0)$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \tag{2.6}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \tag{2.7}$$

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots \tag{2.8}$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \tag{2.9}$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \tag{2.10}$$

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots \tag{2.11}$$

例 2.5.1. 计算极限

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \frac{\ln(1+\epsilon)}{\epsilon}=\frac{\epsilon}{\epsilon}=1\\
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} &= \frac{\ln(\cos\epsilon)}{\epsilon^2}=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2}\epsilon^2\right)}{\epsilon^2}\\
&= \frac{-\frac{1}{2}\epsilon^2}{\epsilon^2}=-\frac{1}{2}\\
\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4} &= \frac{e^{\epsilon^2}-1-\epsilon^2}{\epsilon^4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left(1+\epsilon^2+\frac{1}{2}\epsilon^4\right)-1-\epsilon^2}{\epsilon^4} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\epsilon^4}{\epsilon^4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

例 2.5.2. 计算极限

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\epsilon}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1
$$

$$
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos\epsilon}{\epsilon} = \frac{1-(1-\frac{1}{2}\epsilon^2)}{\epsilon} = \frac{1}{2}\epsilon = 0
$$

使用泰勒展开计算极限的要点:

(1)确定阶数:根据分母的无穷小阶数来确定分子和分母需要展开到的阶数。目标是让分子中最低次项(非零项)的阶数与分母的阶数相等。

(2)抵消低阶项:展开后,分子中的低阶项(如常数项、一次项等)通常会相互抵消,只剩下与分母同阶或更高阶的无穷小项。

(3)提取主部:保留分子分母中最低次项的系数,即可求出极限。

我们在学习泰勒级数之前,提前利用泰勒级数的展开式来简化复杂极限的计算,避免进行不必要的复杂逻辑分析。

循环论证

复杂多项式的泰勒级数展开在计算极限时很强大和直观,但是注意不能用它来证明极限和导数的推导,因为泰勒级数是在极限和导数的理论框架下推导出来的。否则可能会出现循环论证的逻辑错误。

第三章　点微分和导数

传统上，微分是描述函数在某一点附近变化的线性近似。这也是微积分学混乱而难学的根源之一。

格洛克利用全新定义的无穷小概念，对微分进行了重新定义：微分是函数在某一点的极限变化量。并和导数进行了统一，形成微分表达式。

导数是描述函数在某一点变化率的精确数值。传统的极限理解方式和计算方法让初学者对导数的学习曲线非常陡峭，莱布尼兹的导数定义符号 $\frac{d}{dx}F(x)$ 大大增加了导数的神秘性。

格洛克弃用莱布尼兹导数表示符号，回归常识，重新描述导数为微分表达式的变换，即导数是函数微分和自变量微分的商。与传统导数概念描述不同的是，导数本质上是一个二级定义，它不是原子定义，而是建立在微分定义之上。

3.1　极限变化量与点微分

通过前面二章的学习，我们具备了解决瞬时速度和切线问题的理论框架，以此为切入点，引出点微分的概念。

瞬时速度问题

我们首先考察平均速度的问题，如果位移函数 $S = F(x)$，其中自变量 x 表示时间，那么在 t_1, t_2 时间间隔内的平均速度表示为

$$\overline{v} = \frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1}$$

如果我们用 Δt 表示时间间隔，即 $\Delta t = t_2 - t_1$，那么平均速度又可以表示为

$$\overline{v} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}$$

可以看出，计算平均速度的公式很简单，计算也很容易。

我们现在的问题是如何计算 $x = t$ 时刻的瞬时速度？问题的难点在于速度的计算要求时间间隔必须存在，唯一的办法是不断缩小时间间隔 Δt，以此来获取一个近似的 t 时刻的瞬时速度。Δt 越小，得到的平均速度就越接近瞬时速度。

基于格洛克代数空间，我们在数值 t 处进行格洛克微空间展开，获取最小的时间间隔 ϵ，得到 t 时刻的瞬时速度

$$v = \frac{F(t+\epsilon) - F(t)}{\epsilon}$$

对于任意时刻 x，我们得到数学描述的速度函数

$$v(x) = \frac{F(x+\epsilon) - F(x)}{\epsilon} \tag{3.1}$$

这是一个极限运算，可以用我们在第二章的极限计算方法计算出 $v(x)$ 函数。

例 3.1.1. 假设一个物体沿直线运动，其位移 S（单位：米，m）随时间 t（单位：秒，s）变化的函数关系为：

$$S(t) = 3t^2 + 5t - 2$$

计算该物体在 $t = 2$ 秒时的瞬时速度。

解：

首先求解瞬时速度函数 $v(t)$:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{S(t+\epsilon) - S(t)}{(t+\epsilon) - t} \\
&= \frac{[3(t+\epsilon)^2 + 5(t+\epsilon) - 2] - (3t^2 + 5t - 2)}{\epsilon} \\
&= \frac{(3t^2 + 6t\cdot\epsilon + 3\epsilon^2 + 5t + 5\epsilon - 2) - (3t^2 + 5t - 2)}{\epsilon} \\
&= \frac{6t\cdot\epsilon + 5\epsilon + 3\epsilon^2}{\epsilon} \\
&= 6t + 5 + 3\epsilon \\
&= 6t + 5
\end{aligned}$$

有了速度函数，现在我们可以计算物体在 $t = 2$ 秒时的瞬时速度

$$v(2) = 6 \cdot (2) + 5 = 17$$

切线斜率问题

几何上，直线的斜率可通过已知的两点坐标计算

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

切线是一条“刚好触碰”曲线上某一点的直线。对于曲线 $y = F(x)$ 上的某一点 P，如果我们要计算经过 P 点切线的斜率，会遇到和上面计算瞬时速度相同的

问题，我们还需要曲线上额外的一点 Q，即计算割线 PQ 的斜率来近似 P 点切线的斜率。Q 越接近 P，计算的割线斜率就越接近 P 点切线的斜率。

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

令 $\Delta x = x_Q - x_P$，并使 Δx 足够小，曲线 $y = F(x)$ 上经过 P 点切线的斜率可近似表示为

$$m_P \approx \frac{F(x_P + \Delta x) - F(x_P)}{\Delta x}$$

我们在数值 x_P 处进行格洛克微空间展开，获取最小的 PQ 间隔 ϵ，得到 P 点切线的斜率

$$m_P = \frac{F(x_P + \epsilon) - F(x_P)}{\epsilon}$$

对于曲线上的任意点 $(x, F(x))$，切线的斜率函数表示为

$$m(x) = \frac{F(x + \epsilon) - F(x)}{\epsilon} \tag{3.2}$$

例 3.1.2. *计算抛物线 $y = x^2$ 在点 $(2,4)$ 处的切线斜率，并求出通过该点的切线方程。*

解：

首先求解抛物线的切线斜率函数 $m(x)$:

$$\begin{aligned}
m(x) &= \frac{F(x+\epsilon) - F(x)}{\epsilon} \\
&= \frac{(x+\epsilon)^2 - x^2}{\epsilon} \\
&= \frac{(x^2 + 2x\cdot\epsilon + \epsilon^2) - x^2}{\epsilon} \\
&= \frac{2x\cdot\epsilon + \epsilon^2}{\epsilon} \\
&= 2x + \epsilon \\
&= 2x
\end{aligned}$$

有了斜率函数，现在我们可以计算抛物线 $y = x^2$ 在点 $(2,4)$ 处的切线斜率

$$m(2) = 2 \cdot (2) = 4$$

切线方程 (点斜式):

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= m(x - x_0) \\
y - 4 &= 4(x - 2) \\
y &= 4x - 8 + 4 \\
y &= 4x - 4
\end{aligned}$$

从上面两个例子可以看出，速度问题和切线斜率问题虽然完全不同，但在解决问题的数学方法上却完全相同：我们需要找到自变量的极限变化量和对应函数的极限变化量，通过除法得到要解决问题的极限变化率。由此引出和传统定义完全不同的微分概念和定义：

定义 3.1. 微分

对于函数 $F(x)$，自变量 x 通过格洛克微空间展开的方式获得 $(x, F(x)$ 极限变化量的过程称为微分。如果 $\delta = f(\epsilon)$ 是无穷小的表达式，微分用符号 d 表示，那么

(1) $dx = (x+\delta) - x$，称为微分自变量。

(2) $dF(x) = F(x+\delta) - F(x)$，称为微分表达式。

(3) 基于最简计算原则，通常取 $\delta = \epsilon$。

对于（1）包含两层含义，首先定义了微分点 x，然后是自变量极限变化量的大小 $\delta = \epsilon$，这是最简单的表示，也可以是无穷小的表达式。

对于（2）首先是一个微分表达式而不是一个直接计算结果的值，因为进行极限计算

$$F(x+\epsilon) - F(x) = F(x) - F(x) = 0$$

其次 $dF(x)$ 是与 x 相对应的极限变化量，也就是随着 x 的变化，$dF(x)$ 也随之变化。最后，定义中给出的是 x 右侧的极限变化量，取左侧或同时取两侧也是正确的，定义中未明确是为了保持简单。因此 $dF(x)$ 可以表示为

$$dF(x) = F(x+\epsilon) - F(x) = F(x) - F(x-\epsilon) = F(x+\epsilon/2) - F(x-\epsilon/2)$$

对于定义域的闭区间边界只能取右侧或左侧极限变化量。

因此，（3.1）和（3.2）可以统一表示为

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

微分表达式与微分自变量的比值称为微分变化率，极限变化率或瞬时变化率，传统上统一定义为导函数，简称导数。

3.2 导数和导数公式

有了微分的定义，我们在此基础上定义导函数。导函数简称导数。

定义 3.2. 导函数

微分表达式与微分自变量的比值函数称为导函数。如果原函数用 $f(x)$ 表示，那么导函数用 $f'(x)$ 表示。

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

需要注意的是，对于 $\frac{d}{dx}f(x)$，我们不使用 $\frac{d}{dx}$ 作为导数的表示符号，而是作为除法表达式。

导数用来描述函数相对其自变量的微分变化率，极限变化率或瞬时变化率，或者几何上的曲线切线的斜率。

如果 $F(x)$ 表示原函数，那么通常用 $f(x)$ 表示导函数，有时也用 $F'(x)$ 表示导函数。

例 3.2.1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$，求函数在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率，并求出通过该点的切线方程。

解:

首先求导函数 $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{(x+\epsilon) - \epsilon} \\ &= \frac{1/(x+\epsilon) - 1/x}{\epsilon} \\ &= \frac{x - (x+\epsilon)}{x(x+\epsilon)} \cdot \frac{1}{\epsilon} \\ &= \frac{-\epsilon}{x(x+\epsilon)} \cdot \frac{1}{\epsilon} \\ &= -\frac{1}{x^2 + x \cdot \epsilon} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

有了导函数，现在我们可以计算函数在点 $(1, f(1)) = (1, 1)$ 处的切线斜率

$$f'(1) = -\frac{1}{(1)^2} = -1$$

切线方程 *(点斜式)*:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = (-1) \cdot (x - 1)$$

$$y = -x + 1 + 1$$

$$y = -x + 2$$

常用导函数公式

求解导函数，需要同时进行代数运算和极限运算，从示例可以看出，即使是简单的原函数，求解导函数也相当繁琐。因此有必要推导一些常用函数的导函数形成导函数公式，避免重复进行极限的繁琐计算。

（1）常数函数 $f(x) = C$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} = \frac{C - C}{\epsilon} = 0$$

所以，常数函数的导函数为 0，即

$$f'(x) = \frac{dC}{dx} = 0 \tag{3.3}$$

（2）幂函数 $f(x) = x^n$

当 n 为整数时，考虑二项式定理

$$\begin{aligned}(x+\epsilon)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\epsilon^k \\ &= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\epsilon + \binom{n}{2} x^{n-2}\epsilon^2 + \cdots + \epsilon^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx^n}{dx} &= \frac{(x+\epsilon)^n - x^n}{\epsilon} \\ &= \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\epsilon + \binom{n}{2}x^{n-2}\epsilon^2 + \cdots + \epsilon^n\right] - x^n}{\epsilon} \\ &= nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\epsilon + \cdots + \epsilon^{n-1} \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

当 n 为一般实数时上面的公式也成立，通常需要依赖于指数和对数函数的导数公式，本节稍后作为例题进行推导。

所以，幂函数的导数公式

$$f'(x) = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{3.4}$$

（3）指数函数 $f(x) = e^x$，$f(x) = a^x$

使用上一章的自然恒等式 $e^\epsilon = 1 + \epsilon$，$a^\epsilon = 1 + \ln a \cdot \epsilon$

$$\begin{aligned}\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+\epsilon} - e^x}{\epsilon} \\ &= \frac{e^x \cdot (e^\epsilon - 1)}{\epsilon}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^x \cdot \frac{e^\epsilon - 1}{\epsilon} \\
&= e^x \cdot \frac{(1+\epsilon) - 1}{\epsilon} \\
&= e^x \cdot 1 = e^x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{da^x}{dx} &= \frac{a^{x+\epsilon} - a^x}{\epsilon} \\
&= \frac{a^x \cdot (a^\epsilon - 1)}{\epsilon} \\
&= a^x \cdot \frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon} \\
&= a^x \cdot \frac{(1 + \ln a \cdot \epsilon) - 1}{\epsilon} \\
&= a^x \ln a
\end{aligned}
$$

所以，指数函数的导数公式

$$
f'(x) = \frac{e^x}{dx} = e^x \tag{3.5}
$$

$$
f'(x) = \frac{a^x}{dx} = a^x \ln a \tag{3.6}
$$

(4) 对数函数 $f(x) = \ln x$，$f(x) = \log_a x$

使用上一章的自然恒等式 $\ln(1 + a\epsilon) = a\epsilon$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\ln x}{dx} &= \frac{\ln(x+\epsilon) - \ln x}{\epsilon} \\
&= \ln \frac{x+\epsilon}{x} \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \ln(1 + \frac{1}{x} \cdot \epsilon) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\log_a x}{dx} &= \frac{\log_a(x+\epsilon) - \log_a x}{\epsilon} \\
&= \log_a \frac{x+\epsilon}{x} \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \log_a(1 + \frac{\epsilon}{x}) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{\ln(1 + \frac{\epsilon}{x})}{\ln a} \cdot \frac{1}{\epsilon}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{\epsilon}{x} \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \frac{1}{x \ln a}
\end{aligned}
$$

所以，对数函数的导数公式

$$
f'(x) = \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} \tag{3.7}
$$

$$
f'(x) = \frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x \ln a} \tag{3.8}
$$

例 3.2.2. 推导幂函数 $f(x) = x^n$ 的导数公式。

$$
\begin{aligned}
\frac{dx^n}{dx} &= \frac{(x+\epsilon)^n - x^n}{\epsilon} \\
&= \left(e^{n \ln(x+\epsilon)} - e^{n \ln x}\right) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \left(e^{n \ln x + n \ln(1+\frac{\epsilon}{x})} - e^{n \ln x}\right) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= \left(e^{n \ln x + \frac{n\epsilon}{x}} - e^{n \ln x}\right) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= e^{n \ln x} \cdot \left(e^{\frac{n\epsilon}{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{\epsilon} \\
&= x^n \cdot \frac{(1 + \frac{n\epsilon}{x}) - 1}{\epsilon} \\
&= x^n \cdot \frac{n}{x} \\
&= n x^{n-1}
\end{aligned}
$$

（5）三角函数 $f(x) = \sin x$，$f(x) = \cos x$

对于 $f(x) = \sin x$，考虑使用和角公式 $\sin(x+\epsilon) = \sin x \cdot \cos\epsilon + \cos x \cdot \sin\epsilon$。

$$
\begin{aligned}
\frac{d \sin x}{dx} &= \frac{\sin(x+\epsilon) - \sin x}{\epsilon} \\
&= \frac{(\sin x \cdot \cos\epsilon + \cos x \cdot \sin\epsilon) - \sin x}{\epsilon} \\
&= \frac{\sin x(\cos\epsilon - 1) + \cos x \cdot \sin\epsilon}{\epsilon} \\
&= \sin x \cdot \frac{\cos\epsilon - 1}{\epsilon} + \cos x \cdot \frac{\sin\epsilon}{\epsilon} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

对于 $f(x) = \cos x$，考虑使用和角公式 $\cos(x+\epsilon) = \cos x \cos\epsilon - \sin x \sin\epsilon$。

$$
\frac{d \cos x}{dx} = \frac{\cos(x+\epsilon) - \cos x}{\epsilon}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos x \cos\epsilon - \sin x \sin\epsilon - \cos x}{\epsilon} \\
&= \frac{\cos x(\cos\epsilon - 1) - \sin x \sin\epsilon}{\epsilon} \\
&= \cos x \cdot \frac{\cos\epsilon - 1}{\epsilon} - \sin x \cdot \frac{\sin\epsilon}{\epsilon} \\
&= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

所以，三角函数的导数公式

$$f'(x) = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x \tag{3.9}$$

$$f'(x) = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \tag{3.10}$$

这些是常用的基本函数导数公式，其它直接推导相对复杂的函数，我们在后续章节中利用导数的运算法则进行推导。

基本函数导数公式

函数$f(x)$	导数$f'(x)$
C（常数）	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

3.3 导数的运算法则

假设 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$ 都是可导函数，C 是常数。

（1）常数与函数积的导数 $(Cu)' = Cu'$

$$\frac{dCu(x)}{dx} = \frac{Cu(x+\epsilon) - Cu(x)}{\epsilon} = C \cdot \frac{u(x+\epsilon) - u(x)}{\epsilon} = C \cdot \frac{du(x)}{dx}$$

（2）和或差的导数 $(u \pm v)' = u' \pm v'$

$$\begin{aligned}\frac{d[u(x)+v(x)]}{dx} &= \frac{[u(x+\epsilon)+v(x+\epsilon)] - [u(x)+v(x)]}{\epsilon} \\ &= \frac{u(x+\epsilon) - u(x)}{\epsilon} + \frac{v(x+\epsilon) - v(x)}{\epsilon} \\ &= \frac{du(x)}{dx} + \frac{dv(x)}{dx} = u' + v'\end{aligned}$$

例 3.3.1. 求 $f(x) = x^5 + \ln x$ 的导数。

$$f'(x) = (x^5)' + (\ln x)' = 5x^{5-1} + \frac{1}{x} = 5x^4 + \frac{1}{x}$$

(3) 积的导数（乘法法则）$(uv)' = u'v + uv'$
积的导数可参考图 3.1 进行计算。

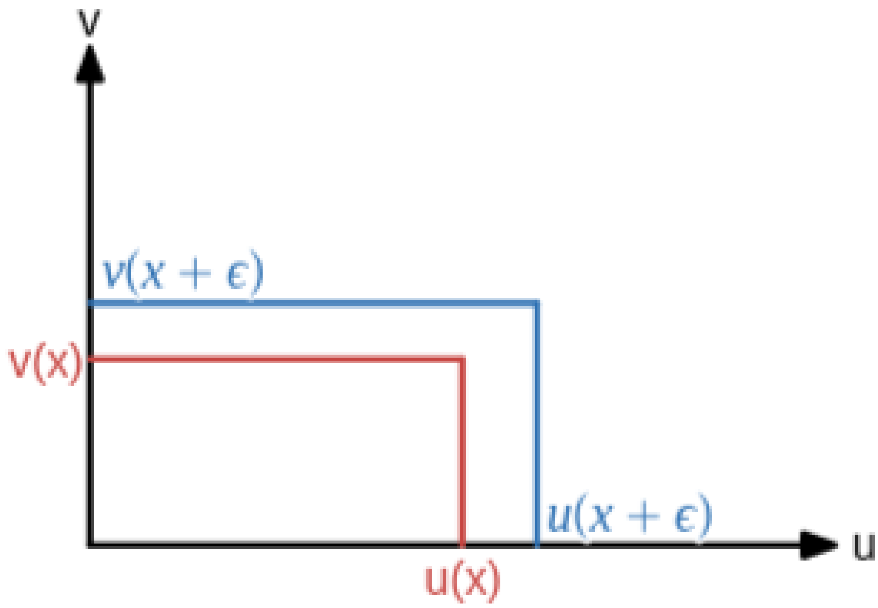


图 3.1: **积的导数**

$$\begin{aligned}&\frac{d[u(x)v(x)]}{dx} = \frac{u(x+\epsilon)v(x+\epsilon) - u(x)v(x)}{\epsilon} \\ &= \frac{[u(x+\epsilon) - u(x)]v(x) + u(x)[v(x+\epsilon) - v(x)] + [u(x+\epsilon) - u(x)] \cdot [v(x+\epsilon) - v(x)]}{\epsilon} \\ &= \frac{du(x)}{dx} \cdot v(x) + u(x) \cdot \frac{dv(x)}{dx} + \frac{[u(x+\epsilon) - u(x)] \cdot [v(x+\epsilon) - v(x)]}{\epsilon^2} \cdot \epsilon\end{aligned}$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + u'(x)v'(x)\cdot\epsilon$$
$$= u'v + uv'$$

例 3.3.2. 求 $g(x) = x\cos x$ 的导数。

$$g'(x) = (x)'\cos x + x(\cos x)' = 1\cdot\cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$$

（4）商的导数（除法法则）

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

仍然参考图 3.1 进行面积变换。

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)' &= \left[\frac{u(x+\epsilon)}{v(x+\epsilon)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\frac{1}{\epsilon}\\ &= \frac{u(x+\epsilon)v(x) - u(x)v(x+\epsilon)}{v(x+\epsilon)v(x)\cdot\epsilon}\\ &= \frac{[u(x+\epsilon)-u(x)]\cdot v(x) - u(x)\cdot[v(x+\epsilon)-v(x)]}{v(x+\epsilon)v(x)\cdot\epsilon}\\ &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x+\epsilon)v(x)}\\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2}\end{aligned}$$

例 3.3.3. 求 $f(x) = \tan x$ 的导数。

$$\begin{aligned}(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

所以

$$(\tan x)' = \sec^2 x \tag{3.11}$$

例 3.3.4. 求 $f(x) = \sec x$ 的导数。

$$\begin{aligned}(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right) &= \frac{(1)'\cdot\cos x - (1)\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}\\ &= \frac{0\cdot\cos x - (-\sin x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x\tan x\end{aligned}$$

所以

$$(\sec x)' = \sec x\tan x \tag{3.12}$$

（5）链式法则（复合函数求导）
如果 $y=f(u)$ 且 $u=g(x)$，那么 y 对 x 的导数：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}\quad \text{或} \quad [f(g(x))]'=f'(u)\cdot g'(x)$$

链式法则是除法运算的简单算术变换，可以用相对速度的概念进行理解。

例 3.3.5. 求 $h(x)=e^{2x}$ 的导数。
令 $u=2x$，则 $h(x)=e^u$。

$$\frac{dh}{dx}=\frac{d(e^u)}{du}\cdot\frac{d(2x)}{dx}=e^u\cdot 2=2e^{2x}$$

（6）反函数的导数
假设 f 是一个可导的单调函数，并且 $u(x)=f(x)$ 有反函数 $v(x)=f^{-1}(x)$，那么 $u(x)$ 和 $v(x)$ 互为反函数。我们想要推导出 $v'(x)$ 用 $u'(x)$ 表示的公式。
首先，由反函数的定义，知道

$$u(v(x))=x$$

等式两边关于 x 求导 (使用链式法则):

$$[u(v(x))]'=(x)'$$

左边应用链式法则，右边直接求导得到 1。所以有：

$$u'(v)\cdot v'(x)=1$$

将 $v'(x)$ 单独提出来:

$$v'(x)=\frac{1}{u'(v)}$$

所以如果 $u(x)$, $v(x)$ 互为反函数，则用反函数表示的导数公式为：

$$v'(x)=\frac{1}{u'(v)} \tag{3.13}$$

例 3.3.6. 假设 $f(x)=x^3$，那么反函数为 $f(x)=x^{1/3}$。求反函数的导数。
首先，表示为标准公式形式，$u(x)=x^3$, $v(x)=x^{1/3}$
那么，

$$u'(x)=3x^2,\ u'(v)=3\left[x^{1/3}\right]^2=3x^{2/3}$$

反函数的导数

$$v'(x)=\frac{1}{u'(v)}=\frac{1}{3x^{2/3}}$$

例 3.3.7. 求 $\arctan x$ 的导数。
首先，表示为标准公式形式，$v(x) = \arctan x$，$u(x) = \tan x$
那么，$u(v) = \tan(\arctan x) = x$，

$$u'(x) = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + u^2(x)$$
$$u'(v) = 1 + u^2(v) = 1 + x^2$$
$$v'(x) = \frac{1}{u'(v)} = \frac{1}{1+x^2}$$

函数 $\arctan x$ 的导数

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{3.14}$$

(7) 隐函数求导
如果一个函数关系不能写成 $y = f(x)$（或 $z = f(x, y)$ 等）的显式形式，而是以一个包含自变量和因变量的方程 $F(x, y) = 0$（或 $F(x, y, z) = 0$ 等）给出，那么 y（或 z）就是由该方程所确定的 x（或 x, y）的隐函数。
例如：$x^2 + y^2 = 1 \qquad e^y + xy = 5$
对于由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = y(x)$，求导的基本思路是利用链式法则，将 y 视为 x 的函数，对原方程两边同时关于 x 求导。
隐函数求导步骤
(1) 视为复合函数：将方程 $F(x, y) = 0$ 中的因变量 y 看作是自变量 x 的函数，即 $y = y(x)$。
(2) 两边求导：对原方程 $F(x, y) = 0$ 的等号两边同时关于 x 求导。
在求导过程中，所有包含 y 的项（如 $y^2, xy, \sin(y)$ 等）都必须使用链式法则。例如，
$\frac{d(y^2)}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx}$；
$\frac{d(xy)}{dx}$ 需使用乘积法则和链式法则：
$\frac{d(x)}{dx} \cdot y + x \cdot \frac{d(y)}{dx} = 1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}$。
(3) 分离导数：整理求导后的方程，将含有 $\frac{dy}{dx}$（或 y'）的项移到方程的一边，不含 $\frac{dy}{dx}$ 的项移到另一边。
(4) 解出导数：解出 $\frac{dy}{dx}$ 的表达式。

例 3.3.8. 求由方程 $x^2 + y^2 = 25$ 确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$。
两边求导：对 $x^2 + y^2 = 25$ 两边关于 x 求导：

$$\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(25)}{dx}$$

$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$，$\frac{d(y^2)}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx}$(链式法则)，$\frac{d(25)}{dx} = 0$，得到方程：

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

分离导数：将含 $\frac{dy}{dx}$ 的项保留，其余项移项：

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

解出导数：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

例 3.3.9. 求 $\arcsin x$ 的导数。

设 $y = \arcsin x$，对等式两边取 sin：

$$\sin y = x$$

对等式两边关于 x 求导：

$$\frac{d(\sin y)}{dx} = \frac{d(x)}{dx}$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

