# 谷神星轨道预测-高斯是如何一战成名的

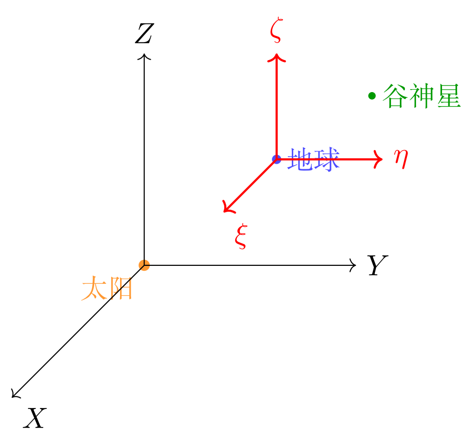
量子鬼道

1801 年 1 月 1 日，意大利天文学家皮亚齐 (Piazzi) 在巴勒莫观测天空时，发现了一个新天体. 起初他以为那是彗星，但观测到它的运动轨迹似乎不同寻常，更像是一颗行星. 这个天体就是后来命名为谷神星 (Ceres) 的小行星，它位于火星与木星之间的小行星带. 皮亚齐从 1801 年 1 月 1 日到 2 月 11 日共观测到谷神星约 24 次, 之后它逐渐靠近太阳方向, 在日光中“消失”，无法继续观测. 当时欧洲的天文学界很兴奋，但同时非常担心：等它从太阳背后出来时，应该去哪里找？由于观测数据有限，轨道弧段非常短不足以用常规方法可靠拟合其运行轨道, 天文学家们无法预测它再次出现的位置. 如果没有精确预测，它就可能永远“丢失”.

高斯当时年仅 24 岁，利用开普勒定律和皮亚齐的观测数据，将谷神星的轨道计算通过 Taylor 展开近似为求解线性方程组，并引入最小二乘法思想来处理观测误差，预测出了谷神星的轨道参数, 最终算出谷神星将在 1801 年 12 月出现在夜空的哪个区域. 根据高斯的预测，匈牙利天文学家冯 · 扎克（von Zach）于 1801 年 12 月 7 日观测到谷神星，几周后由德国天文爱好者奥伯斯（Olbers）于 1801 年 12 月 31 日再次观测确认，天文学界震惊. 这一事件使得高斯声名鹊起.

我们这一节简要讨论一下高斯的计算方法, 详见参考文献 [1].

考虑以太阳为原点的日心坐标系 $(x, y, z)$ 和以地球为原点的地心坐标系 $(\xi, \eta, \zeta)$, 坐标轴相互平行如图.



在时间 $t$, 记如下坐标向量和符号

① 地球在日心坐标系的坐标: $\vec{R}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))^T$, 对应的球坐标表达

$$\begin{cases} X = R\cos B\cos L = D\cos L \\ Y = R\cos B\sin L = D\sin L \\ Z = R\sin B = D\tan B \end{cases} \qquad \text{这里} \quad D = R\cos B.$$

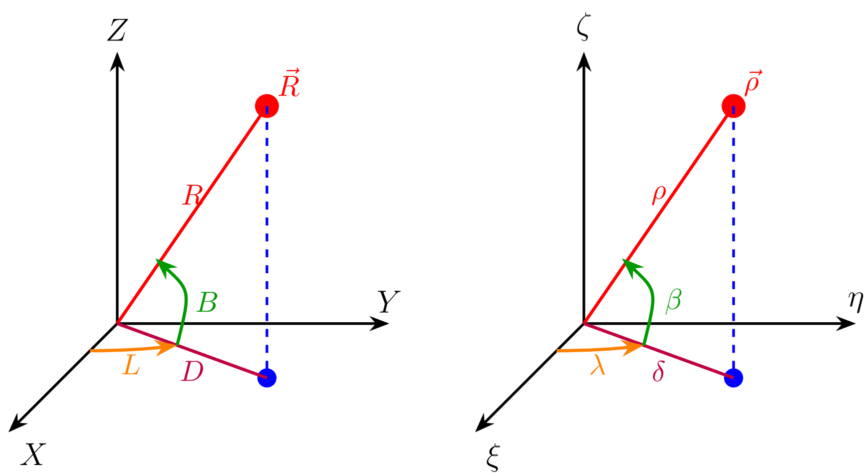
② 谷神星在日心坐标系的坐标: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$

