

1 松坂集合位相

1.1 x を位相空間 S の点, M を S の部分集合とするとき, $x \in \bar{M}$ であるためには, x を含む任意の開集合 O に対して $O \cap M \neq \emptyset$ となることは必要十分であることを示せ.

1.2 O を位相空間 S の 1 つの開集合とすれば, S の任意の部分集合 M に対して, $O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$ であることを示せ.(したがって特に $O \cap M = \emptyset$ ならば $O \cap \bar{M} = \emptyset$)

1.3 位相空間 S の任意の部分集合 M に対して $M^{aia} = M^{ai}$, $M^{iaa} = M^{ia}$ が成り立つことを示せ.

1.4 S を空でない集合とするとき, $\mathfrak{P}(S)$ の部分集合 \mathfrak{B} が $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ の基底となるためには, \mathfrak{B} が次の性質 (O*i) および (O*ii) をもつことが必要十分であることを証明せよ.

(O*i) S の任意の元 x に対して, $x \in W$ となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

(O*ii) $W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}, W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ ならば, $W_1 \cap W_2$ に属する任意の点 x に対して,

$$x \in W, \quad W \subset W_1 \cap W_2$$

となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

1.5 位相空間 S において, $V^*(x)$ を x の 1 つの基本近傍系とし, また M を S の 1 つの部分集合とする. そのとき次のことを示せ.

- (a) $x \in M^\circ \Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \subset M)$
- (b) x が M の外点 $\Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \cap M = \emptyset)$
- (c) $x \in \bar{M} \Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap M \neq \emptyset)$
- (d) $x \in \partial M \Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap M \neq \emptyset \text{ かつ } U \cap M^c \neq \emptyset)$
- (e) x が M の集積点 $\Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap (M - \{x\}) \neq \emptyset)$
- (f) x が M の孤立点 $\Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \cap M = \{x\})$

1.6 位相空間 S の各点 x に対してそれぞれ 1 つの基本近傍系 $V^*(x)$ が与えられたとすれば, $(V^*(x))_{x \in S}$ について次の (V*i), (V*ii), (V*iii) が成り立つことを証明せよ.

(V*i) すべての $U \in V^*(x)$ に対して $x \in U$.

(V*ii) $U_1 \in V^*(x), U_2 \in V^*(x)$ とすれば, $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となるような $U_3 \in V^*(x)$ が存在する.

(V*iii) 任意の $U \in V^*(x)$ に対して, 次の条件を満たす $W \in V^*(x)$ がある: W の任意の点 y に対して $U_y \subset U$ となるような $U_y \in V^*(y)$ が存在する.

1.7 集合 $S (\neq \emptyset)$ の各点 x に対しそれぞれ $\mathfrak{P}(S)$ の空でない部分集合 $V^*(x)$ が定められ, (V*i), (V*ii), (V*iii) が成り立っているとする. そのとき, S の各点 x に対し

$$V(x) = \{V \mid \exists U \in V^*(x)(U \subset V)\}$$

と $V(x)$ を定めれば, $V(x)$ を x の近傍系とする位相 \mathfrak{D} が一意的に導入されることを

示せ.(与えられた $\mathbf{V}^*(x)$ はこの位相空間における x の基本近傍系.)

- 1.8 集合 S において, (\mathbf{V}^*i) -(\mathbf{V}^*iii) を満たす 2 組の $(\mathbf{V}^*(x))_{x \in S}, (\mathbf{W}^*(x))_{x \in S}$ が与えられたとする. そのとき, 前問の意味でこれから定められる位相 $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ について, $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$ が成り立つためには, 次の条件 $(*)$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

$(*)$ 任意の $V \in \mathbf{V}^*(x)$ に対して, $W \subset V$ となる $W \in \mathbf{W}^*(x)$ が存在する.

