# 1　松坂集合位相

**1.1** $x$ を位相空間 $S$ の点,$M$ を $S$ の部分集合とするとき,$x \in \bar{M}$ であるためには,$x$ を含む任意の開集合 $O$ に対して $O \cap M \neq \varnothing$ となることは必要十分であることを示せ.

**1.2** $O$ を位相空間 $S$ の 1 つの開集合とすれば,$S$ の任意の部分集合 $M$ に対して,$O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$ であることを示せ.(したがって特に $O \cap M = \varnothing$ ならば $O \cap \bar{M} = \varnothing$)

**1.3** 位相空間 $S$ の任意の部分集合 $M$ に対して $M^{aiai} = M^{ai}, M^{iaia} = M^{ia}$ が成り立つことを示せ.

**1.4** $S$ を空でない集合とするとき,$\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ の基底となるためには,$\mathfrak{B}$ が次の性質 (O*i) および (O*ii) をもつことが必要十分であることを証明せよ.

(O*i) $S$ の任意の元 $x$ に対して,$x \in W$ となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

(O*ii) $W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}, W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$ ならば,$W_1 \cap W_2$ に属する任意の点 $x$ に対して,

$$x \in W, \qquad W \subset W_1 \cap W_2$$

となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

**1.5** 位相空間 $S$ において,$\boldsymbol{V}^*(x)$ を $x$ の 1 つの基本近傍系とし, また $M$ を $S$ の 1 つの部分集合とする. そのとき次のことを示せ.

(a) $x \in M^\circ \Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \subset M)$

(b) $x$ が $M$の外点 $\Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M = \varnothing)$

(c) $x \in \bar{M} \Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M \neq \varnothing)$

(d) $x \in \partial M \Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M \neq \varnothing$ かつ $U \cap M^c \neq \varnothing)$

(e) $x$ が $M$ の集積点 $\Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap (M - \{x\}) \neq \varnothing)$

(f) $x$ が $M$ の孤立点 $\Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M = \{x\})$

**1.6** 位相空間 $S$ の各点 $x$ に対してそれぞれ 1 つの基本近傍系 $\boldsymbol{V}^*(x)$ が与えられたとすれば,$(\boldsymbol{V}^*(x))_{x \in S}$ について次の $(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ が成り立つことを証明せよ.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i})$ すべての $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して $x \in U$.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii})$ $U_1 \in \boldsymbol{V}^*(x), U_2 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ とすれば,$U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となるような $U_3 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ 任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して, 次の条件を満たす $W \in \boldsymbol{V}^*(x)$ がある:$W$ の任意の点 $y$ に対して $U_y \subset U$ となるような $U_y \in \boldsymbol{V}^*(y)$ が存在する.

**1.7** 集合 $S(\neq \varnothing)$ の各点 $x$ に対しそれぞれ $\mathfrak{P}(S)$ の空でない部分集合 $\boldsymbol{V}^*(x)$ が定められ,$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ が成り立っているとする. そのとき,$S$ の各点 $x$ に対し

$$\boldsymbol{V}(x) = \{V | \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \subset V)\}$$

と $\boldsymbol{V}(x)$ を定めれば,$\boldsymbol{V}(x)$ を $x$ の近傍系とする位相 $\mathfrak{O}$ が一意的に導入されることを

示せ.(与えられた $\boldsymbol{V}^*(x)$ はこの位相空間における $x$ の基本近傍系.)

**1.8** 集合 $S$ において,($\boldsymbol{V}^*$i)-($\boldsymbol{V}^*$iii) を満たす 2 組の $(\boldsymbol{V}^*(x))_{x\in S}, (\boldsymbol{W}^*(x))_{x\in S}$ が与えられたとする. そのとき, 前問の意味でこれから定められる位相 $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ について,$\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ が成り立つためには, 次の条件 $(*)$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

$(*)$ 任意の $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して,$W \subset V$ となる $W \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在する.

**1.9** 位相空間 $S$ から位相空間 $S'$ への写像 $f$ が $S$ の点 $x_0$ で連続であるためには,$x_0 \in \bar{M}$ であるような $S$ の任意の部分集合 $M$ に対して $f(x_0) \in \overline{f(M)}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

**1.10** $M$ を位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分集合とするとき,$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底 (または準基底) ならば,

$$\mathfrak{B}_M = \{O \cap M \mid O \in \mathfrak{B}\}$$

は $\mathfrak{O}_M$ の基底 (または準基底) となることを示せ.

**1.11** $M$ を位相空間 $S$ の部分空間とするとき,$M$ の任意の部分集合 $X$ の $M$ における閉包は $\bar{X} \cap M$($\bar{X}$ は $X$ の $S$ における閉包) となることを示せ.

