第二章 命题逻辑等值演算

主要内容

- 等值式与基本的等值式
- 等值演算与置换规则
- 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集
- 可满足性问题与消解法

2.1 等值式

定义2.1 若等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，则称A与B**等值**，记作$A\Leftrightarrow B$，并称$A\Leftrightarrow B$是**等值式**

几点说明：

- 定义中，$A, B \Leftrightarrow$均为元语言符号
- A或B中可能有哑元出现.

例如 $(p\rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\vee(\neg r\wedge r))$ r为左边公式的哑元.

- 用真值表可检查两个公式是否等值

请验证：

$p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (p\wedge q) \rightarrow r$

$p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 不与 $(p\rightarrow q) \rightarrow r$ 等值

真值表判断是否等值

例1 判断下列各组公式是否等值:

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

p	q	r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

真值表判断是否等值

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

p q r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\to q$	$(p\to q)\to r$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

基本等值式（P21-22）

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

零律	$A\vee 1\Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
同一律	$A\vee 0\Leftrightarrow A$．$A\wedge 1\Leftrightarrow A$
排中律	$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$
蕴涵等值式	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$
等价等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
假言易位	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$
等价否定等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$
归谬论	$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

特别提示：必须牢记这16组等值式，这是继续学习的基础

等值演算与置换规则

1. 等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程

2. 等值演算的基础：

(1) 基本的等值式

(2) 等值关系的性质：自反性、对称性、传递性 （习题1：23）

- 自反：$A \Leftrightarrow A$
- 对称：若$A \Leftrightarrow B$, 则有$B \Leftrightarrow A$
- 传递：若$A \Leftrightarrow B$并且$B \Leftrightarrow C$, 则有$A \Leftrightarrow C$

(3) 置换规则（见3）

等值演算与置换规则

3. 置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式

若 $B \Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

等值演算的应用举例

证明两个公式等值

例2 证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\land q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow \neg p\lor(\neg q\lor r)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\lor\neg q)\lor r$ （结合律）

$\Leftrightarrow \neg(p\land q)\lor r$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow (p\land q)\to r$ （蕴涵等值式）

注意：用等值演算不能直接证明两个公式不等值

等值演算的应用举例

证明两个公式不等值

例3 证明 $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

证 方法一 真值表法, 见例1(2)

方法二 观察法. 观察到000, 010是左边的成真赋值，是右边的成假赋值

方法三 先用等值演算化简公式，然后再观察

$p\to(q\to r) \Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$

$(p\to q)\to r \Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee r\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee r$

更容易看出前面的两个赋值分别是左边的成真赋值和右边的成假赋值

等值演算的应用举例

A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$
A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

例4 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q \wedge \neg(p \to q)$
(2) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
(3) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$

解 (1) $q \wedge \neg(p \to q)$

$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q)$ （德摩根律，双重否定律）

$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p \wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

矛盾式

判断公式类型

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

重言式

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

可满足式，101和111是成真赋值，000和010等是成假赋值.

作业3

习题2：4

2.2 析取范式与合取范式

基本概念

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

p, $\neg q$, $p \vee \neg q$, $p \vee q \vee r$, …

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

p, $\neg q$, $p \wedge \neg q$, $p \wedge q \wedge r$, …

(4) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

p, $\neg p \wedge q$, $p \vee \neg q$, $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

p, $p \vee \neg q$, $\neg p \wedge q$, $(p \vee q) \wedge \neg p \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

范式概念

说明：

- 单个文字既是简单析取式，又是简单合取式
- 单个简单析取式也是合取范式
- 单个简单合取式也是析取范式

范式的性质

定理2.1 (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

$$\begin{aligned} & \ldots \vee p \vee \ldots \vee \neg p \vee \ldots \\ \Leftrightarrow\ & \ldots \vee (p \vee \neg p) \vee \ldots \\ \Leftrightarrow\ & \ldots \vee 1 \vee \ldots \\ \Leftrightarrow\ & 1 \end{aligned}$$

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

$$\begin{aligned} & \ldots \wedge p \wedge \ldots \wedge \neg p \wedge \ldots \\ \Leftrightarrow\ & \ldots \wedge (p \wedge \neg p) \wedge \ldots \\ \Leftrightarrow\ & \ldots \wedge 0 \wedge \ldots \\ \Leftrightarrow\ & 0 \end{aligned}$$

范式的性质

定理2.2 (1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它每个简单合取式都是矛盾式.