- 1.9 位相空間 S から位相空間 S' への写像 f が S の点 x_0 で連続であるためには, $x_0 \in \bar{M}$ であるような S の任意の部分集合 M に対して $f(x_0) \in \overline{f(M)}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

- 1.10 M を位相空間 (S, \mathfrak{D}) の部分集合とすると, \mathfrak{B} が \mathfrak{D} の基底 (または準基底) ならば,

$$\mathfrak{B}_M = \{O \cap M \mid O \in \mathfrak{B}\}$$

は \mathfrak{D}_M の基底 (または準基底) となることを示せ.

- 1.11 M を位相空間 S の部分空間とすると, M の任意の部分集合 X の M における閉包は $\bar{X} \cap M$ (\bar{X} は X の S における閉包) となることを示せ.

- 1.12 前問で, $X \in \mathfrak{P}(M)$ の M における開核を $X^{i'}$, S における開核を X^i とすれば, $X^{i'} \supset X^i$ であることを示せ. また, 任意の $X \in \mathfrak{P}(M)$ に対して $X^{i'} = X^i$ が成り立つためには, M が S の開集合であることが必要十分であることを示せ.

- 1.13 離散空間の任意の部分空間は離散空間, 密着空間の任意の部分空間は密着空間であることを示せ.

- 1.14 M を位相空間 S の部分集合とする. M のすべての点が M の孤立点であるためには, S の部分空間として M が離散空間であることが必要十分であることを示せ.

- 1.15 \mathbf{R} の开区間 (a, b) は (相対位相に関して) \mathbf{R} と同相な位相空間であることを示せ.

- 1.16 $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$ を位相空間の族とし, 各 λ に対して M_λ を S_λ の部分集合とする. そのとき, 直積空間 $S = \prod_{\lambda \in A} S_\lambda$ の部分集合 $M = \prod_{\lambda \in A} M_\lambda$ について

$$\bar{M} = \prod_{\lambda \in A} \bar{M}_\lambda$$

が成り立つことを示せ.

1.17 前問において, A が有限集合である場合には,

$$M^\circ = \prod_{\lambda \in A} M_\lambda^\circ$$

が成立することを示せ. A が無限集合の場合にはこのことは成り立つか.

1.18 位相空間 S から直積空間 $S' = \prod_{\lambda \in A} S'_\lambda$ への写像 $f: S \rightarrow S'$ が連続であるためには, すべての $\lambda \in A$ に対し $f_\lambda = \text{pr}_\lambda \circ f: S \rightarrow S'_\lambda$ が連続であることが必要十分であることを示せ.

1.19 $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$ を位相空間の族, A_1 を A の部分集合とし, $A - A_1$ に属する各 μ に対してそれぞれ S_μ の 1 つの元 x_μ^0 を定めておく. そのとき, $\prod_{\lambda \in A_1} S_\lambda$ の各点 $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A_1}$ に $\prod_{\lambda \in A} S_\lambda$ の点 $x^* = (x_\lambda^*)_{\lambda \in A}$ (ただし $\lambda \in A_1$ に対しては $x_\lambda^* = x_\lambda$, $\mu \in A - A_1$ に対しては $x_\mu^* = x_\mu^0$) を対応させる写像は, $\prod_{\lambda \in A_1} S_\lambda$ から $\prod_{\lambda \in A} S_\lambda$ の部分空間 $\prod_{\lambda \in A_1} S_\lambda \times \prod_{\mu \in A - A_1} \{x_\mu^0\}$ への同相写像であることを示せ.

1.20 f を直積空間 $S = \prod_{\lambda \in A} S_\lambda$ から位相空間 S' へ連続写像とする. そのとき, 前問のようにして $\prod_{\lambda \in A_1} S_\lambda$ の各点 x に $\prod_{\lambda \in A} S_\lambda$ の点 x^* を対応させ, $f_1(x) = f(x^*)$ とおけば, f_1 は $\prod_{\lambda \in A_1} S_\lambda$ から S' の連続写像であることを示せ. (約言すれば, “多変数の連続写像” は, 一部の変数を固定した場合, 残りの変数について連続である. 特に, “多変数の連続写像” は個々の各変数について連続である.” しかし, このことの逆は成立しない (次の問題参照).)

