线性代数：原理与应用

(2025 年 10 月第二次更新)

李思

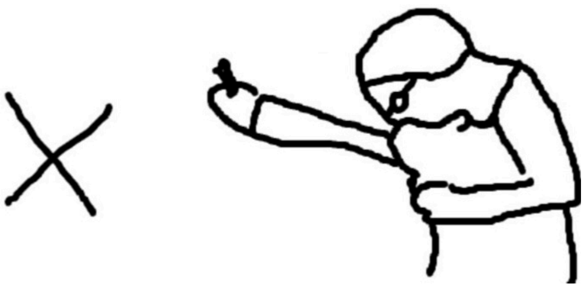
清华大学

编写这份讲义的起因实属偶然，偶然中承载了一份默契与等待。这份讲义是免费共享的，也欢迎读者来信交流。讲义的后续更新将在个人主页上发布：https://sili-math.github.io/ 。部分讲义在香蕉空间上线，链接如下：香蕉空间（线性代数）。讲义基础部分配套完整的授课视频，见

如果你觉得这份讲义有些帮助，并且有兴趣请我喝咖啡的话，我个人以及如下二维码都是非常欢迎的。

“知足常乐，厚积薄发”

特别致谢 2024 年秋季学期清华大学 6A-016 教室全体学生。



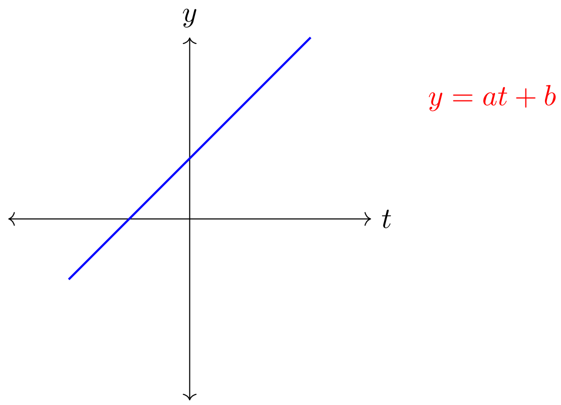
目录

第一章　线性空间

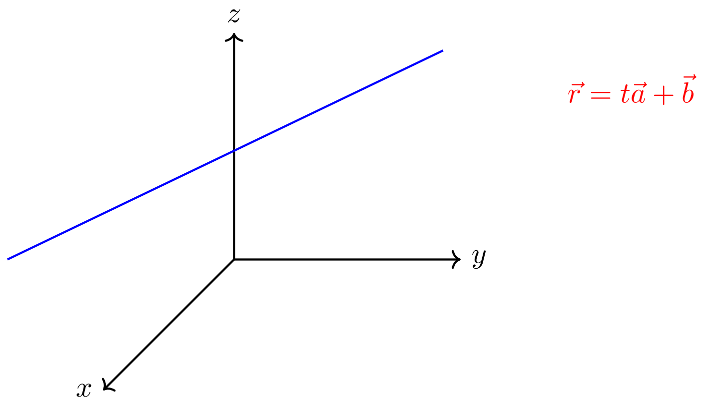
1.1　线性空间与子空间

1.1.1　线性空间

什么是"线性"? 我们先了解如何描述一条直线。平面上的一条直线可以通过如下函数刻画：



这里把 t 看作时间，a, b 是常数。当 t 跑遍 $\mathbb{R}$ 时，这个函数关系在 (t, y) 平面上的轨迹是一条直线。类似的，$\mathbb{R}^3$ 中的直线可以用函数关系表示：



这里 $\vec{r} = (x, y, z)$ 是空间向量，$\vec{a}, \vec{b}$ 是两个常数向量，$t \in \mathbb{R}$ 是参数。当 t 跑遍 $\mathbb{R}$ 时，这个参数关系在 3 维空间中的轨迹是一条（经过 $\vec{b}$，沿着 $\vec{a}$ 方向的）直线。

由上述讨论知道，描述直线关系 $\vec{r} = t\vec{a} + \vec{b}$ 我们需要如下两个操作：

1. 加法：可以把两个向量相加，即：$\vec{a} + \vec{b}$。

2. 数乘：可以把一个数乘以一个向量，即：$t\vec{a}$。

简单来说，线性结构就是关于“加法”和“数乘”的结构。一个集合如果有“加法”和“数乘”这两个运算，我们称其为线性空间。为了讨论完备，我们以下给出线性空间的完整数学定义。定义看似很复杂，实际上列出的性质都是比较自然的，很容易在具体例子中检验。

定义 1.1.1 一个数域 k（$k=\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$）上的线性空间（或称向量空间）指的是一个集合 V 以及二元运算

$$\text{加法: } V\times V\xrightarrow{+}V \qquad \text{数乘: } k\times V\to V$$

使得对任何 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V, a,b\in k$，下列性质成立：

1. 加法交换律：$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
2. 加法结合律：$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
3. 零元素：存在唯一元素 $\mathbf{0}\in V$ 使得 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$
4. 负元素：存在唯一的 $-\mathbf{u}\in V$ 使得 $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$
5. 单位元：对 k 中的单位元 1，满足 $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$
6. 数乘结合律：$a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$
7. 分配律（向量加法）；$a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$
8. 分配律（数量加法）：$(a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$

线性空间 V 中的元素称为一个向量。

如不特殊说明，我们考虑实线性空间（即 $k=\mathbb{R}$）。

例 1.1.1. 3 维空间 $\mathbb{R}^3$ 是一个实线性空间

- 加法：对于向量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3),\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$$

- 数乘：对 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和向量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$

$$\lambda\mathbf{u}=(\lambda u_1,\lambda u_2,\lambda u_3)$$

例 1.1.2. 线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量表达为

$$\mathbf{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n), \quad u_i\in\mathbb{R}$$

- 加法：

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,\cdots,u_n+v_n)$$

- 数乘：对 $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda\mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \cdots, \lambda u_n)$$

例 1.1.3. 所有的一元多项式组成的集合 $\mathbb{R}[x]$ 构成一个线性空间。给定两个多项式 $f(x), g(x)$，加法即为多项式相加 $f(x) + g(x)$，数乘即为多项式的数乘 $\lambda f(x)$。

类似的，所有的一元光滑函数构成的空间（记为 $C^\infty(\mathbb{R})$）是一个线性空间。

例 1.1.4. 一个 n 次多项式指的是如下的多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{其中 } a_n \neq 0$$

- 所有 n 次多项式（$n \geq 1$）构成的集合在多项式加法和数乘下，不构成一个线性空间。例如两个 n 次多项式相减可能不再是 n 次多项式。特别地，这个集合不包含零多项式。

- 所有次数 $\leq n$ 的多项式构成的集合在多项式加法和数乘下构成一个线性空间。

例 1.1.5. 量子力学和经典力学的一个本质区别是量子物理态构成一个复线性空间（*Hilbert* 空间）。例如一个量子自旋系统，一个自旋向上的态 $|\uparrow\rangle$ 和一个自旋向下的态 $|\downarrow\rangle$ 可以叠加得到一个新的物理态

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$$

又例如干涉现象的本质也是做线性叠加。

例 1.1.6. 设 $D = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$ 是一个微分算子。则所有满足如下微分方程的函数 $f(x)$

$$\{f(x) | Df(x) = 0\}$$

构成一个线性空间。这是因为如果 $f(x), g(x)$ 满足方程，则

$$D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x) = 0 \implies f(x) + g(x) \text{ 满足方程}$$
$$D(cf(x)) = cDf(x) = 0 \implies cf(x) \text{ 满足方程}$$

1.1.2 直和

给定两个线性空间 V, W，我们可以定义一个新的线性空间 $V \oplus W$ 称为 V 和 W 的直和。作为集合

$$V \oplus W = \{(v, w) | v \in V, w \in W\}$$

加法和数乘定义为

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$
$$\lambda(v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

类似可以定义 m 个线性空间 $V_1, \cdots, V_m$ 的直和

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$$

直和中的元素可以表示为 $(u_1, \cdots, u_m), u_i \in V_i$。

例 1.1.7. 线性空间 $\mathbb{R}^n$ 可以写成 n 个 $\mathbb{R}$ 的直和

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{n}$$

如果 $n = m + k$，我们也可以写成

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^k$$

1.1.3 线性子空间

定义 1.1.2 设 V 是一个数域 k 上的线性空间。V 的一个子集 W 称为 V 的一个线性子空间，如果 W 包含 V 中的零元素 $\mathbf{0}$ 并且 W 中的元素在加法和数乘运算下封闭，即

- 对任意 $w_1, w_2 \in W$，则 $w_1 + w_2 \in W$。
- 对任意 $w \in W$ 和 $\lambda \in k$，则 $\lambda w \in W$。

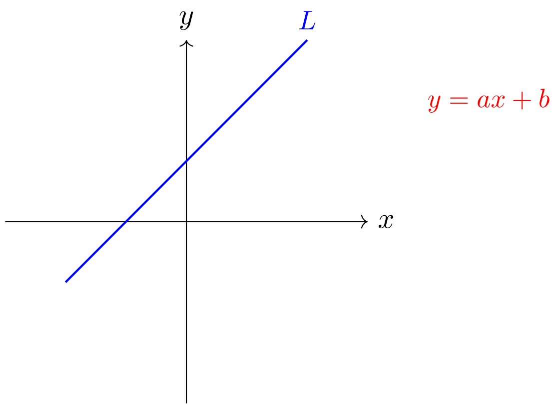
命题 1.1.3 V 的线性子空间是一个线性空间。

证明：设 W 是 V 的线性子空间。验证 $\mathbf{0} \in W$：

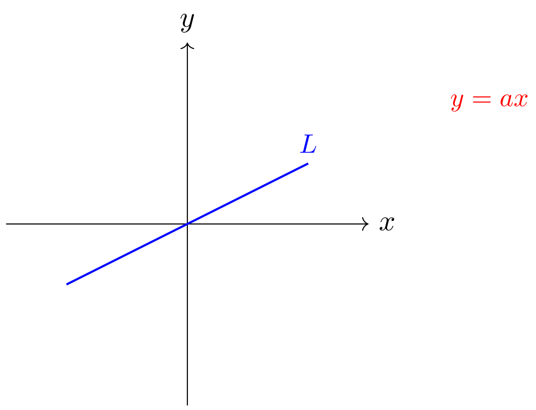
$$\mathbf{0} = w + (-w) \in W \quad 这里\ w \in W$$

容易检验 W 在 V 的加法和数乘运算下构成线性空间。 □

例 1.1.8. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $L = \{(x, y) | y = ax + b\} \subset \mathbb{R}^2$，



则 L 是 $\mathbb{R}^2$ 的线性子空间当且仅当 L 过原点。



实际上，原点 $\mathbf{0}=(0,0)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的零元素，如果 L 是线性子空间则一定包含原点。反之，如果 L 过原点，则直线方程为

$$L=\{(x,y)|y=ax\}$$

若 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in L$，则 $(x_1+x_2,y_1+y_2)\in L$

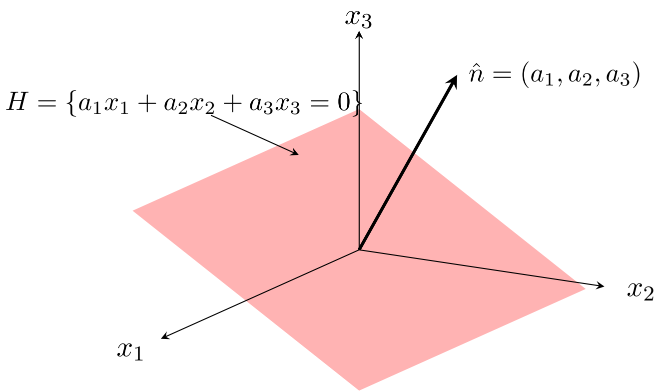
$$y_1+y_2=ax_1+ax_2=a(x_1+x_2)$$

并且 $(\lambda x_1,\lambda y_1)\in L$，即

$$\lambda y_1=\lambda(ax_1)=a(\lambda x_1)$$

因此 L 在加法和数乘下封闭。 □

例 1.1.9. 空间 $\mathbb{R}^3$ 中的平面 $H=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3|a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间当且仅当 H 过原点，即 $b=0$。



例 1.1.10. $V=\mathbb{R}[x]$，$W=\{$次数 $\leq n$ 的一元多项式$\}$。则 $W\subset V$ 是一个线性子空间。

例 1.1.11. $V=\mathbb{R}[x]$，$W_{x_0}=\{f(x)\in V|f(x_0)=0\},x_0\in\mathbb{R}$。则 $W_{x_0}\subset V$ 是线性子空间。对任意 $f(x),g(x)\in W_{x_0}$

$$(f+g)(x_0)=f(x_0)+g(x_0)=0$$

因此 $f+g\in W_{x_0}$。类似可证对 $\lambda\in\mathbb{R}$，$\lambda f\in W_{x_0}$。

例 1.1.12. $V=\mathbb{R}[x]$，$W=\{f(x)\in V|f(0)=1\}$ 不是 V 的线性子空间。例如零函数不在 W 中。

例 1.1.13. 考虑两个线性空间的直和 $V\oplus W$。则

$$V\oplus\mathbf{0}=\{(v,\mathbf{0})|v\in V,\quad \mathbf{0}\in W \text{ 是零元}\}$$
$$\mathbf{0}\oplus W=\{(\mathbf{0},w)|w\in W,\quad \mathbf{0}\in V \text{ 是零元}\}$$

是 $V\oplus W$ 的线性子空间。这是因为零元满足

$$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0},\quad \lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

例 1.1.14. $V = C^{\infty}(\mathbb{R})$，$W$ 为 V 中满足如下微分方程的解

$$f'(x) = 2f(x)$$

W 是 V 的线性子空间。不难解出

$$W = \{ce^{2x}\}_{c\in\mathbb{R}}$$

例 1.1.15. $V = C^{\infty}(\mathbb{R})$，$W$ 为 V 中满足如下微分方程的解

$$f''(x) + f(x) = 0$$

W 是 V 的线性子空间。不难解出

$$W = \{a\sin(x) + b\cos(x)\}_{a,b\in\mathbb{R}}$$

例 1.1.16. 在量子力学中，满足定态薛定谔方程

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

的波函数 $\psi(x)$ 构成态空间的线性子空间。E 称为“能量本征值”，对应子空间包含能量 E 的量子态。

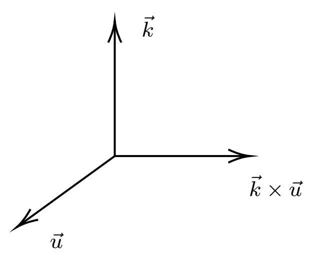
例 1.1.17. 真空中麦克斯韦方程

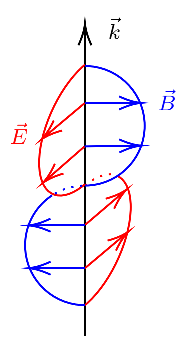
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

的解是一个线性空间。固定波矢 $\vec{k}$ 的如下解

$$\{\vec{E}|\vec{E} = \vec{u}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\}_{\vec{u}\text{与}\vec{k}\text{垂直}}$$

是一个由线偏振光构成的线性子空间。





> **命题 1.1.4** V 的任意个线性子空间的交是线性子空间。

证明：设 $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 V 的线性子空间。设

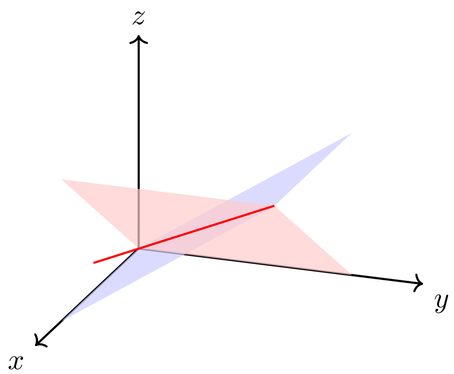
$$v_1, v_2 \in \bigcap_{\alpha\in I} W_\alpha$$

则对每个 $\alpha \in I$，我们有 $v_1 + v_2 \in W_\alpha$，因此

$$v_1 + v_2 \in \bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha$$

类似可证 $\lambda v_1 \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} W_\alpha$。 $\square$

例 1.1.18. $\mathbb{R}^3$ 中不平行的两个平面的交是一条直线



例 1.1.19. $V = C^\infty(\mathbb{R})$，U 为 V 中满足如下方程的解

$$f''(x) + f(x) = 0, \quad f(0) = 0.$$

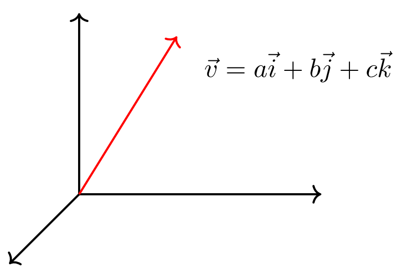
U 是 V 的两个线性子空间 $\{f \in V | f''(x) + f(x) = 0\}$ 和 $\{f \in V | f(0) = 0\}$ 的交，因此是线性子空间。具体而言

$$U = \{a \sin(x)\}_{a \in \mathbb{R}}.$$

1.2 线性组合与线性相关性

1.2.1 线性组合

线性空间中的元素通常可以通过一些比较基本的元素表达出来。例如可以把 $\mathbb{R}^3$ 中的矢量写成



这里 $\vec{v} = (a, b, c)$。$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 是单位向量

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

定义 1.2.1 设 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m \in V$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in k$。则向量

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m$$

称为向量 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 的线性组合，或者称 $\mathbf{u}$ 可以由 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 线性表达。所有可以由 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 线性表达的向量构成的集合记为

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$$

命题 1.2.2 $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ 是 V 的线性子空间。

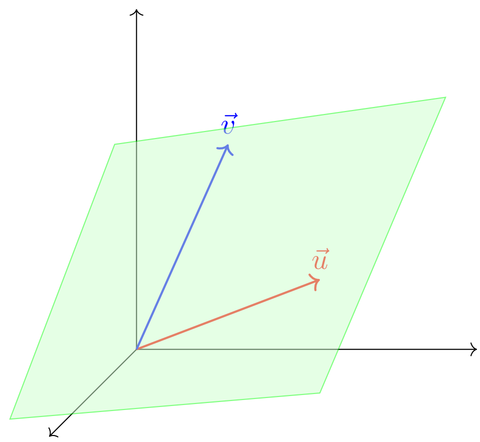
证明：设 $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$，即

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{v}_m \qquad \mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_m \mathbf{v}_m$$

$$\Longrightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_m + \beta_m)\mathbf{v}_m$$

属于 $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$。类似可证数乘封闭。 □

例 1.2.1. $\mathbb{R}^3$ 中 $\mathrm{Span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ 是由 $\vec{u}, \vec{v}$ 两个向量张成的平面（这里假设 $\vec{u}, \vec{v}$ 不共线）



例 1.2.2. 微分方程

$$f''(x) + f(x) = 0$$

所有的解构成的线性空间可以写成

$$\mathrm{Span}\{\cos(x), \sin(x)\}$$

线性表达的方式有可能并不唯一。例如考虑

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 0), \quad \vec{v}_2 = (0, 1, -1), \quad \vec{v}_3 = (1, 0, -1)$$

则向量 $\vec{u} = (2, 0, -2)$ 可以线性表达为

$$\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

也可以线性表达为

$$\vec{u} = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$

那么什么时候线性表达的方式是唯一的？为了回答这个问题，需要引入线性相关的概念。

1.2.2 线性相关性

定义 1.2.3 V 中向量 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 称为是线性相关的，如果存在不全为 0 的数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in k$ 使得

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

否则，称 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 是线性无关的。

如果 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 是线性相关的，即存在不全为 0 的数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in k$ 使得

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

不妨设其中 $\lambda_i \neq 0$，则

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = -\frac{1}{\lambda_i} (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + \lambda_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \cdots \lambda_m \mathbf{v}_m)$$

即 $\mathbf{v}_i$ 可以由其他的向量线性表达。

反之亦然，如果 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 中有某个向量可以被其他向量线性表达，不妨设

$$\mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \cdots \alpha_m \mathbf{v}_m$$

则

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + (-1) \mathbf{v}_i + \alpha_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \cdots \alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

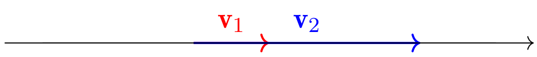
因此 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 线性相关。由此我们证明了如下结论

命题 1.2.4 向量 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 线性相关当且仅当存在其中某个向量可以被其他向量线性表达。

因此我们可以把线性相关的向量理解为这些向量中有冗余的线性信息。

例 1.2.3. 两个非零向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是线性相关的当且仅当它们在同一直线上，即存在 $\lambda \neq 0$ 使得

$$\mathbf{v}_2 = \lambda \mathbf{v}_1$$



例 1.2.4. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的向量

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 0), \quad \vec{v}_2 = (0, 1, -1), \quad \vec{v}_3 = (-1, 0, 1)$$

可以看出

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \mathbf{0}$$

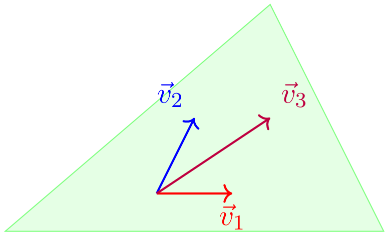
因此它们是线性相关的。比如 $\vec{v}_3$ 可以线性表达为

$$\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

例 1.2.5. $\mathbb{R}^3$ 中的 *3* 个向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 是线性相关的当且仅当它们在同一个平面上。实际上，不妨设

$$\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2.$$

则 $\vec{v}_3$ 包含在 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 张成的平面。



1.2.3 线性无关性

下面我们来考察线性无关性。$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 是线性无关的等价表述为：如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in k$ 满足

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

则一定有

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$$

换言之，零元只能由 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 平凡地线性表达。

例 1.2.6. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中相互垂直的单位向量

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

假如有 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\lambda_1\vec{i} + \lambda_2\vec{j} + \lambda_3\vec{k} = \mathbf{0}$$

即 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathbf{0}$ 是零向量，则每个分量都是 0

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

因此 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 是线性无关的。它们不在同一平面上。

命题 1.2.5 假设 $S = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ 线性无关，则 S 的任意子集的向量组都是线性无关的。

证明：不妨考虑子集 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s\}$ $(s \leq m)$。假设

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

把它写成

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s\mathbf{v}_s + 0\mathbf{v}_{s+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

由 S 的线性无关性可以推知 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$。因此 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s\}$ 是线性无关的。 □

例 1.2.7. 我们知道 $\mathbb{R}^3$ 中向量

$$\vec{i} = (1,0,0) \quad \vec{j} = (0,1,0) \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

是线性无关的。因此其中任意两个，比如 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$，是线性无关的。

命题 1.2.6 假设 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 线性无关，$\mathbf{u}$ 是它们的线性组合。则存在唯一的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in k$ 使得

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m$$

证明：假设 $\mathbf{u}$ 有两个线性表达

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m \quad \mathbf{u} = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_m \mathbf{v}_m$$

两式相减我们得到

$$(\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\lambda_m - \mu_m)\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

由线性无关性可知，$\lambda_1 = \mu_1, \cdots, \lambda_m = \mu_m$. □

因此如果 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 是线性无关的向量，则 $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ 中任一向量 $\mathbf{u}$ 可以唯一表达为

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m$$

因此 $\mathbf{u}$ 可以一一对应于一组数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$。这组数可以想象成标识 $\mathbf{u}$ 的“坐标”。我们之后将会系统讨论这个坐标表达的方法。

例 1.2.8. 平面 $\mathbb{R}^2$ 中的向量 $\vec{v}_1 = (1,0)$ 和 $\vec{v}_2 = (1,1)$ 不共线，因此是线性无关的。它们的线性组合张成整个平面

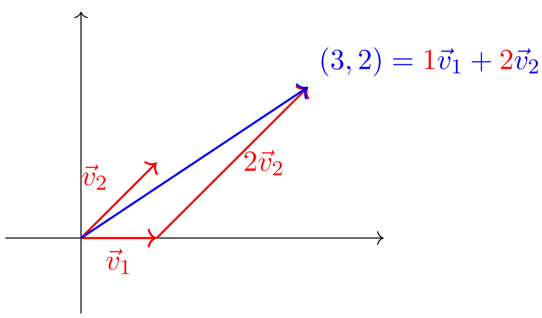
$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

对于向量 $\vec{u} = (a,b)$，我们把它线性表达为

$$(a,b) = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2)$$

对比分量我们可以解出 $\lambda_1 = a - b, \lambda_2 = b$。例如

$$(3,2) = 1\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$



向量 $(3,2)$ 如果用 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 来线性表达的话，它被标记的“坐标”是 1 和 2。这个和原始的坐标 3 和 2 是不一样的。我们之后会详细讨论它们的关系。

定义 1.2.7 设 $S,T \subset V$ 是线性空间 V 的两个子集。我们称 S 可以由 T 线性表达，如果 S 中的每个向量都可以由 T 线性表达，即

$$S \subset \text{Span } T$$

S 和 T 称为线性等价，如果 S 和 T 可以相互线性表达，即 S 可以被 T 线性表达，T 可以被 S 线性表达。

命题 1.2.8 S 可以被 T 线性表达当且仅当 $\operatorname{Span} S \subset \operatorname{Span} T$

证明：假设 $\operatorname{Span} S \subset \operatorname{Span} T$。由 $S \subset \operatorname{Span} S$ 知 $S \subset \operatorname{Span} T$，即 S 可以被 T 线性表达。

反之，假设 S 可以被 T 线性表达。对 $\operatorname{Span} S$ 中任一向量 $\mathbf{u}$，它可以线性表达为

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m \quad \text{其中} \quad \mathbf{v}_i \in S \subset \operatorname{Span} T$$

$\operatorname{Span} T$ 是线性空间，因此 $\mathbf{u} \in \operatorname{Span} T$。 □

命题 1.2.9 S 和 T 线性等价当且仅当 $\operatorname{Span} S = \operatorname{Span} T$。

证明：由前述命题可知

$$S \text{ 可以被 } T \text{ 线性表达} \Leftrightarrow \operatorname{Span} S \subset \operatorname{Span} T$$
$$T \text{ 可以被 } S \text{ 线性表达} \Leftrightarrow \operatorname{Span} T \subset \operatorname{Span} S$$

因此 S 和 T 线性等价当且仅当 $\operatorname{Span} S = \operatorname{Span} T$。 □

例 1.2.9. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的向量。如果两个向量 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 不共线，另外两个 $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ 也不共线，则

$$\operatorname{Span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\} = \mathbb{R}^2 = \operatorname{Span}\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$$

都张成整个平面，故 $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ 与 $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ 线性等价。

例 1.2.10. 设 $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 不共线的两个向量，$T=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 另外两个不共线的向量。则 S 与 T 线性等价当且仅当 S 和 T 张成 $\mathbb{R}^3$ 中同一个平面。

1.3 基与维数

1.3.1 线性空间的基

线性空间中的元素可以通过一些更基本的向量来线性表达。这个想法给出了“基”的概念。

定义 1.3.1 线性空间 V 的一组向量 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 称为 V 的一组基，如果它们线性无关，并且 V 中的每个向量都可以通过它们来线性表达，即

$$V = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}.$$

我们只考虑有限个向量构成一组基的情况。有时候还需要无穷个向量来构成一组基（例如量子力学中的态空间），这个是泛函分析里讨论的内容。我们这里不考虑无穷的情况。

考虑实线性空间 V。如果 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 构成 V 的一组基，那么 V 中任一向量 $\mathbf{u}$ 可以唯一地写成

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

反之，给定实数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，上述公式给出了 V 中的一个向量。由此我们证明了如下结论。

命题 1.3.2 设 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基。则映射

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\to V \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) &\mapsto \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

给出了 $\mathbb{R}^n$ 和 V 之间的一一对应。

因此，如果我们找到 V 的一组基，那么就可以用一串数字 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 来唯一的表示 V 中的向量。

例 1.3.1. $\mathbb{R}^3$ 中相互垂直的单位向量

$$\vec{i} = (1,0,0) \quad \vec{j} = (0,1,0) \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。任一向量 (a,b,c) 可以表达为

$$(a,b,c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

因此向量 (a,b,c) 可以通过 a,b,c 这 3 个数字来标记。

例 1.3.2. 类似的，$\mathbb{R}^n$ 中的一组向量

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1,0,\cdots,0) \\ \vec{e}_2 &= (0,1,\cdots,0) \\ &\cdots \\ \vec{e}_n &= (0,0,\cdots,1) \end{aligned}$$

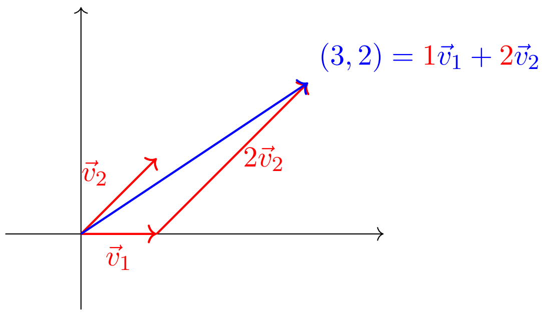
构成了 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，称为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。

例 1.3.3. $V = \mathbb{R}^2$ 中的向量 $\vec{v}_1 = (1,0)$ 和 $\vec{v}_2 = (1,1)$ 构成一组基。对于向量 $\vec{u} = (a,b)$，我们把它线性表达为

$$(a,b) = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2)$$

这组基给出了一个一一对应

$$
\begin{aligned}
\varphi: \mathbb{R}^2 &\to \qquad V \\
(\lambda_1, \lambda_2) &\mapsto \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2)
\end{aligned}
$$



这里 φ 将基坐标 $(1,2)$ 对应到向量 $1\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$

$$\varphi : (1,2) \to 1\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = (3,2)$$

1.3.2 维数

自然有如下两个问题。第一，如何构造一组基？第二，注意到基的选取并不唯一，那么不同的基之间是什么关系？

假设 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 是 V 的一组基，$\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$ 是 V 的另一组基。我们下面证明 $n = m$，即不同基中的向量个数一定是一样的。

引理 1.3.3 假设非零向量 $\mathbf{u}$ 可以由一组向量 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 线性表达，则存在 i 使得

$$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\} \text{ 与 } \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_{i+1}, \cdots, \mathbf{v}_n\} \text{ 线性等价。}$$

证明：$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$。不妨设 $\lambda_i \neq 0$，则

$$\mathbf{v}_i = -\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{u} + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n)$$

因此

$$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_{i+1}, \cdots, \mathbf{v}_n\}$$

另一方面显然有

$$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_{i+1}, \cdots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$$

□

命题 1.3.4 假设 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$ 线性无关，并可以由一组向量 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 线性表达。则可以用 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$ 替换掉 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 中的某 m 个向量并保持其与 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 线性等价。特别的，我们有 $m \leq n$。

证明：由假设 $\mathbf{u}_1 \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$。由引理1.3.3知存在某个 $\mathbf{v}_i$，不妨设是 $\mathbf{v}_1$，使得

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$$

下面考虑 $\mathbf{u}_2$。由假设 $\mathbf{u}_2 \in \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$，于是

$$\mathbf{u}_2 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots \lambda_n \mathbf{v}_n$$

其中 $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 不能全为 0，否则 $\mathbf{u}_2 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$ 与 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 线性无关的假设矛盾。不妨设 $\lambda_2 \neq 0$，则由引理1.3.3知

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3 \cdots, \mathbf{v}_n\}.$$

重复这个过程，我们证明可以用 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$ 替换掉 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 中的 m 个向量并保持线性等价性。特别的必然有 $m \leq n$。 □

命题 1.3.5 假设 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 是 V 的一组基，$\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$ 是 V 的另一组基，则 $n = m$。

证明：由假设，$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 线性无关，并且可以被 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$ 线性表达。由命题1.3.4知

$$n \leq m.$$

同理知 $m \leq n$。因此 $n = m$。 □

定义 1.3.6 设 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 是线性空间 V 的一组基，则 n 称为 V 的维数，记为

$$\dim V = n.$$

V 称为一个 n 维线性空间。

由命题1.3.5知，这样定义的维数其实与基的选取没有关系，是 V 本身的性质。当然也存在无穷维的线性空间，我们这里只讨论有限维的情况。

例 1.3.4. $\mathbb{R}^n$ 中的一组基为

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, \cdots, 0) \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, \cdots, 0) \\ &\vdots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, \cdots, 1) \end{aligned}$$

因此 $\mathbb{R}^n$ 的维数是 n。

例 1.3.5. 微分方程

$$f''(x) + f(x) = 0$$

解构成的空间 V 的一组基是 $\{\cos(x), \sin(x)\}$，因此 $\dim V = 2$。

命题 1.3.7 设 V 是 n 维线性空间，$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 是 n 个线性无关的向量。则它们构成 V 的一组基。

证明：由定义，V 存在一组基 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n\}$。由于 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 线性无关，且可以由 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ 线性表达，由命题1.3.4知可以用 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 替换 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ 中的 n 个向量（即全部替换），使得

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n\} = V$$

因此 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 是 V 的一组基。 □

因此在 n 维空间里找一组基，等价于找 n 个线性无关的向量。

例 1.3.6. $\mathbb{R}^3$ 中任意 3 个不共面的向量 $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ 线性无关，因此构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

命题 1.3.8 设 V 是一个 n 维线性空间，U 是线性子空间，则

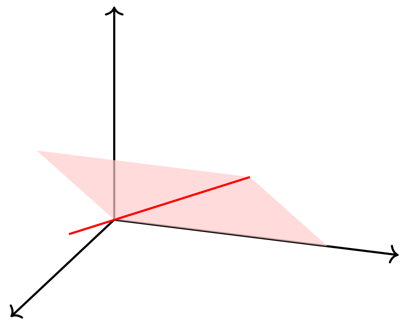
$$\dim U = m \le \dim V = n$$

并且 U 的任意一组基 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$ 可以扩展为 V 的一组基 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \cdots, \mathbf{v}_n\}$。

证明：选 U 的基 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$，$V$ 的基 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$。由于 $U \subset V$，则 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$ 线性无关且可以由 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 线性表达。由命题1.3.4知 $m \le n$，并且可以用 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m\}$ 替换 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 中 m 个向量构成 V 的基，从而扩展性得证。 □

例 1.3.7. 设 H 是 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的一个平面，L 是 H 中过原点的一条直线。则 $L \subset H \subset \mathbb{R}^3$

$$\dim L = 1 < \dim H = 2 < \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$



1.3.3 向量组的秩

定义 1.3.9 设 S 是 V 的一组向量。如果 S 中的向量 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r\}$ 线性无关，并且对任意 $\mathbf{u} \in S$，向量 $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r\}$ 均线性相关。我们称 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r\}$ 是 S 的一个极大线性无关组。

命题 1.3.10 S 中的向量 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r\}$ 构成 S 的一个极大线性无关组当且仅当它们是 $\mathrm{Span}\, S$ 的一组基。因此

$$r = \dim \mathrm{Span}\, S$$

证明：假设 $\{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r\}$ 是 $\mathrm{Span}\,S$ 的一组基。则任意 $\mathbf{u}\in S$ 可以写成 $\mathbf{u}=\lambda_1\mathbf{u}_1+\cdots\lambda_r\mathbf{u}_r$，于是 $\{\mathbf{u},\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r\}$ 线性相关。由 $\{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r\}$ 是线性无关的，因此它们是极大线性无关组。

反之，假设 $\{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r\}$ 是极大线性无关组。则对任意 $\mathbf{u}\in S$，$\{\mathbf{u},\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r\}$ 是线性相关的，即存在

$$\lambda_0\mathbf{u}+\lambda_1\mathbf{u}_1+\cdots+\lambda_r\mathbf{u}_r=\mathbf{0}$$

这里 λ_i 不全为 0。如果 $\lambda_0=0$，由 $\{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r\}$ 线性无关知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=0$，矛盾。故 $\lambda_0\neq 0$，因此 $\mathbf{u}$ 可以由 $\{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r\}$ 线性表达。由 $\mathbf{u}$ 的任意性知 S 中元素均可以由 $\{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r\}$ 线性表达，因此

$$\mathrm{Span}\,S=\mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r\}.$$

这说明 $\{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r\}$ 构成 $\mathrm{Span}\,S$ 的一组基。 □

由此我们知道，不同的极大线性无关组包含的向量个数是一样的，都是 S 张成的线性空间的维数。S 的一组极大线性无关组刨除了 S 中的冗余向量，并保留了 S 中包含的所有线性信息。

定义 1.3.11 一组向量 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m\}$ 的极大线性无关组的向量个数 $r=\dim\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m\}$ 称为向量组 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m\}$ 的秩，记为

$$r=\mathrm{rank}\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m\}.$$

一组向量的秩描述了它们张成线性空间的维数。

例 1.3.8. 如果一组向量 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m\}$ 是线性无关的，那么

$$\mathrm{rank}\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m\}=m.$$

例 1.3.9. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的一组向量

$$\vec{v}_1=(1,-1,0),\quad \vec{v}_2=(0,1,-1),\quad \vec{v}_3=(-1,0,1)$$

它们满足

$$\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3=\mathbf{0}$$

容易看出 $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ 构成极大线性无关组。比如 $\vec{v}_3$ 可以线性表达为 $\vec{v}_3=-\vec{v}_1-\vec{v}_2$。同理 $\{\vec{v}_1,\vec{v}_3\}$ 或者 $\{\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ 均是极大线性无关组。这组向量的秩是 2。

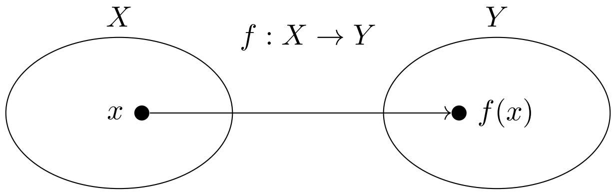
1.4 线性映射与矩阵

1.4.1 集合的映射

两个集合 X,Y 之间的一个映射

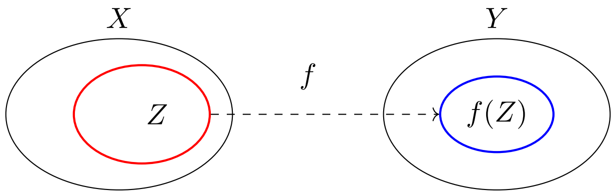
$$f:X\to Y$$

指的是一个对应法则，将 X 中的一个元素 x 唯一对应到 Y 中的一个元素 y，记为 $y=f(x)$



设 $f : X \to Y$ 是一个映射。X 的一个子集 Z 在 f 下的像，指的是所有由 Z 中的元素在映射 f 下构成的 Y 中元素的集合，记为 $f(Z) \subset Y$

$$f(Z) := \{y \in Y |\ 存在\ \ x \in Z\ \ 使得\ y = f(x)\}$$



我们记 $\mathrm{im}(f) := f(X)$，称为映射 f 的像。

定义 1.4.1 映射 $f : X \to Y$ 称为是一个满射，如果

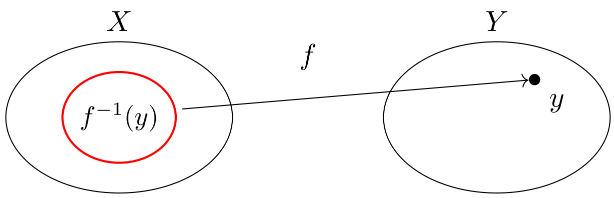
$$\mathrm{im}(f) = Y$$

即 Y 中每个元素都通过 f 对应于 X 中某个元素。
映射 $f : X \to Y$ 称为一个单射，如果对任意两个元素 $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

即不同的元素的像也一定是不同的。
$y \in Y$ 在映射 $f : X \to Y$ 下的原像定义为

$$f^{-1}(y) = \{x \in X |\ f(x) = y\ \}.$$



如果 $y \notin \mathrm{im}(f)$，则 $f^{-1}(y) = \varnothing$ 是空集。

不难看出，$f : X \to Y$ 是单射当且仅当对任意 $y \in \mathrm{im}(f)$，$f^{-1}(y)$ 只含有一个元素。

定义 1.4.2 映射 $f : X \to Y$ 称为是一一映射，如果 f 即是单射也是满射。此时 f 给出了集合 X 和 Y 之间的一个一一对应关系。

1.4.2 线性映射

下面我们考虑两个线性空间之间的映射。由于线性空间上具有线性结构，我们关注那些保持线性结构的映射。这样的映射称为线性映射。

定义 1.4.3 两个线性空间 V, W 之间的映射 $f : V \to W$ 称为一个线性映射，如果 f 满足

- 保加法：对任意的 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2),$$

- 保数乘：对任意的 $\mathbf{v} \in V, \lambda \in k$

$$f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}).$$

特别的，f 一定把零向量映到零向量。

例 1.4.1. 考虑如下映射 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，记作 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

- $f(x, y) = x$. f 是一个线性映射
- $f(x, y) = 2x + 3y$. f 是一个线性映射
- $f(x, y) = 2x + 3y - 1$. f 不是一个线性映射
- $f(x, y) = x^2 + y$. f 不是一个线性映射

例 1.4.2. 设 $V = \mathbb{R}[x]$ 是一元多项式空间。给定 $a \in \mathbb{R}$，我们定义赋值映射

$$\delta_a : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad \delta_a(f) := f(a)$$

则 δ_a 是一个线性映射：

- $\delta_a(f + g) = f(a) + g(a) = \delta_a(f) + \delta_a(g)$
- $\delta_a(\lambda f) = \lambda f(a) = \lambda \delta_a(f)$

例 1.4.3. 类似的，给定 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$，赋值映射

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}[x] &\to \mathbb{R}^n \\ \delta(f) &:= (f(a_1), \cdots, f(a_n)) \end{aligned}$$

是一个线性映射。而映射

$$\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = f(a_1) \cdots f(a_n)$$

不是一个线性映射（$n > 1$）。

命题 1.4.4 设 $f:V\to W$ 是一个线性映射，$\mathbf{v}_i\in V,\lambda_i\in k$。则

$$f(\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_m\mathbf{v}_m)=\lambda_1 f(\mathbf{v}_1)+\cdots+\lambda_m f(\mathbf{v}_m).$$

即 f 保持线性组合的结构。

证明：

$$f(\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_m\mathbf{v}_m)\overset{\text{保加法}}{=}f(\lambda_1\mathbf{v}_1)+\cdots+f(\lambda_m\mathbf{v}_m)\overset{\text{保数乘}}{=}\lambda_1 f(\mathbf{v}_1)+\cdots+\lambda_m f(\mathbf{v}_m)$$

□

命题 1.4.5 设 V,W,U 是线性空间，$f:V\to W$ 和 $g:W\to U$ 是线性映射。则复合 $g\circ f:V\to U$ 也是线性映射。

证明：对任意 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V$，由 f,g 的线性性

$$g\Big(f(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\Big)=g\Big(f(\mathbf{v}_1)+f(\mathbf{v}_2)\Big)=g\Big(f(\mathbf{v}_1)\Big)+g\Big(f(\mathbf{v}_2)\Big)$$

因此 $g\circ f$ 保加法。类似可证 $g\circ f$ 保数乘。 □

例 1.4.4.

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=(-y,x)$$

是一个线性映射，表示平面上逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$。f 和它自己的复合

$$f\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\to(-x,-y)$$

也是线性映射，表示平面上逆时针旋转 π。

命题 1.4.6 设 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 是 V 的一组基。则一个线性映射 $f:V\to W$ 完全由 f 在 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 上的值决定。

证明：假设 $\mathbf{w}_1=f(\mathbf{v}_1),\cdots,\mathbf{w}_n=f(\mathbf{v}_n)$。则对 V 中任意向量 $\mathbf{v}$，它可以唯一表达为线性组合

$$\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_n\mathbf{v}_n.$$

则由 f 的线性性，我们得到

$$f(\mathbf{v})=\lambda_1\mathbf{w}_1+\cdots+\lambda_n\mathbf{w}_n$$

被 $\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_n$ 完全确定了。 □

例 1.4.5. $\mathbb{R}^n$ 中的一组基为

$$\begin{aligned}\vec{e}_1&=(1,0,\cdots,0)\\ \vec{e}_2&=(0,1,\cdots,0)\\ &\vdots\\ \vec{e}_n&=(0,0,\cdots,1)\end{aligned}$$

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是线性映射并且 $f(\vec{e}_i)=a_i$，则

$$f(\vec{x})=f(x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

1.4.3 矩阵

下面我们讨论线性映射

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

我们说明这样一个线性映射可以通过矩阵来描述。为了方便，我们将 $\mathbb{R}^n$ 中的元素写成列向量

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\quad\in\mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$ 的一组标准基记为

$$\vec{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\quad,\quad\vec{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\quad\cdots\quad\vec{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 由一组基的值确定。设

$$f(\vec{e}_1)=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},f(\vec{e}_2)=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}\quad\cdots\quad f(\vec{e}_n)=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$$

则这些向量 $f(\vec{e}_1),\cdots,f(\vec{e}_n)\in\mathbb{R}^m$ 决定了线性映射 f 在所有 $\mathbb{R}^n$ 上的取值。对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个向量 $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$，我们有

$$f(\vec{x})=f(x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n)\overset{\text{线性性}}{=}x_1f(\vec{e}_1)+\cdots+x_nf(\vec{e}_n)$$

代入 $f(\vec{e}_i)$ 的值，我们得到

$$f(\vec{x})=x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}\cdots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}$$

我们把 $\mathbb{R}^m$ 中的向量 $f(\vec{e}_1),\cdots,f(\vec{e}_n)$ 排列在一起

$$\begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2)\cdots & f(\vec{e}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

右边这个表达方式称为一个 $m\times n$ 的矩阵。m 表示这个矩阵的行数，n 表示这个矩阵的列数。

命题 1.4.7 我们有一一对应

$$\begin{aligned} \{\text{线性映射 } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\} &\iff \{m\times n \text{ 的矩阵}\} \\ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m &\iff \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2)\cdots & f(\vec{e}_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由上述讨论，给定线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，我们将它对应于矩阵（$A$ 称为 f 的矩阵表示）

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

其中 A 的第 k 列对应于 $f(\vec{e}_k)$，$k=1,...,n.$

反之，给定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A 的列向量决定了一个线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

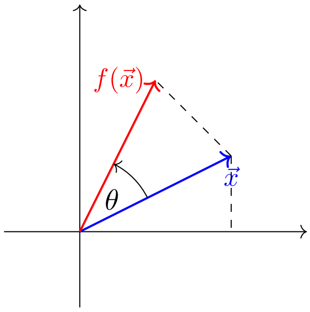
例 1.4.6. 线性映射 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 对应于矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这是一个 2 行 3 列的矩阵，即 2×3 矩阵。

例 1.4.7. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 给出一个线性映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$f:\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix} \cos\theta\ x_1-\sin\theta\ x_2 \\ \sin\theta\ x_1+\cos\theta\ x_2 \end{bmatrix}$$



1.4.4 像与核

定义 1.4.8 设 V,W 是线性空间，$f:V\to W$ 是一个线性映射。

- 映射 f 的像定义为
$$\mathrm{im}(f)=f(V)\subset W$$
- 映射 f 的核定义为
$$\ker(f)=\{v\in V\mid f(v)=\mathbf{0}\}\subset V$$
即 $\mathbf{0}$ 在 f 下的原像。

命题 1.4.9 设 $f:V\to W$ 是线性映射，则 $\mathrm{im}(f)$ 是 W 的线性子空间。

证明: 首先，$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，所以 $\mathbf{0}\in\mathrm{im}(f)$。

其次，任取 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in\mathrm{im}(f)$，存在 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V$ 使得 $f(\mathbf{v}_1)=\mathbf{w}_1$，$f(\mathbf{v}_2)=\mathbf{w}_2$。于是

$$\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2=f(\mathbf{v}_1)+f(\mathbf{v}_2)=f(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\in\mathrm{im}(f)$$

最后，任取 $c\in k$，有

$$c\mathbf{w}_1=cf(\mathbf{v}_1)=f(c\mathbf{v}_1)\in\mathrm{im}(f)$$

因此，$\mathrm{im}(f)$ 是 W 的子空间。 □

命题 1.4.10 设 $f:V\to W$ 是线性映射，则 $\ker(f)$ 是 V 的线性子空间。

证明: 首先，$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，所以 $\mathbf{0}\in\ker(f)$。

其次，任取 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in\ker(f)$，则 $f(\mathbf{v}_1)=f(\mathbf{v}_2)=\mathbf{0}$。于是

$$f(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=f(\mathbf{v}_1)+f(\mathbf{v}_2)=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}\quad\Longrightarrow\quad\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\in\ker(f)$$

最后，任取 $c \in k$，有

$$f(c\mathbf{v}_1) = cf(\mathbf{v}_1) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

所以 $c\mathbf{v}_1 \in \ker(f)$。因此，$\ker(f)$ 是 V 的子空间。 □

例 1.4.8. 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

其对应于线性映射 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

容易看出，$\mathrm{im}(f)$ 为由 A 的列向量张成的线性空间。$\ker(f)$ 中的向量 $\vec{x}$ 为方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解。这是我们在下一章中将重点讨论的内容。

命题 1.4.11 线性映射 $f: V \to W$ 是单射当且仅当 $\ker(f) = \mathbf{0}$。

证明: 必要性显然，下面证明充分性。设 $\ker(f) = \mathbf{0}$。假设有两个向量 $v_1, v_2 \in V$ 满足 $f(v_1) = f(v_2)$，由 f 的线性性知

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad v_1 - v_2 \in \ker(f)$$

因此 $v_1 - v_2 = \mathbf{0}$，即 $v_1 = v_2$。 □

定义 1.4.12 线性映射 $f: V \to W$ 称为是一个线性同构，如果 f 是一个一一映射。

上述命题知，f 是一个线性同构当且仅当 $f(V) = W$（即满射）且 $\ker(f) = \mathbf{0}$（即单射）。

命题 1.4.13 如果 $f: V \to W$ 是一个线性同构，则它的逆映射 $f^{-1}: W \to V$ 是一个线性映射，因此 f^{-1} 也是一个线性同构。

证明留作练习。线性同构给出一个等价关系，同构的线性空间本质上可以看作是等价的空间。

1.5 习题

1. 判断下列集合是否构成 $\mathbb{R}^3$ 上的线性子空间，并说明理由：

   (a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x + y + z = 0\}$

   (b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x + y + z = 1\}$

   (c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$

   (d) $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x = 2y, z = 3y\}$

   (e) $V_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x \geq 0, y \geq 0\}$

2. 判断下列函数集合是否构成线性空间并说明理由，其中加法和数乘定义为函数的加法和数乘：

   (a) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \ f(0) = 0\}$

   (b) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \ f(x) = ax + b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$

3. 设向量 $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 1)$。

   (a) 判断向量组 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 是否线性相关。若线性相关，找出线性相关的系数。

   (b) 判断 $\mathbf{u}_1 = (1, 5, 9)$ 是否可以表示为 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ 的线性组合。若可以，找出线性组合的系数。

   (c) 判断 $\mathbf{u}_2 = (4, 7, 11)$ 是否可以表示为 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ 的线性组合。若可以，找出线性组合的系数。

4. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上所有次数不超过 2 的多项式构成的线性空间。

   (a) 证明向量组 $\{1, x, x^2\}$ 线性无关。

   (b) 向量组 $\{1 + x, 1 - x, x^2\}$ 是否线性相关？说明理由

   (c) 向量组 $\{1, x, x^2, 1 + 2x + 3x^2\}$ 是否线性相关？说明理由

   (d) 设 $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 1 - x$, $p_3(x) = x^2$。多项式 $q(x) = 2x^2 + 3x + 4$ 是否可以表示为 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ 的线性组合？如果是，请给出具体的线性组合表示。

   (e) 多项式 $r(x) = x^2 - 1$ 是否可以表示为 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ 的线性组合？如果是，请给出具体的线性组合表示。

5. 证明：设 $S \subset V$ 是线性空间 V 的子集。证明 $\operatorname{Span} S$ 是包含 S 的最小的线性子空间。

6. 证明：若向量组 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ 线性相关，则向量组 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}\}$ 也线性相关。

7. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$。已知 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 线性无关，且 $\mathbf{v}_3$ 不能表示为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 的线性组合。证明：$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 线性无关。

8. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in V$。证明：若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ 线性无关，且 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n, \mathbf{u}$ 线性相关，则 $\mathbf{u}$ 可以表示为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ 的线性组合。

9. 判断下列向量组是否构成 $\mathbb{R}^4$ 的一组基:

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0,0), \quad \mathbf{v}_2 = (1,1,0,0), \quad \mathbf{v}_3 = (1,1,1,0), \quad \mathbf{v}_4 = (1,1,1,1).$$

10. 设 W 是 $\mathbb{R}^3$ 中所有满足 $x+2y-z=0$ 的向量 (x,y,z) 构成的子空间. 求 W 的一组基和维数.

11. 设 W 是 $\mathbb{R}^4$ 中所有满足 $x_1+x_2-x_3+x_4=0$ 和 $2x_1-x_2+x_3-2x_4=0$ 的向量 (x_1,x_2,x_3,x_4) 构成的子空间. 求 W 的一组基和维数.

12. 设 $M_{m\times n}$ 是所有 $m\times n$ 矩阵构成的向量空间. 求 $M_{m\times n}$ 的一组基和维数.

13. 求下列向量组的秩和一个极大线性无关组:

    (a) $\mathbf{v}_1 = (1,2,3), \quad \mathbf{v}_2 = (2,1,0), \quad \mathbf{v}_3 = (3,3,3).$

    (b) $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0), \quad \mathbf{v}_2 = (0,1,0,1), \quad \mathbf{v}_3 = (1,1,1,1), \quad \mathbf{v}_4 = (2,1,2,1).$

14. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但不能由 α_1,α_2 线性表示. 判断向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\beta\}$ 是否构成 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta\}$ 的极大线性无关组，并证明你的结论.

15. 设向量组 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_s$ 可由向量组 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ 线性表示. 证明:

$$\operatorname{rank}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_s\} \le \operatorname{rank}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t\}$$

16. 设向量组 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_s$ 和向量组 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ 等价. 证明:

$$\operatorname{rank}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_s\} = \operatorname{rank}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t\}$$

17. 设 W_1,W_2 都是有限维线性空间 V 的线性子空间。证明 $W_1=W_2$ 当且仅当 $W_1\subset W_2$ 且 $\dim W_1=\dim W_2$。

18. 设 W_1,W_2 都是线性空间 V 的线性子空间。

    (a) 举例说明它们的并集 $W_1\cup W_2=\{v|v\in W_1 \text{ 或 } v\in W_2\}$ 不一定是线性子空间。

    (b) 证明 $W_1\cup W_2$ 是线性子空间当且仅当 $W_1\subset W_2$ 或者 $W_2\subset W_1$。

19. 设 H_1,H_2 是 $\mathbb{R}^3$ 中两个过原点的平面。证明它们的交 $H_1\cap H_2$ 至少包含一条直线。

20. 设 $\mathbb{R}[x]_n$ 为所有次数 $\le n$ 的实系数多项式构成的线性空间。设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是 $n+1$ 个不同的实数。定义 n 次多项式

$$p_i(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n), \quad i=0,1,\cdots,n$$

    (a) 证明 $\{p_0(x),p_1(x),\cdots,p_n(x)\}$ 构成 $\mathbb{R}[x]_n$ 的一组基。

    (b) 给定 $f(x)\in\mathbb{R}[x]_n$，如何把 $f(x)$ 按照上述基来线性表达?

21. 判断下述定义的映射是否是线性映射：

(a) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(x_1,x_2,x_3)\mapsto x_1^2, x_1+x_2, x_3^2$

(b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(3x_2-x_3, x_1+2x_2, 2x_3-x_1+x_2)$

(c) $T:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$, $g(x)\mapsto g(x+1)$

(d) $T:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$, $g(x)\mapsto x^2g(x)$

(e) $T:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$, $g(x)\mapsto g'(x)=\frac{dg(x)}{dx}$

(f) $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, $(z_1,z_2)\to(\bar{z}_1,z_2)$。这里 $\mathbb{C}^2$ 看作是复数域上的线性空间。

22. 设 V 是 n 维线性空间，$T:V\to V$ 是线性映射。假设 $x\in V$ 满足 $T^{m-1}x\neq 0, T^mx=0$。证明 $\{x, Tx, \cdots T^{m-1}x\}$ 线性无关。

23. 设 V 是线性空间，$f,g:V\to V$ 是线性映射。假设 $f\circ g=1$ 是恒等映射，证明 $g\circ f=1$ 也是恒等映射。

24. 设 V,W 是线性空间，记 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 为所有从 V 到 W 的线性映射构成的集合。

(a) 证明 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 是一个线性空间。

(b) 设 $\dim V=n, \dim W=m$，求 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 的维数。

25. 求如下线性映射 T 在标准基下的矩阵表示：

(a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定义为 $T(x,y)=(x+2y, 3x-y)$.

(b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 定义为 $T(x,y,z)=(x+y, y-z)$.

(c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 定义为 $T(x,y)=(x, x+y, x-y)$.

(d) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定义为关于 x 轴的反射.

(e) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定义为关于直线 $y=x$ 的反射.

(f) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定义为先绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 角，再关于 x 轴反射.

