



## 主要内容

- 一阶逻辑命题符号化  
个体词、谓词、量词  
一阶逻辑命题符号化
- 一阶逻辑公式及其解释  
一阶语言  
合式公式  
合式公式的解释  
永真式、矛盾式、可满足式



凡是偶数都能够被2整除。6是偶数，所以6能够被2整除。



三要素：个体词、谓词、量词

个体词——所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体

个体常项：具体的事物，用 $a, b, c$ 表示

个体变项：抽象的事物，用 $x, y, z$ 表示

个体域(论域)——个体变项的取值范围

有限个体域，如  $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$

无限个体域，如  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}, \dots$

全总个体域——由宇宙间一切事物组成



**谓词**——表示个体词性质或相互之间关系的词

(1) $\sqrt{2}$ 是有理数	$F$ : “.....是有理数”	$F(\sqrt{2})$
(2) $x$ 是无理数	$G$ : “.....是无理数”	$G(x)$
(3) 小王和小李同岁	$H$ : “.....与.....同岁”	$H(a, b)$
(4) $x$ 与 $y$ 具有关系 $L$	$L$ : “.....与.....具有关系 $L$ ”	$L(x, y)$



**谓词**——表示个体词性质或相互之间关系的词

**谓词常项** 如,  $F(a)$ :  $a$ 是人

**谓词变项** 如,  $F(x)$ :  $x$ 具有性质 $F$

$n$  ( $n \geq 1$ ) 元谓词: 定义在论域上的 $n$ 元函数

一元谓词( $n=1$ )——表示性质

多元谓词( $n \geq 2$ )——表示事物之间的关系

如,  $L(x,y)$ :  $x$ 与 $y$ 有关系 $L$ ,  $L(x,y)$ :  $x \geq y$ , ...

0元谓词——不含个体变项的谓词, 即命题常项

谓词+个体词可构成命题



**量词**——表示数量的词

**全称量词** $\forall$ : 表示所有的. “所有的”、“一切的”、“任取”

$\forall x$ : 对个体域中所有的 $x$

如,  $\forall x F(x)$ 表示个体域中所有的 $x$ 具有性质 $F$

$\forall x \forall y G(x, y)$ 表示个体域中所有的 $x$ 和 $y$ 有关系 $G$

**存在量词** $\exists$ : 表示存在, 有一个.

$\exists x$ : 个体域中有一个 $x$

如,  $\exists x F(x)$ 表示个体域中有一个 $x$ 具有性质 $F$

$\exists x \exists y G(x, y)$ 表示个体域中存在 $x$ 和 $y$ 有关系 $G$

$\forall x \exists y G(x, y)$ 表示对个体域中每一个 $x$ 都存在一个 $y$ 使得 $x$ 和 $y$ 有关系 $G$

$\exists x \forall y G(x, y)$ 表示个体域中存在一个 $x$ 使得对每一个 $y$ ,  
 $x$ 和 $y$ 有关系 $G$



### 例1 将命题符号化

- (1) 墨西哥位于北美洲
- (2)  $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数
- (3) 如果 $2>3$ , 则 $3<4$

解：在命题逻辑中：

- (1)  $p$ ,  $p$ 为墨西哥位于北美洲（真命题）
- (2)  $p \rightarrow q$ , 其中,  $p$ :  $\sqrt{2}$ 是无理数,  $q$ :  $\sqrt{3}$  是有理数. 是假命题
- (3)  $p \rightarrow q$ , 其中,  $p$ :  $2>3$ ,  $q$ :  $3<4$ . 是真命题



在一阶逻辑中：

(1)  $F(a)$ ，其中， $a$ ：墨西哥， $F(x)$ ： $x$ 位于北美洲。

(2)  $F(\sqrt{2}) \rightarrow G(\sqrt{3})$

其中， $F(x)$ ： $x$ 是无理数， $G(x)$ ： $x$ 是有理数

(3)  $F(2, 3) \rightarrow G(3, 4)$ ，其中， $F(x, y)$ ： $x > y$ ， $G(x, y)$ ： $x < y$