1.21 写像 $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を次のように定義する:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 / (x_1^2 + x_2^2) & ((x_1, x_2) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x_1, x_2) = (0, 0)). \end{cases}$$

は連続でないことを示せ.

1.1

x を位相空間 S の点, M を S の部分集合とすると, $x \in \bar{M}$ であるためには, x を含む任意の開集合 O に対して $O \cap M \neq \emptyset$ となることは必要十分であることを示せ.

【解】

\Rightarrow : この命題の対偶, ある x を含む開集合 O が存在して $O \cap M = \emptyset$ ならば $x \notin \bar{M}$ が成り立つことを示す.

このような開集合 O について $M \subset O^c$ で O^c は x を含まない閉集合. よって $\bar{M} \subset O^c$ となり, \bar{M} も x を含まない.

\Leftarrow : これも対偶, $x \notin \bar{M}$ ならば x を含むある開集合 O が存在して $O \cap M = \emptyset$ であることを示す.

このとき, \bar{M}^c は x を含む開集合である. したがって $\bar{M}^c \cap M \subset M^c \cap M = \emptyset$ ゆえ $\bar{M}^c \cap M = \emptyset$ であり, これが示すべきことであった.

1.2

O を位相空間 S の1つの開集合とすれば, S の任意の部分集合 M に対して, $O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$ であることを示せ. (したがって特に $O \cap M = \emptyset$ ならば $O \cap \bar{M} = \emptyset$)

【解】

$x \in O \cap \bar{M}$ を任意にとり, O' を x を含む任意の開集合とする. このとき $x \in \bar{M}$ で $O \cap O'$ は x を含む開集合なので, 前問により $O \cap O' \cap M \neq \emptyset$. したがって $O' \cap O \cap M \neq \emptyset$ で, ふたたび前問により $x \in \overline{O \cap M}$. 以上により, $O \cap \bar{M} \subset \overline{O \cap M}$.

1.3

位相空間 S の任意の部分集合 M に対して $M^{aiai} = M^{ai}$, $M^{iaia} = M^{ia}$ が成り立つことを示せ.

【解】

$M^{aiai} = M^{ai}$ を示す.

$M^{ai} \subset M^a$ であり, $M^{aia} \subset (M^a)^a = M^a$. よって $M^{aiai} \subset M^{ai}$. また, $M^{aia} \supset M^{ai}$. (これは $M^a \supset M$ の M を M^{ai} におきかえたもの) よって $M^{aiai} \supset M^{aii} = M^{ai}$. 以上から, $M^{aiai} = M^{ai}$. $M^{iaia} = M^{ia}$ もほとんど同様である.

S を空でない集合とするとき, $\mathfrak{B}(S)$ の部分集合 \mathfrak{B} が $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ の基底となるためには, \mathfrak{B} が次の性質 (O*i) および (O*ii) をもつことが必要十分であることを証明せよ.
(O*i) S の任意の元 x に対して, $x \in W$ となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

(O*ii) $W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}, W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ ならば, $W_1 \cap W_2$ に属する任意の点 x に対して,

$$x \in W, \quad W \subset W_1 \cap W_2$$

となるような $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

\Leftarrow では $\bigcup_{\lambda \in A} W_\lambda (W_\lambda \in \mathfrak{B})$ の集合全体が S の位相となることを示す. ($A = \emptyset$ のとき

$\bigcup_{\lambda \in A} W_\lambda = \emptyset$ と既約されているものとする.)

$\lambda \in A$

【解】

\Rightarrow : \mathfrak{B} が $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ の基底ならば, (O*i) が成り立つことは明らか.

$W_1, W_2 \in \mathfrak{B}$ ならば, 特に $W_1, W_2 \in \mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ ゆえ $W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{D}(\mathfrak{B})$. よって $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ ならば $x \in W_1 \cap W_2$ について, $x \in W, W \subset W_1 \cap W_2$ となる $W \in \mathfrak{B}$ が存在する.