**1.12** 前問で,$X \in \mathfrak{P}(M)$ の $M$ における開核を $X^{i'}$,$S$ における開核を $X^i$ とすれば,$X^{i'} \supset X^i$ であることを示せ. また, 任意の $X \in \mathfrak{P}(M)$ に対して $X^{i'} = X^i$ が成り立つためには,$M$ が $S$ の開集合であることが必要十分であることを示せ.

**1.13** 離散空間の任意の部分空間は離散空間, 密着空間の任意の部分空間は密着空間であることを示せ.

**1.14** $M$ を位相空間 $S$ の部分集合とする.$M$ のすべての点が $M$ の孤立点であるためには,$S$ の部分空間として $M$ が離散空間であることが必要十分であることを示せ.

**1.15** $\boldsymbol{R}$ の開区間 $(a, b)$ は (相対位相に関して)$\boldsymbol{R}$ と同相な位相空間であることを示せ.

**1.16** $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし, 各 $\lambda$ に対して $M_\lambda$ を $S_\lambda$ の部分集合とする. そのとき, 直積空間 $S = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の部分集合 $M = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ について

$$\bar{M} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \bar{M}_\lambda$$

が成り立つことを示せ.

**1.17** 前問において,$\Lambda$ が有限集合である場合には,

$$M^\circ = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\circ$$

が成立することを示せ.$\Lambda$ が無限集合の場合にはこのことは成り立つか.

**1.18** 位相空間 $S$ から直積空間 $S' = \prod_{\lambda\in\Lambda} S'_\lambda$ への写像 $f : S \to S'$ が連続であるためには,すべての $\lambda \in \Lambda$ に対し $f_\lambda = \mathrm{pr}_\lambda \circ f : S \to S'_\lambda$ が連続であることが必要十分であることを示せ.

**1.19** $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族,$\Lambda_1$ を $\Lambda$ の部分集合とし,$\Lambda - \Lambda_1$ に属する各 $\mu$ に対してそれぞれ $S_\mu$ の 1 つの元 $x_\mu^0$ を定めておく. そのとき,$\prod_{\lambda\in\Lambda_1} S_\lambda$ の各点 $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}$ に $\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の点 $x^* = (x_\lambda^*)_{\lambda\in\Lambda}$(ただし $\lambda \in \Lambda_1$ に対しては $x_\lambda^* = x_\lambda, \mu \in \Lambda - \Lambda_1$ に対しては $x_\mu^* = x_\mu^0$) を対応させる写像は,$\prod_{\lambda\in\Lambda_1} S_\lambda$ から $\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の部分空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda_1} S_\lambda \times \prod_{\mu\in\Lambda-\Lambda_1} \{x_\mu^0\}$ への同相写像であることを示せ.

**1.20** $f$ を直積空間 $S = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ から位相空間 $S'$ へ連続写像とする. そのとき, 前問のようにして $\prod_{\lambda\in A_1} S_\lambda$ の各点 $x$ に $\prod_{\lambda\in A} S_\lambda$ の点 $x^*$ を対応させ,$f_1(x) = f(x^*)$ とおけば, $f_1$ は $\prod_{\lambda\in A_1} S_\lambda$ から $S'$ の連続写像であることを示せ. (約言すれば, "多変数の連続写像" は, 一部の変数を固定した場合, 残りの変数について連続である. 特に, "多変数の連続写像" は個々の各変数について連続である." しかし, このことの逆は成立しない (次の問題参照).)

**1.21** 写像 $f : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を次のように定義する:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1x_2/\left(x_1^2 + x_2^2\right) & ((x_1, x_2) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x_1, x_2) = (0,0)). \end{cases}$$

は連続でないことを示せ.

## 1.1

$x$ を位相空間 $S$ の点,$M$ を $S$ の部分集合とするとき,$x \in \bar{M}$ であるためには,$x$ を含む任意の開集合 $O$ に対して $O \cap M \neq \varnothing$ となることは必要十分であることを示せ.

【解】
$\Rightarrow$: この命題の対偶, ある $x$ を含む開集合 $O$ が存在して $O \cap M = \varnothing$ ならば $x \notin \bar{M}$ が成り立つことを示す.
このような開集合 $O$ について $M \subset O^c$ で $O^c$ は $x$ を含まない閉集合. よって $\bar{M} \subset O^c$ となり,$\bar{M}$ も $x$ を含まない.
$\Leftarrow$: これも対偶,$x \notin \bar{M}$ ならば $x$ を含むある開集合 $O$ が存在して $O \cap M = \varnothing$ であることを示す.
このとき,$\bar{M}^c$ は $x$ を含む開集合である. したがって $\bar{M}^c \cap M \subset M^c \cap M = \varnothing$ ゆえ $\bar{M}^c \cap M = \varnothing$ であり, これが示すべきことであった.

