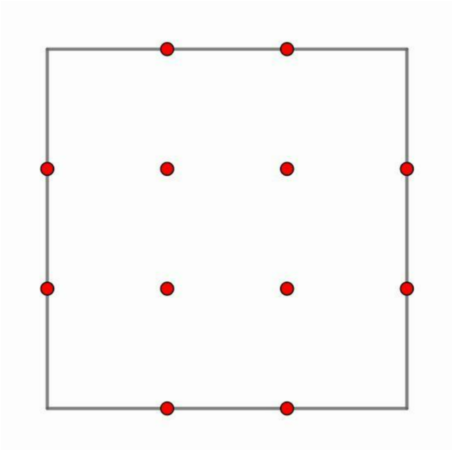
B020(H) 図のように, 正方形上に点が 12 個あります (8 個は辺上, 4 個は内部にあります). これら 12 個の点を 2 個ずつ 6 組のペアに分割する方法であって, 次が成り立つようなものは何通りありますか？

- 各ペアの 2 点を端点とする曲線を計 6 本引く方法であって, どの曲線も正方形の内部または境界を通り, かつ他の曲線と共通点を持たないようなものが存在する.



211(E) 1 以上 3 以下の整数の組 $(a_1, a_2, \ldots, a_{60})$ と 1 以上 20 以下の整数の組 $(b_1, b_2, \ldots, b_{60})$ のペアであって, 以下の条件をすべてみたすものはいくつありますか.

- $a_1 = a_{60} = b_1 = 1$, $b_{60} = 20$.
- $i = 1, 2, \ldots, 59$ それぞれについて, 以下の一方が成り立つ:
  - $|a_i - a_{i+1}| = 1$ かつ $b_i = b_{i+1}$.
  - $a_i = a_{i+1}$ かつ $|b_i - b_{i+1}| = 1$.
- 組 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{60}, b_{60})$ は相異なる.

203(E) 赤・青・黄・緑それぞれの石が十分な数あり, これらの石あわせて 9 個を, 赤の右隣は青, 青の右隣は黄, 黄の右隣は緑であるように左右一列に並べます. ただし, 一番右の石が緑である必要はありません. このような条件で並べる方法は何通りありますか?

193(D) 黒石と白石がそれぞれ 6 個ずつあり, これらを横一列に並べます. このとき, 次を満たす石を**良い石**とよびます:

- その石およびその石より左にある石全てについて, 黒石の個数と白石の個数が等しい.

${}_{12}\mathrm{C}_6$ 通りの並べ方全てについて, 良い石の個数の総和を求めて下さい.

189(D) OMC 君は xy 平面上におり, 初めは $(0,0)$ にいます. OMC 君は, 1 回の動作で x 軸方向または y 軸方向に 1 または -1 動きます (すなわち, 1 回にありうる動作は 4 通

りです). 15 回の動作を行った時点で $(2,1)$ にいるような, 動作の行い方は何通りありますか?

224(D) 長さ 11 の整数列 $A=(A_1,A_2,\ldots,A_{11})$ を用いて, 先手太郎君と後手次郎君がゲームをします. 先手太郎君から始めて, それぞれに許された以下の操作を交互に行い, 先に操作ができなくなった方が負けです:

- 先手太郎君:$1 \leq i \leq 11$ かつ $A_i \geq 2$ なる整数 i を任意に一つ選び, A_i を 2 減らす.
- 後手次郎君:$1 \leq i \leq 11$ かつ $A_i \geq 1$ なる整数 i を任意に一つ選び, A_i を 1 減らす.

$A_1,A_2,\ldots,A_{11}$ がすべて 1 以上 11 以下であるような A は 11^{11} 個ありますが, そのうち後手次郎君の操作によらず先手太郎君が勝てるものはいくつありますか?

223(B) 正 1110 角形 $P_1P_2\cdots P_{1110}$ に対し,

$$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq 1110$$

なる整数の組 (i_1,i_2,i_3,i_4,i_5) であって, 以下をみたすものは全部でいくつありますか?

- 五角形 $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}P_{i_4}P_{i_5}$ の内角のうち, 少なくとも 1 つは直角である.