\Leftarrow : $\bigcup_{\lambda \in A} W_\lambda (W_\lambda \in \mathfrak{B})$ の形の集合全体を \mathfrak{D} とする.

(O*i*) $\emptyset \in \mathfrak{D}$ は明らか. また (O*i) により, $S \in \mathfrak{D}$ もいえる.

(Oiii) も \mathfrak{D} の定め方から明らか. (Oii) まず, $W_1, W_2 \in \mathfrak{B}$ ならば $W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{D}$ である. 実際, $W_1 \in \mathfrak{B}, W_2 \in \mathfrak{B}$ について, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ ならばこれは \mathfrak{D} の元. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ のとき, (O*ii) を満たす $W \in \mathfrak{B}$ を W_x とすれば $W_1 \cap W_2 = \bigcup_{x \in W_1 \cap W_2} W_x \in \mathfrak{D}$.

$O_1 \in \mathfrak{D}, O_2 \in \mathfrak{D}$ は $O_1 = \bigcup_{\lambda \in A} W_\lambda^{(1)}, O_2 = \bigcup_{\mu \in M} W_\mu^{(2)}$ と \mathfrak{B} の元の合併として表せる. この

とき

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in A \times M} (W_\lambda^{(1)} \cap W_\mu^{(2)})$$

$W_\lambda^{(1)} \cap W_\mu^{(2)} \in \mathfrak{D}$ なので (Oiii) により, $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{D}$. 以上により \mathfrak{D} は S 上の位相となり, \mathfrak{B} はその基底である.

位相空間 S において, $V^*(x)$ を x の 1 つの基本近傍系とし, また M を S の 1 つの部分集合とする. そのとき次のことを示せ.

- (a) $x \in M^\circ \Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \subset M)$
- (b) x が M の外点 $\Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \cap M = \emptyset)$
- (c) $x \in \bar{M} \Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap M \neq \emptyset)$
- (d) $x \in \partial M \Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap M \neq \emptyset \text{ かつ } U \cap M^c \neq \emptyset)$
- (e) x が M の集積点 $\Leftrightarrow \forall U \in V^*(x)(U \cap (M - \{x\}) \neq \emptyset)$
- (f) x が M の孤立点 $\Leftrightarrow \exists U \in V^*(x)(U \cap M = \{x\})$

【解】

(a) $\Rightarrow: x \in M^\circ$ ゆえ, M は x の近傍である. 基本近傍系の定義により, $x \in U^\circ, U \subset M$ となる $U \in V^*(x)$ が存在する.

$\Leftarrow:$ このとき特に $x \in U^\circ$ であり, $U^\circ \subset M^\circ$ なので $x \in M^\circ$.

(b) $\Rightarrow: x$ は M^c の内点なので, (a) により, ある $U \in V^*(x)$ が存在して $U \subset M^c$. よって $U \cap M = \emptyset$.

$\Leftarrow:$ このとき $U \subset M^c$ で, $x \in U^i$ かつ $U^i \subset M^{ci}$ なので $x \in M^{ci}$.

(c) $\Rightarrow: 1.1$ により x を含む任意の開集合 O について $O \cap M \neq \emptyset$ となる. 任意の $U \in V^*(x)$ について $x \in U^i$ なので $U^i \cap M \neq \emptyset$. よって $U \cap M \neq \emptyset$.

$\Leftarrow: x$ を含む任意の開集合 O について, O は x の近傍なので $U \subset O$ となる $U \in V^*(x)$ が存在する. このとき, 今仮定していることから $U \cap M \neq \emptyset$ で $U \cap M \subset O \cap M$ なので $O \cap M \neq \emptyset$. よって $x \in \bar{M}$.

(d) $\Rightarrow: x \in \bar{M}$ により, 任意の $U \in V^*(x)$ において $U \cap M \neq \emptyset$. また, $x \notin M^\circ$ なので (a) の否定

$$\forall U \in V^*(x)(U \not\subset M)$$

すなわち

$$\forall U \in V^*(x)(U \cap M \neq \emptyset)$$

が成立. 以上により示された.