③ 谷神星在地心坐标系的坐标: $\vec{\rho}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t))^T$, 满足关系

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t).$$

对应的球坐标表达为

$$\begin{cases} \xi = \rho\cos\beta\cos\lambda = \delta\cos\lambda \\ \eta = \rho\cos\beta\sin\lambda = \delta\sin\lambda \\ \zeta = \rho\sin\beta = \delta\tan\beta \end{cases} \qquad \text{这里} \quad \delta = \rho\cos B.$$




**引理 1.** $\frac{R}{r}$ 和 $\frac{R}{\delta}$ 满足如下关系

$$\frac{R}{r} = \frac{R}{\delta}\left(1 + \tan^2\beta + \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 + 2\frac{R}{\delta}\cos(\lambda - L)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

证明: 利用勾股定理可以得到

$$r^2 - (\delta \tan\beta)^2 = (R + \delta\cos(\lambda - L))^2 + (\delta\sin(\lambda - L))^2$$

整理即得引理. $\square$

考虑三个观测时间点 $t_1, t_2, t_3$, 其对应的三组对应坐标分别标记为

$$\vec{R}_i = \vec{R}(t_i), \qquad \vec{r}_i = \vec{r}(t_i), \qquad \vec{\rho}_i = \vec{\rho}(t_i), \qquad t = 1, 2, 3.$$

问题本质是通过地球上的三次角度观测数据，即在 $t_i$ 时刻的角度 (只能观测到角度)

$$\beta_i, \lambda_i, \qquad i = 1, 2, 3$$

来得到谷神星在日心坐标系中的两个位置坐标，由此可以通过几何关系确定谷神星的轨道平面 (由两个坐标向量张成的平面) 以及相应的椭圆轨道的形状.

首先由 3 维向量的叉乘恒等式

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

我们得到

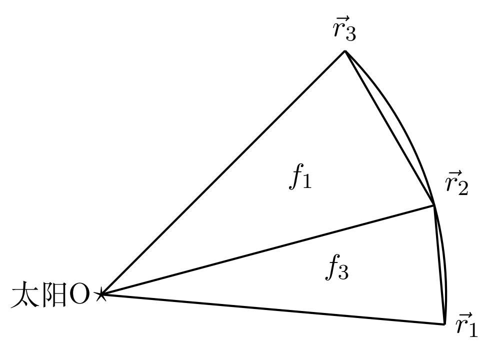
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

把这个等式应用到 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ 三个向量上，并注意到这三个向量在同一平面上，我们得到

$$f_1\vec{r}_1 + f_2\vec{r}_2 + f_3\vec{r}_3 = 0$$

这里

$$f_1 = \text{面积}\Delta_{O\vec{r}_2\vec{r}_3}, \quad f_2 = -\text{面积}\Delta_{O\vec{r}_1\vec{r}_3}, \quad f_3 = \text{面积}\Delta_{O\vec{r}_1\vec{r}_2}.$$



记矩阵

$$\phi = \begin{bmatrix}\vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

则方程 $f_1\vec{r}_1 + f_2\vec{r}_2 + f_3\vec{r}_3 = 0$ 可以写成矩阵的形式

$$\phi\vec{f} = 0.$$

类似地，记矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix}\vec{R}_1 & \vec{R}_2 & \vec{R}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

这里 $F_i$ 和 $f_i$ 类似，是地球绕日轨道上对应的三角形的面积. 于是也有

$$\Phi\vec{F} = 0.$$

由上述两组方程，我们可以得到如下方程

$$(F_1 + F_3)(\phi - \Phi)\vec{f} = \Phi((f_1 + f_3)\vec{F} - (F_1 + F_3)\vec{f}) \tag{†}$$

