

# 1 松坂集合位相

1.1  $x$  を位相空間  $S$  の点,  $M$  を  $S$  の部分集合とするとき,  $x \in \bar{M}$  であるためには,  $x$  を含む任意の開集合  $O$  に対して  $O \cap M \neq \emptyset$  となることは必要十分であることを示せ.

1.2  $O$  を位相空間  $S$  の 1 つの開集合とすれば,  $S$  の任意の部分集合  $M$  に対して,  $O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$  であることを示せ.(したがって特に  $O \cap M = \emptyset$  ならば  $O \cap \bar{M} = \emptyset$ )

1.3 位相空間  $S$  の任意の部分集合  $M$  に対して  $M^{aia} = M^{ai}, M^{iaa} = M^{ia}$  が成り立つことを示せ.

1.4  $S$  を空でない集合とするとき,  $\mathfrak{P}(S)$  の部分集合  $\mathfrak{B}$  が  $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$  の基底となるためには,  $\mathfrak{B}$  が次の性質 (O\*i) および (O\*ii) をもつことが必要十分であることを証明せよ.

(O\*i)  $S$  の任意の元  $x$  に対して,  $x \in W$  となるような  $W \in \mathfrak{B}$  が存在する.

(O\*ii)  $W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}, W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$  ならば,  $W_1 \cap W_2$  に属する任意の点  $x$  に対して,

$$x \in W, \quad W \subset W_1 \cap W_2$$

となるような  $W \in \mathfrak{B}$  が存在する.

1.5 位相空間  $S$  において,  $V^*(x)$  を  $x$  の 1 つの基本近傍系とし, また  $M$  を  $S$  の 1 つの部分集合とする. そのとき次のことを示せ.

- (a)  $x \in M^\circ \Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \subset M)$
- (b)  $x$  が  $M$  の外点  $\Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \cap M = \emptyset)$
- (c)  $x \in \bar{M} \Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap M \neq \emptyset)$
- (d)  $x \in \partial M \Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap M \neq \emptyset \text{ かつ } U \cap M^c \neq \emptyset)$
- (e)  $x$  が  $M$  の集積点  $\Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap (M - \{x\}) \neq \emptyset)$
- (f)  $x$  が  $M$  の孤立点  $\Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \cap M = \{x\})$

1.6 位相空間  $S$  の各点  $x$  に対してそれぞれ 1 つの基本近傍系  $V^*(x)$  が与えられたとすれば,  $(V^*(x))_{x \in S}$  について次の (V\*i), (V\*ii), (V\*iii) が成り立つことを証明せよ.

(V\*i) すべての  $U \in V^*(x)$  に対して  $x \in U$ .

(V\*ii)  $U_1 \in V^*(x), U_2 \in V^*(x)$  とすれば,  $U_3 \subset U_1 \cap U_2$  となるような  $U_3 \in V^*(x)$  が存在する.

(V\*iii) 任意の  $U \in V^*(x)$  に対して, 次の条件を満たす  $W \in V^*(x)$  がある:  $W$  の任意の点  $y$  に対して  $U_y \subset U$  となるような  $U_y \in V^*(y)$  が存在する.

1.7 集合  $S (\neq \emptyset)$  の各点  $x$  に対しそれぞれ  $\mathfrak{P}(S)$  の空でない部分集合  $V^*(x)$  が定められ, (V\*i), (V\*ii), (V\*iii) が成り立っているとする. そのとき,  $S$  の各点  $x$  に対し

$$V(x) = \{V \mid \exists U \in V^*(x)(U \subset V)\}$$

と  $V(x)$  を定めれば,  $V(x)$  を  $x$  の近傍系とする位相  $\mathfrak{D}$  が一意的に導入されることを

示せ.(与えられた  $\mathbf{V}^*(x)$  はこの位相空間における  $x$  の基本近傍系.)

- 1.8 集合  $S$  において,  $(\mathbf{V}^*i)$ -( $\mathbf{V}^*iii$ ) を満たす 2 組の  $(\mathbf{V}^*(x))_{x \in S}, (\mathbf{W}^*(x))_{x \in S}$  が与えられたとする. そのとき, 前問の意味でこれから定められる位相  $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$  について,  $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$  が成り立つためには, 次の条件  $(*)$  が成り立つことが必要十分であることを示せ.

$(*)$  任意の  $V \in \mathbf{V}^*(x)$  に対して,  $W \subset V$  となる  $W \in \mathbf{W}^*(x)$  が存在する.

- 1.9 位相空間  $S$  から位相空間  $S'$  への写像  $f$  が  $S$  の点  $x_0$  で連続であるためには,  $x_0 \in \bar{M}$  であるような  $S$  の任意の部分集合  $M$  に対して  $f(x_0) \in \overline{f(M)}$  が成り立つことが必要十分であることを示せ.

- 1.10  $M$  を位相空間  $(S, \mathfrak{D})$  の部分集合とすると,  $\mathfrak{B}$  が  $\mathfrak{D}$  の基底 (または準基底) ならば,

$$\mathfrak{B}_M = \{O \cap M \mid O \in \mathfrak{B}\}$$

は  $\mathfrak{D}_M$  の基底 (または準基底) となることを示せ.