## 1.2

$O$ を位相空間 $S$ の 1 つの開集合とすれば,$S$ の任意の部分集合 $M$ に対して,$O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$ であることを示せ.(したがって特に $O \cap M = \varnothing$ ならば $O \cap \bar{M} = \varnothing$)

【解】
$x \in O \cap \bar{M}$ を任意にとり,$O'$ を $x$ を含む任意の開集合とする. このとき $x \in \bar{M}$ で $O \cap O'$ は $x$ を含む開集合なので, 前問により $O \cap O' \cap M \neq \varnothing$. したがって $O' \cap O \cap M \neq \varnothing$ で, ふたたび前問により $x \in \overline{O \cap M}$. 以上により,$O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$.

## 1.3

位相空間 $S$ の任意の部分集合 $M$ に対して $M^{aiai} = M^{ai}, M^{iaia} = M^{ia}$ が成り立つことを示せ.

【解】
$M^{aiai} = M^{ai}$ を示す.
$M^{ai} \subset M^a$ であり,$M^{aia} \subset (M^a)^a = M^a$. よって $M^{aiai} \subset M^{ai}$. また,$M^{aia} \supset M^{ai}$.(これは $M^a \supset M$ の $M$ を $M^{ai}$ におきかえたもの) よって $M^{aiai} \supset M^{aii} = M^{ai}$. 以上から,$M^{aiai} = M^{ai}$.$M^{iaia} = M^{ia}$ もほとんど同様である.

## 1.4

$S$ を空でない集合とするとき,$\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ の基底となるためには,$\mathfrak{B}$ が次の性質 (O*i) および (O*ii) をもつことが必要十分であることを証明せよ.

(O*i) $S$ の任意の元 $x$ に対して,$x \in W$ となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

(O*ii) $W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}, W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$ ならば,$W_1 \cap W_2$ に属する任意の点 $x$ に対して,

$$x \in W, \qquad W \subset W_1 \cap W_2$$

となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

$\Leftarrow$ では $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda (W_\lambda \in \mathfrak{B})$ の集合全体が $S$ の位相となることを示す.($\Lambda = \varnothing$ のとき $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda = \varnothing$ と既約されているものとする.)

【解】

$\Rightarrow$:$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ の基底ならば,(O*i) が成り立つことは明らか.

$W_1, W_2 \in \mathfrak{B}$ ならば, 特に $W_1, W_2 \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ ゆえ $W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$. よって $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$ ならば $x \in W_1 \cap W_2$ について,$x \in W, W \subset W_1 \cap W_2$ となる $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

$\Leftarrow$:$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda (W_\lambda \in \mathfrak{B})$ の形の集合全体を $\mathfrak{O}$ とする.

(Oi)$\varnothing \in \mathfrak{O}$ は明らか. また (O*i) により,$S \in \mathfrak{O}$ もいえる.

(Oiii) も $\mathfrak{O}$ の定め方から明らか. (Oii) まず,$W_1, W_2 \in \mathfrak{B}$ ならば $W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{O}$ である. 実際,$W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}$ について,$W_1 \cap W_2 = \varnothing$ ならばこれは $\mathfrak{O}$ の元.$W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$ のとき,(O*ii) を満たす $W \in \mathfrak{B}$ を $W_x$ とすれば $W_1 \cap W_2 = \bigcup_{x \in W_1 \cap W_2} W_x \in \mathfrak{O}$.

$O_1 \in \mathfrak{O}, O_2 \in \mathfrak{O}$ は $O_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda^{(1)}, O_2 = \bigcup_{\mu \in M} W_\mu^{(2)}$ と $\mathfrak{B}$ の元の合併として表せる. このとき

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (W_\lambda^{(1)} \cap W_\mu^{(2)})$$

$W_\lambda^{(1)} \cap W_\mu^{(2)} \in \mathfrak{O}$ なので (Oiii) により,$O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$. 以上により $\mathfrak{O}$ は $S$ 上の位相となり,$\mathfrak{B}$ はその基底である.

## 1.5

位相空間 $S$ において,$\boldsymbol{V}^*(x)$ を $x$ の 1 つの基本近傍系とし, また $M$ を $S$ の 1 つの部分集合とする. そのとき次のことを示せ.

(a) $x \in M^\circ \Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \subset M)$

(b) $x$ が $M$ の外点 $\Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M = \varnothing)$

(c) $x \in \bar{M} \Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M \neq \varnothing)$

(d) $x \in \partial M \Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M \neq \varnothing$ かつ $U \cap M^c \neq \varnothing)$

(e) $x$ が $M$ の集積点 $\Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap (M - \{x\}) \neq \varnothing)$

(f) $x$ が $M$ の孤立点 $\Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M = \{x\})$

【解】

(a) $\Rightarrow$:$x \in M^\circ$ ゆえ,$M$ は $x$ の近傍である. 基本近傍系の定義により,$x \in U^\circ$,$U \subset M$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する.