26. 设 V,W 是线性空间，$\dim V=n, \dim W=m$。记 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 为所有 V 到 W 的线性映射构成的集合。证明 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 是一个线性空间，并且维数是 nm。

27. 设 $f:V\to W$ 是一个线性同构，证明它的逆映射 $f^{-1}:W\to V$ 是一个线性映射，并且 f^{-1} 也是一个线性同构。

28. 设 V 和 W 是两个有限维的线性空间。证明存在线性同构 $f:V\to W$ 当且仅当 $\dim V=\dim W$。

29. 设 $f:V\to V$ 线性映射满足 $f\circ f=f$。证明存在线性同构 $V\cong\mathrm{im}(f)\oplus\ker(f)$。

第二章 矩阵与线性方程组

2.1 矩阵的基本运算

2.1.1 矩阵的加法与数乘

一个 $m \times n$ 矩阵记为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 称为矩阵 A 的 (i, j) 分量。我们通常也把矩阵 A 用其元素记作

$$A = (a_{ij})$$

定义 2.1.1 两个 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

的加法 $A + B$ 定义为如下的 $m \times n$ 矩阵

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

如果用分量来表达的话

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

则 $A + B$ 为对应的分量相加

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

由命题1.4.7我们知道 $m \times n$ 矩阵一一对应于 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射。考虑两个线性映射 $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，它们的和 $f + g$ 定义了一个 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射

$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$$

如果 f 对应于矩阵 A，g 对应于矩阵 B，容易看出

$$f+g \quad \Longleftrightarrow \quad A+B$$

定义 2.1.2 给定一个数 $\lambda \in k$ 和一个 $m \times n$ 矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

我们定义它们的数乘 λA 为 $m \times n$ 矩阵

$$\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

我们用 $M_{m\times n}(k)$ 来表示所有数域 k 中的 $m \times n$ 矩阵构成的集合（$k=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$）。如果不特别标记数域，$M_{m\times n}$ 指的是实系数的 $m \times n$ 矩阵的集合

$$M_{m\times n}=M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

命题 2.1.3 $M_{m\times n}$ 在矩阵的加法和数乘下构成一个线性空间。

通过矩阵的分量，我们可以把矩阵 $A=(a_{ij})$ 一一对应于 mn 个实数 a_{ij}。因此

$$\dim M_{m\times n}=mn$$

2.1.2 矩阵的乘法

矩阵之间可以引进乘法运算。为了说明如何定义矩阵相乘，我们把一个矩阵 $A=(a_{ij})$ 的 (i,j) 分量表示成一个箭头的样子

$$i \xrightarrow{a_{ij}} j$$

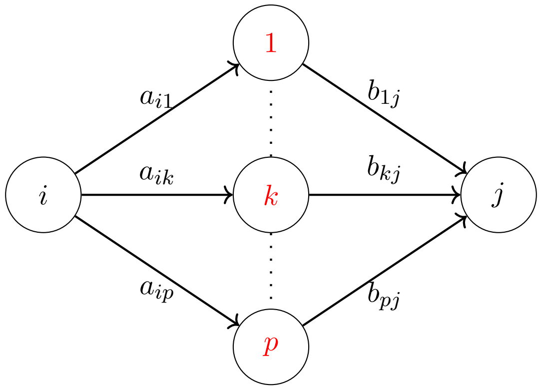
我们把 a_{ij} 想象成从节点 i 到另一个节点 j 的权值。

设 A 是一个 $m\times p$ 矩阵，B 是一个 $p \times n$ 矩阵。

$$\begin{aligned} A=(a_{ik}), &\quad i=1,\cdots,m \quad k=1,\cdots,p. \\ B=(b_{kj}), &\quad k=1,\cdots,p \quad j=1,\cdots,n. \end{aligned}$$

$$i \xrightarrow{a_{ik}} k \qquad\qquad k \xrightarrow{b_{kj}} j$$

这里 k 的指标都是从 $1,\cdots,p$，我们可以把中间这个节点连接起来



我们考虑从 i 出发，经过中间节点 k，最后到 j 的过程，并对所有的中间节点 k 的位置求和得到一个从 i 到 j 的权值 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$。这组新的数字 c_{ij} 定义了一个 $m\times n$ 的矩阵，记作

$$C=(c_{ij})$$

这个新矩阵 C 就是矩阵 A 和 B 的乘积。

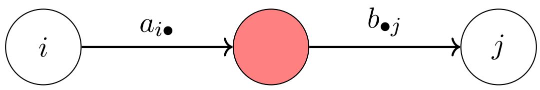
定义 2.1.4 设 A 是一个 $m\times p$ 矩阵，B 是一个 $p\times n$ 矩阵。它们的乘积 $C=AB$ 定义为 $m\times n$ 矩阵，其中 C 的 (i,j) 分量为

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

这里 a_{ik} 是 A 的 (i,k) 分量，b_{kj} 是 B 的 (k,j) 分量。

我们强调一下，并不是任意两个矩阵都可以相乘。这里两个矩阵 A,B 可以相乘的前提是 A 的列数和 B 的行数一样的，即“首尾相接”。

$$M_{m\times p}\times M_{p\times n}\overset{\text{相乘}}{\to}M_{m\times n}$$



$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

这个公式也表明 (AB) 的 (i,j) 分量 c_{ij}，是 A 的第 i 行向量 $\begin{bmatrix}a_{i1} & \cdots & a_{ip}\end{bmatrix}$ 和 B 的第 j 列向量 $\begin{bmatrix}b_{1j}\\ \vdots \\ b_{pj}\end{bmatrix}$ 对应位置的数字乘起来求和

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}.$$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \sum\limits_k a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_k a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_k a_{1k}b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_k a_{ik}b_{k1} & \cdots & \sum\limits_k a_{ik}b_{kj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_k a_{mk}b_{k1} & \sum\limits_k a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_k a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix}.
$$

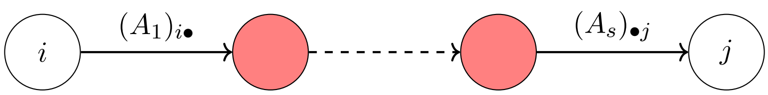
例 2.1.1.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.
$$

我们同样可以把多个矩阵相乘。设 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 依次是 $m \times p_1, p_1 \times p_2, \cdots, p_{s-1} \times n$ 矩阵。则它们的乘积 $A_1 A_2 \cdots A_s$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，其 (i,j) 分量为

$$
(A_1 A_2 \cdots A_s)_{ij} = \sum_{k_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{k_{s-1}=1}^{p_{s-1}} (A_1)_{ik_1} (A_2)_{k_1 k_2} \cdots (A_s)_{k_{s-1} j}
$$

这里 $(A_r)_{kl}$ 是矩阵 A_r 的 (k,l) 分量。我们可以画图表示为



矩阵的乘法满足结合律

$$
(AB)C = A(BC) = ABC,
$$

这里 A 是 $m \times p$ 矩阵，B 是 $p \times q$ 矩阵，C 是 $q \times n$ 矩阵。结合律等价于如下的求和等式

$$
\sum_{l=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} (A)_{ik} (B)_{kl} (C)_{lj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} (A)_{ik} (B)_{kl} (C)_{lj}
$$

2.1.3 线性映射的复合

我们知道线性映射一一对应于矩阵。下面我们说明矩阵的乘法对应于线性映射的复合，这给出了矩阵乘法定义方式的一个自然的解释。设

$$
f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m, \quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p
$$

是两个线性映射。它们的复合得到一个映射

$$
f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m
$$

$f \circ g$ 依然是一个线性映射：它保加法

$$f(g(\vec{u}+\vec{v})) \overset{g\text{ 线性}}{=} f(g(\vec{u})+g(\vec{v})) \overset{f\text{ 线性}}{=} f(g(\vec{u}))+f(g(\vec{v}))$$

类似可证 $f \circ g$ 保数乘。

命题 2.1.5 如果线性映射 $f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ 对应于 $m \times p$ 矩阵 A，$g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 对应于 $p \times n$ 矩阵 B。则它们的复合 $f \circ g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 对应于 $m \times n$ 矩阵 AB。即矩阵的乘法对应于线性映射的复合。

证明：记 $\mathbb{R}^n$ 的标准基

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} \quad \cdots \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

和 $\mathbb{R}^p$ 的标准基

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} \quad \cdots \quad \vec{u}_p = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

$g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 对应的 $p \times n$ 矩阵 B 为

$$B = \begin{bmatrix}g(\vec{e}_1) & g(\vec{e}_2) & \cdots & g(\vec{e}_n)\end{bmatrix},$$

用矩阵元可以写成

$$g(\vec{e}_j) = \begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{pj}\end{bmatrix} = b_{1j}\vec{u}_1 + \cdots + b_{pj}\vec{u}_p$$

$f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ 对应的 $m \times p$ 矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix}f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2)\cdots & f(\vec{u}_p)\end{bmatrix},$$

用矩阵元可以写成

$$f(\vec{u}_k) = \begin{bmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{mk}\end{bmatrix}$$

我们考虑复合 $f \circ g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，其对应于矩阵

$$\begin{bmatrix}f(g(\vec{e}_1)) & f(g(\vec{e}_2)) & \cdots & f(g(\vec{e}_n))\end{bmatrix}$$

它的第 j 列为

$$\begin{aligned}
f(g(\vec{e}_j)) =& f(b_{1j}\vec{u}_1+\cdots+b_{pj}\vec{u}_p)=b_{1j}f(\vec{u}_1)+\cdots+b_{pj}f(\vec{u}_p)\\
=& b_{1j}\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}+\cdots+b_{pj}\begin{bmatrix} a_{1p}\\ a_{2p}\\ \vdots\\ a_{mp}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kj}\\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_{2k}b_{kj}\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kj}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

因此 $f\circ g$ 对应的矩阵

$$\begin{bmatrix} f(g(\vec{e}_1)) & f(g(\vec{e}_2)) & \cdots & f(g(\vec{e}_n))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum\limits_k a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_k a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_k a_{1k}b_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_k a_{ik}b_{k1} & \cdots & \sum\limits_k a_{ik}b_{kj} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_k a_{mk}b_{k1} & \sum\limits_k a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_k a_{mk}b_{kn}\end{bmatrix}$$

即为矩阵 A 和 B 的乘积 AB。 □

我们可以对比一下矩阵乘积的表示法

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "a_{i\bullet}"] & \arrow[r, "b_{\bullet j}"] & j \end{tikzcd}$$

和映射复合的表示法

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m & \mathbb{R}^p \arrow[l, "f"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

矩阵乘法的结合律对应于映射复合的结合律。

我们可以用矩阵把线性映射写成显式的形式。设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是线性映射，对应于 $m\times n$ 矩阵 A

$$A=\begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2)\cdots & f(\vec{e}_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n$

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}) &= x_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此写成向量形式，线性映射 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$
f: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

恰好是把 n 维列向量（即 $n \times 1$ 矩阵）乘以 $m \times n$ 矩阵 A，得到 m 维列向量（即 $m \times 1$ 矩阵）。

总结一下，线性映射和矩阵的关系可以用矩阵乘法表达为

$$
f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m
$$

$$
f(\vec{x}) = A\vec{x}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

2.1.4 分块矩阵

分块矩阵是指将矩阵按照某种方式划分成若干个小矩阵（块）。分块矩阵是将大矩阵分解为较小矩阵的一种有效方法，有助于简化计算和表示结构化数据。

一个 $m \times n$ 矩阵可以分块表示为

$$
A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}
$$

其中 A_{ij} 是块矩阵的元素，通常是较小的矩阵。例如，A_{ij} 可以是 $p_i \times q_j$ 矩阵，其中 p_i 和 q_j 是适当选择的维度。

假设我们有两个矩阵 A 和 B，它们分别分块表达为：

$$
A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}
$$

其中 A_{ij} 和 B_{ij} 的维度需要满足乘法的条件。乘积 $C = AB$ 也会是一个分块矩阵：

$$
C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}
$$

其中每个块的计算可以通过类似的矩阵乘法公式得到：

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

具体而言，我们有

$$C = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

注 2.1.1. 注意到 A_{ij}, B_{ij} 都是一些矩阵块而不再是数字，公式里每个矩阵块的乘积表达顺序是重要的。这里我们需要按照乘积顺序把 A 的矩阵块写在前面，B 的矩阵块写在后面。例如 C_{11} 的矩阵元是 $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$，而不能写成 $B_{11}A_{11} + B_{21}A_{12}$。类似地矩阵乘法公式对于多个分块也是成立的，具体细节留给读者证明。

例 2.1.2. 考虑把如下矩阵进行分块：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} & 6 \end{bmatrix}$$

按照如上分块计算矩阵乘积 $C = AB$

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 25 \\ 24 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 27 \\ 27 & 34 \end{bmatrix} \\ C_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} 6 = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 54 \end{bmatrix} \\ C_{21} &= \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 53 \end{bmatrix} \\ C_{22} &= \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 9 * 6 = 38 + 54 = 92 \end{aligned}$$

因此我们得到矩阵 AB 的分块表达

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 & 27 \\ 27 & 34 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 38 \\ 54 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 43 & 53 \end{bmatrix} & 92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 27 & 38 \\ 27 & 34 & 54 \\ 43 & 53 & 92 \end{bmatrix}$$

例 2.1.3. 设 A 是 $m \times p$ 矩阵，B 是 $p \times n$ 矩阵。它们的乘积 AB 是 $m \times n$ 矩阵。我们可以通过分块来得到乘积 AB 的行和列的表达。

首先我们把 B 分块成列向量的样子

$$B = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix}$$

这里 $\vec{\beta}_j$ 是 $\mathbb{R}^p$ 中的列向量。则作为分块矩阵，我们得到如下公式

$$AB = A \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{\beta}_1 & A\vec{\beta}_2 & \cdots & A\vec{\beta}_n \end{bmatrix}$$

即 AB 的第 j 列的列向量为 $A\vec{\beta}_j$。

类似地，我们把 A 分块成行向量的样子

$$A = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m \end{bmatrix}$$

这里 $\vec{\alpha}_i$ 是 $\mathbb{R}^p$ 中的行向量。则作为分块矩阵，我们得到如下公式

$$AB = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 B \\ \vec{\alpha}_2 B \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m B \end{bmatrix}$$

即 AB 的第 i 行的行向量为 $\vec{\alpha}_i B$。

上面两个公式也可以直接通过矩阵乘法的定义来验证。

2.2 线性方程组

考虑 n 元的线性方程组（这里 $x_1, \cdots, x_n$ 是未知变量）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \qquad \vdots & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

这是最基本的一类代数方程组，有广泛的应用。我们在本节讨论线性方程组的求解方法。

2.2.1 消元法与初等变换

我们首先看一个具体例子。考虑以下线性方程组：

$$x + 2y + z = 6 \tag{1}$$

$$2x + 5y + 3z = 15 \tag{2}$$

$$x + 4y + 6z = 21 \tag{3}$$

将 (1) 的 -2 倍加到 (2)，(1) 的 -1 倍加到 (3)，得到等价的方程组

$$x + 2y + z = 6 \tag{1}$$

$$y + z = 3 \tag{2'}$$

$$2y + 5z = 15 \tag{3'}$$

将 (2') 的 -2 倍加到 (3')，得到

$$x + 2y + z = 6 \tag{1}$$
$$y + z = 3 \tag{2'}$$
$$3z = 9 \tag{3''}$$

由 (3'') 得到 $z = 3$。将 $z = 3$ 代入 (2')，得到 $y + 3 = 3$，故 $y = 0$。将 $y = 0$ 和 $z = 3$ 代入 (1)，得到 $x + 0 + 3 = 6$，故 $x = 3$。方程组的解为

$$x = 3, \quad y = 0, \quad z = 3.$$

总结如上过程，消元法给出线性方程组的三种初等变换:

1. 交换两行: 将方程组中的两个方程交换位置。
2. 将方程组中的一个方程乘以一个非零常数。
3. 将一个方程乘以一个数加到另一个方程。

这些初等变换不改变方程组的解，可用来简化方程，是求解线性方程组的基本方法。具体而言

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 && (r_1)\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 && (r_2)\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m && (r_m)
\end{aligned}$$

三种初等变换可以表示为:

1. 交换第 i 行和第 j 行: $(r_i) \leftrightarrow (r_j)$
2. 第 i 行乘以非零常数 λ: $(r_i) \to \lambda(r_i)$
3. 第 i 行的 λ 倍加到第 j 行: $(r_j) \to (r_j) + \lambda(r_i)$

例 2.2.1.

$$\begin{aligned}
x + 2y &= 4\\
2x + 3y &= 7
\end{aligned}$$

我们可以进行以下初等变换：将第一行的 -2 倍加到第二行。得到等价的新的方程组：

$$\begin{aligned}
x + 2y &= 4\\
-y &= -1
\end{aligned}$$

由此解出 $y = 1, x = 2$。

例 2.2.2. （谷神星的发现和轨道预测）

1801 年，意大利天文学家皮亚齐发现了小行星谷神星（*Ceres*）。然而，在观测了 *40* 天后，谷神星运行到太阳背后，从人们的视野中消失了，要到年底才可能再次见到谷神星。由于观测数据有限，天文学家们无法确定谷神星的轨道，从而无法预测它再次出现的位置。

高斯当时年仅 *24* 岁，利用开普勒定律和皮亚齐的观测数据，将谷神星的轨道计算转化和近似为一个线性方程组，使用消元法求解该方程组，预测出了谷神星的轨道参数。高斯的预测非常精确，谷神星在一年后被重新发现，位置与高斯的预测非常接近。这一事件使得高斯声名鹊起，也大大推动了线性方程组和线性代数的理论和方法。

2.2.2 线性方程组的矩阵形式

线性方程组可以写成矩阵的形式

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad \vdots & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

这里

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

我们也可以把整个线性方程组的信息可以写成一个 $m \times (n+1)$ 矩阵

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

A 称为系数矩阵，$\overline{A}$ 称为增广矩阵。

线性方程组的初等变换，等价于对 $\overline{A}$ 作行变换。例如把第一个方程乘以 λ 加到第二个方程

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} & \cdots & a_{2n}+\lambda a_{1n} & b_2+\lambda b_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

对应于线性方程组的初等变换，我们定义矩阵的三种初等行变换为

1. 交换两行: 将矩阵的两行交换位置。
2. 将矩阵中的一行乘以一个非零常数。

3. 将矩阵的一行乘以一个数加到另一行。

从而利用消去法解线性方程组的过程，可以等价地用对增广矩阵作初等行变换来表示。

命题 2.2.1 通过初等行变换可以把增广矩阵变为如下阶梯形

$$\begin{bmatrix} a'_{1p_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ & & a'_{2p_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & a'_{rp_r} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ & & & & & & & & b'_{r+1} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & b'_m \end{bmatrix}$$

其中空白处的矩阵元都是 0。

证明方法和用消去法解方程的过程是一致的。

例 2.2.3. 考虑如下的线性方程组，我们写成矩阵的形式

$$\begin{cases} x+2y+z=6 \\ 2x+4y+5z=15 \\ x+4y+6z=21 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 15 \\ 1 & 4 & 6 & 21 \end{bmatrix}$$

我们可以通过如下的初等行变换变为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 15 \\ 1 & 4 & 6 & 21 \end{bmatrix} \xRightarrow[\text{加到第 2 行}]{\text{第 1 行 }\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 21 \end{bmatrix} \xRightarrow[\text{加到第 3 行}]{\text{第 1 行 }\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 15 \end{bmatrix} \xRightarrow[\text{第 2,3 行}]{\text{交换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

假如我们已经将一个线性方程组的增广矩阵化成了如下的阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} a'_{1p_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ & & a'_{2p_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & a'_{rp_r} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ & & & & & & & & b'_{r+1} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & b'_m \end{bmatrix}$$

那么阶梯形矩阵最后几行对应的方程为

$$\begin{cases} 0=b'_{r+1} \\ \cdots \\ 0=b'_m \end{cases}$$

如果其中 $b'_{r+1},\cdots,b'_m$ 有非零元，则原方程无解。

例 2.2.4. 考虑如下的线性方程组，将其写成增广矩阵的形式

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+5z=4 \\ x+2y+4z=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

通过初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此原线性方程组无解。

命题 2.2.2 线性方程组有解的充要条件是增广矩阵通过初等行变换化成阶梯形矩阵后

$$b'_{r+1}=\cdots=b'_m=0.$$

证明：我们上面已经说明了必要性。下面我们证明充分性。假设 $b'_{r+1}=\cdots=b'_m=0$，则原线性方程组等价于如下的阶梯形方程

$$\begin{bmatrix} a'_{1p_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ & & a'_{2p_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & a'_{rp_r} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

这里 $a'_{1p_1},\cdots,a'_{rp_r}$ 均不为 0。从最后一个方程

$$a'_{rp_r}x_{p_r}+\cdots=b'_r$$

可以解出 x_{p_r}，然后代入前面方程解出 $x_{p_{r-1}}$。依次类推可以找到方程的解 (解可能不唯一)。 □

例 2.2.5. 考虑如下的线性方程组，将其写成矩阵的形式

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+5z=4 \\ x+2y+4z=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

做初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后这个增广矩阵对应于方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad y+3z=-2 \end{cases}$$

由此可以解出 $\begin{cases} x=2c+5 \\ y=-2-3c \\ z=c \end{cases}$ 这里 c 是任意常数。

总结上述讨论可知:

1. 线性方程组可以通过初等变换化简。
2. 线性方程组可能没有解。
3. 线性方程组如果有解，解可能不唯一。

2.2.3 齐次线性方程组

如下方程称为齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \qquad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

即对应于 $b_1 = \cdots = b_m = 0$ 的情况。矩阵表达为

$$A\vec{x} = 0.$$

之前 b_i 不全为 0 的情况称为非齐次线性方程组。

注意到齐次线性方程组总是有解的:

$$x_1 = \cdots x_n = 0$$

是一个解，称为零解或者平凡解。一个值得关心的问题是，齐次线性方程组是否有非平凡解?

这个问题和线性方程组解的唯一性密切相关。设 $\vec{x}_0, \vec{x}_1$ 是非齐次线性方程 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的解，即

$$A\vec{x}_0 = \vec{b} \qquad A\vec{x}_1 = \vec{b}$$

两式相减我们得到 $A(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) = 0$，即 $\vec{x}_1 - \vec{x}_0$ 是齐次线性方程组的解。

反之，如果 $\vec{u}$ 是齐次线性方程组的解 $A\vec{u} = 0$，$\vec{x}_0$ 是非齐次线性方程组的解 $A\vec{x}_0 = \vec{b}$。则

$$A(\vec{x}_0 + \vec{u}) = A\vec{x}_0 + A\vec{u} = \vec{b} + 0 = \vec{b}$$

即 $\vec{x}_0 + \vec{u}$ 也是非齐次线性方程组的解。

因此非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的一般解是

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{u}$$

这里 $\vec{x}_0$ 是非齐次方程组的一个特解（$A\vec{x}_0=\vec{b}$），$\vec{u}$ 是齐次方程组的一般解（$A\vec{u}=0$）。即

$$\text{非齐次通解} = \text{非齐次特解} + \text{齐次通解}$$

当然如果特解不存在，则非齐次方程组没有解。

推论 2.2.3 如果齐次线性方程组只有零解，则非齐次线性方程组的解是唯一的（如果解存在）。

2.3 线性方程组的解空间

我们这一节将系统讨论线性方程组的解空间的结构。

2.3.1 齐次线性方程组的解空间

考虑齐次线性方程组

$$A\vec{x}=0$$

这里 A 是 $m\times n$ 矩阵，$\vec{x}\in\mathbb{R}^n$，即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

该齐次线性方程组的所有解构成 $\mathbb{R}^n$ 的子集，记为

$$K:=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n|A\vec{x}=0\}.$$

命题 2.3.1 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间。

证明：假设 $\vec{x}_1,\vec{x}_2\in K,\lambda\in\mathbb{R}$，则

$$A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=A\vec{x}_1+A\vec{x}_2=0 \quad A(\lambda\vec{x}_1)=\lambda A\vec{x}_1=0$$

即 $\vec{x}_1+\vec{x}_2\in K,\lambda\vec{x}_1\in K$。故 K 保持加法和数乘。 □

设 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_s$ 是 K 的一组基，$s=\dim K$。则 K 中的元素 $\vec{x}$ 可以唯一地写成线性组合

$$\vec{x}=c_1\vec{u}_1+\cdots+c_s\vec{u}_s,\quad c_i\in\mathbb{R}$$

这构成了齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 的通解，这里 c_i 是任意常数。

例 2.3.1. 考虑以下齐次线性方程组:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5&=0\\ 2x_1+4x_2-2x_3+3x_4-x_5&=0\\ -x_1-2x_2+x_3-2x_4+2x_5&=0 \end{aligned}$$

对应的增广矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 4 & -2 & 3 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

我们用初等变换来解方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 4 & -2 & 3 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

得到等价的方程组

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5&=0\\ x_4+x_5&=0\\ 2x_5&=0 \end{aligned}$$

由此可以解得

$$x_5=0,\quad x_4=0,\quad x_1=x_3-2x_2$$

其中 x_2 和 x_3 可以取任意数。设 $x_2=c_1,x_3=c_2$，则通解可以写成

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2-2c_1\\ c_1\\ c_2\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

从而该齐次线性方程组的解空间是 2 维的，一组基为 $\vec{u}_1=\begin{bmatrix} -2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix},\vec{u}_2=\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$。

2.3.2 矩阵的秩与解空间维数

矩阵的行秩

我们把一个 $m \times n$ 矩阵 A 写成

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_m \end{bmatrix}$$

这里 $\vec{v}_i$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的行向量

$$\vec{v}_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots a_{in}) \in \mathbb{R}^n$$

定义 2.3.2 矩阵 A 的行秩定义为 A 的行向量张成的线性空间的维数，即

$$A\text{的行秩} = \dim \operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m\}$$

命题 2.3.3 对矩阵作初等行变换得到的行向量与原行向量是等价的。特别的，初等行变换不改变矩阵的行秩。

为了说明这个命题，我们回顾矩阵的三种初等行变换

1. 交换两行: 将矩阵的两行交换位置。
2. 将矩阵中的一行乘以一个非零常数。
3. 将矩阵的一行乘以一个数加到另一行。

例如交换两行，比如第 1 行和第 2 行，容易看出线性等价

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m\} \Longleftrightarrow \{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m\}$$

例如将第 2 行乘以一个非零常数 λ，我们有线性等价

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m\} \Longleftrightarrow \{\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m\}$$

例如将矩阵的第 1 行乘以一个数加到第 2 行，容易证明如下的线性等价

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m\} \Longleftrightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m\}$$

因此矩阵的行秩在初等行变换下是不变的。

由命题2.2.1，我们总是可以通过初等行变化将 A 变为阶梯形

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{1p_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1n} \\ & & a'_{2p_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{2n} \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & & & & a'_{rp_r} & \cdots & a'_{rn} \\ & & & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}'_1 \\ \vec{v}'_2 \\ \vdots \\ \vec{v}'_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里 $a'_{1p_1},\cdots,a'_{rp_r}$ 均不为 0。观察到行向量 $\vec{v}'_1,\cdots,\vec{v}'_r$ 是线性无关的。实际上，如果有

$$\lambda_1\vec{v}'_1+\lambda_2\vec{v}'_2+\cdots+\lambda_r\vec{v}'_r=0$$

则比较第 p_1 列系数，我们得到 $\lambda_1 a'_{1p_1}=0\Rightarrow\lambda_1=0$。然后可以依此得到 $\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$。

因此 A' 的行秩是 r。由此我们证明了

$$A\text{ 的行秩 }=A'\text{ 的行秩 }=r$$

这给出了用初等行变换计算行秩的方法。

另一方面，矩阵 A' 对应的齐次线性方程组为

$$\begin{aligned}a'_{1p_1}x_{p_1}+\cdots+\cdots+\cdots+a'_{1p_n}x_n&=0\\ &\vdots\\ a'_{1p_r}x_{p_r}+\cdots+a'_{1p_n}x_n&=0\end{aligned}$$

这里 $p_1<p_2<\cdots<p_r$。因此 $x_{p_1},\cdots,x_{p_r}$ 可以通过其他变量表达出来，而其他变量可以取任意值。总共有 $n-r$ 个自由变量，因此解空间的维数是 $n-r$。

总结如上，对于 $m\times n$ 矩阵 A，通过初等行变换变成阶梯形矩阵 A'，可以看出

$$A\text{ 的行秩 }=r\text{，且 }\{\vec{x}|A\vec{x}=0\}\text{ 解空间的维数 }=n-r\text{。}$$

命题 2.3.4 矩阵 A 对应的齐次线性方程组解空间的维数为

$$A\text{ 的列数（即未知变量数）}-A\text{ 的行秩。}$$

矩阵的列秩

我们把一个 $m\times n$ 矩阵 A 写成

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{u}_1&\vec{u}_2&\cdots&\vec{u}_n\end{bmatrix}$$

这里 $\vec{u}_i$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的列向量 $\vec{u}_i=\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{mi}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^m$。

定义 2.3.5 矩阵 A 的列秩定义为 A 的列向量张成的线性空间的维数，即

$$A\text{的列秩}=\dim\operatorname{Span}\{\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_n\}$$

命题 2.3.6 对矩阵作初等行变换亦不改变矩阵的列秩。

需要注意的是，初等行变换不改变行向量张成的空间，但是会改变列向量张成的空间（但是维数不变）。这个命题成立是因为初等行变换不会改变列向量的线性相关性。具体而言，考虑

$$A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{初等行变换}} A' = \begin{bmatrix} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \cdots & \vec{u}'_n \end{bmatrix}$$

由于线性方程组在行变换下是等价的，我们知道对任意的向量子集 $\{\vec{u}_{i_1}, \vec{u}_{i_2}, \cdots, \vec{u}_{i_s}\}$，矩阵 $\begin{bmatrix} \vec{u}_{i_1} & \vec{u}_{i_2} & \cdots & \vec{u}_{i_s} \end{bmatrix}$ 对应的齐次线性方程组

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_{i_1} & \vec{u}_{i_2} & \cdots & \vec{u}_{i_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{bmatrix} = 0$$

和矩阵 $\begin{bmatrix} \vec{u}'_{i_1} & \vec{u}'_{i_2} & \cdots & \vec{u}'_{i_s} \end{bmatrix}$ 对应的齐次线性方程组

$$\begin{bmatrix} \vec{u}'_{i_1} & \vec{u}'_{i_2} & \cdots & \vec{u}'_{i_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{bmatrix} = 0$$

是等价的方程，即

$$\lambda_1 \vec{u}_{i_1} + \cdots \lambda_s \vec{u}_{i_s} = 0 \quad \text{当且仅当} \quad \lambda_1 \vec{u}'_{i_1} + \cdots \lambda_s \vec{u}'_{i_s} = 0$$

由此可以证明:如果列向量组 $\{\vec{u}_{k_1}, \vec{u}_{k_2}, \cdots, \vec{u}_{k_r}\}$ 是 A 的列向量的极大线性无关组,则 $\{\vec{u}'_{k_1}, \vec{u}'_{k_2}, \cdots, \vec{u}'_{k_r}\}$ 是 A' 的列向量的极大线性无关组。因此 A 和 A' 的列秩相等。证明细节留作练习。

我们通过初等行变化将 A 变为阶梯型

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{1p_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1n} \\ & & a'_{2p_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{2n} \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & & & & a'_{rp_r} & \cdots & a'_{rn} \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

这里 $a'_{1p_1}, \cdots, a'_{rp_r}$ 均不为 0。很容易看出列向量

$$\vec{u}'_{p_1} = \begin{bmatrix} a'_{1p_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{u}'_{p_2} = \begin{bmatrix} a'_{1p_2} \\ a'_{2p_2} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \vec{u}'_{p_r} = \begin{bmatrix} a'_{1p_r} \\ a'_{2p_r} \\ \vdots \\ a'_{rp_r} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

构成 A' 列向量的极大线性无关组，因此 A' 的列秩是 r。

因此通过初等行变换将 A 变成阶梯型，我们证明了如下结论

$$\text{行秩} = r = \text{列秩}$$

命题 2.3.7 矩阵的行秩等于矩阵的列秩。

因此我们把这个行秩/列秩称为矩阵的秩，记为

$$\operatorname{rank} A.$$

我们把上述关于齐次线性方程组的解总结如下：

定理 2.3.8. [齐次线性方程组解的结构定理] 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，$\operatorname{rank} A = r$。

- 如果 $r = n$，则 $A\vec{x} = 0$ 只有零解
- 如果 $r < n$，则 $A\vec{x} = 0$ 具有非零解，且它的通解具有 $n - r$ 个独立参数

2.3.3 非齐次线性方程组的解空间

下面我们考虑非齐次线性方程组

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

的解空间。这里

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

由于

$$\text{非齐次通解} = \text{非齐次特解} + \text{齐次通解}$$

由命题2.3.4，我们已经知道了齐次方程组的通解结构（解空间的维数即自由参数的个数为 $n - \operatorname{rank} A$），因此我们只需要讨论能否找到非齐次线性方程组的一个特解，即解的存在性问题。

我们把矩阵 A 写成列向量的样子

$$A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{bmatrix}$$

则线性方程组可以写成

$$x_1\vec{u}_1 + \cdots + x_n\vec{u}_n = \vec{b}$$

如果线性方程组有解，即存在 $x_1, \cdots, x_n$ 使得

$$x_1\vec{u}_1 + \cdots + x_n\vec{u}_n = \vec{b}$$

即 $\vec{b}$ 可以写成 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ 的线性组合。则

$$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\} \overset{\text{等价}}{\Longleftrightarrow} \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{b}\}$$

反之，如果

$$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\} \overset{\text{等价}}{\Longleftrightarrow} \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{b}\}$$

则 $\vec{b}$ 可以通过 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ 线性表达，即方程有解。

因此线性方程组有解当且仅当

$$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\} \overset{\text{等价}}{\Longleftrightarrow} \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{b}\}$$

即这两组向量张成的线性空间的维数是一样的。由此我们证明了如下结论

命题 2.3.9 非齐次线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$ 有解当且仅当 A 的列秩和增广矩阵 $\overline{A} = [A\ \vec{b}]$ 的列秩相等，即

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$$

我们把上述关于非齐次线性方程组的解总结如下：

定理 2.3.10. [非齐次线性方程组解的结构定理] 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，$\operatorname{rank} A = r$。考虑非齐次线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$，设 $\overline{A}$ 是增广矩阵。

- $A\vec{x} = \vec{b}$ 有解当且仅当 $\operatorname{rank} \overline{A} = r$
- 假设 $\operatorname{rank} \overline{A} = r$
  - 如果 $r = n$，则 $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解
  - 如果 $r < n$，则 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的解不唯一，且它的通解具有 $n - r$ 个独立参数

例 2.3.2. 考虑如下线性方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 4 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

这组方程在之前的例子中计算过，其通解为 $\begin{cases} x = 2c + 5 \\ y = -2 - 3c \\ z = c \end{cases}$ 这里 c 是任意常数。把其写作

$$\text{通解为} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这里 $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是线性方程组的一个特解，$c \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是对应齐次方程组的通解。

2.3.4 秩-零化度定理

我们讨论线性方阵组解的结构定理的几何解释。

定义 2.3.11 设

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

是一个线性映射。映射 f 的像是 $\mathbb{R}^m$ 中的子集记为 $\mathrm{im}(f)$。定义 f 的核为 $\mathbb{R}^n$ 中如下子集

$$\ker(f):=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n|\ f(\vec{x})=0\}$$

设线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 对应的矩阵表达为

$$f(\vec{x})=A\vec{x}\qquad \vec{x}\in\mathbb{R}^n$$

这里 A 是 $m\times n$ 矩阵，记为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

f 的核通过矩阵 A 等价表达为

$$\ker(f):=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n|\ A\vec{x}=0\}$$

因此核的概念即刻画了齐次线性方程组的解

$$\ker(f)=\{\text{齐次线性方程组 } A\vec{x}=0 \text{ 的解}\}$$

由命题2.3.1知，$\ker(f)\subset\mathbb{R}^n$ 是线性子空间。

f 的像也可以通过矩阵 A 来刻画。把 A 写成列向量的样子

$$A=\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix}\qquad \text{这里}\quad \vec{\alpha}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^m$$

则 $\vec{y}\in\mathrm{im}(f)$ 当且仅当存在 $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\vec{y}=A\vec{x}$。写成 A 的列向量的样子

$$\vec{y}=x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+\cdots+x_n\vec{\alpha}_n$$

即等价于 $\vec{y}$ 可以通过 $\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n\}$ 线性表达。因此

$$\mathrm{im}(f)=\mathrm{Span}\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n\}$$

特别的，$\mathrm{im}(f)\subset\mathbb{R}^m$ 也是线性子空间。

定理 2.3.12. [秩-零化度定理] 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个线性映射。则

$$\dim \operatorname{im}(f) + \dim \ker(f) = n$$

证明：由矩阵的秩的定义，我们知道

$$\dim \operatorname{im}(f) = \dim \operatorname{Span}\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_n\} = A \text{ 的列秩} = \operatorname{rank} A$$

由定理2.3.8，

$$\dim \ker(f) = n - \operatorname{rank} A = n - \dim \operatorname{im}(f)$$

□

秩-零化度定理的几何是非常直观的。我们可以把映射 f 看作把 $\mathbb{R}^n$ "压缩" 到它的像 $\operatorname{im}(f)$，其中被 "压缩" 的部分是它的核 $\ker(f)$。则 $\mathbb{R}^n$ 的维数是像的维数加上被压缩的维数，即秩-零化度定理。

秩-零化度定理也可以表述在抽象的线性空间里。

定理 2.3.13. [秩-零化度定理] 设 V, W 是有限维线性空间，$f: V \to W$ 是一个线性映射。则

$$\dim \operatorname{im}(f) + \dim \ker(f) = \dim V$$

这里像 $\operatorname{im}(f) \subset W$ 与核 $\ker(f) \subset V$ 的定义与上述类似。通过选取一组基，可以把定理2.3.13转化为定理2.3.12的情形，具体细节留作练习。我们也可以直接通过线性空间的方法证明，参见命题6.1.6。

2.4 习题

1. 计算如下两个矩阵 A, B 的乘积 AB:

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2)\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad (3)\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

2. 设 $n \times n$ 矩阵 A, B 满足 $AB = BA$，证明 $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} A^i B^{k-i}$。举例说明如果 $AB \neq BA$，那么这个公式不成立。

3. 考虑如下矩阵 A，计算 A^n，这里 n 是正整数

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)\quad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \qquad (3)\quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$(4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)\quad \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

4. 求如下齐次线性方程组的通解

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

5. 如果 $m < n$，证明如下齐次线性方程组一定有非零解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

6. 补充完整命题2.3.6的证明，即矩阵的列秩在初等行变换下不变。

7. 求如下非齐次线性方程组的通解

(1) $\begin{cases} 3x-2y+z=7 \\ 2x+y-3z=9 \\ x-y+2z=4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+4x_3-x_4=13 \\ -3x_1+4x_2+x_3+2x_4=6 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+x_4=9 \\ x_1+4x_2-2x_3+3x_4=5 \\ -x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 5x_1+x_2-x_3+5x_4=10 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-3x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$

8. 当 λ 取何值时，如下线性方程组有解? 有唯一解? 并求其所有解

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_4=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=1 \\ x_2+\lambda x_3+x_4=1 \\ x_1+x_3+\lambda x_4=1 \end{cases}$$

9. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{rank}A=n-1$。证明齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 的任意两个解成比例，即相差一个数值因子。

10. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathrm{rank}A=1$。证明 A 可以写成一个 $m\times 1$ 矩阵和一个 $1\times n$ 矩阵的乘积:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

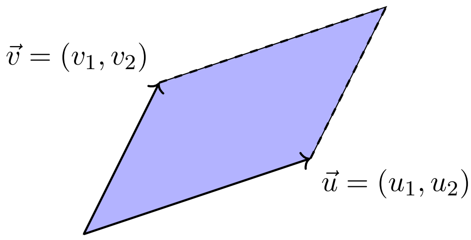
11. 证明定理2.3.13。

第三章　行列式

3.1　面积元与体积元

3.1.1　面积

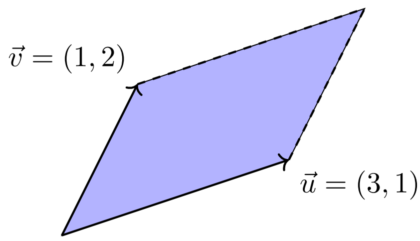
考虑平面上由向量 $\vec{u}=(u_1,u_2)$ 和 $\vec{v}=(v_1,v_2)$ 张成的平行四边形。



它的面积用这两个向量可以表示为

$$\text{面积}=|u_1v_2-u_2v_1|$$

例 3.1.1. 平行四边形



的面积为

$$\text{面积}=|3\times 2-1\times 1|=5$$

我们引入下面的记号表达

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} := u_1v_2-u_2v_1$$

称为 2×2 矩阵 $A=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ 的行列式。平行四边形面积为行列式 $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值。

观察到如果交换两行

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2-u_2v_1 \qquad \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = v_1u_2-v_2u_1$$

即

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$$

我们可以把 $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$ 理解为带符号的面积。这个符号和定向有关，即两个向量的相互顺序。

如果我们把其中一个向量做伸缩，那么面积也相应的伸缩。因此我们有如下性质

$$\begin{vmatrix} \lambda u_1 & \lambda u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \lambda v_1 & \lambda v_2 \end{vmatrix}$$

我们可以用一个代数方法来表述 2×2 矩阵的行列式。对于两个向量 $\vec{u}, \vec{v}$，我们引入符号

$$\vec{u} \wedge \vec{v}$$

称为它们的**外积**。外积的基本运算规则是

- 反对称性：$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$, 特别有 $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$
- 线性性：

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} &= \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} &= \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) \end{aligned}$$

我们不详细讨论外积的构造，我们通过一些例子来熟悉这个运算。记 $\mathbb{R}^2$ 的标准基为

$$\vec{e}_1 = (1, 0) \quad \vec{e}_2 = (0, 1)$$

对向量 $\vec{u} = (u_1, u_2) = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2, \vec{v} = (v_1, v_2) = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, 其外积为

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2) \wedge \vec{v} = u_1\vec{e}_1 \wedge \vec{v} + u_2\vec{e}_2 \wedge \vec{v} \\ &= u_1\vec{e}_1 \wedge (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) + u_2\vec{e}_2 \wedge (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) \\ &= u_1v_2\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + u_2v_1\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 \\ &= (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \end{aligned}$$

我们观察到

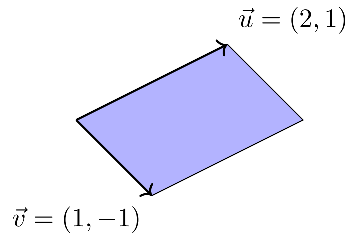
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

因此外积不仅给出了一个便于记忆的行列式的计算方法，而且给出了它的几何解释：

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ 是 $\vec{u}, \vec{v}$ 张成的平行四边形的面积元
- $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ 是单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 张成的单位面积元

它们之间的比例就是平行四边形面积（带符号）。

例 3.1.2. 计算 $\vec{u}=(2,1),\vec{v}=(1,-1)$ 张成平行四边形面积

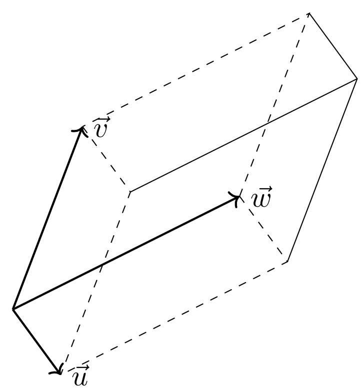


$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)-1\cdot 1=-3$$

这里的负号是由于 $\vec{u},\vec{v}$ 的定向顺序（顺时针）和 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 的定向顺序（逆时针）相反。平行四边形的面积为 3。

3.1.2 体积

考虑空间中由向量 $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 和 $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ 张成的平行六面体。



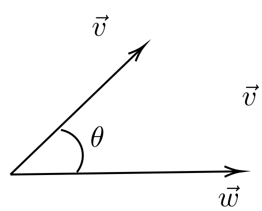
我们同样可以通过这 3 个向量的坐标来计算它的体积。

回顾与空间 $\mathbb{R}^3$ 中的向量相关的基本构造:

- 长度: $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 的长度 $|\vec{v}|:=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$
- 点乘（内积）: $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}:=v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3$$

点乘（内积）的几何含义为



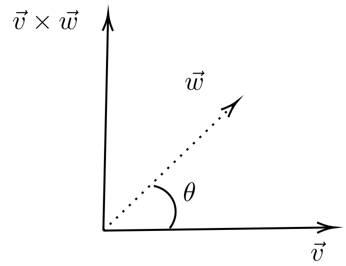
$$\vec{v}\cdot\vec{w} \quad =|\vec{v}\,||\vec{w}\,|\cos\theta$$

例如 $\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2$。

- 叉乘：$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$，$\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ 的叉乘为

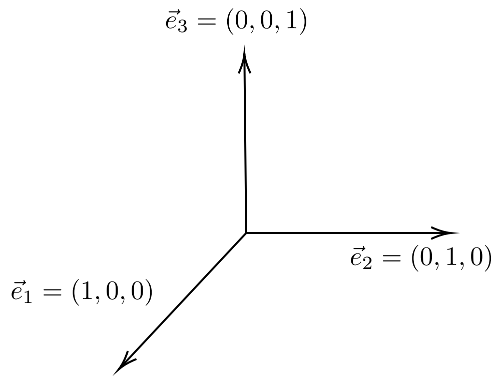
$$\vec{v}\times\vec{w}:=(v_2w_3-v_3w_2,v_3w_1-v_1w_3,v_1w_2-v_2w_1)$$

  $\vec{v}\times\vec{w}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量，其方向与 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 垂直，指向按照右手拇指法则，长度为 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 围成的平行四边形面积。



$$|\vec{w}\times\vec{v}|=|\vec{w}||\vec{v}|\sin\theta$$

例 3.1.3. 对于 $\mathbb{R}^3$ 中的标准基



$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3=-\vec{e}_2\times\vec{e}_1$$
$$\vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1=-\vec{e}_3\times\vec{e}_2$$
$$\vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2=-\vec{e}_1\times\vec{e}_3$$

由平行六面体的体积公式：体积 $=$ 底面积 $\times$ 高。我们把 $\vec{v},\vec{w}$ 张成的面作为底面，得到

$$\text{体积}=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\text{ 的绝对值}$$

同样，我们可以把 $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ 理解为带符号的体积。它的正负号和 3 个向量 $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ 的定向有关。

定义 3.1.1 定义 3×3 矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}:=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

由 $\vec{v}\times\vec{w}=(v_2w_3-v_3w_2,v_3w_1-v_1w_3,v_1w_2-v_2w_1)$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=u_1(v_2w_3-v_3w_2)-u_2(v_1w_3-v_3w_1)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)$$

叉乘满足反对称性：

$$\vec{v}\times\vec{w}=-\vec{w}\times\vec{v}\quad\text{特别地}\quad\vec{v}\times\vec{v}=0$$

由此对于 3×3 的行列式，如果对换其中任何两行则行列式的值差一个负号。例如

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

特别地，如果有两行向量相同，则行列式为 0

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

几何上，当 $\vec{v}=\vec{u}$ 时，平行六面体塌缩成一个二维面，其体积为 0。

如果我们把其中一个向量做伸缩，那么体积也相应的伸缩。即我们有如下性质

$$\begin{vmatrix} \lambda u_1 & \lambda u_2 & \lambda u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda v_1 & \lambda v_2 & \lambda v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

我们同样可以用外积来表示体积元和行列式。对于 $\mathbb{R}^3$ 中的 3 个向量，考虑它们的外积

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}$$

外积的代数运算法则和 $\mathbb{R}^2$ 的情况一样，满足：

- 反对称性：交换任意两个向量差一个负号

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w} = -\vec{v}\wedge\vec{u}\wedge\vec{w} = -\vec{u}\wedge\vec{w}\wedge\vec{v} = -\vec{w}\wedge\vec{v}\wedge\vec{u}$$

- 线性性：关于各分量都具有线性性，例如

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}_1\wedge\vec{w} + \vec{u}\wedge\vec{v}_2\wedge\vec{w}$$

记 $\mathbb{R}^3$ 的标准基为

$$\vec{e}_1 = (1,0,0) \quad \vec{e}_2 = (0,1,0) \quad \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

对于向量

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u_1,u_2,u_3) = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 \\ \vec{v} &= (v_1,v_2,v_3) = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 \\ \vec{w} &= (w_1,w_2,w_3) = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3 \end{aligned}$$

我们可以按照外积的运算法则来计算 $\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w} = u_1\vec{e}_1\wedge\vec{v}\wedge\vec{w} + u_2\vec{e}_2\wedge\vec{v}\wedge\vec{w} + u_3\vec{e}_3\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}$$

其中

$$\begin{aligned}\vec{e}_1\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}=&\vec{e}_1\wedge(v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3)\wedge(w_2\vec{e}_2+w_3\vec{e}_3)\\=&(v_2w_3-v_3w_2)\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}\\=&u_1\vec{e}_1\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}+u_2\vec{e}_2\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}+u_3\vec{e}_3\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}\\=&u_1(v_2w_3-v_3w_2)\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3+u_2(v_1w_3-v_3w_1)\vec{e}_2\wedge\vec{e}_1\wedge\vec{e}_3+u_3(v_1w_2-v_2w_1)\vec{e}_3\wedge\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\\=&\left(u_1(v_2w_3-v_3w_2)-u_2(v_1w_3-v_3w_1)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)\right)\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3\end{aligned}$$

对比行列式的公式，我们发现

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3$$

这给出了 3×3 矩阵行列式的几何解释:

- $\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}$ 是 $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ 张成平行六面体的体积元
- $\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3$ 是单位向量 $\vec{e}_i$ 张成的单位体积元

它们之间的比例就是平行六面体体积（带符号），即 3×3 矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}$$

利用外积的反对称性:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}=-\vec{u}\wedge\vec{w}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}\wedge\vec{w}$$

我们很容易得出前述行列式的反对称性

$$\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\w_1&w_2&w_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}v_1&v_2&v_3\\u_1&u_2&u_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}$$

利用外积的线性性，例如

$$\vec{u}\wedge(\lambda\vec{v}+\mu\vec{q})\wedge\vec{w}=\lambda\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}+\mu\vec{u}\wedge\vec{q}\wedge\vec{w}$$

我们得出行列式关于任一行的线性性

$$\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\\lambda v_1+\mu q_1&\lambda v_2+\mu q_2&\lambda v_3+\mu q_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\q_1&q_2&q_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}$$

最后，由行列式的具体公式

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

我们得到 3 阶行列式和 2 阶行列式之间的关系

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

我们将看到一般的行列式都有类似的性质。

例 3.1.4.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =& 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ =& 1 \cdot (2-4) - 2 \cdot (0-8) + 3 \cdot (0-(-2)) \\ =& -2 + 16 + 6 = 20 \end{aligned}$$

例 3.1.5 (3 维空间叉乘的行列式表示)**.** $\mathbb{R}^3$ 中两个向量 $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$，$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ 的叉乘

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$$

可以表达为行列式

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

这里行列式的第一行为 $\mathbb{R}^3$ 的标准基。虽然第一行的元素不是数字，我们还是形式地用如上行列式的公式来计算。可以看出

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =& \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ =& (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) = \vec{v} \times \vec{w} \end{aligned}$$

3.2 n 阶行列式

3.2.1 行列式的几何定义

考虑一个 $n \times n$ 矩阵（也称为 n 阶方阵）

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们定义一个数称为它的行列式 $\det A$，也记为

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们之前讨论了 $n = 2, 3$ 的情况及其几何含义

- 当 $n = 2$ 时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 当 $n = 3$ 时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

我们下面讨论一般 n 的情况。记 $\mathbb{R}^n$ 的标准基为

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0) \quad \vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0) \quad \cdots \quad \vec{e}_n = (0, \cdots, 0, 1)$$

我们记 A 的行向量为

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{\alpha}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}) = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{e}_n \\ &\vdots \\ \vec{\alpha}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}) = a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n \end{aligned}$$

我们用外积的代数运算（反对称和线性）计算

$$\begin{aligned} & \vec{\alpha}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n \\ =& (a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n) \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n \\ =& a_{11}\vec{e}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n \\ =& \cdots \\ =& D\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n \end{aligned}$$

最后总是可以写成 $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$ 的一个倍数，这个系数 D 就定义为 A 的行列式

$$\det A := D$$

由这个构造可以看出，当 $n = 2, 3$ 的时候，行列式与面积元和体积元的定义是一致的。我们可以把 $\vec{\alpha}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n$ 理解为 $\mathbb{R}^n$ 的 n 个向量 $\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n$ 张成的 n 维平行体的体积元，$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$ 是单位体积元。因此行列式的几何含义是代表 $\mathbb{R}^n$ 中平行体的体积（带符号）。

3.2.2 行列式的组合定义

我们可以通过外积的代数运算给出行列式的一个具体的组合表达式。由外积的反对称性，特别有 $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_i = 0$，我们可以看出把

$$\vec{\alpha}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n$$

展开成 $\vec{e}_i$ 的过程中，如要得到非零元素，只能在 $\vec{\alpha}_1$ 中取一个 $\vec{e}_{\sigma(1)}$，在 $\vec{\alpha}_2$ 中取一个 $\vec{e}_{\sigma(2)}$，$\cdots$，在 $\vec{\alpha}_n$ 中取一个 $\vec{e}_{\sigma(n)}$，并且 $\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ 各不相同。这样一个取法 σ 对应于集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 到自身的一个一一映射。

定义 3.2.1 集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 到自身的一个一一映射称为一个 n 元置换。所有 n 元置换的集合记为 S_n（其包含 $n!$ 个元素）。

设 σ 是一个 n 元置换。我们可以通过不断作两两对换把

$$\vec{e}_{\sigma(1)} \wedge \vec{e}_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{\sigma(n)}$$

调整为标准形式 $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$。在外积运算规则中每对换一次变号一次，因此

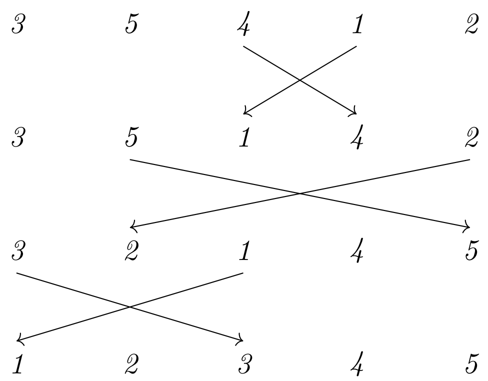
$$\vec{e}_{\sigma(1)} \wedge \vec{e}_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{\sigma(n)} = (\operatorname{sign} \sigma) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

这里 $\operatorname{sign} \sigma = \pm 1$ 称为置换 σ 的符号。如果需要经过偶数次对换，那么 $\operatorname{sign} \sigma = 1$，这样的 σ 称为偶置换；如果需要经过奇数次对换，那么 $\operatorname{sign} \sigma = -1$，这样的 σ 称为奇置换。可以证明，虽然通过对换来调整为标准形式的方式不唯一，但是需要的对换次数的奇偶性是不变的。

例 3.2.1. *例如考虑置换* $\sigma : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{3, 5, 4, 1, 2\}$。*我们可以通过 3 次对换把* $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_5 \wedge \vec{e}_4 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ *调整为* $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_4 \wedge \vec{e}_5$：

$$\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_5 \wedge \vec{e}_4 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_5 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_4 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_4 \wedge \vec{e}_5 = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_4 \wedge \vec{e}_5$$

因此 σ *是奇置换，* $\operatorname{sign} \sigma = -1$。*这个外积计算过程也可以用下图来表示*



定理 3.2.2 设 A 是 n 阶方阵，矩阵元为 a_{ij}，则

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

这里 S_n 是所有 n 元置换的集合。

证明: A 的行向量为

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n \\
\vec{\alpha}_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{e}_n \\
&\vdots \\
\vec{\alpha}_n &= a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\vec{\alpha}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n \\
=& \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\vec{e}_{\sigma(1)} \wedge \vec{e}_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{\sigma(n)} \\
=& \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n
\end{aligned}$$

比较行列式的外积定义，我们得到 $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$。 □

注 3.2.1. 在很多教材中，通常从定理3.2.2中的组合公式出发来定义行列式。

例 3.2.2. 考虑如下行列式

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{n,1} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}$$

我们按照组合公式来计算。先看第 n 行，只能取 $a_{n,1}$。取完后看第 $n-1$ 行，这时只能取 $a_{n-1,2}$。依次从下往上类推，我们发现只有 $a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}$ 这一项有贡献，其对应于置换

$$\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{n, n-1, \cdots, 1\} \qquad \operatorname{sign}\sigma = (-1)^{n(n-1)/2}$$

因此

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{n,1} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2}\, a_{1,n}\, a_{2,n-1} \cdots a_{n,1}$$

3.2.3 行列式的基本性质

命题 3.2.3 把矩阵的某一行乘以一个系数，则它的行列式的值也乘以同一个系数

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：由行列式的组合定义显然。从几何角度，这个性质对应于外积的线性性

$$\vec{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge (\lambda \vec{\alpha}_i) \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n = \lambda \vec{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_i \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n$$

□

命题 3.2.4 交换矩阵的任意两行，行列式差一个负号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：这个性质对应于外积的反对称性。 □

命题 3.2.5 如果矩阵有两行一样，则行列式为 0。

证明：假设第一行和第二行一样，交换这两行

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

由此可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

□

命题 3.2.6 如果某一行是另一行的倍数，则行列式为 0。

证明:

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \cdots & \lambda a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

□

命题 3.2.7 行列式对于任何一行具有如下加法性质

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1+b_1 & \cdots & a_n+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

证明: 这个对应于外积的线性性

$$\cdots \wedge (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \wedge \cdots = \cdots \wedge \vec{\alpha} \wedge \cdots + \cdots \wedge \vec{\beta} \wedge \cdots$$

□

命题 3.2.8 把某一行乘以一个数加到另一行，行列式值不变。

证明:

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1+\lambda a_1 & b_2+\lambda a_2 & \cdots & b_n+\lambda a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \cdots & \lambda a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

□

命题 3.2.9 对角方阵的行列式是对角元的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明：由行列式的组合定义显然。从几何角度，

$$a_{11}\vec{e}_1 \wedge a_{22}\vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge a_{nn}\vec{e}_n = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\ \vec{e}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

□

命题 3.2.10 上三角方阵的行列式是对角元的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明：由行列式的组合公式容易看出，只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 有贡献，对应的恒等置换是偶置换。

□

命题 3.2.11

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：由行列式的组合公式，如果第一行不取 a_{11}，则后面一定有某个第 k 行 $(k > 1)$ 需要取 $a_{k1} = 0$，因此贡献为 0。故第一行只能取 a_{11}。由此可以证明命题。 □

3.2.4 初等变换计算行列式

上述关于行列式的性质给出了计算行列式的一般方法。回顾矩阵的三种初等行变换：

1. 交换两行：将矩阵的两行交换位置
2. 将矩阵中的一行乘以一个非零常数

3. 将矩阵的一行乘以一个数加到另一行

对于 n 阶方阵，对应于上述三种初等行变换

1. 行列式变号

2. 行列式乘以同一个非零常数

3. 行列式保持不变

我们可以用初等行变换把矩阵变成梯形。对于 n 阶方阵，即变成上三角矩阵。而上三角矩阵的行列式为对角元相乘。因此我们通过初等变换把 n 阶方阵约化为上三角矩阵的过程，同时给出如何计算 n 阶行列式。

例 3.2.3. 计算以下 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

将第一行乘以 -2 加到第三行:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -8 \end{vmatrix}$$

将第二行乘以 -3 加到第三行:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-20) = 20$$

即原行列式为 20

例 3.2.4. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

将第一行和第二行交换:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

将第一行乘以 -2 加到第二行，将第一行乘以 -1 加到第四行:

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

将第二行和第三行交换:

$$-\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -5 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -5 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1\end{vmatrix}$$

将第二行乘以 -3 加到第三行，将第二行乘以 -1 加到第四行:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -5 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{vmatrix}$$

这里最后一个等式，我们把第三行提出系数 -2。将第三行加到第四行

$$-2\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)=2$$

由此我们得出原方阵的行列式

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=2$$

例 3.2.5. 我们给出上一个例子的另一个计算方法

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}&=-\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -5 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1\end{vmatrix}\\ &=-1\cdot\begin{vmatrix}3 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}+(-5)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\\ &=-3\cdot 3+(-5)\cdot(-2)-1\cdot(-1)=2\end{aligned}$$

3.3 Laplace 展开定理

我们在讨论面积元和体积元的时候，观察到 3 阶行列式可以化为 2 阶行列式的展开:

$$\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=u_1\begin{vmatrix}v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix}-u_2\begin{vmatrix}v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix}+u_3\begin{vmatrix}v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix}$$

实际上 n 阶行列式也可以化为低阶行列式的展开，这个称为 Laplace 展开定理。

3.3.1 余子式与展开定理

给定 n 阶方程

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

定义 3.3.1 A 的第 i 行第 j 列余子式 A_{ij} 定义为把 A 的第 i 行和第 j 列去掉后得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式，即

$$A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cdots & \cancel{a_{ij}} & \cdots & \cancel{a_{in}} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 3.3.1. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$，则

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=-6 \qquad A_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=-6$$

例 3.3.2. 体积元的展开公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

可以写成

$$\det A=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

命题 3.3.2 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵，则按照第一行展开有如下公式成立

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j}$$

证明：记 A 的行向量为

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_1&=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})=a_{11}\vec{e}_1+a_{12}\vec{e}_2+\cdots+a_{1n}\vec{e}_n \\
\vec{\alpha}_2&=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})=a_{21}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\cdots+a_{2n}\vec{e}_n \\
&\vdots \\
\vec{\alpha}_n&=(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn})=a_{n1}\vec{e}_1+a_{n2}\vec{e}_2+\cdots+a_{nn}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

由行列式的外积定义，我们有

$$\vec{\alpha}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n = (\det A)\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

另一方面，代入 $\vec{\alpha}_1$ 的表达式

$$\vec{\alpha}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n = (a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n) \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n$$

考虑其中的第一项 $a_{11}\vec{e}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n$, 记

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{e}_n = a_{21}\vec{e}_1 + \vec{\beta}_2 \\
&\vdots \\
\vec{\alpha}_n &= a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n = a_{n1}\vec{e}_1 + \vec{\beta}_n
\end{aligned}$$

则行向量 $\vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_n$ 组成把 A 的第 1 行第 1 列去掉后得到的 $n-1$ 阶方阵。由外积代数我们有

$$\vec{\beta}_2 \wedge \vec{\beta}_3 \wedge \cdots \wedge \vec{\beta}_n = A_{11}\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

另一方面，由外积代数关系 $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 = 0$,

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 = \vec{e}_1 \wedge (a_{21}\vec{e}_1 + \vec{\beta}_2) = \vec{e}_1 \wedge \vec{\beta}_2$$

类似的我们得到

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n \\
=&\vec{e}_1 \wedge (a_{21}\vec{e}_1 + \vec{\beta}_2) \wedge \cdots \wedge (a_{n1}\vec{e}_1 + \vec{\beta}_n) \\
=&\vec{e}_1 \wedge \vec{\beta}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\beta}_n
\end{aligned}$$

因此 $\det A$ 展开的第一项可以写成

$$a_{11}\vec{e}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n = a_{11}\vec{e}_1 \wedge \vec{\beta}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\beta}_n = a_{11}A_{11}\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