解出 $\frac{dy}{dx}$：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

现在我们需要用 x 来表示 $\cos y$。我们使用三角恒等式 $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$：

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$$

因为我们最初定义 $\sin y = x$，所以代入：

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

$\arcsin x$ 的值域是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。在这个区间内，$\cos y$ 总是非负数 $(\cos y \geq 0)$。因此，我们只取正根：

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

将此结果代回：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

函数 $\arcsin x$ 的导数

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{3.15}$$

3.4 参数方程求导

当一个函数 y 不直接表示为 x 的函数 $y=f(x)$，而是通过第三个变量（参数 t）来表示 x 和 y 时，即：

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

其中 t 是参数。我们要求的是 $\frac{dy}{dx}$，即 y 对 x 的导数。
根据链式法则 (Chain Rule)，我们可以将 $\frac{dy}{dx}$ 表示为关于参数 t 的导数的比值：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{3.16}$$

其中：
$\frac{dy}{dt}$ 是 y 对参数 t 的导数，即 $g'(t)$。
$\frac{dx}{dt}$ 是 x 对参数 t 的导数，即 $f'(t)$。
注意：进行求导的前提是 $\frac{dx}{dt} \neq 0$。

例 3.4.1. 求参数方程 $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$。
步骤 *1*：分别求 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t+1) = 2$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t$$

步骤 *2*：利用公式求 $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{2} = t$$

例 3.4.2. 由参数方程定义的圆：

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$$

求出当参数 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，该曲线（圆）的切线斜率。
确定切点坐标：
$x_0 = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
$y_0 = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
切点是 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$。

分别对 x 和 y 关于参数 t 求导并计算导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(3\cos t) = -3\sin t\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(3\sin t) = 3\cos t\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3\cos t}{-3\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot t\end{aligned}$$

结果 $\frac{dy}{dx} = -\cot t$ 是曲线的切线斜率关于参数 t 的表达式。
将 $t = \frac{\pi}{4}$ 代入 $\frac{dy}{dx}$ 的表达式:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时，该参数曲线（圆）在点 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切线斜率为 -1。

摆线是圆在平面上滚动时，圆周上一点的轨迹，它在微积分中非常经典。
摆线的参数方程通常定义为（假设圆的半径为 R）:

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

其中 θ 是参数，代表圆滚动的角度。

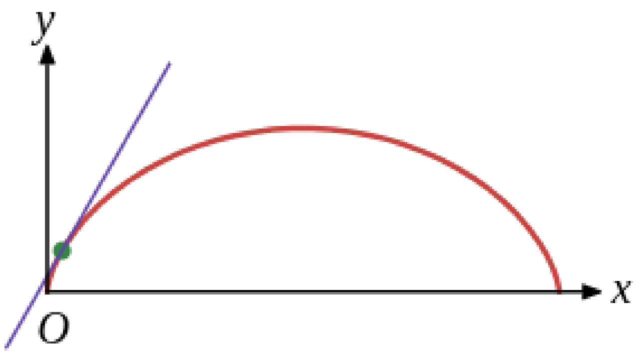


图 3.2: **摆线在对应点的切线斜率**

我们来求当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时，摆线在对应点的切线斜率。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= \frac{dR(\theta - \sin\theta)}{d\theta} = R(1 - \cos\theta)\\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{dR(1 - \cos\theta)}{d\theta} = R(0 - (-\sin\theta)) = R\sin\theta\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{R\sin\theta}{R(1 - \cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}\end{aligned}$$

将 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 代入 $\frac{dy}{dx}$ 的表达式：
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时，摆线在对应点的切线斜率为 $\sqrt{3}$。

3.5 高阶导数

高阶导数（Higher-order derivative）是指一个函数的导数的导数。

一阶导数：函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$。它表示函数 $f(x)$ 随变量 x 的变化率。
二阶导数：如果一阶导数 $f'(x)$ 仍然可导，那么 $f'(x)$ 的导数就是函数 $f(x)$ 的二阶导数，记作 $f''(x)$ 或 $f^{(2)}(x)$。它表示函数变化率的变化率（即曲率或在物理学中的加速度）。
n 阶导数：一般地，如果一个函数的 $(n-1)$ 阶导数是可导的，那么其导数就是该函数的 n 阶导数，记作 $f^{(n)}(x)$。

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数。

如果 $s(t)$ 是物体在时刻 t 的位移，则：
一阶导数 $s'(t)$ 是速度 $v(t)$。
二阶导数 $s''(t)$ 是加速度 $a(t)$。
三阶导数 $s'''(t)$ 是加加速度（Jerk）。

二阶导数可以用来判断函数图形的凹凸性：
若 $f''(x) > 0$，则函数图形在该区间上是凹的（向上弯曲）。
若 $f''(x) < 0$，则函数图形在该区间上是凸的（向下弯曲）

高阶导数是构造函数的泰勒级数（Taylor series）的关键。
高阶导数保证了多项式在局部与原函数在每一个细节（斜率、弯曲度、更复杂的弯曲变化）上都吻合，实现了在局部区间内对原函数的最优多项式逼近。

3.6 泰勒级数和麦克劳林级数

我们在上一章的末尾展示了泰勒级数在计算极限时的强大应用。
对于一个在某点 a 处无限可导的函数 $f(x)$，我们希望用一个多项式来近似表示它，并且要求这个多项式在 $x = a$ 及其附近与原函数 $f(x)$ 有相同的值和相同的

各阶导数值。这个多项式就是泰勒多项式（Taylor Polynomial），当其项数趋于无穷时，就变成了泰勒级数。

泰勒级数的推导

我们假设要找一个 n 次多项式 $P_n(x)$ 来近似 $f(x)$，以 $x=a$ 为中心点：

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

目标是确定系数 $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$。

（1）确定 c_0

我们要求多项式在 $x=a$ 处的值与函数值相等：

$$P_n(a) = f(a)$$

代入 $P_n(x)$ 的表达式：

$$\begin{aligned} P_n(a) &= c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots \\ P_n(a) &= c_0 \end{aligned}$$

因此，第一个系数 c_0 为：

$$c_0 = f(a)$$

（2）确定 c_1

我们要求多项式在 $x=a$ 处的一阶导数值与函数的一阶导数值相等：

$$P_n'(a) = f'(a)$$

先求 $P_n(x)$ 的一阶导数：

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots$$

代入 $x=a$：

$$\begin{aligned} P_n'(a) &= c_1 + 2c_2(0) + 3c_3(0) + \cdots \\ P_n'(a) &= c_1 \end{aligned}$$

因此，第二个系数 c_1 为：

$$c_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!}$$

（3）确定 c_2

我们要求多项式在 $x=a$ 处的二阶导数值与函数的二阶导数值相等：

$$P_n''(a) = f''(a)$$

先求 $P_n'(x)$ 的导数，即 $P_n(x)$ 的二阶导数：

$$P_n''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots$$

代入 $x = a$：

$$\begin{aligned} P_n''(a) &= 2c_2 + 0 + 0 + \cdots \\ P_n''(a) &= 2c_2 \end{aligned}$$

因此，第三个系数 c_2 为：

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!}$$

（4）确定 c_k (一般项)

通过归纳法，我们可以看到一般的规律。对于第 k 阶导数 $P_n^{(k)}(x)$，当 $x = a$ 时，所有包含 $(x-a)$ 因子的项都为零，只剩下常数项：

$$P_n^{(k)}(x) = k!c_k + \text{包含}(x-a)\text{的项}$$

因此，我们要求：

$$\begin{aligned} P_n^{(k)}(a) &= f^{(k)}(a) \\ k!c_k &= f^{(k)}(a) \end{aligned}$$

解出系数 c_k：

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

将所有系数 c_k 代回原来的多项式表达式，并将项数 n 延伸至无穷大，就得到了泰勒级数的表达式。

对于一个在点 a 处无限可导的函数 $f(x)$，其泰勒级数为：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{3.17}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \tag{3.18}$$

a: 级数的中心点或展开点。级数在离 a 越近的地方，近似效果越好。

$f^{(n)}(a)$: 函数 $f(x)$ 的 n 阶导数在点 $x = a$ 处的值。

$n!$: n 的阶乘。

麦克劳林级数

麦克劳林级数是泰勒级数的一个特殊情况，即展开点 $a = 0$ 时的泰勒级数。

麦克劳林级数是函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n \tag{3.19}$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots \tag{3.20}$$

泰勒级数本质上是利用函数在一点（a）处的值和各阶导数值来构造一个无限阶多项式，使该多项式能够完全匹配原函数在该点处的局部行为。

例 3.6.1. 函数 $f(x)=e^x$ 的麦克劳林级数

(*1*) 计算函数及其各阶导数

我们需要计算函数 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的各阶导数值 $f^{(k)}(0)$。

k	$f^{(k)}(x)$ (第 k 阶导数)	$f^{(k)}(0)$ (在 $x=0$ 处的值)
0	$f(x)=e^x$	$f(0)=e^0=1$
1	$f'(x)=e^x$	$f'(0)=e^0=1$
2	$f''(x)=e^x$	$f''(0)=e^0=1$
3	$f'''(x)=e^x$	$f'''(0)=e^0=1$
k	$f^{(k)}(x)=e^x$	$f^{(k)}(0)=e^0=1$

可以看出，对于函数 $f(x)=e^x$，在 $x=0$ 处的任意阶导数值都等于 1，即 $f^{(k)}(0)=1$。

(*2*) 代入麦克劳林级数公式

将计算得到的导数值 $f^{(k)}(0)=1$ 代入麦克劳林级数公式：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$$

(*3*) 展开级数

将求和符号展开，列出级数的前几项：

$$e^x=\frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots$$

$$e^x=\frac{1}{0!}x^0+\frac{1}{1!}x^1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

由于 $0!=1$ 且 $x^0=1$ (对于 $x\neq 0$)，我们得到最终的麦克劳林级数（即 e^x 的泰勒级数）：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{3.21}$$

如果想以任意点 a 为中心展开 $f(x)=e^x$，则各阶导数值：$f^{(k)}(a)=e^a$。泰勒级数：

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a}{k!}(x-a)^k \\
e^x &= e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

可以看出，这个形式是 (e^a) 乘以 $\left(1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots\right)$，这与 e^{x-a} 的麦克劳林级数相乘，符合指数函数的性质 $e^x=e^a\cdot e^{x-a}$。

例 3.6.2. 函数 $f(x)=\sin x$ 的麦克劳林级数

(*1*) 计算函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值

我们需要计算 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的各阶导数的值 $f^{(n)}(0)$：

$$
\begin{array}{lll}
\text{第 } \mathit{0} \text{ 阶：} & f(x)=\sin x & f(0)=\sin(0)=0 \\
\text{第 } \mathit{1} \text{ 阶：} & f'(x)=\cos x & f'(0)=\cos(0)=1 \\
\text{第 } \mathit{2} \text{ 阶：} & f''(x)=-\sin x & f''(0)=-\sin(0)=0 \\
\text{第 } \mathit{3} \text{ 阶：} & f'''(x)=-\cos x & f'''(0)=-\cos(0)=-1 \\
\text{第 } \mathit{4} \text{ 阶：} & f^{(4)}(x)=\sin x & f^{(4)}(0)=\sin(0)=0 \\
\text{第 } \mathit{5} \text{ 阶：} & f^{(5)}(x)=\cos x & f^{(5)}(0)=\cos(0)=1
\end{array}
$$

(*2*) 观察周期规律

我们可以看到 $f^{(n)}(0)$ 的值以 $0,1,0,-1$ 为周期重复出现：

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin x$	0
1	$\cos x$	1
2	$-\sin x$	0
3	$-\cos x$	-1
4	$\sin x$	0
5	$\cos x$	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

这意味着只有当 n 是奇数 $(n=2k+1)$ 时，系数才非零。

当 $n=1,5,9,\ldots$ 时，$f^{(n)}(0)=1$

当 $n=3,7,11,\ldots$ 时，$f^{(n)}(0)=-1$

(3) 将计算出的 $f^{(n)}(0)$ 值代入麦克劳林级数公式：

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \cdots \\
\sin x &= 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots
\end{aligned}$$

(4) 写出级数的求和形式

该级数只包含奇数次幂项，且符号正负交替，我们可以用一个求和符号来表示它：

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

这就是函数 $f(x) = \sin x$ 的麦克劳林级数。

常用的麦克劳林级数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{3.22}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{3.23}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{3.24}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{3.26}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{3.27}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \tag{3.28}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \tag{3.29}$$

例 3.6.3. 计算极限

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} &= \frac{\cos(\epsilon) - 1 + \frac{1}{2}\epsilon^2}{\epsilon^4} \\
&= \frac{\left(1 - \frac{\epsilon^2}{2!} + \frac{\epsilon^4}{4!}\right) - 1 + \frac{1}{2}\epsilon^2}{\epsilon^4}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{\epsilon^4}{4!}}{\epsilon^4} = \frac{1}{4!}$$

例 3.6.4. 使用泰勒展开式来近似计算 $\sqrt{2}$。
我们希望近似计算 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $x = 2$ 处的值。
为了使计算简化且收敛更快，我们应该选择一个离 2 近且容易计算其函数值和导数值的点 a。
最佳选择是 $a = 1$ 或 $a = 4$，因为 $\sqrt{1} = 1$ 和 $\sqrt{4} = 2$ 都是整数。我们选择 $a = 1$。
所以，我们对 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $a = 1$ 处进行泰勒展开，并令 $x = 2$ 进行计算。
我们需要计算函数 $f(x)$ 及其各阶导数在 $a = 1$ 处的值：

阶数n	导数$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$f(x) = x^{1/2}$	$f(1) = 1$
1	$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$	$f'(1) = \frac{1}{2}$
2	$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$	$f''(1) = -\frac{1}{4}$
3	$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$	$f'''(1) = \frac{3}{8}$
4	$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-7/2}$	$f^{(4)}(1) = -\frac{15}{16}$

将 $f(x) = \sqrt{x}$ 和 $a = 1$ 代入公式：

$$\sqrt{x} = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$
$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1/2}{1!}(x-1) + \frac{-1/4}{2!}(x-1)^2 + \frac{3/8}{3!}(x-1)^3 + \dots$$
$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{3/8}{6}(x-1)^3 - \dots$$
$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \dots$$

将 $x = 2$ 代入展开式，则 $x - 1 = 1$:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{8}(1)^2 + \frac{1}{16}(1)^3 - \dots$$
$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

我们使用三阶泰勒多项式 $P_3(2)$ 来近似：

$$\begin{aligned} P_3(2) &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{16}{16} + \frac{8}{16} - \frac{2}{16} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{16 + 8 - 2 + 1}{16} \end{aligned}$$

$$= \frac{23}{16} = 1.4375$$

泰勒近似值 $P_3(2)$: 1.4375

$\sqrt{2}$ 的真实值 (精确到五位小数): 1.41421

可以看到，三阶泰勒展开式已经给出了一个相对接近的近似值。如果我们计算更高阶的项，近似值会更精确。例如，使用四阶近似 $P_4(2)$ (加上 $-\frac{5}{128}$) 得到:

$$\frac{23}{16} - \frac{5}{128} = \frac{184}{128} - \frac{5}{128} = \frac{179}{128} \approx 1.3984375$$

虽然四阶的近似值反而比三阶的更差，这是因为泰勒展开的误差项并非单调的，并且 $x = 2$ 离展开中心 $a = 1$ 较远，导致展开式收敛速度较慢。

更好的方法是使用二项式级数:

这是一个二项式级数（Binomial Series）的展开，它就是 $\sqrt{1+u}$ 在 $u = 0$ 处的麦克劳林展开（$a = 1$ 处的泰勒展开）:

$$\sqrt{x} = \sqrt{1 + (x-1)}$$

令 $u = x - 1$，则

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \dots$$

代入 $x = 2$，得 $u = 1$，所以:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256} - \frac{21}{1024} + \dots$$

这个级数收敛于 $\sqrt{2}$，但由于 $u = 1$ 是级数的收敛半径 $|u| < 1$ 的边界，所以收敛速度较慢。

3.7 欧拉公式

如果 θ 是实数，即某个角度的弧度度量，则复指数函数 $e^{i\theta}$ 定义为

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{3.30}$$

这是最著名的欧拉公式，它建立了自然对数的底数 e、虚数单位 i 和三角函数之间的深刻联系。

在复平面上，欧拉公式 $e^{i\theta}$ 表示一个模长为 1 的复数，其位置在单位圆上，并且与正实轴的夹角为 θ（逆时针为正）。

欧拉公式可以通过将麦克劳林级数 e^x 中的 x 正式替换为 $i\theta$ 并推导得出

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

其中最后一步来自 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的麦克劳林级数。
欧拉公式是复数从直角坐标形式 $x+iy$ 转换到极坐标形式 $re^{i\theta}$ 的关键：

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

欧拉恒等式 (Euler's Identity)
当我们在欧拉公式中取 $\theta = \pi$（即 180°）时，得到一个被誉为"数学中最美公式"的恒等式：

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$$

因为 $\cos\pi = -1$ 且 $\sin\pi = 0$，所以：

$$\mathbf{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

这个恒等式以简洁的形式将数学中五个最重要的常数 $e, i, \pi, 1, 0$ 以及三种基本运算（加法、乘法、指数）完美地结合在一起。

例 3.7.1. 证明和角公式

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \sin(a+b) = \cos a\sin b + \sin a\cos b$$

要证明和角公式，我们可以利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

应用欧拉公式于 a 和 b

$$e^{ia} = \cos a + i\sin a \qquad e^{ib} = \cos b + i\sin b$$

将这两个表达式相乘*:*

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}\cdot e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$$

$$e^{i(a+b)} = \cos a \cos b + i \cos a \sin b + i \sin a \cos b + i^2 \sin a \sin b$$
$$e^{i(a+b)} = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b)$$

与欧拉公式的形式对比：$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$
实部：

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{3.31}$$

虚部：

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b \tag{3.32}$$

由此，我们证明了余弦 *(实部)* 和正弦 *(虚部)* 和角公式。

这个证明利用了复数的性质和欧拉公式，将三角函数的和角问题简化到了复数乘法的框架内。

例 3.7.2. $a\cos x + b\sin x$ 转换为复指数形式。
欧拉公式定义了复指数 $e^{i\theta}$ 和三角函数之间的关系：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

将上面两个公式左右同时相加和相减，分别得到 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 复指数表示：

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin theta)$$
$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$a\cos x + b\sin x$ 的复指数表示*:*

$$\begin{aligned} a\cos x + b\sin x &= a\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) + b\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \\ &= \frac{a}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) + \frac{b}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \\ &= \frac{a}{2}e^{ix} + \frac{a}{2}e^{-ix} - \frac{bi}{2}e^{ix} + \frac{bi}{2}e^{-ix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{a}{2} - \frac{bi}{2}\right) e^{ix} + \left(\frac{a}{2} + \frac{bi}{2}\right) e^{-ix} \\
&= \left(\frac{a - bi}{2}\right) e^{ix} + \left(\frac{a + bi}{2}\right) e^{-ix}
\end{aligned}
$$

如果复数:

$$c = \frac{a - bi}{2}$$

那么其共轭复数:

$$\bar{c} = \frac{a + bi}{2}$$

事实上，上例完成了傅立叶三角级数到复指数级数的变换。

3.8 微分公式和运算法则

如果导数已知，那么通过变换可以得到原函数的微分公式，即

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \iff df(x) = f'(x)\,dx \tag{3.33}$$

因为 $dx = \epsilon \neq 0$，所以式 3.21 的变换恒成立。

函数在单一定义域区间内总是可微（可导）的，在闭区间的左边界向右可微（可导），在闭区间的右边界向左可微（可导）。

根据前面的基本函数导数公式，很容易得到微分公式。

基本函数微分公式

$dF(x)$	$f'(x)\,dx$
dC (常数)	0
dx^n	$nx^{n-1}\,dx$
de^x	$e^x\,dx$
da^x	$a^x \ln a\,dx$
$d\ln x$	$\frac{1}{x}\,dx$
$d\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}\,dx$
$d\sin x$	$\cos x\,dx$
$d\cos x$	$-\sin x\,dx$
$d\tan x$	$\sec^2 x\,dx$
$d\cot x$	$-\csc^2 x\,dx$
$x{\to}0 sinxd\sec x$	$\sec x\tan x\,dx$
$d\csc x$	$-\csc x\cot x\,dx$
$d\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
$d\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
$d\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}\,dx$
$d\mathrm{arccot}\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}\,dx$

类似地，我们可以通过导数运算法则得到微分运算法则：
令 $u = u(x)$，$v = v(x)$，那么

$$dCu = Cdu = Cu'\,dx \tag{3.34}$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv = u'\,dx \pm v'\,dx \tag{3.35}$$

$$d(uv) = vdu + udv + du \cdot dv = vu'\,dx + uv'\,dx \tag{3.36}$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv + du \cdot dv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2} \tag{3.37}$$

$$du(v(x)) = u'(v) \cdot dv = u'(v) \cdot v'\,dx \tag{3.38}$$

$d(uv)$ 和 $d\frac{u}{v}$ 的中间项中，我们保留了 $du \cdot dv = u'\,dx \cdot v'\,dx = u'v'\,d^2x$，这是一个二阶无穷小，正常情况下极限计算后为 0，如公式右侧结果所示。考虑到微分减法，如 $d(uv) - vdu - udv = du \cdot dv$，在与二阶无穷小比值的情况下，这会得到正确结果。

例 3.8.1. 复合函数 $\sin^3 x$ 微分展开

$$u(x) = x^3, \quad v(x) = \sin x$$

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= 3x^2 \to u'(v) = 3\sin^2 x \\
v'(x) &= \cos x \\
d\sin^3 x &= u'(v) \cdot v'\, dx = 3\sin^2 x \cos x\, dx
\end{aligned}
$$

例 3.8.2. 复合函数 $e^{\cos(2x)}$ 微分展开

$$
\begin{aligned}
de^{\cos(2x)} &= e^{\cos(2x)} \cdot d\cos(2x) \\
&= e^{\cos(2x)} \cdot (-\sin(2x)) \cdot d2x \\
&= -2\sin(2x)e^{\cos(2x)}\, dx
\end{aligned}
$$

因为常数的导数为 0，所以我们有

$$
d[f(x) + C] = df(x) + dC = df(x) = f'(x)\, dx
$$

对于本节的微分公式，如果从公式的右侧向左侧计算

$$
f'(x)\, dx = d[f(x) + C] \tag{3.39}
$$

第四章 导数和微分的应用

本章我们利用导数和微分来解决一些数学上的问题，如函数的单调性、渐近线和极值等。

4.1 极限计算

1. $\frac{0}{0}$ 型不定式的极限

由微分的基本定义 $df(x) = f(x+\epsilon) - f(x)$ 得到

$$f(x+\epsilon) = df(x) + f(x)$$

如果 $f(x)$ 在 $x = c$ 处为 0，即 $f(c) = 0$，则

$$f(c+\epsilon) = df(c) + f(c) = df(c) \qquad \text{if } f(c) = 0$$

同时，基于 $df(x) = f'(x)\,dx \iff df(c) = f'(c)\cdot\epsilon$。

结合以上两点，我们考虑当 $f(c) = g(c) = 0$, $x \to c$ 时函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(c+\epsilon)}{g(c+\epsilon)} \\
&= \frac{df(c)+f(c)}{dg(c)+g(c)} \\
&= \frac{df(c)}{dg(c)} \qquad (\text{if } f(c) = g(c) = 0) \\
&= \frac{f'(c)\cdot\epsilon}{g'(c)\cdot\epsilon} \\
&= \frac{f'(c)}{g'(c)}
\end{aligned}$$

将上面的内容进行总结，我们得到：

对于比值函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$，如果 $f(c) = g(c) = 0$，那么 $x \to c$ 时函数的极限

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c+\epsilon)}{g(c+\epsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (\text{if } f(c) = g(c) = 0) \tag{4.1}$$

例 4.1.1. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$。
当 $x\to 0$ 时，分子 $f(0)=\sin 0=0$，分母 $g(0)=(0)=0$。

$$\begin{aligned} f'(x)=(\sin x)'=\cos x \qquad g'(x)=(x)'=1 \\ f'(0)=\cos 0=1 \qquad g'(0)=1 \\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{1}{1}=1 \end{aligned}$$

例 4.1.2. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$。
当 $x\to 0$ 时，分子 $f(0)=e^0-1-(0)=0$，分母 $g(0)=(0)^2=0$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

当 $x\to 0$ 时，分子 $f(0)=e^0-1=0$，分母 $g(0)=2(0)=0$。

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'} \\ &=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式的极限
当求取极限的表达式难解时，很多时候进行格洛克无穷大等效重定义能够简化极限问题，方便进一步的极限计算。

例 4.1.3. 求 $\lim_{x\to 0^+}x\ln x$。

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+}x\ln x&=\epsilon\cdot\ln\epsilon \\ &=e^{-\infty}\cdot\ln e^{-\infty} \qquad (\epsilon\leftarrow e^{-\infty}) \\ &=e^{-\infty}\cdot(-\infty)=-\frac{\infty}{e^{\infty}}=0 \end{aligned}$$

例 4.1.4. 求 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$。

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}&=\frac{\ln\infty}{\infty} \\ &=\frac{\ln e^{\infty}}{e^{\infty}} \qquad (\infty\leftarrow e^{\infty}) \\ &=\frac{\infty}{e^{\infty}}=0 \end{aligned}$$

4.2 函数单调性

单调函数是指在给定区间上是增函数或减函数的函数。具有单调性的区间 I 称为单调区间。

定义 4.1. 单调函数
设函数 $y = f(x)$ 的单一区间定义域为 D，区间 $I \subseteq D$。对于区间 I 上自变量的任意值 x，我们有以下分类：
（*1*）单调递增，如果微分 $df(x) > 0$。
（*2*）单调递减，如果微分 $df(x) < 0$。
$df(x) = f(x+\epsilon) - f(x) = f(x) - f(x-\epsilon)$，在区间 I 的左边界右微分，在区间 I 的右边界左微分。

单调函数的主要特点：
（1）最值：单调函数在闭区间上的最大值和最小值一定在区间的端点处取到。
（2）零点：如果单调函数在其区间端点处函数值的符号相反，则该函数在区间内有且仅有一个零点。
（3）可逆性：严格单调函数存在反函数。

例 4.2.1. 函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $I = (-\infty, +\infty)$ 上的单调性。

$$\begin{aligned} df(x) &= (x+\epsilon)^3 - x^3 = 3x^2\epsilon + 3x\epsilon^2 + \epsilon^3 \\ &= 3x^2\epsilon + \epsilon^3 > 0 \end{aligned}$$

