第二部分 集合论



第六章 集合代数 主要内容

- 集合的基本概念 属于、包含 幂集、空集 文氏图等
- 集合的基本运算并、交、补、差等
- 集合恒等式集合运算的算律、恒等式的证明方法

6.1 集合的基本概念



1. 集合定义

集合没有精确的数学定义

理解:由离散个体构成的整体称为集合,称这些个体为集合的元素

常见的数集: N, Z, Q, R, C 等分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合

2. 集合表示法

枚举法----通过列出全体元素来表示集合 谓词表示法----通过谓词概括集合元素的性质 实例:

枚举法 自然数集合 $N=\{0,1,2,3,...\}$ 谓词法 $S=\{x \mid x$ 是实数, $x^2-1=0\}$

元素与集合



1. 集合的元素具有的性质

无序性:元素列出的顺序无关

相异性:集合的每个元素只计

数一次

确定性:对任何元素和集合都

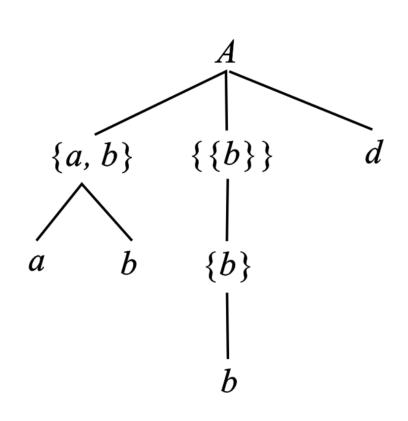
能确定这个元素是否

为该集合的元素

任意性:集合的元素也可以是

集合

- 元素与集合的关系
 隶属关系: ∈或者 €
- 3. 集合的树型层次结构 $A = \{\{a, b\}, \{\{b\}\}\}, d\}$



 $d \in A, a \notin A$

集合与集合



集合与集合之间的关系: ⊆, =, ⊈, ≠, ⊂, ⊄

定义6.1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \to x \in B)$

"A包含于B"、"B包含A"、"A是B的子集"

定义6.2 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$ "A与B相等"

定义6.3 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$ "A是B的真子集"

 $A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \land x \notin B)$

思考: ≠和⊄的定义、∈和⊆的区别

空集、全集和幂集



1. 定义6.4 空集 Ø: 不含有任何元素的集合

实例: $\{x \mid x \in R \land x^2+1=0\}$

定理6.1 空集是任何集合的子集。

证: 对于任意集合A,

 $\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T (恒真命题)$

推论 Ø是惟一的 (思考为什么)

空集、全集和幂集



n元集: 具有n个元素的集合

(一元集也称单元集)

|A|表示A中元素的个数

n元集有多少个不同的子集?

例:

{a}的所有子集为:

$$\emptyset$$
, $\{a\}$

 $\{a,b\}$ 的所有子集为:

$$\emptyset$$
, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$

 ${a,b,c}$ 的所有子集为:

$$\emptyset$$
, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$

n元集有 2^n 个不同的子集

空集、全集和幂集



2. 定义6.5 幂集: $P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

实例: $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$, $P(\{\emptyset\})=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

计数: 如果 |A|=n,则 $|P(A)|=2^n$.

3. 定义6.6 全集 E: 包含了所有集合的集合 全集具有相对性: 与问题有关,不存在绝对的全集

练习1



- 1. 判断下列命题是否为真
- (1) $\emptyset \subseteq \emptyset$
- (2) ∅∈∅
- $(3) \varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
- $(4) \varnothing \in \{\varnothing\}$
- (5) $\{a,b\}\subseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$
- (6) $\{a,b\} \in \{a,b,c,\{a,b\}\}$
- $(7) \{a,b\} \subseteq \{a,b,\{\{a,b\}\}\}\$
- (8) $\{a,b\} \in \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

解 (1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)为真,其余为假.

