1 松坂集合位相

1.1 x を位相空間 S の点,M を S の部分集合とするとき,$x \in \bar{M}$ であるためには,x を含む任意の開集合 O に対して $O \cap M \neq \varnothing$ となることは必要十分であることを示せ.

1.2 O を位相空間 S の 1 つの開集合とすれば,S の任意の部分集合 M に対して,$O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$ であることを示せ.(したがって特に $O \cap M = \varnothing$ ならば $O \cap \bar{M} = \varnothing$)

1.3 位相空間 S の任意の部分集合 M に対して $M^{aiai} = M^{ai}, M^{iaia} = M^{ia}$ が成り立つことを示せ.

1.4 S を空でない集合とするとき,$\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ の基底となるためには,$\mathfrak{B}$ が次の性質 (O*i) および (O*ii) をもつことが必要十分であることを証明せよ.

(O*i) S の任意の元 x に対して,$x \in W$ となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

(O*ii) $W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}, W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$ ならば,$W_1 \cap W_2$ に属する任意の点 x に対して,

$$x \in W, \qquad W \subset W_1 \cap W_2$$

となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

1.5 位相空間 S において,$\boldsymbol{V}^*(x)$ を x の 1 つの基本近傍系とし, また M を S の 1 つの部分集合とする. そのとき次のことを示せ.

(a) $x \in M^\circ \Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \subset M)$

(b) x が Mの外点 $\Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M = \varnothing)$

(c) $x \in \bar{M} \Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M \neq \varnothing)$

(d) $x \in \partial M \Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M \neq \varnothing$ かつ $U \cap M^c \neq \varnothing)$

(e) x が M の集積点 $\Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap (M - \{x\}) \neq \varnothing)$

(f) x が M の孤立点 $\Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M = \{x\})$

1.6 位相空間 S の各点 x に対してそれぞれ 1 つの基本近傍系 $\boldsymbol{V}^*(x)$ が与えられたとすれば,$(\boldsymbol{V}^*(x))_{x \in S}$ について次の $(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ が成り立つことを証明せよ.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i})$ すべての $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して $x \in U$.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii})$ $U_1 \in \boldsymbol{V}^*(x), U_2 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ とすれば,$U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となるような $U_3 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ 任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して, 次の条件を満たす $W \in \boldsymbol{V}^*(x)$ がある:W の任意の点 y に対して $U_y \subset U$ となるような $U_y \in \boldsymbol{V}^*(y)$ が存在する.

1.7 集合 $S(\neq \varnothing)$ の各点 x に対しそれぞれ $\mathfrak{P}(S)$ の空でない部分集合 $\boldsymbol{V}^*(x)$ が定められ,$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ が成り立っているとする. そのとき,S の各点 x に対し

$$\boldsymbol{V}(x) = \{V | \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \subset V)\}$$

と $\boldsymbol{V}(x)$ を定めれば,$\boldsymbol{V}(x)$ を x の近傍系とする位相 $\mathfrak{O}$ が一意的に導入されることを

示せ.(与えられた $\boldsymbol{V}^*(x)$ はこの位相空間における x の基本近傍系.)

1.8 集合 S において,($\boldsymbol{V}^*$i)-($\boldsymbol{V}^*$iii) を満たす 2 組の $(\boldsymbol{V}^*(x))_{x\in S}, (\boldsymbol{W}^*(x))_{x\in S}$ が与えられたとする. そのとき, 前問の意味でこれから定められる位相 $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ について,$\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ が成り立つためには, 次の条件 $(*)$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

$(*)$ 任意の $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して,$W \subset V$ となる $W \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在する.

1.9 位相空間 S から位相空間 S' への写像 f が S の点 x_0 で連続であるためには,$x_0 \in \bar{M}$ であるような S の任意の部分集合 M に対して $f(x_0) \in \overline{f(M)}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

1.10 M を位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分集合とするとき,$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底 (または準基底) ならば,

$$\mathfrak{B}_M = \{O \cap M \mid O \in \mathfrak{B}\}$$

は $\mathfrak{O}_M$ の基底 (または準基底) となることを示せ.

1.11 M を位相空間 S の部分空間とするとき,M の任意の部分集合 X の M における閉包は $\bar{X} \cap M$($\bar{X}$ は X の S における閉包) となることを示せ.

1.12 前問で,$X \in \mathfrak{P}(M)$ の M における開核を $X^{i'}$,S における開核を X^i とすれば,$X^{i'} \supset X^i$ であることを示せ. また, 任意の $X \in \mathfrak{P}(M)$ に対して $X^{i'} = X^i$ が成り立つためには,M が S の開集合であることが必要十分であることを示せ.