因为 $x^2 \geq 0$，可以看出，对于任意 $x \in I$，$df(x) > 0$ 恒成立，所以函数 $f(x) = x^3$ 单调递增。

在一般情况下，我们可以根据单调性的定义直接进行计算来判断函数的单调性。因为 $df(x) = f'(x)\,dx$，$dx = \epsilon > 0$ 不会改变正负符号，因此当函数相对复杂时，可以考虑利用导函数 $f'(x)$ 的符号来判断：
（1）若在区间 I 上 $f'(x) > 0$，则函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增。
（2）若在区间 I 上 $f'(x) < 0$，则函数 $f(x)$ 在 I 上单调递减。
（3）若在区间 I 上 $f'(x) \geq 0$，且仅在有限个点上 $f'(x) = 0$，则函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增。
（4）若在区间 I 上 $f'(x) \leq 0$，且仅在有限个点上 $f'(x) = 0$，则函数 $f(x)$ 在 I 上单调递减。
对于（3）和（4）的理解要点：
$f'(x) \geq 0$ (非负)：这意味着函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不减的 (即增函数)。函数值 $f(x)$ 永远不会随着 x 的增大而减小。
$f'(x) = 0$ (有限点)：这意味着函数曲线只有在孤立的几个点上有水平切线 (即瞬时增长率为零)。

例 4.2.2. 判定函数 $f(x) = xe^{-x}$ 的单调性。
(3) 求导数
首先，使用乘积法则 $(uv)' = u'v + uv'$ 对函数 $f(x)$ 求导：
设 $u = x$ 和 $v = e^{-x}$。则 $u' = 1$ 和 $v' = -e^{-x}$。

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1) \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) \\ &= e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \end{aligned}$$

(2) 分析导数的符号
由于 e^{-x} 对于所有的实数 x 恒为正 $(e^{-x} > 0)$，因此导数 $f'(x)$ 的符号完全由因子 $(1-x)$ 决定。
令 $f'(x) = 0$ 找到临界点：

$$e^{-x}(1-x) = 0$$

因为 $e^{-x} \neq 0$，所以我们解 $1 - x = 0$，得到：

$$x = 1$$

(3) 确定单调区间
当 $x < 1$ 时单调递增：取 $x = 0$ 检验。$1 - x = 1 - 0 = 1 > 0$。因此，$f'(x) = e^{-x}(1-x) > 0$。函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上单调递增。
当 $x > 1$ 时单调递减：取 $x = 2$ 检验。$1 - x = 1 - 2 = -1 < 0$。因此，$f'(x) = e^{-x}(1-x) < 0$。函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减。
函数在 $x = 1$ 处达到局部最大值，$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$。

4.3 函数的极值

函数极值（Extremum）是局部极大值（Local Maximum）和局部极小值（Local Minimum）的统称，反映了函数在其定义域的局部范围内的最大或最小性。

定义 4.2. 函数极值
对于函数 $f(x)$ 区间内某一点 $x = c$:
(1) $f(c)$ 是局部极大值，如果：$f(c) > f(c-\epsilon)$ 并且 $f(c) > f(c+\epsilon)$
(2) $f(c)$ 是局部极小值，如果：$f(c) < f(c-\epsilon)$ 并且 $f(c) < f(c+\epsilon)$

我们在 $x = c$ 的最小微区间 $[c-\epsilon,\ c+\epsilon]$ 进行极值定义和判断，彻底消除了传统极值定义的模糊化表述。
从图像上看，局部极大值点就像是函数图形上的山顶，局部极小值点就像是函数图形上的山谷底部。

例 4.3.1. 判断 $x=0$ 是否是函数的极值点，$f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$。
对于 $f(x)=x^2$：

$$f(0)-f(0-\epsilon)=(0)^2-(-\epsilon)^2=-\epsilon^2<0$$
$$f(0)-f(0+\epsilon)=(0)^2-(\epsilon)^2=-\epsilon^2<0$$

所以 $f(0)<f(0-\epsilon)$ 并且 $f(0)<f(0+\epsilon)$，$f(0)$ 是函数 $f(x)=x^2$ 的局部极小值。
对于 $g(x)=x^3$：

$$g(0)-g(0-\epsilon)=(0)^3-(-\epsilon)^3=\epsilon^3>0$$
$$g(0)-g(0+\epsilon)=(0)^3-(\epsilon)^3=-\epsilon^3<0$$

所以 $x=0$ 不是函数 $g(x)=x^3$ 的极值点。

定理 4.1. 极值判定
对于函数 $f(x)$ 区间内某一点 $x=c$，如果 $f'(c)=0$ 并且 $f'(c-\epsilon)\cdot f'(c+\epsilon)<0$，那么 c 是函数 $f(x)$ 的极值点。并且
(*1*) $f(c)$ 是局部极大值，如果：$f'(c-\epsilon)>0$ 或者 $f'(c+\epsilon)<0$
(*2*) $f(c)$ 是局部极小值，如果：$f'(c-\epsilon)<0$ 或者 $f'(c+\epsilon)>0$

如果：$f'(c-\epsilon)>0$，说明 c 点左侧单调递增，如果 $f'(c+\epsilon)<0$，说明 c 点右侧单调递减，因此 $f(c)$ 是极大值。极小值的情况正好相反。

例 4.3.2. 求函数 $f(x)=x^3-3x+2$ 的所有极值点及极值。
求导数：$f'(x)=(x^3-3x+2)'=3x^2-3$
求驻点（令 $f'(x)=0$）：

$$3x^2-3=0$$
$$3(x^2-1)=0$$
$$x^2=1$$

解得驻点：$x_1=-1$，$x_2=1$。
判断极值：

$$f'(-1-\epsilon)=3(-1-\epsilon)^2-3=6\epsilon+3\epsilon^2>0$$
$$f'(-1+\epsilon)=3(-1+\epsilon)^2-3=-6\epsilon+3\epsilon^2<0$$
$$f'(1-\epsilon)=3(1-\epsilon)^2-3=-6\epsilon+3\epsilon^2<0$$

$$f'(1+\epsilon) = 3(1+\epsilon)^2 - 3 = 6\epsilon + 3\epsilon^2 > 0$$

$x_1 = -1$ 是极大值点，$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$
$x_2 = 1$ 是极小值点，$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$

例 4.3.3. 求函数 $f(x) = x \ln x$ 的极值。
由于函数定义域要求 $x > 0$，因此我们只在开区间 $(0, \infty)$ 上求解。
求导数：使用乘积法则 $(uv)' = u'v + uv'$，其中 $u = x$, $v = \ln x$。

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \\ &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \end{aligned}$$

求驻点（令 $f'(x) = 0$）：$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$
解得驻点：$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$。
判断极值：

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{e} - \epsilon\right) &= \ln\left(\frac{1}{e} - \epsilon\right) + 1 = \ln\left(\frac{1 - e\epsilon}{e}\right) + 1 \\ &= \ln(1 - e\epsilon) - \ln e + 1 \\ &= -e\epsilon < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{e} + \epsilon\right) &= \ln\left(\frac{1}{e} + \epsilon\right) + 1 = \ln\left(\frac{1 + e\epsilon}{e}\right) + 1 \\ &= \ln(1 + e\epsilon) - \ln e + 1 \\ &= e\epsilon > 0 \end{aligned}$$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ 是极小值点，$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

极值与最值（全局极值）的区别
极值是一个局部性的概念，而最值是全局性的概念。
可以有多个局部极值，最多只有一个最大值和一个最小值。
局部极大值不一定大于局部极小值，最大值必然是所有函数值的最大。
最值需要评估所有极值和区间边界的值，并选取最大值或最小值。

求解闭区间最值需要比较函数在所有驻点和闭区间端点处的函数值。

例 4.3.4. 求函数 $f(x)=x-2\sin x$ 在闭区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值。
求一阶导数：$f'(x)=(x-2\sin x)'=1-2\cos x$
求驻点（令 $f'(x)=0$）：$1-2\cos x=0\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}$
在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内，满足 $\cos x=1/2$ 的点为：

$$x=\frac{\pi}{3}$$

计算函数值：比较区间端点和驻点处的函数值。

$$\begin{aligned}
f(0)&=0-2\sin(0)=0-0=0\\
f\left(\frac{\pi}{2}\right)&=\frac{\pi}{2}-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-2(1)\\
&\approx 1.57-2=-0.43\\
f\left(\frac{\pi}{3}\right)&=\frac{\pi}{3}-2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\\
&\approx 1.047-1.732=-0.685
\end{aligned}$$

比较结果：最大值：$f(0)=0$，最小值：$f\left(\frac{\pi}{3}\right)\approx-0.685$

4.4 函数的渐近线

渐近线（Asymptote）是一条直线，当函数曲线上的点无限远离原点（即 x 或 y 坐标趋于无穷大）时，该曲线与这条直线之间的距离趋近于零。
简单来说，渐近线就是函数图形在无穷远处无限靠近却永远不会相交的直线。
渐近线主要分为三类：垂直渐近线，水平渐近线和斜渐近线。

垂直渐近线 (Vertical Asymptote)
垂直渐近线是形如 $x=a$ 的竖直线。

定义 4.3. 垂直渐近线
如果当 x 从左侧或右侧趋近于某个有限值 a 时，函数 $f(x)$ 的值趋向于正无穷 (∞) 或负无穷 $(-\infty)$，即：

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a-\epsilon)=\pm\infty \tag{4.2}$$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a+\epsilon)=\pm\infty \tag{4.3}$$

那么直线 $x=a$ 就是函数 $f(x)$ 的垂直渐近线。

对于有理函数（即两个多项式的比 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$），垂直渐近线通常出现在使分母 $Q(x)$ 为零，但分子 $P(x)$ 不为零的点 $x=a$ 处。

例 4.4.1. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x-2}$ 的垂直渐近线。
分母 $x-2=0$ 时，$x=2$，此时分子 $1\neq 0$。
检查极限：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2-\epsilon) &= \frac{1}{(2-\epsilon)-2}\\ &= \frac{1}{-\epsilon} = -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2+\epsilon) &= \frac{1}{(2+\epsilon)-2}\\ &= \frac{1}{\epsilon} = \infty\end{aligned}$$

所以，直线 $x=2$ 是垂直渐近线。

水平渐近线 (Horizontal Asymptote)
水平渐近线是形如 $y=b$ 的水平线。

定义 4.4. 水平渐近线
如果当 x 趋向于正无穷 *(∞)* 或负无穷 *(−∞)* 时，函数 $f(x)$ 的值趋近于某个有限值 b，即：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty) = b \tag{4.4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(-\infty) = b \tag{4.5}$$

那么直线 $y=b$ 就是函数 $f(x)$ 的水平渐近线。

例 4.4.2. 求函数 $f(x)=\frac{3x^2-5}{2x^2+x}$ 的水平渐近线。
检查极限：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty) &= \frac{3\infty^2-5}{2\infty^2+x}\\ &= \frac{3\infty^2}{2\infty^2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

所以水平渐近线为：$y=\frac{3}{2}$。

斜渐近线 (Slant/Oblique Asymptote))
斜渐近线是形如 $y = kx + b$ 的斜直线（其中 $k \neq 0$）。

定义 4.5. 斜渐近线
如果函数 $f(x)$ 满足：

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(\pm\infty)}{\pm\infty} \tag{4.6}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = f(\pm\infty) - k(\pm\infty) \tag{4.7}$$

且 k 和 b 都是有限的实数，那么直线 $y = kx + b$ 就是函数 $f(x)$ 的斜渐近线。

对于有理函数 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$，只有当分子的次数恰好比分母的次数高 1 ($n = m+1$) 时，函数才可能存在斜渐近线。

例 4.4.3. 求函数 $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ 的斜渐近线。
分子次数 $n = 2$，分母次数 $m = 1$，$n = m + 1$，存在斜渐近线。

$$\begin{aligned} k &= \frac{f(\infty)}{\infty} = \frac{\infty^2 + 1}{(\infty - 1) \cdot \infty} \\ &= \frac{\infty^2 + 1}{\infty^2 - \infty} = \frac{\infty^2}{\infty^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= f(\infty) - k(\infty) = \frac{\infty^2 + 1}{\infty - 1} - \infty \\ &= \frac{\infty^2 + 1}{\infty - 1} - \frac{\infty^2 - \infty}{\infty - 1} \\ &= \frac{\infty + 1}{\infty - 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

因此，直线 $y = x + 1$ 是斜渐近线。

4.5 牛顿法解方程

牛顿法是一种高效的数值计算方法，广泛应用于各种需要求解非线性方程的工程和科学计算领域。
牛顿法的核心思想是用切线来逐步逼近函数 $f(x)$ 的根（即函数图形与 x 轴的交点）：
（1）初始点：首先，选择一个接近真实解的初始猜测值 x_0。

(2) 切线逼近：在函数曲线 $y = f(x)$ 上，找到点 $(x_n, f(x_n))$。
(3) 局部线性化：用该点的切线来代替曲线在 x_n 附近的走势（这是对函数进行局部线性化的操作）。
(4) 求新近似解：找到这条切线与 x 轴的交点 x_{n+1}。这个 x_{n+1} 通常会比 x_n 更接近方程的真实解。
(5) 迭代：重复以上步骤，用 x_{n+1} 作为新的猜测值，不断迭代，直到相邻两次近似值的差小于预设的精度要求，或者函数值 $|f(x_{n+1})|$ 足够接近零。
牛顿法背后的几何结构如图所示。

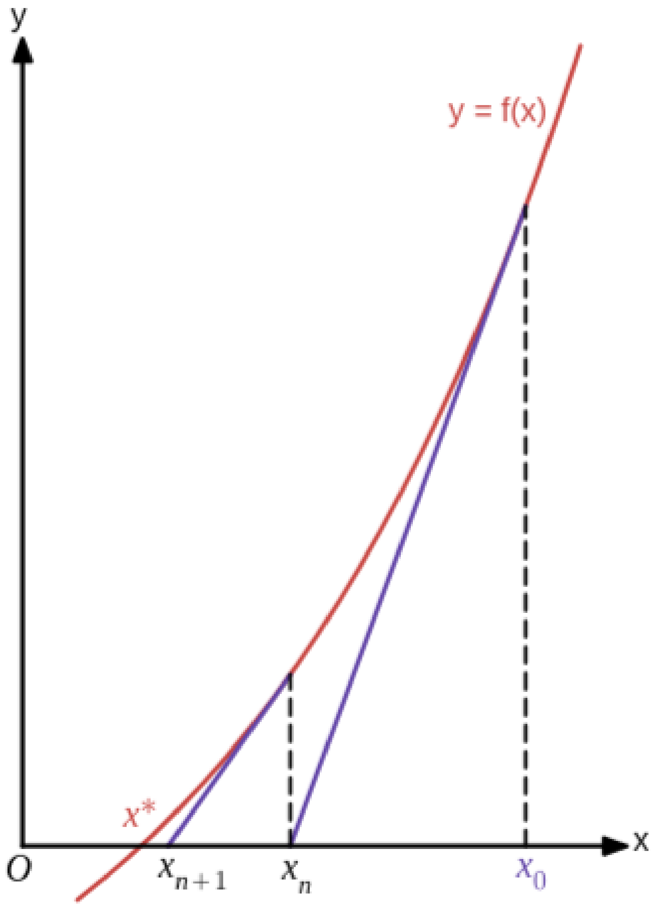


图 4.1: **牛顿法解方程**

迭代公式代数推导

从代数的角度，牛顿法是基于函数的泰勒级数展开。
我们假设 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的精确解，即 $f(x^*) = 0$，而 x_n 是当前的一个近似解。令 $\Delta x = x^* - x_n$，则 $x^* = x_n + \Delta x$。
将 $f(x)$ 在 x_n 处进行泰勒级数展开：

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \cdots$$

由于我们寻找的是根 x^*，所以 $f(x^*) = 0$。代入 $x = x^*$：

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x^* - x_n)^2 + \cdots$$

牛顿法的关键在于截断：我们只保留泰勒级数的前两项（即用切线进行线性近似），忽略高阶项（二阶及更高阶的项）：

$$0 \approx f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)$$

将 x^* 用下一个近似值 x_{n+1} 代替，并解出 x_{n+1}：

$$\begin{aligned}
&0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\\
&f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)\\
&x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\\
&x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}
\end{aligned}$$

最终得到牛顿法的迭代公式：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

其中，$f'(x_n)$ 是函数 $f(x)$ 在 x_n 处的导数（切线的斜率）。

牛顿法优点与限制

收敛速度快：在解的附近，通常具有二阶收敛的特性，这意味着每次迭代正确的小数位数大致会翻倍，收敛速度非常快。

需要导数：要求函数 $f(x)$ 可导，并且每次迭代都需要计算导数值 $f'(x_n)$。

对初值敏感：如果初始值 x_0 离真实根太远，或者在迭代过程中 $f'(x_n)$ 接近于零（即切线接近水平），方法可能不收敛或收敛到错误的根。

例 4.5.1. 求解 $e^{-x} = x$ 的根

这等价于求解函数 $f(x) = e^{-x} - x = 0$ 的根。

原函数：$f(x) = e^{-x} - x$

导数：$f'(x) = (e^{-x} - x)' = -e^{-x} - 1$

确定迭代公式

将 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 代入牛顿法的迭代公式 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1} = x_n + \frac{e^{-x_n} - x_n}{e^{-x_n} + 1}$$

开始迭代

首先，通过观察或作图，我们可以找到一个合理的初始猜测。
当 $x=0$ 时，$f(0)=e^0-0=1$；当 $x=1$ 时，$f(1)=e^{-1}-1\approx 0.368-1=-0.632$。由于函数值在 *0* 和 *1* 之间变号，所以根在 $[0,1]$ 区间内。我们取初始值 $x_0=0.5$：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0.5-\frac{f(0.5)}{f'(0.5)}\approx 0.566311003197\\
x_2 &= x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\approx 0.567143165035\\
x_3 &= x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}\approx 0.56714329041
\end{aligned}
$$

经过 *3* 次迭代，我们得到的近似解 $x_3\approx 0.56714329041$ 已经达到了极高的精度。

这个例子强调了牛顿法的优势：对于具有良好导数性质的函数，它能以二次收敛速度迅速找到方程的根。

第五章　不定积分和积分方法

不定积分的概念起源于 17 世纪，由艾萨克 · 牛顿和戈特弗里德 · 莱布尼兹独立发展，作为微积分学的基础。

不定积分也称为反导函数或原函数，它本质上是求导数的逆运算，用于找到一个函数的“原始形式”。

5.1　不定积分的基本概念

考虑微分表达式 $dF(x) = F(x+\epsilon) - F(x)$，我们希望用数学的方法由微分 $dF(x)$ 返回原函数 $F(x)$，这时我们可以定义一个专用符号如 $\int$ 来表示这种运算操作，即

$$\int dF(x) = F(x)$$

由此我们可以进行一些基本运算：

$$\int dx = x \qquad \int d(\ln x + \sin x) = \ln x + \sin x$$
$$F(x) = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \int dF(x) = x^2 + 2x + 3$$

接下来考虑微分的导数展开形式：

$$dF(x) = f(x)\,dx \tag{5.1}$$

如果等式（5.1）从右向左计算：

$$f(x)\,dx = d(F(x)+C) = [F(x+\epsilon)+C] - [F(x)+C] = F(x+\epsilon) - F(x) \tag{5.2}$$

其中 C 为任意常数。也就是说导函数 $f(x)$ 对应的不是唯一原函数 $F(x)$，而是一个原函数集合 $F(x)+C$。所以我们有

$$\int f(x)\,dx = \int d(F(x)+C) = F(x)+C \tag{5.3}$$

如果我们将等式（5.2）看作众所周知的常识，为了避免计算中间过程的繁琐性，作为一种约定，我们省略微分表达式中的常数项 C，而只是在最终结果中列出。这样等式（5.3）就变成：

$$\int f(x)\,dx = \int dF(x) = F(x) + C \tag{5.4}$$

这样，我们就完成了由导函数推导计算原函数的过程，并可据此总结出不定积分的定义。

定义 5.1. 不定积分

不定积分是微分的逆运算，作用于微分表达式并解析出原函数。用符号 $\int$ 表示不定积分，我们有

$$\int dF(x) = F(x) \tag{5.5}$$

对于以导函数表示的微分展开形式，不定积分的运算结果是原函数（相对于导函数）的集合，即

$$\int f(x)\,dx = \int dF(x) = F(x) + C \tag{5.6}$$

在不定积分表达式中微分自变量 dx 也称为积分自变量。

不定积分与微分的互逆关系

微分：给定一个函数 $F(x)$，求其导数 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$。

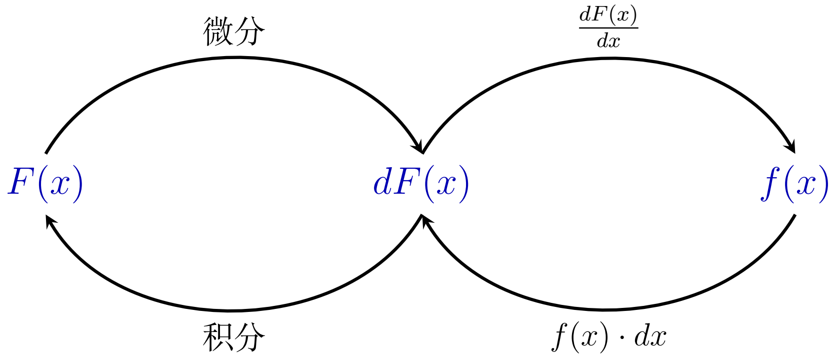
不定积分：给定一个函数 $f(x)$，求其原函数 $F(x)$，即 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$。

逆运算体现：不定积分正是微分（求导数）的逆过程。如果对一个函数先求导，再求不定积分，会回到原来的函数（相差一个常数 C）。

$$\int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

如果对一个函数先求不定积分，再求导，就会回到原来的函数。

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x)$$



5.2　不定积分的主要性质

1. 导数与不定积分的互逆关系

不定积分与微分（求导数）是互逆运算。

不定积分的导数等于被积函数：

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

函数的微分（导数）的不定积分等于该函数与任意常数之和：

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

其中，C 是积分常数。

2. 积分的基本运算法则

（1）常数倍的积分

常数因子可以提到积分号的外面（其中 k 是不为零的常数）：

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \tag{5.7}$$

（2）和（差）的积分

有限个函数的和（差）的积分等于各个函数的积分的和（差）：

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \tag{5.8}$$

（3）乘积的链式法则

基于微分的链式法则：

$$\int u'(v)\cdot v'\,dx = \int u'(v)\,dv = \int\,du(v) = u(v(x)) + C \tag{5.9}$$

例 5.2.1. 计算积分 $\int(2\cos x + \sin x)\,dx$。

$$\begin{aligned}\int(2\cos x + \sin x)\,dx &= \int 2\cos x\,dx + \int \sin x\,dx\\ &= 2\cdot\int\,d\sin x + \int\,d(-\cos x)\\ &= (2\sin x + C_1) - (\cos x + C_2)\\ &= 2\sin x - \cos x + C\end{aligned}$$

在上面的计算中 C_1 和 C_2 被合并成了一个常数项 C，在实际的计算中，C_1 和 C_2 可以省略。

例 5.2.2. 计算积分 $\int \tan x\, dx$。

$$\begin{aligned}\int \tan x\, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \\ &= \int \frac{1}{\cos x}\, d(-\cos x) = -\int \frac{1}{\cos x}\, d\cos x\end{aligned}$$

对照链式法则公式:

$$\begin{aligned} u' = \frac{1}{x} \qquad u = \ln x \qquad v = \cos x \\ \Longrightarrow u'(v) = \frac{1}{\cos x} \qquad u(v) = \ln(\cos x)\end{aligned}$$

所以

$$\int \tan x\, dx = -\int \frac{1}{\cos x}\, d\cos x = -\int d\ln|\cos x| = -\ln|\cos x| + C$$

3. 不定积分的几何意义

不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 表示由函数 $f(x)$ 的所有原函数组成的曲线族。

对于曲线族中的任意一条曲线 $y = F(x) + C_1$ 和 $y = F(x) + C_2$，在横坐标 x_0 处的切线斜率都等于 $f(x_0)$，因此它们是互相平行的。

这个曲线族中的任意一条曲线，都可以通过将其中任一条曲线沿 y 轴方向作平移得到。

5.3 基本积分公式

将第三章的导数公式或微分公式进行适当变换，即可得到常用积分公式。

基本积分公式

(1) $\displaystyle\int k\, du = ku + C \quad (\text{其中}k\ \text{是常数})$

(2) $\displaystyle\int u^n\, du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C$

(4) $\displaystyle\int e^u\, du = e^u + C$

(5) $\displaystyle\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

(6) $\displaystyle\int \sin u\, du = -\cos u + C$

(7) $\int \cos u\, du = \sin u + C$

(8) $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

(9) $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

(10) $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

(11) $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

(12) $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$

(13) $\int \cot u\, du = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc u| + C$

(14) $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

(15) $\int \csc u\, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C = \ln|\csc u - \cot u| + C$

(16) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (a > 0)$

(17) $\int \frac{1}{a^2 + u^2}\, du = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (a \neq 0)$

(18) $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C \quad (a > 0)$

对于公式（10）：

$$\begin{aligned}
\int \sec u \tan u\, du &= \int \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{\sin u}{\cos u}\, dx \\
&= \int \frac{d(-\cos u)}{(\cos u)^2} = -\frac{1}{-2+1}(\cos u)^{-2+1} \\
&= \frac{1}{\cos u} = \sec u
\end{aligned}$$

对于公式（14）：

$$\begin{aligned}
\int \sec u\, du &= \int \sec u \cdot \frac{\sec u + \tan u}{\sec u + \tan u}\, du \\
&= \int \frac{\sec u(\sec u + \tan u)}{\sec u + \tan u}\, du \\
&= \int \frac{\sec^2 u + \sec u \tan u}{\sec u + \tan u}\, du
\end{aligned}$$

令 $w = \sec u + \tan u$，回忆导数公式：

$$\frac{d\sec u}{du} = \sec u \tan u \qquad \frac{d\tan u}{du} = \sec^2 u$$

$$\frac{dw}{du} = \frac{d}{du}(\sec u + \tan u) = \sec u \tan u + \sec^2 u$$
$$dw = (\sec^2 u + \sec u \tan u)\, du$$

将换元结果 w 和 dw 代入原积分表达式：

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2 u + \sec u \tan u}{\sec u + \tan u}\, du &= \int \frac{1}{w}\, dw \\ &= \ln|w| + C \\ &= \ln|\sec u + \tan u| + C\end{aligned}$$

因此，我们推导出：

$$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

对于公式（16），（17），（18），我们可以利用微分公式从右侧向左侧推导出结果。积分公式的直接推导我们在稍后的积分方法中给出。

5.4 积分技术

本节主要聚焦于不定积分的求解方法。

1. 换元法

换元法用于简化积分变量，通过引入新变量 $u = g(x)$ ，使积分形式更简单。步骤：

（1）选择 $u = g(x)$，计算 $du = g'(x)\, dx$。

（2）用 u 和 du 替换原积分。

（3）求新积分，然后反代回 x。

（4）添加常数 C。

适用场景：复合函数，如 $\int f(g(x))g'(x)\, dx$。

注意：替换后积分应完全用 u 表示。

例 5.4.1. 计算不定积分。

(1) $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$

令 $u = x^2 + 1$，则 $du = d(x^2+1) = 2x\, dx$，所以 $x\, dx = \frac{1}{2}\, du$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1}\, dx = \int \sqrt{x^2+1} \cdot x\, dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + C\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}
$$