$\Leftarrow$: このとき特に $x \in U^\circ$ であり,$U^\circ \subset M^\circ$ なので $x \in M^\circ$.

(b) $\Rightarrow$:$x$ は $M^c$ の内点なので,(a) により, ある $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在して $U \subset M^c$. よって $U \cap M^c = \varnothing$.

$\Leftarrow$: このとき $U \subset M^c$ で,$x \in U^i$ かつ $U^i \subset M^{ci}$ なので $x \in M^{ci}$.

(c) $\Rightarrow$:1.1 により $x$ を含む任意の開集合 $O$ について $O \cap M \neq \varnothing$ となる. 任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ について $x \in U^i$ なので $U^i \cap M \neq \varnothing$. よって $U \cap M \neq \varnothing$.

$\Leftarrow$:$x$ を含む任意の開集合 $O$ について,$O$ は $x$ の近傍なので $U \subset O$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する. このとき, 今仮定していることから $U \cap M \neq \varnothing$ で $U \cap M \subset O \cap M$ なので $O \cap M \neq \varnothing$. よって $x \in \bar{M}$.

(d) $\Rightarrow$:$x \in \bar{M}$ により, 任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ において $U \cap M \neq \varnothing$. また,$x \notin M^\circ$ なので (a) の否定

$$\forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \not\subset M)$$

すなわち

$$\forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M \neq \varnothing)$$

が成立. 以上により示された.

$\Leftarrow$:(a),(c) により $x \in \bar{M} - M^\circ = \partial M$ となることは明らか.

(e) $\Rightarrow$: このとき $x \in \overline{M - \{x\}}$ ゆえ,(c) により明らか.

$\Leftarrow$: これも (c) により明らか.

(f) $\Rightarrow$: まず $x \notin \overline{M - \{x\}}$ なので,(c) によって

$$\exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap (M - \{x\}) = \varnothing)$$

この $U$ について $U \cap (M - \{x\}) = \varnothing$ であり,$x \in U \cap M$ なので $U \cap M = \{x\}$.

$\Leftarrow$: このとき $U \cap (M - \{x\}) = \varnothing$ なので (c) により

$$x \in M \text{ かつ } x \notin \overline{M - \{x\}}$$

よって $x$ は $M$ の孤立点.

## 1.6

位相空間 $S$ の各点 $x$ に対してそれぞれ 1 つの基本近傍系 $\boldsymbol{V}^*(x)$ が与えられたとすれば,$(\boldsymbol{V}^*(x))_{x\in S}$ について次の $(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ が成り立つことを証明せよ.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i})$ すべての $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して $x \in U$.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii})$ $U_1 \in \boldsymbol{V}^*(x), U_2 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ とすれば,$U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となるような $U_3 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ 任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して, 次の条件を満たす $W \in \boldsymbol{V}^*(x)$ がある:$W$ の任意の点 $y$ に対して $U_y \subset U$ となるような $U_y \in \boldsymbol{V}^*(y)$ が存在する.

【解】

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i})$ は明らか.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii})$ も $U_1, U_2$ は $x$ の近傍ゆえ $U_1 \cap U_2$ も $x$ の近傍. よって, 基本近傍系の定義から $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となる $U_3 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$:$W = U^\circ$ とすれば, 任意の $y \in W$ について $W$ は $y$ の近傍なので, 基本近傍系の定義から $U_y \subset U$ となる $U_y \in \boldsymbol{V}^*(y)$ が存在する.

## 1.7

集合 $S(\neq \varnothing)$ の各点 $x$ に対しそれぞれ $\mathfrak{P}(S)$ の空でない部分集合 $\boldsymbol{V}^*(x)$ が定められ,$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ が成り立っているとする. そのとき,$S$ の各点 $x$ に対し

$$\boldsymbol{V}(x) = \{V | \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \subset V)\}$$

と $\boldsymbol{V}(x)$ を定めれば,$\boldsymbol{V}(x)$ を $x$ の近傍系とする位相 $\mathfrak{O}$ が一意的に導入されることを示せ.(与えられた $\boldsymbol{V}^*(x)$ はこの位相空間における $x$ の基本近傍系.)

【解】

まず $\boldsymbol{V}(x)$ が $(\boldsymbol{V}\mathrm{i})$-$(\boldsymbol{V}\mathrm{iv})$(p161) を満たすことを示す.

$(\boldsymbol{V}\mathrm{i})$ は明らか.