**例 2** 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美

(2) 有人用左手写字

论域不同，符号化的结果可能不同

个体域分别为

(a)  $D$  为人类集合

(b)  $D$  为全总个体域

解 (a) (1)  $\forall xG(x)$ ,  $G(x)$ :  $x$  爱美

(2)  $\exists xG(x)$ ,  $G(x)$ :  $x$  用左手写字

(b)  $F(x)$ :  $x$  为人,  $G(x)$ :  $x$  爱美

(1)  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(2)  $\exists x(F(x) \wedge G(x))$



**例3** 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解 注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域

(1) 令  $F(x)$ :  $x$  为正数,  $G(y)$ :  $y$  为负数,  $L(x,y)$ :  $x > y$

$$\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow L(x,y))$$

(2) 令  $F(x)$ :  $x$  是无理数,  $G(y)$ :  $y$  是有理数,  $L(x,y)$ :  $x > y$

$$\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x,y))$$



**例4** 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 没有不呼吸的人

(2) 不是所有的人都喜欢吃糖

解 (1)  $F(x)$ :  $x$ 是人,  $G(x)$ :  $x$ 呼吸

$$\neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

(2)  $F(x)$ :  $x$ 是人,  $G(x)$ :  $x$ 喜欢吃糖

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$



**例5** 设个体域为实数域, 将下面命题符号化

- (1) 对每一个数 $x$ 都存在一个数 $y$ 使得 $x < y$
- (2) 存在一个数 $x$ 使得对每一个数 $y$ 都有 $x < y$

解  $L(x, y): x < y$

(1)  $\forall x \exists y L(x, y)$

(2)  $\exists x \forall y L(x, y)$

注意:  $\forall$ 与 $\exists$ 不能随意交换

显然(1)是真命题, (2)是假命题



2. 在一阶逻辑中将下列命题符号化

(1) 大熊猫都可爱

设 $F(x)$ :  $x$ 为大熊猫,  $G(x)$ :  $x$ 可爱

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

(2) 有人爱发脾气

设 $F(x)$ :  $x$ 是人,  $G(x)$ :  $x$ 爱发脾气

$$\exists x(F(x) \wedge G(x))$$

(3) 说所有人都爱吃面包是不对的

设 $F(x)$ :  $x$ 是人,  $G(x)$ :  $x$ 爱吃面包

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \text{ 或 } \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$



(4) 没有不爱吃糖的人

设 $F(x)$ :  $x$ 是人,  $G(x)$ :  $x$ 爱吃糖

$\neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$  或  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(5) 任何两个不同的人都不一样高

设 $F(x)$ :  $x$ 是人,  $H(x,y)$ ,  $x$ 与 $y$ 相同,  $L(x,y)$ :  $x$ 与 $y$ 一样高

$\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(F(y) \wedge \neg H(x,y) \rightarrow \neg L(x,y)))$

或  $\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg H(x,y) \rightarrow \neg L(x,y))$

(6) 不是所有的汽车都比所有的火车快

设 $F(x)$ :  $x$ 是汽车,  $G(y)$ :  $y$ 是火车,  $H(x,y)$ :  $x$ 比 $y$ 快

$\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$

或  $\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$



习题4: 3、4、5



**定义4.1** 设 $L$ 是一个非逻辑符号集合, 由 $L$ 生成的一阶语言 $\mathcal{L}$ 的**字母表**包括下述符号:

非逻辑符号

(1) 个体常项符号:  $a, b, c, \dots, a_i, b_i, c_i, \dots, i \geq 1$

(2) 函数符号:  $f, g, h, \dots, f_i, g_i, h_i, \dots, i \geq 1$

(3) 谓词符号:  $F, G, H, \dots, F_i, G_i, H_i, \dots, i \geq 1$

逻辑符号

(4) 个体变项符号:  $x, y, z, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, i \geq 1$

(5) 量词符号:  $\forall, \exists$

(6) 联结词符号:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号:  $(, ), ,$





**定义4.2**  $\mathcal{L}$ 的项的定义如下:

- (1) 个体常项和个体变项是项.
- (2) 若 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是任意的 $n$ 元函数,  $t_1, t_2, \dots, t_n$ 是任意的 $n$ 个项, 则 $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是项.
- (3) 所有的项都是有限次使用(1),(2)得到的

如,  $a, x, x+y, f(x), g(x,y)$ 等都是项

项构成的函数仍然是项

**定义4.3** 设 $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 $\mathcal{L}$ 的任意 $n$ 元谓词,  $t_1, t_2, \dots, t_n$ 是 $\mathcal{L}$ 的任意 $n$ 个项, 则称 $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是 $\mathcal{L}$ 的原子公式.