类似的，$\det A$ 展开的第 j 项可以计算为

$$a_{1j}\vec{e}_j \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n = a_{1j}A_{1j}\ \vec{e}_j \wedge \vec{e}_1 \wedge \cdots \cancel{\vec{e}_j} \cdots \wedge \vec{e}_n$$

我们可以用外积的反对称把 $\vec{e}_j$ 从最前面移动到第 j 个位置，共需要交换 $(j-1)$ 次。所以

$$\begin{aligned}
&a_{1j}A_{1j}\ \vec{e}_j \wedge \vec{e}_1 \wedge \cdots \cancel{\vec{e}_j} \cdots \wedge \vec{e}_n \\
=&(-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j}\ \vec{e}_1 \wedge \cdots \vec{e}_j \cdots \wedge \vec{e}_n
\end{aligned}$$

把所有项加起来，我们得到

$$\begin{aligned}
&\vec{\alpha}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n \\
=&(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n) \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n \\
=&\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j}\right) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n
\end{aligned}$$

比较行列式的外积定义，我们证明了命题所述

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j}$$

□

命题 3.3.3 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵，则按照第一列展开有如下公式成立

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1}$$

证明：记 A 的行向量为

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n = a_{11}\vec{e}_1 + \vec{\beta}_1 \\
\vec{\alpha}_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{e}_n = a_{21}\vec{e}_1 + \vec{\beta}_2 \\
&\vdots \\
\vec{\alpha}_n &= a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n = a_{n1}\vec{e}_1 + \vec{\beta}_n
\end{aligned}$$

利用外积的性质，我们可以展开得到

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_1 \wedge \vec{\alpha}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_n =& (a_{11}\vec{e}_1 + \vec{\beta}_1) \wedge (a_{21}\vec{e}_1 + \vec{\beta}_2) \wedge \cdots \wedge (a_{n1}\vec{e}_1 + \vec{\beta}_n) \\
=& \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \vec{e}_1 \wedge \vec{\beta}_1 \wedge \cdots \cancel{\vec{\beta}_i} \cdots \wedge \vec{\beta}_n \\
=& \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n
\end{aligned}$$

这里最后一步用了和前述命题证明中类似的计算。 □

定理 3.3.4 [Laplace 展开定理] 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵，A_{ij} 是第 i 行 j 列的余子式。

- 行展开公式：对任意第 i 行

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

- 列展开公式：对任意第 j 列

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

证明：我们在前述命题中证明了第 1 行的展开公式和第 1 列的展开公式。一般的情况证明方法类似，证明细节留作练习。 □

例 3.3.3. 按照第 1 行展开计算

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & 4\\2 & 1 & -2\end{vmatrix} =& 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 4\\1 & -2\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}0 & 4\\2 & -2\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}\\ =& 1\cdot(2-4) - 2\cdot(0-8) + 3\cdot(0-(-2)) = 20\end{aligned}$$

按照第 2 列展开计算

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & 4\\2 & 1 & -2\end{vmatrix} =& -2\cdot\begin{vmatrix}0 & 4\\2 & -2\end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & -2\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 4\end{vmatrix}\\ =& (-2)\cdot(0-8) - 1\cdot(-2-6) - 1\cdot(4-0) = 20\end{aligned}$$

例 3.3.4. 我们知道对于上三角方阵

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这个结论可以很容易地通过展开定理理解。我们把行列式按照第 *1* 列展开得到

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

重复这个过程就得到行列式为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

3.3.2 转置与行列对称性

定义 3.3.5 给定 $m\times n$ 矩阵 A，将 A 的行排成列列排成行，得到的 $n\times m$ 矩阵称为 A 的转置，记为 A^T

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

可以看出，如果 A 是 n 阶方阵，则 A^T 也是 n 阶方阵。

命题 3.3.6 设 A 是 $m \times k$ 矩阵，B 是 $k \times n$ 矩阵，则

$$(AB)^T = B^T A^T$$

类似地，对于多个矩阵的乘积，$(A_1 A_2 \cdots A_l)^T = A_l^T \cdots A_2^T A_1^T$。

证明：留作练习。 □

定理 3.3.7 n 阶行列式具有转置不变性，即 $\det A = \det A^T$。

证明：当 $n=1$ 时显然成立，我们对 n 做归纳。对 $\det A$ 作行展开，对 $\det A^T$ 作列展开，得到

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j} \qquad \det A^T = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} A_{i1}^T$$

由归纳假设知 $A_{1i} = A_{i1}^T$，因此 $\det A = \det A^T$。 □

转置不变性说明在行列式中行和列的地位是平等的。因此行列式关于行变换的性质对于列变换也成立。例如我们有

- 关于任意一列具有线性性

$$\begin{vmatrix} \cdots & a_1 + b_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 + b_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n + b_n & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & b_1 & \cdots \\ \cdots & b_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & b_n & \cdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \lambda a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 交换两列，行列式差一个负号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 把一列乘以一个数加到另一列，行列式不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + \lambda a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + \lambda a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + \lambda a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.3.3 一些例子

例 3.3.5 (Vandermonde 行列式). 如下 n 阶行列式

$$\Delta_n(x_1,\cdots,x_n):=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

称为 *Vandermonde* 行列式，在数学和物理中有很多应用。

我们用展开定理来计算 $\Delta_n(x_1,\cdots,x_n)$。把第 $(n-1)$ 行乘以 $-x_1$ 加到第 n 行，然后把第 $(n-2)$ 行乘以 $-x_1$ 加到第 $n-1$ 行，$\cdots$，最后把第 1 行乘以 $-x_1$ 加到第 2 行，我们得到

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & (x_2-x_1)x_2 & \cdots & (x_n-x_1)x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

按照第 1 列展开，我们得到

$$\begin{aligned}&=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ (x_2-x_1)x_2 & \cdots & (x_n-x_1)x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ (x_2-x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2}\end{vmatrix}\\ &=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

这里第二个等式是因为提取了每列的共同系数。因此我们得到递推关系

$$\Delta_n(x_1,\cdots,x_n)=\Delta_{n-1}(x_2,\cdots,x_n)\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1).$$

由此得到

$$\begin{aligned}&\Delta_n(x_1,\cdots,x_n)=\Delta_{n-1}(x_2,\cdots,x_n)\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\\ =&\Delta_{n-2}(x_3,\cdots,x_n)\left(\prod_{i=3}^{n}(x_i-x_2)\right)\left(\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\right)\\ =&\cdots=\prod_{i>j}(x_i-x_j)\end{aligned}$$

例 3.3.6. 求如下 n 阶三对角矩阵的行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_n$$

这里右下角标 $|_n$ 表示是 n 阶方阵。这个矩阵在 *Poisson* 方程边值问题的数值解法中扮演了十分重要的角色。把行列式通过第一行展开，我们得到

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_n \\ =& -2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{n-1} \end{aligned}$$

再把上述第二个矩阵按照第一列展开

$$= -2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{n-2}$$

因此我们得到递推关系

$$\Delta_n = -2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

初始条件为 $\Delta_1 = -2, \Delta_2 = 3$。

我们把递推关系写成 $(\Delta_n + \Delta_{n-1}) = -(\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2})$，因此

$$\begin{aligned} &(\Delta_n + \Delta_{n-1}) = -(\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}) \\ &= \cdots = (-1)^{n-2}(\Delta_2 + \Delta_1) = (-1)^n \end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned} \Delta_n =&(-1)^n - \Delta_{n-1} \\ =&(-1)^n - (-1)^{n-1} + \Delta_{n-2} = \cdots \\ =&(-1)^n - (-1)^{n-1} + \cdots + (-1)^n + (-1)^{n-1}\Delta_1 \\ =&(n+1)(-1)^n \end{aligned}$$

3.4 乘积的行列式

给定两个 n 阶方程

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

它们的乘积 AB 也是 n 阶方阵。我们这一节证明如下矩阵乘积的行列式公式:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

3.4.1 行列式与线性映射

一个 n 阶方阵 A 对应于线性映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

即把 $\mathbb{R}^n$ 中的元素 $\vec{x}$ 写成列向量，我们有

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

特别地，f 把 $\mathbb{R}^n$ 的标准基向量映到 A 的列向量

$$\begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) \cdots & f(\vec{e}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

例如

$$f(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

回顾我们用矩阵 A 的行向量做外积来定义行列式。由于行列式对于行和列是对称的，我们也可以等价地用列向量做外积来得到行列式。因此矩阵 A 的行列式也可以通过如下表达式给出

$$f(\vec{e}_1) \wedge f(\vec{e}_2) \wedge \cdots \wedge f(\vec{e}_n) = (\det A)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

这给出了行列式关于线性映射的解释：$\det A$ 是 f 把 $\mathbb{R}^n$ 中的体积元伸缩的倍数（带符号）。

3.4.2 乘积的行列式

设 A, B 是 n 阶行列式，它们分别对应于线性映射

$$f\ ,\ g\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

我们知道乘积 AB 对应于 f, g 复合的线性映射

$$f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

通过矩阵 B 的分量 (b_{ij})，我们有

$$\begin{aligned}&g(\vec{e}_1) \wedge g(\vec{e}_2) \wedge \cdots \wedge g(\vec{e}_n)\\ =&\left(\sum_i b_{i1}\vec{e}_i\right) \wedge \left(\sum_i b_{i2}\vec{e}_i\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_i b_{in}\vec{e}_i\right)\end{aligned}$$

复合 f 并利用 f 的线性性，我们得到

$$\begin{aligned}&f(g(\vec{e}_1)) \wedge f(g(\vec{e}_2)) \wedge \cdots \wedge f(g(\vec{e}_n))\\ =&\left(\sum_i b_{i1}f(\vec{e}_i)\right) \wedge \left(\sum_i b_{i2}f(\vec{e}_i)\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_i b_{in}f(\vec{e}_i)\right)\end{aligned}$$

根据行列式的定义，我们可以通过外积运算得到

$$\left(\sum_i b_{i1}\vec{e}_i\right) \wedge \left(\sum_i b_{i2}\vec{e}_i\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_i b_{in}\vec{e}_i\right) = (\det B)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

把 $\vec{e}_i$ 换做 $f(\vec{e}_i)$，通过同样的外积运算可以得到

$$\begin{aligned}&\left(\sum_i b_{i1}f(\vec{e}_i)\right) \wedge \left(\sum_i b_{i2}f(\vec{e}_i)\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_i b_{in}f(\vec{e}_i)\right)\\ &= (\det B)f(\vec{e}_1) \wedge f(\vec{e}_2) \wedge \cdots \wedge f(\vec{e}_n)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&f(g(\vec{e}_1)) \wedge f(g(\vec{e}_2)) \wedge \cdots \wedge f(g(\vec{e}_n))\\ =&\left(\sum_i b_{i1}f(\vec{e}_i)\right) \wedge \left(\sum_i b_{i2}f(\vec{e}_i)\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_i b_{in}f(\vec{e}_i)\right)\\ =&(\det B)f(\vec{e}_1) \wedge f(\vec{e}_2) \wedge \cdots \wedge f(\vec{e}_n)\end{aligned}$$

由矩阵 A 的行列式的外积定义，

$$f(\vec{e}_1) \wedge f(\vec{e}_2) \wedge \cdots \wedge f(\vec{e}_n) = (\det A)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

代入上式得到

$$f(g(\vec{e}_1)) \wedge f(g(\vec{e}_2)) \wedge \cdots \wedge f(g(\vec{e}_n)) = (\det A)(\det B)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

另一方面，由于复合 $f\circ g$ 对应于矩阵 AB，由行列式的外积定义我们有

$$f(g(\vec{e}_1))\wedge f(g(\vec{e}_2))\wedge\cdots\wedge f(g(\vec{e}_n))=\det(AB)\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\cdots\wedge\vec{e}_n$$

对比两方面的计算，我们得到 $\det(AB)=(\det A)(\det B)$。

定理 3.4.1 设 A,B 是 n 阶方阵，则

$$\det(AB)=(\det A)(\det B)$$

这个定理的几何解释为：假设 A,B 对应于线性映射 $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，故 g 将 n 维体积元伸缩 $\det B$ 倍，f 将 n 维体积元伸缩 $\det A$ 倍。则 f 复合 g 将 n 维体积元伸缩 $(\det A)(\det B)$ 倍。

例 3.4.1. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$。直接计算知

$$\det A=-2\quad\det B=-2\quad\Longrightarrow\det A\det B=4$$

另一方面 $AB=\begin{bmatrix}19&22\\43&50\end{bmatrix}$，其行列式为

$$\begin{vmatrix}19&22\\43&50\end{vmatrix}=19\times 50-43\times 22=950-946=4$$

例 3.4.2. 方阵 A 称为是幂零矩阵，如果存在一个正整数 N 使得 $A^N=0$，即足够多个 A 乘在一起是零。对于幂零矩阵一定有

$$\det A=0$$

实际上由 $A^N=0$ 两边取行列式，我们得到

$$\det(A^N)=(\det A)^N=0\quad\Longrightarrow\quad\det A=0$$

例 3.4.3. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵，$\lambda\in\mathbb{R}$。方阵 $\lambda A=(\lambda a_{ij})$ 可以通过矩阵乘积来表示

$$\lambda A=\Lambda A,\qquad\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\0&\lambda&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{bmatrix}$$

因此

$$\det(\lambda A)=\det\Lambda\det A=\lambda^n\det A$$

例 3.4.4. n 阶方阵 A 称为是反对称方阵，如果 $A^T=-A$。假设 A 是奇数阶反对称方阵，则

$$\det A=\det A^T=\det(-A)=(-1)^n\det A=-\det A$$

于是 $\det A=0$。例如

$$\begin{vmatrix}0&-2&3\\2&0&-1\\-3&1&0\end{vmatrix}=0$$

例 3.4.5. 求如下方阵（称为 n 阶轮回方阵）的行列式

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

设 $\omega=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ 是 n 次本原单位根。记多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

考虑列向量 $\vec{\beta}_i=\begin{bmatrix} 1 \\ \omega^i \\ \omega^{2i} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)i} \end{bmatrix}$。由 $(\omega^i)^n=1$，我们有

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \omega^i \\ \omega^{2i} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f(\omega^i) \\ f(\omega^i)\omega^i \\ f(\omega^i)\omega^{2i} \\ \vdots \\ f(\omega^i)\omega^{(n-1)i} \end{bmatrix}=f(\omega^i)\begin{bmatrix} 1 \\ \omega^i \\ \omega^{2i} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)i} \end{bmatrix}$$

即 $A\vec{\beta}_i=f(\omega^i)\vec{\beta}_i$。比如我们考虑第二行：

$$\begin{aligned} & a_{n-1}+a_0\omega^i+a_1\omega^{2i}+\cdots+a_{n-2}\omega^{(n-1)i} \\ =& a_{n-1}\omega^{ni}+a_0\omega^i+a_1\omega^{2i}+\cdots+a_{n-2}\omega^{(n-1)i} \\ =& (a_0+a_1\omega^i+\cdots+a_{n-2}\omega^{(n-2)i}+a_{n-1}\omega^{(n-1)i})\omega^i \\ =& f(\omega^i)\omega^i \end{aligned}$$

记矩阵

$$B=\begin{bmatrix} \vec{\beta}_0 & \vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}$$

则

$$AB=\begin{bmatrix} f(\omega^0)\vec{\beta}_0 & f(\omega^1)\vec{\beta}_1 & \cdots & f(\omega^{n-1})\vec{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}$$

两边取行列式，我们得到

$$\det A\det B=\det B\prod_{i=0}^{n-1}f(\omega^i)$$

观察到矩阵

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ \omega^0 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1}\\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega^0 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)}\end{bmatrix}$$

由 *Vandermonde* 行列式公式

$$\det B=\prod_{0\le i<j\le n-1}(\omega^j-\omega^i)\ne 0$$

因此公式

$$\det A\det B=\det B\prod_{i=0}^{n-1}f(\omega^i)$$

两边可以消去 $\det B$ 得到轮回矩阵的行列式

$$\det A=\prod_{i=0}^{n-1}f(\omega^i)$$

例 3.4.6. 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到自身的一个一一映射称为一个 n 元置换。给定 n 元置换 σ，我们可以把它对应到一个 n 阶方阵 A_σ，其矩阵元 a_{ij} 定义为

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果 } \sigma(i)=j\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

即 A_σ 的第 i 行只有其第 $\sigma(i)$ 列非 0 且其值是 1。例如 5 元置换

$$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ & & \Downarrow & & \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2\end{matrix}$$

对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

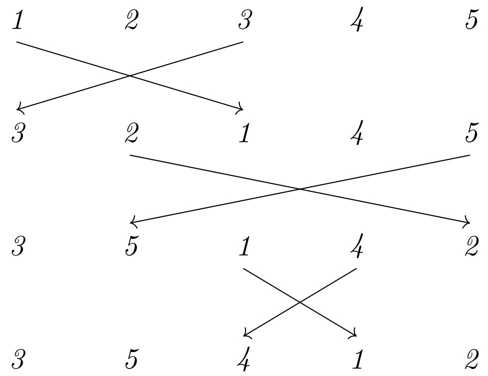
我们可以不断通过交换两行的变换把 A_σ 变为单位矩阵，而每次交换行列式变号。因此

$$\det A_\sigma=\pm 1$$

置换 σ 称为偶置换，如果 $\det A_\sigma=1$；σ 称为奇置换，如果 $\det A_\sigma=-1$。可以看出，σ 的奇偶性与还原到单位矩阵需要经过的对换次数的奇偶性是一样的。因此这里用行列式定义的置换奇偶性和第*3.2.2*节定义的奇偶性是等价的，即

$$\operatorname{sign}\sigma=\det A_\sigma$$

例如置换 $\sigma:\{1,2,3,4,5\}\to\{3,5,4,1,2\}$



可以通过 3 个对换复合得到，因此它是奇置换。我们也可以通过其对应的行列式看出

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sign} \sigma = 1$$

两个置换 σ, ρ 的复合 $\sigma \circ \rho$ 依然是一个 n 元置换。容易验证

$$A_{\sigma \circ \rho} = A_\sigma A_\rho$$

$$i \xrightarrow{A_\rho} \rho(i) \xrightarrow{A_\sigma} \sigma(\rho(i))$$

于是 $\det A_{\sigma \circ \rho} = \det A_\sigma \det A_\rho$。因此置换复合满足

$$\text{奇置换} \times \text{奇置换} \to \text{偶置换}$$
$$\text{奇置换} \times \text{偶置换} \to \text{奇置换}$$
$$\text{偶置换} \times \text{偶置换} \to \text{偶置换}$$

3.5 矩阵的逆

定义 3.5.1 设 A 是 n 阶方阵，如果存在一个 n 阶方阵 B 使得

$$AB = BA = I_n$$

其中 I_n 是 n 阶单位阵，我们称 A 是可逆的，且 B 是它的逆矩阵，记作 A^{-1}。

注 3.5.1. 只有方阵（即 $n \times n$ 矩阵）才可能谈逆矩阵。对于一般的矩阵，有一个推广的概念称为“广义逆”（见5.5.3节），它没有方阵的逆这样好的结构，但是在解线性方程组方面有一些和逆相近的性质。

3.5.1 可逆矩阵的判别法

假设 n 阶方阵 A 可逆，则对

$$AA^{-1} = I_n$$

两边取行列式，我们得到 $\det A \det A^{-1} = 1$, 因此

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

特别的有 $\det A \neq 0$。因此 A 可逆的一个必要条件是 $\det A \neq 0$。我们下面说明这也是充分条件。

命题 3.5.2 设 A 是 n 阶方阵，则如下两个条件等价

$$\det A \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rank} A = n$$

证明: 我们可以通过初等行变换将 A 变成阶梯形矩阵 A'

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & \cdots & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

由行列式在初等行变换下的变换性质可知

$$\det A \neq 0 \Longleftrightarrow \det A' \neq 0$$

由于 $\det A' = a'_{11}a'_{22}\cdots a'_{nn}$，我们可以看出

$$\det A' \neq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{rank} A' = n$$

因此

$$\det A \neq 0 \Longleftrightarrow \det A' \neq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{rank} A' = n \Longleftrightarrow \operatorname{rank} A = n$$

□

命题 3.5.3 设 A 是 n 阶方阵且 $\det A \neq 0$。则对任意列向量 $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$，线性方程组

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

有唯一解。

证明: 由 $\det A \neq 0$，我们有 $n - \operatorname{rank} A = 0$，由定理2.3.10得到解的唯一性。我们只需要证明解的存在性。考虑增广矩阵 $\overline{A} = [A\ \vec{b}]$，由

$$n = \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} \overline{A} = \overline{A} \text{ 的行秩} \leq n$$

知 $\operatorname{rank} \overline{A} = \operatorname{rank} A$。由定理2.3.10知解存在。 □

定理 3.5.4 A 是 n 阶方阵，则 A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$。

证明: 我们已经证明了必要性，下面证明充分性。

假设 $\det A \neq 0$。考虑 $\mathbb{R}^n$ 的标准基 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$。由命题3.5.3，我们可以解出唯一的向量 $\vec{\beta}_i$ 满足

$$A\vec{\beta}_i = \vec{e}_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

我们可以把这 n 个方程写成一个矩阵的形式

$$A\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n\end{bmatrix}$$

记 n 阶方阵 $B = \begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n\end{bmatrix}$。则上述即为

$$AB = I_n$$

我们下面证明 $BA = I_n$ 也成立。

由于 $AB = I_n$，两边取行列式我们知道 $\det B \neq 0$。把上述对 A 的论述用到 B，我们可以得到一个 n 阶方阵 C 使得 $BC = I_n$。因此

$$A = AI_n = A(BC) = (AB)C = I_nC = C$$

故 $BA = BC = I_n$ 成立。因此 B 是 A 的逆。 □

由上述定理证明我们不难看出，如果

$$AB = I_n$$

则必然有 $BA = I_n$。即“左逆”和“右逆”对方阵是一样的，故统记为矩阵的逆 A^{-1}。

3.5.2 逆矩阵的计算

定理3.5.4的证明过程同时给出了逆矩阵的计算方法：解线性方程组

$$A\vec{\beta}_i = \vec{e}_i$$

则 A 的逆矩阵为

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n\end{bmatrix}$$

由于 $\operatorname{rank} A = n$，我们可以通过初等行变换把 A 变成

$$\begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

进而从下往上作行变换消元变为单位阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

把增广矩阵加入如上操作，我们得到

$$\begin{bmatrix} A & \vec{e}_i \end{bmatrix} \overset{\text{行变换}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{bmatrix}$$

因此线性方程组的解为 $x_1 = b_1, \cdots, x_n = b_n$，即

$$\vec{\beta}_i = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

我们可以用这个方法同时解所有 n 个线性方程组 $A\vec{\beta}_i = \vec{e}_i$。考虑扩大的增广矩阵

$$\begin{bmatrix} A & \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix}$$

我们对其作初等行变换将其变为

$$\begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix} \overset{\text{行变换}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} I_n & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & \vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix}$$

则 B 的第 i 列即为线性方程组 $A\vec{\beta}_i = \vec{e}_i$ 的解。

定理 3.5.5 设 A 是 n 阶可逆矩阵。我们对 $n \times 2n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix}$ 作初等行变换将其变为

$$\begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix} \overset{\text{行变换}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} I_n & B \end{bmatrix}$$

则 n 阶矩阵 B 即为 A 的逆。

这个定理给出了逆矩阵的具体计算方法。

例 3.5.1. 计算矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵。我们对扩展的增广矩阵作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 & -5/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 & -5/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

因此我们可以读出逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 4/3 & -1 \\ 7/6 & -5/6 & 1/2 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5.3 伴随矩阵

逆矩阵也可以通过余子式直接求出。回顾 A 的第 i 行第 j 列余子式 A_{ij} 定义为把 A 的第 i 行和第 j 列去掉后得到的 $n-1$ 阶矩阵的行列式：

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cdots & \cancel{a_{ij}} & \cdots & \cancel{a_{in}} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式关于第 i 行的展开公式，我们有

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \det A$$

实际上我们有更好的性质

命题 3.5.6 n 阶方阵 A 的余子式 A_{ij} 满足

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} A_{ij} = \det A \delta_{ki}$$

证明：对于 $k=i$，这个即是行列式关于第 i 行的展开公式。下面我们考虑 $k\neq i$。表达式

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}A_{ij}$$

可以解释为把矩阵 A 的第 i 行替换成第 k 行，然后关于第 i 行作行列式展开。替换后第 i 行的余子式保持不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{第 } i \text{ 行展开}}{=} \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}A_{ij}$$

另一方面，左边矩阵第 i 行和第 k 行相同，故行列式为 0。因此 $\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}A_{ij}=0$。 □

我们可以把公式

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}A_{ij}=\det A\delta_{ki}$$

写成矩阵的样子

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^{i+1}A_{i1} \\ (-1)^{i+2}A_{i2} \\ \cdots \\ (-1)^{i+n}A_{in} \end{bmatrix} = \det A\ \vec{e}_i$$

假设 A 可逆，即 $\det A\neq 0$，则上述矩阵表达式说明线性方程组 $A\vec{\beta}_i=\vec{e}_i$ 的解即为

$$\vec{\beta}_i=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} (-1)^{i+1}A_{i1} \\ (-1)^{i+2}A_{i2} \\ \cdots \\ (-1)^{i+n}A_{in} \end{bmatrix}$$

定义 3.5.7 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 是一个 n 阶矩阵，其 (i,j) 矩阵元为 $(-1)^{i+j}A_{ji}$，即

$$A^*=\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}A_{11} & (-1)^{1+2}A_{21} & \cdots & (-1)^{1+n}A_{n1} \\ (-1)^{2+1}A_{12} & (-1)^{2+2}A_{22} & \cdots & (-1)^{2+n}A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{n+1}A_{1n} & (-1)^{n+2}A_{2n} & \cdots & (-1)^{n+n}A_{nn} \end{bmatrix}$$

我们上述讨论实际上证明了如下命题。

定理 3.5.8 设 A 是 n 阶可逆方阵，则其逆矩阵为

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

例 3.5.2. 2 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

$$A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

因此

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

例 3.5.3. 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

$$A^* = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 6 \\ -7 & 5 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

计算知 $\det A = -6$，因此

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 4/3 & -1 \\ 7/6 & -5/6 & 1/2 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5.4 Cramer 法则

设 A 是 n 阶方阵且 $\det A \neq 0$。由命题3.5.3，对任意列向量 $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$，线性方程组

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

有唯一解。实际上，由定理3.5.4我们知道 A 可逆，上述方程两边乘以 A^{-1} 可以得到解为

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

由定理3.5.8，我们可以把上述解具体表示为

$$\vec{x} = \frac{1}{\det A} A^* \vec{b}$$

写成分量有

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ji} b_j$$

考虑矩阵

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A_i 是把 A 的第 i 列替换成 $\vec{b}$ 构成的方阵。观察到 A_i 的第 k 行第 i 列余子式与 A 的第 k 行第 i 列余子式相同。通过第 i 列展开计算 A_i 的行列式，我们发现

$$\det A_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ji} b_j$$

由此我们证明了如下结论

定理 3.5.9. [Cramer 法则] 设 A 是 n 阶方阵且 $\det A \neq 0$。则线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的解为

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \det A_1 / \det A \\ \det A_2 / \det A \\ \vdots \\ \det A_n / \det A \end{bmatrix}$$

其中 A_i 是把 A 的第 i 列替换成 $\vec{b}$ 构成的方阵。

3.6 习题

1. 计算如下行列式

$$
(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} \qquad
(2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad
(3)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}
$$

2. 用行列式的组合公式计算如下 n 阶行列式

$$
(1)\ \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a & b \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \qquad
(2)\ \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}
$$

3. (a) 说明对 $m \times n$ 矩阵 A 作的三种初等行变换均可以写成对 A 左乘一个 m 阶方阵 P

$$A \to PA$$

写出三种初等行变换对应的矩阵 P 并计算其行列式 $\det P$。

(b) 和初等行变换类似，我们可以定义矩阵的三种初等列变换为

i. 交换两列: 将矩阵的两列交换位置

ii. 将矩阵中的一列乘以一个非零常数

iii. 将矩阵的一列乘以一个数加到另一列

说明对 $m \times n$ 矩阵 A 作的三种初等列变换均可以写成对 A 右乘一个 n 阶方阵 Q

$$A \to AQ$$

写出三种初等列变换对应的矩阵 Q 并计算其行列式 $\det Q$。

4. 设 A 是如下分块上三角形式

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

这里 B 是 $k \times k$ 矩阵，C 是 $k \times (n-k)$ 矩阵，D 是 $(n-k) \times (n-k)$ 矩阵。证明 $\det A = \det B \det D$。

5. 设 A 是 $m \times k$ 矩阵，B 是 $k \times n$ 矩阵。证明

$$(AB)^T = B^T A^T$$

类似地，对于多个矩阵的乘积，$(A_1 A_2 \cdots A_l)^T = A_l^T \cdots A_2^T A_1^T$。

6. 利用 Laplace 展开定理计算

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad\qquad (2)\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

7. Fibonacci 数为：$F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 3)$。证明 Fibonacci 数可以写成

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

8. 设 n 阶方阵 A 的矩阵元 $a_{ij} = a_{ij}(x)$ 都是变量 x 的可微函数。证明

$$\frac{d \det A}{dx} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (-1)^{i+j} \frac{da_{ij}}{dx} A_{ij}$$

其中 A_{ij} 是 A 的第 i 行第 j 列余子式。

9. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times m$ 矩阵。考虑 $(m+n) \times (m+n)$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$，这里 I_m 是 m 阶单位阵，I_n 是 n 阶单位阵。

(a) 证明

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

(b) 证明

$$\det(I_m - AB) = \det(I_n - BA)$$

(c) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & 1 + a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & 1 + a_n b_n \end{vmatrix}$$

10. 求下列矩阵的逆

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$ (4) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix}_{n\times n}$

11. 设 A 是可逆方阵。证明转置的逆等于逆的转置，即

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

12. 设 A 是 n 阶幂零方阵，即存在 N 使得 $A^N = 0$。证明 $I_n - A$ 可逆。

13. 设 A 是上三角方阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

且 A 可逆。证明 A^{-1} 也是上三角方阵。

14. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵。取出 A 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_p$ 列交叉位置上的元素构成的 p 阶方阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_p} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots & a_{i_pj_p} \end{vmatrix}$$

称为 A 的一个 p 阶行列子式。记 A 的所有非零行列子式的最高阶数为 $p(A)$。证明

$$p(A) = \operatorname{rank} A$$

15. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r。证明存在可逆 m 阶方阵 P 和可逆 n 阶方阵 Q 使得

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是 $m \times n$ 阶矩阵，左上角 I_r 是 r 阶单位阵。这个结论称为矩阵的相抵标准型。

第四章　特征值理论

4.1　特征值与特征向量

4.1.1　特征值与特征向量

我们知道 n 阶方阵 A 对应于线性映射 $f: k^n \to k^n$（这里数域 $k = \mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$）

$$f: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

即把列向量 $\vec{x}$ 映射为

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

为了更好地刻画这个映射的结构和几何性质，我们可以寻找一些特殊的向量使得这个线性映射把这些特殊向量映射到相对简单的形式。其中最自然的一类向量，就是使得线性映射把它映射到它自己的一个倍数。这类向量称为特征向量，其伸缩的倍数称为特征值。

定义 4.1.1　设 A 是一个 n 阶方阵。如果存在一个非零向量 $\vec{x}$ 和一个数 λ 使得

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

则 λ 称为 A 的一个特征值，$\vec{x}$ 称为（属于特征值 λ 的）一个特征向量。

这个概念类似地也可以对线性变换来定义。

定义 4.1.2　设 $f: V \to V$ 是线性空间 V 到自身的一个线性映射。如果存在一个非零向量 $\vec{x} \in V$ 和一个数 λ 使得

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

则 λ 称为 f 的一个特征值，$\vec{x}$ 称为（属于特征值 λ 的）一个特征向量。

例 4.1.1. 考虑矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。观察到

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此 7 是 A 的一个特征值，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是一个特征向量。

并不是任何 λ 都能成为给定方阵 A 的特征值。例如考虑 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，由于

$$A\vec{x} = 3\vec{x}$$

对任意向量 $\vec{x}$ 成立，因此 A 的特征值只有 $\lambda = 3$。

A 也可能有多个不同的特征值。例如考虑 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，容易看出

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此 $\lambda = 2$ 和 $\lambda = 3$ 均为 A 的特征值。

下面这个命题是特征值的等价描述。

命题 4.1.3 λ 是 n 阶方阵 A 的特征值当且仅当齐次线性方程组

$$(\lambda I_n - A)\vec{x} = 0$$

具有非零解。

证明：假设如上齐次线性方程组有非零解 $\vec{x}$，则

$$A\vec{x} = \lambda I_n \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

因此 λ 是特征值，$\vec{x}$ 是属于 λ 的特征向量。反之亦然。 □

上述命题给出了特征值的具体判别方法。

命题 4.1.4 λ 是 n 阶方阵 A 的特征值当且仅当

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

证明：齐次线性方程组 $(\lambda I_n - A)\vec{x} = 0$ 具有非零解当且仅当 $\det(\lambda I_n - A) = 0$。 □

4.1.2 特征多项式

定义 4.1.5 设 A 是 n 阶方阵。则 n 次多项式

$$\varphi(\lambda) := \det(\lambda I_n - A)$$

称为 A 的特征多项式。

由命题4.1.4知，A 的特征值即为特征多项式的根。

例 4.1.2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，特征多项式为

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} &= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)((\lambda-2)^2-2) = (\lambda-2)(\lambda-2-\sqrt{2})(\lambda-2+\sqrt{2})\end{aligned}$$

因此 A 有 3 个特征值 $2, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$。

对于 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$，其特征多项式

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

是首项为 λ^n 的 n 次多项式。由代数学基本定理，我们可以把 $\varphi(\lambda)$ 分解为

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 $\varphi(\lambda)$ 的所有复数根（可以有重根）。

命题 4.1.6 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 的所有复数根（可以有重根），则

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证明：由 $\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，知 $\varphi(0) = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。另一方面由定义

$$\varphi(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

对比两个表达式即得命题。 □

命题 4.1.7 方阵 A 可逆当且仅当 A 的特征值全不为零。

证明：由

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

即得命题。 □

例 4.1.3. 假设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 是上三角方阵，则

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - a_{ii})$$

此时 A 的特征值即为所有对角元的值。

定义 4.1.8 方阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的迹 (trace) 定义为

$$\operatorname{Tr} A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

即为 A 的所有对角元的和。

迹的一个重要性质是如下关于乘法的对称性。

命题 4.1.9 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times m$ 矩阵。则

$$\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$$

证明：留作练习。 □

命题 4.1.10 设 n 阶方阵 A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$。则

$$\alpha_1 = -\operatorname{Tr} A$$

证明：

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式组合公式，λ^{n-1} 项只能来源于 $\prod_{i=1}^{n}(\lambda-a_{ii})$ 的贡献，由此易得 $\alpha_1=-\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=-\operatorname{Tr}A$。 □

因此 A 的特征多项式可以表达为

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n-(\operatorname{Tr}A)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\det A$$

实际上，特征多项式中其他的系数 α_k 也可以通过 A 的 k 阶余子式来得到，我们这里不作讨论。

命题 4.1.11 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 的所有复数根（可以有重根），则

$$\operatorname{Tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

证明：$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ 的 λ^{n-1} 项系数为 $-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_n$。对比公式 $\varphi(\lambda)=\lambda^n-(\operatorname{Tr}A)\lambda^{n-1}+\cdots$ 即得命题。 □

例 4.1.4. 设 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 是 2 阶方阵

$$\operatorname{Tr}A=a+d \qquad \det A=ad-bc$$

因此 A 的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2-(\operatorname{Tr}A)\lambda+\det A=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)$$

这个公式也可以通过计算行列式直接验证。

4.1.3 Cayley-Hamilton 定理

定理 4.1.12. [Cayley-Hamilton] 设 n 阶方阵 A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)=\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda+\alpha_n$。则矩阵 $\varphi(A):=A^n+\alpha_1A^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}A+\alpha_nI_n$ 是零矩阵，即满足 $\varphi(A)=0$。

证明：令 $B=\lambda I_n-A$，则 $\varphi(\lambda)=\det B$。观察到 B 的每个余子式 B_{ij} 至多是 λ 的 $(n-1)$ 次多项式。因此 B 的伴随矩阵 B^* 可以写成

$$B^*=\lambda^{n-1}C_1+\lambda^{n-2}C_2+\cdots+C_n$$

其中 C_i 是不含 λ 的 n 阶方阵。由伴随矩阵的性质

$$BB^*=\det(B)I_n=\varphi(\lambda)I_n$$

代入上述表达式，我们得到等式

$$(\lambda I_n-A)(\lambda^{n-1}C_1+\lambda^{n-2}C_2+\cdots+C_n)=\varphi(\lambda)I_n$$

比较两边的 λ 多项式的系数矩阵，我们得到

$$\begin{aligned} C_1 &= I_n \\ C_2 - AC_1 &= \alpha_1 I_n \\ &\vdots \\ C_n - AC_{n-1} &= \alpha_{n-1} I_n \\ -AC_n &= \alpha_n I_n \end{aligned}$$

把这组方程依次左乘以 $A^n, A^{n-1}, \cdots, A, I_n$ 相加，即得到 $\varphi(A) = 0$。 $\square$

定义 4.1.13 设 A 是 n 阶方阵。一个非零多项式 $f(\lambda)$ 称为 A 的一个化零多项式，如果 $f(A) = 0$ 是零矩阵。

Cayley-Hamilton 定理表明，每个 n 阶方阵 A 都会满足一个多项式的代数关系：它的特征多项式是一个化零多项式。需要指出的是，特征多项式不一定是 A 的最小化零多项式：可能存在次数比 n 小的化零多项式。

例如对于 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，其特征多项式为 $\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$。另一方面

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

容易看出 $(A - 2I)(A - 3I) = 0$。因此 $f(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ 是 A 的一个化零多项式，它的次数比特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 的次数低。

Cayley-Hamilton 定理有很多重要的应用。我们这里举一个例子，它给出了一种矩阵逆的代数表达方法。设 A 是 n 阶方阵，其特征多项式为

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

假设 A 可逆，则 $\alpha_n = (-1)^n \det A \neq 0$。由 Cayley-Hamilton 定理，我们有等式

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I_n = 0$$

把 $\alpha_n I_n$ 移到右边，两边同除以 $-\alpha_n$

$$-\frac{1}{\alpha_n}(A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} I_n)A = I_n$$

由此得

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_n}(A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} I_n)$$

特别地，A^{-1} 可以通过 A 的一个多项式来表达。

例 4.1.5. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$。它的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I_3-A)=\lambda^3-4\lambda^2+7\lambda-10$$

因此

$$A^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-4A+7I_3)=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-5 & 2 & -16\\ 0 & 2 & 4\\ 5 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

4.2 相似变换

4.2.1 相似与对角化

定义 4.2.1 两个 n 阶方阵 A 与 B 称为是相似的，如果存在 n 阶可逆方阵 P 使得

$$A=PBP^{-1}$$

容易验证，相似关系构成一个等价关系，即满足

- 自反性：A 与 A 相似
- 对称性：若 A 与 B 相似，则 B 与 A 相似
- 传递性：若 A 与 B 相似，B 与 C 相似，则 A 与 C 相似

命题 4.2.2 如果 A 与 B 相似，$f(x)$ 是任意一个多项式。则 $f(A)$ 与 $f(B)$ 相似。

证明：设 $A=PBP^{-1}$。则对任意正整数 m

$$A^m=(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})=PB^mP^{-1}$$

由此易知 $f(A)=P\ f(B)\ P^{-1}$。 □

命题 4.2.3 如果 A 与 B 相似，则它们具有相同的特征多项式。特别地，我们有

$$\operatorname{Tr}A=\operatorname{Tr}B \qquad \det A=\det B$$

证明：设 $A=PBP^{-1}$。则

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-A)&=\det(\lambda I-PBP^{-1})=\det(P(\lambda I-B)P^{-1})\\&=\det(P)\det(\lambda I-B)\det(P^{-1})\\&=\det(\lambda I-B)\end{aligned}$$

□

定义 4.2.4 n 阶方阵 A 称为可对角化，如果 A 相似于一个对角阵 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$。这里

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

如果 A 相似于 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，则 A 的特征多项式和这个对角阵相同

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

因此这个对角阵的元素即为 A 的特征值。

假设 A 可对角化，$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) P^{-1}$，即

$$AP = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

记 P 的列向量为 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$

$$P = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix}$$

由 P 可逆知 $\operatorname{rank} P = n$，因此 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 构成一组基。

等式 $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) P^{-1}$ 可以写成

$$A \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

即

$$A\vec{\beta}_i = \lambda_i \vec{\beta}_i, \qquad i = 1, \cdots, n$$

这说明 $\vec{\beta}_i$ 是属于 λ_i 的特征向量。由上述讨论，我们证明了如下结论

命题 4.2.5 n 阶方阵 A 可对角化当且仅当存在一组基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 使得每个 $\vec{\beta}_i$ 都是 A 的特征向量。

在这个情况下，我们把任意向量 $\vec{x}$ 通过基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 来线性表达：$\vec{x} = \sum\limits_i c_i \vec{\beta}_i$。则矩阵 A 乘在向量 $\vec{x}$ 上很容易计算出

$$A\vec{x} = \sum_i c_i \lambda_i \vec{\beta}_i$$

例 4.2.1. 并不是每个方阵都可以对角化，例如

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

A 的特征值只有 λ_0，我们考虑它的特征向量。齐次线性方程组

$$(\lambda_0 I_n - A)\vec{x} = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

的解为 $x_1 = c, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$。因此 λ_0 的特征向量只有一个线性无关的元素，它不可能构成 n 维空间 $(n > 1)$ 的一组基。这说明方阵 A 不可对角化。

命题 4.2.6 如果数域 k 上 n 阶方阵 A 具有 n 个互不相同的特征值在 k 中，则 A 可以对角化。

证明：设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$。由假设这些特征值互不相同。设 $\vec{\beta}_i$ 是属于 λ_i 的一个特征向量。我们下面证明 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 线性无关。由此知 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 构成 n 维空间的一组基，因此 A 可对角化。

假设有系数 $c_1, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1\vec{\beta}_1 + c_2\vec{\beta}_2 + \cdots + c_n\vec{\beta}_n = 0$$

两边依次乘以 $A, A^2, \cdots, A^{n-1}$，我们得到

$$\begin{cases} c_1\vec{\beta}_1 + c_2\vec{\beta}_2 + \cdots + c_n\vec{\beta}_n = 0 \\ \lambda_1 c_1\vec{\beta}_1 + \lambda_2 c_2\vec{\beta}_2 + \cdots + \lambda_n c_n\vec{\beta}_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} c_1\vec{\beta}_1 + \lambda_2^{n-1} c_2\vec{\beta}_2 + \cdots + \lambda_n^{n-1} c_n\vec{\beta}_n = 0 \end{cases}$$

我们可以把这组方程写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} c_1\vec{\beta}_1 & c_2\vec{\beta}_2 & \cdots & c_n\vec{\beta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} = 0$$

记 $P = \begin{bmatrix} c_1\vec{\beta}_1 & c_2\vec{\beta}_2 & \cdots & c_n\vec{\beta}_n \end{bmatrix}$，$Q = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$，则上式为

$$PQ = 0$$

由 Vandermonde 行列式

$$\det Q = \prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

故 Q 可逆。因此 $PQ=0 \Longrightarrow P=0$，即 P 的每列 $c_i\vec{\beta}_i=0$。由于 $\vec{\beta}_i$ 都是非零向量，我们得出 $c_i=0, i=1,\cdots,n$。这证明了 $\{\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n\}$ 是线性无关的向量。 □

例 4.2.2. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，计算 A^{100}。

我们首先计算 A 的特征多项式

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)$$

A 有 3 个不同的特征值 $2,3,1$，因此可对角化。

我们计算特征值 $\lambda_1=2, \lambda_2=3, \lambda_3=1$ 对应的特征向量 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_3$

$$(\lambda_1 I-A)\vec{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\vec{\beta}_1 = 0 \qquad \text{取} \qquad \vec{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 I-A)\vec{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\vec{\beta}_2 = 0 \qquad \text{取} \qquad \vec{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_3 I-A)\vec{\beta}_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\vec{\beta}_3 = 0 \qquad \text{取} \qquad \vec{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

记矩阵

$$P = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \vec{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

容易计算

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

我们得到相似变化 $A = P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1}$。因此

$$\begin{aligned} A^{100} &= P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{100} P^{-1} = P\begin{bmatrix} 2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{100} & 3^{100} - 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} & 0 \\ 0 & (3^{100}-1)/2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.2.2 相似变换的几何含义

设 $f : k^n \to k^n$ 是一个线性映射。我们知道可以把 f 对应于一个 n 阶方阵 A。具体而言，取 k^n 的标准基 $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$，计算

$$f(\vec{e}_j) = \sum_i a_{ij}\vec{e}_i$$

则 $A = (a_{ij})$。实际上，除了标准基，我们也可以取另外一组基作类似的构造。

定义 4.2.7 设 $f : k^n \to k^n$ 是一个线性映射。给定 k^n 的一组基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$，设

$$f(\vec{\alpha}_j) = \sum_i a_{ij}\vec{\alpha}_i$$

则方阵 $A = (a_{ij})$ 称为 f 在这组基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 下的表示矩阵。

我们把 f 在基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 下的表示矩阵写成矩阵关系

$$\begin{bmatrix} f(\vec{\alpha}_1) & f(\vec{\alpha}_2) & \cdots & f(\vec{\alpha}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

如果我们取 k^n 中两组不同的基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 和 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$。设 f 在基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 下的表示矩阵为 A，在基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 下的表示矩阵为 B。那么矩阵 A 和 B 是什么关系？

由于 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 是一组基，我们可以把向量 $\vec{\beta}_j$ 在这组基下作线性展开

$$\vec{\beta}_j = \sum_i p_{ij}\vec{\alpha}_i$$

写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}$$

这个 n 阶方阵 $P = (p_{ij})$ 称为从基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 到基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵。

命题 4.2.8 一组基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 到另一组基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵 P 是可逆矩阵，且 P^{-1} 是基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 到基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 的过渡矩阵。

证明：设 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 到基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 的过渡矩阵为 Q。则

$$\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix} P$$
$$\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n\end{bmatrix} Q$$

把两个等式复合，我们得到

$$\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix} PQ$$

即

$$\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix}(I_n - PQ) = 0$$

由 $\{\vec{\alpha}_i\}$ 的线性无关性，我们得到 $PQ = I_n$。 □

定理 4.2.9 设线性映射 $f : k^n \to k^n$ 在基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 下的表示矩阵为 A，在基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 下的表示矩阵为 B。设基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 到基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵为 P。则

$$A = PBP^{-1}$$

证明：过渡矩阵关系为

$$\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix} P$$

由于 f 是线性映射，两边作用映射 f 给出

$$\begin{bmatrix}f(\vec{\beta}_1) & f(\vec{\beta}_2) & \cdots & f(\vec{\beta}_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f(\vec{\alpha}_1) & f(\vec{\alpha}_2) & \cdots & f(\vec{\alpha}_n)\end{bmatrix} P$$

代入 f 在基下表示矩阵的关系

$$\begin{bmatrix}f(\vec{\alpha}_1) & f(\vec{\alpha}_2) & \cdots & f(\vec{\alpha}_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix} A$$
$$\begin{bmatrix}f(\vec{\beta}_1) & f(\vec{\beta}_2) & \cdots & f(\vec{\beta}_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n\end{bmatrix} B$$

我们得到

$$\begin{bmatrix}\vec\beta_1 & \vec\beta_2 & \cdots & \vec\beta_n\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}\vec\alpha_1 & \vec\alpha_2 & \cdots & \vec\alpha_n\end{bmatrix} AP$$

再次代入过渡矩阵关系，上述等式变为

$$\begin{bmatrix}\vec\alpha_1 & \vec\alpha_2 & \cdots & \vec\alpha_n\end{bmatrix} PB = \begin{bmatrix}\vec\alpha_1 & \vec\alpha_2 & \cdots & \vec\alpha_n\end{bmatrix} AP$$

即

$$\begin{bmatrix}\vec\alpha_1 & \vec\alpha_2 & \cdots & \vec\alpha_n\end{bmatrix} (PB - AP) = 0$$

由 $\{\vec\alpha_i\}$ 的线性无关性，我们得到 $PB = AP$。 □

注 4.2.1. 这个命题给出了相似变换的几何含义：相似变换是同一个线性映射 $f : k^n \to k^n$ 在不同基下表示矩阵之间的变换。

4.3 特征子空间与根子空间

4.3.1 特征子空间

定义 4.3.1 设 A 是数域 k 上的 n 阶方阵，λ_0 是 A 一个特征值。定义向量空间 k^n 的子集

$$V_{\lambda_0} := \{\vec x \in k^n | A\vec x = \lambda_0 \vec x\}$$

称为特征值 λ_0 的特征子空间。

换言之，V_{λ_0} 是由所有属于 λ_0 的特征向量以及零向量构成的集合。

命题 4.3.2 特征子空间 V_{λ_0} 是一个线性空间。

证明：设 $\vec x, \vec y \in V_{\lambda_0}$，$\alpha$ 是一个数。则

$$\begin{aligned} A(\vec x + \vec y) &= A\vec x + A\vec y = \lambda_0 \vec x + \lambda_0 \vec y = \lambda_0(\vec x + \vec y) \\ A(\alpha \vec x) &= \alpha A \vec x = \alpha \lambda_0 \vec x = \lambda_0(\alpha \vec x) \end{aligned}$$

即 $\vec x + \vec y \in V_{\lambda_0}, \alpha \vec x \in V_{\lambda_0}$。由此命题得证。 □

例 4.3.1. 考虑 n 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$。它只有一个特征值 λ_0，其特征子空

间 V_{λ_0} 是 1 维的，由向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 张成。

定义 4.3.3 设 $\varphi(\lambda)$ 是 A 的特征多项式，λ_0 是 A 的特征值。

- 记 $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda)$，其中 $g(\lambda_0) \neq 0$。称 m 为特征值 λ_0 的代数重数，即 λ_0 作为特征多项式的根的重数
- $\dim V_{\lambda_0}$ 称为特征值 λ_0 的几何重数

例 4.3.2. n 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$ 的特征多项式

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n$$

因此特征值 λ_0 的代数重数为 n，几何重数为 1。

命题 4.3.4 特征值的几何重数 $\leq$ 代数重数。

证明：设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的特征值，其几何维数是 r，即 $\dim V_{\lambda_0} = r$。设 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_r\}$ 是 V_{λ_0} 的一组基。我们可以把它扩展为整个 n 维空间的一组基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_r, \vec{\beta}_{r+1}, \cdots, \vec{\beta}_n\}$。把这组基作为列向量，记 P 为方阵

$$P = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix}$$

由于 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_r\}$ 是 λ_0 的特征向量，我们有

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A\vec{\beta}_1 & A\vec{\beta}_2 & \cdots & A\vec{\beta}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_0\vec{\beta}_1 & \cdots & \lambda_0\vec{\beta}_r & A\vec{\beta}_{r+1} \cdots & A\vec{\beta}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 I_r & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这里 C 是 $r \times (n-r)$ 矩阵，D 是 $(n-r) \times (n-r)$ 矩阵，它们表示 $A\vec{\beta}_{r+1}, \cdots, A\vec{\beta}_n$ 按照基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 展开的系数。我们得到相似变换关系 $A = P \begin{bmatrix} \lambda_0 I_r & C \\ 0 & D \end{bmatrix} P^{-1}$ 。因此

$$\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - \begin{bmatrix} \lambda_0 I_r & C \\ 0 & D \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} (\lambda - \lambda_0) I_r & -C \\ 0 & \lambda I_{n-r} - D \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_0)^r \det(\lambda I_{n-r} - D)$$

这说明 λ_0 的代数重数 $\geq r$。 □

4.3.2 子空间的和与直和

定义 4.3.5 设 V 是数域 k 上的线性空间，$V_1,\cdots,V_m$ 是 V 的线性子空间。定义 V 的子集

$$V_1+\cdots+V_m=\{\vec{\alpha}_1+\cdots+\vec{\alpha}_m|\vec{\alpha}_i\in V_i\}\subset V$$

称为子空间 $V_1,\cdots,V_m$ 的和。

命题 4.3.6 V 的线性子空间的和 $V_1+\cdots+V_m$ 是 V 的线性子空间。

证明：设 $\vec{x},\vec{y}\in V_1+\cdots+V_m$。则存在 $\vec{\alpha}_i,\vec{\beta}_i\in V_i$ 使得

$$\vec{x}=\vec{\alpha}_1+\cdots+\vec{\alpha}_m \qquad \vec{y}=\vec{\beta}_1+\cdots+\vec{\beta}_m$$

则

$$\vec{x}+\vec{y}=(\vec{\alpha}_1+\vec{\beta}_1)+\cdots+(\vec{\alpha}_m+\vec{\beta}_m)$$

由于 V_i 是线性子空间，$(\vec{\alpha}_i+\vec{\beta}_i)\in V_i$，因此 $\vec{x}+\vec{y}\in V_1+\cdots+V_m$。同理可证保乘法。 □

例 4.3.3. 设 $V=\mathbb{R}^4$，$\{e_i\}$ 是标准基。考虑子空间 $V_1=\mathrm{Span}\{e_1,e_2\}$，$V_2=\mathrm{Span}\{e_2,e_3\}$，$V_3=\mathrm{Span}\{e_3,e_4\}$。则

$$V_1+V_2=\mathrm{Span}\{e_1,e_2,e_3\} \qquad V_1+V_3=V$$

定义 4.3.7 设 V 是数域 k 上的线性空间，$V_1,\cdots,V_m$ 是 V 的线性子空间。如果 $V_1+\cdots+V_m$ 中的任意向量 $\vec{\alpha}$，存在唯一的向量 $\alpha_i\in V_i$ 使得

$$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_1+\cdots+\vec{\alpha}_m$$

则此时 $V_1+\cdots+V_m$ 称为子空间 $V_1,\cdots,V_m$ 的直和，记为 $V_1\oplus\cdots\oplus V_m$。

命题 4.3.8 V 的子空间 $V_1,\cdots,V_m$ 的和是直和的充分必要条件是如下性质成立：

$$\text{若 }\vec{\alpha}_i\in V_i \quad \vec{\alpha}_1+\cdots+\vec{\alpha}_m=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\alpha}_1=\cdots=\vec{\alpha}_m=0$$

即只需要验证零向量表达的唯一性（零向量只能通过各个子空间的零向量相加得到）。

证明：假设 V 的子空间 $V_1,\cdots,V_m$ 的和是直和，则零向量只能唯一地表达为零向量相加，因此命题所述性质成立。

反之，假设命题所述性质成立。设 $\vec{\alpha}$ 是 $V_1+\cdots+V_m$ 中的向量，有两种表达方式

$$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_1+\cdots+\vec{\alpha}_m \qquad \vec{\alpha}=\vec{\beta}_1+\cdots+\vec{\beta}_m \qquad \text{这里}\quad \vec{\alpha}_i,\vec{\beta}_i\in V_i$$

两式相减得到

$$(\vec{\alpha}_1-\vec{\beta}_1)+\cdots+(\vec{\alpha}_m-\vec{\beta}_m)=0$$

由零向量表达的唯一性知 $\vec{\alpha}_1=\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m=\vec{\beta}_m$。由此证得表达的唯一性。 □

例 4.3.4. 设 $V=\mathbb{R}^4$，$\{\vec{e}_i\}$ 是标准基。考虑子空间

$$V_1=\mathrm{Span}\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\} \qquad V_2=\mathrm{Span}\{\vec{e}_2,\vec{e}_3\} \qquad V_3=\mathrm{Span}\{\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$$

- V_1+V_2 不是直和，例如我们有两种不一样的方法来表达相加

$$\vec{e}_2=\vec{e}_2+0 \qquad \vec{e}_2=0+\vec{e}_2$$

  其中第一种表达里 $\vec{e}_2$ 看作是 V_1 中的向量，第二种表达里 $\vec{e}_2$ 看作是 V_2 中的向量。

- $V_1+V_3=V_1\oplus V_3$ 是直和，可以由 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4$ 的线性无关性证明。

命题 4.3.9 V 的子空间 $V_1,\cdots,V_m$ 的和是直和的充分必要条件是

$$\dim(V_1+\cdots+V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$$

此时每个 V_i 选一组基合在一起构成 $V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ 的一组基。

证明: 设 $\{\vec{\beta}_1^{(i)},\cdots,\vec{\beta}_{t_i}^{(i)}\}$ 是 V_i 的一组基。由定义，

$$V_1+\cdots+V_m=\mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_{t_1}^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_1^{(m)},\cdots,\vec{\beta}_{t_m}^{(m)}\}$$

假设 $V_1+\cdots+V_m=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ 是直和。我们说明 $\{\vec{\beta}_1^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_{t_1}^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_1^{(m)},\cdots,\vec{\beta}_{t_m}^{(m)}\}$ 是线性无关的，因此构成 $V_1+\cdots+V_m$ 的一组基。由此即得 $\dim(V_1+\cdots+V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$。

若

$$c_1^{(1)}\vec{\beta}_1^{(1)}+\cdots+c_{t_1}^{(1)}\vec{\beta}_{t_1}^{(1)}+\cdots+c_1^{(m)}\vec{\beta}_1^{(m)}+\cdots+c_{t_m}^{(m)}\vec{\beta}_{t_m}^{(m)}=0$$

记 $\vec{\beta}_i=c_1^{(i)}\vec{\beta}_1^{(i)}+\cdots+c_{t_i}^{(i)}\vec{\beta}_{t_i}^{(i)}$。则 $\vec{\beta}_i\in V_i$ 且

$$0=\vec{\beta}_1+\cdots+\vec{\beta}_m$$

另一方面零向量显然可以写成零向量的和。由直和的表达唯一性，对每个 i 我们有 $\vec{\beta}_i=0$。又由于 $\vec{\beta}_1^{(i)},\cdots,\vec{\beta}_{t_i}^{(i)}$ 是 V_i 的一组基，$c_1^{(i)}=\cdots=c_{t_i}^{(i)}=0$。这证明了 $\{\vec{\beta}_1^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_{t_1}^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_1^{(m)},\cdots,\vec{\beta}_{t_m}^{(m)}\}$ 是线性无关的。

反之，假设 $\dim(V_1+\cdots+V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$ 成立。由

$$V_1+\cdots+V_m=\mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_{t_1}^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_1^{(m)},\cdots,\vec{\beta}_{t_m}^{(m)}\}$$

知 $\{\vec{\beta}_1^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_{t_1}^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_1^{(m)},\cdots,\vec{\beta}_{t_m}^{(m)}\}$ 是线性无关的。因此 $V_1+\cdots+V_m$ 中的任一向量可以唯一地写成 $\{\vec{\beta}_1^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_{t_1}^{(1)},\cdots,\vec{\beta}_1^{(m)},\cdots,\vec{\beta}_{t_m}^{(m)}\}$ 的线性组合。由此易证直和性。 □

命题 4.3.10 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 A 的 s 个互不相同的特征值。则它们的特征子空间的和是直和。

$$V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_s}=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$$

证明：设 $\{\vec\beta_1^{(j)},\cdots,\vec\beta_{t_j}^{(j)}\}$ 是 V_{λ_j} 中的一组基。我们只需证明这些向量 $\{\vec\beta_1^{(1)},\cdots,\vec\beta_{t_1}^{(1)},\cdots,\vec\beta_1^{(s)},\cdots,\vec\beta_{t_s}^{(s)}\}$ 合在一起构成的向量集是线性无关的。假设有线性组合满足

$$c_1^{(1)}\vec\beta_1^{(1)}+\cdots+c_{t_1}^{(1)}\vec\beta_{t_1}^{(1)}+\cdots+c_1^{(s)}\vec\beta_1^{(s)}+\cdots+c_{t_s}^{(s)}\vec\beta_{t_s}^{(s)}=0$$

记

$$\vec\beta^{(j)}=c_1^{(j)}\vec\beta_1^{(j)}+\cdots+c_{t_j}^{(j)}\vec\beta_{t_j}^{(j)}$$