- 1.11  $M$  を位相空間  $S$  の部分空間とすると,  $M$  の任意の部分集合  $X$  の  $M$  における閉包は  $\bar{X} \cap M$  ( $\bar{X}$  は  $X$  の  $S$  における閉包) となることを示せ.

- 1.12 前問で,  $X \in \mathfrak{P}(M)$  の  $M$  における開核を  $X^{i'}$ ,  $S$  における開核を  $X^i$  とすれば,  $X^{i'} \supset X^i$  であることを示せ. また, 任意の  $X \in \mathfrak{P}(M)$  に対して  $X^{i'} = X^i$  が成り立つためには,  $M$  が  $S$  の開集合であることが必要十分であることを示せ.

- 1.13 離散空間の任意の部分空間は離散空間, 密着空間の任意の部分空間は密着空間であることを示せ.

- 1.14  $M$  を位相空間  $S$  の部分集合とする.  $M$  のすべての点が  $M$  の孤立点であるためには,  $S$  の部分空間として  $M$  が離散空間であることが必要十分であることを示せ.

- 1.15  $\mathbf{R}$  の开区間  $(a, b)$  は (相対位相に関して)  $\mathbf{R}$  と同相な位相空間であることを示せ.

- 1.16  $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$  を位相空間の族とし, 各  $\lambda$  に対して  $M_\lambda$  を  $S_\lambda$  の部分集合とする. そのとき, 直積空間  $S = \prod_{\lambda \in A} S_\lambda$  の部分集合  $M = \prod_{\lambda \in A} M_\lambda$  について

$$\bar{M} = \prod_{\lambda \in A} \bar{M}_\lambda$$

が成り立つことを示せ.

1.17 前問において,  $A$  が有限集合である場合には,

$$M^\circ = \prod_{\lambda \in A} M_\lambda^\circ$$

が成立することを示せ.  $A$  が無限集合の場合にはこのことは成り立つか.

1.18 位相空間  $S$  から直積空間  $S' = \prod_{\lambda \in A} S'_\lambda$  への写像  $f: S \rightarrow S'$  が連続であるためには, すべての  $\lambda \in A$  に対し  $f_\lambda = \text{pr}_\lambda \circ f: S \rightarrow S'_\lambda$  が連続であることが必要十分であることを示せ.

1.19  $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$  を位相空間の族,  $A_1$  を  $A$  の部分集合とし,  $A - A_1$  に属する各  $\mu$  に対してそれぞれ  $S_\mu$  の 1 つの元  $x_\mu^0$  を定めておく. そのとき,  $\prod_{\lambda \in A_1} S_\lambda$  の各点  $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A_1}$  に  $\prod_{\lambda \in A} S_\lambda$  の点  $x^* = (x_\lambda^*)_{\lambda \in A}$  (ただし  $\lambda \in A_1$  に対しては  $x_\lambda^* = x_\lambda$ ,  $\mu \in A - A_1$  に対しては  $x_\mu^* = x_\mu^0$ ) を対応させる写像は,  $\prod_{\lambda \in A_1} S_\lambda$  から  $\prod_{\lambda \in A} S_\lambda$  の部分空間  $\prod_{\lambda \in A_1} S_\lambda \times \prod_{\mu \in A - A_1} \{x_\mu^0\}$  への同相写像であることを示せ.

1.20  $f$  を直積空間  $S = \prod_{\lambda \in A} S_\lambda$  から位相空間  $S'$  へ連続写像とする. そのとき, 前問のようにして  $\prod_{\lambda \in A_1} S_\lambda$  の各点  $x$  に  $\prod_{\lambda \in A} S_\lambda$  の点  $x^*$  を対応させ,  $f_1(x) = f(x^*)$  とおけば,  $f_1$  は  $\prod_{\lambda \in A_1} S_\lambda$  から  $S'$  の連続写像であることを示せ. (約言すれば, “多変数の連続写像” は, 一部の変数を固定した場合, 残りの変数について連続である. 特に, “多変数の連続写像” は個々の各変数について連続である.” しかし, このことの逆は成立しない (次の問題参照).)

1.21 写像  $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を次のように定義する:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 / (x_1^2 + x_2^2) & ((x_1, x_2) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x_1, x_2) = (0, 0)). \end{cases}$$

は連続でないことを示せ.

## 1.1

$x$  を位相空間  $S$  の点,  $M$  を  $S$  の部分集合とすると,  $x \in \bar{M}$  であるためには,  $x$  を含む任意の開集合  $O$  に対して  $O \cap M \neq \emptyset$  となることは必要十分であることを示せ.

【解】

$\Rightarrow$ : この命題の対偶, ある  $x$  を含む開集合  $O$  が存在して  $O \cap M = \emptyset$  ならば  $x \notin \bar{M}$  が成り立つことを示す.

このような開集合  $O$  について  $M \subset O^c$  で  $O^c$  は  $x$  を含まない閉集合. よって  $\bar{M} \subset O^c$  となり,  $\bar{M}$  も  $x$  を含まない.