(2) $\int e^{3x-5}\,dx$

令 $u = 3x-5$，则 $du = d(3x-5) = 3\,dx$，所以 $dx = \frac{1}{3}\,du$

$$
\begin{aligned}
\int e^{3x-5}\,dx &= \int e^u \cdot \frac{1}{3}\,du = \frac{1}{3}\int e^u\,du \\
&= \frac{1}{3}e^u + C \\
&= \frac{1}{3}e^{3x-5} + C
\end{aligned}
$$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

令 $u = x^2+4$，则 $du = d(x^2+4) = 2x\,dx$，所以 $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{1}{2}\,du\right) \\
&= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right) + C \\
&= u^{1/2} + C = \sqrt{x^2+4} + C
\end{aligned}
$$

替换法的关键在于选择正确的 u，使 du 能够简化或消除原积分式中剩余的 x 变量。

2. 分部积分法

分部积分法源于乘积求导法则：

$$
(uv)' = u'v + uv'
$$

对等式两边求积分：

$$
\int (uv)'\,dx = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx
$$

等式的左边 $\int (uv)'\,dx = \int\, d(uv) = uv$，因此：

$$
uv = \int v\,du + \int u\,dv
$$

稍作移项，就得到了分部积分公式：

$$
\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{5.10}
$$

分部积分法的核心在于将一个难以求解的积分 $\int u\,dv$ 转化为一个相对更容易求解的积分 $\int v\,du$。

例 5.4.2. 求 $\int xe^x\,dx$。
首先将积分转化为 $\int u\,dv$ 的形式：$\int xe^x\,dx = \int x\,de^x$。
对照公式，$u = x, \quad v = e^x$，所以

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx = &\int x\,de^x \\ &= x\cdot e^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

例 5.4.3. 求 $\int \ln x\,dx$。
对照公式，$u = \ln x, \quad v = x$，所以

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \ln x\cdot x - \int x\,d\ln x \\ &= x\ln x - \int x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\,dx \\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

例 5.4.4. 求解 $\int x\cos x\,dx$。
首先将积分转化为 $\int u\,dv$ 的形式：$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x$。
对照公式，$u = x, \quad v = \sin x$，所以

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x\,d\sin x \\ &= x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx \\ &= x\sin x - (-\cos x) \\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

例 5.4.5. 求解 $\int x^2e^x\,dx$。

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= \int x^2\,de^x = x^2\cdot e^x - \int e^x\,dx^2 \\ &= x^2e^x - \int e^x\cdot 2x\,dx = x^2e^x - 2\int x\,de^x \\ &= x^2e^x - 2\left[x\cdot e^x - \int e^x\,dx\right] \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C\end{aligned}$$

分部积分法重要的不是用 u 和 v 进行变量替换，而是形成 $\int u\,dv$ 的形式，然后写出紧凑并且逻辑连贯的解题过程。

3. 部分分式法

部分分式法是一种代数技巧，用于将有理函数（即两个多项式的比值）分解为几个更简单的分式之和。这种分解是积分有理函数时非常重要的一步，因为它能将复杂的积分问题转化为更容易解决的基本积分形式。

(1) 适用条件与预处理

部分分式法仅适用于真有理函数的积分，即分子多项式的次数低于分母多项式的次数。

如果是非真有理函数（分子次数 $\geq$ 分母次数），必须先使用多项式长除法将其分解为一个多项式（可直接积分）和一个真有理函数，然后对剩下的真有理函数部分应用部分分式法。例如

$$\int \frac{x^3+x}{x^2-4}\, dx$$

需要先进行长除法：$\frac{x^3+x}{x^2-4} = x + \frac{5x}{x^2-4}$。接下来只需要对 $\frac{5x}{x^2-4}$ 应用部分分式法。

(2) 部分分式分解的步骤

部分分式法的核心在于分解分母。一旦分母被分解成因子，就可以根据这些因子的类型来构建部分分式。

步骤一：分解分母

将分母多项式分解为实系数的一次因子（形如 $ax+b$）和不可再分解的二次因子（形如 ax^2+bx+c，其中 $b^2-4ac<0$）的乘积。

步骤二：构建部分分式根据分母分解的因子类型，构造待定的部分分式形式。主要有以下四种情况：

分母因子类型	对应的部分分式形式
I. 不同的线性因子$(ax+b)$	$\frac{A}{ax+b}$
II. 重复的线性因子$(ax+b)^n$	$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots$
III. 不同的不可分解二次因子(ax^2+bx+c)	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
IV. 重复的不可分解二次因子$(ax^2+bx+c)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots$

步骤三：确定待定系数

将构建的部分分式相加，然后与原始的分子多项式设为相等。有以下两种常用方法确定待定系数（$A, B, C, \dots$）：

特值法对于线性因子，选择能使分母中某个因子为零的 x 值代入方程，从而快速求解一些系数。

系数比较法: 将方程两边多项式按 x 的幂次展开并合并同类项，然后比较等式两边 x^n 项的系数，得到一个线性方程组，求解该方程组。

步骤四：进行积分
将确定系数后的部分分式代回积分式中，然后分别对每一项进行积分。
线性因子项 $\int \frac{A}{ax+b}\,dx$ 通常使用对数 $\frac{A}{a}\ln|ax+b|+C$。
不可分解二次因子项 $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ 通常需要配方，拆分成 ln 形式和 arctan 形式的组合。

例 5.4.6. 求积分 $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$。
步骤一：分解分母
分母 x^2-5x+6 可分解为 $(x-2)(x-3)$。
步骤二：构建部分分式（类型 I）

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

步骤三：确定待定系数
通分并比较分子：

$$1=A(x-3)+B(x-2)$$

所以，

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

步骤四：进行积分

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx &= \int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx\\ &= \int \frac{1}{x-3}\,dx-\int \frac{1}{x-2}\,dx\\ &= \ln|x-3|-\ln|x-2|+C\\ &= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C\end{aligned}$$

例 5.4.7. 求积分：

$$\int \frac{x^3+4x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$$

步骤一：分解分母与构建部分分式
分母已经分解：$x(x^2+1)^2$。
x: 不同的线性因子。
$(x^2+1)^2$: 重复的不可分解二次因子。根据分解规则，构造部分分式：

$$\frac{x^3+4x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

步骤二：确定待定系数

通分并比较分子：

$$x^3+4x^2-x+1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x$$

展开并分组：

$$\begin{aligned}&x^3+4x^2-x+1\\&=A(x^4+2x^2+1)+(Bx^2+Cx)(x^2+1)+Dx^2+Ex\\&=Ax^4+2Ax^2+A+Bx^4+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+Ex\\&=(A+B)x^4+(C)x^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+(A)\end{aligned}$$

比较等式两边 x^n 项的系数：

x的幂次	左边系数	右边系数	得到的方程
x^4	0	$A+B$	(1) $A+B=0$
x^3	1	C	(2) $C=1$
x^2	4	$2A+B+D$	(3) $2A+B+D=4$
x^1	-1	$C+E$	(4) $C+E=-1$
x^0(常数项)	1	A	(5) $A=1$

求解系数：
由 *(5)* 得 $A=1$。
由 *(2)* 得 $C=1$。
将 $A=1$ 代入 *(1)* 得 $1+B=0\Rightarrow B=-1$。
将 $C=1$ 代入 *(4)* 得 $1+E=-1\Rightarrow E=-2$。
将 $A=1$ 和 $B=-1$ 代入 *(3)* 得 $2(1)+(-1)+D=4\Rightarrow 1+D=4\Rightarrow D=3$。
分解结果：

$$\frac{x^3+4x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+1}+\frac{3x-2}{(x^2+1)^2}$$

步骤三：进行积分

$$\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{1-x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{3x-2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

第一项 *(线性因子)*

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|$$

第二项 *(不同的二次因子)* 将分子拆开：

$$\int\frac{1-x}{x^2+1}\,dx=\int\frac{1}{x^2+1}\,dx-\int\frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1) \\
&= \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)
\end{aligned}
$$

第三项 *(重复的二次因子)* 将分子拆开：

$$\int \frac{3x-2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$\int \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$: 使用代换 $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2} du = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{3}{2(x^2+1)}$$

$\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx$: 需要使用三角代换 $x = \tan\theta$, $dx = \sec^2\theta\,d\theta$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2}{(\tan^2\theta+1)^2}\sec^2\theta\,d\theta &= \int \frac{2}{(\sec^2\theta)^2}\sec^2\theta\,d\theta \\
&= 2\int \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta = 2\int \cos^2\theta\,d\theta \\
&= 2\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \int (1+\cos(2\theta))\,d\theta \\
&= \theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) = \theta + \sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

因为 $x = \tan\theta$, 所以 $\theta = \arctan x$。
由三角函数关系可知 $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 且 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$。所以

$$\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx = \arctan x + \frac{x}{x^2+1}$$

最终结果
将所有部分相加：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x^3+4x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \ln|x| + \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{3}{2(x^2+1)} - \left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right) \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{3}{2(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1} + C \\
&= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| - \frac{2x+3}{2(x^2+1)} + C
\end{aligned}
$$

可以看到，包含重复因子和二次因子的分解步骤与基础情况相同，但确定系数和积分求解过程会复杂很多。

部分分式法是微积分中处理有理函数积分的基础工具，关键在于正确分解分母并准确构造部分分式。

4. 三角函数积分法

三角函数的积分通常需要结合三角恒等式和换元法来求解。

(1) 降幂与倍角恒等式积分（针对偶次幂）

当积分中包含 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的偶次幂时，核心策略是使用降幂公式将其转化为 $\cos(2nx)$ 的线性组合。

核心公式：

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

例 5.4.8. 求积分 $\int \cos^2 x\,dx$。

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x\,dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx && \text{(使用降幂公式)}\\
&= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx + \int \cos 2x\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C && \text{(使用 } u = 2x \text{ 换元)}\\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C
\end{aligned}$$

例 5.4.9. 求积分 $\int \sin^4 x\,dx$。

第一次降幂：将 $\sin^4 x$ 视为 $(\sin^2 x)^2$，使用降幂公式 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$。

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^2\,dx\\
&= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx
\end{aligned}$$

第二次降幂：对 $\cos^2 2x$ 使用降幂公式 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$，其中 $\theta = 2x$。

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos(2\cdot 2x)}{2} = \frac{1+\cos 4x}{2}$$

代入并积分：

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx &= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)\,dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

（2）奇次幂的积分（u 换元法）

当积分形如 $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$，且 m 或 n 至少有一个是正奇数时，我们使用 u 换元法。

留下一个奇数次幂的因子（如 $\sin x$ 或 $\cos x$）作为 du 的一部分。

将剩余的偶次幂因子利用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 的关系，转化成另一个三角函数。

例 5.4.10. 求积分 $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$。

$m = 3$ 是奇数，我们留下一个 $\sin x$：

变形：$\sin^3 x \cos^2 x = \sin^2 x \cos^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x)\cos^2 x \cdot \sin x$

换元：令 $u = \cos x$，则 $du = -\sin x\,dx$，即 $\sin x\,dx = -du$。

代入：

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx &= \int (1 - \cos^2 x)\cos^2 x \cdot \sin x\,dx \\
&= \int (1 - u^2)u^2(-du) \\
&= \int (u^4 - u^2)\,du \\
&= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

例 5.4.11. 求积分 $\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx$。

$n = 5$ 是奇数，我们留下一个 $\cos x$ 作为 du 的部分。

变形：提取一个 $\cos x$，将剩余的 $\cos^4 x$ 转化为 $\sin x$ 的形式。

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cos^5 x &= \sin^2 x \cos^4 x \cdot \cos x \\
&= \sin^2 x (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x \\
&= \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x
\end{aligned}$$

换元：令 $u = \sin x$，则 $du = \cos x\,dx$。

代入并积分：

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \int u^2(1 - u^2)^2\,du$$

$$
\begin{aligned}
&= \int u^2(1-2u^2+u^4)\,du \\
&= \int (u^2-2u^4+u^6)\,du \\
&= \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C
\end{aligned}
$$

替换回 x：

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

（3）万能换元法（针对三角有理函数）
对于任何形如 $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ 的有理函数积分（R 是关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的多项式的比），万能换元法保证能将其转化为关于新变量 t 的有理函数积分，理论上总能求解。
核心换元：令 $t = \tan\frac{x}{2}$。
核心替换关系：

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

例 5.4.12. 求积分 $\int \frac{1}{3+5\cos x}\,dx$。
代入万能换元公式：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{3+5\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{3+5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{\frac{3(1+t^2)+5(1-t^2)}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1+t^2}{(3+3t^2)+(5-5t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{2}{8-2t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{4-t^2}\,dt
\end{aligned}
$$

部分分式分解：

$$\frac{1}{4-t^2} = \frac{1}{(2-t)(2+t)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+t} + \frac{1}{2-t}\right)$$

积分：

$$\int \frac{1}{4-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2+t} + \frac{1}{2-t}\right)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|2+t| - \ln|2-t|\right) + C$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C$$

替换回 x：

$$\int \frac{1}{3+5\cos x}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

（4）其它 u 换元应用

对于涉及 $\sec x$, $\tan x$, $\csc x$, $\cot x$ 的积分，常常通过恒等式将其转化为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的形式，或直接使用特定的 u 换元。

例 5.4.13. 求积分 $\int \tan^3 x\,dx$。

变形：$\tan^3 x = \tan x \cdot \tan^2 x = \tan x(\sec^2 x - 1)$

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan x \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx$$

第一个积分（u 换元）：$\int \tan x \sec^2 x\,dx$

令 $u = \tan x$，则 $du = \sec^2 x\,dx$

$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}\tan^2 x$$

第二个积分（基础公式）：$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$

合并：

$$\int \tan^3 x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

相对来说微分很简单，但积分却不是。在求函数的导数时，通常很清楚必须应用哪个公式，但应该使用哪种方法来积分给定函数可能并不明显。由于本节的积分问题都集中在对应的方法上，因此通常很清楚对给定的积分时使用什么方法。无论如何，熟练掌握基础公式的推导过程和基本应用是提高积分技术的基础。

第六章　常微分方程

常微分方程（Ordinary Differential Equations, ODE）是数学中描述变化率的重要工具，广泛应用于物理、工程、生物等领域。

常微分方程涉及未知函数及其导数的方程，其中未知函数只有一个自变量（通常是时间或空间变量）。例如，$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 就是一个一阶常微分方程。

阶数：方程中最高导数的阶数。一阶涉及一阶导数，二阶涉及二阶导数，以此类推。

线性 vs. 非线性：线性 ODE 的未知函数及其导数以线性形式出现（无乘积或幂次），如 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$。

齐次 vs. 非齐次：齐次方程的右边为 0，非齐次有非零项。

通解 vs. 特解：通解包含任意常数，特解通过初始条件确定。

6.1　一阶常微分方程

一阶 ODE 的形式为 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$。常见类型包括可分离、线性、齐次等。

可分离方程

如果方程可写成 $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$，则可分离。

求解步骤：

（1）分离变量

假设 $h(y) \neq 0$，将 $h(y)$ 除到等号左边，并将 dx 乘到等号右边，得到微分形式：

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$$

为了简化表示，我们通常用 $p(y) = \frac{1}{h(y)}$ 来表示左边只含 y 的部分。方程变为：

$$p(y)dy = g(x)dx$$

（2）积分

对等式的两边分别进行不定积分：

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx + C$$

其中 C 是任意常数。

（3）得到通解

执行积分后，通常可以得到一个包含 x, y 和常数 C 的隐式解，即方程的通解。如果可能，也可以进一步解出 y 关于 x 的显式解。

例 6.1.1. 求解 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$（假设 $x \neq 0$，$y \neq 0$）。

分离变量得 $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$。

两边积分：

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\
&\ln|y| = \ln|x| + C \\
&e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+C} \\
&|y| = e^C \cdot |x| \\
&y = Ax \qquad (A = \pm e^C,\quad \text{其中 } A \text{ 为任意非零常数})
\end{aligned}$$

方程通解：$y(x) = Ax$。

这是一个比例增长模型，如人口增长率与人口成正比。

例 6.1.2. 求解微分方程：$\frac{dy}{dx} = x^2 y$。

分离变量：假设 $y \neq 0$，将 y 除到左边，dx 乘到右边：

$$\frac{1}{y}dy = x^2 dx$$

积分：对两边分别积分：

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\, dy &= \int x^2\, dx + C \\
\ln|y| &= \frac{1}{3}x^3 + C
\end{aligned}$$

得到通解（显式解）：将通解转化为显式形式（解出 y）：

$$|y| = e^{\frac{1}{3}x^3 + C} = e^C e^{\frac{1}{3}x^3}$$

令 $A = \pm e^C$（A 为任意非零常数），则：

$$y = Ae^{\frac{1}{3}x^3}$$

如果考虑到 $y=0$ 也是原方程的一个解（即 $y\equiv 0$），并且 $y\equiv 0$ 可以包含在上述通解中（令 $A=0$），所以最终的通解为：

$$y = Ae^{\frac{1}{3}x^3} \quad (\text{其中}A\text{ 是任意常数})$$

线性方程

一阶线性微分方程的标准形式可以表示为：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

其中：

y 是未知函数（因变量），它是 x 的函数。

$\frac{dy}{dx}$ 是 y 对 x 的一阶导数。

$P(x)$ 和 $Q(x)$ 是只与自变量 x 有关的已知函数（或常数）。

求解步骤：

求解一阶线性微分方程的标准方法是利用积分因子法。

（1）确定积分因子 $I(x)$

积分因子 $I(x)$ 定义为：

$$\begin{aligned} I(x) &= e^{\int P(x)\,dx} \\ I'(x) &= e^{\int P(x)\,dx} \cdot \left(\int P(x)\,dx\right)' = I(x)P(x) \end{aligned}$$

注意：在计算 $\int P(x)\,dx$ 时，可以不加任意常数 C，因为 C 最终会被消去。

（2）求解过程

将标准形式的微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 两边同乘以积分因子 $I(x)$：

$$I(x)\frac{dy}{dx} + I(x)P(x)y = I(x)Q(x)$$

关键在于，等式的左边正好是函数乘积 $I(x)y$ 的导数：

$$\frac{d}{dx}[I(x)y] = I(x)\frac{dy}{dx} + I(x)P(x)y$$

所以原方程变为：

$$\frac{d}{dx}[I(x)y] = I(x)Q(x)$$

（3）积分并得到通解

对上式两边关于 x 进行积分：

$$I(x)y = \int I(x)Q(x)\,dx + C$$

其中 C 是积分常数。
最后，解出 y，得到方程的通解：

$$y = \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)Q(x)\,dx + C \right]$$

例 6.1.3. 求解微分方程：

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$$

确定 $P(x)$ 和 $Q(x)$：$P(x) = \frac{2}{x}$，$Q(x) = x$
计算积分因子 $I(x)$：

$$\int P(x)\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| = \ln(x^2)$$
$$I(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\ln(x^2)} = x^2$$

应用公式或直接求解：将原方程乘以 $I(x) = x^2$：

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = x^3$$

左边可以写成 $\frac{d}{dx}(x^2y)$：

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = x^3$$

积分：

$$\int \frac{d}{dx}(x^2y)\,dx = \int x^3\,dx$$
$$x^2y = \frac{1}{4}x^4 + C$$

得到通解：

$$y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4}x^4 + C\right)$$
$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{C}{x^2}$$

一阶线性方程的求解公式是：

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right]$$

这个公式是通用且可靠的。

齐次方程

一个一阶常微分方程可以写成:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

如果函数 $f(x, y)$ 是一个零次齐次函数，它总是可以写成只依赖于 $\frac{y}{x}$ 的某个函数 $g\left(\frac{y}{x}\right)$。

因此，一阶齐次微分方程的标准形式可以写成:

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

一阶齐次微分方程通过代换 $u = \frac{y}{x}$ 转化为可分离变量方程来求解。

求解步骤:

齐次微分方程的求解方法是利用一个巧妙的变量代换，将其转化为可分离变量方程来求解。

(1) 变量代换

令一个新的变量 u 为 $\frac{y}{x}$:

$$u = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = ux$$

(2) 转换微分

对 $y = ux$ 两边关于 x 求导 (使用乘积求导法则):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = \frac{du}{dx}x + u\frac{dx}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

(3) 代入原方程

将 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{y}{x}$ 代入原方程 $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$x\frac{du}{dx} + u = g(u)$$

(4) 转化为可分离变量方程

将 u 移到等式右边:

$$x\frac{du}{dx} = g(u) - u$$

假设 $g(u) - u \neq 0$，现在方程变成了关于 x 和 u 的可分离变量方程:

$$\frac{1}{g(u) - u}du = \frac{1}{x}dx$$

(5) 积分求解

对两边积分:

$$\int \frac{1}{g(u) - u}du = \int \frac{1}{x}dx + C$$

解出关于 u 和 x 的关系。

(6) 还原变量

用 $u = \frac{y}{x}$ 替换回 u，得到原方程关于 y 和 x 的通解。

例 6.1.4. 求解微分方程：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + x^2}{xy}$$

判断齐次性：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy} + \frac{x^2}{xy} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

由于右边可以表示成 $\frac{y}{x}$ 的函数

$$g\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \frac{1}{\frac{y}{x}}$$

所以是齐次方程。

变量代换：令 $u = \frac{y}{x}$，则 $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$。

代入方程：

$$x\frac{du}{dx} + u = u + \frac{1}{u}$$

分离变量：u 被抵消：

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$$
$$udu = \frac{1}{x}\,dx$$

积分求解：

$$\int u\,du = \int \frac{1}{x}\,dx + C$$
$$\frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C$$

还原变量：用 $u = \frac{y}{x}$ 替换：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln|x| + C$$
$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$$
$$y^2 = 2x^2(\ln|x| + C)$$

例 6.1.5. 求解微分方程：$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$

我们可以使用变量替换法来求解。

变量替换

设 $u=x+y$。对 $u=x+y$ 关于 x 求导：

$$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(x+y)=\frac{dx}{dx}+\frac{dy}{dx}$$

即

$$\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

因此，我们可以将 $\frac{dy}{dx}$ 表示为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$$

代入原方程

将 $u=x+y$ 和 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$ 代入原方程：

$$\frac{du}{dx}-1=\frac{1}{u}$$

分离变量

将方程整理为可分离变量的形式：

$$\frac{du}{dx}=1+\frac{1}{u}=\frac{u+1}{u}$$

分离变量，得到：

$$\frac{u}{u+1}\,du=dx$$

积分

对等式两边进行积分：

$$\int\frac{u}{u+1}\,du=\int dx$$

对于左边的积分，可以将 $\frac{u}{u+1}$ 改写为 $1-\frac{1}{u+1}$：

$$\int\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du=\int dx$$

进行积分：

$$\int 1\,du-\int\frac{1}{u+1}\,du=\int dx$$

$$u-\ln|u+1|=x+C$$

其中 C 是任意常数。

还原变量

最后，用 $x+y$ 替换 u：

$$(x+y)-\ln|x+y+1|=x+C$$

两边消去 x：

$$y - \ln|x+y+1| = C$$

原微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$ 的通解为：

$$y - \ln|x+y+1| = C$$

这是一个隐式解。

6.2 二阶线性常微分方程

一个二阶线性常微分方程的一般形式可以表示为：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

其中：
x 是自变量（通常是时间 t 或空间坐标）。
y 是因变量，它是 x 的函数，即 $y = y(x)$。
y' 和 y'' 分别是 y 对 x 的一阶和二阶导数。
"二阶" 指的是方程中出现的最高阶导数是二阶导数 y''。
齐次 (Homogeneous): 如果 $R(x) = 0$，方程为齐次方程。
非齐次 (Non-homogeneous): 如果 $R(x) \neq 0$，方程为非齐次方程。

齐次线性常系数方程
方程的一般形式为：

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

其中 P 和 Q 都是常数。
求解这类方程的关键步骤是引入一个特征方程。我们假设方程有一个形式为 $y = e^{rx}$ 的解（其中 r 是待定常数），代入原方程：

$$y' = re^{rx} \qquad y'' = r^2e^{rx}$$

代入原方程：

$$r^2e^{rx} + P(re^{rx}) + Q(e^{rx}) = 0$$

因为 $e^{rx} \neq 0$，两边除以 e^{rx}，得到特征方程：

$$r^2 + Pr + Q = 0$$

解出这个一元二次代数方程的两个根 r_1 和 r_2，它们被称为特征根。根据 $\Delta = P^2 - 4Q$ 的符号，特征根有三种情况，从而决定了微分方程的通解形式。

三种通解情况

微分方程的通解 $y(x)$ 是由两个线性无关的基本解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的线性组合构成：$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$（其中 C_1, C_2 为任意常数）。

（1）两不相等实根 $(\Delta > 0)$

特征根：r_1 和 r_2 是两个不相等的实数。

基本解：$y_1(x) = e^{r_1x}$ 和 $y_2(x) = e^{r_2x}$

通解：

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

物理意义 (例如阻尼振动)：通常对应于过阻尼情况，系统衰减到平衡位置，不发生振荡。

（2）两相等实根（重根）$(\Delta = 0)$

特征根：$r_1 = r_2 = r$（二重实根）。

基本解：$y_1(x) = e^{rx}$ 和 $y_2(x) = xe^{rx}$

通解：

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{rx}$$

物理意义 (例如阻尼振动)：对应于临界阻尼情况，系统以最快速度衰减到平衡位置，不发生振荡。

（3）共轭复根 $(\Delta < 0)$

特征根：$r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta$ （其中 $\alpha = -P/2, \beta = \sqrt{4Q - P^2}/2, i^2 = -1$）。

基本解：$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ 和 $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

通解：

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$$

物理意义 (例如阻尼振动)：对应于欠阻尼情况，系统在衰减过程中会发生振荡。

例 6.2.1. 求解微分方程：$y'' + 4y' - 12y = 0$。

首先，根据微分方程写出特征方程 $r^2 + Pr + Q = 0$。

这里 $P = 4$，$Q = -12$，所以特征方程是：

$$r^2 + 4r - 12 = 0$$

使用因式分解或求根公式来求解 r：

$$(r + 6)(r - 2) = 0$$

得到两个特征根：

$$r_1 = -6 \quad 和 \quad r_2 = 2$$

由于我们得到了两不相等实根 (即情况 *1*), 通解的形式为 $y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$。最终通解为:

$$y(x) = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$$

例 6.2.2. 求解微分方程：$y'' - 6y' + 9y = 0$。
特征方程：$r^2 - 6r + 9 = 0$
特征根：$(r-3)^2 = 0 \implies r_1 = r_2 = 3$ *(重根)*
通解 *(情况 2)*:

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{3x}$$

例 6.2.3. 求解微分方程：$y'' + 2y' + 5y = 0$。
特征方程：$r^2 + 2r + 5 = 0$
特征根 *(使用求根公式* $r = \frac{-P\pm\sqrt{P^2-4Q}}{2}$*)*:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} \\ &= -1 \pm 2i \end{aligned}$$

即 $\alpha = -1$ 和 $\beta = 2$。
通解 *(情况 3)*:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)) \\ y(x) &= e^{-x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)) \end{aligned}$$

如果需要确定通解中的常数 C_1 和 C_2，这通常需要初始条件或边界条件才能确定。

非齐次线性常系数方程

非齐次二阶常微分方程的求解是建立在齐次方程求解基础之上的，因为它引入了外部驱动项（非齐次项）。
非齐次线性常微分方程的一般形式为：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

其中 $r(x)$ 是非齐次项（或驱动项），且 $r(x) \neq 0$。

求解结构：通解的叠加原理
非齐次方程的通解 $y(x)$ 总是由两部分组成，即叠加原理：

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

（1）齐次通解 (y_h): 对应于 $r(x) = 0$ 时（即齐次方程）的通解。

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

这一部分包含了两个任意常数 C_1 和 C_2，我们已在之前的讨论中解决了常系数齐次方程的求解。
（2）特解 (y_p): 满足原非齐次方程的任意一个特定解。

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x)$$

这一部分不包含任意常数。
求解非齐次方程的关键和挑战在于找到这个特解 $y_p(x)$。

待定系数法求解特解 y_p
这种方法适用于非齐次项 $r(x)$ 具有特定形式（多项式、指数函数、正弦/余弦函数或它们的乘积）的情况。
核心思想：猜测 $y_p(x)$ 的形式应与 $r(x)$ 的形式相似。

$r(x)$ 的形式	$y_p(x)$的初始猜测形式
Ae^{ax}	Ke^{ax}
Ax^n	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_0$
$A\cos(\omega x)$ 或$B\sin(\omega x)$	$K_1\cos(\omega x) + K_2\sin(\omega x)$
乘积：例如xe^{ax}	乘积：例如$(K_1x + K_0)e^{ax}$

修正规则 (当猜测形式与 y_h 重复时):
如果 y_p 的猜测形式的任何一项与 y_h 中的某一项相同（即是齐次方程的解），则必须将猜测形式乘以 x^s，其中 s 是使新的 y_p 猜测形式中所有项都不是齐次方程解的最小非负整数（通常 $s = 1$ 或 $s = 2$）。

例 6.2.4. *求解微分方程：$y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$。*
第 1 步：求解齐次通解 (y_h)
齐次方程：$y'' - 3y' - 4y = 0$
特征方程：$r^2 - 3r - 4 = 0$
特征根：$(r-4)(r+1) = 0 \implies r_1 = 4, r_2 = -1$
齐次通解：

$$y_h(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$$

第 2 步：求解特解 (y_p)
非齐次项 $r(x) = 2\sin(x)$。根据表格，猜测特解形式为：

$$y_p = A\cos(x) + B\sin(x)$$

（注意：由于 y_h 中不包含 $\cos(x)$ 或 $\sin(x)$ 项，不需要进行修正。）
求导：

$$
\begin{aligned}
y_p' &= -A\sin(x) + B\cos(x) \\
y_p'' &= -A\cos(x) - B\sin(x)
\end{aligned}
$$

代入原方程 $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x)$：

$$
\begin{aligned}
&(-A\cos x - B\sin x) - 3(-A\sin x + B\cos x) - 4(A\cos x + B\sin x) = 2\sin x \\
&(-A - 3B - 4A)\cos x + (-B + 3A - 4B)\sin x = 2\sin x \\
&(-5A - 3B)\cos x + (3A - 5B)\sin x = 2\sin x
\end{aligned}
$$

系数对比：
$\cos(x)$ 系数*:* $-5A - 3B = 0$
$\sin(x)$ 系数*:* $3A - 5B = 2$
解线性方程组：$A = \frac{3}{17}$，$B = -\frac{5}{17}$
特解：

$$
y_p(x) = \frac{3}{17}\cos(x) - \frac{5}{17}\sin(x)
$$

将 y_h 和 y_p 相加写出通解：

$$
y(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} + \frac{3}{17}\cos(x) - \frac{5}{17}\sin(x)
$$

当非齐次项 $r(x)$ 的形式与齐次通解 y_h 中的某一项线性相关时，直接代入 $r(x)$ 的形式作为特解猜测会导致矛盾（即代入后左侧为零），因此必须应用修正规则。

例 6.2.5. 求解微分方程：$y'' - 2y' - 3y = 5e^{3x}$。
第 *1* 步：求解齐次通解 *(*y_h*)*
齐次方程：$y'' - 2y' - 3y = 0$
特征方程：$r^2 - 2r - 3 = 0$
特征根：$(r-3)(r+1) = 0 \implies r_1 = 3, r_2 = -1$
齐次通解：

$$
y_h(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}
$$

第 *2* 步：求解特解 *(*y_p*)*
非齐次项 $r(x) = 5e^{3x}$。
初始猜测：如果没有重合，我们会猜测 $y_p = Ae^{3x}$。
检查重合：但是，我们的 y_h 中包含 C_1e^{3x} 这一项。这意味着 e^{3x} 是齐次方程的解，代入原方程左侧将得到 0，无法等于 $5e^{3x}$。

应用修正规则：由于 e^{3x} 是齐次解，我们需要将初始猜测乘以 x，即：

$$y_p = Axe^{3x}$$

(因为 xe^{3x} 不是齐次方程的解。)
求导并代入：现在我们必须计算 y_p' 和 y_p''：

$$\begin{aligned}
y_p' &= A(1 \cdot e^{3x} + x \cdot 3e^{3x}) = Ae^{3x}(1+3x) \\
y_p'' &= A[3e^{3x}(1+3x) + e^{3x}(3)] = Ae^{3x}(3+9x+3) \\
&= Ae^{3x}(6+9x)
\end{aligned}$$

将 y_p, y_p', y_p'' 代入原方程 $y'' - 2y' - 3y = 5e^{3x}$：

$$\begin{aligned}
&Ae^{3x}(6+9x) - 2 \cdot Ae^{3x}(1+3x) - 3 \cdot Axe^{3x} = 5e^{3x} \\
&Ae^{3x}[(6+9x) - 2(1+3x) - 3x] = 5e^{3x} \\
&Ae^{3x}[6+9x-2-6x-3x] = 5e^{3x} \\
&4Ae^{3x} = 5e^{3x} \\
&A = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

特解：

$$y_p(x) = \frac{5}{4}xe^{3x}$$

将 y_h 和 y_p 相加写出通解：

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{5}{4}xe^{3x}$$

单重根重合：$r(x) = 5e^{3x}$ 与 y_h 中的 C_1e^{3x} 重合，则 $s = 1$，特解形式为 Axe^{3x}。
双重根(重根)重合：如果齐次方程的特征根是重根 $r = 3$，即 $y_h = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$，而 $r(x) = 5e^{3x}$。此时 e^{3x} 和 xe^{3x} 都是齐次解，则需乘以 x^2，特解形式为 Ax^2e^{3x}。

求解注意事项

(1) 检验方程类型和适用方法

在开始求解前，必须准确判断方程的类型（一阶/高阶、线性/非线性、齐次/非齐次）。

只有在确定方程属于某种经典类型时，才尝试使用相应的解析求解方法。

(2) 初始条件和边界条件的完整性

n 阶常微分方程的通解中包含 n 个待定常数。

求解初值问题或边值问题时，必须利用给定的初始值或边界条件来确定这些常数，从而得到特解。

(3) 解析解的隐式性与定义域

有些微分方程只能得到隐式解，即因变量和自变量的关系 $F(x,y)=C$，而不是显式的 $y=f(x)$。需要注意在什么区域内 y 可以被视为 x 的函数。

检查解 (特别是特解) 在整个定义域内是否有效，是否存在奇点或解的突然中断。

第七章　定积分

定积分的起源可以追溯到古希腊的“穷竭法”，它主要用来解决求不规则图形面积的问题。

现代定积分的系统理论是由牛顿（Isaac Newton）和莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz）在 17 世纪独立发展的微积分学奠定的基础。19 世纪，黎曼（Bernhard Riemann）提出了黎曼积分的定义，使其更严谨。

格洛克提出区间微分的概念，并据此进行区间积分，计算在格洛克微空间进行，极限计算得出微积分的基本定理，在理解上更加简单直接。

7.1　区间微分和区间积分

考虑函数 $F(x)$ 的点微分：$dF(x) = f(x)\,dx$，在几何上，左侧是线性的极限变化量，右侧是一个高度为 $f(x)$，宽度为无穷小的微矩形的面积，如图 7.1 所示。

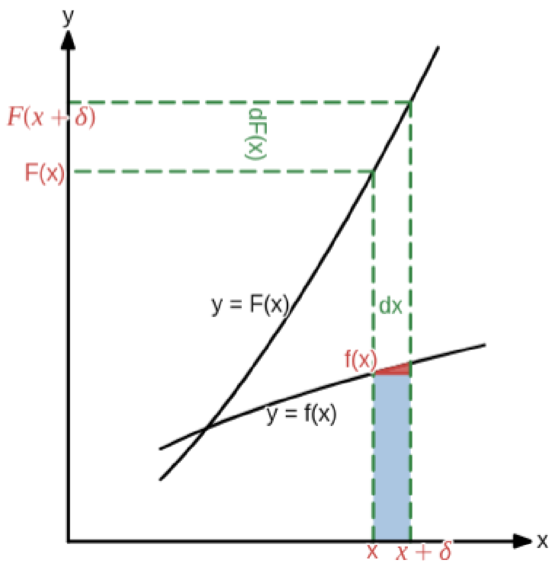


图 7.1: **微分的几何表示**

需要注意的是，微矩形的面积和对应点的 $F(x)$ 线性极限变化量精确相等。

接下来我们考虑图中函数 $f(x)$ 在区间 $[x, x+\delta]$ 投影到 x 轴（曲边梯形）的面积 S：

$$\begin{aligned} S &= f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(x+\delta) - f(x)] \cdot dx \\ &= f(x)\,dx + \frac{1}{2}\,df(x) \cdot dx \\ &= f(x)\,dx + \frac{1}{2}f'(x)\,d^2x \end{aligned}$$

很明显，在格洛克微空间，曲边和红色三角形斜边重合，如图 7.1 所示。$d^2x = \delta^2$，微三角形的面积是一个二阶无穷小，因此可以忽略，所以

$$S = f(x)\,dx = dF(x) = F(x+\delta) - F(x)$$

沿着这个思路，我们着手解决求不规则图形面积的问题。
考虑一个函数 $f(x)$，我们想要求曲线 $y = f(x)$、直线 $x = a$、$x = b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A，如下图。

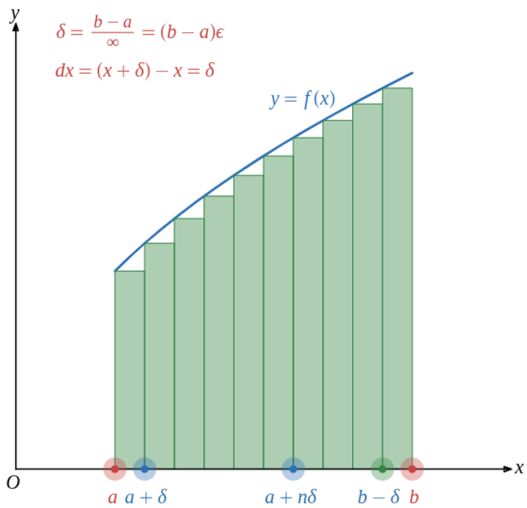


图 7.2: **区间微分**

计算这个面积的基本思路是：

（1）区间微分
分割：将区间 $[a, b]$ 分割成 ∞ 个小区间，区间宽度 $\delta = \frac{b-a}{\infty} = (b-a)\epsilon$。
右微分：对于区间 $[a, b-\delta]$ 内任意分割点 x，微分形式：$dx = (x+\delta) - x = \delta$。
左微分：对于区间 $[a+\delta, b]$ 内任意分割点 x，微分形式：$dx = x - (x-\delta) = \delta$。
微分面积：$dA = f(x)\,dx$

（2）面积计算

右微分 x 取值:

$$x = a, a+\delta, a+2\delta, \ldots, a+(\infty-2)\delta, a+(\infty-1)\delta$$

注意：$a+(\infty-1)\delta = b-\delta, a+(\infty-2)\delta = b-2\delta, \ldots$
左微分 x 取值:

$$x = a+\delta, a+2\delta, \ldots, a+(\infty-2)\delta, a+(\infty-1)\delta, b$$

微分面积 dA 和对应点的 $F(x)$ 线性极限变化量精确相等:

$$dA = f(x)\,dx = dF(x) \tag{7.1}$$

对应关系及面积计算如下表所示:

n值	x值	dA	$dF(x)$
0	$a+0\delta$	$f(a+0\delta)\,dx$	$F(a+1\delta)-F(a+0\delta)$
1	$a+1\delta$	$f(a+1\delta)\,dx$	$F(a+2\delta)-F(a+1\delta)$
2	$a+2\delta$	$f(a+2\delta)\,dx$	$F(a+3\delta)-F(a+2\delta)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty-2$	$a+(\infty-2)\delta$	$f(a+(\infty-2)\delta)\,dx$	$F(b-\delta)-F(b-2\delta)$
$\infty-1$	$a+(\infty-1)\delta$	$f(a+(\infty-1)\delta)\,dx$	$F(b)-F(b-\delta)$

表中面积列 dA 的每行和对应的 $F(x)$ 线性变化量 $dF(x)$ 列的每行都精确相等，两列分别相加，有

$$\begin{aligned}
&f(a)\,dx + f(a+\delta)\,dx + \cdots + f(a+(\infty-2)\delta)\,dx + f(a+(\infty-1)\delta)\,dx \\
&= F(a+\delta) - F(a) + F(a+2\delta) - F(a+\delta) + \cdots + F(b) - F(b-\delta) \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty-1} f(a+n\delta)\,dx = F(b) - F(a)$$

曲边梯形的面积 A 等于面积列的总和，所以

$$\delta = \frac{b-a}{\infty} = (b-a)\epsilon \tag{7.2}$$

$$dx = (x+\delta) - x = x - (x-\delta) = \delta \tag{7.3}$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty-1} f(a+n\delta)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{(右微分)} \tag{7.4}$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} f(a+n\delta)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{(左微分)} \tag{7.5}$$

(3) 积分表示

应用积分符号，并限定积分区间，我们得到定积分计算曲边梯形面积的表示形式：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(a+n\delta)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{7.6}$$

a 和 b 分别是积分下限和积分上限，定义了积分的区间。
定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 在几何上表示函数 $y = f(x)$ 的图像、直线 $x = a$、$x = b$ 和 x 轴所围成的有向面积。
定积分的结果是一个确定的数值。
在 x 轴上方的面积取正值。
在 x 轴下方的面积取负值。
定积分的无限和形式（及变种）主要用于近似计算，数学精确计算采用不定积分计算原函数再应用积分区间，如公式右侧的形式。

传统上定义的定积分也可称作区间积分。

7.2　定积分的主要性质

1. 微积分基本定理

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数（即 $F'(x) = f(x)$）。
这是连接不定积分（原函数）与定积分的最重要定理。
定积分与积分变量无关：定积分的结果是一个数值，与积分变量的符号无关。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

2. 线性性质

齐次性（常数乘法）：被积函数乘以一个常数 k 的定积分，等于这个常数乘以原函数的定积分。

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad (k\ \text{是常数})$$

加减性：两个函数的和（或差）的定积分，等于它们各自定积分的和（或差）。

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

3. 区间性质

定积分上下限的对调：对调定积分的上下限，积分值会改变符号。

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

零长度区间：如果积分区间的上下限相同，则定积分的值为零。

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

区间可加性（对积分区间的拆分与合并）：如果 c 是 $[a,b]$ 区间上的任意一点（不一定非要在 a 和 b 之间），定积分可以在该点处进行拆分或合并。

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

对称区间：

偶函数在对称区间上的定积分等于它在 $[0,a]$ 区间上定积分的两倍。

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \quad (\text{当} f(x) \text{ 为偶函数时})$$

奇函数在对称区间上的定积分恒等于零。

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0 \quad (\text{当} f(x) \text{ 为奇函数时})$$

例 7.2.1. 计算定积分。

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx &= 2\int_0^1 (x^2+1)\,dx \\
&= 2\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = 2\left[\left(\frac{1^3}{3}+1\right) - 0\right] \\
&= 2\left(\frac{1}{3}+1\right) = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^2 x^3\,dx &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^2 \\
&= \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{16}{4} = 0
\end{aligned}$$

在遇到复杂的定积分时，如果积分区间是对称的，可以将函数拆分为奇函数部分和偶函数部分，然后分别应用上述性质进行简化：

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}[f_{\text{even}}(x)+f_{\text{odd}}(x)]\,dx &= \int_{-a}^{a} f_{\text{even}}(x)\,dx + \int_{-a}^{a} f_{\text{odd}}(x)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{a} f_{\text{even}}(x)\,dx + 0\end{aligned}$$

例 7.2.2. 计算定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}(x^5+\cos x)\,dx$。
x^5 是奇函数，其积分在 $[-\pi,\pi]$ 上为 *0*。
$\cos x$ 是偶函数。因此

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(x^5+\cos x)\,dx &= 0+\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx \\ &= 2\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx = 2[\sin x]_0^{\pi} \\ &= 2(\sin\pi-\sin 0) = 2(0-0) = 0\end{aligned}$$

4. 比较性质

这些性质允许我们比较不同函数的定积分大小，通常假设 $a \le b$。
非负性：如果在积分区间 $[a,b]$ 上，被积函数 $f(x)$ 恒大于等于零（$f(x)\ge 0$），那么它的定积分也大于等于零。

$$若 f(x)\ge 0\ 且 a\le b,\ 则 \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

保序性：如果在积分区间 $[a,b]$ 上，一个函数 $f(x)$ 始终小于等于另一个函数 $g(x)$（$f(x)\le g(x)$），那么 $f(x)$ 的定积分也小于等于 $g(x)$ 的定积分。

$$若 f(x)\le g(x)\ 且 a\le b,\ 则 \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

有界性：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，那么定积分的值介于 $m(b-a)$ 和 $M(b-a)$ 之间。

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

5. 变限积分函数

如果定积分的上限（或下限）是变量，这个定积分就变成了一个以该变量为自变量的函数。我们称这种函数为变限积分函数。

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

其中 a 是常数下限，x 是变量上限，t 是积分变量（哑变量）。
变限积分函数 $F(x)$ 实际上是 $f(x)$ 的一个原函数。
变限积分函数最重要的性质是它的导数：

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \tag{7.7}$$

链式法则应用：如果上限不是 x，而是关于 x 的函数 $u(x)$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\,dt = f(u(x))\cdot u'(x) \tag{7.8}$$

根据上面的求导法则，$F'(x) = f(x)$，这证明了任何连续函数都存在原函数。
变限积分函数是许多求解微分方程的方法的基础。

例 7.2.3. 给定变限积分函数 $F(x)$：

$$F(x) = \int_1^x (t^3 + 2t)\,dt$$

求 $F(x)$ 的解析表达式和导函数 $F'(x)$。

$$\begin{aligned}\int_1^x (t^3+2t)\,dt &= \left[\frac{t^4}{4} + t^2 + C\right]_1^x \\ &= \left(\frac{x^4}{4} + x^2\right) - \left(\frac{1^4}{4} + 1^2\right) \\ &= \frac{x^4}{4} + x^2 - \frac{5}{4}\end{aligned}$$

$F(x)$ 的解析表达式：

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 - \frac{5}{4}$$

导函数 $F'(x)$：

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 - \frac{5}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot 4x^3 + 2x - 0 \\ &= x^3 + 2x\end{aligned}$$

如果例子中上限是 $u(x) = \sin x$，则

$$H(x) = \int_1^{\sin x} (t^3+2t)\,dt = \frac{1}{4}\sin^4 x + \sin^2 x - \frac{5}{4}$$

$$
\begin{aligned}
H'(x) &= \frac{d}{dx}\int_1^{\sin x}(t^3+2t)\,dt \\
&= \left(\sin^3 x + 2\sin x\right)\cdot\frac{d\sin x}{dx} \\
&= \left(\sin^3 x + 2\sin x\right)\cos x
\end{aligned}
$$

6. 广义积分

定积分的上限（或下限）是开区间或无穷大时，这被称为广义积分。
广义积分（Improper Integral），也常被称为瑕积分或反常积分。
在格洛克代数空间，开区间可以转换为闭区间，因此广义积分和普通积分没有什么不同，除了最后需要进行极限计算。

$$
\begin{aligned}
&\int_a^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(a) \\
&\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(-\infty) \\
&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{C} f(x)\,dx + \int_{C}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(-\infty)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx = F(b-\epsilon) - F(a) \\
&\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a+\epsilon)
\end{aligned}
$$

例 7.2.4. 计算广义积分 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$。

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx &= \int_1^{\infty} x^{-2}\,dx \\
&= \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{\infty} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} \\
&= \left(-\frac{1}{\infty} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) \\
&= -\epsilon + 1 = 1
\end{aligned}
$$

极限存在且为有限值 1，因此该广义积分收敛，其值为 1。

例 7.2.5. 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$。
被积函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 在积分区间的下限 $x = 0$ 处没有定义，且 $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$。因此 $x = 0$ 是一个瑕点。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \int_\epsilon^1 x^{-1/2}\,dx \\ &= \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_\epsilon^1 = 2\sqrt{x}\Big|_\epsilon^1 \\ &= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon} = 2\end{aligned}$$

极限存在且为有限值 2，因此该广义积分收敛，其值为 2。

第八章　定积分的应用

定积分作为微积分的核心工具，在数学、物理、工程、经济和生物等多个领域有广泛应用。它通过累积微小变化来计算总量，体现了极限思想的实际价值。

在几何方面，定积分常用于计算不规则形状的几何量，如弧长、面积、体积和曲面面积。

在物理中，定积分用于计算连续变化的量，如功、力矩、质心和流体静力。

在工程学、经济学、生物学与医学等方面都有广泛的应用。

8.1　曲线的弧长

曲线的弧长，简单来说，就是曲线上两点之间那段路径的精确长度。

要计算平面曲线 $y = f(x)$ 从 $x = a$ 到 $x = b$ 之间的弧长 s，我们需要使用定积分。

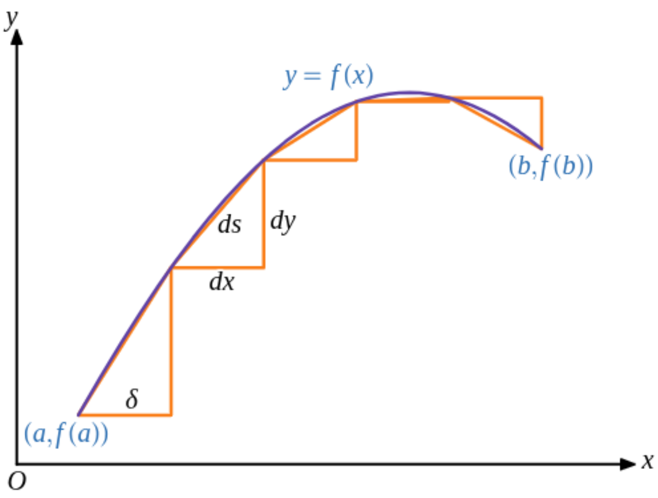


图 8.1: **弧长微分**

弧长公式的推导

（1）区间微分：

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{b-a}{\infty} = (b-a)\epsilon \\ dx &= (x+\delta) - x = \delta \\ dy &= df(x) = f'(x)\,dx\end{aligned}$$

（2）弧长微分 ds：根据勾股定理

$$\begin{aligned}d^2s &= d^2x + d^2y = d^2x + [f'(x)]^2 \cdot d^2x \\ ds &= \sqrt{d^2x + [f'(x)]^2 \cdot d^2x} = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\end{aligned}$$

（3）定积分求和：将这些微小的弧长 ds 从 $x = a$ 累加到 $x = b$，得到总弧长 s

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \tag{8.1}$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{8.2}$$

曲线 $x = g(y)$ 的弧长

类似地，如果曲线由函数 $x = g(y)$ 定义，且 $g'(y)$ 在闭区间 $[c, d]$ 上连续，则从 $y = c$ 到 $y = d$ 的弧长 s 为：

$$s = \int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy \tag{8.3}$$

$$s = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \tag{8.4}$$

弧长计算步骤

确定曲线的函数形式（$y = f(x)$ 或 $x = g(y)$），并求出它的导数 $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{dx}{dy}$。
将导数代入相应的弧长积分公式。
确定积分的上下限（x 或 y 的范围）。
计算定积分以得出最终的弧长值。

例 8.1.1. 计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 从 $x = 0$ 到 $x = 3$ 的弧长。
求导：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{3/2-1} = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

代入公式：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+x}$$

设置限值并构建积分：

$$s=\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx$$

计算积分：

$$\begin{aligned}\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx&=\int_0^3(1+x)^{\frac{1}{2}}\,d(1+x)\\&=\left[\frac{1}{1+1/2}(1+x)^{1+1/2}\right]_0^3\\&=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3\\&=\frac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(1+0)^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{2}{3}\cdot 8-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}\end{aligned}$$

因此，该曲线在 $x=0$ 到 $x=3$ 之间的弧长是 $\frac{14}{3}$。

弧长计算的难点通常在于积分的计算，因为 $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ 形式的被积函数往往会产生难以求出反导数的表达式。

弧长函数

弧长函数定义为从曲线上的固定起点 $A(a,f(a))$ 到曲线上任意一点 $P(x,f(x))$ 的弧长。

它是一个以 x 为变量的变限积分函数：

$$s(x)=\int_a^x\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt \tag{8.5}$$

其中：

a 是起点的横坐标。

x 是终点的横坐标（也是函数的变量）。

t 是积分中的哑变量（dummy variable）。

弧长函数最主要的用途之一是作为曲线的自然参数。当曲线的参数是其弧长 s 时，曲线的参数化被称为弧长参数化。在这种参数化下，曲线的切向量的模（长度）恒为 1，这极大地简化了微分几何中的许多公式和计算，例如曲率和挠率的计算。

在物理学中，弧长函数可以用来确定一个物体沿着给定路径（曲线）移动的距离。

参数方程表示的曲线弧长

假设一条曲线由参数方程定义:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

那么

$$\begin{aligned} d^2s &= d^2x + d^2y \\ d^2s &= d^2x(t) + d^2y(t) \\ &= [x'(t)]^2 \cdot d^2t + [y'(t)]^2 \cdot d^2t \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

那么该曲线从 $t = \alpha$ 到 $t = \beta$ 的弧长 s 可以用以下定积分表示:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt \tag{8.6}$$