则 $\vec\beta^{(j)}\in V_{\lambda_j}$ 并且

$$\vec\beta^{(1)}+\vec\beta^{(2)}+\cdots+\vec\beta^{(s)}=0$$

两边依次乘以 $A,A^2,\cdots,A^{s-1}$，我们得到

$$\begin{cases}\vec\beta^{(1)}+\vec\beta^{(2)}+\cdots+\vec\beta^{(s)}=0\\ \lambda_1\vec\beta^{(1)}+\lambda_2\vec\beta^{(2)}+\cdots+\lambda_s\vec\beta^{(s)}=0\\ \qquad\qquad\cdots\\ \lambda_1^{s-1}\vec\beta^{(1)}+\lambda_2^{s-1}\vec\beta^{(2)}+\cdots+\lambda_s^{s-1}\vec\beta^{(s)}=0\end{cases}$$

把这组方程写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix}\vec\beta^{(1)} & \vec\beta^{(2)} & \cdots & \vec\beta^{(s)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{s-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{s-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \lambda_s & \lambda_s^2 & \cdots & \lambda_s^{s-1}\end{bmatrix}=0$$

记 s 阶矩阵 $P=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{s-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{s-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \lambda_s & \lambda_s^2 & \cdots & \lambda_s^{s-1}\end{bmatrix}$，由 Vandermonde 行列式知 P 可逆。上式两边同时从右边乘以 P^{-1}，我们得到

$$\begin{bmatrix}\vec\beta^{(1)} & \vec\beta^{(2)} & \cdots & \vec\beta^{(s)}\end{bmatrix}=0$$

即每个向量 $\vec\beta^{(j)}=c_1^{(j)}\vec\beta_1^{(j)}+\cdots+c_{t_j}^{(j)}\vec\beta_{t_j}^{(j)}=0$。由 $\{\vec\beta_1^{(j)},\cdots,\vec\beta_{t_j}^{(j)}\}$ 的线性无关性，我们得到 $c_1^{(j)}=\cdots=c_{t_j}^{(j)}=0$ 对每个 $j=1,\cdots,s$ 成立。 □

这个命题说明，不同特征值的特征向量之间是相互线性无关的。特别地，如果 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值，则其对应的特征向量构成 n 维空间一组基，即得到命题4.2.6。

例 4.3.5. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$（称为幂等方阵）。则 A 相似于对角阵 $\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，这里 $r=\operatorname{rank}A$。实际上，考虑如下两个线性子空间

$$V_1=\{\vec x\in k^n|A\vec x=\vec x\}\quad V_0=\{\vec x\in k^n|A\vec x=0\}$$

如果 i 是 A 的特征值（$i=0,1$），则 V_i 是特征子空间，否则 $V_i=\{0\}$。

对任意向量 $\vec{x} \in k^n$，我们把它分解为

$$\vec{x} = A\vec{x} + (I_n - A)\vec{x}$$

由 A 的幂等性

$$A(A\vec{x}) = A\vec{x}, \quad A(I_n - A)\vec{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A\vec{x} \in V_1, \quad (I_n - A)\vec{x} \in V_0$$

这个分解说明

$$V_1 + V_0 = k^n$$

设 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_r\}$ 是 V_1 的一组基，$\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_s\}$ 是 V_0 的一组基。由命题4.3.10知，$\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_r, \vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_s\}$ 构成 k^n 的一组基。由命题4.2.5，A 相似于对角阵 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。

4.3.3 根子空间

这一节我们假设数域 k 上 n 阶方阵 A 的所有特征值都在数域 k 中（若 $k = \mathbb{R}$，即要求特征值均为实数）。A 的特征多项式可以分解为

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是互不相同的特征值，m_i 是 λ_i 的代数重数。

设 V_{λ_i} 是 λ_i 的特征子空间。我们知道

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$$

由命题4.3.4

$$\dim V_{\lambda_i} \leq m_i, \quad i = 1, \cdots, s$$

如果 $\dim V_{\lambda_i} = m_i$ 对每个 i 成立，那么每个 V_{λ_i} 选一组基，合起来构成整个 k^n 的一组基。若 $\dim V_{\lambda_i} < m_i$，我们似乎"缺失"了某些向量。这些"缺失"的向量可以通过根子空间找回来。

定义 4.3.11 设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的一个特征值。定义 λ_0 的根子空间为

$$R_{\lambda_0} = \{\vec{x} \mid \text{存在某个 } m > 0 \text{ 使得} (\lambda_0 I_n - A)^m \vec{x} = 0\}$$

即 $\vec{x} \in R_{\lambda_0}$ 当且仅当对 $\vec{x}$ 乘以 $\lambda_0 I_n - A$ 足够多次后会变成 0。

λ_0 的特征子空间可以刻画为

$$V_{\lambda_0} = \{\vec{x} | (\lambda_0 I_n - A)\vec{x} = 0\}$$

即对 $\vec{x}$ 乘以 $\lambda_0 I_n - A$ 一次变成 0。因此 $V_{\lambda_0} \subset R_{\lambda_0}$。

命题 4.3.12 根子空间 R_{λ_0} 是线性空间。

证明：设 $\vec{x}, \vec{y} \in R_{\lambda_0}$。则存在 $m_1, m_2 > 0$ 使得

$$(\lambda_0 I_n - A)^{m_1}\vec{x} = 0 \qquad (\lambda_0 I_n - A)^{m_2}\vec{y} = 0$$

取 $m = \max\{m_1, m_2\}$，则

$$(\lambda_0 I_n - A)^m(\vec{x}+\vec{y}) = (\lambda_0 I_n - A)^m\vec{x} + (\lambda_0 I_n - A)^m\vec{y} = 0$$

即 $\vec{x}+\vec{y} \in R_{\lambda_0}$。易知 R_{λ_0} 也保数乘。 □

例 4.3.6. n 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$。易知

$$(\lambda_0 I_n - A)^n = 0$$

因此任意向量 $\vec{x}$ 都属于根子空间 R_{λ_0} 中。可以看出根子空间的确找回来了“缺失”的向量。

定义 4.3.13 设 A 是 n 阶矩阵。线性子空间 $V \subset k^n$ 称为是 A 的不变子空间如果

$$\text{对任意 } \vec{x} \in V, \quad A\vec{x} \in V$$

命题 4.3.14 根子空间 R_{λ_0} 是 A 的不变子空间。

证明：设 $\vec{x} \in R_{\lambda_0}$，$(\lambda_0 I_n - A)^m\vec{x} = 0$。则

$$(\lambda_0 I_n - A)^m(A\vec{x}) = A((\lambda_0 I_n - A)^m\vec{x}) = 0$$

故 $A\vec{x} \in R_{\lambda_0}$。 □

由于 R_{λ_0} 是 A 的不变子空间，把 A 的作用限制在 R_{λ_0} 上得到一个线性映射

$$A : R_{\lambda_0} \to R_{\lambda_0}$$

命题 4.3.15 线性映射 $A : R_{\lambda_0} \to R_{\lambda_0}$ 在 R_{λ_0} 的任一组基下的表示矩阵的特征值只有 λ_0。

证明：考虑这个线性映射在 R_{λ_0} 的一组基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_t\}$ 下的表示矩阵 s 阶方阵 $B = (b_{ij})$，即

$$A\vec{\beta}_j = \sum_i \vec{\beta}_i b_{ij}$$

写成矩阵的形式

$$A\begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_t \end{bmatrix} B$$

由根子空间定义，存在充分大 $m>0$ 使得 $(\lambda_0 I_n - A)^m\vec{\beta}_i = \vec{0}$，对 $i=1,\cdots,t$ 成立。由

$$(\lambda_0 I_n - A)^m \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_t \end{bmatrix} (\lambda_0 I_t - B)^m$$

左边是零，因此

$$\begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_t \end{bmatrix} (\lambda_0 I_t - B)^m = \mathbf{0}$$

由 $\{\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_t\}$ 的线性无关性，得 $(\lambda_0 I_t - B)^m = 0$。由此易知（或参考命题4.4.3）$\lambda_0 I_t - B$ 的特征值只有 0, 即 B 的特征值只有 λ_0。 □

命题 4.3.16 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是互不相同的特征值。则它们的根子空间的和是直和。

$$R_{\lambda_1}+\cdots+R_{\lambda_s} = R_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus R_{\lambda_s}$$

证明：设 $\vec{\beta}_i \in R_{\lambda_i}$ 并且

$$\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2+\cdots+\vec{\beta}_s = 0$$

我们只需证明一定有 $\vec{\beta}_1=\cdots=\vec{\beta}_s=0$。

假设 $\vec{\beta}_1\neq 0$。则存在正整数 m 使得 $(\lambda_1 I_n - A)^{m-1}\vec{\beta}_1 \neq 0$，$(\lambda_1 I_n - A)^m\vec{\beta}_1 = 0$。记 $\vec{\gamma}_1 = (\lambda_1 I_n - A)^{m-1}\vec{\beta}_1 \neq 0$，则

$$(\lambda_1 I_n - A)\vec{\gamma}_1 = 0$$

即 $\vec{\gamma}_1$ 是 λ_1 的特征向量。则对任意多项式 $f(x)$

$$f(A)\vec{\gamma}_1 = f(\lambda_1)\vec{\gamma}_1$$

取 N 充分大使得

$$(\lambda_i I_n - A)^N\vec{\beta}_i = 0, \qquad i=1,\cdots,s$$

令 $f(x) = (\lambda_2-x)^N(\lambda_3-x)^N\cdots(\lambda_s-x)^N$。则

$$f(A)\vec{\gamma}_1 = f(\lambda_1)\vec{\gamma}_1, \quad f(A)\vec{\beta}_2=\cdots=f(A)\vec{\beta}_s = 0$$

其中 $f(\lambda_1) = (\lambda_2-\lambda_1)^N(\lambda_3-\lambda_1)^N\cdots(\lambda_s-\lambda_1)^N \neq 0$。在等式

$$\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2+\cdots+\vec{\beta}_s = 0$$

两边乘以 $(\lambda_1 I_n - A)^{m-1}f(A)$，我们得到

$$f(\lambda_1)\vec{\gamma}_1 = 0$$

由于 $f(\lambda_1)\neq 0 \Longrightarrow \vec{\gamma}_1 = 0$，与假设矛盾。因此 $\vec{\beta}_1=0$。同理可证 $\vec{\beta}_1=\cdots=\vec{\beta}_s=0$。 □

命题 4.3.17 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 n 阶方阵 A 所有互不相同的特征值。则

$$k^n = R_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus R_{\lambda_s}$$

证明：由命题4.3.16，我们只需证明任意向量 $\vec{x} \in k^n$ 可以分解为

$$\vec{x} = \vec{\beta}_1 + \cdots + \vec{\beta}_s, \qquad \vec{\beta}_i \in R_{\lambda_i}$$

n 阶方阵 A 的特征多项式为

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是互不相同的特征值。考虑如下的多项式

$$\varphi_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}}(\lambda - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

即把 $\varphi(\lambda)$ 中去掉 $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ 因子得到的多项式。多项式 $\varphi_1(\lambda), \cdots, \varphi_s(\lambda)$ 的公因子只有常数函数，因此存在多项式 $h_i(\lambda)$ 使得

$$\varphi_1(\lambda)h_1(\lambda) + \cdots + \varphi_s(\lambda)h_s(\lambda) = 1$$

代入矩阵 A，我们得到

$$\varphi_1(A)h_1(A) + \cdots + \varphi_s(A)h_s(A) = I_n$$

因此

$$\vec{x} = (\varphi_1(A)h_1(A) + \cdots + \varphi_s(A)h_s(A))\vec{x} = \vec{\beta}_1 + \cdots + \vec{\beta}_s$$

这里 $\vec{\beta}_i = \varphi_i(A)h_i(A)\vec{x}$。由 Cayley-Hamilton 定理，

$$(\lambda_i I_n - A)^{m_i}\varphi_i(A) = \varphi(A) = 0$$

因此 $(\lambda_i I_n - A)^{m_i}\vec{\beta}_i = \varphi(A)h_i(A)\vec{x} = 0$，即 $\vec{\beta}_i \in R_{\lambda_i}$。 □

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 A 的所有互不相同的特征值。设 $\{\vec{\beta}_1^{(j)}, \cdots, \vec{\beta}_{t_j}^{(j)}\}$ 是 R_{λ_j} 的一组基。由命题4.3.17，向量组

$$\{\vec{\beta}_1^{(1)}, \cdots, \vec{\beta}_{t_1}^{(1)}, \cdots, \vec{\beta}_1^{(s)}, \cdots, \vec{\beta}_{t_s}^{(s)}\}$$

构成 k^n 的一组基。由命题4.3.14，R_{λ_j} 是 A 的不变子空间，因此 $A\vec{\beta}_i^{(j)}$ 是 $\{\vec{\beta}_1^{(j)}, \cdots, \vec{\beta}_{t_j}^{(j)}\}$ 的线性组合。写成矩阵的形式

$$\begin{aligned} &A\begin{bmatrix} \vec{\beta}_1^{(1)} & \cdots & \vec{\beta}_{t_1}^{(1)} & \cdots & \vec{\beta}_1^{(s)} & \cdots & \vec{\beta}_{t_s}^{(s)} \end{bmatrix} \\ =&\begin{bmatrix} \vec{\beta}_1^{(1)} & \cdots & \vec{\beta}_{t_1}^{(1)} & \cdots & \vec{\beta}_1^{(s)} & \cdots & \vec{\beta}_{t_s}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这里 B_j 是 t_j 阶方阵，其特征多项式为 $(\lambda - \lambda_j)^{t_j}$（命题4.3.15）。因此 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda - B_1) \cdots \det(\lambda - B_s) = (\lambda - \lambda_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{t_s}$$

对比
$$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$
我们得到
$$t_j = m_j$$

由此我们证明了如下命题。

命题 4.3.18 $\dim R_{\lambda_i}$ 等于 λ_i 的代数重数。

总结如上，我们有 $V_{\lambda_i} \subset R_{\lambda_i}$
$$\dim V_{\lambda_i} = \text{几何重数} \quad \leq \quad \dim R_{\lambda_i} = \text{代数重数}$$
根子空间给出直和分解
$$k^n = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus R_{\lambda_s}$$

.

4.4 Jordan 标准型

4.4.1 幂零变换与循环子空间

定义 4.4.1 一个线性映射 $f : V \to V$ 称为幂零变换，如果存在正整数 m 使得 f 的 m 次复合 $f^m = 0$。类似地，一个 n 阶方阵 A 称为幂零矩阵，如果存在正整数 m 使得 $A^m = 0$。使得 $f^m = 0$（或 $A^m = 0$）成立的最小正整数 m 称为 f（或 A）的幂零指数，此时也称 f（或 A）为 m 次幂零变换（或幂零方阵）。

命题 4.4.2 设 A 是一个 n 阶幂零矩阵，则 $I_n - A$ 可逆。

证明：设 $A^m = 0$，则
$$(I_n - A)(I_n + A + \cdots + A^{m-1}) = I_n$$
因此 $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + \cdots + A^{m-1}$。 □

命题 4.4.3 一个 n 阶方阵 A 是幂零矩阵当且仅当 A 只有零特征值，即特征多项式为 λ^n。

证明：假设 A 是幂零矩阵。设 $\lambda_0 \neq 0$，则 $\lambda_0^{-1}A$ 也是幂零矩阵。由命题4.4.2$(I_n - \lambda_0^{-1}A)$ 可逆，$\lambda_0 I_n - A = \lambda_0(I_n - \lambda_0^{-1}A)$ 可逆，故 λ_0 不是 A 的特征值。由 λ_0 的任意性，A 的特征值只有 0。

反之假设 A 只有零特征值，即特征多项式为 λ^n。由 Cayley-Hamilton 定理知 $A^n = 0$。

□

定义 4.4.4 设 $f: V \to V$ 是一个线性变换（或 A 是一个 n 阶矩阵），$\vec{x}$ 是一个非零向量。

$$C_{\vec{x}} = \mathrm{Span}\{\vec{x}, f(\vec{x}), \cdots, f^m(\vec{x}), \cdots\} \quad (\quad 或 \quad C_{\vec{x}} = \mathrm{Span}\{\vec{x}, A\vec{x}, \cdots, A^m\vec{x}, \cdots\} \quad)$$

称为在 A 作用下由 $\vec{x}$ 生成的循环子空间。

由 Cayley-Hamilton 定理知，$\{\vec{x}, A\vec{x}, \cdots, A^{n-1}\vec{x}\}$ 已经可以张成整个 $C_{\vec{x}}$。

命题 4.4.5 设 A 是幂零方阵，r 是满足 $A^r\vec{x} = 0$ 的最小正整数。则 $\dim C_{\vec{x}} = r$，并且

$$\{\vec{x}, A\vec{x}, \cdots, A^{r-1}\vec{x}\}$$

构成这个在 A 作用下由 $\vec{x}$ 生成的循环子空间 $C_{\vec{x}}$ 的一组基。

证明：设 r 是满足 $A^r\vec{x} = 0$ 的最小正整数。我们只需证明 $\{\vec{x}, A\vec{x}, \cdots, A^{r-1}\vec{x}\}$ 是线性无关的。假设

$$c_0\vec{x} + c_1A\vec{x} + \cdots + c_{r-1}A^{r-1}\vec{x} = 0$$

并且系数 c_i 不全为零。假设 $c_0 = \cdots = c_{k-1} = 0$, $c_k \neq 0$，$k \leq r-1$，不妨设 $c_k = 1$。则我们有

$$A^k\vec{x} + c_{k+1}A^{k+1}\vec{x} + \cdots + c_{r-1}A^{r-1}\vec{x} = \Big(I_n + g(A)\Big)A^k\vec{x} = 0$$

这里 $g(A) = c_{k+1}A + \cdots + c_{r-1}A^{r-1-k}$。由于 A 是幂零方阵，$g(A)$ 也是幂零方阵，由命题4.4.2知 $I_n + g(A)$ 可逆。两边乘以 $\big(I_n + g(A)\big)^{-1}$，我们得到

$$A^k\vec{x} = 0$$

这与 r 的最小性矛盾。 □

定义 4.4.6 设 f 是幂零变换（或 A 是幂零方阵）。定义向量 $\vec{x}$ 在 f（或 A）作用下的深度 $d_{\vec{x}}$ 为满足 $f^r(\vec{x}) = 0$（或 $A^r\vec{x} = 0$）的最小正整数 r。由命题4.4.5知

$$d_{\vec{x}} = \dim C_{\vec{x}}$$

命题 4.4.7 设 V 是 n 维线性空间，$f: V \to V$ 是一个 m 次幂零变换。则存在向量 $\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_t \in V$ 使得

$$V = C_{\vec{\alpha}_1} \oplus C_{\vec{\alpha}_2} \oplus \cdots \oplus C_{\vec{\alpha}_t}$$

即 V 可以分解为循环子空间的直和。此时 $\max\{d_{\vec{\alpha}_i}\} = \max\{\dim C_{\vec{\alpha}_i}\} =$ 幂零指数m。

证明：我们对 m 作归纳。当 $m = 1$ 时命题显然成立。考虑 V 的线性子空间

$$f(V) = \mathrm{im}\, f \subset V$$

易知 $f(V)$ 是 V 的不变子空间，且 f 限制在 $f(V)$ 上得到的线性变换

$$f: f(V) \to f(V)$$

是一个 $m-1$ 次幂零变换。由归纳假设，存在 $\vec{\gamma}_1, \cdots,\ \vec{\gamma}_r \in f(V)$ 使得

$$f(V) = C_{\vec{\gamma}_1} \oplus \cdots \oplus C_{\vec{\gamma}_r}$$

由 $\vec{\gamma}_i \in f(V)$，存在向量 $\vec{\alpha}_i$ 使得 $\vec{\gamma}_i = f(\vec{\alpha}_i), i = 1, \cdots, r$。我们首先说明

$$C_{\vec{\alpha}_1} + \cdots + C_{\vec{\alpha}_r} = C_{\vec{\alpha}_1} \oplus \cdots \oplus C_{\vec{\alpha}_r}$$

是直和。假设有 $\vec{\beta}_i = c_{i,0}\vec{\alpha}_i + c_{i,1}f(\vec{\alpha}_i) + \cdots \in C_{\vec{\alpha}_i}$ 使得

$$\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 + \cdots + \vec{\beta}_r = 0$$

两边作用 f 得到 $f(V)$ 中的关系

$$c_{1,0}\vec{\gamma}_1 + \cdots + c_{r,0}\vec{\gamma}_r + \cdots = 0$$

由如上 $f(V)$ 的直和分解，知 $c_{1,0} = \cdots = c_{r,0} = 0$。因此 $\vec{\beta}_i \in C_{\vec{\gamma}_i}$。再由直和分解知 $\vec{\beta}_i = 0$。这证明了 $C_{\vec{\alpha}_1} + \cdots + C_{\vec{\alpha}_r} = C_{\vec{\alpha}_1} \oplus \cdots \oplus C_{\vec{\alpha}_r}$ 是直和。

由于 f 是幂零变换，只有零特征值。考虑其对应的特征子空间

$$V_0 = \{\vec{x} \in V | f(\vec{x}) = 0\}$$

设 $d_i = d_{\vec{\alpha}_i}, i = 1, \cdots, r$。则 $\{f^{d_1-1}(\vec{\alpha}_1), \cdots, f^{d_r-1}(\vec{\alpha}_r)\}$ 是 V_0 中线性无关的向量。我们添加向量 $\{\vec{\alpha}_{r+1}, \cdots, \vec{\alpha}_t\}$ 使得

$$\{f^{d_1-1}(\vec{\alpha}_1), \cdots, f^{d_r-1}(\vec{\alpha}_r), \vec{\alpha}_{r+1}, \cdots, \vec{\alpha}_t\}$$

构成 V_0 的一组基。注意到对于 $i = r+1, \cdots, t$，$C_{\vec{\alpha}_i} = \mathrm{Span}\{\vec{\alpha}_i\}$。我们下面说明

$$C_{\vec{\alpha}_1} + \cdots + C_{\vec{\alpha}_r} + C_{\vec{\alpha}_{r+1}} + \cdots + C_{\vec{\alpha}_t} = C_{\vec{\alpha}_1} \oplus \cdots \oplus C_{\vec{\alpha}_r} \oplus C_{\vec{\alpha}_{r+1}} \oplus \cdots \oplus C_{\vec{\alpha}_t}$$

是直和。假设有 $\vec{\beta}_i \in C_{\vec{\alpha}_i}$ 使得

$$\vec{\beta}_1 + \cdots + \vec{\beta}_r + \vec{\beta}_{r+1} + \cdots + \vec{\beta}_t = 0$$

两边作用 f 得到 $f(\vec{\beta}_1 + \cdots + \vec{\beta}_r) = 0$，即 $\vec{\beta}_1 + \cdots + \vec{\beta}_r \in V_0$。因此我们有

$$\vec{\beta}_1 + \cdots + \vec{\beta}_r \in (C_{\vec{\alpha}_1} \oplus \cdots \oplus C_{\vec{\alpha}_r}) \cap V_0 = \mathrm{Span}\{f^{d_1-1}(\vec{\alpha}_1), \cdots, f^{d_r-1}(\vec{\alpha}_r)\}$$

因此

$$\vec{\beta}_{r+1} + \cdots + \vec{\beta}_t = -(\vec{\beta}_1 + \cdots + \vec{\beta}_r) \in \mathrm{Span}\{f^{d_1-1}(\vec{\alpha}_1), \cdots, f^{d_r-1}(\vec{\alpha}_r)\}$$

因为 $\{f^{d_1-1}(\vec{\alpha}_1), \cdots, f^{d_r-1}(\vec{\alpha}_r), \vec{\alpha}_{r+1}, \cdots, \vec{\alpha}_t\}$ 线性无关，我们得到 $\vec{\beta}_{r+1} = \cdots = \vec{\beta}_t = 0$。于是

$$\vec{\beta}_1 + \cdots + \vec{\beta}_r = 0$$

又由于 $C_{\vec{\alpha}_1}\oplus\cdots\oplus C_{\vec{\alpha}_r}$ 是直和，我们进一步得到 $\vec{\beta}_1=\cdots=\vec{\beta}_r=0$。这证明了如上的直和性质。

最后我们说明 $\{C_{\vec{\alpha}_1},\cdots,C_{\vec{\alpha}_t}\}$ 张成了整个 V。实际上，对 V 中任一向量 $\vec{x}$，由 $f(\vec{x})\in f(V)=C_{\vec{\gamma}_1}\oplus\cdots\oplus C_{\vec{\gamma}_r}$ 知存在 $\vec{y}\in C_{\vec{\alpha}_1}\oplus\cdots\oplus C_{\vec{\alpha}_r}$ 使得 $f(\vec{x})=f(\vec{y})$。这说明 $\vec{x}-\vec{y}\in V_0$，即可以被 $\{f^{d_1-1}(\vec{\alpha}_1),\cdots,f^{d_r-1}(\vec{\alpha}_r),\vec{\alpha}_{r+1},\cdots,\vec{\alpha}_t\}$ 线性表达。因此

$$\vec{x}=\vec{y}+(\vec{x}-\vec{y})\in C_{\vec{\alpha}_1}+\cdots+C_{\vec{\alpha}_r}+C_{\vec{\alpha}_{r+1}}+\cdots+C_{\vec{\alpha}_s}$$

结合直和分解性质，我们得到

$$V=C_{\vec{\alpha}_1}\oplus\cdots\oplus C_{\vec{\alpha}_r}\oplus C_{\vec{\alpha}_{r+1}}\oplus\cdots\oplus C_{\vec{\alpha}_s}$$

由归纳知原命题成立。 □

命题 4.4.8 设 V 是 n 维线性空间，$f:V\to V$ 是一个 m 次幂零变换。设

$$V=C_{\vec{\alpha}_1}\oplus C_{\vec{\alpha}_2}\oplus\cdots\oplus C_{\vec{\alpha}_t}$$

是命题4.4.7给出的关于 f 的循环子空间的直和。则

$$\dim\ker f^m-\dim\ker f^{m-1}=\text{集合}\{i|\dim C_{\vec{\alpha}_i}\geq m\}\text{的元素个数}$$

这里 $\ker f^m=\{\vec{x}\in V|f^m(\vec{x})=0\}$。

证明：留作练习。 □

例 4.4.1. 设 A 是一个幂零方阵，对应一个幂零线性映射 f。假设如下的循环子空间分解

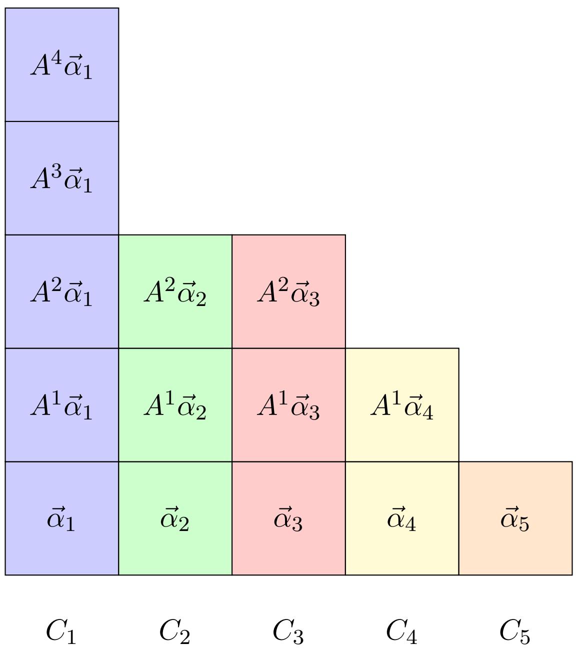


图 4.1: 循环子空间分解

则由上图容易看出

$$
\begin{aligned}
\dim\ker A &= \dim \mathrm{Span}\{A^4\vec{\alpha}_1, A^2\vec{\alpha}_2, A^2\vec{\alpha}_3, A\vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5\} = 5 \\
\dim\ker A^2 &= \dim \mathrm{Span}\{A^4\vec{\alpha}_1, A^3\vec{\alpha}_1, A^2\vec{\alpha}_2, A\vec{\alpha}_2, A^2\vec{\alpha}_3, A\vec{\alpha}_3, A\vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5\} = 5+4 \\
\dim\ker A^3 &= \dim \mathrm{Span}\{A^4\vec{\alpha}_1, A^3\vec{\alpha}_1, A^2\vec{\alpha}_1, A^2\vec{\alpha}_2, A\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2, A^2\vec{\alpha}_3, A\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_3, A\vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5\} = 5+4+3 \\
\dim\ker A^4 &= \dim \mathrm{Span}\{A^4\vec{\alpha}_1, A^3\vec{\alpha}_1, A^2\vec{\alpha}_1, A\vec{\alpha}_1, A^2\vec{\alpha}_2, A\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2, A^2\vec{\alpha}_3, A\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_3, A\vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5\} \\
&= 5+4+3+1 \\
\dim\ker A^5 &= \dim \mathrm{Span}\{A^4\vec{\alpha}_1, A^3\vec{\alpha}_1, A^2\vec{\alpha}_1, A\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1, A^2\vec{\alpha}_2, A\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2, A^2\vec{\alpha}_3, A\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_3, A\vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5\} \\
&= 5+4+3+1+1 \\
\dim\ker A^6 &= \dim\ker A^5
\end{aligned}
$$

由这些维数信息不难反解出来有 1 个维数 5 的循环子空间，2 个维数 3 的循环子空间，1 个维数 2 的循环子空间，1 个维数 1 的循环子空间。

给定 n 阶幂零方阵 A，由命题4.4.7我们知道 n 维空间可以分解为 A 的一些循环子空间的直和。由命题4.4.8，虽然这些循环子空间的选法并不唯一，但是循环子空间的个数以及每个循环子空间的维数是由 A 决定的。具体而言，可以通过解线性方程组依次计算维数

$$
\begin{cases}
\dim\ker A = \dim\{\vec{x}|A\vec{x}=0\} \\
\dim\ker A^2 = \dim\{\vec{x}|A^2\vec{x}=0\} \\
\vdots \\
\dim\ker A^m = \dim\{\vec{x}|A^m\vec{x}=0\} \\
\vdots
\end{cases}
$$

得到。这里 $\dim\ker A$ 即特征子空间的维数表示有多少个循环子空间 C_i。然后依次有

$$\dim\ker A^m - \dim\ker A^{m-1} = \sharp\{\text{维数至少是 } m \text{ 的 } C_i \text{ 的个数}\}$$

如果发现当到达某个 N 使得

$$\dim\ker A^{N+1} = \dim\ker A^N$$

时就可以停止计算。由所有这些信息 $\{\dim\ker A^m\}_{1\le m\le N}$ 可以推出每个循环子空间的维数。

4.4.2 Jordan 块

定义 4.4.9 如下 m 阶方阵称为一个 m 阶 Jordan 块，记为

$$
J_m(\lambda) := \begin{bmatrix}
\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda
\end{bmatrix}
$$

命题 4.4.10 设 A 是一个 n 阶幂零方阵。则存在正整数 $m_1, \cdots, m_k$，使得 A 相似于由 Jordan 块构成的如下方阵

$$\begin{bmatrix} J_{m_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(0) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_k}(0) \end{bmatrix}$$

这里 $m_1 + \cdots + m_k = n$，且 A 的幂零指数是 $\max\{m_1, \cdots, m_k\}$。

证明: 由命题4.4.7，存在向量 $\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_k$ 使得

$$k^n = C_{\vec{\alpha}_1} \oplus \cdots \oplus C_{\vec{\alpha}_k}$$

把这个直和分解中的基作为列向量排起来，构成 n 阶可逆方阵 P

$$P = \begin{bmatrix} A^{m_1-1}\vec{\alpha}_1 & \cdots & A\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_1 & \cdots\cdots & A^{m_i-1}\vec{\alpha}_i & \cdots & A\vec{\alpha}_i & \vec{\alpha}_i & \cdots\cdots & A^{m_k-1}\vec{\alpha}_k & \cdots & A\vec{\alpha}_k & \vec{\alpha}_k \end{bmatrix}$$

这里 $m_i = d_{\vec{\alpha}_i}$。则易知

$$A = P \begin{bmatrix} J_{m_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(0) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_k}(0) \end{bmatrix} P^{-1}$$

□

命题 4.4.11 设 A 是一个 n 阶方阵，且只有一个特征值 λ_0。则存在正整数 $m_1, \cdots, m_k$，使得 A 相似于由 Jordan 块构成的如下方阵

$$\begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_0) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_k}(\lambda_0) \end{bmatrix}$$

这里 $m_1 + \cdots + m_k = n$。

证明: $A - \lambda_0 I_n$ 只有 0 特征值，因此是幂零矩阵。将命题4.4.10用于 $A - \lambda_0 I_n$，即得结论。 □

4.4.3 Jordan 标准型

复方阵的相似标准型

我们首先考虑复数域上的方阵。

定理 4.4.12 设 A 是 n 阶复方阵，$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 A 的所有互不相同的特征值。则 A 相似于

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_s \end{bmatrix}$$

这里 J_i 是形如由 Jordan 块构成的方阵，$m_i^{(1)} + \cdots + m_i^{(t_i)} = \ \lambda_i$ 的代数重数

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{m_i^{(1)}}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_i^{(2)}}(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_i^{(t_i)}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

如上形式称为复方阵 A 在相似变换下的 Jordan 标准型。

证明: 由命题4.3.17，我们有根子空间的直和分解

$$\mathbb{C}^n = R_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus R_{\lambda_s}$$

设 $\{\vec{\beta}_1^{(i)}, \cdots, \vec{\beta}_{m_i}^{(i)}\}$ 为 R_{λ_i} 的一组基。由命题4.3.14，R_{λ_i} 是 A 的不变子空间，我们有

$$\begin{bmatrix} A\vec{\beta}_1^{(i)} & \cdots & A\vec{\beta}_{m_i}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1^{(i)} & \cdots & \vec{\beta}_{m_i}^{(i)} \end{bmatrix} B_i$$

这里 B_i 是 m_i 阶方阵，是线性映射 $A: R_{\lambda_i} \to R_{\lambda_i}$ 在 R_{λ_i} 的这组基下的表示矩阵。记 P 为 n 阶可逆方阵

$$P = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1^{(1)} & \cdots & \vec{\beta}_{m_1}^{(1)} & \cdots\cdots & \vec{\beta}_1^{(s)} & \cdots & \vec{\beta}_{m_s}^{(s)} \end{bmatrix}$$

则我们得到相似变换

$$A = P \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_s \end{bmatrix} P^{-1}$$

由命题4.3.15，方阵 B_i 只有一个特征值 λ_i，其特征多项式为 $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$。由命题4.4.11，存在 m_i 阶可逆方阵 Q_i 使得

$$B_i = Q_i J_i Q_i^{-1} \quad \text{其中} \quad J_i = \begin{bmatrix} J_{m_i^{(1)}}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_i^{(2)}}(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_i^{(t_i)}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

因此我们得到相似变换

$$A = P\begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & Q_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & Q_s^{-1} \end{bmatrix}P^{-1}$$

□

定义 4.4.13 设 A 是 n 阶复方阵，其 Jordan 标准型如定理4.4.12所示。单项式 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i^{(j)}}$ 称为属于特征值 λ_i 的一个初等因子。初等因子的全体

$$\{(\lambda-\lambda_1)^{m_1^{(1)}}, \cdots, (\lambda-\lambda_1)^{m_1^{(t_1)}}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{m_s^{(1)}}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{m_s^{(t_s)}}\}$$

称为 A 的初等因子组。

命题 4.4.14 初等因子组由方阵完全决定。两个方阵相似当且仅当它们具有相同的初等因子组。

证明：略。 □

例 4.4.2. 考虑方阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A 和 B 具有相同的特征多项式 $(\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$。上述矩阵已经是 Jordan 标准型的样子，我们可以读出对应的初等因子组

$$A \text{ 的初等因子组} = \{(\lambda-2)^3, (\lambda-2), (\lambda-3)^2\}$$
$$B \text{ 的初等因子组} = \{(\lambda-2)^2, (\lambda-2)^2, (\lambda-3)^2\}$$

A 和 B 的初等因子组不同，因此 A 与 B 不相似。

实方阵的相似标准型

我们简要说明一下实数域上的 Jordan 标准型。

一个 n 阶实方阵 A 总是可以通过一个实可逆矩阵 P 相似变换为如下标准形

$$A = P\begin{bmatrix} \boxed{} & & & \\ & \boxed{} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{} \end{bmatrix}P^{-1}$$

这里 $\boxed{}$ 是如下形式的 Jordan 块

- 对于 A 的实特征值 λ_i，其 Jordan 块的形式为

$$\boxed{} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

- 对于 A 的复特征值，其一定是成对出现 $\lambda_j = \alpha \pm i\beta$。这对复特征值对应的实 Jordan 块为

$$\boxed{} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & & 0 \\ & \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \\ 0 & & & \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

特别地，如果实方阵 A 作为复方阵可以对角化的话，那么存在一个可逆的实矩阵 P 使得

$$A = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_k & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} & \\ 0 & & & & & & \ddots \end{bmatrix}P^{-1}$$

4.4.4 Jordan 标准型的计算

给定 n 阶复方阵 A，通过它的特征多项式可以得到所有不同的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$。我们可以对特征值 λ_i 依次解线性方程组

$$\begin{cases} \ker(A-\lambda_i) = \{\vec{x} | (A-\lambda_i)\vec{x} = 0\} \\ \ker(A-\lambda_i)^2 = \{\vec{x} | (A-\lambda_i)^2\vec{x} = 0\} \\ \qquad \vdots \\ \ker(A-\lambda_i)^m = \{\vec{x} | (A-\lambda_i)^m\vec{x} = 0\} \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

直到 $\ker(A-\lambda_i)^N = \ker(A-\lambda_i)^{N+1}$ 为止。由命题4.4.8，通过上述空间的维数可以解出 λ_i 的根子空间对应的 Jordan 块的大小，即 λ_i 的初等因子组。由此可以得到 A 的 Jordan 标准型。进一步通过上述方程组可以得到对应的可逆相似变换。我们通过例子来具体说明。

例 4.4.3. *计算* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *的 Jordan 标准型。A 的特征多项式为*

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)^3$$

因此 A 有两个不同的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$。

λ_1 的代数重数是 1，因此 λ_1 的根子空间是 1 维的，由特征向量张成。由

$$(A-\lambda_1)\vec{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{\beta}_1 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{且是 } A \text{ 的特征向量，}$$

所以 λ_1 有一个1 阶 Jordan 块，贡献一个A 的特征向量；相应的，λ_1 的几何重数是 1。

λ_2 的代数重数是 3，因此 λ_2 的根子空间是 3 维的。解方程

$$(A-\lambda_2)\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 - c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

解方程

$$(A-\lambda_2)^2\vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}' = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}' = \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ 0 \\ c_3' \end{bmatrix}$$

$\ker(A-\lambda_2)^2$ 的维数是 3，已经得到 $\lambda_2=4$ 的根子空间。由

$$\dim\ker(A-\lambda_2)=2 \qquad \dim\ker(A-\lambda_2)^2=3$$

所以 λ_2 有一个2 阶 *Jordan* 块，一个1 阶 *Jordan* 块，贡献两个A 的特征向量；相应的，λ_2 的几何重数是 2。

因此 A 的 *Jordan* 标准型可以写为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

通过上述方程组的解，可以把 λ_2 的根子空间的循环子空间分解找出来。

取向量 $\vec{\alpha}_1$ 使得 $\begin{cases} \vec{\alpha}_1 \in \ker(A-\lambda_2)^2, \ \vec{\alpha}_1 \notin \ker(A-\lambda_2) \\ \ker(A-\lambda_2)^2 = Span\{\vec{\alpha}_1\} \oplus \ker(A-\lambda_2) \end{cases}$ 例如取 $\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

然后取向量 $\vec{\alpha}_2$ 使得 $\begin{cases} \vec{\alpha}_2 \in \ker(A-\lambda_2) \\ \ker(A-\lambda_2) = Span\{(A-\lambda_2)\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2\} \end{cases}$ 例如取 $\vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

则 $\left\{(A-\lambda_2)\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2\right\}$ 构成 λ_2 的根子空间的一组基，其循环子空间分解为

$$\begin{aligned} R_{\lambda_2} &= C_{\vec{\alpha}_1} \ \oplus \ C_{\vec{\alpha}_2} \\ &= Span\{(A-\lambda_2)\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1\} \ \oplus \ Span\{\vec{\alpha}_2\} \end{aligned}$$

且 $(A-\lambda_2)\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$ 是 λ_2 的两个特征向量。

由构造，按照对应顺序，则有

$$A\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & (A-\lambda_2)\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & (A-\lambda_2)\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

记可逆矩阵 P 为

$$P = \begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & (A-\lambda_2)\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

得到 A 与 A 的 *Jordan* 标准型之间的相似变换

$$A = P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}P^{-1}$$

例 4.4.4. 计算 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的 *Jordan* 标准型。A 为上三角方阵，只有一个特征值 $\lambda_1 = 2$，代数重数是 *5*。

解方程

$$(A-\lambda_1)\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 + 61c_3 \\ 5c_3 \\ -7c_3 \end{bmatrix}$$

计算得 $(A-\lambda_1)^2 = \mathbf{0}$，解方程 $(A-\lambda_1)^2\vec{x} = \vec{0}$，其解为整个空间，即 $\ker(A-\lambda_1)^2 =$ 整个空间。因此

$$\dim\ker(A-\lambda_1) = 3 \qquad \dim\ker(A-\lambda_1)^2 = 5$$

由此知 λ_1 有两个2 阶 *Jordan* 块，一个1 阶 *Jordan* 块，贡献三个A 的特征向量；相应的，λ_1 的几何重数是 *3*。

取两个向量使得

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in \ker(A-\lambda_1)^2, \quad \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \notin \ker(A-\lambda_1) \\ \ker(A-\lambda_1)^2 = Span\{\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}\} \oplus \ker(A-\lambda_1) \end{cases} \qquad \text{例如取} \quad \vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

然后取一个向量 $\vec{\alpha}_3$ 使得

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_3 \in \ker(A-\lambda_1) \\ \ker(A-\lambda_1) = \mathrm{Span}\{(A-\lambda_1)\vec{\alpha}_1, (A-\lambda_1)\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3\} \end{cases} \qquad \text{例如取} \qquad \vec{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 61 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

则 $\{(A-\lambda_1)\vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_1, (A-\lambda_1)\vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_3\}$ 构成 λ_1 的根子空间 *(*即整个空间*)* 的一组基，其循环子空间分解为

$$\begin{aligned} R_{\lambda_1} &= C_{\vec{\alpha_1}} \oplus C_{\vec{\alpha_2}} \oplus C_{\vec{\alpha_3}} \\ &= Span\{(A-\lambda_1)\vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_1\} \oplus Span\{(A-\lambda_1)\vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_2\} \oplus Span\{\vec{\alpha}_3\} \end{aligned}$$

且 $(A-\lambda_1)\vec{\alpha}_1$，$(A-\lambda_1)\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$ 是 λ_1 的三个特征向量。

由构造，按照对应顺序，则有

$$A\begin{bmatrix}(A-\lambda_1)\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_1 & (A-\lambda_1)\vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(A-\lambda_1)\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_1 & (A-\lambda_1)\vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}$$

记可逆矩阵 P 为

$$P = \begin{bmatrix}(A-\lambda_1)\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_1 & (A-\lambda_1)\vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_2 & \vec{\alpha}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&-3&0&0\\0&1&5&0&0\\0&0&5&0&61\\0&0&0&0&5\\0&0&0&1&-7\end{bmatrix}$$

得到 A 与 A 的 *Jordan* 标准型之间的相似变换

$$A = P\begin{bmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}P^{-1}$$

4.5 一些例子

4.5.1 可逆矩阵开根

命题 4.5.1 设 A 是 n 阶可逆复方阵。则存在可逆方阵 B 使得 $A = B^2$。

我们首先考虑 $A = J_n(\lambda)$ 是一个 Jordan 块的情况，即

$$A = \lambda I_n + N \qquad N = J_n(0) = \begin{bmatrix}0&1&&0\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{bmatrix}$$

我们把 A 写成 $A = \lambda(I_n + \lambda^{-1}N)$。利用函数 $(1+x)^{1/2}$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k$$

我们得到级数恒等式

$$1+x = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k\right)^2$$

代入矩阵 $x=\lambda^{-1}N$ 并利用 $N^n=0$，我们得到

$$I_n+\lambda^{-1}N=\left(I_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}\lambda^{-k}N^k\right)^2$$

因此我们可以取

$$B=\sqrt{\lambda}\left(I_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}\lambda^{-k}N^k\right)$$

对于一般的情况，我们可以作相似变换

$$A=P\begin{bmatrix}J_{m_1}(\lambda_1) & & 0\\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & J_{m_k}(\lambda_k)\end{bmatrix}P^{-1}$$

这里每个 $J_{m_i}(\lambda_1)$ 都是 Jordan 块，因此可以如上构造 B_i 使得 $J_{m_i}(\lambda_1)=B_i^2$。取

$$B=P\begin{bmatrix}B_1 & & 0\\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & B_k\end{bmatrix}P^{-1}$$

则满足 $B^2=A$。

注 4.5.1. 类似的方法可以证明，对于 n 阶可逆复方阵和正整数 k，存在可逆方阵 B 使得 $A=B^k$。

4.5.2 指数矩阵-I

命题 4.5.2 设 A 是 n 阶复方阵。则如下矩阵级数

$$e^A:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=I_n+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^m}{m!}+\cdots$$

收敛到一个可逆矩阵，并且

$$\det(e^A)=e^{\operatorname{Tr}A}$$

我们同样也是先考虑 $A=J_n(\lambda)$ 是一个 Jordan 块的情况，即

$$A=\lambda I_n+N\qquad N=J_n(0)=\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{bmatrix}$$

利用 $N^n=0$ 易知 e^A 收敛到（计算留作练习）

$$\begin{aligned}e^A =&e^{\lambda I_n}e^N = e^{\lambda}\left(I_n+N+\frac{N^2}{2!}\cdots+\frac{N^{n-1}}{(n-1)!}\right)\\ =&\begin{bmatrix} e^{\lambda} & e^{\lambda} & \cdots & \cdots & \frac{e^{\lambda}}{(n-2)!} & \frac{e^{\lambda}}{(n-1)!}\\ & e^{\lambda} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{e^{\lambda}}{(n-2)!}\\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & e^{\lambda} & e^{\lambda}\\ 0 & & & & & e^{\lambda}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

此时有 $\det(e^A)=e^{n\lambda}=e^{\operatorname{Tr}A}$。

对于一般的情况，我们可以作相似变换

$$A=P\begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & 0\\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & J_{m_k}(\lambda_k)\end{bmatrix}P^{-1}$$

则

$$e^A=P\begin{bmatrix} e^{J_{m_1}(\lambda_1)} & & 0\\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & e^{J_{m_k}(\lambda_k)}\end{bmatrix}P^{-1}$$

并且

$$\det(e^A)=e^{m_1\lambda_1+\cdots+m_k\lambda_k}=e^{\operatorname{Tr}A}$$

成立。由于 $e^{\operatorname{Tr}A}\neq 0$，$e^A$ 是可逆矩阵。实际上，e^A 的逆易知是 e^{-A}。

例 4.5.1. *考虑方阵*

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -1/2 & 3\end{bmatrix}$$

可以验证它相似于如下 Jordan 标准型

$$A=P\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}P^{-1}\qquad \text{这里}\qquad P=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1/2&0\\0&-1/2&1\end{bmatrix}$$

A 有两个 Jordan 块。因此

$$e^A=P\begin{bmatrix}e^3&0&0\\0&e^2&e^2\\0&0&e^2\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^3&0&0\\0&e^2&e^2\\0&0&e^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1/2&0\\0&-1/2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^3&-e^3&2e^2\\0&0&2e^2\\0&-e^2/2&2e^2\end{bmatrix}$$

4.5.3 极小多项式

由 Cayley-Hamilton 定理，我们知道 n 阶方阵 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ 是 A 的一个化零多项式，即满足

$$\varphi(A) = 0$$

实际上满足 $f(A) = 0$ 的多项式，即 A 的化零多项式中，特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 并不一定是次数最低的。例如对于方阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^2$$

容易验证 A 满足一个 3 次代数方程

$$(A - 2I_4)^2(A - 3I_4) = 0$$

定义 4.5.3 方阵 A 的所有非平凡化零多项式中次数最小的首一多项式称为 A 的极小多项式,记为 $d_A(\lambda)$。这里首一多项式指的是多项式最高次项的系数是 1,即 $d_A(\lambda) = \lambda^d + \cdots$.

由 Cayley-Hamilton 定理知 A 有化零多项式，因此 A 的极小多项式是存在的且次数不超过 A 的阶数。另一方面，A 的极小多项式是唯一的。假设 $d_A(\lambda)$ 和 $d'_A(\lambda)$ 均为 A 的极小多项式。则 $d_A(\lambda)$ 和 $d'_A(\lambda)$ 的次数相同，并且 $d_A(\lambda) - d'_A(\lambda)$ 是次数更低的化零多项式。由极小多项式的次数最小性，说明 $d_A(\lambda) - d'_A(\lambda) = 0$ 是平凡的，即 $d_A(\lambda) = d'_A(\lambda)$。

首先我们注意到，如果 λ_0 不是 A 的特征值，则线性方程组

$$(A - \lambda_0 I_n)\vec{x} = 0$$

只有零解，即 $A - \lambda_0 I_n$ 是可逆矩阵。因此如果 $f(\lambda)$ 是 A 的化零多项式且 λ_0 是 f 的一个根，即有 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)g(\lambda)$，则

$$f(A) = (A - \lambda_0 I_n)g(A) = 0 \quad \xRightarrow{\text{左乘 } (A-\lambda_0 I_n)^{-1}} \quad g(A) = 0$$

故 $g(\lambda)$ 也是 A 的化零多项式且次数比 f 低。这说明 $d_A(\lambda)$ 的根只包含 A 的特征值。

例 4.5.2. *设 $A = J_n(\lambda_0)$ 是 n 阶 Jordan 块，则 A 的最小多项式为*

$$d_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n$$

实际上，A 只有一个特征值 λ_0，其最小多项式形如 $(\lambda - \lambda_0)^m$。由于

$$N = A - \lambda_0 I_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

满足 $N^{n-1} \neq 0, N^n = 0$，我们得到 $m = n$。此时 A 的极小多项式等于特征多项式。

命题 4.5.4 设 A 是 n 阶复方阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 A 的所有互不相同的特征值。则 A 的最小多项式为

$$d_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{d_s}$$

其中 d_i 是特征值 λ_i 的 Jordan 块的最大阶数，即 $(\lambda-\lambda_i)^{d_i}$ 是特征值 λ_i 最高次数的初等因子。

证明：A 相似于 Jordan 标准型

$$A=P\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & J_s \end{bmatrix}P^{-1}$$

对任何多项式 $f(\lambda)$，我们有

$$f(A)=P\begin{bmatrix} f(J_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & f(J_2) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & f(J_s) \end{bmatrix}P^{-1}$$

因此 $f(A)=0$ 当且仅当对每个 J_i 均有 $f(J_i)$=0。而每个 J_i 是形如由 Jordan 块构成的方阵

$$J_i=\begin{bmatrix} J_{m_i^{(1)}}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_{m_i^{(2)}}(\lambda_i) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_i^{(t_i)}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

因此 $f(J_i)=0$ 当且仅当对每个 $f(J_{m_i^{(k)}}(\lambda_i))=0$。由例4.5.2易知

$$d_i=\max\{m_i^{(1)},m_i^{(2)},\cdots,m_i^{(t_i)}\}$$

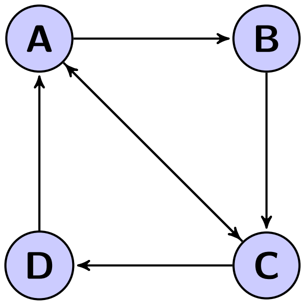
□

例 4.5.3. 方阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 的极小多项式为 $(\lambda-2)^2(\lambda-3)$。

4.5.4 Google PageRank

PageRank 是 Google 搜索引擎用来排名网页相关性和重要性的算法。其核心思想是一个网页的重要性与其链接到的网页的重要性的数量和质量有关。基本数学原理是通过网页数据得到一个大型的矩阵，然后通过求解最大特征值的特征向量得到排名数据。

我们将互联网看作一个巨大的有向图，每个节点代表一个网页，每条有向边代表一个链接，边的方向表示链接的方向。



上图表示有 4 个网页 A、B、C、D，链接关系如下：

- A 链接到 B 和 C
- B 链接到 C
- C 链接到 A 和 D
- D 链接到 A

PageRank 算法将给每个网页 i 匹配一个 PageRank 值 r_i，r_i 的值越大表示其越重要。其基本思想是这个 PageRank 值是通过网络关系来体现的：如果更多更重要的网页关联到某个网页，那么这个网页本身也更重要。具体而言，引入链接关系矩阵 $M = (m_{ij})$：

- 如果网页 j 链接到网页 i，则
$$m_{ij} = \frac{1}{L(j)}$$
其中 $L(j)$ 是所有从网页 j 链出的边数。
- 如果网页 j 没有链接到网页 i，则 $m_{ij} = 0$

m_{ij} 表现了从网页 j 链接到网页 i 的权重。例如对上图所示 4 个网络，其链接关系矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

这里我们用 $i = 1, 2, 3, 4$ 来分别表示网页 A,B,C,D。例如

- $m_{13} = 1/2$，因为网页 C 链接到网页 A，且网页 C 的出链数量为 2（链接到 A 和 D)。
- $m_{21} = 1/2$，因为网页 A 链接到网页 B，且网页 A 的出链数量为 2（链接到 B 和 C)。
- $m_{32} = 1$，因为网页 B 链接到网页 C，且网页 B 的出链数量为 1（链接到 C)。
- $m_{23} = 0$，因为没有链接从网页 C 链接到网页 B。

PageRank 算法用来计算每个网页 PageRank 权重 $r(i)$ 的方法为：一个网页的 PageRank 值等于所有链接到它的网页的 PageRank 值的加权平均，权重为链接概率。具体公式为：

$$r_i = \sum_j m_{ij} r_j$$

我们把所有网页的 PageRank 权重 $\{r_i\}$ 组合为列向量 $\vec{r}$，则上述方程可以写成矩阵形式

$$M\vec{r} = \vec{r}$$

因此寻找网页的 PageRank 值即为求解链接关系矩阵 M 属于特征值 1 的特征向量。

上述 4 个网页的例子中，求解 $M\vec{r} = \vec{r}$ 可以得到归一化的 PageRank 值

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

因此 A, C 重要性最高，B, D 次之。这个结果和图示是相符合的。

M 是否有特征值 1？

首先观察到每个网页链出的总权重是 1，即对每个 j 有

$$\sum_i m_{ij} = 1$$

写成矩阵的形式为

$$M^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

这表明 M 的转置 M^T 有一个属于特征值 1 的特征向量。由于 M^T 和 M 具有相同的特征多项式，这说明 M 一定有特征值 1，因此方程 $M\vec{r} = \vec{r}$ 是有解的。

M 的属于特征值 1 的特征子空间 V_1 是否是 1 维的？

如果特征子空间 V_1 是 1 维的话，那么得到唯一的一个 PageRank 向量 $\vec{r}$（不同特征向量差一个系数，可以通过设置归一化条件 $\sum_i r_i = 1$ 把这个系数固定）。然而实际上很容易找到 $\dim V_1 > 1$ 的例子，这给用 PageRank 算法来准确地衡量网页的重要性造成了困难。

为了解决这个困难，PageRank 算法引入了一个阻尼因子 d(通常设置为 0.85)。阻尼因子表示用户有 d 的概率点击链接，$1-d$ 的概率随机跳转到任意一个网页。改进后的链接关系矩阵为

$$\widehat{M} = dM + (1-d)S$$

这里 S 的每个矩阵元都是 $1/n$（n 是网页的总个数）

$$S = \begin{bmatrix} 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{bmatrix}$$

$\widehat{M}$ 的每一列加起来仍然是 1，因此仍然有特征值 1。改进的 PageRank 计算公式为

$$\widehat{M}\vec{r} = \vec{r}$$

命题 4.5.5 $\widehat{M}$ 的特征子空间 V_1 是 1 维的。

证明：首先观察到 $\widehat{M}$ 的每个矩阵元 $\hat{m}_{ij} > 0$。假设 $\vec{r} \in V_1$ 是任意一个特征向量，即满足

$$\widehat{M}\vec{r} = \vec{r}$$

我们说明 $\vec{r}$ 的每个分量不可能即有正数又有负数。实际上，假如 r_i 中即有正数也有负数。由于 $\hat{m}_{ij} > 0$，我们有

$$|\sum_j \hat{m}_{ij} r_j| < \sum_j \hat{m}_{ij} |r_j|$$

由特征向量方程 $r_i = \sum_j \hat{m}_{ij} r_j$，得到

$$|r_i| = |\sum_j \hat{m}_{ij} r_j| < \sum_j \hat{m}_{ij} |r_j|$$

两边对 i 求和，并利用 $\sum_i \hat{m}_{ij} = 1$，我们得到

$$\sum_i |r_i| < \sum_{i,j} \hat{m}_{ij} |r_j| = \sum_j |r_j|$$

矛盾。这说明 $\vec{r}$ 的每个分量不可能即有正数又有负数。

现在假设 $\dim V_1 > 1$。设 $\vec{r}$ 和 $\vec{s}$ 是 V_1 中两个线性无关的特征向量。不妨设 $\vec{r}, \vec{s}$ 的分量都是非负的，因此 $\sum_i r_i > 0, \sum_i s_i > 0$。取非零实数 a, b 使得

$$a(\sum_i r_i) + b(\sum_i s_i) = 0$$

考虑线性组合 $a\vec{r} + b\vec{s}$。由于 $a\vec{r} + b\vec{s} \in V_1$，上述讨论知它每个分量不可能即有正数又有负数。由 a, b 的取法，向量 $a\vec{r} + b\vec{s}$ 的所有分量求和是 0，因此必然有 $a\vec{r} + b\vec{s} = 0$。这与 $\vec{r}, \vec{s}$ 线性无关的假设矛盾。因此假设 $\dim V_1 > 1$ 不成立，故 $\dim V_1 = 1$。 □

这个命题说明，在考虑阻尼因子后，用改进的算法的确得到一个确定的 PageRank 向量。可以进一步证明（见习题），$\widehat{M}$ 的根子空间 R_1 也是 1 维的，即 $V_1 = R_1$。

如何计算 PageRank 向量？

实际应用中网页的数量是非常多的，改进的链接关系矩阵 $\widehat{M}$ 是一个巨大的矩阵。如何有效的计算 PageRank 向量 $\vec{r}$？这里关键的一个性质是如下命题。

命题 4.5.6 设 λ 是改进的链接关系矩阵 $\widehat{M}$ 的一个特征值，则 $|\lambda| \leq 1$。

证明：设复列向量 $\vec{\alpha} \in \mathbb{C}^n$ 是属于特征值 λ 的一个特征向量：$\widehat{M}\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$。考虑如下行向量

$$E_{\vec{\alpha}} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \quad \text{这里} \quad b_i = \begin{cases} \frac{\bar{\alpha}_i}{|\alpha_i|} & \alpha_i \neq 0 \\ 0 & \alpha_i = 0 \end{cases}$$

记

$$E_{\vec{\alpha}}\widehat{M} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

由于 $\sum_i \hat{m}_{ij} = 1$ 并且每个 $\hat{m}_{ij} > 0$ 知

$$|k_j| = |\sum_i b_i \hat{m}_{ij}| \leq \sum_i \hat{m}_{ij} = 1$$

由方程 $\widehat{M}\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$ 得到 $E_{\vec{\alpha}}\widehat{M}\vec{\alpha} = \lambda E_{\vec{\alpha}}\vec{\alpha}$，即

$$\sum_i k_i \alpha_i = \lambda \sum_i |\alpha_i|$$

因此

$$\lambda = \frac{\sum\limits_i k_i \alpha_i}{\sum\limits_i |\alpha_i|} \quad \Longrightarrow \quad |\lambda| \leq \frac{\sum\limits_i |k_i||\alpha_i|}{\sum\limits_i |\alpha_i|} \leq 1$$

□

可以进一步证明，满足 $|\lambda| = 1$ 的特征值只有 $\lambda = 1$（见习题）。由命题4.5.5和命题4.5.6以及 Jordan 标准型知，改进的链接关系矩阵 $\widehat{M}$ 相似于

$$\widehat{M} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_1}(\lambda_1) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & J_{m_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} P^{-1}$$