1.13 離散空間の任意の部分空間は離散空間, 密着空間の任意の部分空間は密着空間であることを示せ.

1.14 M を位相空間 S の部分集合とする.M のすべての点が M の孤立点であるためには,S の部分空間として M が離散空間であることが必要十分であることを示せ.

1.15 $\boldsymbol{R}$ の開区間 (a, b) は (相対位相に関して)$\boldsymbol{R}$ と同相な位相空間であることを示せ.

1.16 $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし, 各 λ に対して M_λ を S_λ の部分集合とする. そのとき, 直積空間 $S = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の部分集合 $M = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ について

$$\bar{M} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \bar{M}_\lambda$$

が成り立つことを示せ.

1.17 前問において,$\mathit{\Lambda}$ が有限集合である場合には,

$$M^{\circ} = \prod_{\lambda \in \mathit{\Lambda}} M_{\lambda}^{\circ}$$

が成立することを示せ.$\mathit{\Lambda}$ が無限集合の場合にはこのことは成り立つか.

1.18 位相空間 S から直積空間 $S' = \prod_{\lambda \in \mathit{\Lambda}} S'_{\lambda}$ への写像 $f : S \to S'$ が連続であるためには,すべての $\lambda \in \mathit{\Lambda}$ に対し $f_{\lambda} = \mathrm{pr}_{\lambda} \circ f : S \to S'_{\lambda}$ が連続であることが必要十分であることを示せ.

1.19 $(S_{\lambda})_{\lambda \in \mathit{\Lambda}}$ を位相空間の族,$\mathit{\Lambda}_1$ を $\mathit{\Lambda}$ の部分集合とし,$\mathit{\Lambda} - \mathit{\Lambda}_1$ に属する各 μ に対してそれぞれ S_{μ} の 1 つの元 x_{μ}^{0} を定めておく. そのとき, $\prod_{\lambda \in \mathit{\Lambda}_1} S_{\lambda}$ の各点 $x = (x_{\lambda})_{\lambda \in \mathit{\Lambda}_1}$ に $\prod_{\lambda \in \mathit{\Lambda}} S_{\lambda}$ の点 $x^{*} = (x_{\lambda}^{*})_{\lambda \in \mathit{\Lambda}}$(ただし $\lambda \in \mathit{\Lambda}_1$ に対しては $x_{\lambda}^{*} = x_{\lambda}, \mu \in \mathit{\Lambda} - \mathit{\Lambda}_1$ に対しては $x_{\mu}^{*} = x_{\mu}^{0}$) を対応させる写像は, $\prod_{\lambda \in \mathit{\Lambda}_1} S_{\lambda}$ から $\prod_{\lambda \in \mathit{\Lambda}} S_{\lambda}$ の部分空間 $\prod_{\lambda \in \mathit{\Lambda}_1} S_{\lambda} \times \prod_{\mu \in \mathit{\Lambda} - \mathit{\Lambda}_1} \{x_{\mu}^{0}\}$ への同相写像であることを示せ.

1.20 f を直積空間 $S = \prod_{\lambda \in \mathit{\Lambda}} S_{\lambda}$ から位相空間 S' へ連続写像とする. そのとき, 前問のようにして $\prod_{\lambda \in \mathit{\Lambda}_1} S_{\lambda}$ の各点 x に $\prod_{\lambda \in A} S_{\lambda}$ の点 x^{*} を対応させ,$f_1(x) = f(x^{*})$ とおけば, f_1 は $\prod_{\lambda \in A_1} S_{\lambda}$ から S' の連続写像であることを示せ. (約言すれば, “多変数の連続写像” は, 一部の変数を固定した場合, 残りの変数について連続である. 特に, “多変数の連続写像” は個々の各変数について連続である.” しかし, このことの逆は成立しない (次の問題参照).)

1.21 写像 $f : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を次のように定義する:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 / \left(x_1^2 + x_2^2\right) & ((x_1, x_2) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x_1, x_2) = (0, 0)). \end{cases}$$

は連続でないことを示せ.

1.1

x を位相空間 S の点,M を S の部分集合とするとき,$x \in \bar{M}$ であるためには,x を含む任意の開集合 O に対して $O \cap M \neq \varnothing$ となることは必要十分であることを示せ.