$\Leftarrow:$ (a), (c) により $x \in \bar{M} - M^\circ = \partial M$ となることは明らか.

(e) $\Rightarrow:$ このとき $x \in \overline{M - \{x\}}$ ゆえ, (c) により明らか.

$\Leftarrow:$ これも (c) により明らか.

(f) $\Rightarrow:$ まず $x \notin \overline{M - \{x\}}$ なので, (c) によって

$$\exists U \in V^*(x)(U \cap (M - \{x\}) = \emptyset)$$

この U について $U \cap (M - \{x\}) = \emptyset$ であり, $x \in U \cap M$ なので $U \cap M = \{x\}$.

$\Leftarrow:$ このとき $U \cap (M - \{x\}) = \emptyset$ なので (c) により

$$x \in M \text{ かつ } x \notin \overline{M - \{x\}}$$

よって x は M の孤立点.

位相空間 S の各点 x に対してそれぞれ 1 つの基本近傍系 $V^*(x)$ が与えられたとすれば、 $(V^*(x))_{x \in S}$ について次の (V*i), (V*ii), (V*iii) が成り立つことを証明せよ。

(V*i) すべての $U \in V^*(x)$ に対して $x \in U$.

(V*ii) $U_1 \in V^*(x), U_2 \in V^*(x)$ とすれば、 $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となるような $U_3 \in V^*(x)$ が存在する。

(V*iii) 任意の $U \in V^*(x)$ に対して、次の条件を満たす $W \in V^*(x)$ がある: W の任意の点 y に対して $U_y \subset U$ となるような $U_y \in V^*(y)$ が存在する。

【解】

(V*i) は明らか。

(V*ii) も U_1, U_2 は x の近傍ゆえ $U_1 \cap U_2$ も x の近傍。よって、基本近傍系の定義から $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となる $U_3 \in V^*(x)$ が存在する。

(V*iii): $W = U^\circ$ とすれば、任意の $y \in W$ について W は y の近傍なので、基本近傍系の定義から $U_y \subset W$ となる $U_y \in V^*(y)$ が存在する。

1.7

集合 $S(\neq \emptyset)$ の各点 x に対しそれぞれ $\mathfrak{P}(S)$ の空でない部分集合 $V^*(x)$ が定められ、(V*i), (V*ii), (V*iii) が成り立っているとす。そのとき、 S の各点 x に対し

$$V(x) = \{V \mid \exists U \in V^*(x)(U \subset V)\}$$

と $V(x)$ を定めれば、 $V(x)$ を x の近傍系とする位相 \mathfrak{D} が一意的に導入されることを示せ。(与えられた $V^*(x)$ はこの位相空間における x の基本近傍系。)

【解】

まず $V(x)$ が (Vi)-(Viv)(p161) を満たすことを示す。

(Vi) は明らか。

(Vii): $V \in V(x)$ で $V \subset V'$ とする。このときある $U \in V^*(x)$ が存在して、 $U \subset V$ ゆえ $U \subset V'$ なので $V' \in V(x)$ 。

(Viii): $V_1 \in V(x), V_2 \in V(x)$ とすると $V'_1 \subset V_1, V'_2 \subset V_2$ となる $V^*(x)$ の 2 元 V'_1, V'_2 が存在する。このとき $V'_1 \cap V'_2 \subset V_1 \cap V_2$ で (V*ii) によって $V'_3 \subset V'_1 \cap V'_2$ となる $V'_3 \in V^*(x)$ が存在する。このとき $V'_3 \subset V_1 \cap V_2$ なので $V_1 \cap V_2 \in V(x)$ 。