这里 Jordan 块 $J_{m_i}(\lambda_i)$ 对应的特征值 λ_i 均满足 $|\lambda_i| < 1$。对于这样的 Jordan 块，可以证明（见习题）

$$\lim_{N\to\infty} J_{m_i}(\lambda_i)^N = 0$$

因此

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{M}^N = \lim_{N\to\infty} P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_1}(\lambda_1)^N & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & J_{m_k}(\lambda_k)^N \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

设 P 的列向量为

$$P = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix}$$

由构造知 $\vec{\beta}_1$ 是特征值 1 的特征向量。我们得到

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{M}^N = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

现在取一个初始向量 $\vec{r}_0$，设

$$P^{-1}\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

并且 $a_1 \neq 0$。则

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{M}^N \vec{r}_0 = a_1\beta_1$$

收敛到特征值 1 的一个特征向量！

这给出了如下计算 PageRank 向量 $\vec{r}$ 的算法：取初始向量

$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix}$$

即初始时把所有网页的 PageRank 值都设置为 $1/n$。然后开始迭代计算

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \widehat{M}\vec{r}_0 \\ \vec{r}_2 &= \widehat{M}\vec{r}_1 = \widehat{M}^2\vec{r}_0 \\ &\vdots \\ \vec{r}_N &= \widehat{M}^N\vec{r}_0 \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \vec{r}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \widehat{M}\vec{r}_{k-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \vec{r}_{k-1} \\ &= \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \vec{r}_0 = 1 \end{aligned}$$

因此每个迭代的向量 $\vec{r}_k$ 的所有分量的和都是 1，即都是归一化的。当 N 充分大时，多次迭代得到的向量 $\vec{r}_N$ 即给出了 PageRank 向量 $\vec{r}$ 的近似值。

4.6 习题

1. 求下列方阵的特征多项式、特征值以及每个特征值的特征向量

$$a)\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\1&0&-2\end{bmatrix}\qquad b)\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\qquad c)\begin{bmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&a_1&\cdots&a_{n-2}\\a_{n-2}&a_{n-1}&a_0&\cdots&a_{n-3}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_0\end{bmatrix}$$

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&3&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$，求 A^{20}。

3. 设 n 阶可逆方阵 A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$。求 A^{-1} 的特征多项式，并说明 A^{-1} 的特征值与 A 的特征值的关系。

4. 设 A 是 $n\times m$ 矩阵, B 是 $m\times n$ 矩阵。证明 $\mathrm{Tr}\,AB=\mathrm{Tr}\ BA$。

5. 证明不存在 n 阶方阵 A,B 使得 $AB-BA=I_n$。注：这说明量子力学中的坐标和动量算子不可能通过有限维矩阵来实现。

6. 设 A,B 是 n 阶方阵。证明 AB 和 BA 的特征多项式相同。

7. 设 A,B 是两个 n 阶对角方阵。证明 A 和 B 相似当且仅当它们的特征多项式相同，即对角元素相同（排列顺序可能不同）。

8. 举例说明两个特征多项式相同的 n 阶方阵可能不相似。

9. 设 A,B 是两个 n 阶复方阵，A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)$。证明 n 阶复方阵 $\varphi(B)$ 可逆当且仅当 A 和 B 没有共同的特征值。

10. 设 A,B 是两个 n 阶复方阵，且没有共同的特征值。设 n 阶复方阵 X 满足 $AX=XB$。证明 $X=0$。

11. 求下列方阵所有的特征值、特征子空间和根子空间，并判断其是否可以对角化

$$a)\ \begin{bmatrix}2&0&1\\-1&3&2\\0&0&2\end{bmatrix}\qquad b)\ \begin{bmatrix}0&-2&3&2\\1&1&-1&-1\\0&0&2&0\\1&-1&0&1\end{bmatrix}$$

12. (a) 证明 V 的两个子空间 V_1,V_2 的和是直和当且仅当 $V_1\cap V_2=\{0\}$ 是零子空间。

    (b) 举例说明，三个线性子空间 V_1,V_2,V_3 满足 $V_1\cap V_2=V_1\cap V_3=V_2\cap V_3=\{0\}$，但 $V_1+V_2+V_3$ 不一定是直和。

(c) 证明如果三个线性子空间 V_1, V_2, V_3 满足 $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}, (V_1 + V_2) \cap V_3 = \{\vec{0}\}$，则 $V_1 + V_2 + V_3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ 是直和。

13. 设 $V_1, V_2 \subset k^n$ 是 n 阶方阵 A 的两个不变子空间，$\dim V_1 = r, \dim V_2 = n - r$，并且 $k^n = V_1 \oplus V_2$。证明 A 相似于如下形式的矩阵

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

这里 B 是 r 阶方阵，C 是 $n - r$ 阶方阵。

14. 证明任意 n 阶复方阵都可以相似于一个上三角方阵。

15. (a) 证明任意 n 阶复方阵 A 都可以分解为 $A = D + N$。这里 D 是 n 阶可对角化方阵，N 是 n 阶幂零方阵，并且 $DN = ND$。

(b) 对于矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，找出 (a) 中所述 D 和 N。

16. (a) 证明 Jordan 块 $J_n(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与它的转置 $J_n(0)^T$ 相似。

(b) 证明 n 阶复方阵 A 与它的转置 A^T 相似。

17. 设 A, B 是两个可对角化的 n 阶复方阵。证明如下两个性质等价：

(a) A, B 可以同时对角化，即存在可逆 P 使得 PAP^{-1}, PBP^{-1} 均为对角阵

(b) A 与 B 可交换，即 $AB = BA$

18. (a) 设 $J_m(\lambda)$ 是一个 Jordan 块，$|\lambda| < 1$。证明 $\lim\limits_{N\to\infty} J_m(\lambda)^N = 0$。

(b) 设方阵 A 的所有特征值的绝对值均小于 1，证明 $\lim\limits_{N\to\infty} A^N = 0$。

19. 设 $\widehat{M}$ 是 Google PageRank 算法中改进的链接关系矩阵。

(a) 证明 -1 不是 $\widehat{M}$ 的特征值。

(b) 讲义中我们证明了 $\widehat{M}$ 关于特征值 $\lambda = 1$ 的几何重数是 1。证明 $\widehat{M}$ 关于特征值 $\lambda = 1$ 的代数重数也是 1，即特征值 1 的根子空间和特征子空间一致。

第五章　内积空间

在线性空间的代数结构基础上，可以进一步引入几何结构。基本的几何概念是“距离”，线性空间上与距离相关的数学结构称为“内积”。根据数域 k 是实数 $\mathbb{R}$ 还是复数 $\mathbb{C}$，主要有两类内积空间

- 带内积的实线性空间称为欧几里得空间
- 带内积的复线性空间称为酉空间

这一章我们将首先讨论欧几里得空间，然后在简述酉空间时相关概念与性质的对应和推广。

5.1　欧几里得空间

5.1.1　实线性空间的内积

定义 5.1.1　设 V 是一个实线性空间。V 上的一个内积是一个映射

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$$

满足以下性质：

1. **正定性：** 对任意 $\vec{x}\in V$, $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle\geq 0$, 且 $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=0$ 当且仅当 $\vec{x}=0$
2. **对称性：** 对任意 $\vec{x},\vec{y}\in V$, $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\langle\vec{y},\vec{x}\rangle$
3. **线性性：** 对任意 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$ 和 $a,b\in\mathbb{R}$

$$\langle a\vec{x}+b\vec{y},\vec{z}\rangle=a\langle\vec{x},\vec{z}\rangle+b\langle\vec{y},\vec{z}\rangle$$

注意到线性性是对内积的第一个分量来陈述的。由对称性，内积对第二个分量也是线性的：

$$\langle\vec{z},a\vec{x}+b\vec{y}\rangle=a\langle\vec{z},\vec{x}\rangle+b\langle\vec{z},\vec{y}\rangle$$

因此我们称内积是双线性的。

定义 5.1.2　带内积的实线性空间称为实内积空间，或称为欧几里得空间。

n 维实内积空间通常也称为 n 维欧几里得空间。实内积空间也可能是无穷维，此时如果对应的范数具备完备性，则称为希尔伯特空间。

例 5.1.1. $V=\mathbb{R}^n$，我们定义两个向量的内积为

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{i=1}^n x_i y_i$$

这里 x_i, y_i 是向量 $\vec{x},\vec{y}$ 的分量。此时

$$\sqrt{\langle \vec{x},\vec{x}\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

表示向量 $\vec{x}$ 的欧氏长度。容易验证，$(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 构成一个实内积空间，称为 n 维标准欧几里得空间。如果我们把 $\mathbb{R}^n$ 中的向量写成列向量的样子，则这个内积可以用矩阵乘法表示为

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle=\vec{x}^T\cdot\vec{y}=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

这里 $\vec{x}^T$ 是 $\vec{x}$ 的转置。

例 5.1.2. $V=\mathbb{R}^n$，设 $a_i>0$ 是正实数。我们定义两个向量的内积为

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$$

对称性和线性性显然满足。由

$$\langle \vec{x},\vec{x}\rangle=\sum_{i=1}^n a_i x_i^2$$

可以很容易看出正定性。令 A 为对角方阵

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_n\end{bmatrix}$$

则这个内积也可以写成矩阵形式

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle=\vec{x}^T A\vec{y}=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

例 5.1.3. 设 V 是由有限闭区间 $[a,b]$ 上实连续函数构成的线性空间。对任意两个函数 $f(x),g(x)\in V$，我们定义它们的内积为

$$\langle f,g\rangle:=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

对称性和线性性显然满足。由

$$\langle f,f\rangle:=\int_a^b f(x)^2dx$$

知

$$\langle f,f\rangle\geq 0$$

且 $\langle f,f\rangle=0$ 当且仅当 $f(x)=0$ 是零函数，即 V 中的零向量。因此 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 定义了函数空间 V 上的一个内积。这个内积空间是无穷维的。

5.1.2 Gram 矩阵

设 V 是 n 维实线性空间，我们如何具体来刻画 V 上的一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$? 回顾对于一个线性映射 $f:V\to V$，我们具体描述 f 的方法是取 V 的一组基，根据 f 在基上的作用得到一个矩阵，则这个矩阵完全刻画了 f 本身。我们可以用类似的想法来刻画一个内积。设

$$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n\}$$

是 V 的一组基。考虑这些基向量之间的内积

$$\text{定义}\quad G_{ij}:=\langle\vec{\alpha}_i,\vec{\alpha}_j\rangle,\qquad i,j=1,\cdots,n$$

由此我们得到一个 n 阶方阵 $G=(G_{ij})$。

定义 5.1.3 设 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是 n 维欧几里得空间，$\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n\}$ 为 V 的一组基。我们称 n 阶方阵

$$G=\begin{bmatrix}\langle\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1\rangle & \langle\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_n\rangle\\ \langle\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1\rangle & \langle\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_n\rangle\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \langle\vec{\alpha}_n,\vec{\alpha}_1\rangle & \langle\vec{\alpha}_n,\vec{\alpha}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{\alpha}_n,\vec{\alpha}_n\rangle\end{bmatrix}$$

为内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在基 $\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n\}$ 下的 Gram 矩阵。

我们下面说明内积的 Gram 矩阵完全刻画了内积本身，因此给出了内积的矩阵表达方法。

设 $G=(G_{ij})$ 是内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 V 的一组基 $\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n\}$ 下的 Gram 矩阵。对 V 中任意两个向量 $\vec{x},\vec{y}$，它们通过这组基的线性组合记为

$$\vec{x}=x_1\vec{\alpha}_1+\cdots x_n\vec{\alpha}_n$$
$$\vec{y}=y_1\vec{\alpha}_1+\cdots y_n\vec{\alpha}_n$$

我们计算内积 $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$。利用内积的线性性

$$\begin{aligned}\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=&\langle\sum_i x_i\vec{\alpha}_i,\vec{y}\rangle=\sum_i x_i\langle\vec{\alpha}_i,\vec{y}\rangle\\ =&\sum_i x_i\langle\vec{\alpha}_i,\sum_j y_j\vec{\alpha}_j\rangle\\ =&\sum_{i,j}x_iy_j\langle\vec{\alpha}_i,\vec{\alpha}_j\rangle\\ =&\sum_{i,j}x_iy_jG_{ij}\end{aligned}$$

写成矩阵的形式，即为

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

这说明如果我们知道了基向量之间的内积（即 Gram 矩阵），则上述公式给出了任意两个向量之间的内积。因此内积完全由其 Gram 矩阵确定。

我们下面讨论 Gram 矩阵的性质。首先，由内积的对称性

$$G_{ij} = \langle\vec{\alpha}_i,\vec{\alpha}_j\rangle = \langle\vec{\alpha}_j,\vec{\alpha}_i\rangle = G_{ji}$$

写成矩阵的形式

$$G = G^T$$

即 G 是一个实对称矩阵。

其次，由内积的正定性，对任意向量 $\vec{x} = \sum\limits_i x_i\vec{\alpha}_i$

$$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = \sum_{i,j} G_{ij}x_ix_j \geq 0$$

且等号成立当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n = 0$。

定义 5.1.4 一个 n 阶实对称方阵 A 称为正定矩阵，如果对任意非零列向量 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$，都有

$$x^TAx > 0 \quad 即 \quad \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_ix_j > 0$$

因此 Gram 矩阵 G 是一个正定矩阵。反之，给定一个 n 阶正定矩阵 A，对 V 中任意两个向量 $\vec{x} = \sum\limits_i x_i\vec{\alpha}_i, \vec{y} = \sum\limits_i y_i\vec{\alpha}_i$，我们定义

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle_A := \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j$$

容易验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ 定义了 V 上的一个内积。因此在给定 V 的一组基的情况下，Gram 矩阵

$$\text{内积} \quad \xLeftrightarrow{\text{Gram}} \quad \text{正定矩阵}$$

给出了内积和正定矩阵之间的一一对应。

5.1.3 长度与夹角

定义 5.1.5 设 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个欧几里得空间。V 中向量 $\vec{x}$ 的长度 (或范数) 定义为

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

命题 5.1.6. [Cauchy-Schwarz 不等式] 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个欧几里得空间。则对任意 $\vec{x}, \vec{y} \in V$

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2 \le \langle\vec{x},\vec{x}\rangle\langle\vec{y},\vec{y}\rangle \qquad \text{即} \qquad |\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \le \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$$

等号成立当且仅当 $\vec{x}, \vec{y}$ 线性相关。

证明：不妨设 $\vec{x}, \vec{y}$ 均是非零向量。记

$$\begin{cases} a = \langle\vec{x},\vec{x}\rangle > 0 \\ b = \langle\vec{x},\vec{y}\rangle \\ c = \langle\vec{y},\vec{y}\rangle > 0 \end{cases}$$

需证明 $b^2 \le ac$。任取 $\lambda \in \mathbb{R}$，考虑向量 $\beta = \lambda\vec{x} + \vec{y}$ 与自己的内积

$$\begin{aligned} \langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle =& \langle\lambda\vec{x}+\vec{y}, \lambda\vec{x}+\vec{y}\rangle \\ =& \lambda^2\langle\vec{x},\vec{x}\rangle + \lambda\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \lambda\langle\vec{y},\vec{x}\rangle + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle \\ =& a\lambda^2 + 2b\lambda + c \\ =& a(\lambda + b/a)^2 + \frac{ac - b^2}{a} \end{aligned}$$

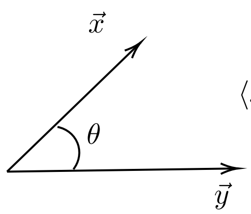
由内积正定性，$\langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle \ge 0$ 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立。因此 $b^2 \le ac$，即得命题不等式。等号成立当且仅当存在 λ 使得 $\vec{\beta} = 0$，即 $\vec{x}, \vec{y}$ 线性相关。 □

设 $\vec{x}, \vec{y}$ 是 V 中两个非零向量，由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$-1 \le \frac{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \le 1$$

我们定义 $\vec{x}, \vec{y}$ 之间的夹角 $\theta \in [0, \pi]$ 为

$$\cos\theta = \frac{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$$



$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\theta$$

定义 5.1.7 如果向量 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 的夹角是 $\theta = \pi/2$，即

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0$$

我们称 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 是正交的，记为 $\vec{x} \perp \vec{y}$。

命题 5.1.8. [三角不等式] 对内积空间中任意两个向量 $\vec{x}, \vec{y}$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

证明：

$$
\begin{aligned}
\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 =&\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle \\
=&\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle \\
\leq&\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\
=&(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2
\end{aligned}
$$

□

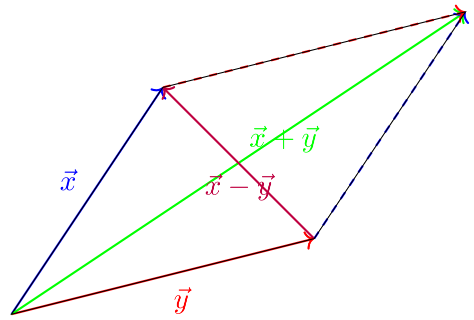
命题 5.1.9. [平行四边形法则] 对内积空间中任意两个向量 $\vec{x}, \vec{y}$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$

证明：

$$
\begin{aligned}
&\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \\
=&\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle + \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y}\rangle \\
=&\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle + \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle - 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle \\
=&2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2
\end{aligned}
$$

□



$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$

5.2 正交基与正交化

设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个 n 维欧几里得空间。这一节我们说明可以在 V 中找一组方便的基，使得在这组基下 V 上的几何结构与 n 维标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 一样。这样我们可以把对一般的 n 维欧几里得空间的讨论约化到标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$。

5.2.1 Gram–Schmidt 正交化

命题 5.2.1 设 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_m\}$ 是欧几里得空间 V 中 m 个两两正交的非零向量，即

$$\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle = 0 \qquad i \neq j, \quad i, j = 1, \cdots, m$$

则 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_m\}$ 线性无关。

证明：设 $\vec{\beta} = c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_m\vec{\alpha}_m = 0$，则对 $i = 1, \cdots, m$

$$0 = \langle \vec{\alpha}_i, \beta \rangle = c_i \langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_i \rangle \quad \Longrightarrow \quad c_i = 0$$

因此 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_m\}$ 线性无关。 □

这个命题说明，在 n 维欧几里得空间中两两正交的非零向量组最多包含 n 个向量。

定义 5.2.2 欧几里得空间 V 的一组基如果由两两正交的向量构成，则称这组基为正交基。

下面这个命题给出了具体构造正交基的方法。

命题 5.2.3. [Gram–Schmidt 正交化] 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是 n 维欧几里得空间，$\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组基。则存在一组正交基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$，使得从基 $\{\vec{\alpha}_i\}$ 到 $\{\vec{\beta}_i\}$ 的过渡矩阵 P 是上三角矩阵

$$\begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n \end{bmatrix} P$$

证明：我们依次构造 $\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n$ 使得对任意 k

$$\mathrm{Span}\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_k\} = \mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_k\}$$

首先对 $k = 1$，我们取 $\vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_1$，显然满足

$$\mathrm{Span}\{\vec{\alpha}_1\} = \mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1\}$$

假设我们已构造了两两正交的 $\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_{k-1}$ 使得

$$\mathrm{Span}\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_{k-1}\} = \mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_{k-1}\}$$

我们下面构造 $\vec{\beta}_k = \vec{\alpha}_k + c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_{k-1}\vec{\beta}_{k-1}$ 使得 $\vec{\beta}_k$ 与 $\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_{k-1}$ 正交，这里系数 c_i 待定。

由归纳假设，向量 $\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_{k-1}$ 两两正交。对 $i = 1, \cdots, k-1$，要求正交性

$$\begin{aligned} \langle \vec{\beta}_i, \vec{\beta}_k \rangle =& \langle \vec{\beta}_i, \vec{\alpha}_k + c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_{k-1}\vec{\beta}_{k-1} \rangle \\ =& \langle \vec{\beta}_i, \vec{\alpha}_k \rangle + c_i \langle \vec{\beta}_i, \vec{\beta}_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

可以解出系数

$$c_i = -\frac{\langle \vec{\beta}_i, \vec{\alpha}_k \rangle}{\langle \vec{\beta}_i, \vec{\beta}_i \rangle}$$

因此我们可以具体写下 $\vec{\beta}_k$ 为

$$\vec{\beta}_k = \vec{\alpha}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{\beta}_i, \vec{\alpha}_k \rangle}{\langle \vec{\beta}_i, \vec{\beta}_i \rangle} \vec{\beta}_i$$

由构造，$\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_k\}$ 是两两正交的向量，且

$$\mathrm{Span}\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_{k-1}, \vec{\alpha}_k\} = \mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_{k-1}, \vec{\alpha}_k\} = \mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_{k-1}, \vec{\beta}_k\}$$

由此我们依次构造了两两正交的向量 $\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n$ 使得对任意的 k，

$$\vec{\beta}_k \in \mathrm{Span}\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_k\}$$

写成矩阵的形式，

$$\begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}$$

即过渡矩阵是上三角矩阵。 □

命题证明中由欧几里得空间中的任一组基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 得到正交基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 的过程

$$\vec{\beta}_k = \vec{\alpha}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{\beta}_i, \vec{\alpha}_k \rangle}{\langle \vec{\beta}_i, \vec{\beta}_i \rangle} \vec{\beta}_i \qquad k = 1, \cdots, n$$

称为 Gram–Schmidt 正交化。

定义 5.2.4 n 维欧几里得空间 V 的一组基 $\{\vec{\gamma}_1, \cdots, \vec{\gamma}_n\}$ 称为是标准正交基，如果它们两两正交并且长度为 1

$$\|\vec{\gamma}_i\| = 1 \qquad i = 1, \cdots, n$$

命题 5.2.5 n 维欧几里得空间 V 存在标准正交基。

证明：设 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 是 V 的任一组基。由 Gram–Schmidt 正交化，我们得到一组正交基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$。通过归一化定义

$$\vec{\gamma}_i = \frac{\vec{\beta}_i}{\|\vec{\beta}_i\|} \qquad i = 1, \cdots, n$$

则 $\{\vec{\gamma}_1, \cdots, \vec{\gamma}_n\}$ 是一组标准正交基。 □

设 $\{\vec{\gamma}_1, \cdots, \vec{\gamma}_n\}$ 是 V 的标准正交基，则其对应的 Gram 矩阵为

$$G_{ij} = \langle \vec{\gamma}_i, \vec{\gamma}_j \rangle = \delta_{ij}$$

即 $G = I_n$ 是单位矩阵。对于任意两个向量 $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^n x_i \vec{\gamma}_i$ 和 $\vec{y} = \sum\limits_{i=1}^n y_i \vec{\gamma}_i$，我们有

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

因此在标准正交基展开的坐标下，向量的内积公式和标准欧几里得空间一样。

例 5.2.1. 考虑标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\quad \vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

这组基不是正交基。我们对这组基作 *Gram-Schmidt* 正交化。依次有

$$\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1$$

$$\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_2-\frac{\langle\vec{\beta}_1,\vec{\alpha}_2\rangle}{\langle\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1\rangle}\vec{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{\beta}_3=&\vec{\alpha}_3-\frac{\langle\vec{\beta}_1,\vec{\alpha}_3\rangle}{\langle\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1\rangle}\vec{\beta}_1-\frac{\langle\vec{\beta}_2,\vec{\alpha}_3\rangle}{\langle\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_2\rangle}\vec{\beta}_2\\=&\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{1/3}{2/3}\begin{bmatrix}-2/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

进一步作归一化，我们得到标准正交基

$$\vec{\gamma}_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\quad \vec{\gamma}_2=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{bmatrix}\quad \vec{\gamma}_3=\begin{bmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

这组标准正交基与 $\mathbb{R}^3$ 的标准基 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 是不一样的。这个例子也说明标准正交基并不唯一。

5.2.2 正交投影

定义 5.2.6 设 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个 n 维欧几里得空间，$U\subset V$ 是线性子空间。我们定义 U 在 V 中的正交补空间为

$$U^{\perp}:=\{\vec{\alpha}\in V|\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle=0\text{ 对 }U\text{ 中任意向量 }\vec{\beta}\text{ 成立}\}$$

即 $\vec{\alpha}\in U^{\perp}$ 如果 $\vec{\alpha}$ 与 U 中的任意向量都正交。

我们选 U 中的一组基 $\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_m$，则 $\vec{\alpha}\in U^{\perp}$ 当且仅当 $\vec{\alpha}$ 与这组基向量正交

$$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}_i\rangle=0\qquad i=1,\cdots,m$$

如果上式满足，则对于 U 中的任意向量 $\vec{\beta}$，把它按照基做线性展开：$\vec{\beta}=a_1\vec{\beta}_1+\cdots+a_m\vec{\beta}_m$。则

$$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle=a_1\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}_1\rangle+\cdots+a_m\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}_m\rangle=0$$

例 5.2.2. $\mathbb{R}^4$ 是 4 维标准欧几里得空间。考虑线性子空间

$$U_1 = \mathrm{Span}\{\vec{e}_1\} \qquad U_2 = \mathrm{Span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$$

则

$$U_1^\perp = \mathrm{Span}\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\} \qquad U_2^\perp = \mathrm{Span}\{\vec{e}_3, \vec{e}_4\}$$

命题 5.2.7 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个 n 维欧几里得空间，$U \subset V$ 是线性子空间。则我们有直和分解

$$V = U \oplus U^\perp$$

证明：将内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 限制在 U 上，易知 $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个欧几里得空间。由命题5.2.5，我们取 $\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_m$ 为 U 的一组标准正交基。对 V 中任意向量 $\vec{x}$，定义

$$\vec{x}^{\parallel} := \langle\vec{x}, \vec{\beta}_1\rangle\vec{\beta}_1 + \cdots + \langle\vec{x}, \vec{\beta}_m\rangle\vec{\beta}_m \qquad \vec{x}^\perp = \vec{x} - \vec{x}^{\parallel}$$

则 $\vec{x}^{\parallel} \in U$ 且

$$\langle\vec{x}^\perp, \vec{\beta}_i\rangle = \langle\vec{x}, \vec{\beta}_i\rangle - \langle\vec{x}^{\parallel}, \vec{\beta}_i\rangle = 0 \quad i = 1, \cdots, m$$

即 $\vec{x}^\perp \in U^\perp$。因此我们得到分解

$$\vec{x} = \vec{x}^{\parallel} + \vec{x}^\perp \qquad \vec{x}^{\parallel} \in U, \quad \vec{x}^\perp \in U^\perp$$

由 $\vec{x}$ 的任意性，说明 $V = U + U^\perp$。我们下面证明这个是直和。

假设有 $\beta \in U, \gamma \in U^\perp$ 使得 $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$。则

$$\langle\vec{\beta}, \vec{\beta}\rangle = -\langle\vec{\beta}, \vec{\gamma}\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\beta} = 0$$

因此 $\vec{\beta} = \vec{\gamma} = 0$。这说明 $V = U \oplus U^\perp$。 □

定义 5.2.8 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个 n 维欧几里得空间，$U \subset V$ 是线性子空间。任意向量 $\vec{x} \in V$ 可以唯一地分解为

$$\vec{x} = \vec{x}^{\parallel} + \vec{x}^\perp \quad \text{其中} \quad \vec{x}^{\parallel} \in U, \quad \vec{x}^\perp \in U^\perp$$

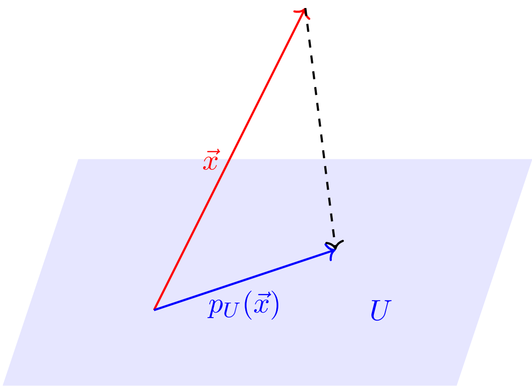
称为 $\vec{x}$ 关于 U 的正交分解。线性映射

$$p_U : V \to U, \qquad \vec{x} \to \vec{x}^{\parallel}$$

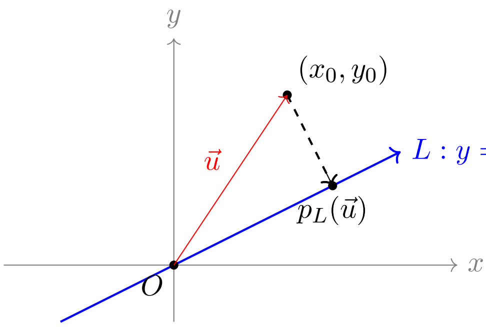
称为 V 向 U 的正交投影。

由上述命题的证明，如果取 $\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_m$ 为 U 的一组标准正交基，则正交投影 p_U 为

$$p_U(\vec{x}) = \langle\vec{x}, \vec{\beta}_1\rangle\vec{\beta}_1 + \cdots + \langle\vec{x}, \vec{\beta}_m\rangle\vec{\beta}_m$$



例 5.2.3. 考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 的由直线 $L:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y=ax\}$ 构成的一维子空间。考虑向量 $\vec{u}=(x_0,y_0)$ 向 L 的正交投影。



直线 $L:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y=ax\}$ 的标准正交基是一个 L 中的单位向量，可以选为

$$\vec{\beta}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

因此 $\vec{u}$ 向 L 的正交投影为

$$p_L(\vec{u})=\langle\vec{u},\vec{\beta}\rangle\vec{\beta}=\left(\frac{x_0+ay_0}{1+a^2},\frac{(x_0+ay_0)a}{1+a^2}\right)$$

命题 5.2.9 设 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是 n 维欧几里得空间，$U\subset V$ 是线性子空间，$\vec{x}$ 是 V 中向量。则

$$\|\vec{x}-p_U(\vec{x})\|=\min_{\vec{y}\in U}\|\vec{x}-\vec{y}\|$$

即 $p_U(\vec{x})$ 是 U 中与 $\vec{x}$ 的距离最短的向量。

证明：设 $\vec{x}=\vec{x}^{\|}+\vec{x}^{\perp}$ 是关于 U 的正交分解，即

$$p_U(\vec{x})=\vec{x}^{\|}\in U,\qquad \vec{x}^{\perp}\in U^{\perp}$$

对任意 $\vec{y}\in U$，$\vec{x}^{\|}-\vec{y}\in U$ 因此与 $\vec{x}^{\perp}$ 正交。故

$$\begin{aligned}\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=&\langle\vec{x}^{\|}+\vec{x}^{\perp}-\vec{y},\vec{x}^{\|}+\vec{x}^{\perp}-\vec{y}\rangle\\=&\langle\vec{x}^{\|}-\vec{y},\vec{x}^{\|}-\vec{y}\rangle+2\langle\vec{x}^{\|}-\vec{y},\vec{x}^{\perp}\rangle+\langle\vec{x}^{\perp},\vec{x}^{\perp}\rangle\\=&\|\vec{x}^{\|}-\vec{y}\|^2+\|\vec{x}^{\perp}\|^2\geq\|\vec{x}^{\perp}\|^2\end{aligned}$$

等号当且仅当 $\vec{y}=\vec{x}^{\parallel}=p_U(\vec{x})$ 成立。 □

等价而言，如果向量 $\vec{x}$ 关于 U 的正交分解为

$$\vec{x}=\vec{x}^{\parallel}+\vec{x}^{\perp}$$

则 $\vec{x}$ 与 U 中向量间的最短距离为分量 $\vec{x}^{\perp}$ 的长度

$$\min_{\vec{y}\in U}\|\vec{x}-\vec{y}\|=\|\vec{x}^{\perp}\|$$

这个值也称为向量 $\vec{x}$ 与子空间 U 的距离。

5.3 正交方阵

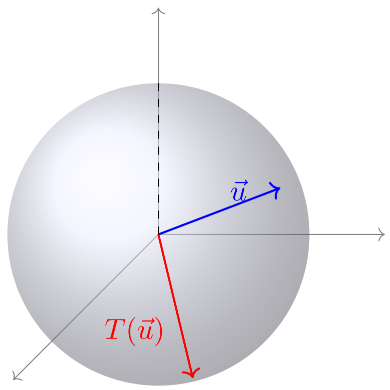
5.3.1 正交变换与正交方阵

定义 5.3.1 设 V 是一个欧几里得空间。线性变换 $T:V\to V$ 称为正交变换，如果对于任意向量 $\vec{x}\in V$，都有

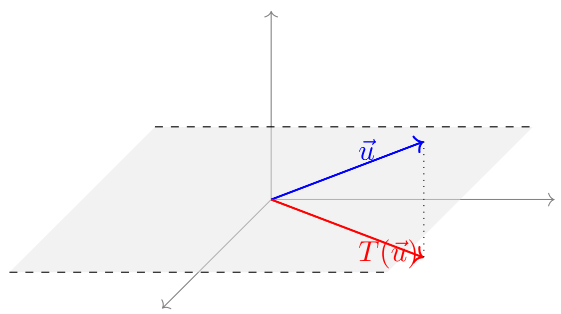
$$\|T(\vec{x})\|=\|\vec{x}\|$$

即正交变换保持向量的范数（长度）不变。

例 5.3.1. $\mathbb{R}^3$ 中的转动保持长度，是一个正交变换



例 5.3.2. $\mathbb{R}^3$ 中沿着过原点的平面作反射是一个正交变换



我们在5.3.2节中将更详细地讨论转动和反射的性质。

命题 5.3.2 欧几里得空间 V 上的线性变换 $T: V \to V$ 是一个正交变换当且仅当 T 保持内积不变，即对 V 中的任意向量 $\vec{x}, \vec{y}$

$$\langle T(\vec{x}), T(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

证明：若 T 保持内积，则由 $\langle T(\vec{x}), T(\vec{x})\rangle = \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle$ 知 T 保长度，即为正交变换。

反之，假设 T 是正交变换，即保长度。由

$$\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

知 $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \frac{1}{2}\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2 - \frac{1}{2}\|\vec{y}\|^2$。因此

$$\begin{aligned}\langle T(\vec{x}), T(\vec{y})\rangle =& \frac{1}{2}\|T(\vec{x})+T(\vec{y})\|^2 - \frac{1}{2}\|T(\vec{x})\|^2 - \frac{1}{2}\|T(\vec{y})\|^2\\ =& \frac{1}{2}\|T(\vec{x}+\vec{y})\|^2 - \frac{1}{2}\|T(\vec{x})\|^2 - \frac{1}{2}\|T(\vec{y})\|^2\\ =& \frac{1}{2}\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2 - \frac{1}{2}\|\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle\end{aligned}$$

即 T 保持内积。 □

特别地，两个向量 $\vec{x}, \vec{y}$ 之间的夹角 $\theta \in [0, \pi]$ 为

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$$

因此正交变换也保持向量间的夹角不变。

下面我们通过选一组基来刻画正交变换。欧几里得空间中比较好的一组基是标准正交基。

命题 5.3.3 设 $\{\vec{\gamma}_1, \cdots, \vec{\gamma}_n\}$ 是 n 维欧几里得空间 V 的一组标准正交基，$T: V \to V$ 是线性映射。则 T 是正交变换当且仅当

$$\{T(\vec{\gamma}_1), \cdots, T(\vec{\gamma}_n)\}$$

也是 V 的标准正交基。

证明：假设 $T: V \to V$ 是正交变换，则 T 保内积

$$\langle T(\vec{\gamma}_i), T(\vec{\gamma}_j)\rangle = \langle \vec{\gamma}_i, \vec{\gamma}_j\rangle = \delta_{ij}$$

因此 $\{T(\vec{\gamma}_1), \cdots, T(\vec{\gamma}_n)\}$ 是一组标准正交基。

反之，假设 $\{T(\vec{\gamma}_1), \cdots, T(\vec{\gamma}_n)\}$ 是一组标准正交基。对任意向量 $\vec{x} \in V$，按照基展开

$$\vec{x} = x_1\vec{\gamma}_1 + \cdots + x_n\vec{\gamma}_n$$

则

$$\begin{aligned}\langle T(\vec{x}), T(\vec{x})\rangle =&\langle T(\sum_i x_i\vec{\gamma}_i), T(\sum_j x_j\vec{\gamma}_j)\rangle \\ =&\sum_{i,j} x_i x_j \langle T(\vec{\gamma}_i), T(\vec{\gamma}_j)\rangle \\ =&\sum_i x_i^2 = \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle\end{aligned}$$

即 T 保长度，因此是正交变换。 □

这个命题说明正交变换给出了 V 中不同标准正交基之间的联系。设 $T: V \to V$ 是正交变换，$\{\vec{\gamma}_1, \cdots, \vec{\gamma}_n\}$ 是标准正交基。我们考虑基变换的过渡矩阵

$$\begin{bmatrix} T(\vec{\gamma}_1) & \cdots & T(\vec{\gamma}_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{\gamma}_1 & \cdots & \vec{\gamma}_n\end{bmatrix} A$$

或写成分量的形式 $T(\vec{\gamma}_j) = \sum_k a_{kj}\vec{\gamma}_k$。等价而言，$A$ 即为 T 在标准基 $\{\vec{\gamma}_1, \cdots, \vec{\gamma}_n\}$ 下的表示矩阵。代入计算内积

$$\begin{aligned}\langle T(\vec{\gamma}_i), T(\vec{\gamma}_j)\rangle =&\langle \sum_k a_{ki}\vec{\gamma}_k, \sum_l a_{lj}\vec{\gamma}_l\rangle \\ =&\sum_{k,l} a_{ki}a_{lj}\langle \vec{\gamma}_k, \vec{\gamma}_l\rangle \\ =&\sum_k a_{ki}a_{kj}\end{aligned}$$

T 是正交变换等价于

$$\langle T(\vec{\gamma}_i), T(\vec{\gamma}_j)\rangle = \delta_{ij}$$

即

$$\sum_k a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$$

写成矩阵的形式，上式等价于

$$A^T A = I_n$$

定义 5.3.4 一个 n 阶实矩阵 A 称为正交方阵，如果它满足

$$A^T A = A A^T = I_n$$

其中 A^T 表示 A 的转置矩阵，I_n 表示 n 阶单位矩阵。所有实正交矩阵组成的集合记为 $\mathrm{O}(n)$。

A 是正交方阵的一个等价写法是

$$A^T = A^{-1}$$

即 A 可逆且 A 的逆是它的转置。由上述讨论，我们证明了如下命题

命题 5.3.5 设 $T: V \to V$ 是 n 维欧几里得空间 V 的线性变换。则 T 是正交变换当且仅当 T 在 V 的一组标准正交基下的表示矩阵 A 是 n 阶正交方阵。

设 $A \in \mathrm{O}(n)$ 是 n 阶正交方阵。记 A 的列向量为 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$，即

$$A = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1^T \\ \vdots \\ \vec{\beta}_n^T \end{bmatrix}$$

则

$$A^T A = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1^T \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_1^T \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_1^T \vec{\beta}_n \\ \vec{\beta}_2^T \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2^T \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_2^T \vec{\beta}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vec{\beta}_n^T \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_n^T \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n^T \vec{\beta}_n \end{bmatrix}$$

因此 $A^T A = I_n$ 等价于

$$\vec{\beta}_i^T \vec{\beta}_j = \langle \vec{\beta}_i, \vec{\beta}_j \rangle = \delta_{ij}$$

即 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 是标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基。

类似的，我们把 A 的行向量记为 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$，即

$$A = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1^T & \cdots & \vec{\alpha}_n^T \end{bmatrix}$$

则 $AA^T = I_n$ 等价于行向量 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 是标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基。

由此我们证明了如下命题

命题 5.3.6 设 A 是 n 阶实方阵，则如下条件等价：

1. A 是正交方阵
2. A 的列向量构成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基
3. A 的行向量构成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基

例 5.3.3. 由 $\mathbb{R}^3$ 的一组基

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

做 *Gram-Schmidt* 正交化和归一化（见例*5.2.1*），得到标准正交基

$$\vec{\gamma}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \vec{\gamma}_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad \vec{\gamma}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

因此我们得到如下 3 阶正交方阵

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

命题 5.3.7 设 A, B 是 n 阶正交方阵，则 $A^{-1}(=A^T), AB$ 均为 n 阶正交方阵。我们说 $\mathrm{O}(n)$ 构成一个群，称为 n 阶正交群。

证明：$AA^T = A^TA = I_n$ 知 $A^T \in \mathrm{O}(n)$，即 $A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$。由

$$(AB)^T(AB) = B^TA^TAB = B^TB = I_n$$

知 $AB \in \mathrm{O}(n)$。 □

设 $A \in \mathrm{O}(n)$ 是 n 阶正交方阵。由

$$A^TA = I_n$$

两边取行列式得

$$\det(A^T)\det(A) = 1 \quad 即 \quad (\det A)^2 = 1$$

因此

$$\det A = \pm 1$$

定义 5.3.8 n 阶方阵 A 称为特殊正交方阵，如果 A 是正交方阵并且 $\det A = 1$。所有 n 阶特殊正交方阵构成的集合记为 $\mathrm{SO}(n)$，即

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) | \det A = 1\}$$

$\mathrm{SO}(n)$ 也构成一个群，称为 n 阶特殊正交群。

5.3.2 反射与旋转

例 5.3.4 (反射变换)**.** 设 $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ 是非零向量。考虑

$$H = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n | \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle = 0\}$$

为所有与 $\vec{u}$ 垂直的向量构成的集合。H 可以看作是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n-1$ 维超平面，$\vec{u}$ 是 H 的法向量。我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 中关于 H 的反射变换 $R_{\vec{u}}$。具体而言

$$R_{\vec{u}}(\vec{x}) = \vec{x} - 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}\vec{u}$$

可以验证，$R_{\vec{u}}$ 是一个线性变换，将 $\vec{u}$ 变为 $-\vec{u}$，并且保持超平面 H 不动。易知这是一个等距变换，对应于一个正交矩阵。

为简化讨论，不妨设 $\vec{u}$ 为单位向量，即 $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1$。容易验证，此时 $R_{\vec{u}}$ 对应的正交矩阵为

$$I_n - 2\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2u_1u_1 & -2u_1u_2 & \cdots & -2u_1u_n \\ -2u_2u_1 & 1-2u_2u_2 & \cdots & -2u_2u_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ -2u_nu_1 & -2u_nu_2 & \cdots & 1-2u_nu_n \end{bmatrix}$$

特别的，如果 $\vec{u} = \vec{e_i}$ 为第 i 个坐标方向的单位向量，则

$$R_{\vec{e_i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

其中第 i 行 i 列的元素为 -1，其它对角元为 1。

反射的行列式是 -1，即

$$\det R_{\vec{u}} = -1$$

例 5.3.5 (2 维正交变换). 考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 中的正交变换。设

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{O}(2)$$

由

$$A^T A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix}$$

我们得到方程组

$$a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1\,, \quad ab+cd = 0$$

第一组方程的解为

$$(a,c) = (\cos\theta, \sin\theta)\,, \quad (b,d) = (\sin\phi, \cos\phi)$$

代入第二组方程，我们得到 $\sin(\theta+\phi) = 0$，即 $\phi = -\theta$ 或 $-\theta+\pi$。所以我们得到解

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

或

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

容易看出，前者属于 $\mathrm{SO}(2)$，表示为逆时针转 θ 的旋转；后者 $\det A = -1$，表示为与 x 轴夹角为 $\theta/2$ 的直线的反射。由矩阵的行列式我们很容易知道两个平面反射的复合为一个旋转。

5.3.3 Cartan–Dieudonné 定理

我们首先考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的正交变换。O(3) 中的元素可以分类为如下三种

1. 绕某个轴的转动。如
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
为绕 z-轴逆时针旋转 θ。

2. 关于某个平面的反射。如
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
为关于 xy 平面的反射。

3. 一个绕轴的转动和一个与旋转轴垂直平面的反射的复合。如
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
为绕 z-轴转动和 xy-平面反射的复合。

这三种分类可以通过如下的几何结论得到。

命题 5.3.9 O(3) 中任一元素可以写成至多 3 个反射的乘积。

证明：设 $A \in \mathrm{O}(3)$。不妨设 $A \neq I_n$，于是存在非零向量 $\vec{x}$ 使得 $A(\vec{x}) \neq \vec{x}$。我们不妨设 $\vec{x} = \vec{e}_3$ 为第 3 个标准基向量。令 $\vec{u} = A\vec{e}_3 - \vec{e}_3$。考虑沿与 $\vec{u}$ 垂直平面的反射 $R_{\vec{u}}$，易知
$$R_{\vec{u}}(A\vec{e}_3) = \vec{e}_3$$

考虑乘积 $B = R_{\vec{u}}A$。由于 $B(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$，B 形如
$$B = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$$
由正交性 $B^TB = I_3$ 可以得到
$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathrm{O}(2)$$

由例5.3.5，我们已知 O(2) 中的元素可以写成不超过两个反射的乘积，于是 B 可以写成不超过两个反射的乘积。因此 $A = R_{\vec{u}}^{-1}B$ 可以写成不超过 3 个反射的乘积。 □

定理 5.3.10. [Cartan–Dieudonné 定理] $\mathbb{R}^n$ 上任意正交变换都可以写成至多 n 个反射的复合。

这个定理可以通过对 n 做归纳证明，证明方法和上述 $n = 3$ 的情况类似。

5.4 正交相似与奇异值分解

5.4.1 正交相似

定义 5.4.1 设 A 和 B 是两个 n 阶实方阵。如果存在一个 n 阶正交矩阵 Q，使得

$$B = QAQ^{-1}$$

则称矩阵 A 和 B 正交相似。由于 Q 是正交方阵，此时也可以写成 $B = QAQ^T$。

正交相似是比相似更强的关系。如果两个矩阵正交相似，则它们一定相似；但反之则不一定成立。

例 5.4.1. 考虑如下两个矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

由于 B 有两个不同的特征值 $1, 2$，B 可以对角化为 A，因此 A 与 B 相似。

然而 A 与 B 不是正交相似的。假如存在正交方阵 Q 使得 $B = QAQ^{-1}$。由 Q 是正交方阵，$Q^{-1} = Q^T$，我们也可以写成 $B = QAQ^T$。因此

$$B^T = (QAQ^T)^T = QA^TQ^T = QAQ^T = B$$

由此得出 B 是对称方阵，矛盾。

命题 5.4.2 设 A 是 n 阶实方阵，且所有特征值均为实数。则 A 正交相似于一个上三角方阵。

证明：我们对 n 作归纳。设 λ_1 是 A 的一个特征值。由假设 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$，设 $\vec{\beta}_1 \in \mathbb{R}^n$ 是属于 λ_1 的一个特征向量。不妨设 $\|\vec{\beta}_1\| = 1$。通过 Gram-Schmidts 正交化，我们可以把 $\vec{\beta}_1$ 延拓为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$。把这组列向量组成 n 阶方阵

$$P = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{bmatrix}$$

由于 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 是标准正交基，P 是正交方阵。由 $\vec{\beta}_1$ 是特征向量，有

$$AP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

这里 B 是 $n-1$ 阶方阵。由于 A 与 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & B\end{bmatrix}$ 相似，B 的特征值均为 A 的特征值故为实数。由归纳假设，存在 $n-1$ 阶正交方阵 Q 使得

$$B = Q\begin{bmatrix}\lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}Q^{-1}$$

因此

$$A = P\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q^{-1}\end{bmatrix}P^{-1}$$

$P\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{bmatrix}$ 是正交方阵，由归纳知命题成立。 □

5.4.2 实对称方阵

命题 5.4.3 设 A 是实对称方阵，即 $A = A^T$。则 A 的特征值都是实数。

证明：设 λ_0 是 A 的特征值。设复列向量 $\vec{\beta} \in \mathbb{C}^n$ 是属于 λ_0 的特征向量，即 $A\vec{\beta} = \lambda_0\vec{\beta}$。设

$$\vec{\beta} = \begin{bmatrix}z_1 \\ \cdots \\ z_n\end{bmatrix}$$

则特征向量说明

$$\sum_j A_{ij}z_j = \lambda_0 z_i$$

两边乘以 $\bar{z}_i$ 相加，得到

$$\sum_{ij} A_{ij}\bar{z}_i z_j = \lambda_0 \sum_i |z_i|^2$$

由于 A 是对称实方阵，$A_{ij} = A_{ji}$

$$\overline{\sum_{ij} A_{ij}\bar{z}_i z_j} = \sum_{ij} A_{ij} z_i \bar{z}_j = \sum_{ij} A_{ji}\bar{z}_j z_i$$

因此 $\sum\limits_{ij} A_{ij}\bar{z}_i z_j$ 是实数。故 $\lambda_0 = \dfrac{\sum_{ij} A_{ij}\bar{z}_i z_j}{\sum_i |z_i|^2}$ 是实数。 □

命题 5.4.4 设 A 是实对称方阵，则 A 正交相似于对角阵。

证明：由命题5.4.3知 A 的特征值均为实数。由命题5.4.2知存在正交方阵 P 使得 $B = PAP^{-1}$ 是上三角方阵。由

$$B^T = (PAP^{-1})^T = (PAP^T)^T = PA^TP^T = PAP^T = B$$

知 B 也是对称方阵，因此 B 是对角方阵。 □

命题 5.4.5 实对称方阵 A 是正定方阵当且仅当 A 的每个特征值均大于零。

证明：由 A 是实对称方阵，存在正交方阵 P 使得

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} P$$

这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的所有特征值。对任意向量 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$，令 $\vec{y} = P\vec{x}$。则

$$\vec{x}^TA\vec{x} = \vec{y}^TPAP^{-1}\vec{y} = \vec{y}^T\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}\vec{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

由此易知 $\vec{x}^TA\vec{x} > 0$ 对任意非零向量 $\vec{x}$ 成立当且仅当每个特征值 $\lambda_i > 0$。 □

定义 5.4.6 一个 n 阶实对称方阵 A 称为半正定矩阵, 如果对任意列向量 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, 都有

$$\vec{x}^TA\vec{x} \geq 0 \quad \text{即} \quad \sum_{i,j=1}^n A_{ij}x_ix_j \geq 0$$

类似的方法可以证明

命题 5.4.7 实对称方阵 A 是半正定方阵当且仅当 A 的每个特征值均非负。

命题 5.4.8 设 A 是 n 阶半正定对称方阵。则存在唯一的半正定对称方阵 B 使得 $A = B^2$。

证明：设 A 的特征值为 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$。存在正交方阵 P 使得

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} P$$

取

$$B = P^{-1}\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P$$

则 B 是半正定对称方阵且 $B^2 = A$ 成立。下证唯一性。

假设有两个半正定对称方阵 $B, \tilde{B}$ 使得

$$B^2 = \tilde{B}^2 = A$$

设 B 和 $\tilde{B}$ 的特征值分别为 $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n \geq 0$ 和 $\tilde{\mu}_1 \geq \cdots \geq \tilde{\mu}_n \geq 0$。存在正交方阵 $P, \tilde{P}$ 使得

$$B = P^{-1}\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{bmatrix} P \qquad \tilde{B} = \tilde{P}^{-1}\begin{bmatrix} \tilde{\mu}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{\mu}_n \end{bmatrix} \tilde{P}$$

因此 $B^2 = A$ 的特征值为 $\mu_1^2 \geq \cdots \geq \mu_n^2 \geq 0$，故 $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$。同理 $\tilde{\mu}_i = \sqrt{\lambda_i}$，即 B 与 $\tilde{B}$ 的特征值相同。由 $B^2 = \tilde{B}^2 = A$ 知

$$P^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} P = \tilde{P}^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tilde{P}$$

令 $Q = \tilde{P}P^{-1}$，其为正交方阵。则

$$Q\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} Q$$

这个等式写成矩阵元 $Q = (Q_{ij})$ 的形式为

$$Q_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = 0 \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

无论对 λ_i 是否等于 λ_j，我们均有

$$Q_{ij}(\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}) = 0 \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

转化为矩阵形式，我们得到

$$Q\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} Q$$

带回 $Q=\tilde{P}P^{-1}$，即得

$$B=P^{-1}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}P=\tilde{P}^{-1}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\tilde{P}=\tilde{B}$$

□

由命题5.4.8知对于半正定对称方阵 A，我们有唯一确定的半正定对称方阵 B 使得 $B^2=A$ 成立。我们把这个半正定对称方阵记作 $\sqrt{A}$，其满足

$$(\sqrt{A})^2=A$$

$\sqrt{A}$ 称为 A 的平方根。类似的方法可以证明，存在唯一的开 k 次方的半正定对称方阵 $\sqrt[k]{A}$。

5.4.3 奇异值分解

设 A 是 $m\times n$ 实矩阵。考虑 n 阶矩阵 A^TA。对于任意 $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$

$$\vec{x}^T(A^TA)\vec{x}=(A\vec{x})^T(A\vec{x})\geq 0$$

因此 A^TA 是 n 阶半正定对称方阵。同理，AA^T 是 m 阶半正定对称方阵。

由第三章习题 9 知

$$\lambda^m\det(\lambda I_n-A^TA)=\lambda^n\det(\lambda I_m-AA^T)$$

这说明 A^TA 和 AA^T 具有相同的非零特征值。

定义 5.4.9 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵。则 n 阶半正定对称方阵 A^TA（或 AA^T）的非零特征值的平方根称为 A 的奇异值。

设 A^TA 的所有非零特征值为 $\mu_1,\cdots,\mu_r$，则 A 的所有奇异值为 $\sqrt{\mu_1},\cdots,\sqrt{\mu_r}$。

命题 5.4.10 设 A 是 n 阶实对称方阵。则 A 的所有奇异值为所有非零特征值的绝对值。

证明：设 A 的所有特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$。由命题5.4.4知 A 可对角化。由此易知 $A^TA=A^2$ 的特征值为 $\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2$。由此即得命题。 □

例 5.4.2. 考虑方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

$$A^TA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

A^TA 的特征多项式为 $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2-3\lambda+1$，解得 A^TA 的两个特征值为 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$。故 A 有两个奇异值

$$\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$$

而 A 的两个特征值均为 1。因此当方阵 A 不对称时，奇异值和特征值的绝对值并不一样。

定理 5.4.11. [奇异值分解] 设 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 是 $m \times n$ 阶实矩阵 A 的所有奇异值。则存在 m 阶正交方阵 U 和 n 阶正交方阵 V 使得 $A = U\Sigma V^T$，其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r \end{bmatrix} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

这里 $0_{k\times l}$ 表示 $k \times l$ 的零矩阵。

证明：由奇异值的定义，存在 n 阶正交方阵 V 使得

$$V^TA^TAV = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \cdots, \sigma_r^2, 0, \cdots, 0)$$

把 $AV = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_n \end{bmatrix}$ 写成 $\mathbb{R}^m$ 中列向量，则

$$V^TA^TAV = (AV)^T(AV) = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1^T \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1^T\vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_1^T\vec{\alpha}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vec{\alpha}_n^T\vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_n^T\vec{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

对 $i > r$，我们有

$$\vec{\alpha}_i^T\vec{\alpha}_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\alpha}_i = 0$$

对 $1 \leq i, j \leq r$，

$$\vec{\alpha}_i^T\vec{\alpha}_j = \delta_{ij}\sigma_i^2$$

记 $\vec{\beta}_1 = \sigma_1^{-1}\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\beta}_r = \sigma_r^{-1}\vec{\alpha}_r$。则 $\{\vec{\beta}_i\}$ 两两正交且长度均为 1。我们把它们扩展为 $\mathbb{R}^m$ 中的一组标准正交基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_r, \vec{\beta}_{r+1}, \cdots, \vec{\beta}_m\}$。则

$$\begin{aligned} AV &= \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_r & 0\cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1\vec{\beta}_1 & \cdots & \sigma_r\vec{\beta}_r & 0\cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_r & \vec{\beta}_{r+1}\cdots & \vec{\beta}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r \end{bmatrix} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

令 $U=\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_r & \vec{\beta}_{r+1}\cdots & \vec{\beta}_m\end{bmatrix}$，则 U 是 m 阶正交方阵。上述等式即得奇异值分解。 □

5.5　一些例子

5.5.1　QR 分解

命题 5.5.1. [可逆方阵的 QR 分解]　设 A 是 n 阶可逆方阵，则存在唯一的分解

$$A=QR$$

其中 Q 是 n 阶正交方阵，R 是对角元都是正数的上三角矩阵。

证明：记 A 的列向量为 $A=\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix}$。由 Gram-Schmidt 正交化和归一化的过程，我们得到一个对角元都是正数的上三角矩阵 R 使得

$$\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_n\end{bmatrix}R$$

这里 $\{\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_n\}$ 是标准正交基。记 $Q=\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \cdots & \vec{\beta}_n\end{bmatrix}$，则 Q 是正交方阵且 $A=QR$。

下证唯一性。假设有 $Q_1R_1=Q_2R_2$，这里 Q_1,Q_2 是正交阵，R_1,R_2 是对角元都是正数的上三角矩阵。则 $R_1R_2^{-1}=Q_1^{-1}Q_2$ 是正交阵并且是对角元都是正数的上三角矩阵

$$R_1R_2^{-1}=\begin{bmatrix}a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{bmatrix}\qquad a_{ii}>0$$

由列向量的标准正交性易知 $R_1R_2^{-1}$ 只能是对角阵，且 $a_{ii}=1$。即 $R_1R_2^{-1}=I_n$。由此得 $R_1=R_2, Q_1=Q_2$。 □

QR 分解有很多应用。比如考虑线性方程组

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

这里 A 是可逆矩阵。我们知道它有唯一解 $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$。在实际应用中计算矩阵的逆 A^{-1} 通常很复杂。如果我们有矩阵的 QR 分解 $A=QR$，则上述方程等价于

$$R\vec{x}=Q^T\vec{b}$$

此时 R 是上三角方阵，方程很容易求解。

更一般的，QR 分解可以推广到任意长方形矩阵。

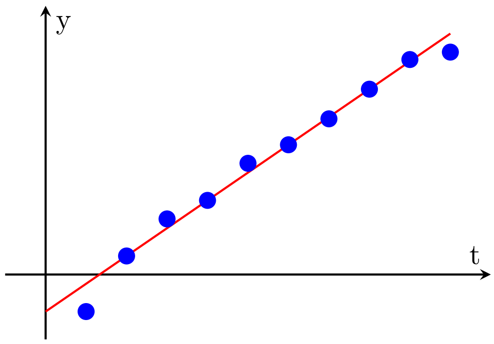
命题 5.5.2. [QR 分解]　设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，这里 $m\geq n$。则存在 m 阶正交阵 Q 和 $m\times n$ 矩阵 $R=\begin{bmatrix}R_1 \\ 0\end{bmatrix}$，其中 R_1 是对角元非负的 n 阶上三角矩阵，使得

$$A=QR$$

这也可以通过 Gram-Schmidt 正交化证明，具体细节留作练习。

5.5.2 最小二乘法

最小二乘法（Least Squares Method）是一种优化方法，用于拟合数据点并找到最佳的拟合曲线。其基本目标是通过最小化拟合曲线与数据点之间的误差平方和来找到最佳的参数。



例如我们有一组数据 (t_i, y_i) 如图，希望用一个线性函数 $y = at + b$ 来拟合这组数据。即目标是找到 a, b 使得

$$\begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

我们把待求的拟合参数记作未知变量 $\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，则上述关系变成求解线性方程组 $A\vec{x} = \vec{y}$。

然而实际上数据不可能严格落在一条直线上，因此这个线性方程组是没有解的。退而求其次，我们可以寻找 $\vec{x}$ 使得如下的平方误差最小

$$\min_{\vec{x}} \|A\vec{x} - \vec{y}\|^2 \qquad \text{或} \qquad \min_{\vec{x}} \|A\vec{x} - \vec{y}\|$$

从而拟合出一条相对比较符合原始数据的直线。

一般地，给定 $m \times n$ 实矩阵 A 和向量 $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$，求解

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\vec{x} - \vec{y}\|$$

这一问题称为最小二乘问题。这个问题的解 $\vec{x}$ 称为线性方程组 $A\vec{x} = \vec{y}$ 的最小二乘解。

当然如果线性方阵组 $A\vec{x} = \vec{y}$ 本身有解的话，那么它的解自然是最小二乘解。这个问题的核心是处理线性方阵组 $A\vec{x} = \vec{y}$ 没有解的情况。从几何上看，矩阵 A 定义了一个线性映射

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

令 $W \subset \mathbb{R}^m$ 是这个映射的象，即所有形如 $A\vec{x}$ 的向量构成的集合。W 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个线性子空间。由命题5.2.9我们知道