$(\boldsymbol{V}\mathrm{ii})$:$V \in \boldsymbol{V}(x)$ で $V \subset V'$ とする. このときある $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在して,$U \subset V$ ゆえ $U \subset V'$ なので $V' \in \boldsymbol{V}(x)$.

$(\boldsymbol{V}\mathrm{iii})$:$V_1 \in \boldsymbol{V}(x), V_2 \in \boldsymbol{V}(x)$ とすると $V_1' \subset V_1, V_2' \subset V_2$ となる $\boldsymbol{V}^*(x)$ の 2 元 $V_1', V_2'$ が存在する. このとき $V_1' \cap V_2' \subset V_1 \cap V_2$ で $(\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii})$ によって $V_3' \subset V_1' \cap V_2'$ となる $V_3' \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する. このとき $V_3' \subset V_1 \cap V_2$ なので $V_1 \cap V_2 \in \boldsymbol{V}(x)$.

$(\boldsymbol{V}\mathrm{iv})$: 任意の $V \in \boldsymbol{V}(x)$ について $U \subset V$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する.$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ によって, ある $W \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在して

$$\forall y \in W, \exists U_y \in \boldsymbol{V}^*(y)(U_y \subset U)$$

となる. 特に $W \in \boldsymbol{V}(x)$ で $W$ の任意の元 $y$ に対して, 明らかに $y \in U_y \subset U \subset V$.

定理 11(p162) によって $\boldsymbol{V}(x)$ を $x$ の近傍系とする位相 $\mathfrak{O}$ が一意的に導入される.

## 1.8

集合 $S$ において,($\boldsymbol{V}^*$i)-($\boldsymbol{V}^*$iii) を満たす 2 組の $(\boldsymbol{V}^*(x))_{x\in S}, (\boldsymbol{W}^*(x))_{x\in S}$ が与えられたとする. そのとき, 前問の意味でこれから定められる位相 $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ について,$\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ が成り立つためには, 次の条件 $(*)$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

$(*)$ 任意の $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して,$W \subset V$ となる $W \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在する.

【解】
$i_1, i_2$ をそれぞれ $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ における開核作用子とする.
$\Rightarrow (*)$ : 任意の $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ について,$V^{i_1}$ は $x$ を含む $(S, \mathfrak{O}_1)$ の開集合. よって $V^{i_1} \in \mathfrak{O}_2$ なので,$V^{i_1}$ は $(S, \mathfrak{O}_2)$ の開集合. 1.5(a) により $W \subset V^{i_1}$ となる $W \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在し,$W \subset V$.
$\Leftarrow (*)$:$O \in \mathfrak{O}_1$ について,$x \in O$ を任意にとる. このとき $O \in \boldsymbol{V}^*(x)$ ゆえ,$W \subset V$ となる $W \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在する. よって $V$ は $(S, \mathfrak{O}_2)$ における開集合でもあるので $O \in \mathfrak{O}_2$.

## 1.9

位相空間 $S$ から位相空間 $S'$ への写像 $f$ が $S$ の点 $x_0$ で連続であるためには,$x_0 \in \bar{M}$ であるような $S$ の任意の部分集合 $M$ に対して $f(x_0) \in \overline{f(M)}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

【解】
$\Rightarrow$:$f(x_0) = x'_0$ とし,$\boldsymbol{V}^*_{S'}(x'_0)$ を $x'_0$ の基本近傍系とする.
任意の $V' \in \boldsymbol{V}^*_{S'}(x'_0)$ について,$f$ の連続性から $f^{-1}(V') \in \boldsymbol{V}_S(x_0)$. よって 1.5(c) から $f^{-1}(V') \cap M \neq \varnothing$. この両辺に $f$ の像を取ると $f(f^{-1}(V') \cap M) \neq \varnothing$ で $f(f^{-1}(V')) \cap f(M) \neq \varnothing$. よって $V' \cap f(M) \neq \varnothing$ なので $x'_0 \in \overline{f(M)}$. したがって $f(x_0) \in \overline{f(M)}$.
$\Leftarrow$:$V' \in \boldsymbol{V}^*_{S'}(x'_0)$ とし,$f^{-1}(V')$ が $x_0$ の近傍でないとする. つまり $x_0 \notin (f^{-1}(V'))^\circ$ ゆえ $x_0 \in (f^{-1}(V'))^{ic} = (f^{-1}(V'))^{ca} = \overline{S - f^{-1}(V')} = \overline{f^{-1}(S' - V')}$. いま仮定していることにより,

$$f(x_0) \in \overline{f(f^{-1}(S' - V'))} \subset \overline{S' - V'}$$

よって $x'_0 \in \overline{S' - V'} = V'^{ca} = V'^{ic}$ となり, これは $V'$ が $x_0$ の近傍であることに反する.