证：考虑公式$A = A_1 \vee \ldots \vee A_j \vee \ldots \vee A_n$
若存在某个赋值使得A_j为真，则在该组赋值下，有限次使用零律，可知A成真，与假设矛盾

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

命题公式的范式

定理2.3（范式存在定理）

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式

公式A的析取(合取)范式——与A等值的析取(合取)范式

求公式A的范式的步骤：(P27)

范式中不能出现以下形式:

$$A \to B, A \leftrightarrow B$$

$$\neg\neg A,\ \neg(A \wedge B), \neg(A \vee B)$$

析取范式不出现：$A \wedge (B \vee C)$

合取范式不出现：$A \vee (B \wedge C)$

命题公式的范式

(1) 消去A中的$\rightarrow$, $\leftrightarrow$（若存在）

$$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$$

$$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$$

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

$$\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$$

$$\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$$

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$　　求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$　　求析取范式

公式范式的不足——不惟一

求公式的范式

例5 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $(p\to\neg q)\vee\neg r$

(2) $(p\to\neg q)\to r$

解 (1) $(p\to\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去→）

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$

（即是析取范式又是合取范式）

求公式的范式

(2) $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\rightarrow r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （否定号内移——德摩根律) 析取范式

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律） 合取范式

极小项与极大项

定义2.4 在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i个文字出现在左起第i位上（$1\le i\le n$），称这样的简单合取式（简单析取式）为**极小项**（**极大项**）.

几点说明：

- n个命题变项有2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示. m_i（M_i）称为极小项（极大项）的名称.

实例

由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

实例

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

m_i与M_i的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$, $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式与主合取范式

主析取范式——由极小项构成的析取范式

主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ ——主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_7$——主合取范式

公式A的主析取(合取)范式——与A 等值的主析取(合取)范式

主析取范式与主合取范式

定理2.5 (主范式的存在惟一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是惟一的

证明：存在性略

主析取范式的唯一性：

假设公式A等值于两个不同的主析取范式B与C, 则$B \Leftrightarrow C$。

假设m_j仅存在于B而不存在于C，则下标j对应的赋值使B成真而C成假，从而得到矛盾。

求公式主范式的步骤

求公式主析取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式 j=1,2, … ,s

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge 1\Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i\vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求公式主范式的步骤

求公式的主合取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s$, 其中B_j是简单析取式 $j=1,2, \ldots ,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\vee 0\Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

实例

例6 (1) 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$的主析取范式和主合取范式

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\land q)\lor r$ （析取范式） ①

$(p\land q)$

$\Leftrightarrow (p\land q)\land(\neg r\lor r)$

$\Leftrightarrow (p\land q\land\neg r)\lor(p\land q\land r)$

$\Leftrightarrow m_6\lor m_7$ ②

r

$\Leftrightarrow (\neg p\lor p)\land(\neg q\lor q)\land r$

$\Leftrightarrow (\neg p\land\neg q\land r)\lor(\neg p\land q\land r)\lor(p\land\neg q\land r)\lor(p\land q\land r)$

$\Leftrightarrow m_1\lor m_3\lor m_5\lor m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\lor m_3\lor m_5\lor m_6\lor m_7$ （主析取范式）

实例

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （合取范式） ④

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ⑤

$q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$ ⑥

⑤, ⑥代入④ 并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ （主合取范式）

主范式的应用

1. 求公式的成真成假赋值

设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值

例:

$(p\to\neg q)\to r$的成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111

$$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$$

成假赋值为 000, 010, 100

$$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$$

类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

主合取范式、主析取范式的转换

对公式A，若存在极小项m_j没有出现在A的主析取范式中，则M_j一定出现在A的主合取范式中

对公式A，若存在极大项M_j没有出现在A的主合取范式中，则m_j一定出现在A的主析取范式中

用成真赋值和成假赋值确定主范式

由主析取范式确定主合取范式

例10 设A有3个命题变项, 且已知$A= m_1 \lor m_3 \lor m_7$, 求A的主合取范式.

解　A的成真赋值是1,3,7的二进制表示, 成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示, 它们恰好是A的主合取范式的极大项的下角标, 故

$$A \Leftrightarrow M_0 \land M_2 \land M_4 \land M_5 \land M_6$$

根据真值表写主范式

$$p \to (q \to r)$$

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

成真赋值：**000 001 010 011 100 101 111**

主析取范式为$m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

成假赋值：**110**

主合取范式为M_6

主范式的应用

2. 判断公式的类型

设A含n个命题变项.

