第八章 函数

主要内容

函数的定义与性质

- 函数定义
- 函数性质

函数运算

- 函数的逆
- 函数的合成

双射函数与集合的基数

8.1 函数的定义与性质

主要内容

函数定义与相关概念

- 函数定义
- 函数相等
- 从A到B的函数$f:A\to B$
- B^A
- 函数的像与完全原像

函数的性质

- 单射、满射、双射函数的定义与实例
- 构造双射函数

某些重要的函数

函数定义

定义8.1 设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为函数

对于函数F, 如果有 xFy, 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为F 在 x 的值.

例 $F_1=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_3,y_2>\}$

$F_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>\}$

不允许有两个有序对使得其第一个元素相同而第二个元素不同

F_1是函数, F_2不是函数

定义8.2 设F, G 为函数, 则

$$F=G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$$

如果两个函数F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$ 都有$F(x)=G(x)$

函数$F(x)=(x^2-1)/(x+1)$, $G(x)=x-1$不相等, 因为 $\mathrm{dom}F \subset \mathrm{dom}G$.

从A到B的函数

定义8.3 设A, B为集合, 如果

f为函数, $\text{dom}f=A$, $\text{ran}f\subseteq B$,

则称f为**从A到B的函数**, 记作f: $A\to B$.

例 f: $N\to N$, $f(x)=2^x$ 是从N到N的函数,

g: $N\to N$, $g(x)=2$ 也是从N到N的函数.

定义8.4 所有从A到B的函数的集合记作B^A, 符号化表示为

$$B^A = \{ f \mid f: A\to B \}$$

对A中的每一个元素x，$f(x)$都有n种不同的取值可能。

$|A|=m$, $|B|=n$, 且m, $n>0$, $|B^A|=n^m$

$A=\varnothing$, 则$B^A=B^\varnothing=\{\varnothing\}$

$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$, 则$B^A=\varnothing^A= \varnothing$

实例

例1 设$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 求B^A.

对A中的每一个元素赋予一个B中的值

解 $B^A=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$

$f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$

$f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_4=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$

$f_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_6=\{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$

$f_7=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

函数的像和完全原像

定义8.5 设函数 f: $A \to B$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$

(1) A_1在 f 下的像 $f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1 \}$, 函数的像 $f(A)$

(2) B_1在 f 下的完全原像 $f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \land f(x) \in B_1\}$

注意:

- 函数值与像的区别: 函数值 $f(x) \in B$, 像$f(A_1) \subseteq B$
- 一般说来 $f^{-1}(f(A_1)) \neq A_1$, 但是$A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$

例 设f: $N \to N$, 且 $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{若}x\text{为偶数} \\ x+1 & \text{若}x\text{为奇数} \end{cases}$

令$A=\{0,1\}$, $B=\{2\}$, 那么有

$$f(A) = f(\{0,1\}) = \{ f(0), f(1)\} = \{0,2\}$$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{2\}) = \{1,4\}$$

函数的性质

定义8.6 设 f: $A \to B$,

(1) 若 $\mathrm{ran}f = B$, 则称 $f: A \to B$ 是满射的

(2) 若 $\forall y \in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 $f: A \to B$ 是单射的

(3) 若 $f: A \to B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f: A \to B$ 是双射的

例2 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = -x^2+2x-1$

(2) $f: \mathrm{Z}^+ \to \mathrm{R}, f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集

(3) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x)=2x+1$

(5) $f: \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+, f(x)=(x^2+1)/x$, 其中$\mathrm{R}^+$为正实数集.

例题解答

解

(1) f:R→R, $f(x)=-x^2+2x-1$
在x=1取得极大值0. 既不是单射也不是满射的

(2) f:Z$^+$→R, $f(x)=\ln x$
是单调上升的, 是单射的. 但不满射, ran$f$={ln1, ln2, …}.

(3) f:R→Z, $f(x)=\lfloor x \rfloor$
是满射的, 但不是单射的, 例如$f(1.5)=f(1.2)=1$

(4) f:R→R, $f(x)=2x+1$
是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且ran$f$=R

(5) f:R$^+$→R$^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$
有极小值 $f(1)=2$. 该函数既不是单射的也不是满射的

实例

例3 对于给定的集合A和B构造双射函数$f:A\to B$

(1) $A=[0,1]$, $B=[1/4,1/2]$

令$f:[0,1]\to[1/4,1/2]$, $f(x)=(x+1)/4$

(2) $A=\mathrm{Z}$, $B=\mathrm{N}$

将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

$$\begin{array}{lccccccc}
\mathrm{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\mathrm{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ \ldots
\end{array}$$

这种对应所表示的函数是：

$$f:\ \mathrm{Z}\to\mathrm{N},\ f(x)=\begin{cases} 2x & \geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

实例

(3) $A = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, B=[−1,1]

$f(x) = \sin x$

思考：$R \to [-1,1]$

某些重要函数

定义8.7

(1)设 $f:A\to B$, 如果存在$c\in B$使得对所有的 $x\in A$都有 $f(x)=c$, 则称 $f:A\to B$是常函数.