【解】
$\Rightarrow$: この命題の対偶, ある x を含む開集合 O が存在して $O \cap M = \varnothing$ ならば $x \notin \bar{M}$ が成り立つことを示す.
このような開集合 O について $M \subset O^c$ で O^c は x を含まない閉集合. よって $\bar{M} \subset O^c$ となり,$\bar{M}$ も x を含まない.
$\Leftarrow$: これも対偶,$x \notin \bar{M}$ ならば x を含むある開集合 O が存在して $O \cap M = \varnothing$ であることを示す.
このとき,$\bar{M}^c$ は x を含む開集合である. したがって $\bar{M}^c \cap M \subset M^c \cap M = \varnothing$ ゆえ $\bar{M}^c \cap M = \varnothing$ であり, これが示すべきことであった.

1.2

O を位相空間 S の 1 つの開集合とすれば,S の任意の部分集合 M に対して,$O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$ であることを示せ.(したがって特に $O \cap M = \varnothing$ ならば $O \cap \bar{M} = \varnothing$)

【解】
$x \in O \cap \bar{M}$ を任意にとり,O' を x を含む任意の開集合とする. このとき $x \in \bar{M}$ で $O \cap O'$ は x を含む開集合なので, 前問により $O \cap O' \cap M \neq \varnothing$. したがって $O' \cap O \cap M \neq \varnothing$ で, ふたたび前問により $x \in \overline{O \cap M}$. 以上により,$O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$.

1.3

位相空間 S の任意の部分集合 M に対して $M^{aiai} = M^{ai}$,$M^{iaia} = M^{ia}$ が成り立つことを示せ.

【解】
$M^{aiai} = M^{ai}$ を示す.
$M^{ai} \subset M^a$ であり,$M^{aia} \subset (M^a)^a = M^a$. よって $M^{aiai} \subset M^{ai}$. また,$M^{aia} \supset M^{ai}$.(これは $M^a \supset M$ の M を M^{ai} におきかえたもの) よって $M^{aiai} \supset M^{aii} = M^{ai}$. 以上から,$M^{aiai} = M^{ai}$.$M^{iaia} = M^{ia}$ もほとんど同様である.

1.4

S を空でない集合とするとき,$\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ の基底となるためには,$\mathfrak{B}$ が次の性質 (O*i) および (O*ii) をもつことが必要十分であることを証明せよ.

(O*i) S の任意の元 x に対して,$x \in W$ となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

(O*ii) $W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}, W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$ ならば,$W_1 \cap W_2$ に属する任意の点 x に対して,

$$x \in W, \qquad W \subset W_1 \cap W_2$$

となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

$\Leftarrow$ では $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda (W_\lambda \in \mathfrak{B})$ の集合全体が S の位相となることを示す.($\Lambda = \varnothing$ のとき $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda = \varnothing$ と既約されているものとする.)

【解】

$\Rightarrow$:$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ の基底ならば,(O*i) が成り立つことは明らか.

$W_1, W_2 \in \mathfrak{B}$ ならば, 特に $W_1, W_2 \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ ゆえ $W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$. よって $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$ ならば $x \in W_1 \cap W_2$ について,$x \in W, W \subset W_1 \cap W_2$ となる $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

$\Leftarrow$:$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda (W_\lambda \in \mathfrak{B})$ の形の集合全体を $\mathfrak{O}$ とする.

(Oi)$\varnothing \in \mathfrak{O}$ は明らか. また (O*i) により,$S \in \mathfrak{O}$ もいえる.

(Oiii) も $\mathfrak{O}$ の定め方から明らか. (Oii) まず,$W_1, W_2 \in \mathfrak{B}$ ならば $W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{O}$ である. 実際,$W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}$ について,$W_1 \cap W_2 = \varnothing$ ならばこれは $\mathfrak{O}$ の元.$W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$ のとき,(O*ii) を満たす $W \in \mathfrak{B}$ を W_x とすれば $W_1 \cap W_2 = \displaystyle\bigcup_{x\in W_1\cap W_2} W_x \in \mathfrak{O}$.