A为重言式$\Leftrightarrow A$的主析取范式含全部2^n个极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式不含任何极大项, 记为1.

$$1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{2^n-1}$$

A为矛盾式$\Leftrightarrow A$的主合析取范式含全部2^n个极大项

$\Leftrightarrow A$的主析取范式不含任何极小项, 记为0.

$$0 \Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge \ldots \wedge M_{2^n-1}$$

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow A$的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

主范式的应用

例7 用主析取范式判断公式的类型:

(1) $A\Leftrightarrow \neg(p\to q)\wedge q$　(2) $B\Leftrightarrow p\to(p\vee q)$　(3) $C\Leftrightarrow (p\vee q)\to r$

解

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\wedge q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\wedge q \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3$

矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p\vee(p\vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$　重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$

$\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$　非重言式的可满足式

主范式的应用

3. 判断两个公式是否等值

例8 用主析取范式判断以下每一组公式是否等值

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

主范式的应用

4. 解实际问题

例9 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察, 需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记 p:派A去, q:派B去, r:派C去

(1) $p\rightarrow r$, (2) $q\rightarrow\neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A=(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

主范式的应用

求A的主析取范式

$$
\begin{aligned}
A&=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))\\
&\qquad \wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q))\\
&\qquad \vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))\\
&\qquad \vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)
\end{aligned}
$$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去, 方案2 派B去

作业4

习题2：5、6、12

2.3 联结词的完备集

定义2.6 称$F:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 为n元真值函数.

$\{0,1\}^n=\{00\ldots0, 00\ldots1, \ldots, 11\ldots1\}$，包含 2^{2^n}个长为n的0,1符号串.
共有 2^{2^n} 个n元真值函数.

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

n元真值函数的定义域中有2^n个元素，每一个元素对应2种不同取值方式，所以存在2^{2^n}种不同的映射。

真值函数

2元真值函数

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

公式与真值函数

任何一个含n个命题变项的命题公式A都对应惟一的一个n元真值函数 F , F 恰好为A的真值表.

等值的公式对应的真值函数相同.

例如：$p\to q, \neg p\lor q$ 都对应 $F_{13}^{(2)}$

联结词完备集

定义2.7 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是**联结词完备集**

若S是联结词完备集, 则任何命题公式都可由S中的联结词表示

定理2.6 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集

证明 由范式存在定理可证

2.3 联结词完备集

定义2.7 设S是一个联结词集合，如果任何命题公式都可由S中的联结词表示，则称S是**联结词完备集**

定理2.6 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集

证明 由范式存在定理可证

联结词完备集

推论 以下都是联结词完备集

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ (2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$ (4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

(5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

证明

(1),(2) 在联结词完备集中加入新的联结词后仍为完备集

(3) $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(4) $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

(5) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$不是联结词完备集, 0不能用它表示

它的子集$\{\wedge\}$,$\{\vee\}$,$\{\rightarrow\}$,$\{\leftrightarrow\}$,$\{\wedge, \vee\}$,$\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$等都不是

复合联结词

定义2.8 设 p, q 为两个命题, $\neg(p\wedge q)$称作p与q的与非式, 记作 $p\uparrow q$, 即 $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$, $\uparrow$称为与非联结词

$\neg(p\vee q)$ 称作 p 与 q 的或非式, 记作 $p\downarrow q$, 即 $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$, $\downarrow$ 称为或非联结词

定理2.7 $\{\uparrow\}$与$\{\downarrow\}$为联结词完备集.

证明 $\{\neg, \wedge, \vee\}$为完备集

$$\neg p \Leftrightarrow \neg p\wedge\neg p \Leftrightarrow \neg(p\vee p) \Leftrightarrow p\downarrow p$$

$$p\wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q) \Leftrightarrow \neg p\downarrow\neg q \Leftrightarrow (p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)$$

$$p\vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p\vee q) \Leftrightarrow \neg(p\downarrow q) \Leftrightarrow (p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$$

得证$\{\downarrow\}$为联结词完备集. 对$\{\uparrow\}$类似可证

作业5

习题2：21

2.4 可满足性问题与消解法

不含任何文字的简单析取式称作**空简单析取式**, 记作λ.
规定λ是不可满足的.
约定: 简单析取式不同时含某个命题变项和它的否定
S:合取范式, C:简单析取式, l:文字, α:赋值, 带下角标或$'$
文字l的补l^c:若$l=p$,则$l^c=\neg p$;若$l=\neg p$,则$l^c=p$.
$S\approx S'$:S是可满足的当且仅当S'是可满足的