6.2 集合的运算



初级运算

定义6.7 并
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$
 交 $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$ 相对补 $A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$ 定义6.8 对称差 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B$ 定义6.9 绝对补 $\sim A = E - A$ " $A \cap B = \emptyset$

并和交运算可以推广到有穷个集合上,即

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \lor x \in A_2 \lor \dots \lor x \in A_n \}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{ x \mid x \in A_1 \land x \in A_2 \land \dots \land x \in A_n \}$$

广义运算



1. 集合的广义并与广义交

定义6.10 广义并 $\bigcup A = \{x \mid \exists z (z \in A \land x \in z)\}$ A中元素的并集 (即,A中元素的元素组成的集合)

定义6.11 广义交 $\cap A = \{x \mid \forall z (z \in A \rightarrow x \in z)\}$

A中元素的交集

实例

$$\cup$$
{{1}, {1,2}, {1,2,3}}={1,2,3}
 \cap {{1}, {1,2}, {1,2,3}}={1}
 \cup {{a}}={a}, \cap {{a}}={a}
 \cup {a}=a, \cap {a}=a

关于广义运算的说明



- 2. 广义运算的性质
 - (1) ∪Ø=Ø,∩Ø无意义
 - (2) 单元集{x}的广义并和广义交都等于x
 - (3) 广义运算减少集合的层次(括弧减少一层)
 - (4) 广义运算的计算:一般情况下可以转变成初级运算

$$\cup \{A_1, A_2, \dots, A_n\} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\cap \{A_1, A_2, \dots, A_n\} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

3. 引入广义运算的意义

可以表示无数个集合的并、交运算,例如

$$\cup \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

这里的 R 代表实数集合.

运算的优先权规定



2 类运算: 初级运算∪, ∩, -, ⊕,

优先顺序由括号确定,默认按从左向右进行

1类运算:广义运算、~运算、幂集运算,

运算由右向左进行

混合运算: 1 类运算优先于2 类运算

例1 $A = \{\{a\}, \{a,b\}\}\}$, 计算 $\cap \cup A \cup (\cup \cup A - \cup \cap A)$. 解: $\cap \cup A \cup (\cup \cup A - \cup \cap A)$ $= \cap \{a,b\} \cup (\cup \{a,b\} - \cup \{a\})$ $= (a \cap b) \cup ((a \cup b) - a)$ $= (a \cap b) \cup (b - a) = b$

练习2



2. 设

$$S_1 = \{1, 2, ..., 8, 9\},$$

 $S_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$S_5 = \{3, 5\}$$

$$S_2=\{2, 4, 6, 8\}$$

$$S_4 = \{3, 4, 5\}$$

确定在以下条件下X是否与 $S_1,...,S_5$ 中某个集合相等?如 果是,又与哪个集合相等?

(3) 若
$$X\subseteq S_1$$
且 $X \subseteq S_3$

(5) 若
$$X\subseteq S_3$$
且 $X \nsubseteq S_1$

$$S_2$$

$$S_5$$

$$S_1, S_2, S_4$$

$$S_3, S_5$$

$$S_3, S_5$$
 注: $X - A = \emptyset \Leftrightarrow X \subseteq A$

找不到这样的X

解答



解

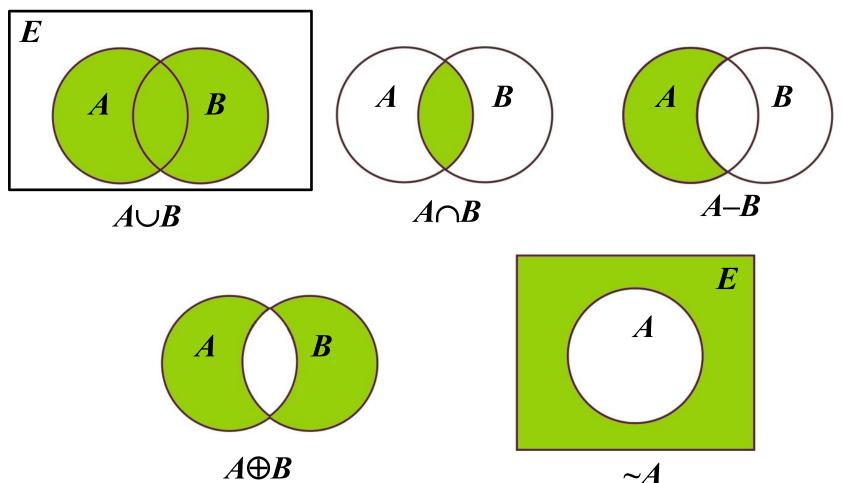
- (1) 和 S_5 不交的子集不含有3和5,因此 $X=S_2$.
- (2) S_4 的子集只能是 S_4 和 S_5 . 由于与 S_2 不交,不能含有偶数,因此 $X=S_5$.
- (3) S_1, S_2, S_3, S_4 和 S_5 都是 S_1 的子集,不包含在 S_3 的子集含有偶数,因此 $X=S_1, S_2$ 或 S_4 .
- (4) $X-S_3=\emptyset$ 意味着 $X \in S_3$ 的子集,因此 $X=S_3$ 或 S_5 .
- (5) 由于 S_3 是 S_1 的子集,因此这样的X不存在.