(2) 称 A上的恒等关系I_A为A上的恒等函数, 对所有的$x\in A$都有$I_A(x)=x$.

(3) 设$<A,\preccurlyeq>$, $<B,\preccurlyeq>$为偏序集，$f:A\to B$，如果对任意的 $x_1, x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的；如果对任意的$x_1, x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有$f(x_1)\prec f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的. 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数

练习3

3．对于以下集合A和B，构造从A到B的双射函数$f:A\to B$

(1) $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a, b, c\}$

(2) $A=(0,1)$，$B=(0,2)$

(3) $A=\{x|\ x\in Z \wedge x<0\}$，$B=N$

(4) $A=R$，$B=R^+$

解

(1) $f=\{<1,a>, <2,b>, <3,c>\}$

(2) $f:A\to B$, $f(x)=2x$

(3) $f:A\to B$, $f(x)= -x-1$

(4) $f:A\to B$, $f(x)=e^x$

满射、单射的证明方法

1. 证明 $f:A\to B$ 是满射的方法：任取 $y\in B$, 找到 x (即给出x的表示)或者证明存在$x\in A$，使得$f(x)=y$.

2. 证明 $f:A\to B$ 是单射的方法

方法一 $\forall x_1,x_2\in A$,

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$	$\ldots$	$\Rightarrow x_1=x_2$
推理前提	推理过程	推理结论

方法二 $\forall x_1,x_2\in A$,

$x_1\neq x_2\Rightarrow$	$\ldots$	$\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$
推理前提	推理过程	推理结论

3. 证明 $f:A\to B$不是满射的方法： 找到 $y\in B$, $y\notin \mathrm{ran}f$

4. 证明 $f:A\to B$不是单射的方法：找到 $x_1,x_2\in A$, $x_1\neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$

练习4

4. 设$f: \mathrm{R}\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}\times\mathrm{R}$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$
证明f是双射函数.

证 任取$<u,v>\in\mathrm{R}\times\mathrm{R}$，存在$<\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}>$使得

$f\left(<\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}>\right) = <u,v>$,因此$f$是满射的

对于任意的$<x,y>$, $<u,v>\in\mathrm{R}\times\mathrm{R}$, 有

$f(<x,y>) = f(<u,v>)$

$\Leftrightarrow <x+y, x-y> = <u+v, u-v>$

$\Leftrightarrow x+y = u+v \wedge x-y = u-v$

$\Leftrightarrow x = u \wedge y = v$

$\Leftrightarrow <x,y>=<u,v>$

因此f是单射的.

作业18

习题8：11、26

8.2 函数的复合与反函数

主要内容

- 复合函数基本定理
- 函数的复合运算与函数性质
- 反函数的存在条件
- 反函数的性质

复合函数基本定理

定理8.1 设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x|x\in\mathrm{dom}F\wedge F(x)\in\mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x\in\mathrm{dom}(F\circ G)$有$F\circ G(x)=G(F(x))$

证 先证明$F\circ G$是函数.

因为F, G是关系, 所以$F\circ G$也是关系.

任取$x\in\mathrm{dom}(F\circ G)$，若有$xF\circ Gy_1$和 $xF\circ Gy_2$, 则

$$<x, y_1>\in F\circ G\wedge<x, y_2>\in F\circ G$$

$$\Rightarrow\exists t_1(<x,t_1>\in F\wedge<t_1,y_1>\in G)\wedge\exists t_2(<x,t_2>\in F\wedge<t_2,y_2>\in G)$$

$$\Rightarrow\exists t_1\exists t_2(t_1=t_2\wedge<t_1,y_1>\in G\wedge<t_2,y_2>\in G) \qquad (F\text{为函数})$$

$$\Rightarrow y_1=y_2 \qquad (G\text{为函数})$$

所以 $F\circ G$ 为函数

证明

以下证$\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x|x\in\mathrm{dom}F\wedge F(x)\in\mathrm{dom}G\}$

即$x\in\mathrm{dom}(F\circ G) \Leftrightarrow x\in\mathrm{dom}F\wedge F(x)\in\mathrm{dom}G$

任取x，$x\in\mathrm{dom}(F\circ G)$

$\Rightarrow \exists y(<x,y>\in F\circ G)$

$\Rightarrow \exists y\ \exists t\ (<x,t>\in F \wedge <t,y>\in G)$

$\Rightarrow \exists t\ (x\in\mathrm{dom}F \wedge t=F(x)\wedge t\in\mathrm{dom}G)$

$\Rightarrow x\in\mathrm{dom}F\wedge F(x)\in\mathrm{dom}G$

任取x，$x\in\mathrm{dom}F\wedge F(x)\in\mathrm{dom}G$

$\Rightarrow <x,F(x)>\in F\wedge <F(x),G(F(x))>\in G$

$\Rightarrow <x,G(F(x))>\in F\circ G$ (*)

$\Rightarrow x\in\mathrm{dom}(F\circ G)$

所以(1) 得证

另由(*)，可知$F\circ G(x)=G(F(x))$，所以(2) 得证

推论

推论1 设F, G, H为函数, 则$(F\circ G)\circ H$和$F\circ(G\circ H)$都是函数, 且

$$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$$

证 由上述定理和运算满足结合律得证.