(Viv): 任意の $V \in V(x)$ について $U \subset V$ となる $U \in V^*(x)$ が存在する。(V*iii) によって、ある $W \in V^*(x)$ が存在して

$$\forall y \in W, \exists U_y \in V^*(y)(U_y \subset U)$$

となる。特に $W \in V(x)$ で W の任意の元 y に対して、明らかに $y \in U_y \subset U \subset V$ 。

定理 11(p162) によって $V(x)$ を x の近傍系とする位相 \mathfrak{D} が一意的に導入される。

集合 S において, $(V^*i)-(V^*iii)$ を満たす 2 組の $(V^*(x))_{x \in S}, (W^*(x))_{x \in S}$ が与えられたとする. そのとき, 前問の意味でこれから定められる位相 $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ について, $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$ が成り立つためには, 次の条件 $(*)$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

$(*)$ 任意の $V \in V^*(x)$ に対して, $W \subset V$ となる $W \in W^*(x)$ が存在する.

【解】

i_1, i_2 をそれぞれ $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ における開核作用子とする.

$\Rightarrow (*)$: 任意の $V \in V^*(x)$ について, V^{i_1} は x を含む (S, \mathfrak{D}_1) の開集合. よって $V^{i_1} \in \mathfrak{D}_2$ なので, V^{i_1} は (S, \mathfrak{D}_2) の開集合. 1.5(a) により $W \subset V^{i_1}$ となる $W \in W^*(x)$ が存在し, $W \subset V$.

$\Leftarrow (*)$: $O \in \mathfrak{D}_1$ について, $x \in O$ を任意にとる. このとき $O \in V^*(x)$ ゆえ, $W \subset V$ となる $W \in W^*(x)$ が存在する. よって V は (S, \mathfrak{D}_2) における開集合でもあるので $O \in \mathfrak{D}_2$.

位相空間 S から位相空間 S' への写像 f が S の点 x_0 で連続であるためには, $x_0 \in \bar{M}$ であるような S の任意の部分集合 M に対して $f(x_0) \in \overline{f(M)}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

【解】

\Rightarrow : $f(x_0) = x'_0$ とし, $V_{S'}^*(x'_0)$ を x'_0 の基本近傍系とする.

任意の $V' \in V_{S'}^*(x'_0)$ について, f の連続性から $f^{-1}(V') \in V_S(x_0)$. よって 1.5(c) から $f^{-1}(V') \cap M \neq \emptyset$. この両辺に f の像を取ると $f(f^{-1}(V') \cap M) \neq \emptyset$ で $f(f^{-1}(V')) \cap f(M) \neq \emptyset$. よって $V' \cap f(M) \neq \emptyset$ なので $x'_0 \in \overline{f(M)}$. したがって $f(x_0) \in \overline{f(M)}$.

\Leftarrow : $V' \in V_{S'}^*(x'_0)$ とし, $f^{-1}(V')$ が x_0 の近傍でないとする. つまり $x_0 \notin (f^{-1}(V'))^\circ$ ゆえ $x_0 \in (f^{-1}(V'))^{ic} = (f^{-1}(V'))^{ca} = \overline{S - f^{-1}(V')} = \overline{f^{-1}(S' - V')}$. いま仮定していることにより,

$$f(x_0) \in \overline{f(f^{-1}(S' - V'))} \subset \overline{S' - V'}$$

よって $x'_0 \in \overline{S' - V'} = V'^{ca} = V'^{ic}$ となり, これは V' が x'_0 の近傍であることに反する.

M を位相空間 (S, \mathfrak{D}) の部分集合とすると, \mathfrak{B} が \mathfrak{D} の基底 (または準基底) ならば,

$$\mathfrak{B}_M = \{O \cap M \mid O \in \mathfrak{B}\}$$

は \mathfrak{D}_M の基底 (または準基底) となることを示せ.

【解】

\mathfrak{B} が基底のとき $\mathfrak{B}_M \subset \mathfrak{D}_M$ は明らか. 任意の x と $x \in O'$ となる $O' \in \mathfrak{D}_M$ について, $O' = O \cap M (O \in \mathfrak{D})$ と表せる. このときある $W \in \mathfrak{B}$ が存在して, $x \in W, W \subset O$ とな

る. このとき $x \in W \cap M, W \cap M \subset O \cap M$ なので, \mathfrak{B}_M は \mathfrak{D}_M の基底.