为方便起见，定义与角度相关的向量

$$\vec{\pi} = \begin{bmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \\ \tan\beta \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\rho} = \delta\vec{\pi} = \vec{r} - \vec{R}.$$

以及

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} \cos L \\ \sin L \\ \tan B \end{bmatrix}, \quad \vec{R} = D\vec{P}.$$

将方程(†)两边与向量 $\vec{R}_2 \times \vec{\rho}_1$ 以及 $\vec{R}_2 \times \vec{\rho}_3$ 作点乘，得到两个标量方程

$$(F_1 + F_3)\left(f_2\delta_2 \det\left[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_2|\vec{P}_2\right] + f_3\delta_3 \det\left[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_3|\vec{P}_2\right]\right) = (F_1 f_3 - F_3 f_1)\left(D_1 \det\left[\vec{\pi}_1|\vec{P}_1|\vec{P}_2\right] - D_3 \det\left[\vec{\pi}_1|\vec{P}_3|\vec{P}_2\right]\right)$$

$$(F_1 + F_3)\left(f_1\delta_1 \det\left[\vec{\pi}_3|\vec{\pi}_1|\vec{P}_2\right] + f_2\delta_2 \det\left[\vec{\pi}_3|\vec{\pi}_2|\vec{P}_2\right]\right) = (F_1 f_3 - F_3 f_1)\left(D_1 \det\left[\vec{\pi}_3|\vec{P}_1|\vec{P}_2\right] - D_3 \det\left[\vec{\pi}_3|\vec{P}_3|\vec{P}_2\right]\right)$$

由于观测时间间隔 $\Delta t$ 很小，我们可以估计相关的量在 $\Delta t \to 0$ 时的速度. 例如由开普勒第二定律知 $f_i, F_i = O(\Delta t)$，进一步可以得到

$$f_i, F_i = O(\Delta t), \quad (f_1 + f_3)F_2 - (F_1 + F_3)f_2 = O(\Delta t^4).$$

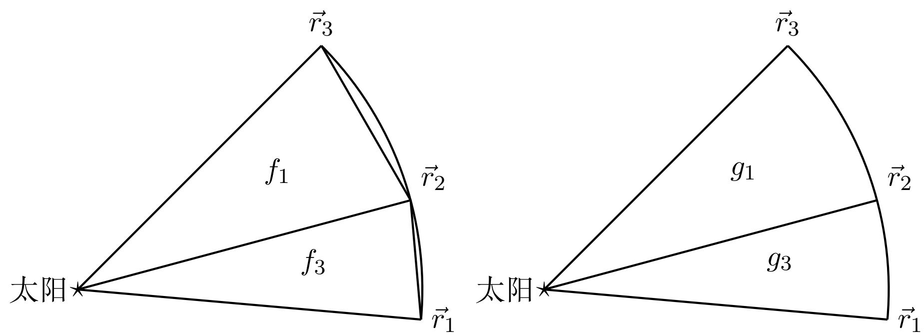
更仔细的计算可以发现，上述两个标量方程：左边 $= O(\Delta t^3)$, 右边 $= O(\Delta t^5)$. 因此可以忽略右边的高阶小量得到近似方程

$$\begin{aligned} f_2\delta_2 \det\left[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_2|\vec{P}_2\right] + f_3\delta_3 \det\left[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_3|\vec{P}_2\right] \simeq 0 \\ f_1\delta_1 \det\left[\vec{\pi}_3|\vec{\pi}_1|\vec{P}_2\right] + f_2\delta_2 \det\left[\vec{\pi}_3|\vec{\pi}_2|\vec{P}_2\right] \simeq 0 \end{aligned}$$