## 1.10

$M$ を位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分集合とするとき,$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底 (または準基底) ならば,

$$\mathfrak{B}_M = \{O \cap M \,|\, O \in \mathfrak{B}\}$$

は $\mathfrak{O}_M$ の基底 (または準基底) となることを示せ.

【解】
$\mathfrak{B}$ が基底のとき:$\mathfrak{B}_M \subset \mathfrak{O}_M$ は明らか. 任意の $x$ と $x \in O'$ となる $O' \in \mathfrak{O}_M$ について,$O' = O \cap M (O \in \mathfrak{O})$ と表せる. このときある $W \in \mathfrak{B}$ が存在して,$x \in W, W \subset O$ とな

る. このとき $x \in W \cap M, W \cap M \subset O \cap M$ なので,$\mathfrak{B}_M$ は $\mathfrak{O}_M$ の基底.
$\mathfrak{B}$ が準基底のとき:$\mathfrak{B}$ の有限個の元の共通部分 $\bigcap_{i \in I} W_i (\mathrm{card}\, I < \aleph_0, W_i \in \mathfrak{B})$ 全体の集合を $\mathfrak{M}'$,$\mathfrak{M}'$ の元の和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda (B_\lambda \in \mathfrak{M}')$ 全体の集合を $\mathfrak{M}$ とする. このとき $\mathfrak{M} = \mathfrak{O}$ である.
$\mathfrak{B}_M$ の有限個の元の共通部分全体の集合は

$$\bigcap_{i \in I} (W_i \cap M) = \left( \bigcap_{i \in I} W_i \right) \cap M \ (\mathrm{card}\, I < \aleph_0, W_i \in \mathfrak{B})$$

の形の集合全体, すなわち $\{W \cap M \mid W \in \mathfrak{M}'\}$ となる. これを $\mathfrak{M}'_M$ とする. さらに $\mathfrak{M}'_M$ の元の和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B'_\lambda (B'_\lambda \in \mathfrak{M}'_M)$ 全体を $\mathfrak{M}_M$ とすれば,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B'_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (W_\lambda \cap M) = \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \right) \cap M \ (W_\lambda \in \mathfrak{M}')$$

ゆえ $\mathfrak{M}_M = \{O \cap M \mid O \in \mathfrak{O}\} = \mathfrak{O}_M$ となり,$\mathfrak{M}_M$ は $\mathfrak{O}_M$ の準基底となる.

## 1.11

$M$ を位相空間 $S$ の部分空間とするとき,$M$ の任意の部分集合 $X$ の $M$ における閉包は $\bar{X} \cap M (\bar{X}$ は $X$ の $S$ における閉包) となることを示せ.

【解】
$S$ の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とする.$M$ に $S$ の相対位相を入れてできる位相空間 $M$ の閉集合系を $\mathfrak{A}_M$ とすれば $\mathfrak{A}_M = \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}\}$. このとき $X$ の $M$ における閉包 $X^{a_M}$ は

$$X^{a_M} = \bigcap \{A \in \mathfrak{A}_M \mid X \subset A\} = \bigcap \{A \cap M | \, A \in \mathfrak{A}, X \subset A \cap M\}$$

いま,$X \subset M$ なので $X \subset A \cap M \Leftrightarrow X \subset A$. よって

$$\{A \cap M | \, A \in \mathfrak{A}, X \subset A \cap M\} = \{A \cap M | \, A \in \mathfrak{A}, X \subset A\}$$

以上により,$X^{a_M} = \bigcap \{A \cap M | \, A \in \mathfrak{A}, X \subset A\} = \left( \bigcap \{A | \, A \in \mathfrak{A}, X \subset A\} \right) \cap M = \bar{X} \cap M$.

## 1.12

前問で,$X \in \mathfrak{P}(M)$ の $M$ における開核を $X^{i'}$,$S$ における開核を $X^i$ とすれば,$X^{i'} \supset X^i$ であることを示せ. また, 任意の $X \in \mathfrak{P}(M)$ に対して $X^{i'} = X^i$ が成り立つためには,$M$ が $S$ の開集合であることが必要十分であることを示せ.