$\Leftarrow$ : これも対偶,  $x \notin \bar{M}$  ならば  $x$  を含むある開集合  $O$  が存在して  $O \cap M = \emptyset$  であることを示す.

このとき,  $\bar{M}^c$  は  $x$  を含む開集合である. したがって  $\bar{M}^c \cap M \subset M^c \cap M = \emptyset$  ゆえ  $\bar{M}^c \cap M = \emptyset$  であり, これが示すべきことであった.

## 1.2

$O$  を位相空間  $S$  の 1 つの開集合とすれば,  $S$  の任意の部分集合  $M$  に対して,  $O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$  であることを示せ. (したがって特に  $O \cap M = \emptyset$  ならば  $O \cap \bar{M} = \emptyset$ )

【解】

$x \in O \cap \bar{M}$  を任意にとり,  $O'$  を  $x$  を含む任意の開集合とする. このとき  $x \in \bar{M}$  で  $O \cap O'$  は  $x$  を含む開集合なので, 前問により  $O \cap O' \cap M \neq \emptyset$ . したがって  $O' \cap O \cap M \neq \emptyset$  で, ふたたび前問により  $x \in \overline{O \cap M}$ . 以上により,  $O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$ .

## 1.3

位相空間  $S$  の任意の部分集合  $M$  に対して  $M^{aiai} = M^{ai}$ ,  $M^{iaia} = M^{ia}$  が成り立つことを示せ.

【解】

$M^{aiai} = M^{ai}$  を示す.

$M^{ai} \subset M^a$  であり,  $M^{aia} \subset (M^a)^a = M^a$ . よって  $M^{aiai} \subset M^{ai}$ . また,  $M^{aia} \supset M^{ai}$ . (これは  $M^a \supset M$  の  $M$  を  $M^{ai}$  におきかえたもの) よって  $M^{aiai} \supset M^{ai} = M^{ai}$ . 以上から,  $M^{aiai} = M^{ai}$ .  $M^{iaia} = M^{ia}$  もほとんど同様である.

$S$  を空でない集合とするとき,  $\mathfrak{B}(S)$  の部分集合  $\mathfrak{B}$  が  $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$  の基底となるためには,  $\mathfrak{B}$  が次の性質 (O\*i) および (O\*ii) をもつことが必要十分であることを証明せよ.  
(O\*i)  $S$  の任意の元  $x$  に対して,  $x \in W$  となるような  $W \in \mathfrak{B}$  が存在する.

(O\*ii)  $W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}, W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$  ならば,  $W_1 \cap W_2$  に属する任意の点  $x$  に対して,

$$x \in W, \quad W \subset W_1 \cap W_2$$

となるような  $W \in \mathfrak{B}$  が存在する.

$\Leftarrow$  では  $\bigcup_{\lambda \in A} W_\lambda (W_\lambda \in \mathfrak{B})$  の集合全体が  $S$  の位相となることを示す. ( $A = \emptyset$  のとき

$\bigcup_{\lambda \in A} W_\lambda = \emptyset$  と既約されているものとする.)

$\lambda \in A$

【解】

$\Rightarrow$ :  $\mathfrak{B}$  が  $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$  の基底ならば, (O\*i) が成り立つことは明らか.

$W_1, W_2 \in \mathfrak{B}$  ならば, 特に  $W_1, W_2 \in \mathfrak{D}(\mathfrak{B})$  ゆえ  $W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ . よって  $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$  ならば  $x \in W_1 \cap W_2$  について,  $x \in W, W \subset W_1 \cap W_2$  となる  $W \in \mathfrak{B}$  が存在する.

$\Leftarrow$ :  $\bigcup_{\lambda \in A} W_\lambda (W_\lambda \in \mathfrak{B})$  の形の集合全体を  $\mathfrak{D}$  とする.

(O*i*)  $\emptyset \in \mathfrak{D}$  は明らか. また (O\*i) により,  $S \in \mathfrak{D}$  もいえる.

(Oiii) も  $\mathfrak{D}$  の定め方から明らか. (Oii) まず,  $W_1, W_2 \in \mathfrak{B}$  ならば  $W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{D}$  である. 実際,  $W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}$  について,  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$  ならばこれは  $\mathfrak{D}$  の元.  $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$  のとき, (O\*ii) を満たす  $W \in \mathfrak{B}$  を  $W_x$  とすれば  $W_1 \cap W_2 = \bigcup_{x \in W_1 \cap W_2} W_x \in \mathfrak{D}$ .

$O_1 \in \mathfrak{D}, O_2 \in \mathfrak{D}$  は  $O_1 = \bigcup_{\lambda \in A} W_\lambda^{(1)}, O_2 = \bigcup_{\mu \in M} W_\mu^{(2)}$  と  $\mathfrak{B}$  の元の合併として表せる. この

とき

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in A \times M} (W_\lambda^{(1)} \cap W_\mu^{(2)})$$

$W_\lambda^{(1)} \cap W_\mu^{(2)} \in \mathfrak{D}$  なので (Oiii) により,  $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{D}$ . 以上により  $\mathfrak{D}$  は  $S$  上の位相となり,  $\mathfrak{B}$  はその基底である.