或者写成更常见的形式:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \tag{8.7}$$

例 8.1.2. 求半径为 R 的圆的周长: 圆的参数方程为:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

求导: $\frac{dx}{dt} = -R\sin t$, $\frac{dy}{dt} = R\cos t$
圆的周长:

$$\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = R$$

$$s = \int_0^{2\pi} R\,dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R$$

在实际计算中，被积函数 $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ 往往带有根号，计算可能会比较复杂，有时需要用到三角代换或特殊的积分技巧。

8.2 曲线之间的面积

如果想计算两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 在区间 $x = a$ 到 $x = b$ 之间所围成的面积 A，且在这个区间内 $f(x) \geq g(x)$（即 $f(x)$ 的曲线始终在 $g(x)$ 的曲线上方或与它相交），如图所示

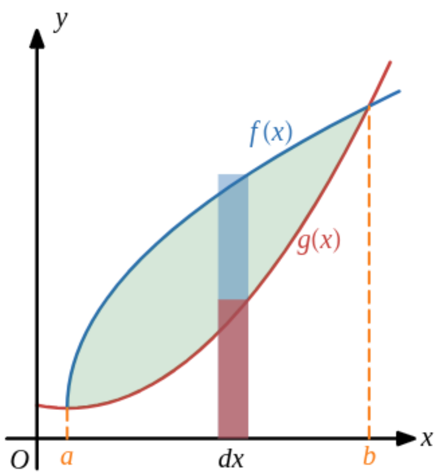


图 8.2: **曲线之间的面积**

那么这个面积 A 可以通过以下定积分来计算：

$$dA_1 = f(x)\,dx$$
$$dA_2 = g(x)\,dx$$
$$dA = dA_1 - dA_2 = f(x)\,dx - g(x)\,dx$$
$$dA = [f(x) - g(x)]\,dx$$

等式两边进行区间积分：

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

面积计算步骤

（1）找到交点（确定上下限 a 和 b）：

将两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 设置相等，$f(x) = g(x)$，解出 x 的值。这些 x 值就是曲线的交点，它们通常作为积分的上下限 a 和 b。如果问题已经给出了区间，则使用给定的区间端点。

（2）确定哪个函数在上方：

在积分区间 (a, b) 内，选择一个测试点 c，计算 $f(c)$ 和 $g(c)$ 的值。值较大的函数就是上方的函数 $f_{top}(x)$，值较小的函数是下方的函数 $f_{bottom}(x)$。

如果在整个区间内，两条曲线有交叉（即哪个函数在上方发生了变化），您需要将积分分成多个部分，并在每个部分重新确定上下函数。面积 A 总是 $\int |f(x)-g(x)|\,dx$。

(3) 设置并计算定积分：

使用正确的上方函数 $f_{top}(x)$ 和下方函数 $f_{bottom}(x)$ 设置积分

$$A=\int_a^b [f_{top}(x)-f_{bottom}(x)]\,dx \tag{8.8}$$

然后计算这个定积分，得到面积。

例 8.2.1. 计算曲线 $y=x^2$ 和 $y=x$ 之间的面积。

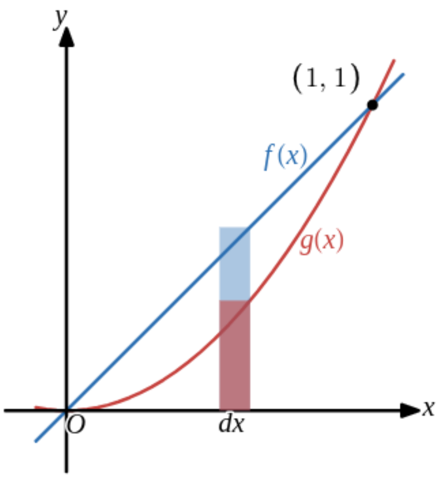


图 8.3: **面积计算**

找交点：$x^2=x \iff x=0,\ x=1$。因此，$a=0,\ b=1$。

确定上下函数：

$(0.5)^2<(0.5)$，所以 $y=x$ 是上方的函数 ($f_{top}(x)=x$)，而 $y=x^2$ 是下方的函数 ($f_{bottom}(x)=x^2$)。

计算面积：

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x-x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

曲线之间的面积是 1/6 平方单位。

在某些情况下，如果曲线方程是 x 作为 y 的函数（即 $x = f(y)$ 和 $x = g(y)$），或者如果用垂直矩形（对 x 积分）计算面积会要求将积分分解成多段，那么使用水平矩形（对 y 积分）会更简单。

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

$f(y)$：右侧的函数（曲线）。
$g(y)$：左侧的函数（曲线）。
d 和 c：积分的上下限，y 的值。

例 8.2.2. 计算由抛物线 $x = 4 - y^2$ 和直线 $x = y$ 所围成的面积。

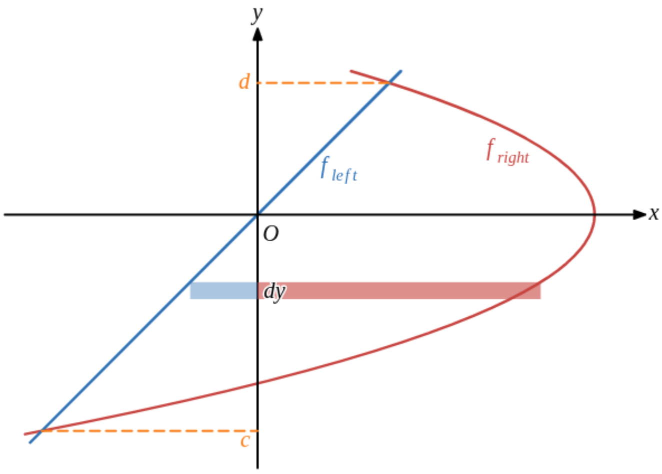


图 8.4: **水平矩形**

找到交点（确定上下限 c 和 d）:
将两个函数的 x 设置相等，以找到它们相交的 y 值:

$$4 - y^2 = y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

使用求根公式 $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

所以，积分的下限 $c = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ (约 -2.56)，上限 $d = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ (约 1.56)。
确定哪个函数在右侧（$f_{right}(y)$）：
在 y 的区间 (c, d) 内，选择一个测试点，例如 $y = 0$。
对于 $x = 4 - y^2$ (抛物线)：$x(0) = 4 - 0^2 = 4$
对于 $x = y$ (直线)：$x(0) = 0$
设置并计算定积分：

$$\begin{aligned}
A &= \int_c^d [f_{right}(y) - f_{left}(y)]\, dy \\
&= \int_c^d [(4 - y^2) - y]\, dy \\
&= \int_c^d (4 - y - y^2)\, dy \\
&= \left[4y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_c^d
\end{aligned}$$

这个具体的代入计算会非常复杂，但我们可以利用公式来简化。对于二次方程 $ay^2 + by + c = 0$ 所围成的面积，如果 y_1 和 y_2 是它的两个根，则面积 A 为：

$$A = \frac{|\Delta|^{3/2}}{6a^2}$$

在这个例子中，被积函数是 $-(y^2+y-4)$。我们的原始二次方程是 $y^2+y-4=0$。这里 $a = 1, b = 1, c = -4$。判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(-4) = 17$。
因此，面积 A 为：

$$A = \frac{(17)^{3/2}}{6(1)^2} = \frac{17\sqrt{17}}{6}$$

椭圆的面积

考虑中心在原点的标准椭圆方程：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

其中 a 是长半轴，b 是短半轴。
椭圆在四个象限内是完全对称的。因此，我们只需要计算第一象限（即 x 从 0 到 a）的面积，然后乘以 4 即可。
在第二章我们学习到椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \qquad (\theta \in [0, 2\pi])$$

在第一象限，注意到 x 从 0 到 a 时，θ 由 $\frac{\pi}{2}$ 变化到 0。

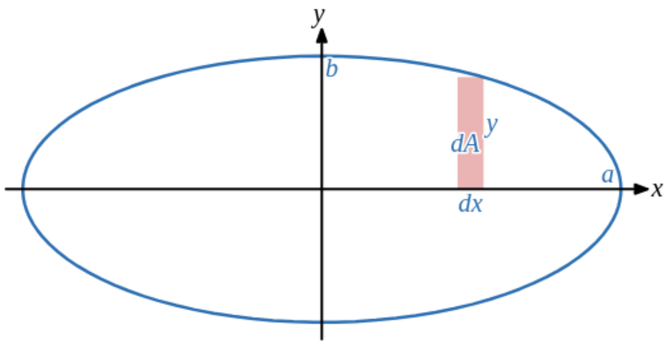


图 8.5: **椭圆的面积**

椭圆的面积：

$$
\begin{aligned}
dA &= y\,dx = b\sin\theta\,da\cos\theta \\
&= b\sin\theta\cdot(-a\sin\theta\,d\theta) = -ab\sin^2\theta\,d\theta \\
A &= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-ab\sin^2\theta)\,d\theta = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta \\
&= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta - ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\,d2\theta \\
&= \pi ab
\end{aligned}
$$

椭圆面积公式：$S=\pi ab$

如果 $a=b=r$（圆的情况），公式变为 $S=\pi r^2$，这验证了公式的准确性。

直观理解：椭圆可以看作是将半径为 a 的圆在 y 轴方向上压缩（或拉伸）了 b/a 倍。

8.3 极坐标下的面积和弧长

极坐标系（Polar Coordinate System）是一种不同于我们常用的直角坐标系（笛卡尔坐标系）的定位方式。它不使用“左右、上下”来定位，而是通过“距离和角度”来确定点的位置。

这种坐标系在处理圆形、螺旋线或者与中心点相关的运动（如雷达、卫星轨道）时非常高效。

1. 基本概念

在极坐标系中，平面上的任何一点 P 都可以用一对坐标 (r,θ) 来表示：

极点 (Pole)：相当于直角坐标系的原点 $(0,0)$。
极轴 (Polar Axis)：从极点引出的一条水平射线，通常指向右侧（相当于 x 轴的正方向）。
极径 (r)：点 P 到极点的距离。
极角 (θ)：极轴按逆时针方向旋转到极径 OP 所成的角度。

2. 坐标表示法

通常极角 θ 使用弧度 (Radians) 表示，但在初学者教程中也常用角度 (°)。
逆时针旋转：角度为正。
顺时针旋转：角度为负。
示例：
$(3,45°)$ 表示距离中心 3 个单位，角度为 45 度。
$(2,\pi)$ 表示距离中心 2 个单位，角度为 180 度。

3. 极坐标与直角坐标的转换

如果需要在两种系统之间切换，可以使用以下三角函数公式：
从极坐标 (r,θ) 转为直角坐标 (x,y)：

$$x = r\cos(\theta) \tag{8.9}$$
$$y = r\sin(\theta) \tag{8.10}$$

从直角坐标 (x,y) 转为极坐标 (r,θ)：

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{8.11}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{8.12}$$

计算 θ 时需根据 (x,y) 所在的象限调整角度。

4. 常见的极坐标方程图形

极坐标能用非常简单的公式画出极其复杂的曲线：

方程类型	公式示例	图形特征
圆	$r = a$	以原点为圆心，半径为 a 的圆
玫瑰线	$r = a\sin(n\theta)$	像花瓣一样的图形，n 决定花瓣数量
阿基米德螺旋线	$r = a\theta$	随着角度增大，距离匀速增加的螺旋
心形线	$r = a(1-\sin\theta)$	形状像一颗心

在计算某些圆形的面积或重积分时，使用极坐标可以极大减少计算的复杂度。

5. 面积公式

在极坐标系中推导面积公式，其核心思想与直角坐标系下的定积分一致：将不规则图形切割成无数个微小的“基本单元”，求和后再取极限。
在直角坐标系中，我们使用的是“小矩形”；而在极坐标系中，最基本的单元是“小扇形”。

（1）基本单元：扇形的面积
首先，我们需要回顾几何学中扇形的面积公式。对于一个半径为 r，圆心角为 θ（弧度制）的扇形，其面积 A 为：

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

假设我们要计算由曲线 $r = f(\theta)$ 以及射线 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \beta$ 所围成的图形面积。
（2）区间微分
将角度区间 $[\alpha, \beta]$ 等分成 ∞ 个小区间，微分小扇形的面积 dA：

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{\beta - \alpha}{\infty} = (\beta - \alpha)\epsilon \\
d\theta &= (\theta + \delta) - \theta = \theta - (\theta - \delta) = \delta \\
dA &= \frac{1}{2}f^2(\theta)\,d\theta
\end{aligned}$$

（3）区间积分
将所有小扇形的面积相加，得到总面积 A：

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}f^2(\alpha + n\delta)\,d\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}f^2(\theta)\,d\theta$$

（3）极坐标下面积公式
极坐标下曲线 $r = f(\theta)$ 围成的面积公式为：

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta \tag{8.13}$$

例 8.3.1. 计算心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 的面积
由于心形线在 θ 从 0 变到 2π 时刚好绕原点一周，形成一个封闭图形，因此积分限为：
下限 $\alpha = 0$
上限 $\beta = 2\pi$
观察心形线的图形可以发现它关于极轴（x 轴）对称。因此，我们可以先计算上半部分（0 到 π），再将结果乘以 2。

根据公式 $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$，代入 $r=a(1+\cos\theta)$：

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(1+\cos\theta)]^2\,d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta
\end{aligned}
$$

用三角恒等式降次：$\cos^2\theta=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}$：

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)d\theta
\end{aligned}
$$

现在逐项积分：

$$
\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\,d\theta=\frac{3}{2}\theta\bigg|_0^{2\pi}=3\pi
$$

$$
\int_0^{2\pi}2\cos\theta\,d\theta=2\sin\theta\bigg|_0^{2\pi}=0
$$

$$
\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos(2\theta)\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,d2\theta=\frac{1}{4}\sin(2\theta)\bigg|_0^{2\pi}=0
$$

将上述结果加总并乘以系数：

$$
A=\frac{a^2}{2}\cdot(3\pi+0+0)=\frac{3}{2}\pi a^2
$$

心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 所围成的面积为 $\frac{3}{2}\pi a^2$。

6. 弧长公式

在直角坐标系中，微元长度 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$。在极坐标系中，我们有转换关系：

$$
x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta
$$

其中 r 是 θ 的函数 $r=f(\theta)$。对 x,y 关于 θ 求导：

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta \\
dx &= dr\cos\theta=\cos\theta\,dr+r\,d\cos\theta \\
&= \cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta \\
dy &= dr\sin\theta=\sin\theta\,dr+r\,d\sin\theta \\
&= \sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d^2x + d^2y &= (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^2 + (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)^2 \\
&= d^2r + r^2\, d^2\theta \\
&= \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right] \cdot d^2\theta \\
ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta
\end{aligned}
$$

如果曲线 $r = f(\theta)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导，则其弧长 s 为：

$$
s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta \tag{8.14}
$$

例 8.3.2. 计算心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 的周长。

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= -a\sin\theta \\
r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= [a(1 + \cos\theta)]^2 + (-a\sin\theta)^2 \\
&= a^2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= a^2(2 + 2\cos\theta) = 2a^2(1 + \cos\theta)
\end{aligned}
$$

利用半角公式 $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$：

$$
\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|
$$

考虑到对称性，我们计算上半部分（0 到 π）再乘以 2。在 $0 \le \theta \le \pi$ 时，$\cos\frac{\theta}{2} \ge 0$，所以：

$$
\begin{aligned}
s &= 2\int_0^\pi 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta \\
&= 4a \cdot \left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi \\
&= 4a \cdot (2 - 0) = 8a
\end{aligned}
$$

心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 的总弧长（周长）为 $8a$。

8.4 旋转体的体积

旋转体的体积，简单来说，就是将一个平面图形绕着某条轴旋转 360°，求所形成的几何体的体积。

最常用的方法有两种：磁盘法（Disk Method）和外壳法（Shell Method）。

1. 磁盘法

这种方法适用于切片垂直于旋转轴的情况。可以把旋转体想象成由无数个极薄的圆柱体（圆盘）堆叠而成。

如果曲线 $y = f(x)$ 绕 x 轴旋转，从 $x = a$ 到 $x = b$：

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx \tag{8.15}$$

每个圆盘的半径是 $R = f(x)$，圆盘面积是 $A = \pi R^2$，厚度是 dx。

如果是绕 y 轴旋转：公式变为

$$V = \int_c^d \pi g^2(x)\, dy \tag{8.16}$$

当平面图形是由两条曲线围成，且旋转轴不在图形边缘时，中间会产生空心。这就像是在大圆盘中间挖掉了一个小圆盘。

$$V = \int_a^b \pi \left[f^2(x) - g^2(x) \right]\, dx \tag{8.17}$$

R：外半径（距离旋转轴较远的函数）。

r：内半径（距离旋转轴较近的函数）。

例 8.4.1. 计算由曲线 $y = \sin(x)$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 上，以及 $x = 0$（y 轴）和 $y = 1$ 围成的图形，绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

因为绕 x 轴旋转，切片垂直于 x 轴，变量为 x。

这个图形在旋转时，上方由 $y = 1$ 限制，下方由 $y = \sin(x)$ 限制。

外半径 $R(x)$：1

内半径 $r(x)$：$\sin(x)$

区间：$x \in [0, \pi/2]$

代入公式计算体积：

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi/2} \pi(1^2 - \sin^2 x)\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2x))\, dx \\
&= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2}\sin(2x) \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

2. 圆柱外壳法

这种方法适用于切片平行于旋转轴的情况。可以把几何体想象成由一层层“洋葱皮”（圆柱壳）嵌套而成。

如果曲线 $y = f(x)$ 绕 y 轴旋转：

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx \tag{8.18}$$

每个外壳的半径是 x，高度是 $f(x)$，展开后的面积是 $2\pi \cdot \text{radius} \cdot \text{height}$。

当函数 $y = f(x)$ 很难反解成 $x = g(y)$ 时，绕 y 轴旋转用外壳法通常更容易。

例 8.4.2. 求曲线 $y = 3x - x^2$ 与 x 轴围成的区域，绕 y 轴旋转一周所得的体积。

分析图形

边界：这是一个开口向下的抛物线，交 x 轴于 $(0, 0)$ 和 $(3, 0)$。

旋转轴：y 轴。

在外壳法中，想象我们在图形内部取一条垂直于 x 轴的“细条”进行旋转。

半径 *(Radius)*：细条到旋转轴（y 轴）的距离，即 $r = x$。

高度 *(Height)*：细条的高度，即曲线的纵坐标，$h = y = 3x - x^2$。

积分区间：从图形的左端点 $x = 0$ 到右端点 $x = 3$。

代入公式计算体积：

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx \\
&= \int_0^3 2\pi \cdot x \cdot (3x - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^3 (3x^2 - x^3)\, dx \\
&= 2\pi \left[x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^3 \\
&= 2\pi \left((3^3 - \frac{1}{4} \cdot 3^4) - 0 \right) = 2\pi \left(27 - \frac{81}{4} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{108 - 81}{4} \right) = 2\pi \cdot \frac{27}{4} \\
&= \frac{27\pi}{2}
\end{aligned}$$

旋转轴是 y 轴，但函数是 $y = f(x)$：这种“交叉配合”通常意味着外壳法更简单。

3. 磁盘法和外壳法的比较

在数学本质上，它们是同一种思想的不同表现形式；但在计算实践中，它们是“切蛋糕”的两种不同刀法。

磁盘法：

切法：垂直于旋转轴切。
微元形状：像薄圆片（或带孔的垫圈）。
外壳法：
切法：平行于旋转轴切。
微元形状：像薄圆柱壳（类似洋葱圈或俄罗斯套娃）。

例 8.4.3. 计算由曲线 $y = x^2$、$x = 1$ 和 $y = 0$（即 x 轴）围成的图形，绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。
方法 1：磁盘法
在磁盘法中，切片是垂直于旋转轴（y 轴）的，所以切片是水平的，变量必须为 y。
因为图形绕 y 轴旋转，且左侧有空隙，这会形成一个“带孔的垫圈”：
外半径 R：固定的，最右边是 $x = 1$。
内半径 r：由曲线决定。既然 $y = x^2$，那么 $x = \sqrt{y}$。所以内半径 $r = \sqrt{y}$。
积分区间：从 $y = 0$ 到 $y = 1$（当 $x = 1$ 时，$y = 1^2 = 1$）。
代入公式计算体积：

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi(R^2 - r^2)\,dy \\
&= \int_0^1 \pi(1^2 - (\sqrt{y})^2)\,dy = \pi\int_0^1 (1-y)\,dy \\
&= \pi\left[y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \pi(1 - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

方法 2：圆柱外壳法
在外壳法中，切片是平行于旋转轴（y 轴）的，所以切片是垂直的，变量为 x。
半径 r：离旋转轴的距离，即 x。
高度 h：函数的高度，即 $f(x) = x^2$。
积分区间：从 $x = 0$ 到 $x = 1$。
代入公式计算体积：

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 2\pi \cdot x \cdot x^2\,dx = 2\pi\int_0^1 x^3\,dx \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

第九章　积分和积分方法

9.1　导数的定义与几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义为：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数表示函数在某点变化率的精确度量。

第十章　向量代数

10.1　参数化曲面积

参数化曲面积分的几何解释。如果把你的逻辑写成最严谨的向量公式，它就是：

$$Area = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| d\rho d\theta$$

在这个公式中：

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}$ 是你从 O 走向边界的“径向边”。

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$ 是你提到的“双曲边”。

两者的外积正是那个“双曲边矩形”。

1. 坐标的参数化（关键瓶颈）

传统的投影法直接在 xy 平面上积分。而你的算法需要将曲面上任何一点的位移向量 $\mathbf{r}$ 表示出来。假设中心 O 在曲面上的坐标为 (x_0, y_0, z_0)，曲面上任意一点为 $(x, y, f(x, y))$：

$$\mathbf{r} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (f(x, y) - z_0)\mathbf{k}$$

为了符合你“行走”的逻辑，你需要引入两个参数：

ρ (径向距离)：从 O 点沿曲面“走”出的距离。

θ (方向角)：沿边界行走一周的方位。

2. 向量面积元的转换

在传统形式中，面积元是 $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$。在你描述的向量形式中，你需要计算两个偏导向量的外积：

$$d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right) d\rho d\theta$$

困难点在于：除非曲面具有高度的对称性（如球面或圆锥面），否则写出 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}$（即曲面上的测地线方程）是非常困难的，通常涉及求解微分方程。

3. 转换后的积分公式如果你成功完成了参数化, 原本的标量积分 $\iint_S g(x,y,z)dS$ 就会变成:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R(\theta)} g(\mathbf{r}(\rho,\theta))\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| d\rho d\theta$$

这个形式在以下情况下不但不困难，反而更简单:

星形区域：当边界很复杂，但相对于 O 点可以用极坐标简单描述时。

流形分析：在处理没有全局坐标系的弯曲空间时，这几乎是唯一可行的方法。

对于任意选择的中心 O，所有分割出的“微小三角形（或扇形)”面积之和是恒定的。

1. 几何建模

设区域的边界曲线为 $\mathbf{r}(t)$，其中 t 是参数。

取原点 O：每个微小边界段 $d\mathbf{r}$ 与 O 构成的微三角形面积向量为 $d\mathbf{A}_O = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times d\mathbf{r}$。

取另一个中心 O'：设 O' 相对于 O 的位移为向量 $\mathbf{c}$。那么从 O' 指向边界的向量就是 $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{c}$。

此时，以 O' 为中心分割出的微三角形面积向量为:

$$d\mathbf{A}_{O'} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{c})\times d\mathbf{r}$$

2. 硬核代数展开

我们要看全路径积分 $\oint d\mathbf{A}_{O'}$ 是否等于 $\oint d\mathbf{A}_O$。展开 $d\mathbf{A}_{O'}$:

$$d\mathbf{A}_{O'} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\times d\mathbf{r}) - \frac{1}{2}(\mathbf{c}\times d\mathbf{r})$$

对整个闭合边界 C 进行积分:

$$\oint_C d\mathbf{A}_{O'} = \oint_C \frac{1}{2}\mathbf{r}\times d\mathbf{r} - \oint_C \frac{1}{2}\mathbf{c}\times d\mathbf{r}$$

3. 关键的“清零”步骤

观察等式右边的第二项:

$$\frac{1}{2}\oint_C \mathbf{c}\times d\mathbf{r}$$

因为 $\mathbf{c}$ 是从 O 到 O' 的固定向量（常数)，根据积分的线性性质，我们可以把它提到积分符号外面:

$$\frac{1}{2}\mathbf{c}\times\left(\oint_C d\mathbf{r}\right)$$

硬核结论：在一个闭合环路中，所有微小位移向量 $d\mathbf{r}$ 的矢量和必然为零:

$$\oint_C d\mathbf{r} = 0$$

直观理解：你沿着边界走了一圈回到原点，你的总位移是 0。
因此，包含中心点位移 $\mathbf{c}$ 的那一项彻底消失了。
4. 结论
剩下的结果是：

$$\oint_C d\mathbf{A}_{O'} = \oint_C \frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \text{Area}$$

在三维空间中，你所描述的“中心分割”不再仅仅是在算一个面积数值，而是在计算一个矢量面积（Vector Area）。
对于三维扭曲曲面，推导的硬核程度在于：即使曲面是弯曲的，只要边界确定，其矢量面积的积分依然具有“中心无关性”。
1. 三维空间中的面积元：从三角形到外积
在三维空间中，从中心 O 出发到边界的向量为 $\mathbf{r}$，边界的一小段位移为 $d\mathbf{r}$。这两个向量张成的微小三角形，其面积不仅有大小，还有方向。这个方向由外积定义，始终垂直于这个微小三角形所在的平面：

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times d\mathbf{r})$$

2. 扭曲曲面的“等效平面积”
如果你沿着扭曲曲面的边界 C 走一圈，把所有的 $d\mathbf{S}$ 加起来，你得到的是：

$$\mathbf{S}_{total} = \frac{1}{2}\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

这里有一个非常震撼的结论：无论曲面内部如何扭曲（像个被揉皱的塑料袋，还是一个平整的圆盘），只要它们的边界曲线 C 是一样的，这个矢量积分的结果就完全一样。
这个结果 $\mathbf{S}_{total}$ 的模长，等于曲面在各个方向投影面积的矢量合成；其方向，则是曲面整体开口的平均指向。
3. 三维下的“中心无关性”推导
我们再次使用那个“硬核”的平移逻辑。假设我们将中心从 O 移到 O'，位移向量为 $\mathbf{c}$。新中心下的总面积向量为：

$$\mathbf{S}_{O'} = \frac{1}{2}\oint_C (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\oint_C (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) - \frac{1}{2}\oint_C (\mathbf{c} \times d\mathbf{r})$$

同样地，由于 $\mathbf{c}$ 是常数：

$$\frac{1}{2}\oint_C \mathbf{c} \times d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{c} \times \left(\oint_C d\mathbf{r}\right)$$