如,  $F(x, y), F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$ 等均为原子公式

项构成的真值函数是原子公式



**定义4.4**  $\mathcal{L}$ 的合式公式（简称**公式**）定义如下：

- (1) 原子公式是合式公式.
- (2) 若 $A$ 是合式公式, 则  $(\neg A)$ 也是合式公式
- (3) 若 $A, B$ 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式
- (4) 若 $A$ 是合式公式, 则 $\forall x A, \exists x A$ 也是合式公式
- (5) 有限次地应用(1)—(4)形成的符号串是合式公式.

如,  $F(x), F(x) \vee \neg G(x, y), \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

$\exists x \forall y(F(x) \rightarrow G(y) \wedge L(x, y))$ 等都是合式公式

原子公式是公式, 量词+公式是公式, 联结词+公式是公式



**定义4.5** 在公式  $\forall xA$  和  $\exists xA$  中, 称 $x$ 为**指导变元**,  $A$ 为相应量词的**辖域**. 在 $\forall x$ 和  $\exists x$ 的辖域中,  $x$ 的所有出现都称为**约束出现**,  $A$ 中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现**的.

例如,  $\forall x(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$ ,  $x$ 为指导变元,  $(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$ 为 $\forall x$ 的辖域,  $x$ 的两次出现均为约束出现,  $y$ 与 $z$ 均为自由出现

又如,  $\exists x(F(x,y,z) \rightarrow \forall y(G(x,y) \wedge H(x,y,z)))$ ,  $\exists x$ 中的 $x$ 是指导变元, 辖域为 $(F(x,y,z) \rightarrow \forall y(G(x,y) \wedge H(x,y,z)))$ .  $\forall y$ 中的 $y$ 是指导变元, 辖域为 $(G(x,y) \wedge H(x,y,z))$ .  $x$ 的3次出现都是约束出现,  $y$ 的第一次出现是自由出现, 后2次是约束出现,  $z$ 的2次出现都是自由出现



**定义4.6** 若公式 $A$ 中不含自由出现的个体变项，则称 $A$ 为**封闭的公式**，简称**闭式**。

例如， $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$  为闭式，  
而  $\exists x (F(x) \wedge G(x, y))$  不是闭式



**定义4.7** 设 $\mathcal{L}$ 是 $L$ 生成的一阶语言,  $\mathcal{L}$ 的**解释** $I$ 由4部分组成:

- (a) 非空个体域  $D_I$ .
- (b) 对每一个个体常项符号  $a \in L$ , 有一个  $\bar{a} \in D_I$ , 称  $\bar{a}$  为  $a$  在  $I$  中的解释.
- (c) 对每一个  $n$  元函数符号  $f \in L$ , 有一个  $D_I$  上的  $n$  元函数  $\bar{f} : D_I^n \rightarrow D_I$ , 称  $\bar{f}$  为  $f$  在  $I$  中的解释.
- (d) 对每一个  $n$  元谓词符号  $F \in L$ , 有一个  $D_I$  上的  $n$  元谓词常项  $\bar{F}$ , 称  $\bar{F}$  为  $F$  在  $I$  中的解释.

设公式  $A$ , 取个体域  $D_I$ , 把  $A$  中的个体常项符号  $a$ 、函数符号  $f$ 、谓词符号  $F$  分别替换成它们在  $I$  中的解释  $\bar{a}$ 、 $\bar{f}$ 、 $\bar{F}$ , 称所得到的公式  $A'$  为  $A$  在  $I$  下的**解释**, 或  $A$  在  $I$  下**被解释成**  $A'$ .