【解】
$X^i \cap M = X^i$ は位相空間 $M$ における開集合. また $X^i \subset X$ なので,$(X^i)^{i'} \subset X^{i'}$ であるが,$X^i$ は $M$ における開集合ゆえ,$(X^i)^{i'} = X^i$. したがって,$X^i \subset X^{i'}$.
$\Rightarrow$: このとき特に $M^{i'} = M^i$.$M$ は部分位相空間 $M$ における開集合ゆえ,$M^{i'} = M$ で,$M^i = M$. よって $M$ は $S$ の開集合.
$\Leftarrow$: このとき $X^{i'} \subset X^i$ であることを示す.$X^{i'}$ は $M$ の開集合なので,$X^{i'} = O \cap M$ を満たす

$S$ の開集合 $O$ が存在する. このとき $(X^{i'})^i = (O \cap M)^i = O^i \cap M^i = O \cap M = X^{i'}. X^{i'} \subset X$ なので $(X^{i'})^i \subset X^i$. したがって $X^{i'} \subset X^i$.

## 1.13

離散空間の任意の部分空間は離散空間, 密着空間の任意の部分空間は密着空間であることを示せ.

【解】
これはほとんど明らか.

## 1.14

$M$ を位相空間 $S$ の部分集合とする.$M$ のすべての点が $M$ の孤立点であるためには,$S$ の部分空間として $M$ が離散空間であることが必要十分であることを示せ.

【解】
$\Rightarrow$:$\boldsymbol{V}^*(x)$ を $x$ の $S$ における基本近傍系とする.$x$ が $M$ の孤立点ならば, ある $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在して $U \cap M = \{x\}$ となる.$U$ は $x$ の近傍なので $x \in U^i$($i$ は $S$ における開核作用子) で $U^i \cap M = \{x\}$ で $\{x\}$ は $M$ の開集合. よって $\{x\}$ は位相空間 $M$ の開集合ゆえ,$M$ は離散空間.
$\Leftarrow$:$M$ が離散空間ならば,$\{x\}$ は $M$ の開集合でゆえ $\{x\}^c = M - \{x\}$ は閉集合. よって任意の $x \in M$ について $x \notin M - \{x\} = \overline{M - \{x\}}$.

## 1.15

$\boldsymbol{R}$ の開区間 $(a, b)$ は (相対位相に関して)$\boldsymbol{R}$ と同相な位相空間であることを示せ

【解 1】
まず 2 つの任意の開区間 $(a, b), (c, d)$ $(a < b, c < d)$ が同相であることを示す. これは $(a, b)$ から $(c, d)$ への写像 $x \mapsto \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ が同相写像になる. したがって $(-1, 1) \approx \boldsymbol{R}$ を示せばよい. これは例えば $x \mapsto \tan\dfrac{\pi x}{2}((-1,1) \to \boldsymbol{R})$ や $x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}((-1,1) \to \boldsymbol{R})$ が同相写像である.
【解 2】
$(a, b)$ から $\boldsymbol{R}$ への同相写像 $f$ として $f(x) = \dfrac{x-c}{(x-a)(b-x)}(c = (a+b)/2)$ などがある.

## 1.16

$(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし, 各 $\lambda$ に対して $M_\lambda$ を $S_\lambda$ の部分集合とする. そのとき, 直積空間 $S=\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の部分集合 $M=\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ について

$$\bar{M}=\prod_{\lambda\in\Lambda}\bar{M}_\lambda$$

が成り立つことを示せ.

【解】

直積空間 $S$ の任意の元 $x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の基本近傍系として

$$\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i})=\left(\prod_{\lambda\in\Lambda-\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}} S_\lambda\right)\times V_{\lambda_1}\times\cdots\times V_{\lambda_n}$$

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n \text{は}\Lambda\text{の相異なる元}, V_{\lambda_i}\in \boldsymbol{V}_{S_{\lambda_i}}(x_{\lambda_i})\ (i=1,\cdots,n))$$

の形の集合の全体をとる. これを $\boldsymbol{V}^*(x)$ とする.

$$\forall V\in\boldsymbol{V}^*(x)(V\cap M\neq\varnothing)$$

を満たす任意の $x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in S$ について,

$$\forall\lambda\in\Lambda,\forall V_\lambda\in\boldsymbol{V}_{S_\lambda}(x_\lambda)(V_\lambda\cap M_\lambda\neq\varnothing)$$

となり,$x_\lambda\in\bar{M}_\lambda$. よって $\bar{M}\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}\bar{M}_\lambda$.

また

$$\forall V_\lambda\in\boldsymbol{V}_{S_\lambda}(x_\lambda)(V_\lambda\cap M_\lambda\neq\varnothing)$$

となる任意の $x_\lambda\in S_\lambda$ について,$x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in S$ とすれば

$$\forall V\in\boldsymbol{V}_S^*(x)(V\cap M\neq\varnothing)$$

よって $x\in\bar{M}$ なので,$\prod_{\lambda\in\Lambda}\bar{M}_\lambda\subset\bar{M}$. よって $\bar{M}=\prod_{\lambda\in\Lambda}\bar{M}_\lambda$.