推论2 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$, 则 $f\circ g:A\to C$, 且$\forall x\in A$都有

$$f\circ g(x)=g(f(x))$$

证 由上述定理知 $f\circ g$是函数, 且

$$\mathrm{dom}(f\circ g)=\{x|x\in \mathrm{dom}f\wedge f(x)\in \mathrm{dom}g\}$$
$$=\{x|x\in A\wedge f(x)\in B\}=A$$

$$\mathrm{ran}(f\circ g)\subseteq \mathrm{ran}g\subseteq C$$ How to prove?

因此 $f\circ g:A\to C$, 且$\forall x\in A$有 $f\circ g(x)=g(f(x))$

函数复合与函数性质

定理8.2 设$f:A\to B$, $g:B\to C$

(1) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是满射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是满射的

(2) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是单射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是单射的

(3) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是双射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是双射的

证

(1) 任取$c\in C$, 由$g:B\to C$的满射性, $\exists b\in B$使得 $g(b)=c$.

对于这个b, 由 $f:A\to B$的满射性，$\exists a\in A$使得 $f(a)=b$.

由合成定理有

$$f\circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

从而证明了$f\circ g:A\to C$是满射的

证明

(2) 假设存在$x_1, x_2 \in A$使得

$$f \circ g(x_1)=f \circ g(x_2)$$

由合成定理有

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

因为$g:B \to C$是单射的, 故 $f(x_1)=f(x_2)$. 又由于$f:A \to B$是单射的, 所以$x_1=x_2$. 从而证明$f \circ g:A \to C$是单射的.

(3)由(1)和(2)得证.

注意：定理逆命题不为真, 即如果$f \circ g:A \to C$是单射(或满射、双射)的, 不一定有 $f:A \to B$ 和 $g:B \to C$都是单射(或满射、双射)的.

定理8.3 设 $f:A \to B$, 则 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$ （证明略）

实例

考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, $C=\{c_1,c_2,c_3\}$. 令

$$f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_3>\}$$

$$g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_3>,<b_4,c_3>\}$$

$$f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_3>\}$$

那么 $f{:}A\to B$和$f\circ g{:}A\to C$是单射的, 但$g{:}B\to C$不是单射的.

考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$, $C=\{c_1,c_2\}$. 令

$$f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_2>\}$$

$$g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_2>\}$$

$$f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_2>\}$$

那么$g{:}B\to C$ 和 $f\circ g{:}A\to C$是满射的, 但 $f{:}A\to B$不是满射的.

反函数

反函数存在的条件

(1) 任给函数F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 只是一个二元关系.

(2) 任给单射函数 $f:A\to B$, 则f^{-1}是函数, 且是从ran$f$ 到A的双射函数, 但不一定是从B到A的双射函数

(3) 对于双射函数 $f:A\to B$, f^{-1}是从B到A的双射函数.

定理8.4 设 $f:A\to B$是双射的, 则$f^{-1}:B\to A$也是双射的.

证明思路:

先证明 $f^{-1}:B\to A$，即f^{-1}是函数，且dom$f^{-1}=B$, ran$f^{-1}=A$.

再证明$f^{-1}:B\to A$的双射性质.

对于双射函数$f:A\to B$, 称 $f^{-1}:B\to A$是它的反函数.

证明

证 a.因为 f 是函数, 所以 f^{-1}是关系, 且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B\ ,\quad \mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A$$

b.对于任意的 $x \in B = \mathrm{dom}\, f^{-1}$, 假设有$y_1, y_2 \in A$使得

$$<x,y_1> \in f^{-1} \wedge <x,y_2> \in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$<y_1,x> \in f \wedge <y_2,x> \in f$$

根据 f 的单射性可得$y_1=y_2$, 从而证明了f^{-1}是从B到A的函数。

c.若存在$x_1, x_2 \in B$使得$f^{-1}(x_1)=f^{-1}(x_2)=y$, 从而有

$$<x_1,y> \in f^{-1} \wedge <x_2,y> \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow <y,x_1> \in f \wedge <y,x_2> \in f \Rightarrow x_1=x_2$$ ，即f^{-1}为单射。

由$\mathrm{ran}\, f^{-1} = A$知$f^{-1}$是满射的. 因此$f^{-1}$为从$B$到$A$的双射函数

反函数的性质

定理8.5

(1) 设 $f:A\to B$是双射的, 则 $f^{-1}\circ f=I_B$, $f\circ f^{-1}=I_A$

(2) 对于双射函数 $f:A\to A$, 有 $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_A$

证明：（1）由于$f:A\to B$是双射，因此$f^{-1}:B\to A$是双射，

由合成基本定理知$f^{-1}\circ f$是B上的双射

任取$x,y\in B$,

$<x,y>\in f^{-1}\circ f$

$\Rightarrow \exists t\left(<x,t>\in f^{-1}\wedge<t,y>\in f\right)$

$\Rightarrow \exists t\left(<t,x>\in f\wedge<t,y>\in f\right)$

$\Rightarrow x=y\Rightarrow<x,y>\in I_B$

$<x,y>\in I_B$

$\Rightarrow x=y$

$\Rightarrow \exists t(t\in A\wedge f(t)=x=y)$

$\Rightarrow \exists t\left(t\in A\wedge t=f^{-1}(x)\wedge f(t)=y\right)$

$\Rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=y\Rightarrow<x,y>\in f^{-1}\circ f$