位相空間  $S$  において,  $V^*(x)$  を  $x$  の 1 つの基本近傍系とし, また  $M$  を  $S$  の 1 つの部分集合とする. そのとき次のことを示せ.

- (a)  $x \in M^\circ \Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \subset M)$
- (b)  $x$  が  $M$  の外点  $\Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \cap M = \emptyset)$
- (c)  $x \in \bar{M} \Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap M \neq \emptyset)$
- (d)  $x \in \partial M \Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap M \neq \emptyset \text{ かつ } U \cap M^c \neq \emptyset)$
- (e)  $x$  が  $M$  の集積点  $\Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap (M - \{x\}) \neq \emptyset)$
- (f)  $x$  が  $M$  の孤立点  $\Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \cap M = \{x\})$

【解】

(a)  $\Rightarrow: x \in M^\circ$  ゆえ,  $M$  は  $x$  の近傍である. 基本近傍系の定義により,  $x \in U^\circ, U \subset M$  となる  $U \in V^*(x)$  が存在する.

$\Leftarrow:$  このとき特に  $x \in U^\circ$  であり,  $U^\circ \subset M^\circ$  なので  $x \in M^\circ$ .

(b)  $\Rightarrow: x$  は  $M^c$  の内点なので, (a) により, ある  $U \in V^*(x)$  が存在して  $U \subset M^c$ . よって  $U \cap M = \emptyset$ .

$\Leftarrow:$  このとき  $U \subset M^c$  で,  $x \in U^i$  かつ  $U^i \subset M^{ci}$  なので  $x \in M^{ci}$ .

(c)  $\Rightarrow: 1.1$  により  $x$  を含む任意の開集合  $O$  について  $O \cap M \neq \emptyset$  となる. 任意の  $U \in V^*(x)$  について  $x \in U^i$  なので  $U^i \cap M \neq \emptyset$ . よって  $U \cap M \neq \emptyset$ .

$\Leftarrow: x$  を含む任意の開集合  $O$  について,  $O$  は  $x$  の近傍なので  $U \subset O$  となる  $U \in V^*(x)$  が存在する. このとき, 今仮定していることから  $U \cap M \neq \emptyset$  で  $U \cap M \subset O \cap M$  なので  $O \cap M \neq \emptyset$ . よって  $x \in \bar{M}$ .

(d)  $\Rightarrow: x \in \bar{M}$  により, 任意の  $U \in V^*(x)$  において  $U \cap M \neq \emptyset$ . また,  $x \notin M^\circ$  なので (a) の否定

$$\forall U \in V^*(x)(U \not\subset M)$$

すなわち

$$\forall U \in V^*(x)(U \cap M \neq \emptyset)$$

が成立. 以上により示された.

$\Leftarrow:$  (a), (c) により  $x \in \bar{M} - M^\circ = \partial M$  となることは明らか.

(e)  $\Rightarrow:$  このとき  $x \in \overline{M - \{x\}}$  ゆえ, (c) により明らか.

$\Leftarrow:$  これも (c) により明らか.

(f)  $\Rightarrow:$  まず  $x \notin \overline{M - \{x\}}$  なので, (c) によって

$$\exists U \in V^*(x)(U \cap (M - \{x\}) = \emptyset)$$

この  $U$  について  $U \cap (M - \{x\}) = \emptyset$  であり,  $x \in U \cap M$  なので  $U \cap M = \{x\}$ .

$\Leftarrow:$  このとき  $U \cap (M - \{x\}) = \emptyset$  なので (c) により

$$x \in M \text{ かつ } x \notin \overline{M - \{x\}}$$

よって  $x$  は  $M$  の孤立点.

位相空間  $S$  の各点  $x$  に対してそれぞれ 1 つの基本近傍系  $V^*(x)$  が与えられたとすれば、 $(V^*(x))_{x \in S}$  について次の (V\*i), (V\*ii), (V\*iii) が成り立つことを証明せよ。

(V\*i) すべての  $U \in V^*(x)$  に対して  $x \in U$ .

(V\*ii)  $U_1 \in V^*(x), U_2 \in V^*(x)$  とすれば、 $U_3 \subset U_1 \cap U_2$  となるような  $U_3 \in V^*(x)$  が存在する。

(V\*iii) 任意の  $U \in V^*(x)$  に対して、次の条件を満たす  $W \in V^*(x)$  がある:  $W$  の任意の点  $y$  に対して  $U_y \subset U$  となるような  $U_y \in V^*(y)$  が存在する。

【解】

(V\*i) は明らか。

(V\*ii) も  $U_1, U_2$  は  $x$  の近傍ゆえ  $U_1 \cap U_2$  も  $x$  の近傍。よって、基本近傍系の定義から  $U_3 \subset U_1 \cap U_2$  となる  $U_3 \in V^*(x)$  が存在する。

(V\*iii):  $W = U^\circ$  とすれば、任意の  $y \in W$  について  $W$  は  $y$  の近傍なので、基本近傍系の定義から  $U_y \subset U$  となる  $U_y \in V^*(y)$  が存在する。