定义2.9 设$C_1=l\vee C_1'$, $C_2=l^c\vee C_2'$, C_1'和C_2'不含l和l^c, 称$C_1'\vee C_2'$为C_1和C_2(以l和l^c为**消解文字**)的**消解式**或**消解结果**, 记作$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$

例如, $\mathrm{Res}(\neg p\vee q\vee r, p\vee q\vee\neg s)= q\vee r\vee\neg s$

消解规则

定理2.8 $C_1 \wedge C_2 \approx \mathrm{Res}(C_1,C_2)$

证 记C= Res$(C_1,C_2)=C_1' \vee C_2'$, 其中l和l^c为消解文字, $C_1=l \vee C_1'$, $C_2=l^c \vee C_2'$, 且C_1'和C_2'不含l和l^c.

假设$C_1 \wedge C_2$是可满足的, α是它的满足赋值, 不妨设$\alpha(l)=1$. C_2必含有文字$l' \neq l, l^c$且$\alpha(l')=1$. C中含有l', 故α满足C.

反之, 假设C是可满足的, α是它的满足赋值. C必有l'使得$\alpha(l')=1$, 不妨设C_1'含l', 于是α满足C_1. 把扩张到l(和l^c)上: 若$l=p$, 则令$\alpha(p)=0$; 若$l^c=p$, 则令$\alpha(p)=1$. 恒有$\alpha(l^c)=1$, 从而α满足C_2. 得证$C_1 \wedge C_2$是可满足的.

注意: $C_1 \wedge C_2$与Res(C_1,C_2)有相同的可满足性, 但不一定等值.

消解序列与合取范式的否证

定义2.10 设S是一个合取范式, $C_1,C_2,\ldots,C_n$是一个简单析取式序列. 如果对每一个$i(1\le i\le n)$, C_i是S的一个简单析取式或者是$\mathrm{Res}(C_j,C_k)(1\le j<k<i)$, 则称此序列是由$S$导出$C_n$的消解序列. 当$C_n=\lambda$时, 称此序列是$S$的一个否证.

定理2.9 一个合取范式是不可满足的当且仅当它有否证.

例11 用消解规则证明$S=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q\vee\neg s)\wedge(q\vee s)\wedge\neg q$是不可满足的.

证 $C_1=\neg p\vee q$, $C_2= p\vee q\vee\neg s$, $C_3=\mathrm{Res}(C_1,C_2)=q\vee\neg s$, $C_4=q\vee s$,
$C_5=\mathrm{Res}(C_3,C_4)=q$, $C_6=\neg q$, $C_7=\mathrm{Res}(C_5,C_6)=\lambda$, 这是$S$的否证.

消解算法

消解算法

输入: 合式公式A

输出: 当A是可满足时, 回答“Yes”; 否则回答“No”.

求A的合取范式S

令$S_0 \leftarrow \varnothing$, $S_2 \leftarrow \varnothing$, $S_1 \leftarrow S$的所有简单析取式

For $C_1 \in S_0$和$C_2 \in S_1$

    If C_1, C_2可以消解 then

        计算$C \leftarrow \mathrm{Res}(C_1, C_2)$

        If $C = \lambda$ then

            输出“No”, 计算结束

        If $C \notin S_0$且$C \notin S_1$ then

            $S_2 \leftarrow S_2 \cup \{C\}$

消解算法

10. For $C_1 \in S_1$, $C_2 \in S_1$且$C_1 \neq C_2$

11.   If C_1, C_2可以消解 then

12.   计算$C \leftarrow \mathrm{Res}(C_1, C_2)$

13.   If $C = \lambda$ then

14.   输出 “No”, 计算结束

15.   If $C \notin S_0$且$C \notin S_1$ then

16. $S_2 \leftarrow S_2 \cup \{C\}$

17. If $S_2 = \varnothing$ then

18.   输出 “Yes”, 计算结束

19. Else $S_0 \leftarrow S_0 \cup S_1$, $S_1 \leftarrow S_2$, $S_2 \leftarrow \varnothing$, goto 3

消解算法例题

例12 用消解算法判断下述公式是否是可满足的:

$$p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$$

解 $S= p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

循环1 $S_0=\varnothing$, $S_1=\{p, p\vee q, p\vee\neg q, q\vee\neg r, q\vee r\}$, $S_2=\varnothing$