解出

$$\delta_1 = -\frac{f_2}{f_1}\frac{\det\left[\vec{\pi}_3|\vec{\pi}_2|\vec{P}_2\right]}{\det\left[\vec{\pi}_3|\vec{\pi}_1|\vec{P}_2\right]}\delta_2, \qquad \delta_3 = -\frac{f_2}{f_3}\frac{\det\left[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_2|\vec{P}_2\right]}{\det\left[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_3|\vec{P}_2\right]}\delta_2$$

我们可以进一步把三角形的面积 $f_1, f_2, f_3$ 由对应的弧形面积 $g_1, g_2, g_3$ 来逼近，如图




由开普勒第二定律

$$\frac{g_1}{t_3 - t_2} = \frac{-g_2}{t_3 - t_1} = \frac{g_3}{t_2 - t_1}$$

得到

$$\delta_1 = \frac{g_1}{f_1}\frac{f_2}{g_2}\frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2}\frac{\det\left[\vec{\pi}_3|\vec{\pi}_2|\vec{P}_2\right]}{\det\left[\vec{\pi}_3|\vec{\pi}_1|\vec{P}_2\right]}\delta_2, \qquad \delta_3 = \frac{g_3}{f_3}\frac{f_2}{g_2}\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}\frac{\det\left[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_2|\vec{P}_2\right]}{\det\left[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_3|\vec{P}_2\right]}\delta_2$$

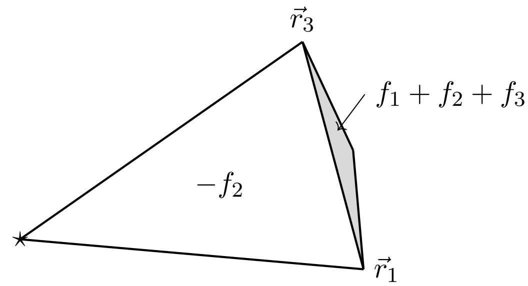
并把 $\frac{f_i}{g_i}$ 近似为 1. 这个公式里除了 $\delta_2$, 其他角度参数都可以通过观测数据给出. 下面我们只需要找出 $\delta_2$, 就可以解出 $\delta_1, \delta_3$ 得到两个谷神星的坐标.

将方程(†)两边与向量 $\vec{R}_3 \times \vec{R}_1$ 作点乘得到

$$\begin{aligned}(F_1+F_3)f_2\delta_2 \det[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_2|\vec{\pi}_3] =& (F_1 f_3 - F_3 f_1)\left(D_1 \det\left[\vec{\pi}_1|\vec{P}_1|\vec{\pi}_3\right] - D_3 \det\left[\vec{\pi}_1|\vec{P}_3|\vec{\pi}_3\right]\right) \\ &+ ((f_1+f_3)F_2 - (F_1+F_3)f_2)D_2 \det\left[\vec{\pi}_1|\vec{P}_2\vec{\pi}_3\right]\end{aligned}$$

高斯进一步说明，这个等式：左边 $=O(\Delta t^5)$, 右边第一项 $=O(\Delta t^7)$, 第二项 $=O(\Delta t^5)$. 舍弃右边第一项高阶小量，得到近似方程

$$(F_1+F_3)f_2\delta_2 \det[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_2|\vec{\pi}_3] \simeq f_2 F_2 \left(\frac{f_1+f_2+f_3}{f_2} - \frac{F_1+F_2+F_3}{F_2}\right) D_2 \det\left[\vec{\pi}_1|\vec{P}_2\vec{\pi}_3\right] \quad (\ddagger)$$




由定义, $f_1+f_2+f_3$ 表示如图面积差. 下面我们来分析 $\frac{f_1+f_2+f_3}{f_2}$ 的大小. 假设谷神星轨道在其轨道平面的极坐标方程为

$$r = \frac{k}{1+e\cos\theta}$$

设在时间 $t_i$ 对应的角度为 $\theta_i$. 则由三角形面积公式

$$f_1 = \frac{1}{2}r_2 r_3 \sin(\theta_3-\theta_2), \quad f_2 = \frac{1}{2}r_1 r_3 \sin(\theta_1-\theta_3), \quad f_3 = \frac{1}{2}r_1 r_2 \sin(\theta_2-\theta_1).$$