因此有$f^{-1}\circ f=I_B$，类似可证$f\circ f^{-1}=I_A$

反函数的性质

例5 设 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\quad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 3\\ -2 & x<3\end{cases}$$

$$g(x)=x+2$$

求 $f\circ g, g\circ f$. 如果f和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

$$f\circ g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$$

$$f\circ g(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\geq 3\\ 0 & x<3\end{cases}$$

$$g\circ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$$

$$g\circ f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & x\geq 1\\ -2 & x<1\end{cases}$$

f:R→R不是双射的, 不存在反函数.
g:R→R是双射的, 它的反函数是
g^{-1}:R→R, $g^{-1}(x)=x-2$

作业19

习题8：19

8.3 双射函数与集合的基数

主要内容

- 集合的等势及其性质
- 重要的等势或不等势的结果
- 集合的优势及其性质
- 集合的基数
- 可数集

集合的等势

定义8.8 设A, B是集合, 如果存在着从A到B的双射函数, 就称A和B是**等势**的, 记作$A \approx B$. 如果A不与B 等势, 则记作$A \not\approx B$.

集合等势的实例

例6 (1) Z≈N.

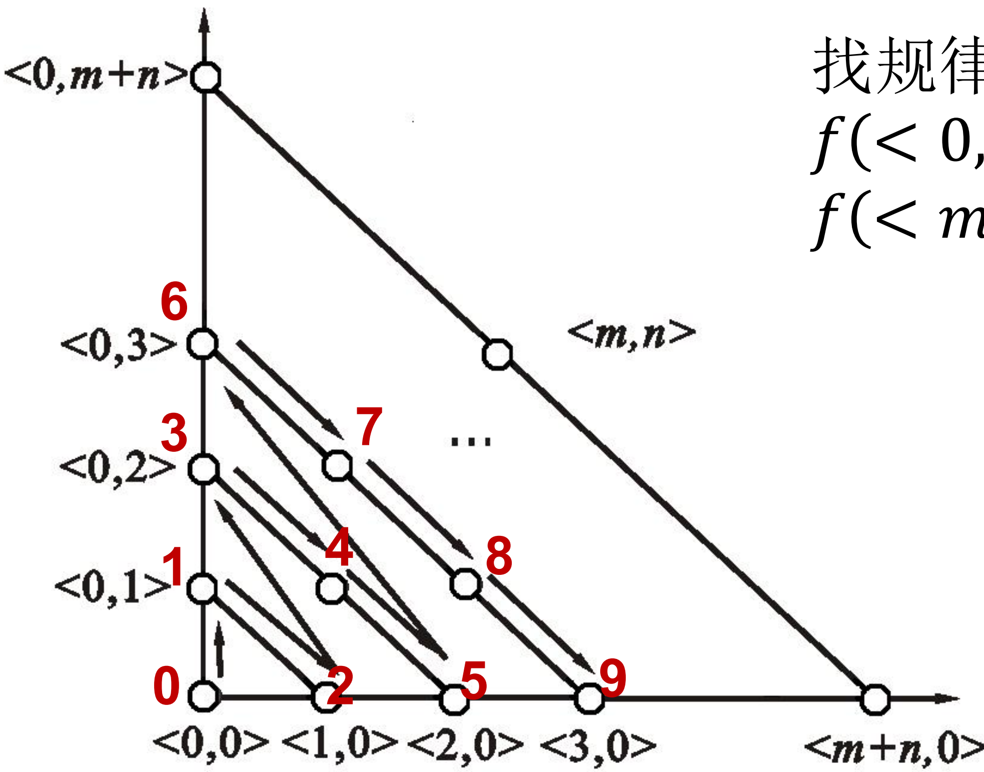
$$f: \mathrm{Z} \to \mathrm{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

则 f 是Z到N的双射函数. 从而证明了Z≈N.

$$\begin{array}{cccccccc} \mathrm{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathrm{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots \end{array}$$

集合等势的实例: N×N≈N

N×N≈N.　N×N中所有的元素排成有序图形



找规律:

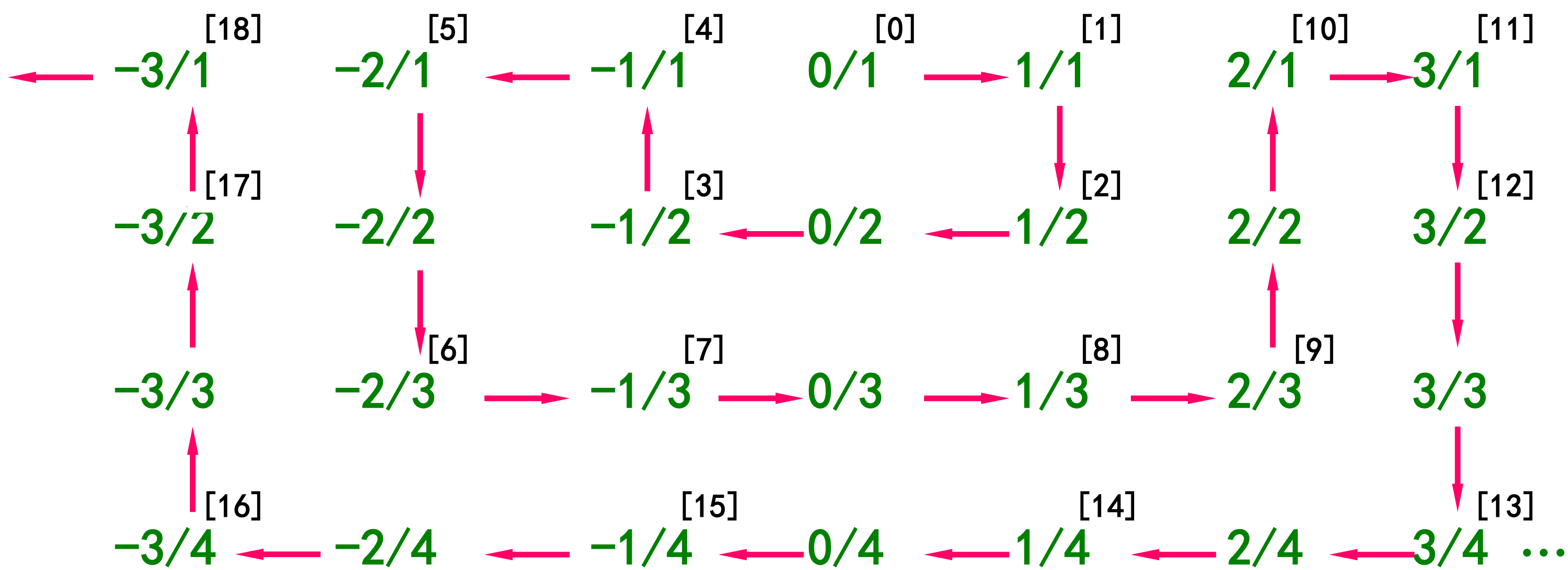
$$f(<0,n>) = 1 + 2 + \ldots + n$$

$$f(<m,n>) = m + f(<0, m+n>)$$

$$f: \mathrm{N} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}, \quad f(<m,n>) = \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + m$$

集合等势的实例: N≈Q

N≈Q. 双射函数 f:N→Q, 其中$f(n)$是[n]下方的有理数.



PLAY

实数集合的等势

(4) $(0,1)\approx R$. 其中实数区间 $(0,1)=\{x|\ x\in R\wedge 0<x<1\}$. 令

$$f:(0,1)\to R,\quad f(x)=\tan\pi\frac{2x-1}{2}$$

（5） 对任何$a, b\in R$, $a<b$, $[0,1]\approx[a,b]$，双射函数 $f:[0,1]\to[a,b]$,

$$f(x)=(b-a)x+a$$

类似地可以证明, 对任何$a, b\in R$, $a<b$, 有$(0,1)\approx(a,b)$.

等势的性质

定理8.6 设A, B, C是任意集合，

(1) $A \approx A$

(2) 若$A \approx B$，则$B \approx A$

(3) 若$A \approx B$，$B \approx C$，则$A \approx C$.

证明思路：利用等势的等义.

(1) I_A是从A到A的双射

(2) 若 $f:A \to B$是双射，则$f^{-1}:B \to A$是从B到A的双射.

(3) 若 $f:A \to B$，$g:B \to C$是双射，则$f \circ g:A \to C$是从A到C的双射

有关势的重要结果

等势结果

- $N \approx Z \approx Q \approx N \times N$
- 任何实数区间都与实数集合R等势

不等势的结果:

定理8.7 (康托定理)

(1) $N \not\approx R$; (2) 对任意集合A都有$A \not\approx P(A)$

证明不要求掌握

自然数的集合定义

定义8.10 设a为集合, 称$a\cup\{a\}$为a的**后继**, 记作a^+, 即 $a^+=a\cup\{a\}$.

如下定义自然数:

$0=\varnothing$

$1=0^+=\varnothing^+ = \{\varnothing\}=\{0\}$

$2=1^+= \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=\{0,1\}$

$3=2^+=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}^+= \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}= \{0,1,2\}$

…

$n=\{0, 1, \ldots, n-1\}$

…

自然数的相等与大小，即对任何自然数 n和m，有

$$m=n \Leftrightarrow m\approx n\ ,\qquad m<n \Leftrightarrow m\in n$$

有穷集和无穷集

定义8.11

(1) 一个集合是有穷的当且仅当它与某个自然数等势；

(2) 如果一个集合不是有穷的, 就称作无穷集.

实例：

(1) $\{a,b,c\}$是有穷集, 因为$3=\{0,1,2\}$, 且

$$\{a,b,c\}\approx\{0,1,2\}=3$$

(2) N和R都是无穷集, 因为没有自然数与N和R等势

利用自然数的性质可以证明：任何有穷集只与惟一的自然数等势.