6.3 有穷集合元素的计数



文氏图

方框: 全集; 圆: 集合; 阴影区域: 集合运算的结果

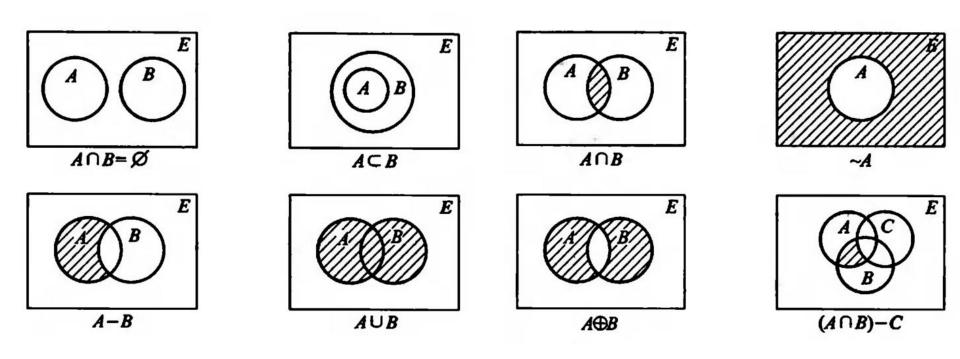


6.3 有穷集合元素的计数



文氏图

方框:全集;圆:集合;阴影区域:集合运算的结果



方法一: 文氏图

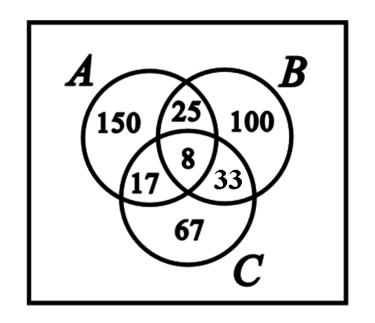


例2 求1到1000之间(包含1和1000在内)既不能被5和6整除,也不能被8整除的数有多少个?

解 定义以下集合:

$$S=\{x \mid x \in Z \land 1 \le x \le 1000\}$$

 $A=\{x \mid x \in S \land x$ 可被5整除}
 $B=\{x \mid x \in S \land x$ 可被6整除}
 $C=\{x \mid x \in S \land x$ 可被8整除}



画出文氏图,填入相应数字,得

$$N=1000-(200+100+33+67)=600$$

包含排斥原理



当存在一个默认的全集E时,通常令: $\overline{A} := E - A$

注意: $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{x | x \in E \land x \in \overline{A} \land x \in \overline{B}\}
= \{x | x \in E \land x \notin A \land x \notin B\}
= \{x | x \in E \land \neg (x \in A \lor x \in B)\}
= \{x | x \in E \land x \notin A \cup B\}
= \overline{A \cup B}$$

类似可证 $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

包含排斥原理



已知:
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
, $|\overline{A}| = |E| - |A|$

包含排斥原理: 用于计算多个集合的补集的交集的元素个数

两个集合的情形:

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = |E| - |A \cup B| = |E| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

三个集合的情形:

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B} \cap \overline{C}| = |E| - |A \cup B| - |C| + |(A \cup B) \cap C|$$

$$= |E| - |A| - |B| + |A \cap B| - |C| + |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$$

$$= |E| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

如何推广?