$O_1 \in \mathfrak{O}, O_2 \in \mathfrak{O}$ は $O_1 = \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda^{(1)}, O_2 = \bigcup_{\mu\in M} W_\mu^{(2)}$ と $\mathfrak{B}$ の元の合併として表せる. このとき

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (W_\lambda^{(1)} \cap W_\mu^{(2)})$$

$W_\lambda^{(1)} \cap W_\mu^{(2)} \in \mathfrak{O}$ なので (Oiii) により,$O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$. 以上により $\mathfrak{O}$ は S 上の位相となり,$\mathfrak{B}$ はその基底である.

1.5

位相空間 S において,$\boldsymbol{V}^*(x)$ を x の 1 つの基本近傍系とし, また M を S の 1 つの部分集合とする. そのとき次のことを示せ.

(a) $x \in M^\circ \Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \subset M)$

(b) x が M の外点 $\Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M = \varnothing)$

(c) $x \in \bar{M} \Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M \neq \varnothing)$

(d) $x \in \partial M \Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M \neq \varnothing$ かつ $U \cap M^c \neq \varnothing)$

(e) x が M の集積点 $\Leftrightarrow \forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap (M - \{x\}) \neq \varnothing)$

(f) x が M の孤立点 $\Leftrightarrow \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M = \{x\})$

【解】

(a) $\Rightarrow$:$x \in M^\circ$ ゆえ,M は x の近傍である. 基本近傍系の定義により,$x \in U^\circ$,$U \subset M$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する.

$\Leftarrow$: このとき特に $x \in U^\circ$ であり,$U^\circ \subset M^\circ$ なので $x \in M^\circ$.

(b) $\Rightarrow$:x は M^c の内点なので,(a) により, ある $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在して $U \subset M^c$. よって $U \cap M^c = \varnothing$.

$\Leftarrow$: このとき $U \subset M^c$ で,$x \in U^i$ かつ $U^i \subset M^{ci}$ なので $x \in M^{ci}$.

(c) $\Rightarrow$:1.1 により x を含む任意の開集合 O について $O \cap M \neq \varnothing$ となる. 任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ について $x \in U^i$ なので $U^i \cap M \neq \varnothing$. よって $U \cap M \neq \varnothing$.

$\Leftarrow$:x を含む任意の開集合 O について,O は x の近傍なので $U \subset O$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する. このとき, 今仮定していることから $U \cap M \neq \varnothing$ で $U \cap M \subset O \cap M$ なので $O \cap M \neq \varnothing$. よって $x \in \bar{M}$.

(d) $\Rightarrow$:$x \in \bar{M}$ により, 任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ において $U \cap M \neq \varnothing$. また,$x \notin M^\circ$ なので (a) の否定

$$\forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \not\subset M)$$

すなわち

$$\forall U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap M \neq \varnothing)$$

が成立. 以上により示された.

$\Leftarrow$:(a),(c) により $x \in \bar{M} - M^\circ = \partial M$ となることは明らか.

(e) $\Rightarrow$: このとき $x \in \overline{M - \{x\}}$ ゆえ,(c) により明らか.

$\Leftarrow$: これも (c) により明らか.

(f) $\Rightarrow$: まず $x \notin \overline{M - \{x\}}$ なので,(c) によって

$$\exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \cap (M - \{x\}) = \varnothing)$$

この U について $U \cap (M - \{x\}) = \varnothing$ であり,$x \in U \cap M$ なので $U \cap M = \{x\}$.

$\Leftarrow$: このとき $U \cap (M - \{x\}) = \varnothing$ なので (c) により

$$x \in M \text{ かつ } x \notin \overline{M - \{x\}}$$

よって x は M の孤立点.

1.6

位相空間 S の各点 x に対してそれぞれ 1 つの基本近傍系 $\boldsymbol{V}^*(x)$ が与えられたとすれば,$(\boldsymbol{V}^*(x))_{x\in S}$ について次の $(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ が成り立つことを証明せよ.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i})$ すべての $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して $x \in U$.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii})$ $U_1 \in \boldsymbol{V}^*(x), U_2 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ とすれば,$U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となるような $U_3 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ 任意の $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して, 次の条件を満たす $W \in \boldsymbol{V}^*(x)$ がある:W の任意の点 y に対して $U_y \subset U$ となるような $U_y \in \boldsymbol{V}^*(y)$ が存在する.

【解】

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i})$ は明らか.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii})$ も U_1, U_2 は x の近傍ゆえ $U_1 \cap U_2$ も x の近傍. よって, 基本近傍系の定義から $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となる $U_3 \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する.

