第三章 命题逻辑的推理理论

主要内容

推理的形式结构

- 推理的正确与错误
- 推理的形式结构
- 判断推理正确的方法
- 推理定律

自然推理系统*P*

- 形式系统的定义与分类
- 自然推理系统*P*
- 在*P*中构造证明:直接证明法、附加前提证明法、归谬法

3.1 推理

（非正式的定义）
给定公式$A_1, \ldots, A_k$以及公式B，则“由公式$A_1, \cdots, A_k$到公式B的推理”是指判断公式$A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$是否为重言式的过程。

$A_1, \ldots, A_k$称为“前提”，B称为“结论”。

推理的形式结构：
表示方法1

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$

表示方法2

前提：$A_1, \ldots, A_k$
结论：B

正确的推理：$A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

3.1 推理的形式结构

定义3.1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式. 若对于每组赋值，$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假，或当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论$B$的推理是有效的或正确的, 并称$B$是有效结论.

定理3.1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推B的推理正确当且仅当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式

注意: 推理正确不能保证结论一定正确

推理实例

例1 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以, 明天是5号.

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以, 今天是1号.

解 设 p: 今天是1号，q: 明天是5号.

(1) 推理的形式结构: $(p\to q)\wedge p\to q$

$$
\begin{aligned}
& (p \to q) \wedge p \to q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \wedge p \to q \\
\Leftrightarrow\ & \neg\big((\neg p \vee q) \wedge p\big) \vee q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg p) \vee q \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \\
\Leftrightarrow\ & 1 \wedge 1 \\
\Leftrightarrow\ & 1
\end{aligned}
$$

由定理3.1可知推理正确

推理实例

(2) 推理的形式结构：$(p\to q)\wedge q\to p$

$$
\begin{aligned}
& (p\to q)\wedge q\to p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\vee q)\wedge q\to p \\
\Leftrightarrow\ & \neg\,((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p \\
\Leftrightarrow\ & \neg q\vee p
\end{aligned}
$$

显然不是重言式，所以推理不正确

练习1：判断推理是否正确

1. 判断下面推理是否正确:

(1) 前提：$\neg p \rightarrow q$，$\neg q$

结论：$\neg p$

解　推理的形式结构：$(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$

方法一：等值演算法

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee q$$

易知10是成假赋值，不是重言式，所以推理不正确.

练习1解答

方法二：主范式法，

$$(\neg p\rightarrow q)\wedge\neg q\rightarrow\neg p$$
$$\Leftrightarrow\neg((p\vee q)\wedge\neg q)\vee\neg p$$
$$\Leftrightarrow\neg p\vee q$$
$$\Leftrightarrow M_2$$

不是重言式, 推理不正确.

练习1解答

方法三　真值表法

p	q	$\neg p\to q$	$(\neg p\to q)\wedge\neg q$	$(\neg p\to q)\wedge\neg q\to\neg p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1

不是重言式, 推理不正确

方法四　直接观察出10是成假赋值

练习1解答

(2) 前提：$q \to r$，$p \to \neg r$

结论：$q \to \neg p$

解 推理的形式结构： $(q \to r) \wedge (p \to \neg r) \to (q \to \neg p)$

用等值演算法

$$(q \to r) \wedge (p \to \neg r) \to (q \to \neg p)$$
$$\Leftrightarrow (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \to (\neg q \vee \neg p)$$
$$\Leftrightarrow \neg\big((\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)\big) \vee (\neg q \vee \neg p)$$
$$\Leftrightarrow (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge r) \vee \neg q \vee \neg p$$
$$\Leftrightarrow \big((q \wedge \neg r) \vee \neg q\big) \vee \big((p \wedge r) \vee \neg p\big)$$
$$\Leftrightarrow (\neg r \vee \neg q) \vee (r \vee \neg p)$$
$$\Leftrightarrow 1$$

推理正确

推理定律——重言蕴涵式

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律
3. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理
4. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论
6. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$ 假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论
8. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难

   $(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)
9. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ 破坏性二难

此外，每个等值式可产生两个推理定律

如, 由$A \Leftrightarrow \neg\neg A$可产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 和 $\neg\neg A \Rightarrow A$

3.2 自然推理系统P

定义3.2　一个形式系统 I 由下面四个部分组成:

(1) 非空的字母表，记作 $A(I)$.

(2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集，记作 $E(I)$.

(3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集，记作 $A_X(I)$.

(4) 推理规则集，记作 $R(I)$.

记I=$<A(I),E(I),A_X(I),R(I)>$, 其中$<A(I),E(I),A_X(I),R(I)>$是 I 的形式语言系统, $<A(I),E(I),A_X(I),R(I)>$ 是 I 的形式演算系统.