方法二:包含排斥原理



定理6.2 设集合S上定义了n条性质,其中具有第i条性质的元素构成子集 A_i ,那么集合中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum_{1 \le i \le n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

推论 S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_{1} \cup A_{2} \cup \dots \cup A_{n}| = \sum_{i=1}^{n} |A_{i}| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_{i} \cap A_{j}| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_{i} \cap A_{j} \cap A_{k}| - \dots + (-1)^{n-1} |A_{1} \cap A_{2} \cap \dots \cap A_{n}|$$

包含排斥原理



定理6.2 包含排斥原理

$$\begin{split} |\overline{A_{1}} \cap \overline{A_{2}} \cap ... \cap \overline{A_{n}}| \\ &= |E| - \sum_{i=1}^{n} |A_{i}| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_{i} \cap A_{j}| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_{i} \cap A_{j} \cap A_{k}| \\ &+ ... + (-1)^{n} |A_{1} \cap ... \cap A_{n}| \end{split}$$

设集合E上定义了n条性质,其中具有第i条性质的元素构成子集 A_i ,那么集合中不具有任何性质的元素数可通过上式计算

包含排斥原理



推论

$$|A_{1} \cup A_{2} \cup \dots \cup A_{n}| = \sum_{i=1}^{n} |A_{i}| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_{i} \cap A_{j}|$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_{i} \cap A_{j} \cap A_{k}| - \dots + ($$

$$-1)^{n-1} |A_{1} \cap A_{2} \cap \dots \cap A_{n}|$$

实例

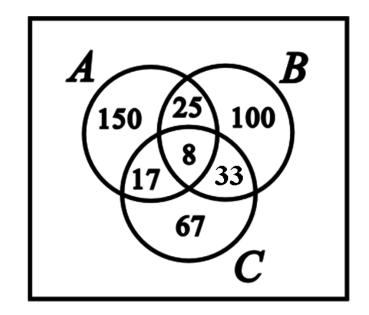


例2 求1到1000之间(包含1和1000在内)既不能被5和6整除,也不能被8整除的数有多少个?

解 定义以下集合:

$$S=\{x \mid x \in Z \land 1 \le x \le 1000\}$$

 $A=\{x \mid x \in S \land x \text{ 可被5整除}\}$
 $B=\{x \mid x \in S \land x \text{ 可被6整除}\}$
 $C=\{x \mid x \in S \land x \text{ 可被8整除}\}$



实例



```
方法二
    |S| = 1000
    |A| = 1000/5 = 200, |B| = 1000/6 = 166, |C| = 1000/8 = 125
    |A \cap B| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/33 \rfloor = 33
    |A \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25
    |B \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41
    |A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8
    |A \cap B \cap C|
  = 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600
```

欧拉函数



例3 求欧拉函数 $\phi(n)$ 的值.

 $\phi(n)$ 表示 $\{0,1,...,n-1\}$ 中与n互素的数的个数.规定 $\phi(1)=1$

例: $\phi(12) = 4$,因为与12互素的有1,5,7,11.

 $\lozenge n \in \mathbb{Z}_+$, 其素因子分解记为 $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$

由于 $p_1,...,p_k$ 为素因子:

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, |A_i \cap A_j \cap A_l| = \frac{n}{p_i p_j p_l}$$

欧拉函数 (续)



$$\begin{split} \phi(n) &= |\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_k}| \\ &= n - \left(\frac{n}{p_1} + ... + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + ... + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) \\ &+ ... + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 ... p_k} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) ... \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \end{split}$$

实例: $\phi(60) = 60 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16$ 与60互素的正整数有16个: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.

欧拉函数 (续)



$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_k}|$$

$$= n - (\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + ... + \frac{n}{p_k}) + (\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + ...$$

$$+ \frac{n}{p_{k-1} p_k}) - ... + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 ... p_k}$$

$$= n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k})$$

实例:
$$\phi(60) = 60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5}) = 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 16$$

与60互素的正整数有16个: 1,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,49,53,59.

错位排列计数



例4 错位排列:对全排列 $i_1i_2...i_n$

满足 $i_i \neq j$, j = 1, ..., n的全排列的个数

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

S为 $\{1, 2, ..., n\}$ 全排列的集合, $A_i = \{$ 第i位为i的全排列 $\}$,则 $|A_i| = (n-1)!$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

 $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$ 以此类推

$$egin{aligned} D_n &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| \ &= n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \ldots + (-1)^n C_n^n 0! \ &= n! \left(1 - rac{1}{1!} + rac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n rac{1}{n!}
ight) pprox rac{n!}{e} \end{aligned}$$

错位排列计数



例4 错位排列: 排列 $i_1 i_2 ... i_n$, 满足 $i_j \neq j, j = 1, 2, ..., n$.