$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$:$W = U^\circ$ とすれば, 任意の $y \in W$ について W は y の近傍なので, 基本近傍系の定義から $U_y \subset U$ となる $U_y \in \boldsymbol{V}^*(y)$ が存在する.

1.7

集合 $S(\neq \varnothing)$ の各点 x に対しそれぞれ $\mathfrak{P}(S)$ の空でない部分集合 $\boldsymbol{V}^*(x)$ が定められ,$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{i}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii}), (\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ が成り立っているとする. そのとき,S の各点 x に対し

$$\boldsymbol{V}(x) = \{V | \exists U \in \boldsymbol{V}^*(x)(U \subset V)\}$$

と $\boldsymbol{V}(x)$ を定めれば,$\boldsymbol{V}(x)$ を x の近傍系とする位相 $\mathfrak{O}$ が一意的に導入されることを示せ.(与えられた $\boldsymbol{V}^*(x)$ はこの位相空間における x の基本近傍系.)

【解】

まず $\boldsymbol{V}(x)$ が $(\boldsymbol{V}\mathrm{i})$-$(\boldsymbol{V}\mathrm{iv})$(p161) を満たすことを示す.

$(\boldsymbol{V}\mathrm{i})$ は明らか.

$(\boldsymbol{V}\mathrm{ii})$:$V \in \boldsymbol{V}(x)$ で $V \subset V'$ とする. このときある $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在して,$U \subset V$ ゆえ $U \subset V'$ なので $V' \in \boldsymbol{V}(x)$.

$(\boldsymbol{V}\mathrm{iii})$:$V_1 \in \boldsymbol{V}(x), V_2 \in \boldsymbol{V}(x)$ とすると $V_1' \subset V_1, V_2' \subset V_2$ となる $\boldsymbol{V}^*(x)$ の 2 元 V_1', V_2' が存在する. このとき $V_1' \cap V_2' \subset V_1 \cap V_2$ で $(\boldsymbol{V}^*\mathrm{ii})$ によって $V_3' \subset V_1' \cap V_2'$ となる $V_3' \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する. このとき $V_3' \subset V_1 \cap V_2$ なので $V_1 \cap V_2 \in \boldsymbol{V}(x)$.

$(\boldsymbol{V}\mathrm{iv})$: 任意の $V \in \boldsymbol{V}(x)$ について $U \subset V$ となる $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在する.$(\boldsymbol{V}^*\mathrm{iii})$ によって, ある $W \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在して

$$\forall y \in W, \exists U_y \in \boldsymbol{V}^*(y)(U_y \subset U)$$

となる. 特に $W \in \boldsymbol{V}(x)$ で W の任意の元 y に対して, 明らかに $y \in U_y \subset U \subset V$.

定理 11(p162) によって $\boldsymbol{V}(x)$ を x の近傍系とする位相 $\mathfrak{O}$ が一意的に導入される.

1.8

集合 S において,($\boldsymbol{V}^*$i)-($\boldsymbol{V}^*$iii) を満たす 2 組の $(\boldsymbol{V}^*(x))_{x\in S}, (\boldsymbol{W}^*(x))_{x\in S}$ が与えられたとする. そのとき, 前問の意味でこれから定められる位相 $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ について,$\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ が成り立つためには, 次の条件 $(*)$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

$(*)$ 任意の $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ に対して,$W \subset V$ となる $W \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在する.

【解】
i_1, i_2 をそれぞれ $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ における開核作用子とする.
$\Rightarrow$ $(*)$: 任意の $V \in \boldsymbol{V}^*(x)$ について,V^{i_1} は x を含む $(S, \mathfrak{O}_1)$ の開集合. よって $V^{i_1} \in \mathfrak{O}_2$ なので,V^{i_1} は $(S, \mathfrak{O}_2)$ の開集合. 1.5(a) により $W \subset V^{i_1}$ となる $W \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在し,$W \subset V$.
$\Leftarrow$ $(*)$:$O \in \mathfrak{O}_1$ について,$x \in O$ を任意にとる. このとき $O \in \boldsymbol{V}^*(x)$ ゆえ,$W \subset V$ となる $W \in \boldsymbol{W}^*(x)$ が存在する. よって V は $(S, \mathfrak{O}_2)$ における開集合でもあるので $O \in \mathfrak{O}_2$.