## 1.17

前問において,$\Lambda$ が有限集合である場合には,

$$M^\circ = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda^\circ$$

が成立することを示せ.$\Lambda$ が無限集合の場合にはこのことは成り立つか.

【解】

$\Lambda = \{1, \cdots, n\}$ とする. 直積空間 $S$ の任意の元 $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の基本近傍系として

$$V_1 \times \cdots \times V_n \ (V_\lambda \in \boldsymbol{V}_{S_\lambda}(x_\lambda))$$

をとることができる.

任意の $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in M^\circ$ について,

$$V_1 \times \cdots \times V_n \subset M$$

となる $V_\lambda \in \boldsymbol{V}_{S_\lambda}(x_\lambda)$ が存在する. このとき任意の $\lambda \in \Lambda$ について $V_\lambda \subset M_\lambda$ ゆえ $x_\lambda \in M_\lambda^\circ$.

よって $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda^\circ$ なので,$M^\circ \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda^\circ$.

任意の $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda^\circ$ について,$x_\lambda \in M_\lambda^\circ$ なので

$$V_\lambda \subset M_\lambda$$

となる $V_\lambda \in \boldsymbol{V}_{S_\lambda}(x_\lambda)$ が存在する. よって

$$V_1 \times \cdots \times V_n \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

$V_1 \times \cdots \times V_n$ は $M$ の $x$ における基本近傍系の元なので $x \in M^\circ$. 以上により $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda^\circ \subset M^\circ$ ゆえ,$M^\circ = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda^\circ$.

$\lambda$ が無限集合の場合にはこの等式は成り立たない.

反例:$\boldsymbol{R}$ に通常の位相を入れ,$\prod_{n \in \boldsymbol{N}} \boldsymbol{R}$ に直積位相を定める.$n \in \boldsymbol{N}$ に対し $A_n = (0, 1)$ とおけば,$A_n^\circ = (0, 1)$ なので $\prod_{n \in \boldsymbol{N}} A_n^\circ = \prod_{n \in \boldsymbol{N}} (0, 1)$. $\prod_{n \in \boldsymbol{N}} \boldsymbol{R}$ における $x = (x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ の基本近傍系は

$$\left( \prod_{k \in \boldsymbol{N} - \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}} \boldsymbol{R} \right) \times V_{\lambda_1} \times \cdots \times V_{\lambda_n}$$

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n \text{は}\Lambda\text{の相異なる元}, V_{\lambda_i} \in \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{R}}(x_{\lambda_i}) \ (i = 1, \cdots, n))$$

もし $\left( \prod_{n \in \boldsymbol{N}} A_n \right)^\circ \neq \varnothing$ ならば, ある $x \in \prod_{n \in \boldsymbol{N}} \boldsymbol{R}$ が存在して, ある $n$ で $\boldsymbol{R} \subset A_n = (0, 1)$ となるが, これは明らかに矛盾. したがって $\left( \prod_{n \in \boldsymbol{N}} A_n \right)^\circ = \varnothing$ ゆえ,$\prod_{n \in \boldsymbol{N}} A_n^\circ \neq \left( \prod_{n \in \boldsymbol{N}} A_n \right)^\circ$.

## 1.18

位相空間 $S$ から直積空間 $S' = \prod_{\lambda \in \Lambda} S'_\lambda$ への写像 $f : S \to S'$ が連続であるためには, すべての $\lambda \in \Lambda$ に対し $f_\lambda = \mathrm{pr}_\lambda \circ f : S \to S'_\lambda$ が連続であることが必要十分であることを示せ.

【解】

$S$ の位相を $\mathfrak{O}$,$S'_\lambda$ の位相をそれぞれ $\mathfrak{O}'_\lambda$ とする.

$\Rightarrow$: 任意の $O'_\lambda \in \mathfrak{O}'_\lambda$ について,$\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(O'_\lambda)$ は $S'$ の開集合. よって $f$ の連続性から

$$f_\lambda^{-1}(O'_\lambda) = (\mathrm{pr}_\lambda \circ f)^{-1}(O'_\lambda) = f^{-1}(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(O'_\lambda)) \in \mathfrak{O}$$

よって $f_\lambda$ は連続.

$\Leftarrow$: 直積空間 $S'$ の基底として

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i}) \quad (O'_{\lambda_i} \in \mathfrak{O}'_{\lambda_i}, i = 1, \cdots, n)$$

の形の集合全体をとることができる. よって

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i})\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(\mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i})) = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{pr}_{\lambda_i} \circ f)^{-1}(O'_{\lambda_i}) = \bigcap_{i=1}^{n} f_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i})$$

$f_\lambda$ の連続性から $f_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i}) \in \mathfrak{O}$ ゆえ,$\bigcap_{i=1}^{n} f_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i}) \in \mathfrak{O}$.