错位排列数
$$D_n = n! [1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}]$$

S为 $\{1, 2, ..., n\}$ 排列的集合,性质 P_i 表示"i处在排列第i位" A_i 是S中具有性质 P_i 的排列的集合,i=1, 2, ..., n. |S|=n!,

$$|A_{i}| = (n-1)! \qquad i=1,2,...,n$$

$$|A_{i} \cap A_{j}| = (n-2)! \qquad 1 \le i < j \le n$$

$$|A_{1} \cap A_{2} \cap ... \cap A_{n}| = 0! = 1$$

$$D_{n} = |\overline{A_{1}} \cap \overline{A_{2}} \cap ... \cap \overline{A_{n}}|$$

$$= n! - C_{n}^{1}(n-1)! + C_{n}^{2}(n-2)! - ... + (-1)^{n}C_{n}^{n}0!$$

$$= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right] \approx \frac{n!}{e}$$

作业11



习题6: 6、8、15、22(3,5)

6.4 集合恒等式



课本P100-101, eqs 6.1-6.23

1. 只涉及一个运算的算律: 交换律、结合律、幂等律

	U	\cap	\oplus
交换	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \oplus B = B \oplus A$
结合	$(A \cup B) \cup C$ $=A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \oplus B) \oplus C$ $=A \oplus (B \oplus C)$
幂等	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	

来源于析取与合取的基本等值式

集合算律



2. 涉及两个不同运算的算律:

分配律、吸收律

	し与へ	○与⊕
分配	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cap (B \oplus C)$ $= (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
吸收	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	

集合算律



3. 涉及补运算的算律:

德摩根律,双重否定律

	_	~
德摩根律	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$	$\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C$
	$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$	$\sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C$
双重否定		~~A=A

集合算律



4. 涉及全集和空集的算律:

	Ø	$oldsymbol{E}$
矛盾律、排中律	$A \cap \sim A = \emptyset$	$A \cup \sim A = E$
零律	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup E = E$
同一律	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap E = A$
否定律	~Ø=E	~E=Ø

集合证明题



证明方法: 命题演算法、等式置换法

命题演算证明法的书写规范(以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证*X*⊆*Y*

任取x, $x \in X \Rightarrow ... \Rightarrow x \in Y$

(2) i E X = Y

方法一 分别证明 $X \subseteq Y$ 和 $Y \subseteq X$

方法二

任取x, $x \in X \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x \in Y$

注意: 在使用方法二的格式时,必须保证每步推理都是充分必要的

集合等式的证明



方法一: 命题演算法

例5 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ (吸收律)

证 任取x,

$$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \lor x \in A \cap B$$
$$\Leftrightarrow x \in A \lor (x \in A \land x \in B) \Leftrightarrow x \in A$$

因此得 $A \cup (A \cap B) = A$.

例6 证明 $A-B = A \cap \sim B$ 证 任取x,

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \land x \notin B$$
$$\Leftrightarrow x \in A \land x \in \sim B \Leftrightarrow x \in A \cap \sim B$$

因此得
$$A-B = A \cap \sim B$$

等式代入法



方法二: 等式置换法

例7 假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立,证明吸收律.

$$\begin{aligned}
& (A \cap B) \\
&= (A \cap E) \cup (A \cap B) \\
&= A \cap (E \cup B) \\
&= A \cap E \\
&= A
\end{aligned}$$
(同一律)
$$(R \oplus B) \\
&= A \cap E$$
(同一律)

涉及等值的证明



例8 证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

 \bigcirc

2

(3)

4

证明思路:

- 确定问题中含有的命题: 本题含有命题①,②,③,④
- 确定命题间的关系(哪些命题是已知条件、哪些命题是要证明的结论):本题中每个命题都可以作为已知条件,每个命题都是要证明的结论
- 确定证明顺序: ①⇒②, ②⇒③, ③⇒④, ④⇒①
- 按照顺序依次完成每个证明(证明集合相等或者包含)

涉及等值的证明



例8 证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

1

2

(3)

4

证 ①⇒②

显然 $B \subseteq A \cup B$,下面证明 $A \cup B \subseteq B$.

任取x,

 $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \lor x \in B \Rightarrow x \in B \lor x \in B \Leftrightarrow x \in B$ 因此有 $A \cup B \subseteq B$. 综合上述②得证.