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - p_W(\vec{y})\|$$

这里 $p_W(\vec{y})$ 是 $\vec{y}$ 向 W 的正交投影。因此最小二乘问题的解即为线性方程组

$$A\vec{x} = p_W(\vec{y})$$

的解。由 $p_W(\vec{y}) \in W$，这个线性方程组的解存在，其通解的自由参数个数是 $n - \operatorname{rank} A$。

命题 5.5.3 $\vec{x}$ 是线性方程组 $A\vec{x} = \vec{y}$ 的最小二乘解当且仅当

$$A^T A\vec{x} = A^T \vec{y}$$

证明：对任意的向量 $\vec{z} \in \mathbb{R}^n, \vec{c} \in \mathbb{R}^m$，我们有

$$\langle A\vec{z}, \vec{c}\rangle = (A\vec{z})^T \vec{c} = \vec{z}^T A^T \vec{c}$$

故 $\vec{c} \in W^{\perp}$ 当且仅当 $\langle A\vec{z}, \vec{c}\rangle = \vec{z}^T A^T \vec{c} = 0$ 对所有 $\vec{z}$ 成立，即等价于 $A^T \vec{c} = 0$。

$\vec{x}$ 是最小二乘解当且仅当 $A\vec{x} = p_W(\vec{y})$，即

$$A\vec{x} - \vec{y} \in W^{\perp}$$

由上述讨论这等价于

$$A^T(A\vec{x} - \vec{y}) = 0 \quad 即 \quad A^T A\vec{x} = A^T \vec{y}$$

□

注 5.5.1. 我们也可以通过微积分的方法来证明这个结论。考虑 n 个变量的函数

$$f(\vec{x}) = \|A\vec{x} - \vec{y}\|^2$$

最小二乘解即为函数 f 的最小值。另一方面，

$$f(\vec{x}) = (A\vec{x} - \vec{y})^T(A\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x}^T A^T A\vec{x} - 2\vec{x}^T A^T \vec{y} + \vec{y}^T \vec{y}$$

由于 $A^T A$ 半正定，这是一个凸函数，最小值即为 f 的极值。求解极值方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad 即得 \quad A^T A\vec{x} = A^T \vec{y}$$

由上述命题，我们可以得到如下求解最小二乘问题的算法。不妨设 A 的列向量是线性无关的，此时最小二乘法的解是唯一的。设 A 的 QR 分解为

$$A = QR = Q\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由假设，R_1 是可逆 n 阶上三角矩阵。代入最小二乘解的方程 $A^T A\vec{x} = A^T \vec{y}$，我们得到

$$R_1^T R_1 \vec{x} = \begin{bmatrix} R_1^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix}\vec{y} = R_1^T Q_1^T \vec{y}$$

即

$$R_1 \vec{x} = Q_1^T \vec{y}$$

由于 R_1 是上三角方阵，这个方程组很容易求解。

5.5.3 广义逆

矩阵的广义逆是一种对矩阵的“逆”这个概念的推广。广义逆在矩阵不可逆或者矩阵不是方阵的情况下，提供了一种类似逆矩阵的替代方法，广泛应用于求解线性方程组。

定义 5.5.4 设 A 是 $m\times n$ 矩阵。如果 $n\times m$ 矩阵 X 满足

$$AXA=A$$

则称 X 为 A 的一个广义逆。

矩阵的广义逆总是存在的，而且并不唯一。我们用符号 A^- 来表示 A 的一个广义逆。我们考虑实矩阵的情况。对 A 作奇异值分解

$$A=U\Sigma V^T$$

这里 U 是 m 阶正交阵，V 是 n 阶正交阵。则

$$(U\Sigma V^T)X(U\Sigma V^T)=U\Sigma V^T \quad 即 \quad \Sigma V^TXU\Sigma=\Sigma$$

代入 $\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，这里 $\Sigma_r=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$

$$\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^TXU\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

得到 X 的通解为

$$V^TXU=\begin{bmatrix}\Sigma_r^{-1} & *\\ * & *\end{bmatrix} \quad 即 \quad X=V\begin{bmatrix}\Sigma_r^{-1} & *\\ * & *\end{bmatrix}U^T$$

因此对于 $m\times n$ 矩阵

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^T$$

它的广义逆的一般形式为 $m\times n$ 矩阵

$$A^-=V\begin{bmatrix}\Sigma_r^{-1} & *\\ * & *\end{bmatrix}U^T$$

这里 $*$ 是任意数。这里面有一个特别的广义逆

$$V\begin{bmatrix}\Sigma_r^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^T$$

称为 Moore–Penrose 逆。我们将在5.8.2详细讨论 Moore–Penrose 逆的刻画和性质。

命题 5.5.5 线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解的充分必要条件是

$$\vec{b}=AA^-\vec{b}$$

这里 A^- 是 A 的任意一个广义逆。此时 $A^-\vec{b}$ 是方程的一个特解。

证明：假设 $\vec{x}_0$ 是线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解，则

$$\vec{b}=A\vec{x}_0=AA^-A\vec{x}_0=AA^-\vec{b}$$

反之，假设 $\vec{b}=AA^-\vec{b}$ 成立。令 $\vec{x}_0=A^-\vec{b}$，则

$$A\vec{x}_0=AA^-\vec{b}=\vec{b}\quad \text{成立}$$

□

我们知道，对于 n 阶可逆方阵 A，线性方阵组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 具有唯一解

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$$

对于一般的 $m\times n$ 矩阵 A，广义逆给出了类似的公式：假设方阵组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解，则 $\vec{x}=A^-\vec{b}$ 给出了一个具体的解。

命题 5.5.6 A 是 $m\times n$ 矩阵，A^- 是 A 的某个取定的广义逆。则齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 的通解为

$$\vec{x}=(I_n-A^-A)\vec{z}$$

这里 $\vec{z}$ 是任意 n 维列向量。特别地，如果线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解，则它的通解为

$$\vec{x}=A^-\vec{b}+(I_n-A^-A)\vec{z}$$

证明：由

$$A(I_n-A^-A)\vec{z}=(A-AA^-A)\vec{z}=0$$

知对任意 $\vec{z}$，$(I_n-A^-A)\vec{z}$ 是齐次方程组的解。

设 $\vec{x}_0$ 是齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 的任意一个解，即 $A\vec{x}_0=0$。取 $\vec{z}=\vec{x}_0$，则

$$\vec{x}_0=(I_n-A^-A)\vec{x}_0=(I_n-A^-A)\vec{z}$$

即 $\vec{x}_0$ 可以表达为命题要求形式。 □

如果线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 无解，我们可以考虑它的最小二乘问题。设 A 的奇异值分解

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^T$$

我们考虑一个特殊的广义逆（即 Moore–Penrose 逆）

$$A^-=V\begin{bmatrix}\Sigma_r^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^T$$

这个广义逆满足

$$\begin{aligned}A^TAA^- =&V\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^TU\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^TV\begin{bmatrix}\Sigma_r^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^T\\ =&V\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^T=A^T\end{aligned}$$

即 $A^T(I_m - AA^-) = 0$。考虑 $\vec{x}_0 = A^-\vec{b}$。对任意向量 $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle A\vec{y}, \vec{b} - A\vec{x}_0 \rangle = \vec{y}^T A^T (I_m - AA^-)\vec{b} = 0$$

因此 $A\vec{x}_0$ 即为 $\vec{b}$ 向 A 的像的投影。故 $\vec{x}_0 = A^-\vec{b}$ 给出了一个最小二乘解。在5.8.2节中，我们将说明在复线性空间中也有类似的结论。

5.5.4 矩阵的谱范数

定义 5.5.7 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵，其谱范数 $\|A\|$ 定义为：

$$\|A\| = \max_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

其中，$\|A\vec{x}\|$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中向量 $A\vec{x}$ 的欧几里得范数，$\|\vec{x}\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\vec{x}$ 的欧几里得范数。

命题 5.5.8 矩阵的谱范数满足如下基本性质：

1. **非负性**：$\|A\| \geq 0$，且 $\|A\| = 0 \iff A = 0$
2. **齐次性**：对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
3. **三角不等式**：$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. 乘积性质：$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$
5. 若 U, V 是正交方阵，则 $\|UAV^T\| = \|A\|$

证明：我们证明最后一条性质，其他留作练习。由于正交方阵保持欧几里得范数，我们有

$$\|UAV^T\| = \max_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|UAV^T\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \max_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|AV^T\vec{x}\|}{\|V^T\vec{x}\|} \overset{\vec{y}=V^T\vec{x}}{=} \max_{\vec{y} \neq 0} \frac{\|A\vec{y}\|}{\|\vec{y}\|} = \|A\|$$

□

命题 5.5.9 矩阵的谱范数 $\|A\|$ 等于 A 的最大奇异值。

证明：设 A 的奇异值分解为 $A = U\Sigma V^T$，则 $\|A\| = \|\Sigma\|$。由

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得知

$$\|\Sigma\| = \max_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|\Sigma\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \max_{\vec{x} \neq 0} \frac{\sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \cdots + \sigma_r^2 x_r^2}}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \max_{1 \leq i \leq r} \sigma_i$$

$\square$

这个命题给出了最大奇异值的几何解释，即线性映射

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

把向量长度伸缩最大的倍数。我们下面说明，其他奇异值均有类似的几何解释。

例 5.5.1. 考虑一个 n 阶实对称方阵 S。由命题5.4.4，存在一组标准正交基 $\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n$ 使得每个 $\vec{\beta}_i$ 都是 S 的特征向量。不妨设其对应的特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$。

对任意向量 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$，在这组基下的线性表达为

$$\vec{x} = c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_n\vec{\beta}_n$$

由此可得

$$\frac{\vec{x}^T S\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}} = \frac{\lambda_1 c_1^2 + \cdots + \lambda_n c_n^2}{c_1^2 + \cdots + c_n^2}$$

易知

$$\lambda_1 = \max_{\vec{x}\neq 0} \frac{\vec{x}^T S\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}}$$

类似的，我们有

$$\lambda_i = \max_{\substack{\vec{x}\neq 0 \\ \vec{x}\in \mathrm{Span}\{\vec{\beta}_i, \cdots, \vec{\beta}_n\}}} \frac{\vec{x}^T S\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}} = \max_{\substack{\vec{x}\neq 0 \\ \vec{x}\in \mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_{i-1}\}^\perp}} \frac{\vec{x}^T S\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}}$$

设 A 是 $m\times n$ 实矩阵。我们把上述例子中的方法应用到半正定实对称方阵 $S = A^TA$。设 A 的奇异值为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$，即 A^TA 的非零特征值为 $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \cdots \geq \sigma_r^2$。设 $\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_r$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基并且构成 A^TA 的特征向量

$$A^TA\vec{\beta}_i = \begin{cases} \sigma_i^2\vec{\beta}_i & 1 \leq i \leq r \\ 0 & i > r \end{cases}$$

则我们有

$$\sigma_1 = \sqrt{\max_{\vec{x}\neq 0} \frac{\vec{x}^T A^T A\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}}} = \max_{\vec{x}\neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$$

并且 $\vec{\beta}_1$ 达到这个最大值

$$\sigma_1 = \frac{\|A\vec{\beta}_1\|}{\|\vec{\beta}_1\|}$$

然后考虑 $\vec{\beta}_1$ 的正交补空间，得到次大的奇异值

$$\sigma_2 = \sqrt{\max_{\substack{\vec{x}\neq 0 \\ \vec{x}\in \mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1\}^\perp}} \frac{\vec{x}^T A^T A\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}}} = \max_{\substack{\vec{x}\neq 0 \\ \vec{x}\in \mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1\}^\perp}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$$

这样我们依次得到第 i 个奇异值的几何解释

$$\sigma_i = \max_{\substack{\vec{x}\neq 0 \\ \vec{x}\in \mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_{i-1}\}^\perp}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$$

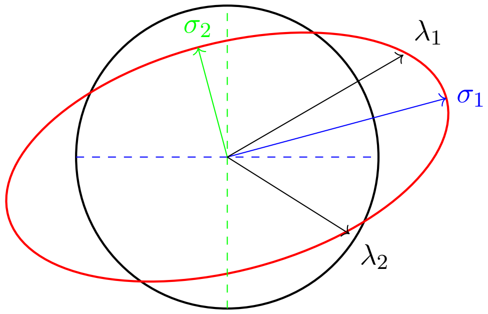


图 5.1: 蓝色和绿色表示奇异值方向，黑色表示特征值方向

5.5.5 矩阵极限

矩阵的谱范数给出了一个描述矩阵之间“距离”的方法。

定义 5.5.10 我们称一组 $m \times n$ 矩阵 A_k 收敛于 $m \times n$ 矩阵 B，如果

$$\lim_{k \to \infty} \|A_k - B\| = 0$$

此时我们记

$$\lim_{k \to \infty} A_k = B$$

命题 5.5.11 设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 实矩阵。则

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \le \|A\| \le \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

证明：设

$$A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_m^T \end{bmatrix} \qquad \text{这里} \qquad \vec{u}_k = \begin{bmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

对任意 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\|\vec{x}\| = 1$，我们有

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{u}_m^T \cdot \vec{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \vec{u}_1, \vec{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{u}_m, \vec{x} \rangle \end{bmatrix}$$

由 Cauchy–Schwarz 不等式，

$$\|A\vec{x}\| \le \sum_i |\langle \vec{u}_i, \vec{x} \rangle| \le \sum_i \|\vec{u}_i\| \|\vec{x}\| = \sum_i \|\vec{u}_i\| \le \sum_i \sum_j |a_{ij}|$$

另一方面，考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的标准基 $\vec{e}_j$。由

$$A\vec{e}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

因此对任意指标 i, j

$$\|A\| \geq \|A\vec{e}_j\| \geq |a_{ij}|$$

命题得证。 □

这个命题说明，矩阵极限成立

$$\lim_{k\to\infty} A_k = B$$

当且仅当 A_k 的每个矩阵元都收敛到 B 中对应的矩阵元。

5.5.6 指数矩阵-II

作为一个应用，我们考虑 n 阶实方阵 A。由矩阵范数的乘积性质，我们有

$$\left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$$

由于级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$$

收敛，上述谱范数的估计可以证明矩阵级数

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$$

收敛。我们把这个极限矩阵方便地记为 e^A

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

并且

$$\|e^A\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$$

由如上级数公式容易证明，e^A 是可逆矩阵，并且它的逆是 e^{-A}。即

$$e^A e^{-A} = I_n$$

指数矩阵 e^A 具有和指数函数 e^x 非常类似的性质。

命题 5.5.12 设 A, B 是两个相互交换的 n 阶方阵，即满足 $AB = BA$。则

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

证明：

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} \\
&\overset{\text{利用}}{\underset{AB=BA}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \frac{A^k B^m}{k!m!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}\right) = e^A e^B
\end{aligned}$$

□

注 5.5.2. 两个方阵如果不交换，$AB \neq BA$，则有如下的 *Baker-Campbell-Hausdorff* 公式

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]+\cdots}$$

5.5.7 微分方程中的应用

现在我们引入一个变量 t，考虑随 t 变化的矩阵

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

对矩阵等式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^k A^k}{k!}\right) = \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!}.$$

求和，可以得到

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$

对任意向量 $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$，考虑如下向量函数

$$\vec{y}(t) = e^{tA} \vec{y}_0$$

由上述讨论知

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A e^{tA} \vec{y}_0 = A\vec{y}$$

并且在 $t = 0$ 时有 $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$。因此 $\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}_0$ 给出了如下齐次线性常微分初值问题的解

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

进一步，我们可以考虑非齐次线性常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{b}(t) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

这里 $\vec{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$ 是随时间变化的向量。上述方程等价于

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}\vec{y}) = e^{-tA}\vec{b}(t)$$

两边积分，我们得到

$$e^{-tA}\vec{y} - \vec{y}_0 = \int_0^t e^{-sA}\vec{b}(s)ds$$

因此

$$\vec{y} = e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)ds$$

给出了非齐次线性常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{b}(t) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

的解。

在第七章中，我们讲详细讨论线性微分方程理论。

5.6 酉空间

下面我们考虑复数域，也就是复向量空间上的内积空间，这样的空间称为酉空间。酉空间是欧几里得空间在复数域上的自然推广，很多处理方法和欧几里得空间类似。我们在论述相似的结论时也只叙不证，细节留作练习。

定义 5.6.1 复线性空间 V 上的厄米内积指的是一个映射

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

满足以下条件：

1. **正定性**：对任意 $\mathbf{u} \in V$，$\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \geq 0$ 且 $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = 0 \iff \mathbf{u} = 0$
2. **共轭对称性**：对任意 $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$，$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \overline{\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}$
3. **线性性**：对任意 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ 和复数 $a,b \in \mathbb{C}$，

$$\langle\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}\rangle = a\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + b\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$$

注意到这里的线性性是对 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的第二个分量描述的。由共轭对称性，厄米内积对第一个分量是共轭线性的，即

$$\langle a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle = \bar{a}\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \bar{b}\langle\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle$$

注 5.6.1. *有的参考文献讨论厄米内积时也会定义为对第一个分量线性，第二个分量共轭线性。这两种定义方式是等价的，只是表达方式不同。我们这里采取如上的约定，即对第二个分量线性。*

定义 5.6.2 带厄米内积的复线性空间称为酉空间。

酉空间也可能是无穷维。我们主要讨论有限维的情况。

例 5.6.1. $V = \mathbb{C}^n$，定义两个复向量的厄米内积为

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i w_i$$

这里 z_i, w_i 是复向量 $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ 的分量。此时

$$\sqrt{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}$$

表示向量 $\mathbf{z}$ 的长度。容易验证，$(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 构成一个酉空间，称为 n 维标准酉空间。如果我们把 $\mathbb{C}^n$ 中的向量写成列向量的样子，则这个厄米内积可以用矩阵乘法表示为

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \bar{\mathbf{z}}^T \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & \cdots & \bar{z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

例 5.6.2. $V = \mathbb{C}^n$，设 $a_i > 0$ 是正实数。定义两个复向量的厄米内积为

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{z}_i w_i$$

对称性和线性性显然满足。由

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |z_i|^2$$

可以很容易看出正定性。令 A 为对角方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

则这个厄米内积也可以写成矩阵形式

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \bar{\mathbf{z}}^T A \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & \cdots & \bar{z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

例 5.6.3. 设 V 是由有限闭区间 $[a, b]$ 上取值在复数的连续函数构成的线性空间。对任意两个函数 $f(x), g(x) \in V$，我们定义它们的厄米内积为

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$$

对称性和线性性显然满足。由

$$\langle f, f\rangle := \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

知

$$\langle f, f\rangle \geq 0$$

且 $\langle f, f\rangle = 0$ 当且仅当 $f(x) = 0$ 是零函数，即 V 中的零向量。因此 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 定义了一个无穷维的酉空间。

5.6.1 Gram 矩阵

设 V 是一个酉空间，$\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组基。考虑这些基向量之间的厄米内积

$$\text{定义}\quad G_{ij} := \langle\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j\rangle, \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

由此我们得到一个 n 阶复方阵 $G = (G_{ij})$。

定义 5.6.3 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是 n 维酉空间，$\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 为 V 的一组基。我们称 n 阶方阵

$$G = \begin{bmatrix} \langle\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1\rangle & \langle\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_n\rangle \\ \langle\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1\rangle & \langle\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_n\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\vec{\alpha}_n, \vec{\alpha}_1\rangle & \langle\vec{\alpha}_n, \vec{\alpha}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{\alpha}_n, \vec{\alpha}_n\rangle \end{bmatrix}$$

为厄米内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 下的 Gram 矩阵。

设 $G = (G_{ij})$ 是厄米内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 V 的一组基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 下的 Gram 矩阵。对 V 中任意两个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$，它们通过这组基的线性展开记为

$$\mathbf{u} = z_1\vec{\alpha}_1 + \cdots z_n\vec{\alpha}_n$$
$$\mathbf{v} = w_1\vec{\alpha}_1 + \cdots w_n\vec{\alpha}_n$$

则

$$\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & \cdots & \bar{z}_n \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

定义 5.6.4 对于复矩阵 $A = (a_{ij})$，我们定义它的复共轭 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$，其中 $\bar{a}_{ij}$ 是复数 a_{ij} 的共轭。复共轭和转置的复合 $\bar{A}^T$ 称为 A 的共轭转置。

命题 5.6.5 对于复方阵的乘积，我们有

$$\overline{A_1 A_2 \cdots A_m} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_m$$
$$\overline{A_1 A_2 \cdots A_m}^T = \bar{A}_m^T \cdots \bar{A}_2^T \bar{A}_1^T$$

证明：留作练习。 □

定义 5.6.6 n 阶复方阵 A 称为是厄米方阵，如果

$$A = \bar{A}^T$$

复数域上的厄米方阵类比于实数域上的对称方阵。

定义 5.6.7 一个 n 阶厄米方阵 $A = (a_{ij})$ 称为正定的（半正定的），如果对任意非零列向量 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, 都有

$$\bar{\mathbf{z}}^T A\mathbf{z} > 0 \quad (\geq 0) \quad \text{即} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{z}_i z_j > 0 \quad (\geq 0)$$

注意到对于厄米方阵 A

$$\overline{\bar{\mathbf{z}}^T A\mathbf{z}} = \overline{(\bar{\mathbf{z}}^T A\mathbf{z})}^T = \bar{\mathbf{z}}^T \bar{A}^T \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}}^T A\mathbf{z}$$

即 $\bar{\mathbf{z}}^T A\mathbf{z}$ 一定是实数。

命题 5.6.8 设 G 是酉空间一组基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 下的 Gram 矩阵。则 G 是正定厄米方阵。

证明与欧几里得空间类似：厄米内积的共轭对称性和正定性保证了 G 是正定厄米方阵。因此在给定 V 的一组基的情况下，Gram 矩阵

$$\text{厄米内积} \quad \overset{\text{Gram}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{厄米正定矩阵}$$

给出厄米内积和正定厄米矩阵之间的一一对应。

5.6.2 范数

定义 5.6.9 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个酉空间。对于任意向量 $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u}$ 的长度 (或范数) 定义为

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}$$

命题 5.6.10. [Cauchy-Schwarz 不等式] 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个酉空间。则对任意两个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

$$|\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

等号成立当且仅当 $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ 线性相关。

证明：类似命题5.1.6。 □

命题 5.6.11. [三角不等式] 对酉空间中任意两个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$$

证明；类似命题5.1.8。 □

命题 5.6.12. [平行四边形法则] 对酉空间中任意两个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=2\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{v}\|^2$$

证明：类似命题5.1.9。 □

5.6.3 正交性

定义 5.6.13 酉空间中满足如下条件的两个向量

$$\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle=0$$

称为是正交的，记作 $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$。

命题 5.6.14 设 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_m\}$ 是酉空间 V 中 m 个两两正交的非零向量，即

$$\langle\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j\rangle=0 \qquad i \neq j, \quad i, j=1, \cdots, m$$

则 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_m\}$ 线性无关。

证明：类似命题5.2.1。 □

定义 5.6.15 酉空间 V 的一组基如果由两两正交的向量构成，则称这组基为正交基。如果正交基的每个基向量范数都是 1，则这组基称为酉空间的标准正交基。

给定酉空间 V 的任一组基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$，我们同样可以用 Gram-Schmidt 正交化依次定义

$$\vec{\beta}_k=\vec{\alpha}_k-\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle\vec{\beta}_i, \vec{\alpha}_k\rangle}{\langle\vec{\beta}_i, \vec{\beta}_i\rangle} \vec{\beta}_i$$

得到一组正交基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_k\}$。此时从基 $\{\vec{\alpha}_i\}$ 到 $\{\vec{\beta}_i\}$ 的过渡矩阵 P 是上三角矩阵

$$\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n\end{bmatrix} P$$

我们可以进一步对 $\vec{\beta}_i$ 作归一化，得到一组标准正交基。由此证明了如下结论。

命题 5.6.16 n 维酉空间存在标准正交基。

定义 5.6.17 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个 n 维酉空间，$W \subset V$ 是复线性子空间。我们定义 W 在 V 中的正交补空间为

$$W^{\perp} := \{\mathbf{u} \in V | \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ 对 } W \text{ 中任意向量 } \mathbf{v} \text{ 成立}\}$$

即 $\mathbf{u} \in W^{\perp}$ 如果 $\mathbf{u}$ 与 W 中的任意向量都正交。

如果我们选 W 中的一组基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_m\}$，则 $\mathbf{u} \in W^{\perp}$ 当且仅当 $\mathbf{u}$ 与这组基向量正交

$$\langle \mathbf{u}, \vec{\beta}_i \rangle = 0 \qquad i = 1, \cdots, m$$

这给出了正交补空间向量的一个判别方法。

命题 5.6.18 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个 n 维酉空间，$W \subset V$ 是线性子空间。则我们有直和分解

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

证明：类似命题5.2.7。 □

因此任意向量 $\mathbf{u} \in V$ 可以唯一地写为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\parallel} + \mathbf{u}^{\perp} \quad \text{其中} \quad \mathbf{u}^{\parallel} \in W, \ \ \mathbf{u}^{\perp} \in W^{\perp}$$

称为 $\mathbf{u}$ 关于 W 的正交分解。线性映射

$$p_W : V \to W, \qquad \mathbf{u} \to \mathbf{u}^{\parallel}$$

称为 V 向 W 的正交投影。

命题 5.6.19 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是 n 维酉空间，$W \subset V$ 是线性子空间。设 $\mathbf{u}$ 是 V 中任意向量，则

$$\|\mathbf{u} - p_W(\mathbf{u})\| = \min_{\mathbf{w} \in W} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$$

即 $p_W(\mathbf{u})$ 是 W 中与 $\mathbf{u}$ 的距离最短的向量。

证明：类似命题5.2.9。 □

等价而言，如果向量 $\mathbf{u}$ 关于 W 的正交分解为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\parallel} + \mathbf{u}^{\perp}$$

则 $\mathbf{u}$ 与 W 中向量间的最短距离为分量 $\mathbf{u}^{\perp}$ 的长度

$$\min_{\mathbf{w} \in W} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}^{\perp}\|$$

这个值也称为向量 $\mathbf{u}$ 与子空间 W 的距离。

5.7 酉矩阵

5.7.1 酉矩阵

定义 5.7.1 设 V 是一个酉空间。线性变换 $T:V\to V$ 称为酉变换，如果对于任意向量 $\mathbf{u}\in V$，都有

$$\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$$

即正交变换保持向量的范数（长度）不变。

命题 5.7.2 酉空间 V 上的线性变换 $T:V\to V$ 是一个酉变换当且仅当 T 保持厄米内积不变，即对 V 中的任意向量 $\mathbf{u},\mathbf{v}$

$$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$

证明：类似命题5.3.2。 □

与欧几里得空间类似，我们同样可以选标准正交基来具体刻画正交变换。

命题 5.7.3 设 $\{\vec{\gamma}_1,\cdots,\vec{\gamma}_n\}$ 是 n 维酉空间 V 的一组标准正交基。则线性映射 $T:V\to V$ 是酉变换当且仅当

$$\{T(\vec{\gamma}_1),\cdots,T(\vec{\gamma}_n)\}$$

也是 V 的标准正交基。

证明：类似命题5.3.3。 □

定义 5.7.4 一个 n 阶复方阵 A 称为酉矩阵，如果它满足

$$\bar{A}^T A = A\bar{A}^T = I_n$$

其中 $\bar{A}^T$ 表示 A 的共轭转置，I_n 表示 n 阶单位矩阵。所有 n 阶酉矩阵组成的集合记为 $\mathrm{U}(n)$。

即 A 是酉矩阵当且仅当 A 的共轭转置是它的逆

$$\bar{A}^T = A^{-1}$$

命题 5.7.5 设 $T:V\to V$ 是 n 维酉空间 V 的线性变换。则 T 是酉变换当且仅当 T 在 V 的一组标准正交基下的表示矩阵 A 是 n 阶酉矩阵。

证明：类似命题5.3.5。 □

命题 5.7.6 设 A 是 n 阶复方阵，则如下条件等价：

1. A 是酉矩阵
2. A 的列向量构成 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基
3. A 的行向量构成 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基

证明：类似命题5.3.6。 □

命题 5.7.7 设 A, B 是 n 阶酉矩阵，则 $A^{-1}(=\bar{A}^T), AB$ 均为 n 阶酉矩阵。即 $\mathrm{U}(n)$ 构成一个群，称为 n 阶酉群。

证明：类似命题5.3.7。 □

定义 5.7.8 行列式为 1 的 n 阶酉矩阵构成的集合记为 $\mathrm{SU}(n)$，称为 n 阶特殊酉群

$$\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{U}(n) | \det A = 1\}$$

$\mathrm{SU}(n)$ 是 $U(n)$ 的子群。

定义 5.7.9 设 A 和 B 是两个 n 阶复方阵。如果存在一个 n 阶酉矩阵 U，使得

$$B = UAU^{-1} \quad (\text{即} = UA\bar{U}^T)$$

则称矩阵 A 和 B 酉相似。

酉相似是比相似更强的关系。如果两个矩阵酉相似，则它们一定相似；反之不一定成立。

命题 5.7.10 任意 n 阶复方阵酉相似于一个上三角方阵。

证明：类似命题5.4.2。 □

5.7.2 正规矩阵

可对角矩阵具有非常好的性质。我们这里给出判断 n 阶复方阵是否可以通过酉相似对角化的一个简单方法。

定义 5.7.11 n 阶复方阵 A 称为正规矩阵，如果 A 与它的共轭转置 $\bar{A}^T$ 交换

$$A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$$

命题 5.7.12 n 阶复方阵 A 酉相似于对角方阵当且仅当 A 是正规矩阵。

证明：假设 A 酉相似于对角方阵，即存在酉矩阵 U 和对角方阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 使得

$$A=U\Lambda\bar{U}^T$$

则 $\bar{A}^T=U\bar{\Lambda}\bar{U}^T$，因此 $A\bar{A}^T=\bar{A}^TA=U\Lambda\bar{\Lambda}\bar{U}^T$。这里我们用到 $\Lambda\bar{\Lambda}=\bar{\Lambda}\Lambda$。

反之，假设 A 是正规矩阵。由命题5.7.10，存在酉矩阵 U 和上三角方阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

使得 $A=U\Sigma\bar{U}^T$。代入正规条件 $A\bar{A}^T=\bar{A}^TA$，得到 $\Sigma\bar{\Sigma}^T=\bar{\Sigma}^T\Sigma$，即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & * & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & * & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

比较两边第 1 行第 1 列矩阵元得

$$|a_{11}|^2+|a_{12}|^2+\cdots+|a_{1n}|^2=|a_{11}|^2$$

由此得 $a_{12}=\cdots=a_{1n}=0$。然后比较两边第 2 行第 2 列矩阵元，依次类推我们得到

$$\Lambda=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

是对角方阵。 □

命题 5.7.13 设 A 是 n 阶厄米方阵，即 $A=\bar{A}^T$，则 A 可以酉相似于对角方阵。

证明：由 A 是 n 阶厄米方阵

$$A\bar{A}^T=A^2=\bar{A}^TA$$

故 A 是正规矩阵。由命题5.7.12，A 可以酉相似于对角方阵。 □

命题 5.7.14 设 A 是 n 阶厄米方阵，则 A 的特征值均为实数。A 是正定（半正定）当且仅当 A 的特征值均为正数（非负数）。

证明：类似命题5.4.3、命题5.4.5和命题5.4.7。 □

命题 5.7.15 设 A 是 n 阶半正定厄米方阵。则存在唯一的半正定厄米方阵 B 使得 $A=B^2$。记 $B=\sqrt{A}$。

证明：类似命题5.4.8。 □

5.7.3 奇异值分解

设 A 是 $m \times n$ 复矩阵。考虑 n 阶方阵 $\bar{A}^T A$。对于任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$

$$\bar{\mathbf{z}}^T(\bar{A}^T A)\mathbf{z} = \overline{(A\mathbf{z})}^T(A\mathbf{z}) \geq 0$$

因此 $\bar{A}^T A$ 是 n 阶半正定厄米方阵。同理，$A\bar{A}^T$ 是 m 阶半正定厄米方阵。并且 $\bar{A}^T A$ 和 $A\bar{A}^T$ 具有相同的非零特征值。

定义 5.7.16 设 A 是 $m \times n$ 复矩阵。半正定厄米方阵 $\bar{A}^T A$（或 $A\bar{A}^T$）的非零特征值的平方根称为 A 的奇异值。

设 $\bar{A}^T A$ 的所有非零特征值为 $\mu_1, \cdots, \mu_r$，则 A 的所有奇异值为 $\sigma_1 = \sqrt{\mu_1}, \cdots, \sigma_r = \sqrt{\mu_r}$。

命题 5.7.17 设 A 是 n 阶厄米方阵。则 A 的所有奇异值为所有非零特征值的绝对值。

证明：类似命题5.4.10。 □

对于非厄米方阵，奇异值和特征值没有这样的直接联系。

定理 5.7.18. [奇异值分解] 设 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 是 $m \times n$ 阶复矩阵 A 的所有奇异值。则存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V 使得 $A = U\Sigma\bar{V}^T$，其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r \end{bmatrix} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

这里 $0_{k\times l}$ 表示 $k \times l$ 的零矩阵。

证明：类似定理5.4.11。 □

5.8 一些例子

5.8.1 极分解

我们知道一个复数 $z \in \mathbb{C}$ 可以写成

$$z = re^{i\theta}$$

这里 $r \geq 0$ 表示 z 的长度，$e^{i\theta}$ 的模长为 1。(r, θ) 称为复平面的极坐标。

n 阶复方阵也可以作类似的分解。

命题 5.8.1 设 A 是 n 阶复方阵。则存在 n 阶半正定厄米方阵 R（或 $\tilde{R}$）和 n 阶酉矩阵 Θ（或 $\tilde{\Theta}$）使得

$$A = R\Theta \quad (= \tilde{\Theta}\tilde{R})$$

其中 R（或 $\tilde{R}$）由 A 唯一确定。这个称为矩阵的极分解。

证明：设 $A = U\Sigma\bar{V}^T$ 是 A 的奇异值分解。则

$$A = U\Sigma\bar{U}^T U\bar{V}^T$$

取 $R = U\Sigma\bar{U}^T, \Theta = U\bar{V}^T$ 即满足要求。

另一方面

$$A\bar{A}^T = R\bar{R}^T = R^2$$

由命题5.7.15知 $R = \sqrt{A\bar{A}^T}$ 是唯一确定的。 □

5.8.2 Moore–Penrose 逆

在复数域的情形，一个 $m \times n$ 矩阵 A 的广义逆 A^- 也是定义为满足

$$AA^-A = A$$

的 $n \times m$ 矩阵 A^-。广义逆总是存在而且并不唯一。我们可以通过引入额外条件在所有广义逆中找一个唯一的代表元，称为 Moore–Penrose 逆。

命题 5.8.2 设 A 是 $m \times n$ 复矩阵。则存在唯一的 $n \times m$ 复矩阵 X 满足如下条件

$$\begin{cases} AXA = A & XAX = X \\ \overline{(AX)}^T = AX & \overline{(XA)}^T = XA \end{cases}$$

这个 X 称为 A 的 Moore–Penrose 逆，记为 A^+。

证明：设 A 的奇异值分解为

$$A = U\Sigma\bar{V}^T = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{V}^T$$

考虑

$$X = V\begin{bmatrix} {\Sigma_r}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{U}^T$$

直接计算易知

$$AXA = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{V}^T V\begin{bmatrix} {\Sigma_r}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{U}^T U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{V}^T = A$$

$$XAX = V\begin{bmatrix} {\Sigma_r}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{U}^T U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{V}^T V\begin{bmatrix} {\Sigma_r}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{U}^T = X$$

并且

$$AX = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{U}^T \quad \text{和} \quad XA = V \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{V}^T$$

都是厄米方阵。因此 X 满足所述方程。下证唯一性。

记 $X = VY\bar{U}^T$，则 Y 满足

$$\begin{cases} \Sigma Y \Sigma = \Sigma & Y\Sigma Y = Y \\ \overline{(\Sigma Y)}^T = \Sigma Y & \overline{(Y\Sigma)}^T = Y\Sigma \end{cases}$$

写成分块矩阵的样子

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$$

由方程 $\Sigma Y \Sigma = \Sigma$ 和 $Y\Sigma Y = Y$ 得到

$$Y = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & C \\ D & D\Sigma_r C \end{bmatrix}$$

再由

$$\Sigma Y = \begin{bmatrix} I_r & \Sigma_r C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad Y\Sigma = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ D\Sigma_r & 0 \end{bmatrix}$$

的厄米性，得到 $C = D = 0$。唯一性得证。 $\square$

通过 Moore–Penrose 逆可以直接给出最小二乘问题的一个解。在复向量的情形，最小二乘问题为

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|A\mathbf{z} - \mathbf{w}\|$$

由 Moore–Penrose 逆 A^+ 的性质可以得到

$$\bar{A}^T = \overline{(AA^+A)}^T = \bar{A}^T \overline{(AA^+)}^T = \bar{A}^T AA^+$$

即

$$\bar{A}^T (I_m - AA^+) = 0$$

因此对任意 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$

$$\bar{\mathbf{y}}^T \bar{A}^T (I_m - AA^+)\mathbf{w} = 0$$

即

$$\langle A\mathbf{y}, \mathbf{w} - AA^+\mathbf{w} \rangle = 0$$

这说明 $AA^+\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{w}$ 向 A 的像的投影，即 $z_0 = A^+\mathbf{w}$ 给出了最小二乘问题的一个解

$$\|A\mathbf{z}_0 - \mathbf{w}\| = \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \|A\mathbf{z} - \mathbf{w}\|$$

5.8.3 Pauli 矩阵与自旋

SU(2) 群

特殊酉群 SU(2) 在物理中扮演着重要的角色，例如在量子力学中被用来描述粒子自旋的对称性。在几何上，SU(2) 给出了 3 维空间转动 SO(3) 的双重覆盖，也称为 3 维自旋群 $\mathrm{SU}(2)=\mathrm{Spin}(3)$。由定义，SU(2) 群由满足 $\det(A)=1$ 的 2 阶酉矩阵 A 组成。

设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则

$$A\bar{A}^T=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a\bar{a}+b\bar{b} & a\bar{c}+b\bar{d} \\ c\bar{a}+d\bar{b} & c\bar{c}+d\bar{d} \end{bmatrix}$$

由酉方阵 $A\bar{A}^T=I_2$ 得

$$|a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2=1 \qquad a\bar{c}=-b\bar{d}$$

由 $\det A=ad-bc=1$，我们得到联立方程组

$$\begin{cases} |a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2=1 \\ a\bar{c}=-b\bar{d} \\ ad-bc=1 \end{cases}$$

由此解出

$$d=\bar{a} \qquad c=-\bar{b} \qquad |a|^2+|b|^2=1$$

因此

$$\mathrm{SU}(2)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{C} \text{ 满足 } |a|^2+|b|^2=1\right\}$$

如果用实数来表示 $a=x_1+ix_2, b=x_3+ix_4$，则 $SU(2)$ 中的元素一一对应于 3 维单位球面

$$S^3=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4|x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$$

Pauli 矩阵

Pauli 矩阵包括三个矩阵，定义如下：

$$\sigma_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

这些矩阵都是厄米方阵并且满足代数关系

$$\begin{cases} \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=I_2 \\ \sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1=i\sigma_3 \\ \sigma_2\sigma_3=-\sigma_3\sigma_2=i\sigma_1 \\ \sigma_3\sigma_1=-\sigma_1\sigma_3=i\sigma_2 \end{cases}$$

设 V 为所有迹为零的 2 阶厄米方阵构成的集合

$$V = \{2\text{ 阶复方阵 } A |\ \bar{A}^T = A, \operatorname{Tr} A = 0\}$$

容易验证，任一矩阵 $Q \in V$ 可以写成

$$Q = \begin{bmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{bmatrix} = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$$

这里 x_1, x_2, x_3 是实数。因此我们可以把 $\mathbb{R}^3$ 和 V 一一对应起来

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^3 &\to V \\ \vec{x} &\mapsto \sigma(\vec{x}) := x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 \end{aligned}$$

即 V 是 3 维实线性空间，Pauli 矩阵给出一组基。

命题 5.8.3 $\mathbb{R}^3$ 中的向量长度可以通过 *Pauli* 矩阵实现为

$$\|\vec{x}\|^2 = -\det \sigma(\vec{x})$$

证明：

$$\det \sigma(\vec{x}) = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{vmatrix} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

□

命题 5.8.4 设 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$，则

$$\sigma(\vec{x})\sigma(\vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle I_2 + i\sigma(\vec{x} \times \vec{y})$$

即 Pauli 矩阵同时表达了 3 维向量的内积和叉乘。

证明：设 $\epsilon_{ijk}(i, j, k \in \{1, 2, 3\})$ 是 3 维 Levi-Civita 符号。ϵ_{ijk} 关于指标 i, j, k 是全反对称的：

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$$

ϵ_{ijk} 只有当 i, j, k 互不相同时才非零，它的值为置换 $\{1, 2, 3\} \to \{i, j, k\}$ 的符号。例如 $\epsilon_{123} = 1$。

Pauli 矩阵相乘可以通过 Levi-Civita 符号表示为

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} I_2 + i \sum_l \epsilon_{jkl}\sigma_l$$

例如

$$\sigma_2^2 = I_2 \qquad \sigma_1\sigma_3 = i\epsilon_{132}\sigma_2 = -i\sigma_2$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{x})\sigma(\vec{y}) &= \sum_j x_j\sigma_j \sum_k y_k\sigma_k \\ &= \sum_{j,k} x_j y_k \delta_{jk} I_2 + i \sum_{j,k,l} \epsilon_{jkl} x_j y_k \sigma_l \\ &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle I_2 + i\sigma(\vec{x} \times \vec{y}) \end{aligned}$$

这里我们用到叉乘 $\vec{x}\times\vec{y}$ 的第 l 分量可以表达为 $\sum\limits_{j,k}\epsilon_{jkl}x_jy_k$。 □

设 $A\in\mathrm{SU}(2)$，$Q\in V$，则矩阵 $AQ\bar{A}^T$ 满足

$$\begin{cases}\overline{AQ\bar{A}^T}^T = A\bar{Q}^T\bar{A}^T = AQ\bar{A}^T \\ \mathrm{Tr}(AQ\bar{A}^T) = \mathrm{Tr}(Q\bar{A}^TA) = \mathrm{Tr}\,Q = 0\end{cases}$$

即 $AQ\bar{A}^T$ 也是 V 中的矩阵。因此给定 $A\in\mathrm{SU}(2)$，我们可以定义映射

$$\begin{aligned}f_A : V &\to V\\ Q &\mapsto f_A(Q) := AQ\bar{A}^T\end{aligned}$$

容易验证 f_A 是一个线性映射。记 f_A 在 V 的基 $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ 下的表示矩阵为 $\rho(A)$，即

$$f_A(\sigma_j) = \sum_{i=1}^{3}\sigma_i\rho(A)_{ij}$$

这里 $\rho(A)_{ij}$ 表示矩阵 $\rho(A)$ 的 (i,j) 分量。则对于 $\sigma(\vec{x}) = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3\in V$，我们有

$$f_A(\sigma(\vec{x})) = \sum_j x_jf_A(\sigma_j) = \sum_{i,j}\sigma_i\rho(A)_{ij}x_j = \sum_i\sigma_iy_i$$

这里 $y_i = \sum\limits_j\rho(A)_{ij}x_j$，或写成向量形式 $\vec{y} = \rho(A)\vec{x}$。

因此我们发现如下关系

$$f_A(\sigma(\vec{x})) = \sigma(\rho(A)\vec{x})$$

命题 5.8.5 ρ 定义了一个映射 $\rho:\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3)$。

证明：设 $A\in\mathrm{SU}(2)$，需证明 $\rho(A)\in\mathrm{SO}(3)$。由

$$f_A(\sigma(\vec{x})) = \sigma(\rho(A)\vec{x})$$

两边取行列式并利用 $\det\sigma(\vec{x}) = -\|\vec{x}\|^2$，我们得到

$$\|\rho(A)\vec{x}\|^2 = -\det\sigma(\rho(A)\vec{x}) = -\det f_A(\sigma(\vec{x})) = -\det(A\sigma(x)\bar{A}^T) = -\det\sigma(x) = \|\vec{x}\|^2$$

因此 $\rho(A)$ 保持 $\mathbb{R}^3$ 的范数，故 $\rho(A)\in\mathrm{O}(3)$。

由 $\rho(A)\in\mathrm{O}(3)$ 知 $\det\rho(A) = \pm1$。由于 $\mathrm{SU}(2)$ 拓扑上和 3 维球面 S^3 一样，而 S^3 是连通的，所以 A 可以在 $\mathrm{SU}(2)$ 中连续变化到恒等矩阵 I_2。因此

$$\det\rho(A) = \det\rho(I_2) = 1$$

这说明 $\rho(A)\in\mathrm{SO}(3)$。 □

例 5.8.1. 设 $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$ 是一个单位向量，即 $\|\vec{u}\| = 1$。考虑

$$A_{\vec{u}} := \begin{bmatrix} iu_3 & iu_1+u_2\\ iu_1-u_2 & -iu_3\end{bmatrix}\in\mathrm{SU}(2)$$

我们可以用 *Pauli* 矩阵把它写为

$$A_{\vec{u}} = i(u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2 + u_3\sigma_3) = i\sigma(\vec{u})$$

因此
$$f_{A_{\vec{u}}}(\sigma(\vec{x})) = A_{\vec{u}}\sigma(\vec{x})\overline{A_{\vec{u}}}^T = \sigma(\vec{u})\sigma(\vec{x})\sigma(\vec{u})$$
利用 $\|\vec{u}\| = 1$ 和 Pauli 矩阵的乘法性质

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{u})\sigma(\vec{x})\sigma(\vec{u}) =&(\langle\vec{u},\vec{x}\rangle I_2 + i\sigma(\vec{u}\times\vec{x}))\sigma(\vec{u})\\ =&\sigma(\langle\vec{u},\vec{x}\rangle\vec{u}) - \sigma((\vec{u}\times\vec{x}))\times\vec{u})\\ =&\sigma(2\langle\vec{x},\vec{u}\rangle\vec{u}-\vec{x})\end{aligned}$$

写成矩阵表达式

$$2\langle\vec{x},\vec{u}\rangle\vec{u}-\vec{x} = \begin{bmatrix} 2u_1u_1-1 & 2u_1u_2 & 2u_1u_3 \\ 2u_2u_1 & 2u_2u_2-1 & 2u_2u_3 \\ 2u_3u_1 & 2u_3u_2 & 2u_3u_3-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

我们得到
$$\rho(A_{\vec{u}}) = \begin{bmatrix} 2u_1u_1-1 & 2u_1u_2 & 2u_1u_3 \\ 2u_2u_1 & 2u_2u_2-1 & 2u_2u_3 \\ 2u_3u_1 & 2u_3u_2 & 2u_3u_3-1 \end{bmatrix}$$

观察到
$$\begin{cases}\rho(A_{\vec{u}})(\vec{u}) = \vec{u} \\ \rho(A_{\vec{u}})(\vec{x}) = -\vec{x} \quad 若\ \vec{x}\perp\vec{u}\end{cases}$$
因此 $\rho(A_{\vec{u}})$ 表示在 $\vec{u}$ 的正交补平面上作对径映射。

命题 5.8.6 $\rho : \mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3)$ 满足如下性质：

1. 保单位：$\rho(I_2) = I_3$
2. 保乘法结构：$\rho(AB) = \rho(A)\rho(B)$
3. 保逆结构：$\rho(A^{-1}) = \rho(A)^{-1}$

证明：保单位显然。我们只需证明 ρ 保乘法。则

$$\rho(A)\rho(A^{-1}) = \rho(I_2) = I_3 \quad\Longrightarrow\quad \rho(A^{-1}) = (\rho(A))^{-1}$$

由

$$\begin{aligned}\sigma(\rho(A)\rho(B)\vec{x}) =& f_{\vec{A}}(\sigma(\rho(B)\vec{x})) = f_{\vec{A}}(f_{\vec{B}}(\sigma(\vec{x})))\\ =&A(B\sigma(\vec{x})\bar{B}^T)\bar{A}^t = (AB)\sigma(x)\overline{AB}^T\\ =&f_{AB}(\sigma(\vec{x})) = \sigma(\rho(AB)\vec{x})\end{aligned}$$

即得
$$\rho(A)\rho(B) = \rho(AB)$$

$\square$

我们称 $\rho : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ 是一个群同态，即保持群结构（乘法和逆）的映射。进一步分析容易验证 ρ 是一个 $2:1$ 的覆盖映射。例如

$$\rho(\pm I_2) = I_3$$

实际上对任意 $A \in \mathrm{SU}(2)$ 有

$$\rho(A) = \rho(-A)$$

这个 $2:1$ 的覆盖解释了一个非常有趣的现象：即自旋 1/2 粒子绕某一轴旋转 360 度后，状态不完全恢复，而是变为原状态的负号。

例如考虑 SU(2) 矩阵

$$R_\theta = \cos(\theta/2) I_2 + i \sin(\theta/2)\sigma_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & i\sin(\theta/2) \\ i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

直接计算易知

$$\rho(R_\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

因此 $\rho(R_\theta)$ 对应于在 3 维空间中以 x_1-方向为轴在 x_2x_3-平面旋转 θ 角度。在旋量空间或者在 SU(2) 矩阵中，$\rho(R_\theta)$ 相当于旋转 $\theta/2$。可以看出

$$R_{2\pi} = -R_0 = -I_2 \qquad \rho(R_{2\pi}) = I_3$$

Pauli 矩阵还可以实现 4 维时空的 Lorentz 变换。设 M 为所有 2 阶厄米方阵构成的集合

$$M = \{2\text{ 阶复方阵 } A | \bar{A}^T = A\}$$

M 中任一矩阵 T 可以写成

$$T = \begin{bmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{bmatrix} = x_0 I_2 + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$$

这 $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$。因此 M 是 4 维实线性空间，矩阵 $\{I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 构成 M 的一组基。

我们可以把 M 中的矩阵和 4 维时空对应起来，其中 x_0 表示时间，x_1, x_2, x_3 表示空间。用

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

来表示 4 维时空向量。记

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{bmatrix}$$

则

$$\det T(\mathbf{x}) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

给出 4 维时空的 Minkowski 长度。因此保持 M 中矩阵行列式不变的线性变换都将给出 Minkowski 空间的 Lorentz 变换。

例如设 A 是一个 2 阶复方阵，满足 $\det A = \pm 1$。对 2 阶厄米方阵 $T \in M$，矩阵 $AT\bar{A}^T$ 也是厄米方阵，并且

$$\det(AT\bar{A}^T) = |\det A|^2 \det T = \det T$$

因此我们得到保行列式的线性映射

$$\begin{aligned} g_A : M &\to M \\ T &\mapsto AT\bar{A}^T \end{aligned}$$

这个线性映射在基 $\{I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 下的表示矩阵是一个 Lorentz 变换。这个实际上给出了 4 维时空 Lorentz 群的旋量构造。记

$$SL^*(2, \mathbb{C}) := \{2\text{阶可逆复方阵} | \det A = \pm 1\}$$

则上述构造给出了 4 维 Minkowski 时空的旋量群 $\mathrm{Spin}(3, 1) = SL^*(2, \mathbb{C})$。

5.9 习题

1. 设 V 是由所有 $m \times n$ 实矩阵构成的线性空间。定义 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 如下

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^T B), \qquad A, B \in V$$

证明 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 V 上的一个内积。

2. 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是 n 维欧几里得空间。设内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在一组基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 下的 Gram 矩阵是 G，在另一组基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 下的 Gram 矩阵是 G'。设基 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 到基 $\{\vec{\beta}_1, \cdots, \vec{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵是 P。问 G, G', P 之间是什么关系？

3. 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是 n 维欧几里得空间。对于 V 中任意 n 个向量 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$，我们定义其 Gram 矩阵 $G = (G_{ij})$ 为

$$G_{ij} = \langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle$$

证明 $\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 线性无关（即构成 V 的一组基）当且仅当 G 是可逆矩阵。

4. 证明 2 阶实对称方阵 A 是正定方阵当且仅当 $\mathrm{Tr}A > 0$ & $\det A > 0$。

5. 证明欧几里得空间中的向量 $\vec{x}, \vec{y}$ 正交当且仅当 $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$。

6. 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是 n 维欧几里得空间，$\{\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_n\}$ 是 V 的标准正交基。证明对任意 $\vec{x}, \vec{y} \in V$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{\alpha}_i \rangle \langle \vec{\alpha}_i, \vec{y} \rangle \qquad \text{(Parseval 等式)}$$

7. 设 $V = \mathrm{Span}\{1, x, x^2, x^3\}$ 是由所有次数小于等于 3 的实系数多项式构成的线性空间。定义

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 构成 4 维欧几里得空间。找一组 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 的标准正交基。

8. 举例说明，方阵 A 的列向量两两相互正交，但 A 的行向量不一定两两相互正交。

9. 在标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中，设 U 是由方程 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ 定义的平面。计算点 $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ 在平面 U 上的正交投影 $\mathbf{p}'$。

10. 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是由所有 n 阶实方阵构成的欧几里得空间，其内积为 $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$。对于如下 V 的子空间 U，计算 U 的正交补 $U^\perp$ 以及正交投影 $p_U : V \to U$。

    (a) $U = \mathrm{Span}\{I_n\}$ 是由单位方阵张成的子空间

    (b) U 是由所有对角方阵构成的线性子空间

    (c) U 是由所有上三角方阵构成的线性子空间

11. 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是 n 维欧几里得空间，U 是 V 的线性子空间。证明 $(U^\perp)^\perp = U$。

12. 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是 n 维欧几里得空间，U_1, U_2 是 V 的线性子空间。证明 $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$。

13. 设 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 是 n 维欧几里得空间 V 中的两个向量，满足 $\|\vec{\alpha}\|=\|\vec{\beta}\|$。证明一定存在一个正交变换 $T:V\to V$ 使得 $T(\vec{\alpha})=\vec{\beta}$。

14. 找出所有使得 $A\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ 的 3 阶正交矩阵 A。

$$a)\quad \vec{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\quad \vec{\beta}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\qquad\qquad b)\quad \vec{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\quad \vec{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

15. 设 λ_0 是 n 阶正交方阵 A 是一个特征值（可能是复数）。

    (a) 证明 $|\lambda_0|=1$。

    (b) 假设 $\lambda_0\notin\mathbb{R}$，$\vec{z}\in\mathbb{C}^n$ 是 λ_0 的一个复特征向量。记 $\vec{z}=\vec{x}+i\vec{y}$，这里 $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$。证明

$$\vec{x}\perp\vec{y}\quad \text{并且}\quad \|\vec{x}\|=\|\vec{y}\|$$

16. 判断如下实对称方阵是否是正定方阵或者半正定方阵。

$$a)\begin{bmatrix}5&3&0\\3&5&4\\0&4&5\end{bmatrix}\qquad b)\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\qquad c)\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$$

17. 设 A 是 n 阶反对称方阵，即 $A^T=-A$。证明 $e^A\in\mathrm{SO}(n)$ 是 n 阶特殊正交方阵。

18. 设 A,B 是 n 阶正定实对称方阵。证明 AB 的特征值均为正实数。

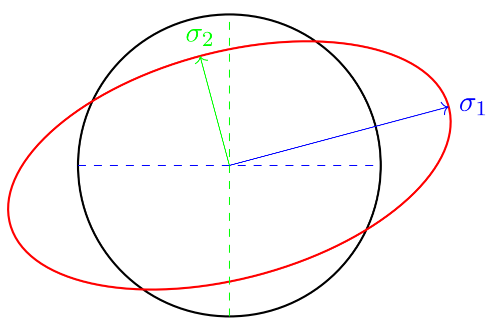
19. 计算如下矩阵的奇异值分解

$$a)\quad=\begin{bmatrix}3&0\\4&5\end{bmatrix}\qquad\qquad b)\quad=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&2\\2&-2\end{bmatrix}$$

20. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是一个可逆线性映射，其在标准基下对应于矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$\det A\neq 0$

$$f:\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

设 A 的奇异值为 $\sigma_1\geq\sigma_2>0$。证明单位圆 $\{x_1^2+x_2^2=1\}$ 在 f 的映射下变为一个椭圆，椭圆的长半轴长为 σ_1，短半轴长为 σ_2。



21. 计算如下矩阵的 QR 分解

$$a)\quad \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad\qquad b)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

22. 用最小二乘法找出最佳拟合如下数据的线性方程 $y = at + b$

t_i	-2	-1	0	2
y_i	4	3	1	0

23. 证明矩阵范数的如下两个性质：

(a) 三角不等式：$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

(b) 乘积性质：$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

24. 设 A 是一个 n 阶正定方阵。证明 $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-tA} = 0$。

25. 假设函数 $x(t), y(t)$ 满足如下微分方程组

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) + y(t) \\ y'(t) = -2x(t) - y(t) \end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$。

26. 酉空间中两个向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 正交当且仅当对任意复数 $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\|a\vec{\alpha} + b\vec{\beta}\|^2 = \|a\vec{\alpha}\|^2 + \|b\vec{\beta}\|^2$$

27. 设 V 是由所有 $m \times n$ 复矩阵构成的复线性空间。定义 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 如下

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(\bar{A}^T B), \qquad A, B \in V$$

证明 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 V 上的一个厄米内积。

28. 设 A, B 是 n 阶厄米方阵。证明 $\mathrm{Tr}(AB)^2$ 和 $\mathrm{Tr}(A^2B^2)$ 都是实数并且

$$\mathrm{Tr}(AB)^2 \le \mathrm{Tr}(A^2B^2)$$

等号成立当且仅当 $AB = BA$。

29. 证明任意一个 2 阶酉方阵可以表达为如下形式

$$\begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta_3} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_4} \end{bmatrix}$$

这里 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta$ 均是实数。

30. 设 A 是一个 n 阶复方阵。定义一个 $2n$ 阶实方阵 $\varphi(A)$ 如下:

$$\varphi(A)=\begin{bmatrix} B & C \\ -C & B \end{bmatrix} \qquad \text{这里 } A=B+iC,\ B \text{ 和 } C \text{ 是实方阵}$$

证明 φ 满足如下性质:

(a) $\varphi(A_1A_2)=\varphi(A_1)\varphi(A_2)$，$\varphi(\bar{A}^T)=\varphi(A)^T$

(b) A 是厄米方阵当且仅当 $\varphi(A)$ 是对称方阵

(c) A 是酉方阵当且仅当 $\varphi(A)$ 是正交方阵

31. 设 n 阶复方阵 A 有如下分块结构

$$A=\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \qquad B \text{ 是 } m \text{ 阶复方阵，} D \text{ 是 } n-m \text{ 阶复方阵}$$

证明 A 是酉方阵当且仅当 B, D 是酉方阵并且 $C=0$。

32. 设 n 阶复方阵 A 的所有特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$。证明

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \le \operatorname{Tr}(\bar{A}^T A)$$

等号成立当且仅当 A 是正规矩阵。

33. 设 A 是 n 阶厄米方阵。证明 A 是正定方阵当且仅当存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $A=\bar{P}^T P$。

34. 计算矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的极分解。

第六章　线性空间的一些构造

6.1　线性构造

6.1.1　对偶空间

定义 6.1.1　设 V 是域 k 上的线性空间。V 上的线性函数是指线性映射 $f: V \to k$。所有线性函数构成的集合

$$V^* = \{f : V \to k \mid f \text{ 是线性映射}\}$$

称为 V 的对偶空间。

容易验证 V^* 在如下加法和数乘下构成线性空间：

- $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$
- $(cf)(v) = c \cdot f(v)$

其中 $f, g \in V^*, v \in V, c \in k$。

命题 6.1.2. [对偶基]　设 V 是有限维线性空间，$\dim V = n$，且 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是 V 的一组基。定义线性函数 $e^i : V \to k$，其在基上的值为

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i = j \\ 0 & \text{如果 } i \neq j \end{cases}$$

则 $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ 是 V^* 的一组基，称为对偶基。特别的，$\dim V^* = n = \dim V$。

证明: 首先证明线性无关性。设 $\sum_{i=1}^{n} c_i e^i = 0$，则对任意 j，有

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i e^i \right)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta^i_j = c_j$$