1.9

位相空間 S から位相空間 S' への写像 f が S の点 x_0 で連続であるためには,$x_0 \in \bar{M}$ であるような S の任意の部分集合 M に対して $f(x_0) \in \overline{f(M)}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

【解】
$\Rightarrow$:$f(x_0) = x'_0$ とし,$\boldsymbol{V}^*_{S'}(x'_0)$ を x'_0 の基本近傍系とする.
任意の $V' \in \boldsymbol{V}^*_{S'}(x'_0)$ について,f の連続性から $f^{-1}(V') \in \boldsymbol{V}_S(x_0)$. よって 1.5(c) から $f^{-1}(V') \cap M \neq \varnothing$. この両辺に f の像を取ると $f(f^{-1}(V') \cap M) \neq \varnothing$ で $f(f^{-1}(V')) \cap f(M) \neq \varnothing$. よって $V' \cap f(M) \neq \varnothing$ なので $x'_0 \in \overline{f(M)}$. したがって $f(x_0) \in \overline{f(M)}$.
$\Leftarrow$:$V' \in \boldsymbol{V}^*_{S'}(x'_0)$ とし,$f^{-1}(V')$ が x_0 の近傍でないとする. つまり $x_0 \notin (f^{-1}(V'))^\circ$ ゆえ $x_0 \in (f^{-1}(V'))^{ic} = (f^{-1}(V'))^{ca} = \overline{S - f^{-1}(V')} = \overline{f^{-1}(S' - V')}$. いま仮定していることにより,

$$f(x_0) \in \overline{f(f^{-1}(S' - V'))} \subset \overline{S' - V'}$$

よって $x'_0 \in \overline{S' - V'} = V'^{ca} = V'^{ic}$ となり, これは V' が x_0 の近傍であることに反する.

1.10

M を位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分集合とするとき,$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底 (または準基底) ならば,

$$\mathfrak{B}_M = \{O \cap M \,|\, O \in \mathfrak{B}\}$$

は $\mathfrak{O}_M$ の基底 (または準基底) となることを示せ.

【解】
$\mathfrak{B}$ が基底のとき:$\mathfrak{B}_M \subset \mathfrak{O}_M$ は明らか. 任意の x と $x \in O'$ となる $O' \in \mathfrak{O}_M$ について,$O' = O \cap M (O \in \mathfrak{O})$ と表せる. このときある $W \in \mathfrak{B}$ が存在して,$x \in W, W \subset O$ とな

る. このとき $x \in W \cap M, W \cap M \subset O \cap M$ なので,$\mathfrak{B}_M$ は $\mathfrak{O}_M$ の基底.
$\mathfrak{B}$ が準基底のとき:$\mathfrak{B}$ の有限個の元の共通部分 $\bigcap_{i \in I} W_i (\operatorname{card} I < \aleph_0, W_i \in \mathfrak{B})$ 全体の集合を $\mathfrak{M}'$,$\mathfrak{M}'$ の元の和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda (B_\lambda \in \mathfrak{M}')$ 全体の集合を $\mathfrak{M}$ とする. このとき $\mathfrak{M} = \mathfrak{O}$ である.
$\mathfrak{B}_M$ の有限個の元の共通部分全体の集合は

$$\bigcap_{i \in I} (W_i \cap M) = \left(\bigcap_{i \in I} W_i \right) \cap M \ (\operatorname{card} I < \aleph_0, W_i \in \mathfrak{B})$$

の形の集合全体, すなわち $\{W \cap M \mid W \in \mathfrak{M}'\}$ となる. これを $\mathfrak{M}'_M$ とする. さらに $\mathfrak{M}'_M$ の元の和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B'_\lambda (B'_\lambda \in \mathfrak{M}'_M)$ 全体を $\mathfrak{M}_M$ とすれば,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B'_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (W_\lambda \cap M) = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \right) \cap M \ (W_\lambda \in \mathfrak{M}')$$

ゆえ $\mathfrak{M}_M = \{O \cap M \mid O \in \mathfrak{O}\} = \mathfrak{O}_M$ となり,$\mathfrak{M}_M$ は $\mathfrak{O}_M$ の準基底となる.

1.11

M を位相空間 S の部分空間とするとき,M の任意の部分集合 X の M における閉包は $\bar{X} \cap M(\bar{X}$ は X の S における閉包) となることを示せ.