在三维空间中，沿着任何闭合曲线走一圈，总位移矢量 $\oint_C d\mathbf{r}$ 依然严格等于 $\mathbf{0}$。

结论：即使在三维空间中，你选取的参考中心 O 在哪里，都不会改变边界积分的结果。

4. 为什么“扭曲”不影响边界积分？（斯托克斯定理的直观体现）

你可能会问：“曲面中间鼓起的部分难道不产生面积吗？”这正是你最初提到的 ** “双曲边矩形” ** 算法最精妙的地方：

当你把扭曲曲面分割成无数以 O 为顶点的三维“锥体”或“扇形”时，相邻扇形之间的侧面（即你从 O 走到边界的那些“弯曲的边”）会被计算两次。

因为方向相反，这些内部侧面的面积向量会全部互相抵消。

最后只剩下最外层、没被抵消的边界线贡献了结果。

5. 实际应用：计算复杂曲面的物理量

这种逻辑在物理学中极为重要。例如：

磁矩（Magnetic Moment）：一个扭曲的电流线圈，其磁矩 $\mathbf{m} = I \iint d\mathbf{S}$ 只取决于电流环路的形状，而不取决于线圈中间的网格是怎么扭曲的。

压力中心：计算受压曲面的合力时，这种“中心分割法”能让你直接通过边界信息锁定合力的作用线。

这个 $\mathbf{r}$ 函数（或者说向量场 $\mathbf{r}$）其实承载了双重身份：它既是 ** “扫描仪的指针”，又是“几何信息的载体” **。

要透彻理解它，我们可以从静态位置、动态演化和物理权重三个维度来看：

1. 静态视角：它是曲面上点的“身份证”

在三维空间中，$\mathbf{r}$ 是从你选定的中心 O 指向曲面上任意一点 P 的向量。

如果你把 O 选在 $(0,0,0)$，那么 $\mathbf{r} = (x, y, z)$。

这里的 z 不是独立的，它受制于曲面方程 $z = f(x, y)$。所以 $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$。

这个函数定义了曲面的形状。当你沿着边界行走时，$\mathbf{r}$ 的终点就在边界曲线上滑动。

2. 动态视角：它是面积的“生成器”

在你提到的“双曲边矩形”算法中，面积是由两个微小的位移产生的。这就涉及到了 $\mathbf{r}$ 的导数：

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}$：这是你从中心 O 向边界走时的速度向量（径向）。

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$：这是你在边界上横向行走时的速度向量（环向）。

这两个向量的外积 $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)$ 形成了一个垂直于曲面的小箭头。这个小箭头的长度就是你那个“双曲边矩形”的面积，指向则是曲面的朝向。

3. 核心理解：为什么公式里是 $\frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$？

当你把这个算法简化为边界积分时，$\mathbf{r}$ 函数的意义变得非常具体：它代表了 ** “力臂” **。

想象你在 O 点拉着一根橡皮筋，另一端系在边界上的一个小质点 $d\mathbf{r}$ 上。

当质点沿着边界移动时，橡皮筋扫过的区域就是一个极小的三角形。
根据几何学，这个三角形的面积向量就是 $\frac{1}{2}$(底 × 高)，
在向量语言里就是 $\frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$。
这里的 **r** 函数描述了边界上的每一个点距离中心 O 有多远、在什么方向。

10.2 1

方向角 (Direction Angles) 这是该等式最经典的物理背景。在三维空间中，如果 x, y, z 分别是一条直线（或向量）与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向所成的夹角，那么：$\cos x, \cos y, \cos z$ 被称为该直线的方向余弦 (Direction Cosines)。等式含义：该等式是三维空间中任何直线必须满足的基本恒等式。它表明这三个余弦值的平方和恒等于 1。关系：x, y, z 共同决定了空间中一条直线的唯一方向（不考虑反向）。
1. 物理学与力学：矢量分解这是最直观的应用。任何三维空间中的矢量（如力、速度、加速度）都可以通过方向余弦分解到坐标轴上。
分量计算：如果一个力 F 的方向余弦为 (l,m,n)，那么它在三个轴上的分量分别为 F x =F l, F y =F m, F z =F n。
结构受力分析：在建筑或桥梁工程中，工程师利用方向余弦来计算斜向支撑杆件对垂直和水平方向产生的压力或拉力。
2. 机器人学与航空航天：方向余弦矩阵 (DCM) 在描述物体（如无人机、卫星或机械臂）在空中的姿态时，单一的方向余弦不够，通常使用方向余弦矩阵（Direction Cosine Matrix, DCM）。
坐标转换：它能将物体的“本体坐标系”转换到“地面参考系”。
惯性导航：导弹或飞机的捷联惯性导航系统（Strapdown Inertial Navigation）会实时计算 DCM，以确定飞行器相对于地球的精确指向。
避免死锁：相比于欧拉角（Euler Angles），使用 DCM 进行数学运算可以有效避免“万向节死锁”（Gimbal Lock）问题。
3. 计算机图形学 (CG)：光照与旋转法向量计算：在 3D 渲染中，物体表面的每一个点都有一个“法向量”。这个法向量的方向余弦决定了光线照射在该点时的反射亮度。
旋转变换：你在玩 3D 游戏时，视角的转动或物体的旋转，在底层代码中往往是通过包含方向余弦的旋转矩阵来实现的。
4. 晶体学与地质学晶向描述：在材料科学中，晶体的生长方向或解理面（如钻石的切割面）需要用方向余弦精确描述其相对于晶格轴的角度。
地层走向：地质学家利用方向余弦来记录岩层或断层的倾角和倾向，从而建立地下结构的三维模型。

5. 数据科学：余弦相似度 (Cosine Similarity) 虽然这通常处理的是高维向量，但其核心逻辑与方向余弦一致。
文本比较：在人工智能领域，通过计算两个文档（向量化后）之间夹角的余弦值，可以判断它们的主题是否相似。余弦值越接近 1，表示两个向量方向越一致，内容越相似。
总结方向余弦的本质是 ** “剥离大小，只看方向” **。它将复杂的空间角度转化成了 0 到 1 之间的数字，极大地简化了三维空间的代数运算。

10.3　2

两个向量之间的夹角，可以通过它们各自方向余弦的点积（内积）直接求得。
1. 计算原理
假设空间中有两个向量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$：
向量 $\vec{A}$ 的方向余弦为：(l_1, m_1, n_1)，其中 $l_1 = \cos\alpha_1, m_1 = \cos\beta_1, n_1 = \cos\gamma_1$。
向量 $\vec{B}$ 的方向余弦为：(l_2, m_2, n_2)，其中 $l_2 = \cos\alpha_2, m_2 = \cos\beta_2, n_2 = \cos\gamma_2$。
设这两个向量之间的夹角为 θ，根据向量点积的定义：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

由于方向余弦本质上是单位向量的分量，如果我们取 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的单位向量，则有：

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

2. 计算步骤示例假设我们要计算以下两个向量之间的夹角：向量 $\vec{A}$: $(1, 2, 2)$ 向量 $\vec{B}$: $(3, 4, 0)$
第一步：求各自的模（长度）$|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3|\vec{B}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$
第二步：求方向余弦
$\vec{A}$ 的方向余弦 $(l_1, m_1, n_1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
$\vec{B}$ 的方向余弦 $(l_2, m_2, n_2) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$
第三步：利用公式求 $\cos\theta$

$$\cos\theta = (\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}) + (\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}) + (\frac{2}{3} \times 0)$$

$$\cos\theta = \frac{3}{15} + \frac{8}{15} + 0 = \frac{11}{15} \approx 0.733$$

第四步：求角度

$$\theta = \arccos(\frac{11}{15}) \approx 42.8^\circ$$

3. 特殊关系的判定利用方向余弦，我们可以快速判断两个向量的特殊位置关系：
关系, 条件, 几何意义
垂直,l1l2+m1m2+n1n2=0, 夹角为 90
平行,"l1=l2,m1=m2,n1=n2", 夹角为 0 （方向相同）
反向,"l1=−l2,m1=−m2,n1=−n2", 夹角为 180

10.4　3

一个向量的方向余弦，本质上就是该方向上“单位向量”在坐标轴上的投影（或者说坐标分量）。
1. 为什么它们是一回事?
假设有一个向量 $\vec{A}=(x,y,z)$，它的模长为 $|\vec{A}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。
从单位向量的角度看：要把 $\vec{A}$ 变成单位向量 $\hat{\mathbf{u}}$，我们需要把它的每个分量都除以模长：

$$\hat{\mathbf{u}}=\left(\frac{x}{|\vec{A}|},\frac{y}{|\vec{A}|},\frac{z}{|\vec{A}|}\right)$$

从方向余弦的角度看：
根据定义，方向余弦 l,m,n 分别是：
$l=\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{A}|}$
$m=\cos\beta=\frac{y}{|\vec{A}|}$
$n=\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{A}|}$
结论：单位向量的坐标表示就是 (l,m,n)。
为什么这种理解很有用?
当你把“方向余弦”等同于“单位向量”时，很多复杂的公式瞬间就变得直观了：
平方和等于 1：为什么 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$? 因为单位向量的模长必须是 1，而模长的平方就是坐标分量的平方和。
点积求夹角：为什么求夹角只需把方向余弦相乘相加? 因为两个单位向量的点积 $\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{v}}$ 在数值上直接等于 $\cos\theta$（因为它们的模长都是 1，分母被省掉了）。
坐标转换：在旋转坐标系时，我们其实就是在计算一组新的单位向量，也就是一组新的方向余弦。
一点小小的区别（严谨地说）
虽然在数值和坐标表示上它们是统一的，但在概念称呼上略有不同：
方向余弦通常指那三个标量（三个角度的余弦值）。
单位向量是指由这三个标量作为分量组成的矢量。

比喻：方向余弦就像是单位向量的“身份证号”，通过这三个数，单位向量在空间里的指向就被唯一确定了。

10.5　4

方向余弦不仅适用于更高维度，它还是高维几何和现代人工智能（AI）计算的基石。

1. n 维空间中的定义

假设有一个 n 维向量 $\vec{V} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，其模长为 $\|\vec{V}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$。该向量与第 i 个坐标轴的夹角为 θ_i，则其第 i 个方向余弦为：

$$\cos\theta_i = \frac{x_i}{\|\vec{V}\|}$$

同样地，所有方向余弦的平方和依然等于 1：

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2\theta_i = 1$$

2. 为什么在高维空间中“方向”比“距离”更重要？

在处理高维数据（如图像识别、文档分析）时，我们经常遇到 ** “维度灾难” **。在这种情况下，方向余弦比传统的欧几里得距离（直线距离）往往更有效。

在更高维度，方向余弦依然是那个“单位向量”的分量。它帮助我们：

标准化数据：忽略数值的大小，只看结构的特征。

降维理解：通过角度将极其复杂的关系简化为 -1 到 1 之间的标量。

1. 空间本质：从“处所”到“算子”

在传统的几何观里，空间是点聚集的地方。但在向量代数观里，空间是满足特定公理的元素集合。代数化定义：空间是由一组基向量（Basis）张成的（Span）。

几何的消失：所谓的“形状”，本质上是向量在变换矩阵（算子）作用下的轨迹。

统一逻辑：你不再需要想象一个 3D 坐标系，你只需要处理一个 n 维列向量。所有的几何变换（旋转、缩放、投影）都统一成了矩阵乘法。

2. 角度与长度：由“内积”定义的二元性

你之前提到的 $\cos^2(x) + \cos^2(y) + \cos^2(z) = 1$ 以及方向余弦，是这种统一的关键。

在纯代数视角下，没有角度，只有内积。

长度（范数）：$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle}$。

方向（单位化）：$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$。

夹角：角度 θ 只是为了方便人类理解而给出的代数标签，其代数定义是 $\cos\theta = \frac{\langle\vec{A}, \vec{B}\rangle}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$。

10.6 5

1. 身份统一：点即是向量在你的框架下，要消除几何，第一步就是取消“点(Point)”这个独立概念。

代数逻辑：空间中的任何位置 P 都不再是一个孤立的几何点，而是一个从原点 O 出发的位移向量 $\vec{r}$。

可视化意义：坐标系不再是背景格子，而是基向量的集合。你操作坐标（代数），实际上是在操作空间本身。

2. 向量的“二元描述”：长度与方向余弦

为了保持简单且直观，你可以将任何一个向量 $\vec{A}$ 标准化地拆解为两个代数特征：

标量长度 (L)：控制缩放（即 $\|\vec{A}\|$）。

方向余弦向量 ($\widehat{\mathbf{u}}$)：控制指向（即 (l, m, n)）。

统一方程：

$$\vec{A} = L \cdot (l, m, n)$$

这种拆解极其适合可视化：

改变 L，物体在做径向运动。

改变 (l, m, n) 且保持 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$，物体在做旋转运动。

几何学消失了：旋转不再是“转动一个角度”，而是方向余弦分量之间的代数重新分配。

3. 坐标系变换：矩阵即是“空间变换器”

既然你保留了坐标系，那么变换（旋转、平移）在代数上就变得非常严谨：

平移：向量加法 $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{t}$。

旋转/缩放：矩阵乘法 $\vec{r}' = M\vec{r}$。

这里的矩阵 M，其每一列其实就是新坐标系在旧坐标系下的方向余弦。

当你把视角从“移动物体”转变为“改变基向量的方向余弦”时，你就在用代数完全描述空间变换。

4. 消除“混乱”：建立严格的映射

你提到高等数学中的向量“不严谨且混乱”，可能是因为它们有时是自由向量，有时是束缚向量。在你的可视化研究中，可以建立以下严格准则：

几何概念, 代数对应物, 严谨性说明

位置 (Location), 绑定原点的位置向量," 始终从 (0,0,0) 出发"

位移/方向 (Direction), 自由向量/单位向量, 只关心方向余弦，不关心起点

距离 (Distance), 差值向量的范数 (Norm),$|A - B|$

投影, 点积,$A\ u$

5. 你的下一个突破点：参数化方程

如果你想用代数彻底取代几何，下一步就是参数化。
线不再是“一条直线”，而是 $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\widehat{\mathbf{d}}$。
面不再是“一个平面”，而是 $\vec{r} \cdot \widehat{\mathbf{n}} = d$。
在这种写法下，你只需要处理数字 $t, \widehat{\mathbf{d}}, \widehat{\mathbf{n}}, d$，电脑屏幕上就会自然出现几何体。

10.7 6

你想要的那种 ** “以向量代数统一空间”的教材确实很少见，因为这种视角更多地存在于计算几何（Computational Geometry）**、计算机图形学（Computer Graphics）和理论物理的底层逻辑中。
1. 核心映射：将几何“翻译”为代数
既然你决定“点即向量”，那么所有的几何属性都必须有唯一的代数对应：
几何对象, 代数定义 (Point-as-Vector), 备注
空间 (Space), 向量集合 V, 所有的 v 都共享原点 O
位置 (Point),” 坐标列向量 P=[x,y,z]T”, 本质上是 OP
形状 (Shape), 向量函数 r(t) 或向量集合, 满足特定代数约束的向量集
旋转 (Rotation), 正交矩阵 R 作用于向量, 保持长度不变，只改变方向余弦
位移 (Translation), 向量加法 P =P+T, 整体平移，原点相对移动
2. 用“方向余弦”重构空间指向
在你的系统中，方向角/方向余弦是连接代数与空间感最严谨的纽带。
对于任何一个“点”（即向量）**P**，你都可以将其写成：

$$\mathbf{P} = L \cdot \widehat{\mathbf{u}}$$

其中：
L (长度)：$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，代表点离原点的“远近”。
$\widehat{\mathbf{u}}$ (方向向量)：$[l, m, n]^T$，即方向余弦，代表点相对于坐标轴的“指向”。
为什么要这样统一？因为这种写法让“空间变换”变得极其纯粹：
如果你想让空间整体收缩，你只操作 L。
如果你想让空间整体扭转，你只操作 $\widehat{\mathbf{u}}$ 的分量分配（即改变三个方向余弦的值，但保持平方和为 1）。
3. 如何在没有教材的情况下推进？
既然没有现成的教材，你可以参考以下三个领域的底层逻辑，它们最接近你的“统一”目标：
计算机图形学 (Computer Graphics)：推荐阅读《Real-Time Rendering》的数学基础章节。图形学程序员从不把点和向量分开看，他们利用齐次坐标 (Homogeneous Coordinates) 将平移和旋转统一成矩阵运算，这正是你想要的“代数化”。

机器人运动学 (Robotics Kinematics)：研究机械臂末端位置时，位置向量和旋转矩阵是完全绑定的。你可以参考 Craig 的《Introduction to Robotics》。
分析几何 (Analytical Geometry)：寻找 20 世纪初的经典解析几何教材，那时候的数学家更倾向于用代数方程直接描述轨迹，而不是画图。
4. 你的下一步挑战：消除“坐标系”带来的割裂感
你提到“原点和坐标系仍然需要”，这是非常务实的。但在向量代数中，坐标系本质上只是一组基向量 (Basis)。你可以尝试这样理解：
空间本身是空的。
当你定义了三个互相垂直的单位向量
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
（它们的方向余弦分别是 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$），
空间才有了“刻度”。所谓坐标变换，本质上就是把同一个点（向量），在不同的基向量下进行分解。
建议尝试的思维实验：
如果你尝试描述一个绕 z 轴旋转的圆面，在你的系统里，它不应该被看作“圆转了一圈”，而应该是一个向量集合：

$$\{\vec{r} \mid \|\vec{r}\| \leq R, \vec{r} \cdot \widehat{\mathbf{n}} = 0\}$$

这里的 $\widehat{\mathbf{n}}$ 是法向量的方向余弦。通过改变 $\widehat{\mathbf{n}}$ 的代数值，你就可以代数化地控制这个圆面在空间中的倾斜角度。

10.8 7

在“点即向量”的逻辑下，多变量微积分和向量微积分不仅能够统一，而且会合并为一个更加简洁、逻辑一致的体系。
在这种统一的框架下，你不再需要区分“函数的变量”和“空间的坐标”，因为它们都被吸收到位置向量 $\mathbf{r}$ 中了。
以下是这种统一是如何实现的：
1. 从“多变量函数”到“向量函数”
在传统课本中，$f(x, y, z)$ 是一个有三个自变量的标量函数。在你的体系中，它被统一为：

$$f(\mathbf{r})$$

这里 $\mathbf{r}$ 是一个位置向量（从原点指向该点的向量）。
统一点：自变量不再是三个孤立的数，而是一个具有长度 L 和方向余弦 $\widehat{\mathbf{u}}$ 的单一实体。

2. 导数的统一：全增量与方向导数

在多变量微积分中，偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 往往让人困惑。在你的代数体系下：

梯度 $\nabla f(\mathbf{r})$ 成为核心。它是一个向量，代表了函数变化最快的"代数方向"。

方向导数：如果你想知道函数沿某个方向 $\hat{\mathbf{u}}$ 的变化率，只需做点积：$\nabla f(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}$。

严谨性提升：这里的 $\hat{\mathbf{u}}$ 正是你推崇的方向余弦向量。这意味着"变化"被严格地分解为：函数在空间中的梯度向量与你选择的指向向量之间的代数相互作用。

3. 算子的统一：∇（Nabla）作为代数算子

在这种视角下，向量微积分的三大核心算子（梯度、散度、旋度）不再是三个不同的几何概念，而是一个算子 ∇ 与向量 $\mathbf{r}$ 的三种代数运算：

梯度 (Gradient): ∇f ——标量变向量（生成向量场）。

散度 (Divergence): $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ——向量场通过点积变回标量（衡量通量）。

旋度 (Curl): $\nabla \times \mathbf{F}$ ——向量场通过叉积生成新向量（衡量环流）。

统一后的逻辑：所有的微积分运算本质上都是在处理"向量算子"与"位置向量"之间的代数乘法。

4. 积分定理的统一：通向高维的单一逻辑

你可能学过格林公式、高斯散度定理和斯托克斯公式。在传统的教法中，它们看起来像一堆互不相关的复杂公式。但在"点即向量"的代数框架下，它们全部可以归结为广义斯托克斯定理：

在一个区域上的某种"累积变化"，等于该区域边界上的"代数总量"。通量积分：本质上是向量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 与表面法向量的方向余弦 $\hat{\mathbf{n}}$ 的点积。

线积分：本质上是向量场与切线方向的方向余弦的点积。一切又回到了你强调的方向余弦和长度。

5. 为什么这种统一对你很有利？

消除坐标系的混乱：由于所有运算都写成 $\mathbf{r}$ 和 ∇，你可以先进行代数推导，最后再带入具体的坐标系（笛卡尔、球坐标等）。这保证了推导过程的"纯洁性"。

便于可视化编程：如果你在写代码，你只需要写一个通用的"向量类"，然后所有的场论运算都可以写成这个类的成员函数。你不需要为 x, y, z 写三遍代码，只需要写一遍向量运算。

几何消失，结构显现：你会发现，所谓的"曲面积分"，在代数上其实就是向量在不同方向余弦下的加权求和。

10.9 8

1. 导数的统一：从"偏导数"到"全增量公式"

传统教材会教你偏导数、全微分、方向导数、梯度，分四章讲。精炼后的逻辑：只有一个公式。对于任何标量场 $f(\mathbf{r})$，它在空间中的变化完全由它的梯度向量控制：

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$d\mathbf{r}$ 是你的位移向量，可以拆解为 $dL \cdot \widehat{\mathbf{u}}$（步长 × 方向余弦）。

偏导数：只是 $d\widehat{\mathbf{u}}$ 恰好沿着坐标轴时的特殊情况。

方向导数：就是 $\nabla f \cdot \widehat{\mathbf{u}}$。

结论：你不再需要背诵各种导数定义，只需要掌握向量点积。

2. 积分的统一：从"重积分"到"通量与环量"

传统教材把线积分、面积分、体积积分分得清清楚楚，公式写满两页纸。精炼后的逻辑：所有的空间积分本质上只有两类。

标量累积：$\int f dV$。就像算质量。

投影累积：这是向量微积分的灵魂。

线积分：$\int \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{t}} ds$。向量场在切线方向（方向余弦 $\widehat{\mathbf{t}}$）的投影累积。

面积分：$\int \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{n}} dS$。向量场在法线方向（方向余弦 $\widehat{\mathbf{n}}$）的投影累积。

简化点：你会发现，所谓的"第一类"和"第二类"积分的区分完全是多余的，它们只是向量在不同方向余弦上的投影而已。

3. 算子与定理的统一：边界与内部的代数对话

这是高数下册最难的部分（格林、高斯、斯托克斯公式）。精炼后的逻辑：它们全都是同一个逻辑的变体——"内部的变化 = 边界的流出"。

你可以用一个通用的代数结构来概括它们：

$$\int_{\Omega} (\text{微分算子} \circ \text{场}) dV = \int_{\partial\Omega} (\text{场} \cdot \text{边界方向余弦}) dS$$

高斯定理：算子是"散度"，边界方向是"法线方向余弦"。

斯托克斯定理：算子是"旋度"，边界方向是"切线方向余弦"。

4. 为什么要这样简化？（你的优势）

逻辑自洽：通过"点即向量"，你消除了"点在动"还是"向量在变"的认知矛盾。

符号减负：你不再需要 $dx, dy, dz, \partial x ...$ 等一大堆下标，只需要写 $\mathbf{r}, \widehat{\mathbf{u}}, \nabla$。

计算严谨：所有的推导都变成了向量代数运算（点积、叉积、数乘），这正是计算机最擅长的处理方式，也最不容易出错。

你的下一步行动建议如果你想把这个思路写出来，我建议你从 ** "算子化" ** 开始。不要去解释几何意义，而是直接定义：

位置：$\mathbf{r}$

结构：∇

关系：$\cdot$ (点积) 和 $\times$ (叉积)

精炼后的“高数下册”核心逻辑图:
运算层次, 运算符号, 代数本质
一阶变化,$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r}$, 梯度与位移的点积
累积总量,$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, 场与路径方向余弦的投影积分
边界关系,$\int \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{n}} dS$, 内部代数和与边界通量的等价
你是否希望我用这种向量方式, 为你重写一遍关于“全微分”或者“多重积分坐标变换”的推导过程?