$\mathrm{Res}(p\vee q, p\vee\neg q)=p$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q\vee\neg r)=p\vee\neg r$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q\vee r)= p\vee r$

$\mathrm{Res}(q\vee\neg r, q\vee r)=q$

$S_2=\{p\vee r, p\vee r, q\}$

循环2 $S_0=\{p, p\vee q, p\vee\neg q, q\vee\neg r, q\vee r\}$, $S_1=\{p\vee r, p\vee r, q\}$, $S_2=\varnothing$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q)=p$

消解算法例题

$\mathrm{Res}(q\vee\neg r, p\vee r)=p\vee q$

$\mathrm{Res}(q\vee r, p\vee\neg r)=p\vee q$

$\mathrm{Res}(p\vee r, p\vee\neg r)=p$

$S_2=\varnothing$

输出“Yes”

第二章 习题课

主要内容

- 等值式与等值演算
- 基本等值式（16组，24个公式）
- 主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集
- 消解法

基本要求

- 深刻理解等值式的概念
- 牢记基本等值式的名称及它们的内容
- 熟练地应用基本等值式及置换规则进行等值演算
- 理解文字、简单析取式、简单合取式、析取范式、合取范式的概念
- 深刻理解极小项、极大项的概念、名称及下角标与成真、成假赋值的关系，并理解简单析取式与极小项的关系
- 熟练掌握求主范式的方法（等值演算、真值表等）
- 会用主范式求公式的成真赋值、成假赋值、判断公式的类型、判断两个公式是否等值
- 会将公式等值地化成指定联结词完备集中的公式
- 会用命题逻辑的概念及运算解决简单的应用问题
- 掌握消解规则及其性质
- 会用消解算法判断公式的可满足性

练习1:概念

1. 设A与B为含n个命题变项的公式，判断下列命题是否为真？

(1) $A \Leftrightarrow B$当且仅当A与B有相同的主析取范式　　真

(2) 若A为重言式，则A的主合取范式为0　　假

(3) 若A为矛盾式，则A的主析取范式为1　　假

(4) 任何公式都能等值地化成$\{\wedge, \vee\}$中的公式　　假

(5) 任何公式都能等值地化成$\{\neg, \rightarrow, \wedge\}$中的公式　　真

说明:

(2) 重言式的主合取范式不含任何极大项，为1.

(3) 矛盾式的主合析范式不含任何极小项, 为0.

(4) $\{\wedge, \vee\}$不是完备集，如矛盾式不能写成$\{\wedge, \vee\}$中的公式.

(5) $\{\neg, \rightarrow\}$是完备集.

练习2: 判断公式类型

2. 判断下列公式的类型:

(1) $(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

解 用等值演算法求主范式

$$(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$$
$$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee(q\vee\neg p)$$
$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(q\vee\neg p)$$
$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$$
$$\Leftrightarrow m_2\vee m_1\vee m_3\vee m_0$$
$$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3 \quad \text{主析取范式}$$
$$\Leftrightarrow 1 \quad \text{主合取范式}$$

重言式

练习题2(续)

(2) $\neg(p\to q)\wedge q$

解 用等值演算法求公式的主范式

$$
\begin{aligned}
&\neg(p\to q)\wedge q\\
\Leftrightarrow\ &\neg(\neg p\vee q)\wedge q\\
\Leftrightarrow\ &p\wedge\neg q\wedge q\\
\Leftrightarrow\ &0 && \text{主析取范式}\\
\Leftrightarrow\ &M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3 && \text{主合取范式}
\end{aligned}
$$

矛盾式

练习2(续)

(3) $(p \to q) \wedge \neg p$

解 用等值演算法求公式的主范式

$$(p \to q) \wedge \neg p$$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p$

$\Leftrightarrow \neg p$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1$ 主析取范式

$\Leftrightarrow M_2 \wedge M_3$ 主合取范式

非重言式的可满足式

练习3：求公式的主范式

3．已知命题公式A中含3个命题变项p, q, r，并知道它的成真赋值为001, 010, 111, 求A的主析取范式和主合取范式，及A对应的真值函数.