 $2\Rightarrow3$

 $A \cap B = A \cap (A \cup B) = A$

证明



例8 证明 $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\emptyset$

 \bigcirc

2

(3)

4

 $3\Rightarrow4$

假设 $A-B\neq\emptyset$,即存在x,

- $x \in A B$
- $\Leftrightarrow x \in A \land x \notin B$
- $\Rightarrow x \in A \cap B \land x \notin B$
- $\Leftrightarrow 0$

 $4\Rightarrow1$

证明逆否命题:假设 $A\subseteq B$ 不成立,那么存在x

 $x \in A \land x \notin B \Rightarrow x \in A - B \Rightarrow A - B \neq \emptyset$

作业12



习题6: 31、35、45

练习3



3. 一个班50个学生,在第一次考试中有26人得5分,在第二次考试中有21人得5分.如果两次考试中都没有得5分的有17人,那么两次考试都得5分的有多少人?

求解

方法一: 文氏图填图法

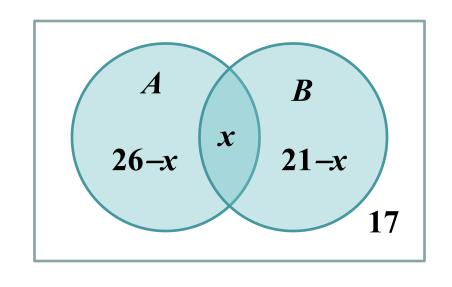
第一次得5分学生:集合A

第二次得5分学生:集合B

全班学生:全集E

$$(26-x)+x+(21-x)+17=50$$

 $x=14.$



文氏图

求解



方法二: 使用包含排斥原理.

A、B和全集E设定同上. 那么有

$$|E|=50, |A|=26, |B|=21$$

根据包含排斥原理有

$$|A \cap B| = |E| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$$

代入得:

$$|A \cap B| = |\overline{A} \cap \overline{B}| - |E| + |A| + |B|$$

= $17 - 50 + 26 + 21 = 14$

练习4



4. 判断以下命题的真假,并说明理由.

(1)
$$A-B=A \Leftrightarrow B=\emptyset$$
 假,反例: $A=\{1\}, B=\{2\}$

(3)
$$A \oplus A = A$$
 假,反例: $A = \{1\}$

(4) 如果
$$A \cap B = B$$
, 则 $A = E$. 假,反例: $A = \{1,2\}, B = \{2\}$

(5)
$$A = \{x\} \cup x$$
,则 $x \in A$ 且 $x \subseteq A$. 真

解题思路



- 先将等式化简或恒等变形.
- 查找集合运算的相关的算律,如果与算律相符,结果为真.
- 注意以下两个重要的充要条件

$$A-B=A \Leftrightarrow A \cap B=\emptyset$$

 $A-B=\emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B=B \Leftrightarrow A \cap B=A$
如果与条件相符,则命题为真.

- 如果不符合算律,也不符合上述条件,可以用文氏图表示 集合,看看命题是否成立.如果成立,再给出证明.
- 试着举出反例,证明命题为假.

解答



解

- (1) $B=\emptyset$ 是A-B=A的充分条件,但不是必要条件. 当B不空但是与A不交时也有A-B=A.
- (2) 这是DM律,命题为真.
- (3) 不符合算律,反例如下: *A*={1}, *A*⊕*A*=Ø, 但是*A*≠Ø.
- (4) 命题不为真. $A \cap B = B$ 的充分必要条件是 $B \subseteq A$,不是A = E.
- (5) 命题为真,因为x 既是A 的元素,也是A 的子集



5. 证明 $A \cup B = A \cup C \land A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$ 解题思路

● 分析命题: 含有3个命题:

●证明要求

前提:命题①和②

结论:命题③

证明方法:恒等式代入反证法

利用已知等式通过运算得到新的等式



5. 证明 $A \cup B = A \cup C \land A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

方法一: 恒等变形法

$$B = B \cap (B \cup A) = B \cap (A \cup B)$$

$$=B\cap (A\cup C)=(B\cap A)\cup (B\cap C)$$

$$= (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$= (A \cup C) \cap C = C$$

方法二: 反证法.