集合基数的定义

定义8.12

(1) 对于有穷集合A, 称与A等势的那个惟一的自然数为A的基数, 记作card$A$ (也可以记作$|A|$)

$$\mathrm{card}A = n \Leftrightarrow A \approx n$$

(2) 自然数集合N的基数记作$\aleph_0$, 即

$$\mathrm{card}\mathbf{N} = \aleph_0$$ 阿列夫零

(3) 实数集R的基数记作$\aleph$, 即

$$\mathrm{card}\mathbf{R} = \aleph$$ 阿列夫

集合的优势关系

定义8.9 设A, B是集合, 如果存在着从A到B的单射函数, 就称B**优势于**A的, 记作$A \leqslant \cdot B$.

基数的相等和大小

定义8.13 设A, B为集合, 则

(1) $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\approx B$

(2) $\mathrm{card}A\le\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\preccurlyeq\cdot B$

(3) $\mathrm{card}A<\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\preccurlyeq\cdot B \land A\not\approx B$ (B真优势于A)

常见结论:

$\mathrm{card}\ \mathrm{Z} = \mathrm{card}\ \mathrm{Q} = \mathrm{card}\ \mathrm{N}\times\mathrm{N} = \aleph_0$

$\mathrm{card}\ P(\mathrm{N}) = \mathrm{card}\ 2^{\mathrm{N}} = \mathrm{card}\ [a,b] = \mathrm{card}\ (c,d) = \aleph$

$\aleph_0<\aleph$

$\mathrm{card}\ A<\mathrm{card}\ P(A)$

其中$2^{\mathrm{N}} = \{0,1\}^{\mathrm{N}}$

基数的大小

不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

其中:

$0, 1, 2\ldots, n, \ldots$ 是全体自然数, 是有穷基数.

$\aleph_0, \aleph, \ldots$ 是无穷基数, $\aleph_0$是最小的无穷基数, $\aleph$后面还有更大的基数, 如card$P$(R)等.

可数集

定义8.14 设A为集合, 若card$A\le\aleph_0$, 则称A为**可数集**或**可列集**.

实例:

$\{a,b,c\}$, 5, 整数集Z, 有理数集Q, N×N等都是可数集,
实数集 R不是可数集, 与R等势的集合也不是可数集.
对于任何的可数集, 它的元素都可以排列成一个有序图形. 换句话说, 都可以找到一个"数遍"集合中全体元素的顺序.

可数集的性质:

- 可数集的任何子集都是可数集.
- 两个可数集的并是可数集.
- 两个可数集的笛卡儿积是可数集.
- 可数个可数集的笛卡儿积仍是可数集.
- 无穷集A的幂集$P(A)$不是可数集

实例

例9 求下列集合的基数

(1) $T=\{x \mid x$是单词“$BASEBALL$”中的字母$\}$

(2) $B=\{x \mid x\in R\wedge x^2=9\wedge 2x=8\}$

(3) $C=P(A)$, $A=\{1, 3, 7, 11\}$

解 (1) 由$T=\{B, A, S, E, L\}$知 card$T$=5

(2) 由$B=\varnothing$, 可知 card$B$=0.

(3) 由$|A|=4$ 可知 card$C$=card$P(A)=|P(A)|=2^4=16$.

实例

例10 设A, B为集合, 且 card$A=\aleph_0$, card$B=n$, n是自然数, $n\neq 0$. 求card $A\times B$.

因为 card $A=\aleph_0$, card $B=n$, 所以A, B都是可数集.