集合  $S(\neq \emptyset)$  の各点  $x$  に対しそれぞれ  $\mathfrak{P}(S)$  の空でない部分集合  $V^*(x)$  が定められ、(V\*i), (V\*ii), (V\*iii) が成り立っているとす。そのとき、 $S$  の各点  $x$  に対し

$$V(x) = \{V \mid \exists U \in V^*(x)(U \subset V)\}$$

と  $V(x)$  を定めれば、 $V(x)$  を  $x$  の近傍系とする位相  $\mathfrak{D}$  が一意的に導入されることを示せ。(与えられた  $V^*(x)$  はこの位相空間における  $x$  の基本近傍系。)

【解】

まず  $V(x)$  が (Vi)-(Viv)(p161) を満たすことを示す。

(Vi) は明らか。

(Vii):  $V \in V(x)$  で  $V \subset V'$  とする。このときある  $U \in V^*(x)$  が存在して、 $U \subset V$  ゆえ  $U \subset V'$  なので  $V' \in V(x)$ 。

(Viii):  $V_1 \in V(x), V_2 \in V(x)$  とすると  $V'_1 \subset V_1, V'_2 \subset V_2$  となる  $V^*(x)$  の 2 元  $V'_1, V'_2$  が存在する。このとき  $V'_1 \cap V'_2 \subset V_1 \cap V_2$  で (V\*ii) によって  $V'_3 \subset V'_1 \cap V'_2$  となる  $V'_3 \in V^*(x)$  が存在する。このとき  $V'_3 \subset V_1 \cap V_2$  なので  $V_1 \cap V_2 \in V(x)$ 。

(Viv): 任意の  $V \in V(x)$  について  $U \subset V$  となる  $U \in V^*(x)$  が存在する。(V\*iii) によって、ある  $W \in V^*(x)$  が存在して

$$\forall y \in W, \exists U_y \in V^*(y)(U_y \subset U)$$

となる。特に  $W \in V(x)$  で  $W$  の任意の元  $y$  に対して、明らかに  $y \in U_y \subset U \subset V$ 。

定理 11(p162) によって  $V(x)$  を  $x$  の近傍系とする位相  $\mathfrak{D}$  が一意的に導入される。

## 1.8

集合  $S$  において,  $(V^*i)-(V^*iii)$  を満たす 2 組の  $(V^*(x))_{x \in S}, (W^*(x))_{x \in S}$  が与えられたとする. そのとき, 前問の意味でこれから定められる位相  $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$  について,  $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$  が成り立つためには, 次の条件  $(*)$  が成り立つことが必要十分であることを示せ.

$(*)$  任意の  $V \in V^*(x)$  に対して,  $W \subset V$  となる  $W \in W^*(x)$  が存在する.

【解】

$i_1, i_2$  をそれぞれ  $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$  における開核作用子とする.

$\Rightarrow (*)$ : 任意の  $V \in V^*(x)$  について,  $V^{i_1}$  は  $x$  を含む  $(S, \mathfrak{D}_1)$  の開集合. よって  $V^{i_1} \in \mathfrak{D}_2$  なので,  $V^{i_1}$  は  $(S, \mathfrak{D}_2)$  の開集合. 1.5(a) により  $W \subset V^{i_1}$  となる  $W \in W^*(x)$  が存在し,  $W \subset V$ .

$\Leftarrow (*)$ :  $O \in \mathfrak{D}_1$  について,  $x \in O$  を任意にとる. このとき  $O \in V^*(x)$  ゆえ,  $W \subset V$  となる  $W \in W^*(x)$  が存在する. よって  $V$  は  $(S, \mathfrak{D}_2)$  における開集合でもあるので  $O \in \mathfrak{D}_2$ .

## 1.9

位相空間  $S$  から位相空間  $S'$  への写像  $f$  が  $S$  の点  $x_0$  で連続であるためには,  $x_0 \in \bar{M}$  であるような  $S$  の任意の部分集合  $M$  に対して  $f(x_0) \in \overline{f(M)}$  が成り立つことが必要十分であることを示せ.

【解】

$\Rightarrow$ :  $f(x_0) = x'_0$  とし,  $V_{S'}^*(x'_0)$  を  $x'_0$  の基本近傍系とする.

任意の  $V' \in V_{S'}^*(x'_0)$  について,  $f$  の連続性から  $f^{-1}(V') \in V_S(x_0)$ . よって 1.5(c) から  $f^{-1}(V') \cap M \neq \emptyset$ . この両辺に  $f$  の像を取ると  $f(f^{-1}(V') \cap M) \neq \emptyset$  で  $f(f^{-1}(V')) \cap f(M) \neq \emptyset$ . よって  $V' \cap f(M) \neq \emptyset$  なので  $x'_0 \in \overline{f(M)}$ . したがって  $f(x_0) \in \overline{f(M)}$ .

$\Leftarrow$ :  $V' \in V_{S'}^*(x'_0)$  とし,  $f^{-1}(V')$  が  $x_0$  の近傍でないとする. つまり  $x_0 \notin (f^{-1}(V'))^\circ$  ゆえ  $x_0 \in (f^{-1}(V'))^{ic} = (f^{-1}(V'))^{ca} = \overline{S - f^{-1}(V')} = \overline{f^{-1}(S' - V')}$ . いま仮定していることにより,

$$f(x_0) \in \overline{f(f^{-1}(S' - V'))} \subset \overline{S' - V'}$$

よって  $x'_0 \in \overline{S' - V'} = V'^{ca} = V'^{ic}$  となり, これは  $V'$  が  $x'_0$  の近傍であることに反する.