假设 $B \neq C$,则存在 x 使得 $x \in B$ 且 $x \notin C$,或 使得 $x \in C$ 且 $x \notin B$. 不妨设为前者.

 $\exists x$ 属于A,则x属于 $A \cap B$ 但x不属于 $A \cap C$,与已知矛盾; $\exists x$ 不属于A,则x属于 $A \cup B$ 但x不属于 $A \cup C$,也与已知矛盾.48

解答



方法三:利用已知等式通过运算得到新的等式.由已知等式可以得到

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup C) - (A \cap C)$$

即

$$A \oplus B = A \oplus C$$

从而有

$$A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$$

根据结合律得

$$(A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$$

由于 $A \oplus A = \emptyset$, 化简上式得B = C.

第六章 习题课



主要内容

- 集合的两种表示法
- 集合与元素之间的隶属关系、集合之间的包含关系的区别与联系
- 特殊集合: 空集、全集、幂集
- 文氏图及有穷集合的计数
- 集合的∪, ∩, -, ~, ⊕等运算以及广义∪, ∩运算
- 集合运算的算律及其应用

基本要求



- 熟练掌握集合的两种表示法
- 能够判别元素是否属于给定的集合
- 能够判别两个集合之间是否存在包含、相等、真包含等关系
- 熟练掌握集合的基本运算(普通运算和广义运算)
- 掌握有穷集合的计数方法和包含排斥原理
- 掌握证明集合等式或者包含关系的基本方法

方法分析



- (1) 判断元素*a*与集合*A*的隶属关系是否成立基本方法: 把 *a* 作为整体检查它在*A*中是否出现,注意这里的 *a* 可能是集合表达式.
- (2) 判断A⊆B的四种方法
- 若A,B是谓词法定义的,且A,B中元素性质分别为P和Q,那么"若P则Q"意味A⊆B,"P当且仅当Q"意味A=B.
- 通过集合运算判断 $A \subseteq B$,即 $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A B = \emptyset$ 三个等式中有一个为真.
- 通过文氏图判断集合的包含(注意这里是判断,而不是证明

分析



解题思路:

求解集合等式成立的充分必要条件可能用到集合的算律、不同集合之间的包含关系、以及文氏图等. 具体求解过程说明如下:

- (1) 化简给定的集合等式
- (2) 求解方法如下:
- 利用已知的算律或者充分必要条件进行判断
- 先求必要条件,然后验证充分性
- 利用文氏图的直观性找出相关的条件,再利用集合论的证明方法加以验证

练习6



6. 设A,B为集合,试确定下列各式成立的充分必要条件:

(1)
$$A - B = B$$

$$A = B = \emptyset$$

(2)
$$A - B = B - A$$

$$A = B$$

(3)
$$A \cap B = A \cup B$$

$$A = B$$

(4)
$$A \oplus B = A$$

$$B = \emptyset$$

解答



解

(1) $A-B=B \Leftrightarrow A=B=\emptyset$. 求解过程如下: 由A-B=B得

$$(A \cap \sim B) \cap B = B \cap B$$

化简得 $B=\emptyset$. 再将这个结果代入原来的等式得 $A=\emptyset$. 从而得到必要条件 $A=B=\emptyset$.

再验证充分性. 如果 $A=B=\emptyset$ 成立,则 $A-B=\emptyset=B$ 也成立.

(2) *A*−*B*=*B*−*A* ⇔ *A*=*B*. 求解过程如下:

充分性是显然的,下面验证必要性. 由A-B=B-A得

$$(A-B)\cup A=(B-A)\cup A$$

从而有 $A=A\cup B$,即 $B\subseteq A$. 同理可证 $A\subseteq B$.



(3) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$. 求解过程如下:

充分性是显然的,下面验证必要性. 由 $A \cap B = A \cup B$ 得

$$A \cup (A \cap B) = A \cup (A \cup B)$$

化简得 $A = A \cup B$,从而有 $A \subseteq B$. 类似可以证明 $B \subseteq A$.

(4) $A \oplus B = A \Leftrightarrow B = \emptyset$. 求解过程如下:

充分性是显然的,下面验证必要性. 由 $A \oplus B = A$ 得

$$A \oplus (A \oplus B) = A \oplus A$$

根据结合律有

$$(A \oplus A) \oplus B = A \oplus A$$

即 Ø \oplus B = Ø, 就是B = Ø.