【解】
S の閉集合系を $\mathfrak{A}$ とする.M に S の相対位相を入れてできる位相空間 M の閉集合系を $\mathfrak{A}_M$ とすれば $\mathfrak{A}_M = \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}\}$. このとき X の M における閉包 X^{a_M} は

$$X^{a_M} = \bigcap \{A \in \mathfrak{A}_M \mid X \subset A\} = \bigcap \{A \cap M | \, A \in \mathfrak{A}, X \subset A \cap M\}$$

いま,$X \subset M$ なので $X \subset A \cap M \Leftrightarrow X \subset A$. よって

$$\{A \cap M | \, A \in \mathfrak{A}, X \subset A \cap M\} = \{A \cap M | \, A \in \mathfrak{A}, X \subset A\}$$

以上により,$X^{a_M} = \bigcap \{A \cap M | \, A \in \mathfrak{A}, X \subset A\} = \left(\bigcap \{A | \, A \in \mathfrak{A}, X \subset A\} \right) \cap M = \bar{X} \cap M$.

1.12

前問で,$X \in \mathfrak{P}(M)$ の M における開核を $X^{i'}$,S における開核を X^i とすれば,$X^{i'} \supset X^i$ であることを示せ. また, 任意の $X \in \mathfrak{P}(M)$ に対して $X^{i'} = X^i$ が成り立つためには,M が S の開集合であることが必要十分であることを示せ.

【解】
$X^i \cap M = X^i$ は位相空間 M における開集合. また $X^i \subset X$ なので,$(X^i)^{i'} \subset X^{i'}$ であるが,X^i は M における開集合ゆえ,$(X^i)^{i'} = X^i$. したがって,$X^i \subset X^{i'}$.
$\Rightarrow$: このとき特に $M^{i'} = M^i$.M は位相空間 M における開集合ゆえ,$M^{i'} = M^i$ で,$M^i = M$. よって M は S の開集合.
$\Leftarrow$: このとき $X^{i'} \subset X^i$ であることを示す.$X^{i'}$ は M の開集合なので,$X^{i'} = O \cap M$ を満たす

S の開集合 O が存在する. このとき $(X^{i'})^i = (O \cap M)^i = O^i \cap M^i = O \cap M = X^{i'}.X^{i'} \subset X$ なので $(X^{i'})^i \subset X^i$. したがって $X^{i'} \subset X^i$.

1.13

離散空間の任意の部分空間は離散空間, 密着空間の任意の部分空間は密着空間であることを示せ.

【解】
これはほとんど明らか.

1.14

M を位相空間 S の部分集合とする.M のすべての点が M の孤立点であるためには,S の部分空間として M が離散空間であることが必要十分であることを示せ.

【解】
$\Rightarrow$:$\boldsymbol{V}^*(x)$ を x の S における基本近傍系とする.x が M の孤立点ならば, ある $U \in \boldsymbol{V}^*(x)$ が存在して $U \cap M = \{x\}$ となる.U は x の近傍なので $x \in U^i$(i は S における開核作用子) で $U^i \cap M = \{x\}$ で $\{x\}$ は M の開集合. よって $\{x\}$ は位相空間 M の開集合ゆえ,M は離散空間.
$\Leftarrow$:M が離散空間ならば,$\{x\}$ は M の開集合でゆえ $\{x\}^c = M - \{x\}$ は閉集合. よって任意の $x \in M$ について $x \notin M - \{x\} = \overline{M - \{x\}}$.

1.15

$\boldsymbol{R}$ の開区間 (a,b) は (相対位相に関して)$\boldsymbol{R}$ と同相な位相空間であることを示せ

【解 1】
まず 2 つの任意の開区間 $(a,b),(c,d)$ $(a < b, c < d)$ が同相であることを示す. これは (a,b) から (c,d) への写像 $x \mapsto \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ が同相写像になる. したがって $(-1,1) \approx \boldsymbol{R}$ を示せばよい. これは例えば $x \mapsto \tan\dfrac{\pi x}{2}((-1,1) \to \boldsymbol{R})$ や $x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}((-1,1) \to \boldsymbol{R})$ が同相写像である.
【解 2】
(a,b) から $\boldsymbol{R}$ への同相写像 f として $f(x) = \dfrac{x-c}{(x-a)(b-x)}(c = (a+b)/2)$ などがある.

1.16

$(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし, 各 λ に対して M_λ を S_λ の部分集合とする. そのとき, 直積空間 $S=\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の部分集合 $M=\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ について

$$\bar{M}=\prod_{\lambda\in\Lambda}\bar{M}_\lambda$$

が成り立つことを示せ.