解　A的主析取范式为$m_1 \vee m_2 \vee m_7$

A的主合取范式为$M_0 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$

$p\ q\ r$	F	$p\ q\ r$	F
0 0 0	0	1 0 0	0
0 0 1	1	1 0 1	0
0 1 0	1	1 1 0	0
0 1 1	0	1 1 1	1

练习4：联结词完备集

4. 将$A = (p\rightarrow\neg q)\wedge r$改写成下述各联结词集中的公式:

(1) $\{\neg, \wedge, \vee\}$

(2) $\{\neg, \wedge\}$

(3) $\{\neg, \vee\}$

(4) $\{\neg, \rightarrow\}$

(5) $\{\uparrow\}$

(6) $\{\downarrow\}$

解

(1) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\wedge r$

(2) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\wedge r$

(3) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r)$

练习4 解答

(4) $(p\to\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(\neg(p\to\neg q)\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow \neg((p\to\neg q)\to\neg r)$

(5) $(p\to\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (p\uparrow q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg\neg((p\uparrow q)\wedge r)$

$\Leftrightarrow ((p\uparrow q)\uparrow r)\uparrow((p\uparrow q)\uparrow r)$

(6) $(p\to\neg q)\wedge r \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\downarrow\neg q)\downarrow\neg r$

$\Leftrightarrow ((p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)\downarrow(r\downarrow r)$

说明：答案不惟一

练习5：应用题

5. 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

(1) 若赵去，钱也去.

(2) 李、周两人中至少有一人去

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人.

(4) 孙、李两人同去或同不去.

(5) 若周去，则赵、钱也去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国?

练习5解答

解此类问题的步骤:

1.设简单命题并符号化

2. 用复合命题描述各条件

3. 写出由复合命题组成的合取式

4. 将合取式成析取式（最好是主析取范式）

5. 求成真赋值, 并做出解释和结论

练习5解答

解

1. 设简单命题并符号化

设 p: 派赵去，q: 派钱去，r: 派孙去，s: 派李去，u: 派周去

2. 写出复合命题

(1) 若赵去，钱也去 $p \to q$

(2) 李、周两人中至少有一人去 $s \vee u$

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人 $(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$

(4) 孙、李两人同去或同不去 $(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$

(5) 若周去，则赵、钱也去 $u \to (p \wedge q)$

练习5解答

3. 设(1)—(5)构成的合取式为A

$$A = (p\to q)\land(s\lor u)\land((q\land\neg r)\lor(\neg q\land r))\land$$
$$((r\land s)\lor(\neg r\land\neg s))\land(u\to(p\land q))$$

4. 化成析取式

$$A \Leftrightarrow (\neg p\land\neg q\land r\land s\land\neg u)\lor(p\land q\land\neg r\land\neg s\land u)$$

结论：由上述析取式可知，A的成真赋值为00110与11001，

派孙、李去（赵、钱、周不去）

派赵、钱、周去（孙、李不去）

练习5解答

$A \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge$

$(s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \wedge$

$((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$

$B_1 = (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))$ （分配律）

$B_2 = (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q))$

$\Leftrightarrow ((s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge u))$ （分配律）

$B_1 \wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u)$

$\vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge u)$

再令 $((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) = B_3$，则

$B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$

练习6:消解法

6. 构造公式$A=(p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q)\wedge\neg r$的否证, 从而证明它是矛盾式.

解 消解序列:

① $p\vee q$ A的简单析取式

② $\neg p\vee q$ A的简单析取式

③ q ①,②消解

④ $\neg q\vee r$ A的简单析取式

⑤ $\neg r$ A的简单析取式

⑥ $\neg q$ ④,⑤消解

⑦ λ ③,⑥消解

这是A的一个否证, 从而证明A是矛盾式.

练习7:消解法

7. 用消解法判断下述公式是否是可满足的:

$$(p\lor\neg q)\land(q\lor\neg r)\land(\neg q\lor\neg r)$$

解 $S=(p\lor\neg q)\land(q\lor\neg r)\land(\neg q\lor\neg r)$

第1次循环 $S_0=\varnothing, S_1=\{p\lor\neg q,\ q\lor\neg r,\ \neg q\lor\neg r\}, S_2=\varnothing$

$p\lor\neg q,\ q\lor\neg r$ 消解得到$p\lor\neg r$

$q\lor\neg r,\ \neg q\lor\neg r$消解得到$\neg r$

$S_2=\{p\lor\neg r, \neg r\}$

第2次循环 $S_0=\{p\lor\neg q,\ q\lor\neg r,\ \neg q\lor\neg r\}, S_1=\{p\lor\neg r, \neg r\}, S_2=\varnothing$

$S_2=\varnothing$

输出 “Yes”,计算结束.