## 1.10

$M$  を位相空間  $(S, \mathfrak{D})$  の部分集合とすると,  $\mathfrak{B}$  が  $\mathfrak{D}$  の基底 (または準基底) ならば,

$$\mathfrak{B}_M = \{O \cap M \mid O \in \mathfrak{B}\}$$

は  $\mathfrak{D}_M$  の基底 (または準基底) となることを示せ.

【解】

$\mathfrak{B}$  が基底のとき  $\mathfrak{B}_M \subset \mathfrak{D}_M$  は明らか. 任意の  $x$  と  $x \in O'$  となる  $O' \in \mathfrak{D}_M$  について,  $O' = O \cap M (O \in \mathfrak{D})$  と表せる. このときある  $W \in \mathfrak{B}$  が存在して,  $x \in W, W \subset O$  とな



る. このとき  $x \in W \cap M, W \cap M \subset O \cap M$  なので,  $\mathfrak{B}_M$  は  $\mathfrak{D}_M$  の基底.

$\mathfrak{B}$  が準基底のとき:  $\mathfrak{B}$  の有限個の元の共通部分  $\bigcap_{i \in I} W_i$  ( $\text{card } I < \aleph_0, W_i \in \mathfrak{B}$ ) 全体の集合を

$\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'$  の元との和集合  $\bigcup_{\lambda \in A} B_\lambda$  ( $B_\lambda \in \mathfrak{M}'$ ) 全体の集合を  $\mathfrak{M}$  とする. このとき  $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}$  である.

$\mathfrak{B}_M$  の有限個の元の共通部分全体の集合は

$$\bigcap_{i \in I} (W_i \cap M) = \left( \bigcap_{i \in I} W_i \right) \cap M \quad (\text{card } I < \aleph_0, W_i \in \mathfrak{B})$$

の形の集合全体, すなわち  $\{W \cap M \mid W \in \mathfrak{M}'\}$  となる. これを  $\mathfrak{M}'_M$  とする. さらに  $\mathfrak{M}'_M$  の元との和集合  $\bigcup_{\lambda \in A} B'_\lambda$  ( $B'_\lambda \in \mathfrak{M}'_M$ ) 全体を  $\mathfrak{M}_M$  とすれば,

$$\bigcup_{\lambda \in A} B'_\lambda = \bigcup_{\lambda \in A} (W_\lambda \cap M) = \left( \bigcup_{\lambda \in A} W_\lambda \right) \cap M \quad (W_\lambda \in \mathfrak{M}')$$

ゆえ  $\mathfrak{M}_M = \{O \cap M \mid O \in \mathfrak{D}\} = \mathfrak{D}_M$  となり,  $\mathfrak{M}_M$  は  $\mathfrak{D}_M$  の準基底となる.

### 1.11

$M$  を位相空間  $S$  の部分空間とすると,  $M$  の任意の部分集合  $X$  の  $M$  における閉包は  $\bar{X} \cap M$  ( $\bar{X}$  は  $X$  の  $S$  における閉包) となることを示せ.

【解】

$S$  の閉集合系を  $\mathfrak{A}$  とする.  $M$  に  $S$  の相対位相を入れてできる位相空間  $M$  の閉集合系を  $\mathfrak{A}_M$  とすれば  $\mathfrak{A}_M = \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}\}$ . このとき  $X$  の  $M$  における閉包  $X^{a_M}$  は

$$X^{a_M} = \bigcap \{A \in \mathfrak{A}_M \mid X \subset A\} = \bigcap \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}, X \subset A \cap M\}$$

いま,  $X \subset M$  なので  $X \subset A \cap M \Leftrightarrow X \subset A$ . よって

$$\{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}, X \subset A \cap M\} = \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}, X \subset A\}$$

以上により,  $X^{a_M} = \bigcap \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}, X \subset A\} = \left( \bigcap \{A \mid A \in \mathfrak{A}, X \subset A\} \right) \cap M = \bar{X} \cap M$ .

### 1.12

前問で,  $X \in \mathfrak{P}(M)$  の  $M$  における開核を  $X^{i'}$ ,  $S$  における開核を  $X^i$  とすれば,  $X^{i'} \supset X^i$  であることを示せ. また, 任意の  $X \in \mathfrak{P}(M)$  に対して  $X^{i'} = X^i$  が成り立つためには,  $M$  が  $S$  の開集合であることが必要十分であることを示せ.

【解】

$X^i \cap M = X^{i'}$  は位相空間  $M$  における開集合. また  $X^i \subset X$  なので,  $(X^i)^{i'} \subset X^{i'}$  であるが,  $X^{i'}$  は  $M$  における開集合ゆえ,  $(X^i)^{i'} = X^{i'}$ . したがって,  $X^i \subset X^{i'}$ .