【解】
直積空間 S の任意の元 $x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の基本近傍系として

$$\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i})=\left(\prod_{\lambda\in\Lambda-\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}} S_\lambda\right)\times V_{\lambda_1}\times\cdots\times V_{\lambda_n}$$

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n \text{は}\Lambda\text{の相異なる元}, V_{\lambda_i}\in \boldsymbol{V}_{S_{\lambda_i}}(x_{\lambda_i})\ (i=1,\cdots,n))$$

の形の集合の全体をとる. これを $\boldsymbol{V}^*(x)$ とする.

$$\forall V\in\boldsymbol{V}^*(x)(V\cap M\neq\varnothing)$$

を満たす任意の $x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in S$ について,

$$\forall\lambda\in\Lambda,\forall V_\lambda\in\boldsymbol{V}_{S_\lambda}(x_\lambda)(V_\lambda\cap M_\lambda\neq\varnothing)$$

となり,$x_\lambda\in\bar{M}_\lambda$. よって $\bar{M}\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}\bar{M}_\lambda$.
また

$$\forall V_\lambda\in\boldsymbol{V}_{S_\lambda}(x_\lambda)(V_\lambda\cap M_\lambda\neq\varnothing)$$

となる任意の $x_\lambda\in S_\lambda$ について,$x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in S$ とすれば

$$\forall V\in\boldsymbol{V}_S^*(x)(V\cap M\neq\varnothing)$$

よって $x\in\bar{M}$ なので,$\prod_{\lambda\in\Lambda}\bar{M}_\lambda\subset\bar{M}$.

1.17

前問において,Λ が有限集合である場合には,

$$M^\circ = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\circ$$

が成立することを示せ.Λ が無限集合の場合にはこのことは成り立つか.

【解】
$\Lambda = \{1, \cdots, n\}$ とする. 直積空間 S の任意の元 $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の基本近傍系として

$$V_1 \times \cdots \times V_n \ (V_\lambda \in \boldsymbol{V}_{S_\lambda}(x_\lambda))$$

をとることができる.
任意の $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in M^\circ$ について,

$$V_1 \times \cdots \times V_n \subset M$$

となる $V_\lambda \in \boldsymbol{V}_{S_\lambda}(x_\lambda)$ が存在する. このとき任意の $\lambda \in \Lambda$ について $V_\lambda \subset M_\lambda$ ゆえ $x_\lambda \in M_\lambda^\circ$.
よって $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\circ$ なので,$M^\circ \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\circ$.
任意の $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\circ$ について,$x_\lambda \in M_\lambda^\circ$ なので

$$V_\lambda \subset M_\lambda$$

となる $V_\lambda \in \boldsymbol{V}_{S_\lambda}(x_\lambda)$ が存在する. よって

$$V_1 \times \cdots \times V_n \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$$

$V_1 \times \cdots \times V_n$ は M の x における基本近傍系の元なので $x \in M^\circ$. 以上により $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\circ \subset M^\circ$
ゆえ,$M^\circ = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\circ$.
λ が無限集合の場合にはこの等式は成り立たない.
反例:$\boldsymbol{R}$ に通常のを入れ,$\prod_{n\in\boldsymbol{N}} \boldsymbol{R}$ に直積位相を定める.$n \in \boldsymbol{N}$ に対し $A_n = (0,1)$ とおけば,$A_n^\circ = (0,1)$ なので $\prod_{n\in\boldsymbol{N}} A_n^\circ = \prod_{n\in\boldsymbol{N}} (0,1)$. $\prod_{n\in\boldsymbol{N}} \boldsymbol{R}$ における $x = (x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の基本近傍系は

$$\left(\prod_{k\in\boldsymbol{N}-\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}} \boldsymbol{R}\right) \times V_{\lambda_1} \times \cdots \times V_{\lambda_n}$$

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n \text{は}\Lambda\text{の相異なる元}, V_{\lambda_i} \in \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{R}}(x_{\lambda_i}) \ (i = 1, \cdots, n))$$

もし $\left(\prod_{n\in\boldsymbol{N}} A_n\right)^\circ \neq \varnothing$ ならば, ある $x \in \prod_{n\in\boldsymbol{N}} \boldsymbol{R}$ が存在して, ある n で $\boldsymbol{R} \subset A_n = (0,1)$ となるが, これは明らかに矛盾.