因此所有 $c_j = 0$，即 $\{e^1, \ldots, e^n\}$ 线性无关。

对任意 $f \in V^*$，设 $f(e_j) = a_j$，则对任意 $v = \sum_{j=1}^{n} v^j e_j \in V$，有

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} v^j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j v^j$$

另一方面，

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e^i\right)(v)=\sum_{i=1}^{n} a_i e^i\left(\sum_{j=1}^{n} v^j e_j\right)=\sum_{i,j} a_i v^j \delta_j^i=\sum_{j=1}^{n} a_j v^j$$

所以 $f=\sum_{i=1}^{n} a_i e^i$，即 f 可由 $\{e^1,\dots,e^n\}$ 线性表示。 □

例 6.1.1. 设 $V=\mathbb{R}^n$，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为标准基。其对偶基 $\{e^1,\cdots,e^n\}$ 对应的线性函数为

$$e^i(\vec{x})=x_i,\qquad \text{其中}\quad \vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

即坐标函数。一般的对偶向量 $f=a_1e^1+a_2e^2+\cdots+a_ne^n\in V^*$ 对应于线性函数

$$f(\vec{x})=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

例 6.1.2. 设 $V=\mathbb{R}^2$, 取一组基 $v_1=(1,0),v_2=(1,1)$。其对偶基记为 v^1,v^2，则

$$v^1(\vec{x})=x_1-x_2,\quad v^2(\vec{x})=x_2,\quad \text{其中}\quad \vec{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$$

容易验证其满足对偶基条件

$$v^1(v_1)=1,\quad v^1(v_2)=0,\quad v^2(v_1)=0,\quad v^2(v_2)=1$$

例 6.1.3. 设 $V=M_{m\times n}(k)$ 为 $m\times n$ 矩阵空间。其对偶空间 V^* 由所有线性函数

$$f:M_{m\times n}(k)\to k$$

组成。一个重要例子是迹函数：对于固定矩阵 $B\in M_{n\times m}(k)$，定义：

$$f_B(A)=\mathrm{tr}(BA),\qquad \mathrm{tr}=\text{矩阵的迹}$$

映射 $B\mapsto f_B$ 给出了 $M_{n\times m}(k)$ 到 $M_{m\times n}(k)^*$ 的线性同构，证明留给读者。

例 6.1.4. 设 $V=\mathbb{R}[x]_{\le n}$ 为次数不超过 n 的实多项式空间，基为 $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$。对偶基由”求导泛函”给出：

$$e^i(p)=\frac{p^{(i)}(0)}{i!},\quad i=0,1,\cdots,n$$

其中 $p^{(i)}$ 表示 p 的 i 阶导数。实际上，对于基多项式 $p_j(x)=x^j$，有：

$$e^i(p_j)=\frac{j!}{i!}\delta_{ij}=\delta_{ij}$$

因此如上构造的 $\{e^0,e^1,\dots,e^n\}$ 确实是对偶基。

设 V 是一个线性空间，V^* 是对偶空间。我们可以再次考虑 V^* 的对偶空间 V^{**}，并且有一个自然的映射

$$V\to V^{**},\quad v\mapsto\hat{v}$$

其中对任意的 $f\in V^*$，

$$\hat{v}(f)=f(v)$$

容易验证 $V\to V^{**}$ 是一个线性映射。对于一个无穷维的线性空间，这个双重对偶的结构通常会比较复杂。如果 V 是有限维的，如下结论给出了双重对偶空间的刻画。

命题 6.1.3 设 V 是有限维线性空间。则 $V\cong V^{**}$ 是线性同构。

证明：映射 $v \mapsto \hat{v}$ 是线性的，且 $\dim V^{**} = \dim V$。为证明它是同构，只需证明它是单射。若 $\hat{v} = 0$，则对任意 $f \in V^*$ 有 $f(v) = 0$。特别地，取 f 为对偶基元素，可得 v 在所有坐标函数下的取值为零，故 $v = 0$。 □

定义 6.1.4 设 $T : V \to W$ 是线性映射，定义其对偶映射为

$$T^* : W^* \to V^*$$

其中对任意的 $g \in W^*, v \in V$

$$(T^*g)(v) = g(Tv)$$

对偶映射具有以下性质：

1. $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$
2. $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$
3. 若 T 可逆，则 $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$
4. 在有限维情形，若 T 在给定基下的矩阵为 A，则 T^* 在对偶基下的矩阵为 A^T

6.1.2 商空间

定义 6.1.5 设 V 是域 k 上的线性空间，W 是 V 的线性子空间。定义等价关系 $\sim$：

$$v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in W$$

等价类 $[v] = \{v + w \mid w \in W\}$ 称为 v 的陪集，通常也记为

$$[v] = v + W$$

所有陪集

$$V/W = \{[v] \mid v \in V\}$$

构成的集合称为 V 模 W 的商空间。

在商空间 V/W 上可以定义加法和数乘运算，使其成为 k 上的线性空间：

- 加法：$[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]$
- 数乘：$\lambda[v] = [\lambda v]$，其中 $\lambda \in k$

我们下面验证这些运算是良定义的，即不依赖于等价类代表的选取。

设 $[v_1] = [v_1']$，$[v_2] = [v_2']$，则 $v_1 - v_1' \in W$，$v_2 - v_2' \in W$。于是：

$$(v_1 + v_2) - (v_1' + v_2') = (v_1 - v_1') + (v_2 - v_2') \in W$$

故 $[v_1+v_2]=[v_1'+v_2']$，即加法良定义。类似地，对于数乘：

$$\lambda v-\lambda v'=\lambda(v-v')\in W$$

故 $[\lambda v]=[\lambda v']$，即数乘良定义。

命题 6.1.6 设 V 是有限维线性空间，W 是 V 的线性子空间，则

$$\dim(V/W)=\dim V-\dim W$$

证明: 设 $\{w_1,\dots,w_k\}$ 是 W 的基，将其扩展为 V 的基 $\{w_1,\dots,w_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$。我们说明 $\{[v_{k+1}],\dots,[v_n]\}$ 是 V/W 的基。

首先证明线性无关。设 $\sum\limits_{i=k+1}^{n}c_i[v_i]=[0]$，则 $\sum\limits_{i=k+1}^{n}c_iv_i\in W$，即存在 $a_1,\dots,a_k$ 使得

$$\sum_{i=k+1}^{n}c_iv_i=\sum_{j=1}^{k}a_jw_j$$

由于 $\{w_1,\dots,w_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ 线性无关，所有 $c_i=0$。

再证它们是生成元。对任意 $[v]\in V/W$，设 $v=\sum\limits_{j=1}^{k}a_jw_j+\sum\limits_{i=k+1}^{n}b_iv_i$，则

$$[v]=\left[\sum_{i=k+1}^{n}b_iv_i\right]=\sum_{i=k+1}^{n}b_i[v_i]$$

因为 $\sum\limits_{j=1}^{k}a_jw_j\in W$。 □

命题 6.1.7 设 V 是域 k 上的线性空间，W 是 V 的线性子空间，则商空间 V/W 的对偶空间自然同构于 W 的零化子：

$$(V/W)^*\cong W^0=\{f\in V^*\mid f(w)=0\ \forall w\in W\}$$

证明: 定义映射 $\Phi:W^0\to(V/W)^*$ 为

$$\Phi(f)([v])=f(v)$$

首先验证 Φ 良定义：如果 $[v_1]=[v_2]$，则 $v_1-v_2\in W$，所以 $f(v_1-v_2)=0$，即 $f(v_1)=f(v_2)$。容易验证 Φ 是线性映射。下面验证 Φ 是同构

- Φ 是单射：如果 $\Phi(f)=0$，则对任意 $v\in V$，有

  $$f(v)=\Phi(f)([v])=0$$

  所以 $f=0$。

- Φ 是满射：对任意 $g \in (V/W)^*$，定义 $f \in V^*$ 为

$$f(v) = g([v])$$

显然 $f \in W^0$ 且 $\Phi(f) = g$。

$\square$

例 6.1.5. 设 $V = \mathbb{R}^3$，$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$。则 W 是二维子空间（平面），商空间 V/W 的维数为：

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W = 3 - 2 = 1$$

实际上，V/W 中的每个等价类由形如 $(a,a,a)+W$ 的向量代表，可以验证映射：

$$\varphi : V/W \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z)+W \mapsto \frac{x+y+z}{3}$$

是线性同构。

例 6.1.6. 设 $V = \mathbb{R}[x]$ 为实系数多项式空间，$W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\}$。则 W 是 V 的子空间。商空间 V/W 与 $\mathbb{R}$ 同构。同构映射为：

$$\varphi : V/W \to \mathbb{R}, \quad p(x)+W \mapsto p(1)$$

这是因为两个多项式模 W 相等当且仅当它们在 $x=1$ 处取值相同。

6.1.3 自由生成的向量空间

给定任意集合（不一定具有代数结构），我们可以构造一个以该集合为基的向量空间。这种构造在代数学、拓扑学以及许多其他数学分支中都有重要应用。

定义 6.1.8 给定任意集合 X，k 是一个数域。设 $F(X)$ 是由所有形式和

$$\sum_{x\in X} a_x x, \quad a_x \in k$$

组成的集合，其中只有有限个系数 a_x 非零。定义加法和数乘如下：

$$\left(\sum_{x\in X} a_x x\right) + \left(\sum_{x\in X} b_x x\right) = \sum_{x\in X}(a_x+b_x)x$$

$$c\cdot\left(\sum_{x\in X} a_x x\right) = \sum_{x\in X}(ca_x)x$$

$F(x)$ 构成一个向量空间，称为由 X 自由生成的向量空间。

我们可以通过包含映射

$$i : X \to F(X), \quad i(x) = 1\cdot x$$

把 X 中的元素标记为 $F(X)$ 中的向量。由定义可以看出，X 构成 $F(X)$ 的一组基。特别地，$F(X)$ 是有限维线性空间当且仅当集合 X 包含有限个元素。

命题 6.1.9 设 X 是一个集合，k 是一个域。对于任意 k 上的向量空间 V 和任意集合映射 $\varphi : X \to V$，存在唯一的线性映射 $\tilde{\varphi} : F(X) \to V$，使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F(X) \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ & V \end{tikzcd}$$

即 $\varphi = \tilde{\varphi} \circ i$。这个性质称为 $F(X)$ 的泛性质。

证明: 给定集合映射 $\varphi : X \to V$，定义

$$\tilde{\varphi} : F(X) \to V, \quad \tilde{\varphi}(\sum_{x\in X} a_x x) = \sum_{x\in X} a_x \varphi(x)$$

由于 a_x 中只有有限个非零，$\tilde{\varphi}$ 是良好定义的。容易验证 $\tilde{f}$ 是满足要求的线性映射。唯一性留作练习。 □

例 6.1.7. 设 $X = \{a, b, c\}$ 是一个三元素集合，$k = \mathbb{R}$。则 $F(X)$ 由所有形如

$$\alpha a + \beta b + \gamma c, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

的线性组合组成。$\{a, b, c\}$ 构成 $F(X)$ 的一组基，因此 $\dim F(X) = 3$。我们可以通过这组基建立同构 $\Phi : F(X) \to \mathbb{R}^3$：

$$\Phi(\alpha a + \beta b + \gamma c) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

例 6.1.8. 设 $X = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$，$k = \mathbb{R}$。则 $F(X)$ 由所有有限线性组合

$$a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

组成，这就是所有的多项式 $\mathbb{R}[x]$ 构成的线性空间。注意到 $F(X)$ 的定义中，要求只有有限个系数非零，因此 $F(X)$ 中的元素对应于一个多项式而不是幂级数。线性空间 $F(X)$ 是无穷维的，因为集合 X 包含无穷个元素。

例 6.1.9. 设 X 是任意集合，k 是一个数域。我们可以把 $F(X)$ 中的元素

$$\sum_{x\in X} a_x x$$

视为 X 上的一个取值在 k 中的函数

$$f : X \to k, \quad f(x) = a_x$$

因此 $F(X)$ 也可以通过如下的函数空间来刻画

$$F(X) = \{f : X \to k | f \text{ 只在 } X \text{ 中有限个点取值非零}\}$$

6.2 张量构造

6.2.1 张量积

张量积是线性代数中的一个基本概念，它提供了一种将两个向量空间组合成一个新的、更大的向量空间的方法。

张量积可以通过商空间构造。设 V 和 W 是域 k 上的向量空间。记 $F = F(V \times W)$ 是由集合 $V \times W$（V 和 W 的笛卡儿积）自由生成的向量空间。设 R 是 F 中由以下形式的元素生成的子空间：

- $(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$
- $(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$
- $(cv, w) - c(v, w)$
- $(v, cw) - c(v, w)$

其中 $v, v_1, v_2 \in V$，$w, w_1, w_2 \in W$，$c \in k$。

定义 6.2.1 定义线性空间 V 和 W 的张量积为商空间：

$$V \otimes_k W = F/R$$

并将 (v, w) 的等价类记为 $v \otimes w$。当数域 k 是默认时，通常我们也简写为

$$V \otimes W$$

由定义，$F(V \times W)$ 中的任意元素可以表达为

$$\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}(v_\alpha, w_\beta) \qquad v_\alpha \in V, w_\beta \in W, c_{\alpha\beta} \in k$$

这里求和是有限求和。我们把它在商空间 $V \otimes W$ 定义的等价类记为

$$\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\ v_\alpha \otimes w_\beta$$

R 中的等价关系对应于张量积中的如下运算规则（$v_i \in V, w_i \in W, c \in k$）

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$$
$$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$$
$$(cv) \otimes w = c\,(v \otimes w) = v \otimes (cw)$$

定义 6.2.2 设 V, W, U 是域 k 上的向量空间。一个映射

$$\varphi : V \times W \to U$$

称为是一个双线性映射，如果对每个固定的 $v \in V, w \in W$，映射

$$\varphi(v, -) : W \to U, \qquad \varphi(-, w) : V \to U$$

都是线性映射。

例 6.2.1. 设 V 是一个实线性空间，$<\cdot,\cdot>$ 是 V 上的一个内积。则

$$<\cdot,\cdot>: V \times V \to \mathbb{R}$$

是一个双线性映射。

命题 6.2.3 设 V, W, U 是域 k 上的向量空间。对于任意双线性映射 $\varphi : V \times W \to U$，存在唯一的线性映射 $\tilde{\varphi} : V \otimes W \to U$，使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\varphi"'] & V \otimes W \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

即 $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \otimes$。这个性质称为张量积的泛性质。

证明: 由 $F(V \times W)$ 的泛性质，φ 可以延拓为线性映射（仍记为 φ）

$$\varphi : F = F(V \times W) \to U$$

由 φ 的双线性性：$\varphi(R) = 0$。因此 φ 诱导了在商空间上的线性映射

$$\tilde{\varphi} : V \otimes W = F/R \to U$$

可以验证 $\tilde{\varphi}$ 即为所求。唯一性留作练习。 □

命题 6.2.4 设 V 是 m 维向量空间，$\{e_1, \ldots, e_m\}$ 是 V 的一组基，W 是 n 维向量空间，$\{f_1, \ldots, f_n\}$ 是 W 的一组基。则

$$\{e_i \otimes f_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

是 $V \otimes W$ 的一组基。特别地，

$$\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W = mn$$

证明: 首先证明这些元素生成 $V \otimes W$。任意元素 $v \otimes w$ 可以写为：

$$v \otimes w = \left(\sum_i a_i e_i\right) \otimes \left(\sum_j b_j f_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j (e_i \otimes f_j)$$

由于 $V\otimes W$ 由形如 $v\otimes w$ 的元素生成，所以 $\{e_i\otimes f_j\}$ 是生成元。

再证明线性无关。假设 $\sum\limits_{i,j} c_{ij}e_i\otimes f_j=0$。对任意 $1\le\alpha\le m, 1\le\beta\le n$，定义映射

$$\varphi_{\alpha\beta}: V\times W\to k,\qquad \varphi_{\alpha\beta}\left(\sum_i a_ie_i, \sum_j b_jf_j\right)=a_\alpha b_\beta$$

容易验证 $\varphi_{\alpha\beta}$ 是一个双线性映射。由张量积的泛性质，$\varphi_{\alpha\beta}$ 定义了一个线性映射

$$\widetilde{\varphi_{\alpha\beta}}: V\otimes W\to k$$

因此

$$0=\widetilde{\varphi_{\alpha\beta}}(\sum_{i,j}c_{ij}e_i\otimes f_j)=c_{\alpha\beta}$$

选取不同的 α,β，得到所有 $c_{\alpha\beta}=0$。 $\square$

例 6.2.2. 设 $V=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}^3$。则 $V\otimes W\cong\mathbb{R}^6$。取 V 的标准基 $\{e_1,e_2\}$，W 的标准基 $\{f_1,f_2,f_3\}$。则 $V\otimes W$ 的基为：

$$\{e_1\otimes f_1, e_1\otimes f_2, e_1\otimes f_3, e_2\otimes f_1, e_2\otimes f_2, e_2\otimes f_3\}$$

这组基给出了同构 $\Phi:\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^6$。同理，我们有

$$\mathbb{R}^m\otimes\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^{mn}$$

例 6.2.3. 设 $V=M_{m\times n}(k)$ 为 $m\times n$ 矩阵空间，$W=M_{p\times q}(k)$ 为 $p\times q$ 矩阵空间。则 $V\otimes W$ 同构于分块矩阵空间 $M_{mp\times nq}(k)$。具体地，对于 $A\in V$, $B\in W$，$A\otimes B$ 对应于分块矩阵：

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B\end{bmatrix}$$

这称为 *Kronecker* 积。

例 6.2.4. 设 $V=\mathbb{R}[x]$ 为多项式空间，$W=\mathbb{R}[y]$ 为另一多项式空间。则 $V\otimes W\cong\mathbb{R}[x,y]$，即二元多项式空间。同构由

$$x^i\otimes y^j\mapsto x^iy^j$$

给出。

例 6.2.5. 设 V,W 是有限维线性空间，$Hom(V,W)$ 是 V 到 W 的线性映射构成的空间。则有自然的同构

$$Hom(V,W)\cong V^*\otimes W$$

设 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 是 V 的一组基，$\{e^1,\cdots,e^n\}$ 是 V^* 的对偶基。则这个同构将

$$f\mapsto\sum_{i=1}^n e^i\otimes f(e_i)$$

同构性质的证明留作练习。

张量积的概念可以推广到多个向量空间。设 $V_1,\dots,V_m$ 是域 k 上的向量空间。它们的张量积 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m$ 是一个向量空间，其中的向量满足如下的张量运算关系：

$$\begin{aligned}&v_1\otimes\cdots v_{i-1}\otimes(v_i+w_i)\otimes v_{i+1}\otimes\cdots v_m\\=&v_1\otimes\cdots v_{i-1}\otimes v_i\otimes v_{i+1}\otimes\cdots v_m+v_1\otimes\cdots v_{i-1}\otimes w_i\otimes v_{i+1}\otimes\cdots v_m\end{aligned}$$

$$v_1\otimes\cdots v_{i-1}\otimes(cv_i)\otimes v_{i+1}\otimes\cdots v_m=c\,v_1\otimes\cdots v_{i-1}\otimes v_i\otimes v_{i+1}\otimes\cdots v_m$$

这里 $v_i,w_i\in V_i, c\in k$。张量积 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m$ 可以类似通过 $V_1\times\cdots\times V_m$ 自由生成的向量空间的商空间得到，具体构造留给读者。

设 V_i 都是有限维线性空间，维数是 d_i。如果 $\{e_1^{(i)},\dots,e_{d_i}^{(i)}\}$ 是 V_i 的基，则

$$\{e_{j_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes e_{j_m}^{(m)}\mid 1\le j_i\le d_i, i=1,\dots,m\}$$

构成 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m$ 的一组基。因此我们得到维数公式

$$\dim(V_1\otimes\cdots\otimes V_m)=\prod_{i=1}^m\dim V_i$$

张量 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m$ 中的元素 A 可以通过上述基表达为

$$A=\sum_{\substack{1\le j_i\le d_i\\1\le i\le m}}a_{j_1j_2\dots j_m}e_{j_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes e_{j_m}^{(m)},\qquad a_{j_1j_2\dots j_m}\in k$$

注 6.2.1. 在取定基的情况下，张量 A 的信息完全通过系数 $\{a_{j_1j_2\dots j_m}\}$ 来刻画。当 $m=1$ 时，张量对应于向量；当 $m=2$ 时，张量对应于矩阵。由此可以看出张量是向量和矩阵向多个指标情况的推广。

多个向量空间的张量积也可以由两个空间张量积的构造得到。例如我们可以通过

$$(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\quad\text{或者}\quad V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$$

来构造 V_1,V_2,V_3 的张量积。容易验证张量积满足结合律：例如有自然同构

$$(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\cong V_1\otimes(V_2\otimes V_3)\cong V_1\otimes V_2\otimes V_3$$

由

$$(v_1\otimes v_2)\otimes v_3\mapsto v_1\otimes(v_2\otimes v_3)\mapsto v_1\otimes v_2\otimes v_3$$

给出。因此，我们可以无歧义地写作 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m$，而不需要括号。

例 6.2.6. 考虑三个向量空间 $V=\mathbb{R}^2, W=\mathbb{R}^3, U=\mathbb{R}^2$。取 V 的基 $\{e_1,e_2\}$, W 的基 $\{f_1,f_2,f_3\}$, U 的基 $\{g_1,g_2\}$。则 $V\otimes W\otimes U$ 的基为：

$$\{e_i\otimes f_j\otimes g_k\mid i=1,2;j=1,2,3;k=1,2\}$$

共有 $2\times3\times2=12$ 个基向量。

定义 6.2.5 设 $V_1, V_2, \ldots, V_m$ 和 W 是域 k 上的向量空间。一个映射

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m \to W$$

称为多重线性映射，如果对每个 $i = 1, 2, \ldots, m$ 和固定的 $v_j \in V_j$ $(j \neq i)$，由

$$v \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_m)$$

定义的映射 $V_i \to W$ 是线性的。

换句话说，f 在每个变量上单独都是线性的。如上类似的方法可以证明

命题 6.2.6 设 $V_1, \ldots, V_m, W$ 是域 k 上的向量空间。对于任意多重线性映射 $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_m \to W$，存在唯一的线性映射 $\tilde{\varphi} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_m \to W$，使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \cdots \times V_m \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\varphi"'] & V_1 \otimes \cdots \otimes V_m \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

即 $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \otimes$。

这个性质称为张量积的泛性质，可以看作是张量积的等价定义。

6.2.2 张量代数

定义 6.2.7 设 V 是域 k 上的向量空间。V 上的m 阶张量定义为：

$$T^m(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m\text{个}V}$$

其中我们约定 $T^0(V) = k$。

V 上的张量自然配备了一个乘法运算（张量积）：

$$T^r(V) \times T^s(V) \xrightarrow{\otimes} T^{r+s}(V)$$

定义为：

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_s) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_s$$

定义 6.2.8 V 上的张量在张量积 $\otimes$ 运算下构成一个代数，称为 V 的张量代数。

例 6.2.7. 设 $V = \mathbb{R}^2$，基为 $\{e_1, e_2\}$。则：

- *0* 阶张量：标量 $c \in \mathbb{R}$
- *1* 阶张量：向量 $ae_1 + be_2$

- *2 阶张量*：$ae_1\otimes e_1+be_1\otimes e_2+ce_2\otimes e_1+de_2\otimes e_2$
- *两个 1 阶张量可以做张量积乘法得到 2 阶张量*

$$(a_1e_1+a_2e_2)\otimes(b_1e_1+b_2e_2)=a_1b_1e_1\otimes e_1+a_1b_2e_1\otimes e_2+a_2b_1e_2\otimes e_1+a_2b_2e_2\otimes e_2$$

6.2.3 对称代数

定义 6.2.9 给定一个 m 元的置换 $\sigma\in S_m$，定义其在 $T^m(V)$ 上的置换变换

$$\sigma: T^m(V)\to T^m(V)$$
$$v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m\to v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(m)}$$

$A\in T^m(V)$ 称为是 m 阶对称张量，如果对任意置换 $\sigma\in S_m$，有

$$\sigma(A)=A$$

所有 m 阶对称张量构成的子空间记为 $\mathrm{Sym}^m(V)$。

设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基，则张量 $A\in T^m(V)$ 可以表示为

$$A=\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n}a_{i_1\cdots i_m}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{im}$$

则 A 是 m 阶对称张量当且仅当 $a_{i_1\cdots i_m}$ 的值关于指标是对称的

$$a_{i_1\cdots i_m}=a_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(m)}},\quad \forall\sigma\in S_m$$

例 6.2.8. *设 V 是 n 维线性空间，其一组基为 $\{e_1,\cdots,e_n\}$。则 2 阶张量*

$$A=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}e_i\otimes e_j$$

是对称张量当且仅当 a_{ij} 是对称矩阵。我们可以把它对应于一个 2 次多项式

$$A(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

类似地，我们可以把 m 阶对称张量 $A\in\mathrm{Sym}^m(V)$ 一一对应于一个 m 次多项式

$$A(x)=\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n}a_{i_1i_2\cdots i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{im}$$

由此可以计算维数

$$\dim\mathrm{Sym}^m(V)=\binom{n+m-1}{m}$$

定义 6.2.10 设 $A \in T^m(V)$ 是 m 阶张量。A 的对称化定义为：

$$\mathrm{Sym}(A) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in S_m} \sigma(A)$$

容易验证，对于任意 m 阶张量 A，它的对称化 $\mathrm{Sym}(A)$ 总是一个 m 阶对称张量。并且如果 $A \in \mathrm{Sym}^m(V)$ 已经是对称张量，则 $\mathrm{Sym}(A) = A$。

对称化的运算使得我们可以在对称张量上定义一个乘法结构 $\bullet$：

$$\mathrm{Sym}^r(V) \times \mathrm{Sym}^s(V) \to \mathrm{Sym}^{r+s}(V)$$

定义为

$$A \times B \mapsto A \bullet B = \mathrm{Sym}(A \otimes B)$$

定义 6.2.11 所有的对称张量在乘法 $\bullet$ 构成一个代数，称为对称代数。

由对称化的构造易知

$$A \bullet B = B \bullet A$$

因此对称代数是一个交换的代数，即乘法满足交换律。实际上，如果按照例子6.2.8的方式将对称张量与多项式对应起来，则对称代数即对应于我们熟知的多项式代数。

6.2.4 外代数

定义 6.2.12 $A \in T^m(V)$ 称为是 m 阶反对称张量，如果对任意置换 $\sigma \in S_m$，有

$$\sigma(A) = \mathrm{sgn}(\sigma)A$$

其中 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ 是置换 σ 的符号。所有 m 阶反对称张量的子空间记为 $\wedge^m(V)$。

例 6.2.9. *设 V 是 n 维线性空间，其一组基为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$。则 2 阶张量*

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_i \otimes e_j$$

是反对称张量当且仅当 a_{ij} 是反对称矩阵。我们可以把它对应于一个 2 次微分形式

$$A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$$

类似地，我们可以把 m 阶反对称张量 $A \in \wedge^m(V)$ 对应于一个 m 次微分形式

$$A(x) = \sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n} a_{i_1 i_2 \cdots i_m} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{im}$$

其中 $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$。

定义 6.2.13 设 $A \in T^m(V)$ 是 m 阶张量。A 的反对称化定义为:

$$\mathrm{Alt}(A) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma(A)$$

容易验证，对于任意 m 阶张量 A，它的反对称化 $\mathrm{Sym}(A)$ 总是一个 m 阶反对称张量。并且如果 $A \in \wedge^m(V)$ 已经是反对称张量，则 $\mathrm{Alt}(A) = A$。

反对称化的运算使得我们可以在对称张量上定义一个乘法结构 $\wedge$（称为外积）:

$$\wedge^r(V) \times \wedge^s(V) \to \wedge^{r+s}(V)$$

定义为

$$A \times B \mapsto A \wedge B = \mathrm{Alt}(A \otimes B)$$

定义 6.2.14 所有的反对称张量在外积 $\wedge$ 构成一个代数,称为外代数(也称为 Grassmann 代数)。

$\wedge^m V$ 也可以通过 $T^m(V)$ 的商空间得到。在 $T^m(V)$ 中定义等价关系:

$$v \otimes w \sim -w \otimes v$$

则

$$\wedge^m V = T^m(V)/\sim$$

在这个等价关系下，张量积即转化为外积。具体细节留给读者验证。

由反对称化的构造易知

$$A \wedge B = (-1)^{rs} B \wedge A, \quad A \in \wedge^r(V), B \in \wedge^s(V)$$

因此对称代数是一个分次交换的代数。实际上，如果按照例子6.2.9的方式将反对称张量与微分形式对应起来，则外代数即对应于在多元微积分中熟知的微分形式外积代数。

例 6.2.10. 对于任意 $v, w \in V$，有

$$v \wedge w = -w \wedge v \in \wedge^2 V$$

特别地，当 $w = v$ 时我们得到

$$v \wedge v = 0$$

命题 6.2.15 设 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 V 的一组基。则 $\bigwedge^k V$ 的一组基由所有形如

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$$

的外积组成。特别地,

$$\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}$$

例 6.2.11. 设 $V=\mathbb{R}^3$，基为 $\{e_1,e_2,e_3\}$。则：

- $\bigwedge^0 V=\mathbb{R}$，基为 $\{1\}$
- $\bigwedge^1 V=V$，基为 $\{e_1,e_2,e_3\}$
- $\bigwedge^2 V$，基为 $\{e_1\wedge e_2, e_1\wedge e_3, e_2\wedge e_3\}$
- $\bigwedge^3 V$，基为 $\{e_1\wedge e_2\wedge e_3\}$
- $\bigwedge^m V=0$ 对于 $m>3$

我们可以通过反交换关系计算外积，例如

$$e_1\wedge(e_2\wedge e_3)=-e_2\wedge(e_1\wedge e_3)=e_3\wedge(e_1\wedge e_2)=e_1\wedge e_2\wedge e_3$$

6.2.5 行列式

设 $T:V\to V$ 是线性映射。T 诱导外代数上的映射

$$\bigwedge^m T:\bigwedge^m V\to\bigwedge^m V$$

定义为：

$$\bigwedge^m T(v_1\wedge\cdots\wedge v_m)=T(v_1)\wedge\cdots\wedge T(v_m)$$

并线性扩展到整个 $\bigwedge^m V$。

设 $\dim V=n$。对于最高次外幂 $\bigwedge^n V$，由于它是 1 维的，映射 $\bigwedge^n T$ 一定是数乘：

$$\bigwedge^n T(\omega)=c\omega,\quad \forall\omega\in\bigwedge^n V$$

定义 6.2.16 线性映射 $T:V\to V$ 的行列式定义为标量 $\det T$，使得

$$\bigwedge^n T(\omega)=(\det T)\omega,\quad \forall\omega\in\bigwedge^n V$$

这个定义不依赖于基的选取，给出了行列式的一个内蕴定义。

设 $\{e_1,\ldots,e_n\}$ 是 V 的一组基，$T(e_j)=\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$。则 $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ 是 $\wedge^n V$ 的基。由

$$\begin{aligned}
&\bigwedge^n T(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)=T(e_1)\wedge\cdots\wedge T(e_n)\\
&=\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}e_{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_n=1}^n a_{i_n n}e_{i_n}\right)\\
&=\sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}e_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge e_{\sigma(n)}\\
&=\left(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\right)e_1\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}$$

得到

$$\det T=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

这正是行列式的组合定义公式。

6.2.6 Pfaffian

设 A 是一个 $m \times m$ 反对称矩阵。由

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^m \det A$$

知当 m 为奇数时，$\det A = 0$。当 $m = 2n$ 为偶数时，行列式是一个完全平方数

$$\det A = (\operatorname{Pf}(A))^2$$

这里 $\operatorname{Pf}(A)$ 称为 A 的 Pfaffian。我们这一节通过外代数来讨论 Pfaffian 的构造。

设 A 是 $2n \times 2n$ 的反对称矩阵。我们可以将 A 表示为 2 阶反对称张量：

$$\omega_A = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} a_{ij} e_i \wedge e_j = \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} a_{ij} e_i \wedge e_j$$

我们可以考虑它的 n 次外幂：

$$\omega_A^n = \underbrace{\omega_A \wedge \cdots \wedge \omega_A}_{n} \in \wedge^{2n} V$$

由于 $\bigwedge^{2n} V$ 是 1 维的，由 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n}$ 张成，我们可以写成

$$\frac{1}{n!}\omega_A^n = \operatorname{Pf}(A) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{2n}$$

这里的系数 $\operatorname{Pf}(A)$ 称为 A 的 Pfaffian。由定义：

$$\frac{1}{n!}\omega_A^n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} e_{i_1} \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \wedge e_{j_n}$$

由于外积的反交换性，只有那些 $(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n)$ 是 $(1, 2, \ldots, 2n)$ 的排列且满足特定条件的项对最终结果有贡献。我们得到 Pfaffian 可以表示为：

$$\operatorname{Pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} a_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

更常见的是将其写为：

$$\operatorname{Pf}(A) = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中求和跑遍所有将 $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ 划分为 n 个无序对 $\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_n, j_n\}$ 的方式，且 $i_k < j_k$，π 是相应的排列。

命题 6.2.17 设 A 是 $2n \times 2n$ 的反对称矩阵，则

$$\det(A) = \operatorname{Pf}(A)^2$$

这个命题通常是通过反对称矩阵的标准型来证明。我们用外代数给一个内蕴的证明。

证明: 考虑 $2n$ 维向量空间 V，设 $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$ 是 V 的一组基。定义线性映射

$$T_A : V \to V$$

其在基上的作用为

$$T_A(e_j) = \sum_{i=1}^{2n} a_{ij} e_i$$

考虑 T_A 在最高次外幂 $\bigwedge^{2n} V$ 上的作用。由于 $\bigwedge^{2n} V$ 是 1 维的，T_A 在其上的作用就是乘以一个标量，这个标量正是 $\det(T_A) = \det(A)$：

$$\bigwedge^{2n} T_A(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n}) = \det(A) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n}$$

考虑外代数上的算子：

$$\iota_{e_j} : \wedge^m V \to \wedge^{m-1} V$$

其在基上的作用为

$$\iota_{e_j}(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_m}) = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} \delta_{jk_r} e_{k_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{k_r}} \wedge \cdots \wedge e_{k_m}$$

容易验证，这些算子满足关系

$$\begin{aligned}\iota_{e_i}\iota_{e_j} &= -\iota_{e_j}\iota_{e_i} \\ \iota_{e_j}(\alpha \wedge \beta) &= (\iota_{e_j}\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (\iota_{e_j}\beta), \quad \alpha \in \wedge^r V, \beta \in \wedge^s V\end{aligned}$$

并且

$$T_A(e_j) = -\iota_{e_j}\omega_A$$

考虑如下的表达式

$$\left(\iota_{e_1}\iota_{e_2}\cdots\iota_{e_n} e^{\lambda\omega_A}\right) \wedge \left(\iota_{e_{n+1}}\iota_{e_{n+2}}\cdots\iota_{e_{2n}} e^{-\lambda\omega_A}\right) \tag{†}$$

这里 λ 是一个常参数，且

$$e^{\lambda\omega_A} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}\omega_A^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda^j}{j!}\omega_A^j$$

注意到这里是有限求和，因为当 $j > n$ 时 $\omega_A^j \in \wedge^{2j} V = 0$。

利用 ι_{e_j} 的性质，容易得到

$$\iota_{e_1}\iota_{e_2}\cdots\iota_{e_n} e^{\lambda\omega_A} = (\lambda^n(\iota_{e_1}\omega_A) \wedge (\iota_{e_2}\omega_A) \wedge \cdots \wedge (\iota_{e_n}\omega_A) + O(\lambda^{n-1})) \wedge e^{\lambda\omega_A}$$

这里 $O(\lambda^{n-1})$ 是关于 λ 的次数不超过 $n-1$ 的表达式。代入(†)得

$$\begin{aligned}(\dagger) =& (\lambda^n(\iota_{e_1}\omega_A) \wedge (\iota_{e_2}\omega_A) \wedge \cdots \wedge (\iota_{e_n}\omega_A) + O(\lambda^{n-1})) \wedge e^{\lambda\omega_A} \\ & \wedge (\lambda^n(\iota_{e_{n+1}}\omega_A) \wedge (\iota_{e_{n+2}}\omega_A) \wedge \cdots \wedge (\iota_{e_{2n}}\omega_A) + O(\lambda^{n-1})) \wedge e^{-\lambda\omega_A} \\ =& \lambda^{2n}(\iota_{e_1}\omega_A) \wedge \cdots \wedge (\iota_{e_n}\omega_A) \wedge \iota_{e_{n+1}}\omega_A) \wedge \cdots \wedge (\iota_{e_{2n}}\omega_A) + O(\lambda^{2n-1}) \\ =& \lambda^{2n} T_A(e_1) \wedge T_A(e_2) \wedge \cdots \wedge T_A(e_{2n}) + O(\lambda^{2n-1}) \\ =& \lambda^{2n} \det(A) e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{2n} + O(\lambda^{2n-1})\end{aligned}$$

另一方面,

$$e^{\lambda\omega_A} = \frac{\lambda^n}{n!}\omega_A^n + O(\lambda^{n-1}) = \lambda^n \operatorname{Pf}(A) e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{2n} + O(\lambda^{n-1})$$

代入(†)得

$$(\dagger) = \lambda^{2n}(\operatorname{Pf}(A))^2 e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{2n} + O(\lambda^{2n-1})$$

比较上述两个计算的首项 λ^{2n} 项的系数，即得

$$\det(A) = (\operatorname{Pf}(A))^2$$

□

例 6.2.12. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$。则 $\omega_A = ae_1 \wedge e_2$，因此

$$\operatorname{Pf}(A) = a$$

另一方面,

$$\det(A) = a^2 = \operatorname{Pf}(A)^2$$

例 6.2.13. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$。则

$$\omega_A = ae_1 \wedge e_2 + be_1 \wedge e_3 + ce_1 \wedge e_4 + de_2 \wedge e_3 + ee_2 \wedge e_4 + fe_3 \wedge e_4$$

通过外代数计算:

$$\omega_A^2 = 2(af - be + cd)e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

所以 $\operatorname{Pf}(A) = af - be + cd$。而直接计算得

$$\det(A) = (af - be + cd)^2 = \operatorname{Pf}(A)^2$$

第七章　线性微分方程

本章讨论线性代数在微分方程中的应用。我们主要研究线性常微分方程，这类方程广泛出现在各类科学理论与工程技术中，并且可以利用矩阵方法求解和分析。

7.1　微分方程的基本概念

7.1.1　常微分方程与偏微分方程

微分方程描述的是未知函数与其导数之间的关系。求解微分方程就是要找出一组满足相应关系的函数。例如

$$\frac{dy}{dt} = 2y$$

是一个描述变量为 t 的函数 $y(t)$ 的微分方程。它的一个解由下式给出

$$y = e^{2t}$$

直接验证可知该函数满足上述微分方程关系：

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}) = 2(e^{2t})$$

微分方程的解可能不是唯一的。例如，对于任意常数 C，$y = Ce^{2t}$ 都是上述方程 $\frac{dy}{dt} = 2y$ 的解。同时，解也可能不存在。例如，微分方程

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -1 - t^2 - y^2$$

就不存在实值函数 $y(t)$ 的解。解的存在性和唯一性问题在微分方程研究中扮演了极为重要的角色。

常微分方程（ODE）是关于依赖于单个自变量的未知函数的方程。上面的例子就是一个 ODE。通常，一个 ODE 可能涉及几个都依赖于同一个变量的未知函数。例如，考虑一个质量为 m 的粒子在力 $\vec{\mathbf{F}} = (F_x, F_y, F_z)$ 的作用下在空间中运动，该力依赖于空间中的位置 (x, y, z)。根据牛顿第二定律，粒子的轨迹是以下方程的解：

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z \end{cases}$$

这是一个关于单时间变量 t 的三个函数 $\{x(t), y(t), z(t)\}$ 的 ODE。

偏微分方程（PDE）是关于依赖于多个变量的未知函数的方程。例如，热传导方程

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

是一个关于两个变量 t 和 x 的偏微分方程。它描述了固体中热量在位置 x 和时间 t 的传导规律。

我们这一章节专注于讨论常微分方程（ODE）。

如果只有一个未知函数，那么一个方程就足够了。如果有两个或更多未知函数，则需要一个方程组。我们在上面已经看到了一个运动粒子的例子。另一个例子是 Lotka-Volterra（或捕食者-被捕食者）方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\alpha x-\beta xy \\ \dfrac{dy}{dt}=\delta xy-\gamma y \end{cases} \qquad \alpha,\beta,\delta,\gamma \text{ 是常数}$$

它描述了捕食者和被捕食者系统的动力学：函数 $x(t)$ 描述被捕食者的种群密度，$y(t)$ 描述捕食者的种群密度。这样的一组方程被称为微分方程组。

7.1.2 线性和非线性方程

定义 7.1.1 考虑一个关于未知函数 $y(t)$ 的常微分方程

$$F(t,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

这里 $y'=\frac{dy}{dt}$，以及 $y^{(n)}=(\frac{d}{dt})^n y$ 表示 y 的 n 阶导数。如果 F 关于 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 是线性的，则上述方程称为线性的；否则称为非线性的。

例如

$$y''-y'+ty+t^2=0$$

是一个线性微分方程，而

$$y'+y^2=0$$

是一个非线性微分方程。线性方程比较容易研究，并且通常可以得到显式解。非线性方程更复杂，并表现出更奇特的现象。

7.1.3 方程的阶

微分方程的阶是方程中出现的最高阶导数的阶数。例如，

$$(y')^2+ty=0$$

是一个一阶非线性方程，而

$$y'''+ty'+y=0$$

是一个三阶线性方程。

定义 7.1.2 一般的 n 阶线性 ODE 具有以下形式

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y + b(t) = 0$$

其中 $a_i(t)$ 和 $b(t)$ 是 t 的已知函数。如果 $b(t) = 0$，则称为齐次的。如果函数 $a_0(t), \cdots, a_n(t)$ 不依赖于 t（即是常数函数），则称它具有常系数。

例如，

$$y'' + y = 0$$

是一个具有常系数的二阶齐次线性方程。

命题 7.1.3 任何 ODE 都可以等价地由一阶 ODE 方程组来描述。

证明: 考虑以下 n 阶 ODE

$$F(t, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

这可以改写为以下一阶微分方程组

$$\begin{cases} F(t, y, y_1, \cdots, y_{n-1}, y'_{n-1}) = 0 \\ y' = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \vdots \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \end{cases}$$

显然，求解这个一阶微分方程组等价于求解原 n 阶方程。 □

例 7.1.1. 如下的 n 阶齐次线性方程

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}$$

等价为一个线性系统

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y}$$

其中

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

通常，任何线性常微分方程都可以化为形式为

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y} + B(t)$$

其中 $\vec{y}$ 是未知函数的列向量，$A(t)$ 和 $B(t)$ 分别是可能依赖于变量 t 的矩阵和列向量。

7.2 常系数线性微分方程

我们这一节考虑常系数线性微分方程。这样的方程总可以化为如下形式的一阶微分方程

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\cdot\vec{y} + \vec{b}(t)$$

其中 $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$ 是未知函数列，$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 是一个 $n\times n$ 常数矩阵，$\vec{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$ 是一个通常依赖于变量 t 的列向量。

7.2.1 一阶线性微分方程组

齐次线性方程组

我们首先考虑齐次情况，即 $\vec{b}(t) = 0$。方程

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y}$$

形式上与标量方程 $\frac{dy}{dt} = ay$ 一样。事实上，它可以与标量方程类似的方式求解。

定理 7.2.1 给定任意列向量 $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$，初值问题

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y}, \qquad \vec{y}(0) = \vec{y}_0$$

存在唯一解，由下式显式给出

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}_0$$

这里指数矩阵见5.5.6节。

证明: 显然 $\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}_0$ 满足微分方程

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$$

以及初始条件 $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$。

设 $\vec{\tilde{y}}(t)$ 是另一个满足初值条件 $\vec{\tilde{y}}(0) = \vec{y}_0$ 的解。那么

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\vec{\tilde{y}}(t)\right) = -e^{-tA}A\vec{\tilde{y}} + e^{-tA}\frac{d}{dt}\vec{\tilde{y}} = -e^{-tA}A\vec{\tilde{y}} + e^{-tA}A\vec{\tilde{y}} = 0$$

这说明 $e^{-tA}\vec{\tilde{y}}$ 是常值向量。在 $t=0$ 时，

$$e^{-tA}\vec{\tilde{y}}\Big|_{t=0} = \vec{\tilde{y}}(0) = \vec{y}_0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{\tilde{y}}(t) = e^{tA}\vec{y}_0$$

这证明了唯一性。

□

非齐次线性方程组

下面我们考虑常系数非齐次线性方程

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A \cdot \vec{y} + \vec{b}(t)$$

其中 A 是一个常数 $n \times n$ 矩阵，

$$\vec{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

是一个可能随 t 变化的列向量。

我们可以使用如上类似的方法来求解。在两边乘以 e^{-tA}，方程变为

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}\vec{y}) = e^{-tA}\vec{b}(t)$$

对两边积分，我们得到

$$e^{-tA}\vec{y} - \vec{y}_0 = \int_0^t e^{-sA}\vec{b}(s)ds$$

这里 $\vec{y}_0 = \vec{y}(0)$ 是 $\vec{y}$ 在 $t = 0$ 时的初始值。由此得

$$\vec{y} = e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)ds$$

定理 7.2.2 给定任意列向量 $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$，初值问题

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{b}(t), \qquad \vec{y}(0) = \vec{y}_0$$

存在唯一解，由下式显式给出

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)ds$$

7.2.2 n 阶线性方程

现在我们讨论如何求解 n 阶常系数线性方程。方程形式为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = b(t)$$

其中 a_i 是常数。这个方程可以等价地化为如下一阶微分方程组

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A \cdot \vec{y} + \vec{b}(t)$$

其中

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

n 阶齐次方程

我们首先讨论齐次情况，即 $b(t)=0$。可以证明，方程的解总是可以表示为形如

$$t^m e^{\lambda_i t}$$

的函数的某种线性组合，其中 λ_i 是 A 的特征值。具体而言，考虑 A 的特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & & 0 \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & \lambda + a_1 \end{bmatrix} = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n$$

由此可以自然引入如下的定义

定义 7.2.3 方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0$$

的特征多项式定义为

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

我们解释如何使用特征多项式来求解方程。设特征多项式为 $P(\lambda)$，它可以因式分解为

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

其中 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$ 是 $P(\lambda)$ 的所有不同根，重数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_k$。微分方程可以写成

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) y = 0$$

或等价地

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^{m_1}\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k} y = 0$$

命题 7.2.4 以下函数

$$\{t^{i_1}e^{\lambda_1 t}\}_{0\le i_1 < m_1}, \quad \{t^{i_2}e^{\lambda_2 t}\}_{0\le i_2 < m_2}, \quad \cdots, \quad \{t^{i_k}e^{\lambda_k t}\}_{0\le i_k < m_k}$$

是

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0$$

的 n 个线性无关解。

证明：考虑 $t^{i_1}e^{\lambda_1 t}$，其中 $0 \le i_1 < m_1$。由于微分算子 $\frac{d}{dt} - \lambda_1, \cdots, \frac{d}{dt} - \lambda_k$ 彼此交换，我们有

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\left(t^{i_1}e^{\lambda_1 t}\right) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k}\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^{m_1}\left(t^{i_1}e^{\lambda_1 t}\right)$$

因此只需证明 $\left(\frac{d}{dt}-\lambda_1\right)^{m_1}\left(t^{i_1}e^{\lambda_1 t}\right)=0$。利用公式

$$\left(\frac{d}{dt}-\lambda_1\right)(tf(t))=t\left(\frac{d}{dt}-\lambda_1\right)f(t)+f(t)$$

和条件 $i_1<m_1$，得

$$\left(\frac{d}{dt}-\lambda_1\right)^{m_1}\left(t^{i_1}e^{\lambda_1 t}\right)=\sum_{j=0}^{i_1}\binom{m_1}{j}t^{i_1-j}\left(\frac{d}{dt}-\lambda_1\right)^{m_1-j}e^{\lambda_1 t}=0$$

因为 $\left(\frac{d}{dt}-\lambda_1\right)e^{\lambda_1 t}=0$。 □

通解可以通过上述 n 个解的线性组合得到。在有复根 $\alpha\pm i\beta$ 且重数为 m 的情况下，上述命题中对应的解为

$$\{e^{(\alpha+i\beta)t},te^{(\alpha+i\beta)t},\cdots,t^{m-1}e^{(\alpha+i\beta)t}\}\quad 和\quad \{e^{(\alpha-i\beta)t},te^{(\alpha-i\beta)t},\cdots,t^{m-1}e^{(\alpha-i\beta)t}\}$$

此时如果我们想用实函数表示解，可以等价地把上述解通过不同的基重新表达为

$$\{\cos(\beta t)e^{\alpha t},t\cos(\beta t)e^{\alpha t},\cdots,t^{m-1}\cos(\beta t)e^{\alpha t}\}\quad 和\quad \{\sin(\beta t)e^{\alpha t},t\sin(\beta t)e^{\alpha t},\cdots,t^{m-1}\sin(\beta t)e^{\alpha t}\}$$

为了唯一确定一个解，我们需要施加一个初始条件，例如在 $t=0$。根据我们对一阶线性微分方程的一般讨论，初始条件（在 $t=0$）是指定 $\vec{y}$ 在 $t=0$ 的值。由于

$$\vec{y}=\begin{bmatrix}y\\y_1\\\vdots\\y_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\y'\\\vdots\\y^{(n-1)}\end{bmatrix},$$

要施加的初始条件是 y 的小于 n 阶的各阶导数的值

$$y(0)=c_0,\qquad y'(0)=c_1,\qquad \cdots,\qquad y^{(n-1)}(0)=c_{n-1}$$

例 7.2.1. *求解方程*

$$y'''-3y'+2y=0$$

满足初始条件 $y(0)=3,\ y'(0)=-4,\ y''(0)=7$。

解. 特征多项式是

$$\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

根据命题7.2.4，通解由下式给出

$$a_1e^t+a_2te^t+a_3e^{-2t}$$

由初始条件得到关于 a_i 的线性方程

$$\begin{cases}a_1+a_3=3\\a_1+a_2-2a_3=-4\\a_1+2a_2+4a_3=7\end{cases}$$

解得 $a_1=1, a_2=-1, a_3=2$。因此满足所需初始条件的解是

$$y(t)=(1-t)e^t+2e^{-2t}$$

□

例 7.2.2. 求解方程

$$y''-2y'+5y=0$$

满足初始条件 $y(0)=2, y'(0)=0$。

解. 特征多项式

$$\lambda^2-2\lambda+5$$

有复根 $\lambda=1\pm 2i$。通解是

$$y=a_1e^t\cos 2t+a_2e^t\sin 2t$$

初始条件要求

$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_1+2a_2=0 \end{cases}$$

解得 $a_1=2, a_2=-1$。因此满足所需初始条件的解是

$$y(t)=(2\cos 2t-\sin 2t)e^t$$

□

n 阶非齐次方程

现在我们讨论非齐次情况

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=b(t)$$

其中 a_i 是常数。首先观察到，如果 y_1 和 y_2 是两个解，那么它们的差 $\tilde{y}=y_1-y_2$ 满足齐次方程

$$\tilde{y}^{(n)}+a_1\tilde{y}^{(n-1)}+\cdots+a_n\tilde{y}=0$$

设 $u(t)$ 是非齐次方程的一个特解，即满足

$$u^{(n)}+a_1u^{(n-1)}+\cdots+a_nu=b(t)$$

那么通解可以写成

$$y=u+\tilde{y}$$

其中 $\tilde{y}$ 是齐次方程

$$\tilde{y}^{(n)}+a_1\tilde{y}^{(n-1)}+\cdots+a_n\tilde{y}=0.$$

的通解。根据我们在上一节的讨论，这样的 $\tilde{y}$ 可以用特征多项式求解。

为了找到一个特解，我们将方程写成一阶微分方程组的形式

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{b}(t)$$

其中

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

根据定理7.2.2，可以得到如下一个特解

$$\vec{u}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)ds$$

注 7.2.1. 我们可以把这个矩阵公式具体写成关于某个函数 G 的如下表达式

$$u(t) = \int_0^t G(t-s)b(s)ds$$

这个 G 称为格林函数。

还有另一种方法称为“常数变易法”，是说如果我们知道齐次方程解的一组基，就可以写出一个特解。这种方法适用于一般的变系数线性方程，将在7.3.2节讨论。

在实际例子中，我们可以根据方程的形式来猜测一个特解。

例 7.2.3. 求方程

$$y'' + y = \cos 2t.$$

的一个特解。

解. 考虑上述方程的复数形式

$$z'' + z = e^{2it}, \qquad y = \mathrm{Re}(z)$$

从这个形式很自然地尝试

$$z(t) = ae^{2it}$$

代入方程，我们找到

$$(-3a)e^{2it} = e^{2it} \qquad \Rightarrow \qquad a = -\frac{1}{3}$$

因此我们找到一个特解 $y = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{3}e^{2it}\right) = -\frac{1}{3}\cos 2t$。 □

例 7.2.4. 求方程

$$y'' + y = \cos t$$

的一个特解。

解. 考虑复数方程

$$z'' + z = e^{it}$$

如果我们尝试与之前相同的形式 $z(t) = ae^{it}$，发现无论 a 取什么值都不可能是解。原因是 i 是特征多项式的一个根。我们接下来尝试

$$z = ate^{it}$$

发现 $a = -\frac{i}{2}$ 可以。因此找到一个特解

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(-ite^{it}\right) = \frac{1}{2}t\sin t$$

□

7.2.3 极限行为

我们讨论常系数齐次线性方程组

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$$

的解在 $t \to \infty$ 的极限行为。

引理 7.2.5 设 A, B 是两个方阵且 $A = PBP^{-1}$。则

$$e^A = Pe^BP^{-1}$$

证明： 由

$$A^k = (PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1}$$

知

$$e^A = \sum_{k\geq 0}\frac{A^k}{k!} = \sum_{k\geq 0}P\left(\frac{B^k}{k!}\right)P^{-1} = P\left(\sum_{k\geq 0}\frac{B^k}{k!}\right)P^{-1} = Pe^BP^{-1}$$

□

给定方阵 A，设其 Jordan 标准型为

$$A = P\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{bmatrix}P^{-1}, \quad \text{其中} \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

这里 λ_i 是 A 的特征值（可能是复数），P 是一个可逆矩阵（在复特征值的情况下是复值的）。记

$$A = P(D+N)P^{-1}$$

其中 $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_2,\ldots,\lambda_l,\ldots,\lambda_l)$ 是 Jordan 型的对角部分，而

$$N=\begin{bmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_l \end{bmatrix},\quad \text{其中}\quad N_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

是 Jordan 型的次对角部分。观察到 N 是幂零的

$$N^n=0$$

且 D,N 交换

$$DN=ND$$

由此可得

$$e^{tA}=Pe^{t(D+N)}P^{-1}=Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}$$

考虑中间的两项 e^{tD} 和 e^{tN}。由于 D 是对角矩阵，

$$e^{tD}=\mathrm{diag}(e^{t\lambda_1},\ldots,e^{t\lambda_1},e^{t\lambda_2},\ldots,e^{t\lambda_2},\ldots,e^{t\lambda_l},\ldots,e^{t\lambda_l})$$

对于幂零矩阵 N，我们有

$$e^{tN}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{N^i}{i!}t^i \quad (\text{因为对于 } i\geq n,\ N^i=0)$$

这是一个 t 的多项式。这给出了计算 $e^{tD}e^{tN}$，从而计算 e^{tA} 的方法。

在 A 可对角化的情况下，即 $N=0$，我们有

$$A=P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}P^{-1}$$

此时

$$e^{tA}=P\begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}P^{-1}$$

作为一个应用，我们有以下结果

命题 7.2.6 假设 A 的所有特征值的实部都是负的，那么方程

$$\frac{d\vec{y}}{dt}=A\vec{y}$$

的任何一个解 $\vec{y}(t)$，都满足

$$\lim_{t\to+\infty}\vec{y}(t)=0$$

换句话说，所有解最终都会趋向原点。在这种情况下，原点称为汇点或吸引子。

证明: 我们可以将 $\vec{y}$ 写成

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}_0$$

由 Jordan 分解，我们有

$$e^{tA} = Pe^{tD}\left(I + tN + \cdots + \frac{t^{n-1}N^{n-1}}{(n-1)!}\right)P^{-1}$$

这里

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的所有特征值（可能重复）。根据假设，

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \qquad \forall \lambda_i$$

因此当 $t \to +\infty$ 时 $e^{t\lambda_i}$ 指数衰减到零。我们得

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tD}\left(I + tN + \cdots + \frac{t^{n-1}N^{n-1}}{(n-1)!}\right) = 0$$

故

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} e^{tA}\vec{y}_0 = 0$$

□

对于实数方阵 A，我们也可以考虑实矩阵的 Jordan 标准型。例如，对于一个 2×2 矩阵 A 具有复特征值 $\lambda = \alpha \pm i\beta$，则它可以通过一个实可逆矩阵共轭为实 Jordan 标准型

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

对于更大的矩阵，如果 A 作为复矩阵是可对角化的，那么存在一个可逆实矩阵 P 使得

$$A = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \begin{bmatrix} \alpha_m & -\beta_m \\ \beta_m & \alpha_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}P^{-1}$$

其中 λ_i 是实特征值，$\alpha_j \pm i\beta_j$ 是复特征值对。

二维系统示例

我们通过如下的二维系统来说明极限行为的一些主要现象

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$$

其中 $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$，$A$ 是一个 2×2 常数矩阵。设

$$A = PJP^{-1}$$

其中 J 是实 Jordan 标准型。我们可以使用线性变换重新定义未知函数

$$\vec{\tilde{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

那么微分方程组等价变为

$$\frac{d\vec{\tilde{y}}}{dt} = J\vec{\tilde{y}}$$

因此我们不妨假设 A 已经是实 Jordan 标准型。

注意 $\vec{y} = 0$ 总是一个解。我们下面详细讨论 A 可对角化的情况。

• **情况 I**: A 是具有实特征值的对角矩阵

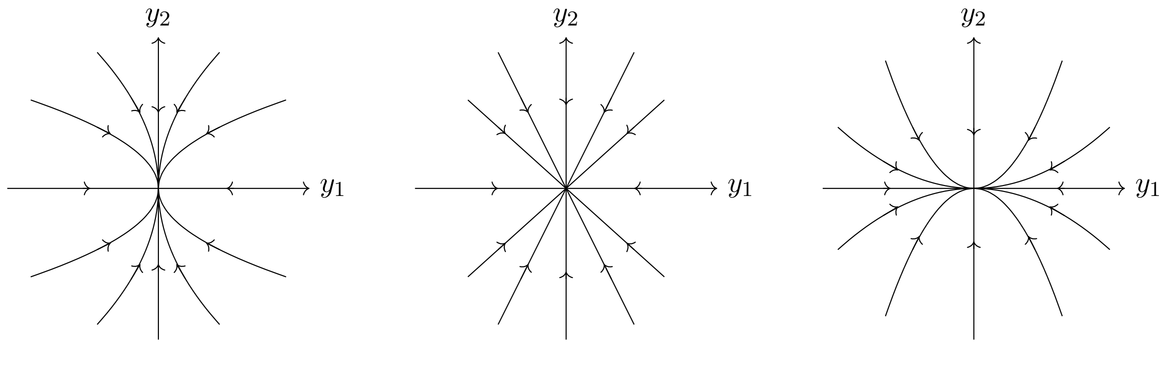
$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

此时解的形式为

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

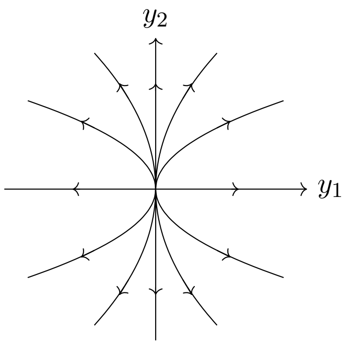
假设两个 $\lambda_i \neq 0$，因此两个 y_i 都可以随着时间变化。我们在 $y_1 - y_2$ 平面上绘制解，箭头指向 t 增加的方向。那么我们有以下情况

- $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$：所有解最终在 $t \to +\infty$ 时流向原点。原点称为“汇点”。