$\Rightarrow$ : このとき特に  $M^{i'} = M^i$ .  $M$  は部分位相空間  $M$  における開集合ゆえ,  $M^{i'} = M$  で,  $M^i = M$ . よって  $M$  は  $S$  の開集合.

$\Leftarrow$ : このとき  $X^{i'} \subset X^i$  であることを示す.  $X^{i'}$  は  $M$  の開集合なので,  $X^{i'} = O \cap M$  を満たす

$S$  の開集合  $O$  が存在する. このとき  $(X^{i'})^i = (O \cap M)^i = O^i \cap M^i = O \cap M = X^{i'}. X^{i'} \subset X$  なので  $(X^{i'})^i \subset X^i$ . したがって  $X^{i'} \subset X^i$ .

### 1.13

離散空間の任意の部分空間は離散空間, 密着空間の任意の部分空間は密着空間であることを示せ.

【解】

これはほとんど明らか.

### 1.14

$M$  を位相空間  $S$  の部分集合とする.  $M$  のすべての点が  $M$  の孤立点であるためには,  $S$  の部分空間として  $M$  が離散空間であることが必要十分であることを示せ.

【解】

$\Rightarrow: V^*(x)$  を  $x$  の  $S$  における基本近傍系とする.  $x$  が  $M$  の孤立点ならば, ある  $U \in V^*(x)$  が存在して  $U \cap M = \{x\}$  となる.  $U$  は  $x$  の近傍なので  $x \in U^i$  ( $i$  は  $S$  における開核作用子) で  $U^i \cap M = \{x\}$  で  $\{x\}$  は  $M$  の開集合. よって  $\{x\}$  は位相空間  $M$  の開集合ゆえ,  $M$  は離散空間.

$\Leftarrow: M$  が離散空間ならば,  $\{x\}$  は  $M$  の開集合でゆえ  $\{x\}^c = M - \{x\}$  は閉集合. よって任意の  $x \in M$  について  $x \notin M - \{x\} = \overline{M - \{x\}}$ .

### 1.15

$\mathbf{R}$  の开区間  $(a, b)$  は (相対位相に関して)  $\mathbf{R}$  と同相な位相空間であることを示せ

【解 1】

まず 2 つの任意の开区間  $(a, b), (c, d)$  ( $a < b, c < d$ ) が同相であることを示す. これは  $(a, b)$  から  $(c, d)$  への写像  $x \mapsto \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$  が同相写像になる. したがって  $(-1, 1) \approx \mathbf{R}$  を示せばよい. これは例えば  $x \mapsto \tan \frac{\pi x}{2} ((-1, 1) \rightarrow \mathbf{R})$  や  $x \mapsto \frac{x}{1-x^2} ((-1, 1) \rightarrow \mathbf{R})$  が同相写像である.

【解 2】

$(a, b)$  から  $\mathbf{R}$  への同相写像  $f$  として  $f(x) = \frac{x-c}{(x-a)(b-x)}$  ( $c = (a+b)/2$ ) などがある.

$(S_\lambda)_{\lambda \in A}$  を位相空間の族とし, 各  $\lambda$  に対して  $M_\lambda$  を  $S_\lambda$  の部分集合とする. そのとき, 直積空間  $S = \prod_{\lambda \in A} S_\lambda$  の部分集合  $M = \prod_{\lambda \in A} M_\lambda$  について

$$\bar{M} = \prod_{\lambda \in A} \bar{M}_\lambda$$

が成り立つことを示せ.

【解】

直積空間  $S$  の任意の元  $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A}$  の基本近傍系として

$$\bigcap_{i=1}^n \text{pr}_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i}) = \left( \prod_{\lambda \in A - \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}} S_\lambda \right) \times V_{\lambda_1} \times \dots \times V_{\lambda_n}$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ は } A \text{ の相異なる元, } V_{\lambda_i} \in \mathbf{V}_{S_{\lambda_i}}(x_{\lambda_i}) \ (i = 1, \dots, n))$$

の形の集合の全体をとる. これを  $\mathbf{V}^*(x)$  とする.

$$\forall V \in \mathbf{V}^*(x) (V \cap M \neq \emptyset)$$

を満たす任意の  $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A} \in S$  について,

$$\forall \lambda \in A, \forall V_\lambda \in \mathbf{V}_{S_\lambda}(x_\lambda) (V_\lambda \cap M_\lambda \neq \emptyset)$$

となり,  $x_\lambda \in \bar{M}_\lambda$ . よって  $\bar{M} \subset \prod_{\lambda \in A} \bar{M}_\lambda$ .

また

$$\forall V_\lambda \in \mathbf{V}_{S_\lambda}(x_\lambda) (V_\lambda \cap M_\lambda \neq \emptyset)$$

となる任意の  $x_\lambda \in S_\lambda$  について,  $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A} \in S$  とすれば

$$\forall V \in \mathbf{V}_S^*(x) (V \cap M \neq \emptyset)$$

よって  $x \in \bar{M}$  なので,  $\prod_{\lambda \in A} \bar{M}_\lambda \subset \bar{M}$ . よって  $\bar{M} = \prod_{\lambda \in A} \bar{M}_\lambda$ .