222(D) OMC 国では, $n=1,2,\ldots,1000$ それぞれに対し, $n!$ 円札が通貨として流通しています. OMC 国にやってきたあなたは, それぞれのお札を 2 枚ずつ持っています, あなたがちょうど払うことのできる金額として 1000 番目に小さい値を答えてください. ただし, ちょうど払うことのできる金額として, 0 円は含めません.

221(D) 多重集合 $\{1,1,2,2,3,3,4,4,5,5\}$ の空でない部分集合 U について, その要素を昇順に並べたとき奇数番目にあたるものの総積を $f(U)$ とします. 例えば $U=\{1,2,2,4,5,5\}$ のとき, $f(U)=1\times2\times5$ です. U として考えられるものは 3^5-1 通りありますが (ここで, 同じ数は区別しないものとします), これらすべてに対する $f(U)$ の総和を求めてください.

219(B) あるコンテストは過去に 9900 回開催されており, OMC 君と bzuL 君はそのすべてに出場していました. ここで, どの回も OMC 君と bzuL 君が同一の成績を取ったことはなく, 勝ちと負けが毎回決まっていたものとします. OMC 君と bzuL 君の成績を比較すると, 以下のことがわかりました.

- OMC 君は bzuL 君に負け越したことがない. つまり, どの時点でも, OMC 君が bzuL 君の成績を上回った回数は, bzuL 君の成績を下回った回数以上であった.
- 各 $n=1,2,\ldots,99$ に対して, 第 $n(n+1)$ 回のコンテストが終了した直後は, OMC 君と bzuL 君の勝ち負けは同数であった.

このとき, OMC 君と bzuL 君の勝ち負けの組み合わせとしてありうるものは M 通りあります. M が 2 で割り切れる最大の回数を求めてください.

217(C) $S=\{1,2,\ldots,9000\}$ とします．任意の S の空でない部分集合 T に対して，T の要素の総和を 3 で割ったあまりを $f(T)$ とします．T が S の空でない部分集合全体を動くとき，$f(T)$ の平均は互いに素な正の整数 a,b を用いて $\dfrac{b}{a}$ と表されるので，b を素数 2999 で割ったあまりを解答してください．

214(E) 1 以上 5000 以下の整数のうち 1 つが書かれている 1×2 のタイルが 5000 枚あり，どの 2 枚のタイルについても書かれている数は相異なります．これらのタイルを重なりも隙間もなく 100×100 のマス目に敷き詰めると，次の条件を満たしていました．

- 1 以上 4999 以下の任意の整数 k について，k が書かれたタイルと $k+1$ が書かれたタイルは長さ 1 以上の線分を共有して隣り合う．

また，上から a 行目，左から b 列目にあるマスを覆うタイルに書かれた数を $N_{a,b}$ とします．このとき，

$$N_{1,51}+N_{2,50}+N_{3,51}+N_{4,50}+\cdots+N_{99,51}+N_{100,50}$$

として考えられる最大の値を解答してください．

212(C) 2 行 2024 列の長方形状のマス目があります．このとき，4048 個のマスをそれぞれ白か黒で塗る方法のうち，以下の条件を満たすものの数を素数 2017 で割った余りを解答してください．

- 最も左上のマスから始め，隣接するマスのうち今いるマスと同じ色のマスへ移動することを繰り返して最も右下のマスまで到達することができる．ここで，同じマスの上を複数回通ることができないとしたとき，そのような移動の方法はちょうど 1 通り存在する．

178(B) 1 以上 5 以下の整数に対して定義され，1 以上 5 以下の整数値を取る関数 f であって，以下の条件を満たすものはいくつありますか?

- ある正の整数 k が存在して，$f^k(1)=f^k(2)=\cdots=f^k(5)$ が成立する．

ただし，$f^1(x)=f(x)$ とし，任意の正の整数 k について $f^{k+1}(x)=f(f^k(x))$ が成り立つものとします．

158(C) $1\leq a_1<a_2<\cdots<a_7\leq 15$ を満たす整数の組 $(a_1,a_2,\ldots,a_7)$ であって，

$$a_2-a_1,\quad a_3-a_2,\quad \ldots\quad a_7-a_6$$

が全て奇数であるようなものはいくつありますか．