由此可得

$$\frac{f_1+f_2+f_3}{f_2} = \frac{-2r_2}{k}\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta_3-\theta_2)\sin\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)}{\cos\frac{1}{2}(\theta_3-\theta_1)}$$

设谷神星的轨道长半轴为 $a$, 周期为 $\tau_C$. 则谷神星的椭圆轨道的面积为 $\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{k}$. 由开普勒第二定律

$$\frac{\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{k}}{\tau_C} = \frac{g_1}{t_3-t_2} = \frac{g_3}{t_2-t_1} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\tau_C^2}{\pi^2 a^3}\frac{g_1 g_3}{(t_3-t_2)(t_2-t_1)}$$

设地球的轨道长半轴为 $A$, 周期为 $\tau_E$. 由开普勒第三定律

$$\frac{a^3}{\tau_C^2} = \frac{A^3}{\tau_E^2}$$

我们可以把 $k$ 用地球轨道信息表达为

$$k = \frac{\tau_E^2}{\pi^2 A^3} \frac{g_1 g_3}{(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)}$$

结合在 $\Delta t$ 很小时的近似

$$g_1 \simeq r_2 r_3 \sin\frac{1}{2}(\theta_3 - \theta_2), \quad g_3 \simeq r_1 r_2 \sin\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1), \quad \cos\frac{1}{2}(\theta_3 - \theta_1) \simeq 1$$

我们得到近似公式

$$\frac{f_1 + f_2 + f_3}{f_2} \simeq \frac{-2\pi^2 A^3}{\tau_E^2 r_1 r_2 r_3}(t_3 - t_2)(t_2 - t_1) \simeq \frac{-2\pi^2 A^3}{\tau_E^2 r_2^3}(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)$$

类似的考虑地球轨道，我们得到近似

$$\frac{F_1 + F_2 + F_3}{F_2} \simeq \frac{-2\pi^2 A^3}{\tau_E^2 R_2^3}(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)$$

将上述两个近似公式代入(‡)得

$$\frac{F_1 + F_3}{F_2} \frac{\det[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_2|\vec{\pi}_3]}{\det\left[\vec{\pi}_1|\vec{P}_2\vec{\pi}_3\right]} \simeq \frac{-2\pi^2 A^3}{\tau_E^2}(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)\frac{D_2}{\delta_2}$$

进一步由近似 $\frac{F_1+F_3}{F_2} \simeq -1$ 化简得到

$$\frac{\det[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_2|\vec{\pi}_3]}{\det\left[\vec{\pi}_1|\vec{P}_2\vec{\pi}_3\right]} \cdot \frac{\tau_E^2}{2\pi^2(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)} \simeq A^3\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)\frac{D_2}{\delta_2}$$

由于地球轨道近似圆, 我们可以近似 $A \simeq R_2$. 取日心坐标系使得地球轨道在 $XY$-平面，则有 $D = D_2$. 代入上式得到最终的近似公式

$$\left(1 - \left(\frac{R_2}{r_2}\right)^3\right)\frac{R_2}{\delta_2} \simeq -\frac{\tau_E^2}{2\pi^2(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)} \cdot \frac{\det[\vec{\pi}_1|\vec{\pi}_2|\vec{\pi}_3]}{\det\left[\vec{\pi}_1|\vec{P}_2\vec{\pi}_3\right]} \qquad (\star)$$

由引理1, 公式($\star$)左边可以写成关于 $\frac{R_2}{\delta_2}$ 的函数. 公式($\star$)右边可以通过观测数据计算得到. 因此由公式($\star$)可以解出 $\frac{R_2}{\delta_2}$, 即能算出 $\delta_2$.

## 参考文献

[1] D. Teets, and K. Whitehead. *The discovery of Ceres: How Gauss became famous.* Mathematics Magazine 72.2 (1999): 83-93.