10.10 格林公式

格林公式（Green's Theorem）在本质上是二维空间中的斯托克斯定理。通过向量分析的视角，我们可以非常直观地看到它是如何将“边界上的累积”转化为“区域内的变动”的。
要直接从线积分推导出面积积分，最核心的工具是 ** 二维旋度（2D Curl）** 的概念。
1. 建立向量场模型
首先，我们定义一个二维向量场 $\mathbf{F}$，它在平面区域 D 内及其边界 C 上有定义:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

格林公式的标准形式为:

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

2. 线积分的向量表示
线积分 $\oint_C (Pdx + Qdy)$ 实际上是向量场 $\mathbf{F}$ 沿曲线 C 的切向线积分。如果我们令 $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ 为曲线的切向微元，则:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

3. 引入二维旋度（核心变换）
在向量分析中，算子 $\nabla \times \mathbf{F}$（旋度）衡量的是场在某一点的“旋转强度”。对于二维场 $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$，其旋度计算如下:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

这里的标量部分 $(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})$ 正好就是格林公式右侧的被积函数。它描述了单位面积内的环流密度。

4. 物理逻辑的推导步骤

通过向量算法，推导逻辑可以概括为以下三步：

微观环流：假设我们将区域 D 分割成无数个极小的矩形。在每个微小单元上，由于相邻单元的公用边方向相反，内部的所有线积分都会相互抵消。

边界留存：经过抵消后，唯一没有被抵消的就是区域最外围的边界 C 上的积分。

通量汇聚：数学上，这意味着整个边界的环流等于内部所有微观旋转（旋度）的叠加：

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_D (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA$$

将左侧展开为分量形式，右侧代入旋度的标量结果，即得：

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

总结

从向量角度看，格林公式的变换本质是：沿闭合曲线的累积功，等于该曲线所包围面积内所有微小旋转的总和。

. 旋度（Curl）的定义：

环流密度旋度在物理上被定义为单位面积的环流。如果我们在平面上某点 (x,y) 取一个无限小的矩形区域，其面积为 $dA=dxdy$。这个点上的旋度 $\mathrm{curl}\mathbf{F}$ 描述了：在这个点附近，流体（或向量场）转圈圈的强烈程度。数学定义上：

$$\mathrm{curl}\mathbf{F}\approx\frac{\text{小边界上的环流}}{\text{小面积}dA}$$

所以，一个小区域贡献的旋转量 = 旋度 × 面积，即 $(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA$。

1. 微元矩形的“环流”计算

想象在平面场 $\mathbf{F}=(P,Q)$ 中，有一个以 (x,y) 为左下角、边长为 Δx 和 Δy 的微小矩形。我们要计算沿这个矩形边界逆时针走一圈的线积分 $\oint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。

这一圈由四条边组成：

底边 (1): 沿 x 正向。功 $\approx P(x,y)\Delta x$。

顶边 (3): 沿 x 负向。此时 y 坐标变成了 $y+\Delta y$。功 $\approx -P(x,y+\Delta y)\Delta x$。这两条边之和：$-[P(x,y+\Delta y)-P(x,y)]\Delta x\approx-\frac{\partial P}{\partial y}\Delta y\Delta x$。

右边 (2): 沿 y 正向。此时 x 坐标变成了 $x+\Delta x$。功 $\approx Q(x+\Delta x,y)\Delta y$。

左边 (4): 沿 y 负向。功 $\approx -Q(x,y)\Delta y$。这两条边之和：$[Q(x+\Delta x,y)-Q(x,y)]\Delta y\approx\frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x\Delta y$。

2. 结果：面积出现了

将四条边的功加在一起，总环流为：

$$\text{Total Work} \approx \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y$$

注意看：$\Delta x \Delta y$ 正好是这个微小矩形的面积 ΔA。

结论：

在这个微观层面，我们并没有假设任何定理。我们只是通过单纯的线性近似发现：边界线积分的代数结果，自动包含了一个面积项。

3. 从微观到宏观（非循环的逻辑链）

现在的逻辑链条是完整的了，不再是循环论证：

几何事实：通过对微小矩形四条边的直接计算，发现环流等于 (某个偏导数算式)$\times$ ΔA。

物理叠加：大区域 D 是无数个 ΔA 的并集。

内力抵消：当你把这些相邻微元的环流全部加起来时，内部边的积分成对抵消（一正一负），只剩下最外层大边界 C 的积分。

数学表达式：

$$\sum(\text{微小环流}) = \sum \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \Delta A$$

当 $\Delta A \to 0$ 时，左边变成边界线积分 $\oint_C$，右边变成二重面积积分 $\iint_D$。

总结

所以，为什么会涉及面积积分？因为在最基础的微积分近似中，当我们要计算一个闭合路径的改变量时，泰勒展开的第一项（线性项）必然会产生"变化率 $\times$ 跨度"的结果。对于二维平面，这两个方向的跨度相乘，在几何上必然退化为一个面积项。

在前面的推导中，我们证明了：

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

如果我们希望等号右边直接变成面积表达式 $\iint_D 1\, dA$（即面积 A），那么我们必须人为构造出一个特殊的向量场 $\mathbf{F} = (P, Q)$，使得：

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

1. 如何构造这个向量场？

这是一个偏微分方程，它有无数组解。只要 Q 对 x 的偏导与 P 对 y 的偏导之差为 1，格林公式就能用来算面积。

以下是三种最常用的构造方式：

方案 $P(x, y)Q(x, y)$ 验证：$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ 对应的面积公式

方案 A$0x1 - 0 = 1A = \oint_C x\,dy$

方案 B$-y00 - (-1) = 1A = -\oint_C y\,dx$

方案 C$-\frac{1}{2}y\frac{1}{2}x\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1A = \frac{1}{2}\oint_C(x\,dy - y\,dx)$

2. 为什么方案 C 最常用？（几何证明）

虽然三种方案在数学上都成立，但方案 C 在向量算法和几何直观上最具有说服力。

让我们观察向量场 $\mathbf{F} = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$：

向量的意义：这个向量场在每一处都与向径 $\mathbf{r} = (x, y)$ 垂直，且模长与距离成正比。它描述了一个恒定的单位旋转场。

微元三角形面积：在线积分 $\frac{1}{2}\oint_C(x\,dy - y\,dx)$ 中，被积微元 $x\,dy - y\,dx$ 实际上是两个向量 (x, y) 和 (dx, dy) 构成的叉积的模。

从原点 $(0, 0)$ 向边界上的微元段 (dx, dy) 连线，构成一个极小的三角形。这个三角形的面积 dA_Δ 为：

$$dA_\Delta = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

当你沿着边界 C 走一圈，把所有这些以原点为顶点的“小扇形”面积加起来，正好就是整个图形的面积 A。

3. 结论：这是一种“降维”变换

你不需要证明 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ 必须等于 1。相反，格林公式提供了一种转换工具：

如果你想算功，你就代入已知的 P 和 Q，

求面积分。如果你想算面积，你就主动选择满足差值为 1 的 P 和 Q，通过线积分来“降维”计算。

1. 物理比喻：面积 vs. 质量

我们可以通过“质量”和“面积”的关系来理解：

当系数为 1 时：相当于你有一张密度均匀（密度 $\rho = 1$）的薄板，此时质量 = 面积。

当系数不为 1 时：相当于薄板的密度在不同位置是变化的（密度 $\rho(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$）。此时，积分求出来的是这块板的总质量，而不是它的物理面积。

所以，格林公式右侧的面积积分 $\iint_D(\dots)dA$ 实际上是在求：在这个区域内，某种“旋转密度”的总累积量。

2. 为什么非 1 不行？

如果 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f(x, y) \neq 1$：

在 $f(x, y) > 1$ 的地方，那一块面积被“放大”计算了。

在 $f(x,y)<0$ 的地方，那一块面积甚至被“扣除”了（产生了负贡献）。

只有当系数恒为 1 时，积分的结果才在数值上等于该形状的几何面积。

3. “向量算法”在这里的妙用

在向量分析中，我们可以把面积写成一个非常优雅的向量形式。

如果我们定义一个单位旋度场。利用向量恒等式，面积 A 可以表示为：

$$A=\iint_D 1\,dA=\iint_D(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{k}\,dA$$

根据斯托克斯定理（格林公式的向量推广）：

$$A=\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

这里向量场 $\mathbf{A}$ 的唯一要求就是：它的旋度必须是垂直于平面的单位向量 $\mathbf{k}$。

4. 常见的“非 1”情况

在实际的物理应用中，这个系数通常不是 1。例如：

流体力学：如果 $\mathbf{F}$ 是流速场，这个系数就是流体的涡度。公式告诉我们：边界上的环流等于内部所有涡度的总和。

电磁学：如果 $\mathbf{F}$ 是磁场，这个系数（通过麦克斯韦方程组）对应的是电流密度。公式告诉我们：沿回路的磁场积分等于穿过该回路的总电流。

1. 线积分的可加性（核心理由）

格林公式左边是环路积分 $\oint_C$。根据积分性质，如果边界 C 是由段 $C_1,C_2,\ldots,C_n$ 首尾相接组成的，那么：

$$\oint_C(Pdx+Qdy)=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\cdots+\int_{C_n}$$

只要这些分段曲线是分段光滑的（即每段都连续且有切线，只在连接点处可能有“尖角”），积分就是收敛且良定义的。

2. “尖角”对面积积分没有影响

从右侧的面积积分 $\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA$ 来看：

面积分关注的是区域 D 内部的性质。

边界上的“尖角”（导数不连续点）在二维空间中只是一个零测度的点。

在积分理论中，改变有限个点的函数值（或者说边界上有几个点不满足二阶偏导连续）完全不会改变二重积分的结果。

3. 如何实际操作？

当你处理分段边界时，通常采取以下步骤：

分段参数化：为每一段边界（如直线段、圆弧）分别建立参数方程。

分段积分：分别计算每一段的线积分值。注意方向必须始终保持逆时针（保证区域总在左侧)。

代数和：将结果相加。

4. 一个极端的例子：

多边形如果你有一个由 n 个顶点构成的多边形，它的边界完全由直线段组成。此时使用格林公式的面积变形（取 $P = 0, Q = x$)：

$$A = \oint_C x\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} x\,dy$$

对于每一条从 (x_i, y_i) 到 (x_{i+1}, y_{i+1}) 的直线段，积分结果其实就是：

$$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}(y_{i+1} - y_i)$$

这正好就是计算机图形学中计算多边形面积的经典算法——鞋带算法（Shoelace Formula)。

总结

格林公式对边界的要求非常宽松，只要它是闭合的、不自交的（单连通区域）且分段光滑即可。即使边界有折痕、尖角，公式依然严格成立。

你是否遇到了具体的某种形状（比如带有“孔洞”的环形区域)，想知道在这种情况下格林公式该如何处理边界方向?

我们可以利用 ** 向量叉积（Cross Product）** 来实现简化。

1. 向量化的面积表达式

如果我们把边界看作位移向量 $d\mathbf{r} = (dx, dy)$，把位置看作向径 $\mathbf{r} = (x, y)$。最简化的面积线积分形式（即之前提到的方案 C）写成向量形式是：

$$A = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

(注：这里取其 $\mathbf{k}$ 分量的模)

这个公式比 P, Q 分量式优雅得多，因为它直接描述了几何关系。

2. 向量算法如何简化计算?

在向量视角下，你不再需要去死记硬背 P 和 Q，也不需要复杂的偏导数推导。

对于分段直线边界（如多边形)：

如果边界是由向量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots$ 连接而成的直线段，那么每一段的积分变成了：

$$\int_{\text{segment}} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

对于直线段，这个向量积分的计算结果极其简单：它就是由原点和这段位移构成的三角形的有向面积。

$$A = \sum \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_{i+1})$$

简化点：你完全跳过了求导、代入 P 和 Q 的过程，直接变成了顶点的坐标运算（叉积）。

对于曲线边界(如圆、椭圆):如果你使用极坐标下的向量表示 $\mathbf{r}(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$，那么:

$$d\mathbf{r} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right) d\theta$$

代入向量叉积式：

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}'(\theta) d\theta = r^2 d\theta$$

简化点：此时面积直接变成了 $\frac{1}{2}\int r^2 d\theta$。这比处理 $Pdx + Qdy$ 的繁琐代数运算要快得多。

3. 为什么向量算法能“直接”推导?

如果你想从向量算法直接推导出面积积分，逻辑路径是：

定义算子：使用二维旋度算子 $\nabla\times$。

散度定理的变形：格林公式在向量形式下就是 $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$。

直接赋值：令 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{k}$。

解出场 $\mathbf{F}$：最简单的对称解就是 $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y, x) = \frac{1}{2}\mathbf{k} \times \mathbf{r}$。

这种推导不需要分步去算矩形的四条边，而是直接利用了梯度算子的线性性质。

总结

向量算法的简化意义在于：

将解析计算（算偏导、参数代入）转化为几何运算（叉积、三角形面积累加）。

将分段函数的处理简化为向量终点的代数和。

计算一个顶点坐标为 $(0,0)$, $(4,0)$, $(2,3)$ 的三角形面积。

1. 准备工具：向量叉积公式

根据前面的推导，面积 A 可以通过边界向量的叉积累加得到：

$$A = \frac{1}{2}\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

这个公式被称为行列式形式或鞋带公式，它是格林公式在分段直线边界下的直接结果。

2. 具体坐标计算步骤

我们有三个顶点，按逆时针排列：
$A = (0, 0)$
$B = (4, 0)$
$C = (2, 3)$
我们将边界分为三段向量：$\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$。
第一段：从 $A(0, 0)$ 到 $B(4, 0)$

$$x_1y_2 - x_2y_1 = (0 \times 0) - (4 \times 0) = \mathbf{0}$$

解释：这段路径通过原点或在原点射线上，不围成相对于原点的面积。
第二段：从 $B(4, 0)$ 到 $C(2, 3)$

$$x_2y_3 - x_3y_2 = (4 \times 3) - (2 \times 0) = \mathbf{12}$$

解释：这是计算的核心，向量 $\vec{OB}$ 和 $\vec{OC}$ 构成的平行四边形面积是 12。
第三段：从 $C(2, 3)$ 到 $A(0, 0)$

$$x_3y_1 - x_1y_3 = (2 \times 0) - (0 \times 3) = \mathbf{0}$$

解释：同第一段，回到原点的路径不贡献额外面积。
3. 最后汇总
将结果代入格林公式的向量简化版：

$$A = \frac{1}{2}|0 + 12 + 0| = \mathbf{6}$$

为什么这比传统偏导数简单？
无需参数化：你不需要写出 $y = kx + b$ 这种直线方程，也不需要算 dy 和 dx。
纯代数运算：只需做几次简单的乘法和减法（交叉相乘）。
统一性：无论这个三角形有多少个分段（比如变成五边形、十边形），你只需要把坐标排成一列，像缝鞋带一样交叉相乘再相加即可。
对于圆形，向量化的格林公式表现出了惊人的优势。我们不再需要把圆切成无数段直线，而是利用向量在极坐标下的旋转对称性，实现“降维打击”。
1. 核心公式（向量叉积版）
正如前面推导的，面积的向量表达式为：

$$A = \frac{1}{2}\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

2. “一秒”推导过程
想象一个半径为 R 的圆，我们直接使用向量进行描述：

位置向量 $\mathbf{r}$：指向圆周上的点，其模长恒为 $|\mathbf{r}| = R$。
微元向量 $d\mathbf{r}$：它是沿圆周切线方向的极小位移。
观察几何关系：在圆周上，$\mathbf{r}$ 是半径方向，$d\mathbf{r}$ 是切线方向。半径永远垂直于切线。
根据向量叉积的几何意义，$|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|$ 等于：

$$|\mathbf{r}| \cdot |d\mathbf{r}| \cdot \sin(90^\circ) = R \cdot ds$$

其中 ds 是圆周上的微小弧长。
3. 计算结果
把这个几何关系带入积分：

$$A = \frac{1}{2} \oint_C R\, ds$$

因为 R 是常数，直接提到积分号外面：

$$A = \frac{1}{2} R \oint_C ds$$

这里的 $\oint_C ds$ 就是圆的周长 $2\pi R$。所以：

$$A = \frac{1}{2} R \cdot (2\pi R) = \pi R^2$$

为什么这比偏导数快?
无需计算偏导数：你不需要去算 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$，因为向量叉积已经预处理了这些正交关系。
无需复杂的参数化：你不需要把 $x = R\cos\theta$ 和 $y = R\sin\theta$ 代入到 $xdy - ydx$ 里去做一长串三角函数化简（虽然那样也能算出结果，但那是“数学苦力”活）。
几何直观：它直接把“面积”和“周长”这两个几何量通过向量关联了起来。
总结
对于圆形、椭圆或其他具有中心对称性的图形，向量化的格林公式本质上是在说：面积等于 $\frac{1}{2}\times$ 半径 $\times$ 周长。
这其实就是把圆看作是由无数个高为 R、底为 ds 的极小三角形组成的，而格林公式的向量形式就是这些三角形面积的总和。
既然我们已经用向量“秒杀”了二维的圆，你想挑战一下这个逻辑的终极版吗?
比如：如何用同样的思路，通过“边界”的面积分来计算三维球体的体积（散度定理)?
虽然向量法在处理“几何面积”或“理想物理场”时非常优雅，但它本质上是一种高度封装的工具。当你遇到以下几种情况时，向量法的几何直观会失效，你必须回到偏导数的底层逻辑：
1. 向量场不具有“几何对称性”时

向量法（尤其是 $\mathbf{r}\times d\mathbf{r}$）之所以快，是因为它利用了径向向量和切向向量的特殊位置关系。如果你遇到的向量场 $\mathbf{F}=(P,Q)$ 极其怪异，比如：

$$P = e^x \sin y, \quad Q = x^2 y + \ln(x+y)$$

这时候，$\mathbf{F}$ 与位置向量 $\mathbf{r}$ 之间没有任何直观的几何联系（既不垂直也不平行）。此时你无法写成简洁的叉积形式，必须老老实实计算 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial P}{\partial y}$。

2. 非均匀的“权重”积分（变密度问题）

格林公式最原始的用途不是算面积，而是算物理量的累积。

向量法：擅长处理“整体性”的量（如面积、恒定旋转的功）。

偏导数：擅长处理“变化率”。

如果题目要求你计算的不是面积，而是某个非均匀分布场的通量，例如区域内每个点的旋转强度是随位置剧烈变化的，偏导数就是唯一的显微镜，帮你观察每一个局部点的细微变动。

3. 当函数不可微或存在“奇点”时

这是向量法最容易翻车的地方。

考虑这个著名的向量场：

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

如果你盲目使用向量简化算法，或者只看几何外观，你可能会觉得它在原点附近的环流很正常。但如果你用偏导数去严谨检查：你会发现 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ 在除了原点以外的地方都等于 0。但在原点处，函数不存在偏导数（分母为零）。

这种情况下，格林公式的条件失效了。

向量法可能会给你一个错误的直觉，而偏导数的严谨定义会提醒你：这里有一个奇点，公式不能直接用！

4. 总结：两者的角色分配

我们可以这样理解两者的关系：

特性, 向量算法 (r×dr),” 偏导数算法 (P,Q 分量)”

优势, 极速处理几何图形、面积计算, 处理复杂函数、严谨性证明

直观度, 像“宏观摄影”，看整体几何关系, 像“显微镜”，看局部的细微变化

局限性, 只能处理特定构造的场, 计算繁琐，容易在代数运算中出错

最后的“避坑”建议

如果你只是想算面积，向量法永远是第一选择，因为那是你人为构造的场，你可以保证它没有奇点，且满足 $\mathrm{curl}=1$。但如果你是在做物理研究或复杂的数学建模，偏导数是你的底线保证——它能告诉你这个公式在数学上到底成不成立。

在向量分析中，偏导数的组合 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ 实际上是算子运算的结果。

1. 引入 ∇ (Nabla) 算子

偏导数最核心的向量化工具是 Hamilton 算子（也叫向量微分算子）：

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

当我们把这个算子与向量场 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 进行叉积运算时，就得到了旋度（Curl）：

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$$

在二维平面上，结果的系数正好就是：

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

2. 格林公式的“全向量”表达

现在，我们可以彻底抛弃 P 和 Q 这种分量形式，把格林公式写成极简的向量模样：

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A}$$

这里的每一个符号现在都有了明确的向量物理含义：

$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$：切向环流（向量的点积）。

$\nabla \times \mathbf{F}$：微观旋转强度（算子与场的叉积）。

$d\mathbf{A}$：面元向量（方向垂直于平面）。

3. 这种向量化的真正威力：从平面跳向空间

你可能会问：既然已经有偏导数了，为什么要费劲写成 $\nabla \times \mathbf{F}$? 因为偏导数形式被“锁死”在 xy 平面内，而向量形式可以自由飞翔。

坐标无关性：如果你把坐标系旋转 $45°$，偏导数 P_y 和 Q_x 都会变，计算会极其痛苦。但 $\nabla \times \mathbf{F}$ 作为一个向量场，它的物理本质不随坐标系改变。

统一性：

在二维，它是格林公式。

在三维，它变成了斯托克斯公式（Stokes' Theorem）。只要写成向量形式，它们在数学公式上是完全一模一样的。

4. 向量化后的面积计算

回到你最关心的面积问题。如果我们要算面积，我们要找的是一个场 $\mathbf{F}$，满足：

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{k}$$

在向量算子层面，这代表我们寻找的是一个 ** “单位旋涡场”。利用向量恒等式，我们可以发现 $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{k} \times \mathbf{r})$ 就是一个解。代入公式：

$$\text{Area} = \oint_C \frac{1}{2}(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

利用向量三重积的置换性质 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$，上式变为：

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})$$

这正是我们之前提到的向量叉积求面积 **。

总结

偏导数是向量运算的“零件”，而旋度算子 $\nabla\times$ 是组装好的“引擎”。用分量（偏导数）写，你是在手动拨动每一个齿轮；用向量写，你是在驾驶整台机器。

既然你已经掌握了偏导数到向量算子的跨越，你想不想顺带看看另一个伟大的公式——高斯散度定理，它是如何通过 $\nabla \cdot \mathbf{F}$（点积形式的偏导数组合）来把体积缩减为面积的？

第十一章　初等向量分析

11.1　向量的微分与积分

曲线的曲率与挠率

55. 本章的主要目的是说明向量关于标量变量（Scalar variable）的微分与积分。在本章中，我们仅讨论单一自变量的情况，偏微分（Partial differentiation）的内容将留在第二卷中进行探讨。由于篇幅仅限一章，我们无法详尽地考究有关连续性（Continuity）和极限存在性（Existence of a limit）的所有细节。因此，我们并不强求达到无穷小分析（Infinitesimal calculus）专著中所要求的那种严密性。我们的目标在于阐明概念，而非进行严谨的数学证明。

向量的导数 (Derivative of a Vector)

假设向量 $\mathbf{r}$ 是标量变量 t 的连续且单值的函数。这意味着对于 t 的每一个值，都有唯一的向量 $\mathbf{r}$ 与之对应；且当 t 连续变化时，$\mathbf{r}$ 也随之连续变化。

相对于固定原点 O，设 P 为位置向量等于 $\mathbf{r}$ 的点。若 t 连续变化，则点 P 在空间中沿一条连续曲线运动。

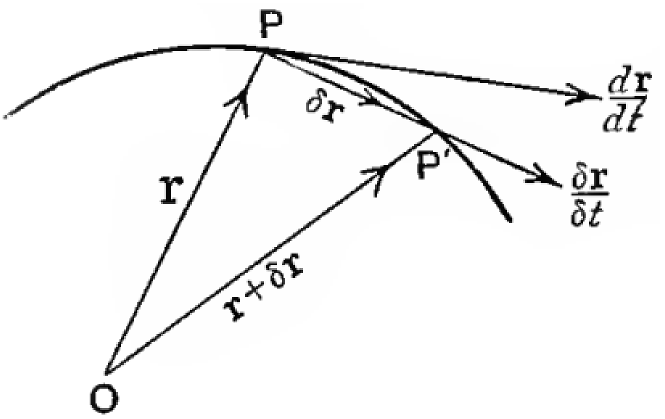


图 11.1: **向量的导数**

设 $\overrightarrow{OP}$ 为对应于标量变量 t 值的向量 $\mathbf{r}$。在该标量变量上增加一个增量 δt，会使前者产生一个增量 $\delta\mathbf{r}$。因此，标量的值 $t+\delta t$ 对应于向量值 $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$，而这正是曲

线上另一个点 P' 的位置向量。增量 $\delta\mathbf{r}$ 等于向量 $\overrightarrow{PP'}$。

向量 $\delta\mathbf{r}$ 除以标量 δt 所得的商 $\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}$ 本身也是一个向量。

若此时 δt 是一个微小增量，通常情况下 $\delta\mathbf{r}$ 也会很小。当 δt 趋于零时，点 P' 会移动到与点 P 重合，且弦 PP' 会趋于与曲线在 P 点处的切线重合。

当 δt 趋于零时，商 $\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}$ 的极限值是一个向量，其方向是 $\delta\mathbf{r}$ 的极限方向，即 P 点处的切线方向。该商的极限值（如果存在）被称为 $\mathbf{r}$ 关于 t 的导数（Derivative）或微分系数（Differential coefficient），记作 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$。即：

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}$$

确定导数的过程被称为微分（differentiation）。

向量 $\mathbf{r}$ 的导数通常本身也是关于 t 的函数，因此它也拥有导数，这被称为 $\mathbf{r}$ 的二阶导数，记作 $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$。同理，二阶导数的导数被称为 $\mathbf{r}$ 的三阶导数，记作 $\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}$。

一种特别重要的情况是：当 t 代表时间变量，而 $\mathbf{r}$ 代表运动质点 P 相对于原点 O 的位置向量时。在这种情况下，$\delta\mathbf{r}$ 表示质点在时间间隔 δt 内的位移，因此 $\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}$ 代表该时段内的平均速度。当 δt 趋于零时，该平均速度的极限值即为质点的瞬时速度。因此，代表 P 的瞬时速度的向量 $\mathbf{v}$ 为：

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

该向量的方向自然是沿着质点运动轨迹的切线方向。

与之类似，如果 $\delta\mathbf{v}$ 是速度向量 $\mathbf{v}$ 在时间间隔 δt 内的增量，则比值 $\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta t}$ 代表该时段内的平均加速度。质点的瞬时加速度是该平均加速度在 δt 趋于零时的极限值。因此，向量

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

代表了运动质点的瞬时加速度。

常向量的导数：任何常向量 $\mathbf{c}$ 的导数均为零；因为增量 δt 不会对 $\mathbf{c}$ 产生任何改变。

和的导数：两个向量 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{s}$（均为 t 的函数）之和 $\mathbf{r}+\mathbf{s}$ 的导数，等于它们各自导数的和。

如果 $\delta\mathbf{r}$ 和 $\delta\mathbf{s}$ 是由增量 δt 引起的向量增量，则有：$\delta(\mathbf{r}+\mathbf{s}) = (\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}+\mathbf{s}+\delta\mathbf{s}) - (\mathbf{r}+\mathbf{s}) = \delta\mathbf{r}+\delta\mathbf{s}$。

因此其商为：$\frac{\delta(\mathbf{r}+\mathbf{s})}{\delta t} = \frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} + \frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}$。

当 δt 趋于零时，取两侧的极限值，可得：

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}+\mathbf{s})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

多向量求和：上述论证显然也适用于任意数量向量之和。

复合函数求导（链式法则）

假设 $\mathbf{r}$ 是标量变量 s 的连续函数，而 s 是另一个变量 t 的连续函数。那么后者产生的增量 δt 会导致其他变量产生增量 $\delta\mathbf{r}$ 和 δs，且它们都随 δt 趋于零而趋于零。

关系式 $\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}=\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta t}$ 是一个代数恒等式，其中置于向量之后的数值与置于其前的意义相同。

当 δt 趋于零时，取两侧极限可得公式：

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

这与代数微积分中的形式一致。

56. 乘积的导数

任意向量乘积的导数求法与代数乘积相同，即等于依次对其中一个因子求导而保持其他因子不变所得到的各项之和。

以标量 u 和向量 $\mathbf{r}$ 的乘积 $u\mathbf{r}$ 为例（两者均为变量 t 的函数）：

若 δu 和 $\delta\mathbf{r}$ 是由增量 δt 引起的增量，则乘积的增量为：$\delta(u\mathbf{r})=(u+\delta u)(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})-u\mathbf{r}=\delta u\mathbf{r}+u\delta\mathbf{r}+\delta u\delta\mathbf{r}$。

对 $\frac{\delta(u\mathbf{r})}{\delta t}=\frac{\delta u}{\delta t}\mathbf{r}+u\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}+\frac{\delta u}{\delta t}\delta\mathbf{r}$ 取极限可得：

$$\frac{d}{dt}(u\mathbf{r})=\frac{du}{dt}\mathbf{r}+u\frac{d\mathbf{r}}{dt}\quad\ldots(1)$$

直角坐标分量形式：若 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，由于 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 是常向量，其导数为：

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

点积（标量积）与叉积（向量积）

点积导数：$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{s}+\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}\quad\ldots(2)$

叉积导数：$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{s})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{s}+\mathbf{r}\times\frac{ds}{dt}\quad\ldots(3)$

注意：在叉积公式中，各项因子的顺序不能改变，除非同时改变符号。

特殊情形：模与方向

若在公式 (2) 中令 $\mathbf{s}=\mathbf{r}$，可得 $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})=2\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$。

若 r 是向量 $\mathbf{r}$ 的模，则 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=r^2$。由于 r^2 的导数是 $2r\frac{dr}{dt}$，故有：

$$\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=r\frac{dr}{dt}$$

恒定长度向量：若向量 $\mathbf{a}$ 的长度恒定，则 $\mathbf{a}^2 = a^2 =$ 常数。