前問において、 $A$  が有限集合である場合には、

$$M^\circ = \prod_{\lambda \in A} M_\lambda^\circ$$

が成立することを示せ。 $A$  が無限集合の場合にはこのことは成り立つか。

【解】

$A = \{1, \dots, n\}$  とする。直積空間  $S$  の任意の元  $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A}$  の基本近傍系として

$$V_1 \times \cdots \times V_n \quad (V_\lambda \in \mathbf{V}_{S_\lambda}(x_\lambda))$$

をとることができる。

任意の  $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A} \in M^\circ$  について、

$$V_1 \times \cdots \times V_n \subset M$$

となる  $V_\lambda \in \mathbf{V}_{S_\lambda}(x_\lambda)$  が存在する。このとき任意の  $\lambda \in A$  について  $V_\lambda \subset M_\lambda$  ゆえ  $x_\lambda \in M_\lambda^\circ$ 。

よって  $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A} \in \prod_{\lambda \in A} M_\lambda^\circ$  なので、 $M^\circ \subset \prod_{\lambda \in A} M_\lambda^\circ$ 。

任意の  $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A} \in \prod_{\lambda \in A} M_\lambda^\circ$  について、 $x_\lambda \in M_\lambda^\circ$  なので

$$V_\lambda \subset M_\lambda$$

となる  $V_\lambda \in \mathbf{V}_{S_\lambda}(x_\lambda)$  が存在する。よって

$$V_1 \times \cdots \times V_n \subset \prod_{\lambda \in A} M_\lambda$$

$V_1 \times \cdots \times V_n$  は  $M$  の  $x$  における基本近傍系の元なので  $x \in M^\circ$ 。以上により  $\prod_{\lambda \in A} M_\lambda^\circ \subset M^\circ$

ゆえ、 $M^\circ = \prod_{\lambda \in A} M_\lambda^\circ$ 。

$A$  が無限集合の場合にはこの等式は成り立たない。

反例： $\mathbf{R}$  に通常の位相を入れ、 $\prod_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R}$  に直積位相を定める。 $n \in \mathbf{N}$  に対し  $A_n = (0, 1)$  とお

べ、 $A_n^\circ = (0, 1)$  なので  $\prod_{n \in \mathbf{N}} A_n^\circ = \prod_{n \in \mathbf{N}} (0, 1)$ 。  $\prod_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R}$  における  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  の基本近傍系は

$$\left( \prod_{k \in \mathbf{N} - \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}} \mathbf{R} \right) \times V_{\lambda_1} \times \cdots \times V_{\lambda_n}$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ は } A \text{ の相異なる元, } V_{\lambda_i} \in \mathbf{V}_{\mathbf{R}}(x_{\lambda_i}) \ (i = 1, \dots, n))$$

もし  $\left( \prod_{n \in \mathbf{N}} A_n \right)^\circ \neq \emptyset$  ならば、ある  $x \in \prod_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R}$  が存在して、ある  $n$  で  $\mathbf{R} \subset A_n = (0, 1)$  と

なるが、これは明らかに矛盾。したがって  $\left( \prod_{n \in \mathbf{N}} A_n \right)^\circ = \emptyset$  ゆえ、 $\prod_{n \in \mathbf{N}} A_n^\circ \neq \left( \prod_{n \in \mathbf{N}} A_n \right)^\circ$ 。

位相空間  $S$  から直積空間  $S' = \prod_{\lambda \in A} S'_\lambda$  への写像  $f : S \rightarrow S'$  が連続であるためには、すべての  $\lambda \in A$  に対し  $f_\lambda = \text{pr}_\lambda \circ f : S \rightarrow S'_\lambda$  が連続であることが必要十分であることを示せ。

【解】

$S$  の位相を  $\mathfrak{O}, S'_\lambda$  の位相をそれぞれ  $\mathfrak{O}'_\lambda$  とする。

$\Rightarrow$ : 任意の  $O'_\lambda \in \mathfrak{O}'_\lambda$  について、 $\text{pr}_\lambda^{-1}(O'_\lambda)$  は  $S'$  の開集合。よって  $f$  の連続性から

$$f_\lambda^{-1}(O'_\lambda) = (\text{pr}_\lambda \circ f)^{-1}(O'_\lambda) = f^{-1}(\text{pr}_\lambda^{-1}(O'_\lambda)) \in \mathfrak{O}$$

よって  $f_\lambda$  は連続。

$\Leftarrow$ : 直積空間  $S'$  の基底として

$$\bigcap_{i=1}^n \text{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i}) \quad (O'_{\lambda_i} \in \mathfrak{O}'_{\lambda_i}, i = 1, \dots, n)$$

の形の集合全体をとることができる。よって

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n \text{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i})\right) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(\text{pr}_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i})) = \bigcap_{i=1}^n (\text{pr}_{\lambda_i} \circ f)^{-1}(O'_{\lambda_i}) = \bigcap_{i=1}^n f_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i})$$

$f_\lambda$  の連続性から  $f_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i}) \in \mathfrak{O}$  ゆえ、 $\bigcap_{i=1}^n f_{\lambda_i}^{-1}(O'_{\lambda_i}) \in \mathfrak{O}$ 。