**例6** 给定解释  $I$  如下:

(a) 个体域  $D=\mathbf{R}$

(b)  $\bar{a} = 0$

(c)  $\bar{f}(x, y) = x + y, \quad \bar{g}(x, y) = x \cdot y$

(d)  $\bar{F}(x, y) : x = y$

写出下列公式在  $I$  下的解释, 并指出它的真值.

(1)  $\exists x F(f(x, a), g(x, a))$

$\exists x(x+0=x \cdot 0)$       真

(2)  $\forall x \forall y (F(f(x, y), g(x, y)) \rightarrow F(x, y))$

$\forall x \forall y (x+y=x \cdot y \rightarrow x=y)$       假

(3)  $\forall x F(g(x, y), a)$

$\forall x(x \cdot y=0)$       真值不定, 不是命题



**定义4.7（续）** 设 $\mathcal{L}$ 是 $L$ 生成的一阶语言,  $\mathcal{L}$ 的解释 $I$ 下的赋值 $\sigma$ :  
对每一个自由出现的个体变项 $x$ 指定一个值 $\sigma(x) \in D_I$

$I$ 及其赋值 $\sigma$ 下的**解释**: 先将 $A$ 在 $I$ 下解释为 $A'$ , 然后在将 $A'$ 中所有自由出现的个体变项 $x$ 替换为 $\sigma(x)$ 。



给定解释 $I$ 及 $I$ 下的赋值 $\sigma$

- 个体域 $D = N$
- $\bar{a} = 0$
- $\bar{f}(x, y) = x + y, \bar{g}(x, y) = x \cdot y$
- $\bar{F}(x, y): x = y$
- $\sigma(x) = 1, \sigma(y) = 2, \sigma(z) = 3$

$F(f(x, y), g(x, y))$ 解释为 “ $(1 + 2) = (1 \cdot 2)$ ”

$F(f(x, a), y) \rightarrow F(g(x, y), z)$ 解释为 “ $((1 + 0) = 2) \rightarrow ((1 \cdot 2) = 3)$ ”

后文中将“解释”和“赋值”统称为“解释”





**定理4.1** 闭式在任何解释下都是命题

注意: 不是闭式的公式在解释下可能是命题, 也可能不是命题.

**定义4.8** 若公式 $A$ 在任何解释下均为真, 则称 $A$ 为永真式(逻辑有效式). 若 $A$ 在任何解释下均为假, 则称 $A$ 为矛盾式(永假式). 若至少有一个解释使 $A$ 为真, 则称 $A$ 为可满足式.

几点说明:

永真式为可满足式, 但反之不真

判断公式是否是可满足的(永真式, 矛盾式)是不可判定的



**定义4.9** 设 $A_0$ 是含命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的命题公式,  $A_1, \dots, A_n$ 是 $n$ 个谓词公式, 用 $A_i (1 \leq i \leq n)$  处处代替 $A_0$ 中的 $p_i$ , 所得公式 $A$ 称为 $A_0$ 的**代换实例**.

例如,  $F(x) \rightarrow G(x), \forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$ 等都是 $p \rightarrow q$ 的代换实例.

**定理4.2** 重言式的代换实例都是永真式, 矛盾式的代换实例都是矛盾式.

**判断公式类型的方法:**

1. 检查是否是某个重言式或矛盾式的代换实例
2. 根据定义, 检查是否有某个解释使公式成真或成假



**例7** 判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式？

(1)  $\forall x F(x) \rightarrow (\exists x \exists y G(x, y) \rightarrow \forall x F(x))$

重言式  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$  的代换实例，故为永真式.

(2)  $\neg(\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \wedge \exists y G(y)$

矛盾式  $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$  的代换实例，故为永假式.