\mathfrak{B} が準基底のとき: \mathfrak{B} の有限個の元の共通部分 $\bigcap_{i \in I} W_i (\text{card } I < \aleph_0, W_i \in \mathfrak{B})$ 全体の集合を

$\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'$ の元との和集合 $\bigcup_{\lambda \in A} B_\lambda (B_\lambda \in \mathfrak{M}')$ 全体の集合を \mathfrak{M} とする. このとき $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}$ である.

\mathfrak{B}_M の有限個の元の共通部分全体の集合は

$$\bigcap_{i \in I} (W_i \cap M) = \left(\bigcap_{i \in I} W_i \right) \cap M \quad (\text{card } I < \aleph_0, W_i \in \mathfrak{B})$$

の形の集合全体, すなわち $\{W \cap M \mid W \in \mathfrak{M}'\}$ となる. これを \mathfrak{M}'_M とする. さらに \mathfrak{M}'_M の元との和集合 $\bigcup_{\lambda \in A} B'_\lambda (B'_\lambda \in \mathfrak{M}'_M)$ 全体を \mathfrak{M}_M とすれば,

$$\bigcup_{\lambda \in A} B'_\lambda = \bigcup_{\lambda \in A} (W_\lambda \cap M) = \left(\bigcup_{\lambda \in A} W_\lambda \right) \cap M \quad (W_\lambda \in \mathfrak{M}')$$

ゆえ $\mathfrak{M}_M = \{O \cap M \mid O \in \mathfrak{D}\} = \mathfrak{D}_M$ となり, \mathfrak{M}_M は \mathfrak{D}_M の準基底となる.

1.11

M を位相空間 S の部分空間とすると, M の任意の部分集合 X の M における閉包は $\bar{X} \cap M$ (\bar{X} は X の S における閉包) となることを示せ.

【解】

S の閉集合系を \mathfrak{A} とする. M に S の相対位相を入れてできる位相空間 M の閉集合系を \mathfrak{A}_M とすれば $\mathfrak{A}_M = \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}\}$. このとき X の M における閉包 X^{a_M} は

$$X^{a_M} = \bigcap \{A \in \mathfrak{A}_M \mid X \subset A\} = \bigcap \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}, X \subset A \cap M\}$$

いま, $X \subset M$ なので $X \subset A \cap M \Leftrightarrow X \subset A$. よって

$$\{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}, X \subset A \cap M\} = \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}, X \subset A\}$$

以上により, $X^{a_M} = \bigcap \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}, X \subset A\} = \left(\bigcap \{A \mid A \in \mathfrak{A}, X \subset A\} \right) \cap M = \bar{X} \cap M$.

1.12

前問で, $X \in \mathfrak{P}(M)$ の M における開核を $X^{i'}$, S における開核を X^i とすれば, $X^{i'} \supset X^i$ であることを示せ. また, 任意の $X \in \mathfrak{P}(M)$ に対して $X^{i'} = X^i$ が成り立つためには, M が S の開集合であることが必要十分であることを示せ.

【解】

$X^i \cap M = X^{i'}$ は位相空間 M における開集合. また $X^i \subset X$ なので, $(X^i)^{i'} \subset X^{i'}$ であるが, $X^{i'}$ は M における開集合ゆえ, $(X^i)^{i'} = X^{i'}$. したがって, $X^i \subset X^{i'}$.

\Rightarrow : このとき特に $M^{i'} = M^i$. M は位相空間 M における開集合ゆえ, $M^{i'} = M^i$ で, $M^i = M$. よって M は S の開集合.

\Leftarrow : このとき $X^{i'} \subset X^i$ であることを示す. $X^{i'}$ は M の開集合なので, $X^{i'} = O \cap M$ を満たす

S の開集合 O が存在する. このとき $(X^{i'})^i = (O \cap M)^i = O^i \cap M^i = O \cap M = X^{i'}. X^{i'} \subset X$ なので $(X^{i'})^i \subset X^i$. したがって $X^{i'} \subset X^i$.