根据性质(3) 可知 $A\times B$也是可数集, 所以

$$\text{card } A\times B\leq\aleph_0$$

显然当 $B\neq\varnothing$时,

$$\text{card } A\leq \text{card } A\times B,$$

这就推出

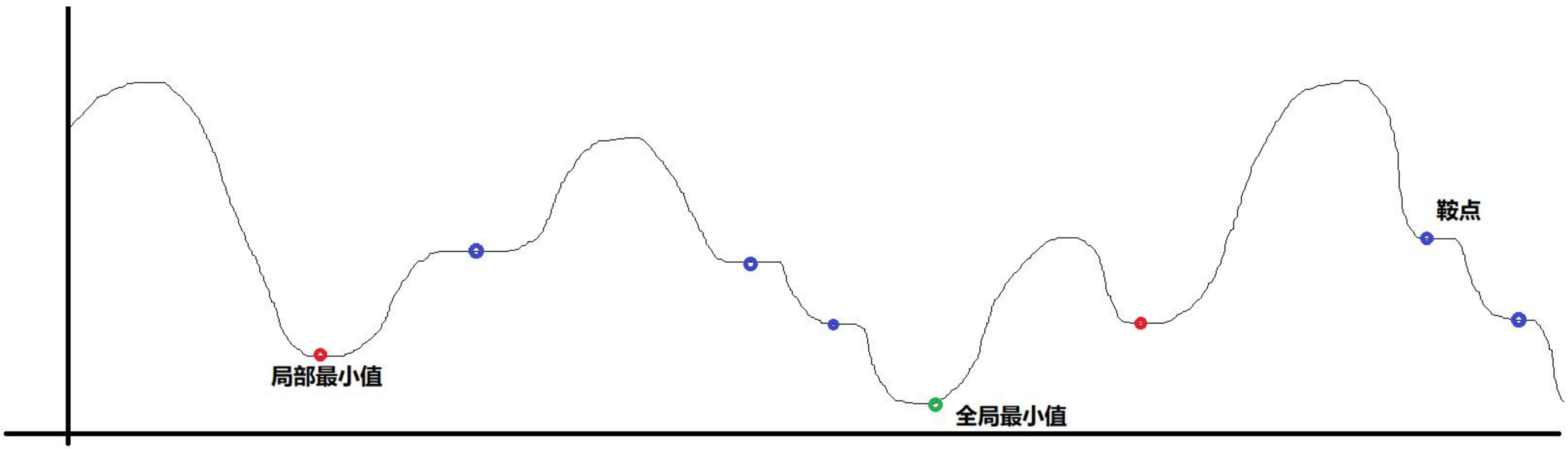
$$\aleph_0\leq \text{card } A\times B$$

综合上述得到

$$\text{card } A\times B=\aleph_0.$$

实例

深度学习的训练曲线



$$\{\text{局部最小值点}\} \approx \{\text{全局最小值点}\} \prec\cdot \{\text{鞍点}\}$$

第八章 习题课

主要内容

- 函数，从A到B的函数 $f:A\to B$，B^A，函数的像与完全原像
- 函数的性质：单射、满射、双射函数
- 重要函数：恒等函数、常函数、单调函数、集合的特征函数、自然映射
- 集合等势的定义与性质
- 集合优势的定义与性质
- 重要的集合等势以及优势的结果
- 可数集与不可数集
- 集合基数的定义

基本要求

- 给定 f, A, B, 判别 f 是否为从 A 到 B 的函数
- 判别函数 $f:A \to B$ 的性质（单射、满射、双射）
- 熟练计算函数的值、像、复合以及反函数
- 证明函数 $f:A \to B$ 的性质（单射、满射、双射）
- 给定集合 A, B，构造双射函数 $f:A \to B$
- 能够证明两个集合等势
- 能够证明一个集合优势于另一个集合
- 知道什么是可数集与不可数集
- 会求一个简单集合的基数

练习1

1． 给定A, B 和 f, 判断是否构成函数 $f:A\to B$. 如果是, 说明该函数是否为单射、满射、双射的. 并根据要求进行计算.

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9,10\}$,
$f=\{<1,8>,<3,9>,<4,10>,<2,6>,<5,9>\}$.

(2) A,B同(1), $f=\{<1,7>,<2,6>,<4,5>,<1,9>,<5,10>\}$.

(3) A,B同(1), $f=\{<1,8>,<3,10>,< 2,6>,<4,9>\}$.

(4) $A=B=\mathrm{R}$, $f(x)=x^3$

(5) $A=B=\mathrm{R}^+$, $f(x)=x/(x^2+1)$.

(6) $A=B=\mathrm{R}\times\mathrm{R}$, $f(<x,y>)=<x+y, x-y>$, 令
$L=\{<x,y>|x,y\in\mathrm{R}\wedge y=x+1\}$, 计算 $f(L)$.

(7) $A=\mathrm{N}\times\mathrm{N}$, $B=\mathrm{N}$, $f(<x,y>)=|x^2-y^2|$. 计算$f(\mathrm{N}\times\{0\})$, $f^{-1}(\{0\})$

解答

(1) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$既不是单射也不是满射, 因为 $f(3)=f(5)=9$, 且$7\notin \text{ran}f$.

(2) 不构成 $f:A\to B$, 因为 f 不是函数. $<1,7>\in f$ 且$<1,9>\in f$, 与函数定义矛盾

(3) 不构成 $f:A\to B$, 因为$\text{dom}\, f = \{1,2,3,4\} \neq A$

(4) 能构成 $f:A\to B$, 且 $f:A\to B$是双射的

(5) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$既不是单射的也不是满射的. 因为该函数在 $x=1$取极大值 $f(1)=1/2$. 函数不是单调的,且$\text{ran}f\neq R^+$.

(6) 能构成 $f:A\to B$, 且 $f:A\to B$是双射的.

$$f(L) = \{<2x+1,-1>|x\in \mathrm{R}\}=\mathrm{R}\times\{-1\}$$

(7) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$既不是单射的也不是满射的. 因为

$$f(<1,1>)=f(<2,2>)=0,\ 2\notin \text{ran}f.$$

$$f(\mathrm{N}\times\{0\}) = \{n^2-0^2|n\in \mathrm{N}\} = \{n^2|n\in \mathrm{N}\}$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{<n,n>|n\in \mathrm{N}$$