(3)  $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

解释  $I_1$ : 个体域  $\mathbf{N}$ ,  $F(x): x > 5$ ,  $G(x): x > 4$ , 公式为真

解释  $I_2$ : 个体域  $\mathbf{N}$ ,  $F(x): x < 5$ ,  $G(x): x < 4$ , 公式为假

结论: 非永真式的可满足式



5. 证明下列公式为永真式:

$$(1) (\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \wedge \forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$$

$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$  的代换实例

$$(2) \forall x (F(x) \rightarrow (F(x) \vee G(x)))$$

设  $I$  是任意的一个解释, 对每一个  $x \in D_I$ ,

$F(x) \rightarrow (F(x) \vee G(x))$  恒为真

注: 可满足式的代换实例未必是可满足的

要验证谓词公式的可满足性不能只依赖于找代换实例



习题4: 11、12、14



## 主要内容

- 个体词、谓词、量词
- 一阶逻辑命题符号化
- 一阶语言 $\mathcal{L}$ 
  - 项、原子公式、合式公式
- 公式的解释
  - 量词的辖域、指导变元、个体变项的自由出现与约束出现、闭式、解释
- 公式的类型
  - 永真式(逻辑有效式)、矛盾式(永假式)、可满足式



- 准确地将给定命题符号化
- 理解一阶语言的概念
- 深刻理解一阶语言的解释
- 熟练地给出公式的解释
- 记住闭式的性质并能应用它
- 深刻理解永真式、矛盾式、可满足式的概念, 会判断简单公式的类型



1. 在分别取个体域为

(a)  $D_1 = \mathbf{N}$

(b)  $D_2 = \mathbf{R}$

(c)  $D_3$  为全总个体域

的条件下, 将下面命题符号化, 并讨论真值

(1) 对于任意的数  $x$ , 均有  $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

解 设  $G(x): x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

(a)  $\forall x G(x)$       假

(b)  $\forall x G(x)$       真

(c) 又设  $F(x): x$  是实数

$\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$       真





(2) 存在数 $x$ , 使得  $x+7=5$

解 设 $H(x)$ :  $x+7=5$

(a)  $\exists xH(x)$  假

(b)  $\exists xH(x)$  真

(c) 又设 $F(x)$ :  $x$ 为实数

$\exists x(F(x) \wedge H(x))$  真

本例说明：不同个体域内，命题符号化形式可能不同（也可能相同），真值可能不同（也可能相同）。



3. 给定解释  $I$  如下:

(a) 个体域  $D=\mathbf{N}$

(b)  $\bar{a}=2$

(c)  $\bar{f}(x, y) = x + y$ ,  $\bar{g}(x, y) = x \cdot y$

(d)  $\bar{F}(x, y): x = y$

说明下列公式在  $I$  下的涵义,并讨论真值

(1)  $\forall x F(g(x, a), x)$

$\forall x(2x=x)$           假

(2)  $\forall x \forall y (F(f(x, a), y) \rightarrow F(f(y, a), x))$

$\forall x \forall y (x+2=y \rightarrow y+2=x)$           假



$$(3) \forall x \forall y \exists z F(f(x, y), z)$$

$$\forall x \forall y \exists z (x + y = z) \quad \text{真}$$

$$(4) \exists x \forall y \forall z F(f(y, z), x)$$

$$\exists x \forall y \forall z (y + z = x) \quad \text{假}$$

(3),(4)说明 $\forall$ 与 $\exists$ 不能随意交换

$$(5) \exists x F(f(x, x), g(x, x))$$

$$\exists x (x + x = x \cdot x) \quad \text{真}$$



4. 证明下面公式既不是永真式，也不是矛盾式：

(1)  $\exists x(F(x) \wedge G(x))$

解释1:  $D_1 = \mathbb{N}$ ,  $F(x)$ :  $x$ 是偶数,  $G(x)$ :  $x$ 是素数, 真

解释2:  $D_2 = \mathbb{N}$ ,  $F(x)$ :  $x$ 是偶数,  $G(x)$ :  $x$ 是奇数, 假

(2)  $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$

解释1:  $D_1 = \mathbb{Z}$ ,  $F(x)$ :  $x$ 是正数,  $G(x)$ :  $x$ 是负数,  $H(x, y)$ :  $x > y$   
真

解释2:  $D_2 = \mathbb{Z}$ ,  $F(x)$ :  $x$ 是偶数,  $G(x)$ :  $x$ 是奇数,  $H(x, y)$ :  $x > y$   
假