1.13

離散空間の任意の部分空間は離散空間, 密着空間の任意の部分空間は密着空間であることを示せ.

【解】

これはほとんど明らか.

1.14

M を位相空間 S の部分集合とする. M のすべての点が M の孤立点であるためには, S の部分空間として M が離散空間であることが必要十分であることを示せ.

【解】

$\Rightarrow: V^*(x)$ を x の S における基本近傍系とする. x が M の孤立点ならば, ある $U \in V^*(x)$ が存在して $U \cap M = \{x\}$ となる. U は x の近傍なので $x \in U^i$ (i は S における開核作用子) で $U^i \cap M = \{x\}$ で $\{x\}$ は M の開集合. よって $\{x\}$ は位相空間 M の開集合ゆえ, M は離散空間.

$\Leftarrow: M$ が離散空間ならば, $\{x\}$ は M の開集合でゆえ $\{x\}^c = M - \{x\}$ は閉集合. よって任意の $x \in M$ について $x \notin M - \{x\} = \overline{M - \{x\}}$.

1.15

\mathbf{R} の开区間 (a, b) は (相対位相に関して) \mathbf{R} と同相な位相空間であることを示せ

【解 1】

まず 2 つの任意の开区間 $(a, b), (c, d)$ ($a < b, c < d$) が同相であることを示す. これは (a, b) から (c, d) への写像 $x \mapsto \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$ が同相写像になる. したがって $(-1, 1) \approx \mathbf{R}$ を示せばよい. これは例えば $x \mapsto \tan \frac{\pi x}{2} ((-1, 1) \rightarrow \mathbf{R})$ や $x \mapsto \frac{x}{1-x^2} ((-1, 1) \rightarrow \mathbf{R})$ が同相写像である.

【解 2】

(a, b) から \mathbf{R} への同相写像 f として $f(x) = \frac{x-c}{(x-a)(b-x)}$ ($c = (a+b)/2$) などがある.

$(S_\lambda)_{\lambda \in A}$ を位相空間の族とし, 各 λ に対して M_λ を S_λ の部分集合とする. そのとき, 直積空間 $S = \prod_{\lambda \in A} S_\lambda$ の部分集合 $M = \prod_{\lambda \in A} M_\lambda$ について

$$\bar{M} = \prod_{\lambda \in A} \bar{M}_\lambda$$

が成り立つことを示せ.

【解】

直積空間 S の任意の元 $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A}$ の基本近傍系として

$$\bigcap_{i=1}^n \text{pr}_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i}) = \left(\prod_{\lambda \in A - \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}} S_\lambda \right) \times V_{\lambda_1} \times \dots \times V_{\lambda_n}$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ は } A \text{ の相異なる元, } V_{\lambda_i} \in \mathbf{V}_{S_{\lambda_i}}(x_{\lambda_i}) \ (i = 1, \dots, n))$$

の形の集合の全体をとる. これを $\mathbf{V}^*(x)$ とする.

$$\forall V \in \mathbf{V}^*(x) (V \cap M \neq \emptyset)$$

を満たす任意の $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A} \in S$ について,

$$\forall \lambda \in A, \forall V_\lambda \in \mathbf{V}_{S_\lambda}(x_\lambda) (V_\lambda \cap M_\lambda \neq \emptyset)$$

となり, $x_\lambda \in \bar{M}_\lambda$. よって $\bar{M} \subset \prod_{\lambda \in A} \bar{M}_\lambda$.

また

$$\forall V_\lambda \in \mathbf{V}_{S_\lambda}(x_\lambda) (V_\lambda \cap M_\lambda \neq \emptyset)$$

となる任意の $x_\lambda \in S_\lambda$ について, $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A} \in S$ とすれば

$$\forall V \in \mathbf{V}_S^*(x) (V \cap M \neq \emptyset)$$

よって $x \in \bar{M}$ なので, $\prod_{\lambda \in A} \bar{M}_\lambda \subset \bar{M}$.