自然推理系统: 无公理, 即$A_X(I)=\varnothing$

公理推理系统　推出的结论是系统中的重言式, 称作定理

形式系统中的证明

前提：$A_1, \ldots, A_k$
结论：B
证明：

C_1
C_2
$\vdots$
C_l

设前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$,结论B及公式序列$C_1, C_2, \ldots, C_l$. 如果每一个$C_i(1\le i\le l)$是某个A_j, 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_l=B$, 则称这个公式序列是由$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出B的证明

自然推理系统P

定义3.3 自然推理系统 P 定义如下:

1. 字母表

(1) 命题变项符号：$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$

(2) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(3) 括号与逗号：(,), ,

2. 合式公式（同定义1.6）

3. 推理规则

(1) 前提引入规则（任何时候都可以引入前提）

(2) 结论引入规则（任何中间结果都可以作为后续证明的前提）

(3) 置换规则（等值演算）

推理规则

(4) 假言推理规则

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ \underline{\quad A \quad} \\ \therefore B \end{array}$$

(5) 附加规则

$$\begin{array}{l} \underline{\quad A \quad} \\ \therefore A\vee B \end{array}$$

(6) 化简规则

$$\begin{array}{l} \underline{A\wedge B} \\ \therefore A \end{array}$$

(7) 拒取式规则

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ \underline{\quad \neg B \quad} \\ \therefore \neg A \end{array}$$

(8) 假言三段论规则

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ \underline{B\rightarrow C} \\ \therefore A\rightarrow C \end{array}$$

(9) 析取三段论规则

$$\begin{array}{l} A\vee B \\ \underline{\quad \neg B \quad} \\ \therefore A \end{array}$$

推理规则

(10) 构造性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ C\rightarrow D \\ A\vee C \\ \hline \therefore B\vee D \end{array}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ C\rightarrow D \\ \neg B\vee\neg D \\ \hline \therefore \neg A\vee\neg C \end{array}$$

(12) 合取引入规则

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A\wedge B \end{array}$$

构造证明的一般步骤

（1）符号化

（2）写出形式结构

（3）证明

在自然推理系统P中构造证明

例2 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我明天就有课. 若我明天有课，今天必备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期一、也不是星期三.

解 (1) 设命题并符号化

设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我明天有课，s：我今天备课

直接证明法

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\lor q)\to r$，$r\to s$，$\neg s$

结论：$\neg p\land\neg q$

(3) 证明

① $r\to s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p\lor q)\to r$	前提引入
⑤ $\neg(p\lor q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p\land\neg q$	⑤置换

练习2：构造证明

2. 在系统*P*中构造下面推理的证明：

如果今天是周六，我们就到颐和园或圆明园玩. 如果颐和园游人太多，就不去颐和园. 今天是周六，并且颐和园游人太多. 所以, 我们去圆明园或动物园玩.

解：

(1) 设 p：今天是周六，q：到颐和园玩，

r：到圆明园玩，s：颐和园游人太多

t：到动物园玩

练习2解答

(2) 前提：$p\to(q\vee r)$，$s\to\neg q$，p，s

结论：$r\vee t$

(3) 证明：

① $p\to(q\vee r)$ 前提引入

② p 前提引入

③ $q\vee r$ ①②假言推理

④ $s\to\neg q$ 前提引入

⑤ s 前提引入

⑥ $\neg q$ ④⑤假言推理

⑦ r ③⑥析取三段论

⑧ $r\vee t$ ⑦附加

证明可以有多种方法

附加前提证明法

附加前提证明法 适用于结论为蕴涵式

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \to B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (C \to B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \to B$$

附加前提证明法实例

例3 构造下面推理的证明

2是素数或合数. 若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

解 用附加前提证明法构造证明

(1) 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$是无理数，s：4是素数

(2) 推理的形式结构

前提：$p\vee q$，$p\rightarrow r$，$r\rightarrow\neg s$

结论：$s\rightarrow q$

附加前提证明法实例

(2) 推理的形式结构

前提：$p\vee q$，$p\to r$，$r\to\neg s$

结论：$s\to q$

(3) 证明

① s	附加前提引入
② $p\to r$	前提引入
③ $r\to\neg s$	前提引入
④ $p\to\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

归谬法（反证法）

归谬法 (反证法)

欲证

　前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

　结论：B

做法

　在前提中加入$\neg B$，推出矛盾.

理由

$$
\begin{aligned}
& A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0 \\
\Leftrightarrow\ & A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0
\end{aligned}
$$

归谬法实例

例4　前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明　用归缪法

① q	结论否定引入
② $r\rightarrow s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

第三章 习题课

主要内容

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
  - 真值表法
  - 等值演算法
  - 主析取范式法
- 推理定律
- 自然推理系统P
- 构造推理证明的方法
  - 直接证明法
  - 附加前提证明法
  - 归谬法(反证法)

基本要求

- 理解并记住推理形式结构的两种形式：

  1. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$
  2. 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

     结论：B

- 熟练掌握判断推理是否正确的不同方法（如真值表法、等值演算法、主析取范式法等）
- 牢记 P 系统中各条推理规则
- 熟练掌握构造证明的直接证明法、附加前提证明法和归谬法
- 会解决实际中的简单推理问题

作业6

习题3：14(1)、14(5)、15、16