练习5

5. 设A, B为二集合, 证明：如果$A\approx B$, 则$P(A)\approx P(B)$

证　因为$A\approx B$，存在双射函数$f:A\to B$，反函数f^{-1}：$B\to A$

构造函数 $g:P(A)\to P(B)$,

$$g(T)=f(T),\ \forall T\subseteq A \quad （f(T)\text{是}T\text{在函数}f\text{的像}）$$

首先，对于任何$S\subseteq B$, 存在$f^{-1}(S)\subseteq A$, 且

$$g\left(f^{-1}(S)\right)=g(\{f^{-1}(x)|x\in S\})=f(\{f^{-1}(x)|x\in S\})$$

$$=\left\{f\left(f^{-1}(x)\right)|x\in S\right\}=\{x|x\in S\}=S\Rightarrow g\text{满射}$$

以下证明g的单射性.

$$g(T_1)=g(T_2)\Rightarrow f(T_1)=f(T_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(T_1))=f^{-1}(f(T_2))$$

$$\Rightarrow I_A(T_1)=I_A(T_2)\Rightarrow T_1=T_2$$

综合上述得到$P(A)\approx P(B)$.

练习5

5. 设A, B为二集合, 证明：如果$A \approx B$, 则$P(A) \approx P(B)$

证　因为$A \approx B$，存在双射函数$f: A \to B$，反函数f^{-1}：$B \to A$

构造关系$g = \{< T, f(T) > | T \subseteq A\}$

可知$\mathrm{dom}g = P(A)$

$$\mathrm{ran}f = \{f(T) | T \subseteq A\} = \{\{f(t) | t \in T\} | T \subseteq A\} \subseteq P(B)$$

首先证明$g: P(A) \to P(B)$

显然，若$< T, S_1 > \in g$且$< T, S_2 > \in g$，

则$S_1 = f(T) = S_2$，即证明了g是从$P(A)$到$P(B)$的函数

练习5

其次证明g满射：对于任何$S \in P(B)$, 由于$\mathrm{ran} f^{-1} = A$，

有$f^{-1}(S) = \{f^{-1}(s) | s \in S\} \subseteq A$，即$f^{-1}(S) \in P(A) = \mathrm{dom} g$，

此时

$$g\left(f^{-1}(S)\right) = g(\{f^{-1}(x) | x \in S\}) = f(\{f^{-1}(x) | x \in S\})$$
$$= \left\{f\left(f^{-1}(x)\right) | x \in S\right\} = \{x | x \in S\} = S$$

因此g满射.

以下证明g的单射性.

$g(T_1) = g(T_2) \Rightarrow f(T_1) = f(T_2)$

$\Rightarrow f^{-1}(f(T_1)) = f^{-1}(f(T_2))$

$\Rightarrow \{f^{-1}(f(t_1)) | t_1 \in T_1\} = \{f^{-1}(f(t_2)) | t_2 \in T_2\}$

$\Rightarrow \{t_1 | t_1 \in T_1\} = \{t_2 | t_2 \in T_2\} \Rightarrow T_1 = T_2$

因此g是双射， 所以$P(A) \approx P(B)$.

证明集合A与B等势的方法

方法一：直接构造从A到B的双射, 即定义一个从A到B的函数 $f:A\to B$，证明 f 的满射性，证明 f 的单射性

方法二：利用定理8.8，构造两个单射 $f:A\to B$ 和 $g:B\to A$. 即定义函数 f 和 g，证明 f 和 g 的单射性

方法三：利用等势的传递性

方法四：直接计算A与B的基数，得到card A=card B.

注意：

- 以上方法中最重要的是方法一.
- 证明集合A与自然数集合N等势的通常方法是：找到一个“数遍” A中元素的顺序.

练习6

6．已知$A=\{n^7|n\in N\}$, $B=\{n^{109}|n\in N\}$, 求下列各题：

(1) Card A

(2) Card B

(3) card $(A\cup B)$

(4) card $(A\cap B)$

解 (1) 构造双射函数 f:$N\to A$, $f(n)=n^7$, 因此 card $A=\aleph_0$

(2) 构造双射函数 g:$N\to A$, $g(n)=n^{109}$, 因此card $B=\aleph_0$

(3) 可数集的并仍旧是可数集，因此card$(A\cup B)\le \aleph_0$,
但是 card$(A\cup B) \ge$ card $A=\aleph_0$, 从而得到

$$\text{card}(A\cup B)= \aleph_0.$$

(4) 因为7与109互素，card$(A\cap B)=\{n^{7\times 109} \mid n\in N\}$，
与(1) 类似得到 card$(A\cap B)= \aleph_0$

练习7

7. 已知card$A$=$\aleph_0$, 且card$B$<card$A$, 求card(A–B) $\aleph$

解　由$A-B\subseteq A$ 得到 card(A–B) ≤ card$A$, 即

$$\text{card}(A-B)\le \aleph_0$$

由 card$B$<card$A$ 可知 B 为有穷集，即存在自然数n使得

$$\text{card}B=n.$$

假设card(A–B)< $\aleph_0$，那么存在自然数m，使得

$$\text{card}(A-B)=m$$

从而得到

$$\text{card}A = \text{card}((A-B)\cup B) \le n+m,$$

与card$A$=$\aleph_0$矛盾. 因此,

$$\text{card}(A-B)= \aleph_0.$$