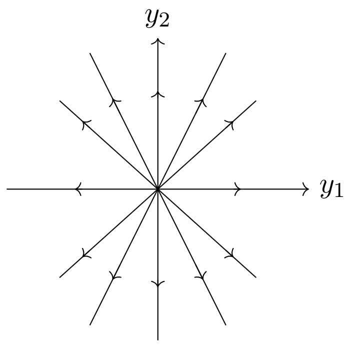


$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\qquad$ $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ $\qquad$ $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

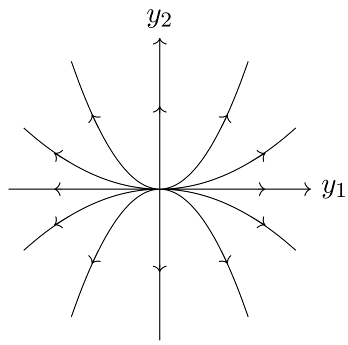
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$：所有解在 $t \to -\infty$ 时回流到原点。原点称为“源点”。



$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

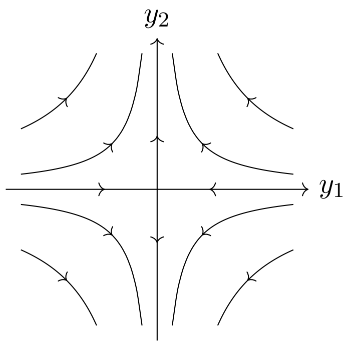


$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

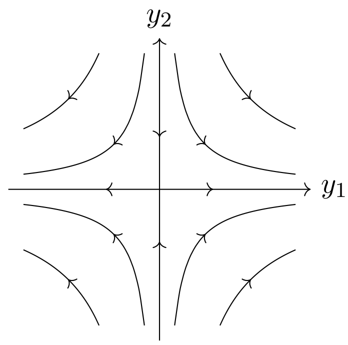


$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ 或 $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$：原点称为“鞍点”。



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

例如，在 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ 的情况下，解

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

- 当 $y_2(0) = 0$ 时，将沿 y_1 轴流向原点，
- 当 $y_1(0) = 0$ 时，将沿 y_2 轴从原点流出，
- 当 $y_1(0) \neq 0, y_2(0) \neq 0$ 时，

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\infty \end{bmatrix} \qquad \text{当} \qquad t \to +\infty$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \pm\infty \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{当} \qquad t \to -\infty$$

- **情况 II**：A 有复特征值 $\lambda = \alpha + i\beta$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

考虑复函数

$$z = y_1 + iy_2$$

则矩阵方程

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$$

转化为单个复函数方程

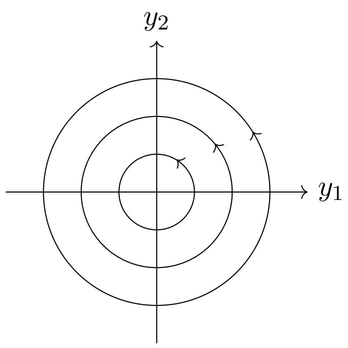
$$\frac{dz}{dt} = \lambda z$$

易知通解为

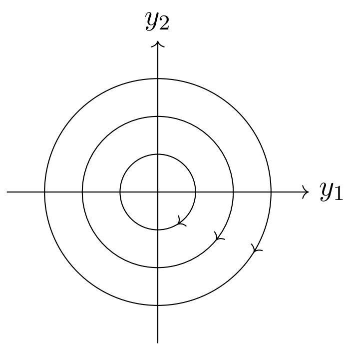
$$z(t) = e^{t\lambda} z(0)$$

将 (y_1, y_2) 视为复平面，我们有以下情况

- $\alpha = 0, \beta > 0$：解是圆。原点的平衡点称为“中心”：其他解的轨迹是同心圆。
- $\alpha = 0, \beta < 0$：解是圆（方向相反）。

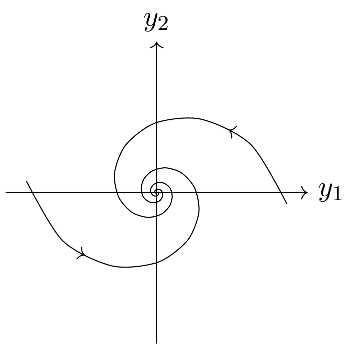


$\alpha = 0, \beta > 0$

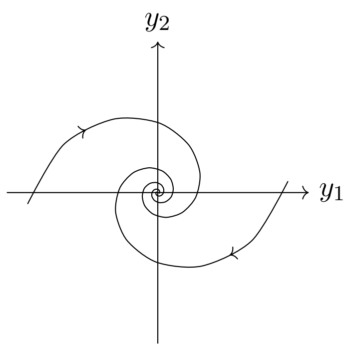


$\alpha = 0, \beta < 0$

- $\alpha < 0, \beta > 0$ 或 $\alpha < 0, \beta < 0$：解是螺旋线趋向原点。原点的平衡点称为“稳定焦点”。

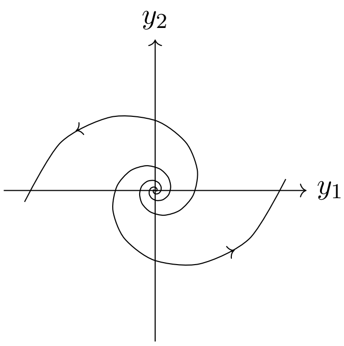


$\alpha < 0, \beta > 0$

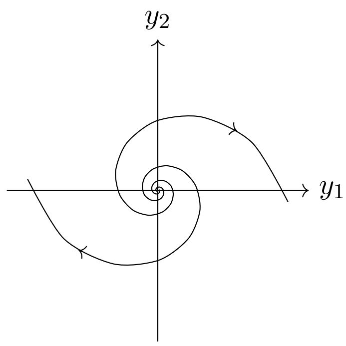


$\alpha < 0, \beta < 0$

- $\alpha > 0, \beta > 0$ 或 $\alpha > 0, \beta < 0$：解是螺旋线远离原点。原点的平衡点称为“不稳定焦点”。



$\alpha > 0, \beta > 0$



$\alpha > 0, \beta < 0$

7.3 变系数线性微分方程

我们现在讨论变系数线性微分方程组

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$$

其中矩阵 $A(t)$ 不再是常数，而是可以随 t 连续变化。

7.3.1 路径排序指数

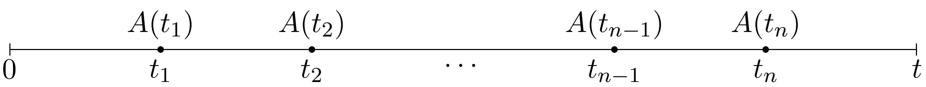
首先考虑齐次的情况

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\vec{y}$$

由于 $A(t)$ 可能随 t 变化，指数 e^{tA} 不再是方程的解

$$\frac{d}{dt}(e^{tA(t)}) \neq A(t)e^{tA(t)}$$

尽管如此，我们仍然可以找到适用于这种情况的指数函数，称为路径排序指数。



我们首先考虑以下表达式

$$P_n(t) = \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 A(t_n)A(t_{n-1}) \cdots A(t_1)$$

或等价地

$$P_n(t) = \int_{0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n \le t} dt_1 \cdots dt_n A(t_n)A(t_{n-1}) \cdots A(t_1)$$

$P_n(t)$ 的矩阵乘法操作可以视为首先在时间 t_1 作用 $A(t_1)$，然后在稍后时间 t_2 作用 $A(t_2)$，等等，直到在最后时间作用 $A(t_n)$。这种矩阵乘法按时间 t 排序，并在所有此有序时间区域上积分。观察到

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = A(t)P_{n-1}(t)$$

定义 7.3.1 我们定义路径排序指数

$$\mathcal{P}\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\le t} dt_1\cdots dt_n A(t_n)\cdots A(t_1)$$

其中 $P_0(t) = I$（单位矩阵）。

为了说明该级数的收敛性，假设

$$\|A(s)\| \le M, \quad \forall \quad 0\le s\le t$$

那么

$$\|P_n(t)\| \le \int_{0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\le t} dt_1\cdots dt_n \|A(t_n)\|\cdots\|A(t_1))\| \le \frac{t^n M^n}{n!}$$

这意味着此时路径排序指数的级数是绝对收敛的。

命题 7.3.2 路径排序指数满足

(1) 如果 $A(t) = A$ 是常数矩阵，那么

$$\mathcal{P}\exp\left(\int_0^t A ds\right) = e^{tA}$$

(2) $\mathcal{P}\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)\Big|_{t=0} = I$

(3) 以下微分方程成立

$$\frac{d}{dt}\left[\mathcal{P}\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)\right] = A(t)\mathcal{P}\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)$$

(4) $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)$ 是可逆的。它的逆由下式给出（时间反向排序）

$$\mathcal{P}(t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\le t} dt_1\cdots dt_n A(t_1)\cdots A(t_n)$$

证明： (1) 当 $A(t) = A$ 是常数矩阵时，

$$P_n(t) = \int_{0\le t_1\le\cdots\le t_n\le t} dt_1\cdots dt_n A^n = \frac{t^n}{n!}A^n$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}\exp\left(\int_0^t A ds\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n = e^{tA}$$

(2) 是显然的。

(3) 由 $\frac{d}{dt}P_n(t) = A(t)P_{n-1}(t)$ 得

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right) = \frac{d}{dt}\sum_{n\ge 0}P_n(t) = \sum_{n\ge 1}\frac{d}{dt}P_n(t) = A(t)\sum_{n\ge 1}P_{n-1}(t) = A(t)\mathcal{P}\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)$$

(4) 设 $\mathscr{P}(t)=\mathcal{P}\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)$ 并设

$$\Omega(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\le t}dt_1\cdots dt_n A(t_1)\cdots A(t_n)$$

类似计算知道 $\Omega(t)$ 满足方程

$$\frac{d\Omega(t)}{dt}=-\Omega(t)A(t),\quad \Omega(0)=I$$

那么

$$\frac{d}{dt}(\Omega(t)\mathscr{P}(t))=-(\Omega(t)A(t))\mathscr{P}(t)+\Omega(t)(A(t)\mathscr{P}(t))=0$$

因此 $\Omega(t)\mathscr{P}(t)$ 与 t 无关。由于 $\Omega(0)\mathscr{P}(0)=I$，我们对所有 t 有 $\Omega(t)=\mathscr{P}(t)^{-1}$。

□

这个命题说明路径排序指数确实可以被视为指数 e^{tA} 在 A 依赖于 t 的情况下的推广。

定理 7.3.3 给定任意列向量 $\vec{y}_0\in\mathbb{R}^n$，初值问题

$$\frac{d}{dt}\vec{y}=A(t)\vec{y}+\vec{b}(t),\quad \vec{y}(0)=\vec{y}_0$$

存在唯一解，由下式显式给出

$$\vec{y}=\mathscr{P}(t)\vec{y}_0+\mathscr{P}(t)\int_0^t\mathscr{P}^{-1}(s)\vec{b}(s)ds$$

这里 $\mathscr{P}(t)=\mathcal{P}\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)$。

证明：根据命题7.3.2

$$\frac{d}{dt}\mathscr{P}(t)=A(t)\mathscr{P}(t),\quad \frac{d}{dt}\mathscr{P}(t)^{-1}=-\mathscr{P}(t)^{-1}A(t)$$

将原方程两边乘以 $\mathscr{P}^{-1}(t)$，

$$\mathscr{P}^{-1}(t)\frac{d\vec{y}}{dt}=\mathscr{P}^{-1}(t)A(t)\vec{y}+\mathscr{P}^{-1}(t)\vec{b}(t)$$

整理得

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{P}^{-1}(t)\vec{y})=\mathscr{P}^{-1}(t)\vec{b}(t)$$

两边对 t 积分

$$\mathscr{P}^{-1}(t)\vec{y}=\vec{y}_0+\int_0^t\mathscr{P}^{-1}(s)\vec{b}(s)ds$$

即得

$$\vec{y}=\mathscr{P}(t)\vec{y}_0+\mathscr{P}(t)\int_0^t\mathscr{P}^{-1}(s)\vec{b}(s)ds$$

这里 $\vec{y}_0=\vec{y}|_{t=0}$ 是 $\vec{y}$ 在 $t=0$ 时的初始值。 □

该解的长期行为通常变得复杂，取决于 $A(t)$ 如何随 t 变化。

注 7.3.1. 如果我们将 $\mathscr{P}(t)$ 写成 n 个列向量

$$\mathscr{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) & \mathbf{y}_2(t) & \cdots & \mathbf{y}_n(t) \end{pmatrix},$$

那么 $\{\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_n\}$ 构成齐次方程

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y}$$

的 n 个线性无关解。线性无关性源于 $\mathscr{P}(t)$ 的可逆性。这 n 个线性无关解的基也称为基本解。

7.3.2 常数变易法

最后我们讨论 n 阶线性方程

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t)$$

当系数 $a_i(t)$ 不再是常数时的情况。与之前讨论类似，通解由一个特解和齐次方程

$$\bar{y}^{(n)} + a_1(t)\bar{y}^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\bar{y} = 0$$

的通解之和给出。我们可以通过例如路径排序指数获得齐次方程的通解。这里我们介绍一个寻找特解的技巧，称为常数变易法。

设 $\tilde{y}_1(t), \cdots, \tilde{y}_n(t)$ 是齐次方程

$$\bar{y}^{(n)} + a_1(t)\bar{y}^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\bar{y} = 0$$

的 n 个线性无关解。常数变易法是寻求非齐次方程具有如下形式的特解

$$y(t) = c_1(t)\tilde{y}_1(t) + \cdots + c_n(t)\tilde{y}_n(t)$$

其中 $c_i(t)$ 是 t 的函数，假定系数函数 $c_i(t)$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\bar{y}_i^{(m)}(t) = 0, \qquad \text{对于} \quad 0 \le m \le n-2$$

则

$$\begin{aligned} y^{(m)}(t) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\bar{y}_i^{(m)}(t), \qquad 0 \le m \le n-1 \\ y^{(n)}(t) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\bar{y}_i^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\bar{y}_i^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

将其代入原方程，并利用 $\bar{y}_i$ 是齐次方程的解，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\bar{y}_i^{(n-1)}(t) = b(t)$$

因此可以通过找到满足以下条件的 $c_i(t)$ 来获得特解

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i'(t)\bar{y}_i^{(m)}(t) = 0, \qquad 0 \le m \le n-2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i'(t)\bar{y}_i^{(n-1)}(t) = b(t) \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ 可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1 & \cdots & \tilde{y}_n \\ \tilde{y}_1' & \cdots & \tilde{y}_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{y}_1^{(n-1)} & \cdots & \tilde{y}_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

这可以使用 Cramer 法则求解

$$c_i'(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)}$$

其中

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 & \cdots & \tilde{y}_n \\ \tilde{y}_1' & \cdots & \tilde{y}_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{y}_1^{(n-1)} & \cdots & \tilde{y}_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

以及

$$W_i(t) = \det \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 & \cdots & \tilde{y}_{i-1} & 0 & \tilde{y}_{i+1} & \cdots & \tilde{y}_n \\ \tilde{y}_1' & \cdots & \tilde{y}_{i-1}' & 0 & \tilde{y}_{i+1}' & \cdots & \tilde{y}_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \tilde{y}_1^{(n-1)} & \cdots & \tilde{y}_{i-1}^{(n-1)} & b(t) & \tilde{y}_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & \tilde{y}_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

即第 i 列被替换为 $(0, 0, ..., b(t))^T$ 后的行列式。

注 7.3.2. $W(t)$ 称为是函数 $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \cdots, \tilde{y}_n$ 的 *Wronskian* 行列式。

因此，非齐次方程的特解可以通过下式找到

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i(t) \int^t \frac{W_i(s)}{W(s)} ds$$

例 7.3.1. 考虑非齐次方程

$$y'' + y = f(t)$$

由齐次方程的特征多项式

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm i$$

我们得到齐次方程 $\tilde{y}'' + \tilde{y} = 0$ 的两个独立解

$$\tilde{y}_1 = \cos t, \qquad \tilde{y}_2 = \sin t$$

它们的 *Wronskian* 行列式是

$$W = \det \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

以及

$$\begin{cases} W_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & \sin t \\ f(t) & \cos t \end{bmatrix} = -\sin t \cdot f(t) \\ W_2 = \det \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & f(t) \end{bmatrix} = \cos t \cdot f(t) \end{cases}$$

由常数变易法得到系数

$$\begin{cases} c_1'(t) = \frac{W_1}{W} = -\sin(t) f(t) \\ c_2'(t) = \frac{W_2}{W} = \cos(t) f(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c_1(t) = -\int_0^t \sin(s) f(s) ds, \quad c_2(t) = \int_0^t \cos(s) f(s) ds$$

由此得到一个特解

$$\begin{aligned} y_p(t) =& c_1(t)\tilde{y}_1(t) + c_2(t)\tilde{y}_2(t) \\ =& -\cos t \int_0^t \sin(s) f(s) ds + \sin t \int_0^t \cos(s) f(s) ds \\ =& \int_0^t (\sin t \cos s - \cos t \sin s) f(s) ds \\ =& \int_0^t \sin(t-s) f(s) ds \end{aligned}$$

例 7.3.2. 考虑方程

$$ty'' - (t+1)y' + y = t^2$$

两边除以 t 得到标准形式

$$y'' - \frac{t+1}{t} y' + \frac{1}{t} y = t$$

齐次方程的两个独立解是

$$\tilde{y}_1(t) = e^t, \qquad \tilde{y}_2(t) = t+1$$

它们的 *Wronskian* 行列式是

$$W = \det \begin{bmatrix} e^t & t+1 \\ e^t & 1 \end{bmatrix} = e^t \cdot 1 - (t+1) \cdot e^t = -te^t$$

以及

$$\begin{cases} W_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & t+1 \\ t & 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 - (t+1) \cdot t = -t(t+1) \\ W_2 = \det \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ e^t & t \end{bmatrix} = e^t \cdot t - 0 \cdot e^t = te^t \end{cases}$$

由常数变易法得到系数

$$c_1'(t) = \frac{W_1}{W} = \frac{-t(t+1)}{-te^t} = (t+1)e^{-t}, \quad c_2'(t) = \frac{W_2}{W} = \frac{te^t}{-te^t} = -1$$

$$\Rightarrow c_1(t) = \int (t+1)e^{-t}dt = -(t+2)e^{-t} + C_1, \quad c_2(t) = \int -1dt = -t + C_2$$

取 $C_1 = C_2 = 0$ 得到一个特解

$$\begin{aligned} y_p(t) =& c_1(t)\tilde{y}_1(t) + c_2(t)\tilde{y}_2(t) \\ =& [-(t+2)e^{-t}]e^t + (-t)(t+1) \\ =& -(t+2) - t(t+1) \\ =& -t^2 - 2t - 2 \end{aligned}$$

7.4 习题

1. 设 A 为方阵。证明
$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}\, A}$$

2. 找到方阵 A, B 使得
$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = \lim_{t\to+\infty} e^{tB} = 0, \quad 但 \quad \lim_{t\to+\infty} \|e^{t(A+B)}\| = \infty$$

3. (a) 求线性方程
$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y}$$
的通解，其中 A 是矩阵
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$
(b) 原点的平衡点是哪种类型?

4. 设 $\vec{y}_1(t), \cdots, \vec{y}_k(t)$ 是线性方程组
$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A(t)\vec{y}$$
的解，其中 $A(t)$ 是 $n\times n$ 取值矩阵的连续函数。假设 $\{\vec{y}_1(0), \cdots, \vec{y}_k(0)\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关向量。证明在时间 $t>0$，$\{\vec{y}_1(t), \cdots, \vec{y}_k(t)\}$ 仍然是线性无关的。

5. 设 $A(t)$ 是 $n\times n$ 取值矩阵的可微函数。证明
$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = \int_0^1 e^{sA(t)}A'(t)e^{(1-s)A(t)}ds \quad 其中 \quad A'(t) = \frac{dA(t)}{dt}$$
这称为 Duhamel 公式。

6. 求
$$y'''' + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0$$
满足初始条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = 0$，$y''(0) = -2$，$y'''(0) = -1$ 的解。

7. 求
$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2+1}$$
的通解。

8. 求
$$t^3y''' - 3t^2y'' + 6ty' - 6y = f(t)$$
的一个特解。

第八章　矩阵群

8.1　群的概念

8.1.1　群的定义

定义 8.1.1　设 S 是一个集合。S 上一个二元运算指的是一个集合的映射 (记为 $\circ$)

$$\circ : S \times S \to S$$

1) 二元运算 $\circ$ 称为是结合的 (associative)，如果

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad \forall a, b, c \in S$$

2) 二元运算 $\circ$ 称为是交换的 (commutative)，如果

$$a \circ b = b \circ a, \quad \forall a, b \in S$$

3) 元素 $e \in S$ 称为是单位元 (或称恒等元)(identity element)，如果

$$e \circ a = a \circ e = a, \quad \forall a \in S$$

在研究具体的例子时，我们常常用其他符号例如 $+, \cdot$ 代替 $\circ$.

命题 8.1.2　设 $(S, \circ)$ 是一个集合上的二元运算, 则 S 中最多只有一个单位元。

例 8.1.1. 实数上的加法运算 $(\mathbb{R}, +)$ 和乘法运算 $(\mathbb{R}, \cdot)$ 都是交换和结合的。其中加法的单位元是 $e = 0$，乘法的单位元是 $e = 1$。

例 8.1.2. 考虑向量空间 $\mathbb{R}^3$，叉积 $\times$ 定义了一个二元运算

$$\vec{v}, \vec{w} \to \vec{v} \times \vec{w}, \quad \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

可以验证，这个二元运算不是结合的。

定义 8.1.3 带二元运算的集合 $(G,\cdot)$ 称为一个群 (group)，如果以下条件满足

1) 结合律：二元运算 $\cdot$ 是结合的。

2) 单位元：G 中存在单位元，记为 1_G，或简写为 1。也常记为 e。

3) 可逆性：对 G 中任一元素 a，存在 b 使得 $a\cdot b = b\cdot a = 1$。b 称为 a 的逆元 (inverse)。

二元运算 $\cdot$ 称为群 G 中的乘积 (product)。

- 如果 $\cdot$ 是交换的，称 G 为一个 Abel 群 (Abelian group)。
- 记 $|G|$ 为 G 中元素个数，称为 G 的阶 (order)。如果阶有限，称 G 为有限群。否则称无限群。

命题 8.1.4 设 $(G,\cdot)$ 是一个群，则 G 中任一元素的逆元是唯一的。

我们把 a 的逆元记为 a^{-1}。由上述命题，这个记号是没有歧义的。

例 8.1.3. 设 $k=\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$，$+$ 为 k 上的加法，$\cdot$ 为 k 上的乘法。$k^*=k-\{0\}$。

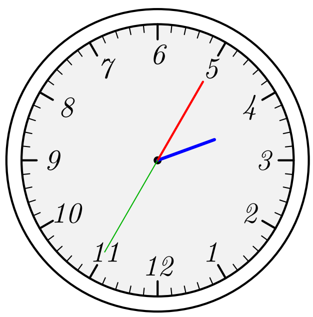
- $(k,+)$ 是一个 *Abel* 群，单位元是 0。
- $(k,\cdot)$ 不是一个群。若 $k=\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$，则 $(k^*,\cdot)$ 是一个 *Abel* 群，单位元是 1。

例 8.1.4. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 模 n 同余类。设 $k\in\mathbb{Z}$，记 $\bar{k}$ 为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 中的同余等价类。加法 $+$ 和乘法 $\cdot$ 定义为

$$\bar{a}+\bar{b}:=\overline{a+b},\quad \bar{a}\cdot\bar{b}:=\overline{a\cdot b}$$

其中 $a+b$ 与 $a\cdot b$ 为 a,b 在 $\mathbb{Z}$ 中的加和乘积。

- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ 为 *Abel* 群，阶为 n，称为 n 阶循环群。我们熟知的一个例子是 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$



- 记 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ 为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 在乘法运算 $\cdot$ 下可逆元的集合。易知

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*=\{\bar{m}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|(m,n)=1\}$$

其中 (m,n) 为 m,n 的最大公约数。$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ 在乘法运算 $\cdot$ 是一个 *Abel* 群，阶为欧拉函数 $\varphi(n)$。特别，如果 $n=p$ 为质数，则 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-\{\bar{0}\}$ 是阶为 $p-1$ 的有限 *Abel*

群。做为一个简单的应用，考虑把 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 中所有元素乘起来，并把逆元相互配对，我们得到

$$(p-1)! \equiv p-1 \mod p$$

即 p 总是整除 $(p-1)!+1$ 这个并不是很显然的结论。

例 8.1.5. 四元群 *(quaternion group)* Q_8 由八个元素组成 $Q_8 = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$。乘法结构由

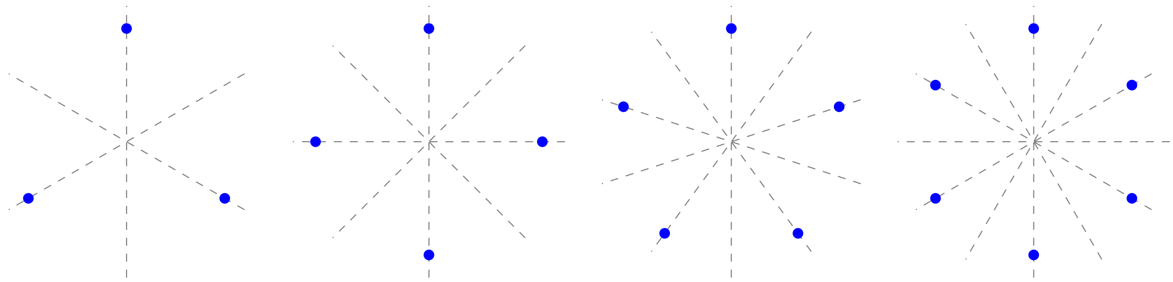
$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{i}\,\mathrm{j}\,\mathrm{k} = -1$$

完全决定。可以推出 $\mathrm{i}\,\mathrm{j} = -\mathrm{j}\,\mathrm{i} = \mathrm{k}, \mathrm{j}\,\mathrm{k} = -\mathrm{k}\,\mathrm{j} = \mathrm{i}, \mathrm{k}\,\mathrm{i} = -\mathrm{i}\,\mathrm{k} = \mathrm{j}$。$Q_8$ 是非 *Abel* 群。

例 8.1.6. 二面体群 *(dihedral group)* 是平面上正 n 边形 $(n > 2)$ 的对称群。它由 n 个旋转和 n 个反射所组成，几何上通常记为 D_n[1]。

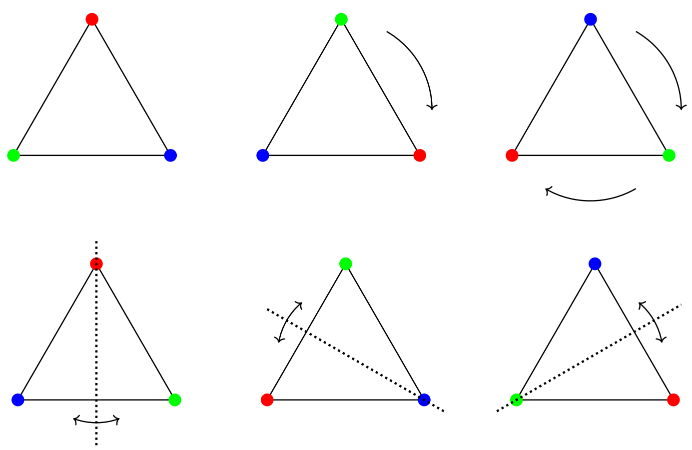
正 n 边形的 n 个旋转如下图所示 (其中第一个为恒等元，视作一个平凡的转动)

正 n 边形的 n 个反射如下图所示，其中虚线轴为反射轴。



$n=3$ $n=4$ $n=5$ $n=6$

D_n 共有 $2n$ 个元素。例如，D_3 的 3 个旋转和 3 个反射如下图所示



[1]代数上有时候也记为 D_{2n}。本书采用几何上的记号。

现在我们说明 D_n 在变换的复合下形成一个 $2n$ 阶的群。记 r 为逆时针旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 度，则 $r^n=1$ 且

$$\{1,r,r^2,\cdots,r^{n-1}\}$$

标记了所有的旋转。选定一个反射轴，记 s 为对应的反射，$s^2=1$。

可以验证，如下复合

$$\{s,rs,r^2s,\cdots,r^{n-1}s\}$$

标记了所有的反射。于是 D_n 的 $2n$ 个元素为如下的变换

$$D_n=\{1,r,r^2,\cdots,r^{n-1},s,rs,r^2s,\cdots,r^{n-1}s\}$$

我们说明复合 sr 也是 D_n 中的元素。实际上，通过图形可以验证

$$srs=r^{-1}, \quad \text{或} \quad sr=r^{n-1}s$$

由此可以证明 D_n 在变换的复合下封闭，于是形成一个群。比如

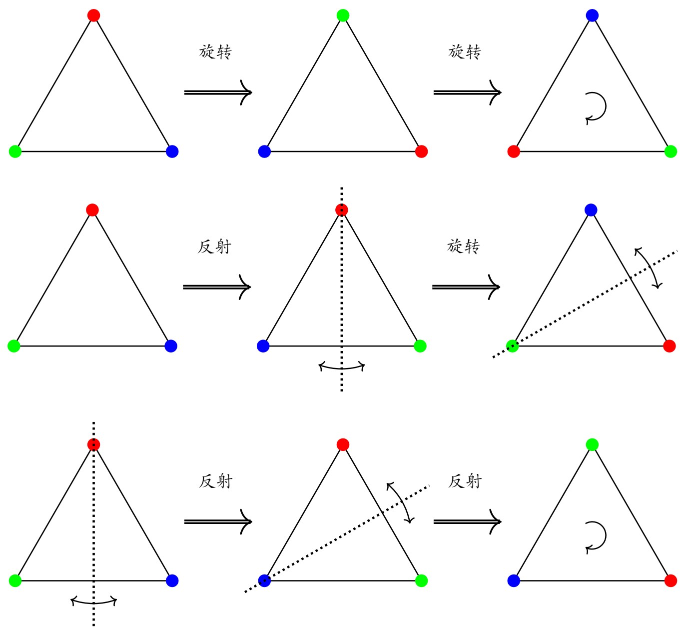
$$(r^as)(r^bs)=r^ar^{-b}ss=r^{a-b}$$

再利用关系 $r^n=1$，即 $r^{-1}=r^{n-1}$，将 r^{a-b} 简化为 D_n 中标准元素的样子。

我们通常记为

$$D_n=\langle r,s|r^n=1,s^2=1,sr=r^{n-1}s\rangle$$

表示 D_n 是由两个元素 r,s 生成，满足关系 $r^n=1,s^2=1,sr=r^{n-1}s$。



定义 8.1.5 设 G 是一个群。G 的一个子集 H 称为 G 的一个子群 (subgroup)，如果满足下述条件

1) 乘法封闭：对任意 $a,b\in H$ 都有 $ab\in H$。

2) 求逆封闭：对任意 $a\in H$ 都有 $a^{-1}\in H$。

例 8.1.7. $H=\{e\}$ 或者 G 称为 G 的平凡子群。

例 8.1.8. 设 m 为正整数，则 $m\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的子群。

命题 8.1.6 设 H_i 是 G 的子群，$i\in I$。则 $\bigcap_{i\in I} H_i$ 是 G 的子群。

定义 8.1.7 设 G 是群，H 是 G 的子群。给定 $g\in G$，定义它关于 H 的左陪集 (left coset) 为

$$gH := \{g\cdot h | h\in H\}\subset G$$

所有左陪集的集合记为 G/H。类似，定义其关于 H 的右陪集 (right coset) 为

$$Hg := \{h\cdot g | h\in H\}\subset G$$

所有右陪集的集合记为 $H\backslash G$。

命题 8.1.8 设 H 是群 G 的子群。则任意两个左陪集 aH, bH 必定满足如下两个条件之一：

- $aH\cap bH=\varnothing$
- $aH=bH$

该命题对右陪集类似成立。

证明: 假设 $aH\cap bH$ 非空。存在 $h_1,h_2\in H$ 使得 $ah_1=bh_2$。则 $\forall h\in H$，

$$ah = ah_1h_1^{-1}h = bh_2h_1^{-1}h\in bH$$

因此 $aH\subset bH$。同理可证 $bH\subset aH$。由此知 $aH=bH$。 □

定理 8.1.9. [Lagrange] G 是一个有限群，H 是 G 的子群。则 $|H|$ 整除 $|G|$ 且

$$|G| = |H||G/H|$$

证明: 由于 $g\in gH$，G 中任一元素都属于 H 的一个左陪集。由上述命题知，G 可以表示为互不相交的左陪集的并，而每个左陪集的元素个数都是 H。因此 $|G|=|H||G/H|$。 □

定义 8.1.10 设 g 为群 G 中的一个元素。若存在正整数 n 使得 $g^n=1$，则满足此式的最小正整数叫做 g 的阶 (order)，称 g 是有限阶元素。如果不存在这样的正整数，称 g 是无限阶元素。

特别的，如果 G 是有限群，则 G 中任一元素均为有限阶元素。

定义 8.1.11 记 $\langle g\rangle$ 是群 G 中包含 g 的最小子群。

- 若 g 是阶为 n 的有限阶元素，则 $\langle g\rangle = \{1, g, g^2, \cdots, g^{n-1}\}$。
- 若 g 是无限阶元素，则 $\langle g\rangle = \{1, g, g^{-1}, g^2, g^{-2}, \cdots\}$ 为无限群。

如果存在元素 g 使得 $G = \langle g\rangle$，我们称 G 是一个循环群 (cyclic group)，g 是 G 的一个生成元 (generator)。

这个定义可以推广如下：设 A 是群 G 的一个子集，记 $\langle A\rangle$ 是群 G 中包含 A 的最小子群。容易验证，$\langle A\rangle$ 由所有可以表达为如下乘积

$$a_1a_2\cdots a_k, \quad a_i \in A \text{ 或 } a_i^{-1} \in A$$

的元素构成。如果 $\langle A\rangle = G$，我们称群 G 是由 A 中的元素生成的。

命题 8.1.12 设 G 是有限群。则 G 中任一元素 g 的阶都是 $|G|$ 的因子，即 $g^{|G|} = 1$。

证明: 由 Lagrange 定理即得。 □

例 8.1.9. *设 a, n 为互素的两个正整数，φ 为 Euler 函数。则 Euler 定理给出*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

一个证明方法如下：考虑群 $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$，则 $|G| = \varphi(n)$。由条件，$\bar{a} \in G$。我们推出

$$(\bar{a})^{\varphi(n)} = \bar{1}, \quad \text{即} \quad a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

例 8.1.10. *二面体群 $D_n = \langle r, s | r^n = 1, s^2 = 1, sr = r^{n-1}s\rangle$ 是由两个元素 r, s 生成的。r 生成了一个 n 阶的循环子群，s 生成了一个 2 阶循环子群。*

命题 8.1.13 循环群的子群是循环群。

证明: 练习。 □

8.1.2 置换群

定义 8.1.14 给定一个集合 X，它的一个置换指的是一个一一映射

$$f : X \to X$$

记 X 上所有的置换的集合为 S_X。

设 $f, g \in S_X$ 为两个置换，则它们的复合映射

$$f \circ g : X \to X$$

也是一个置换，记 $f \circ g \in S_X$。S_X 在映射的复合运算下形成一个群，称为 X 的置换群。其中 f 逆元 f^{-1} 为 f 的逆映射。若 X 为 n 个元素的集合，标记为

$$X = \{1, 2, \cdots, n\},$$

我们把对应的置换群记为 S_n。我们记 S_n 中的一个元素 σ 为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

σ 表示将 k 变成 i_k 的置换。乘积 $\alpha\beta$ 表示先作用 β 置换，再作用 α 置换。例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

S_n 的阶为 $n!$，即为所有 n 阶排列的数目。

命题 8.1.15 设 G 是一个群，$g \in G$。定义如下 G 到 G 的两个映射

$$L_g : G \to G, \quad h \to gh \qquad 以及 \quad R_g : G \to G, \quad h \to hg$$

则 L_g, R_g 分别是两个 G 上的置换。G 是 Abel 群当且仅当 $\forall g \in G, L_g = R_g$。

证明：练习。 □

设 $\sigma \in S_n$ 是置换群的某个元素。如果 σ 把其中 k 个元素 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 映射成 $i_2, i_3, \cdots, i_k, i_1$，而保持其他元素不动，我们称 σ 是一个长度为 k 的轮换，并把 σ 标记为另外一种简化方式

$$\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_k)$$

例如 $\sigma = (123)$ 表示为 $1, 2, 3 \to 2, 3, 1$，其他元素不变的一个置换。σ 的标记方法不唯一，易知

$$(i_1 i_2 \cdots i_k) = (i_2 \cdots i_k i_1)$$

任意一个置换总可以表示为一些轮换的乘积，如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (1)(24)(365) = (24)(365)$$

其中 (1) 表示的是一个恒等置换，我们可以省略不记。置换的逆通过轮换也可以很容易的表达。容易看出，群元素乘积的逆是各个元素的逆的乘积，但是改变乘积的先后顺序

$$g = g_1 g_2 \cdots g_k, \quad g^{-1} = g_k^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1^{-1}$$

因此我们只需要计算一个轮换的逆。可以验证，

$$\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_{k-1} i_k), \quad \sigma^{-1} = (i_k i_{k-1} \cdots i_2 i_1)$$

例如，对 $g = (24)(365)$，我们有 $g^{-1} = (563)(42) = (356)(24)$。

长度为 2 的轮换称为一个对换。例如，(34) 表示把 3 和 4 对换，其他元素不变。一个重要的观察是每个轮换均可以表示为一些对换的乘积。例如

$$(i_1 i_2 \cdots i_k) = (i_1 i_k)(i_1 i_{k-1}) \cdots (i_1 i_2)$$

但是这种表达方式是不唯一的，例如

$$(123) = (13)(12) = (12)(23)$$

总而言之，S_n 中的元素总是可以表示成一些对换的乘积。虽然这个表达法不是唯一的，但是这个表达法里包含的对换个数的奇偶性是确定不变的，称为该置换的奇偶性 (parity)。这个关于奇偶性的结论可以证明如下：定义一个映射

$$\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}, \quad \sigma \to \prod_{i<j} \mathrm{sgn}(\sigma(j) - \sigma(i))$$

这里我们重复用了同一个记号 sgn。其中上式右边里对一个非零实数

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

一个等价的描述如下：考虑 n 个变元的多项式

$$P = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

对 $\sigma \in S_n$ 和一个 n 元多项式 $f(x_1, \cdots, x_n)$，我们定义 $\sigma(f)$ 为如下 n 元多项式

$$\sigma(f) = f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

则

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \frac{\sigma(P)}{P}$$

对任意的两个置换 α, β，由

$$\mathrm{sgn}(\alpha\beta) = \frac{\alpha(\beta(P))}{P} = \frac{\alpha(\beta(P))}{\beta(P)} \frac{\beta(P)}{P} = \frac{\alpha(P)}{P} \frac{\beta(P)}{P}$$

在上面的推导中，我们利用了 $\frac{\alpha(\beta(P))}{\beta(P)} = \frac{\alpha(P)}{P}$ (容易验证)。我们得出映射 sgn 的如下关键性质

$$\mathrm{sgn}(\alpha\beta) = \mathrm{sgn}(\alpha)\,\mathrm{sgn}(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in S_n$$

观察到，若 $\sigma = (ij)$ 是一个对换，则 $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$。因此，对一般的元素 σ，假设 σ 表达为

$$\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_k$$

其中 α_i 均为对换。则由 sgn 的性质知

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma_1) \cdots \mathrm{sgn}(\sigma_k) = (-1)^k,$$

即 k 的奇偶性与 σ 的表达方式无关。

定义 8.1.16 我们定义交错群 A_n 为 S_n 中所有的偶置换。

A_n 是 S_n 的一个子群，并且 S_n 关于 A_n 只有两个左陪集（或者右陪集）：偶置换和奇置换。

8.1.3 群同态和同构

定义 8.1.17 设 G 和 H 是两个群。映射 $f : G \to H$ 称为一个群同态 (homomorphism)，如果

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \forall a, b \in G$$

即 f 保持群之间的乘法结构。此外，如果 f 为单射或满射，则 f 分别称为单同态或满同态。如果 f 既是单同态又是满同态，则称 f 是同构 (isomorphism)。

两个群称为是同构的，如果它们之间存在一个同构的映射。容易验证，群的同构是一个等价关系。同构的群可以看成是同一个结构给出的不同标记，通常可以理解为是同样的群。观察到，

命题 8.1.18 设 $f : G \to H$ 是一个群同态。则

- f 保持单位元：$f(1_G) = 1_H$。
- f 保持逆元：$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}, \forall g \in G$。

例 8.1.11. 嵌入映射 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 定义了一个实数加法群到复数加法群的单同态。

例 8.1.12. 指数映射

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad r \to e^r$$

给出了加法群 $(\mathbb{R}, +)$ 到乘法群 $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ 的同态。利用欧拉公式，这个指数映射可以推广到复数

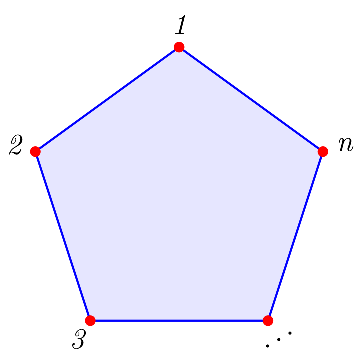
$$\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot), \quad z \to e^z$$

例 8.1.13. 设 G 是一个循环群，则 G 同构与 $\mathbb{Z}$ 或者 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，n 为某个正整数。

例 8.1.14. 乘法群 $\{\pm 1\}$ 与加法群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同构。

例 8.1.15. $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ 定义了置换群 S_n 到乘法群 $\{\pm 1\}$ 的满同态。

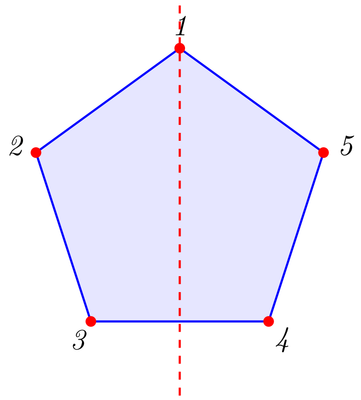
例 8.1.16. 考虑平面正 n 边形的对称群二面体群 D_n。我们把正 n 边形的 n 的顶点分别标记为 $\{1, 2, \cdots, n\}$，如下图示



对 D_n 中的每个元素 g，g 的作用给出了顶点的一个置换，于是定义了置换群 S_n 中的一个元素，记为 $\rho(g)$。例如，对于 r 逆时针旋转 $\frac{2\pi}{n}$，我们有

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

又例如，对沿着如下虚线的反射 σ



我们有

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

可以验证，

$$\rho : D_n \to S_n$$

定义了一个单同态，于是 D_n 可以看作是 S_n 的子群。当 $n = 3$ 时，$\rho : D_3 \to S_3$ 是一个群同构。

8.1.4 群作用和轨道

群在集合上的作用

定义 8.1.19 设 X 是一个集合，S_X 是 X 的置换群。群 G 在集合 X 上一个作用 (action) 指的是一个群同态

$$\rho : G \to S_X$$

如果 ρ 是单同态，称群作用是忠实的 (faithful)。

给定一个群 G 在集合 X 上的作用 $\rho : G \to S_X$，则 G 中的每一个元素 g 给出一个置换

$$\rho(g) : X \to X$$

群同态的条件可以表示为

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

为了简化记号方便，给定 $g \in G, x \in X$，我们用

$$g \cdot x \quad 或 \quad gx$$

表示 X 上的置换 $\rho(g)$ 作用在元素 x 上得到的 X 中的元素。

群在集合上的作用可以等价地描述为一个集合的映射

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \to g \cdot x$$

满足如下的群同态条件（“结合律”）

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1(g_2 \cdot x), \quad \forall g_1, g_2 \in G, x \in X$$

例 8.1.17. *置换群 S_n 及交错群 A_n 作用在集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上。*

例 8.1.18. *3 维空间中转动生成的群 $\mathrm{SO}(3)$ 作用在以原点为圆心的单位球面上。*

例 8.1.19. *几何图形的对称群自然给出一个群作用到几何对象上，例如，二面体群 D_n 作用在平面正 n 变形的顶点集上，给出群同态 $D_n \to S_n$。*

例 8.1.20. *考虑群的左乘作用 $L : G \to S_G, g \to L_g$。这里 L_g 对应于 G 上的置换*

$$Lg : G \to G, \quad h \to gh$$

L 给出了一个群同态:

$$L_{g_1}(L_{g_2} h) = L_{g_1 g_2} h, \quad \forall g_1, g_2 \in G, h \in H$$

等价于群乘法的结合律

$$g_1(g_2 h) = (g_1 g_2) h, \quad \forall g_1, g_2 \in G, h \in H$$

于是 L 给出了群 G 在其自身集合 G 上的作用，称为 G 的左正则表示。

类似的，群的右作用 $R_{g^{-1}} : G \to G, h \to hg^{-1}$ 也给出了群 G 在其自身集合上的作用 (为什么需要 g^{-1}?)，称为 G 的右正则表示。

例 8.1.21. *设 G 为一个群。给定 $g \in G$，我们定义 g 的共轭作用为*

$$\mathrm{Ad}_g : G \to G, \quad h \to ghg^{-1}$$

Ad_g 是一个 G 的置换。我们得到一个映射

$$\mathrm{Ad} : G \to S_G, \quad g \to \mathrm{Ad}_g .$$

对任意的元素 $g_1, g_2 \in G, h \in G$

$$\mathrm{Ad}_{g_1}(\mathrm{Ad}_{g_2} h) = \mathrm{Ad}_{g_1}(g_2 h g_2^{-1}) = g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1} = (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} = \mathrm{Ad}_{g_1 g_2} h$$

即

$$\mathrm{Ad}_{g_1} \mathrm{Ad}_{g_2} = \mathrm{Ad}_{g_1 g_2}, \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

这说明 Ad 是一个群同态，给出了 G 在其自身集合上的作用，称为 G 的共轭表示。

共轭作用有另一个好的性质：给定 $g \in G$，其给出的共轭作用

$$\mathrm{Ad}_g : G \to G, \quad h \to ghg^{-1}$$

是群 G 到 G 本身的一个同态 (为什么？)。特别的，如果 H 是 G 的一个子群，则

$$\mathrm{Ad}_g(H) = gHg^{-1}$$

也是 G 的一个子群，称为与 H 共轭的子群。

群作用的轨道

定义 8.1.20 设群 G 作用在集合 X 上，$x \in X$ 为 X 中的一个元素。X 中的如下子集

$$\mathrm{orb}(x) := \{g \cdot x | g \in G\} \subset X$$

称为 G 过 x 的轨道 (orbit)，记为 $\mathrm{orb}(x)$。我们也简记为 Gx。G 的子集

$$\mathrm{Stab}(x) := \{g \in G | gx = x\}$$

组成 G 的一个子群，称为 x 的稳定子群 (stabilizer)。

$\mathrm{orb}(x)$ 收集了 X 中可以用群 G 的元素从 x 置换得到的所有元素，而 $\mathrm{Stab}(x)$ 收集了 G 中保持 x 不动的 G 中的群元素。

引理 8.1.21 设群 G 作用在集合 X 上，则 G 的任意两个轨道或者完全重合，或者完全不相交。

证明: 练习。 □

因此群作用将集合 X 拆分成了不相交的轨道的并。记所有的轨道构成的集合为

$$X/G = \{X \text{ 在 } G \text{ 作用下的的轨道}\}$$

例 8.1.22. 群 G 在自身集合的左正则表示 L 下，只有一个轨道。所有的稳定子群都是平凡群。

例 8.1.23. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 上由旋转组成的群 S^1：它的每个元素对应于单位圆 S^1 上的一个点，代表逆时针旋转相应的角度。$\mathbb{R}^2$ 在这个群作用下的轨道为

$$S_r := \{z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 || z| = r\}, \quad r \geq 0$$

- 当 $r > 0$ 时，S_r 为半径为 r 的圆周，圆周上任意点的稳定子群是平凡的。
- 当 $r = 0$ 时，轨道只有一个原点，原点的稳定子群是整个 S^1。

例 8.1.24. 考虑乘法群 $(\mathbb{R}^*, \cdot)$。考虑如下的群作用在 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 上

$$\rho(r)\vec{x} := r\vec{x}, \quad r \in \mathbb{R}^*, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$$

这个群作用表示的是欧式空间上的伸缩变换。两个非零向量 $\vec{x}, \vec{y}$ 在同一个轨道上当且仅当 $\vec{x}, \vec{y}$ 和原点共线。于是该群作用所有的轨道的集合等于所有过原点的直线的集合，这个集合称为 n 维的实射影空间，记为 $\mathbb{R}P^n$。

例如，实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 表示 3 维空间中所有过原点的直线。这样的直线可以通过单位球面 S^2 上的一对对径点给出。这实际上给出了 $\mathbb{R}P^2$ 的另外一个描述方法。考虑二元群 $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ 作用在单位球面 S^2，其中 $\mathbb{Z}_2$ 中的非平凡的元素 -1 将球面上的点映射到它的对径点。则 $\mathbb{R}P^2$ 也可以看作是 $\mathbb{Z}_2$ 在 S^2 上作用的轨道的集合，即 $\mathbb{R}P^2 \cong S^2/\mathbb{Z}_2$。这个描述对一般维数也成立

$$\mathbb{R}P^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2$$

其中 S^n 为 $n+1$ 维空间的单位球面。

定义 8.1.22 群 G 在自身上的共轭作用的一个轨道称为一个共轭类。包含 g 的共轭类记为 $[g]$。

给定两个元素 $g_1, g_2 \in G$，由定义

$$[g_1] = [g_2] \iff \text{存在某个 } g \in G \text{ 使得 } g_1 = g g_2 g^{-1}$$

此时我们称 g_1 与 g_2 共轭。g 对应的稳定子群是 G 中所有与 g 可交换的群元素。

例 8.1.25. 置换群 S_n 的共轭类。设 $\sigma \in S_n$。将 σ 表示成轮换的乘积，设其中长为 r 的轮换有 λ_r 个 $(1 \leq r \leq n)$。我们称置换 σ 的型为 $[\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n]$。由定义，

$$\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i = n$$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (1)(24)(365)$$

的型为 $[111000]$。又例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (123456)$$

的型为 $[000001]$。

命题 8.1.23 S_n 中的两个置换共轭的充要条件是它们有相同的型。

证明: 设 σ_1, σ_2 为两个相同型的置换，按照同样的型的顺序表达为轮换的乘积

$$\sigma_1 = (i_1 \cdots) \cdots (\cdots i_n), \quad \sigma_2 = (j_1 \cdots) \cdots (\cdots j_n).$$

考虑置换

$$g = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

g 将 i_k 置换为 j_k。容易验证

$$\sigma_2 = g \sigma_1 g^{-1}$$

即 σ_1 与 σ_2 共轭。类似可以证明，共轭的置换具有相同的型。 □

例 8.1.26. 设 H 是群 G 的子群。考虑 H 左作用在 G 上:

$$h : G \to G, \quad g \to hg$$

元素 $g \in G$ 对应的轨道 Hg 即是 H 的一个右陪集。此时

$$G \text{ 关于 } H \text{ 左作用的轨道分解 } = G \text{ 关于 } H \text{ 的右陪集分解。}$$

类似的我们可以定义 H 在集合 G 上的右作用，其轨道分解对应于 H 的左陪集分解。

定理 8.1.24. [群作用基本定理] 设群 G 作用在集合 X 上。

1) 设 $g \in G, x \in X$，则

$$\operatorname{Stab}(gx) = \operatorname{Ad}_g \operatorname{Stab}(x) = g \operatorname{Stab}(x) g^{-1}$$

即同一轨道上不同点的稳定子群之间是相互共轭的。

2) 设 $x \in X$，则我们有集合的同构

$$\operatorname{orb}(x) \cong G/\operatorname{Stab}(x)$$

即 x 的轨道上的点与其稳定子群的左陪集一一对应。

3) 设 G 为有限群，$x \in X$，则

$$|G| = |\operatorname{Stab}(x)||\operatorname{orb}(x)|$$

证明: 由

$$h \in \operatorname{Stab}(gx) \iff hgx = gx \iff g^{-1}hgx = x \iff g^{-1}hg \in \operatorname{Stab}(x) \iff h \in g\operatorname{Stab}(x)g^{-1}$$

我们推出 1)。考虑映射

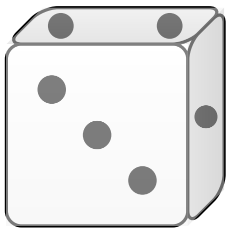
$$\rho : G \to \operatorname{orb}(x), \quad g \to gx$$

ρ 显然是一个满射。设 $y = gx$，我们考虑 y 的原像 $\rho^{-1}(y)$

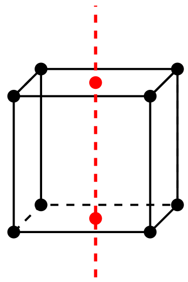
$$h \in \rho^{-1}(y) \iff hx = gx \iff g^{-1}h \in \operatorname{Stab}(x) \iff h \in g\operatorname{Stab}(x)$$

即 $\rho^{-1}(gx) = g\operatorname{Stab}(x)$。由此我们推出 2)。3) 是 2) 的直接推论 (Lagrange 定理)。 □

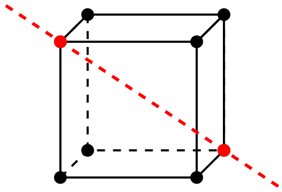
例 8.1.27. 一个骰子有六个面，标记为 *1*，*2*，*3*，*4*，*5*，*6*。问总共可以制造多少种不同的筛子？



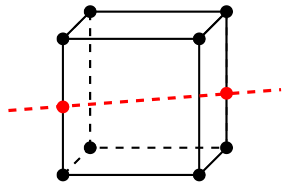
我们把骰子的六个面刻为六个不同数字称为一个标记。一个标记如果通过旋转变成另一个标记，则这两个标记对应于同一个骰子。记所有不同标记的集合为 Σ，共有 6! 个元素。记正六面体的旋转对称群为 G，它包含如下三种绕着对称轴的旋转



转动轴 *I*



转动轴 *II*



转动轴 *III*

第一类的转动 (上图左) 共有 3 个对称轴，每个对称轴可以转动 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$；第二类的转动 (上图中) 共有 4 个对称轴，每个对称轴可以转动 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$；第三类的转动共有 6 个转动轴，每个转动轴可以转动 π。加上恒等变换，G 中共有 24 个元素。有兴趣的读者可以尝试证明，G 同构与 S_4（提示：G 作用给出了 4 个主对称轴的置换）。

G 作用在 Σ 上，不同的骰子对应于不同轨道。容易观察，对于任意一个标记 $\sigma \in \Sigma$，$\mathrm{Stab}(\sigma) = 1$。因此群的每个轨道元素个数均为 $|G|$。于是

$$|\Sigma/G| = \frac{|\Sigma|}{|G|} = \frac{6!}{24} = 30,$$

即总共可以制造 30 种不同的筛子。

Burnside 引理

定理 8.1.25. [Burnside 引理] 设有限群 G 作用在有限集合 X 上。记 X/G 为所有轨道的集合。对于 $g \in G$，记

$$X^g = \{x \in X | gx = x\}$$

为 X 中 g 作用的不动点。则

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

证明: 考虑 $X \times G$ 的子集 $Z = \{(x, g) \in X \times G | gx = x\}$。我们有两个映射

$$\pi_X : Z \to X, (x, g) \to x, \quad \text{以及} \quad \pi_G : Z \to G, (x, g) \to g$$

易知 $\pi_X^{-1}(x) = \mathrm{Stab}(x), \pi_G^{-1}(g) = X^g$。我们可以有两种方法 (利用 π_X 或者 π_G) 计算 $|Z|$

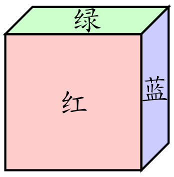
$$|Z| = \sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)|$$

另一方面，由定理8.1.24知

$$\sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)| = \sum_{X/G} |G| = |G||X/G|$$

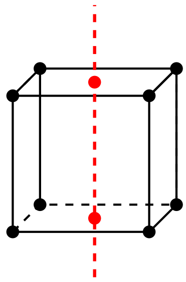
由此我们得到 Bunside 引理。 □

例 8.1.28 (染色问题)**.** 把一个正六面体每个面染成红色，绿色或者蓝色。问有多少种染色方法？

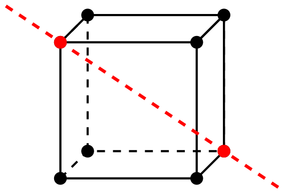


我们把六个面各染上一个颜色称为一个标记。一个标记如果通过旋转变成另一个标记，则这两个标记对应于同一个染色方法。记所有不同标记的集合为 Σ。记正六面体的旋转对称群为 G（如例8.1.27）。则 G 作用在 Σ 上，不同的染色方法对应于不同轨道。我们需要计算 $|\Sigma/G|$。

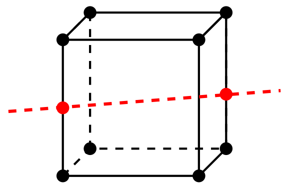
G 中共有如下三种旋转 *I(下图左), II(下图中), III(下图右)*



转动轴 *I*



转动轴 *II*



转动轴 *III*

我们考虑群 G 中的元素 g 的不动点集合 Σ^g

- $g=$ 恒等变换 *(1 个)*: $|\Sigma^g| = 3^6$
- $g=$ 旋转 *I* 转动 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ *(6 个)*: $|\Sigma^g| = 3^3$
- $g=$ 旋转 *I* 转动 π *(3 个)*: $|\Sigma^g| = 3^4$
- $g=$ 旋转 *II* 转动 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ *(共 8 个)*: $|\Sigma^g| = 3^2$
- $g=$ 旋转 *III* 转动 π *(6 个)*: $|\Sigma^g| = 3^3$

由 *Burnside* 引理知

$$|X/G| = \frac{1}{4!}\left(1 \times 3^6 + 6 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + 8 \times 3^2 + 6 \times 3^3\right) = 57$$

即总共有 *57* 种不同的染色方法。

8.1.5 群的表示

群的表示理论是数学和物理学中的重要工具，它将抽象的群元素与具体的线性变换联系起来，从而可以用线性代数的工具研究群的结构和性质。

定义 8.1.26 设 G 是一个群，V 是一个向量空间（通常是在域 K 上，如 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$）。G 的一个**表示**是一个群同态：

$$\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$$

其中 $\mathrm{GL}(V)$ 是 V 上所有可逆线性变换的群。表示的**维数**是向量空间 V 的维数。如果 ρ 是单射，则称表示是**忠实表示**。如果 V 没有非平凡的 G-不变子空间，即不存在真子空间 $W \subset V$（$W \neq \{0\}$ 且 $W \neq V$）使得对于所有 $g \in G$ 都有 $\rho(g)W \subseteq W$，则称表示是**不可约的**。

定义 8.1.27 两个表示 $\rho_1: G \to \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho_2: G \to \mathrm{GL}(V_2)$ 称为**等价的**，如果存在一个线性同构 $T: V_1 \to V_2$ 使得对所有 $g \in G$：

$$T \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ T$$

例 8.1.29. *循环群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 有 n 个不等价 1 维不可约表示（在 $\mathbb{C}$ 上）：*

$$\rho_k(m) = e^{2\pi i k m/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

例 8.1.30. *对称群 S_3 有 3 个不等价的不可约表示：*

- *平凡表示：$\rho(g) = 1$ 对所有 $g \in S_3$*
- *符号表示：$\rho(g) = \mathrm{sgn}(g)$*
- *2 维表示：考虑 S_3 在 $\mathbb{R}^3$ 上的自然作用，然后限制到子空间：*

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

例 8.1.31. *$\mathrm{SO}(2)$ 的不可约表示都是 1 维的（在 $\mathbb{C}$ 上）：*

$$\rho_n(\theta) = e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

这些 $\{\rho_n\}$ 都是互不等价的。

例 8.1.32. *$\mathrm{SO}(3)$ 的不可约表示是奇数维的，标记为 $l = 0, 1, 2, \ldots$，维数为 $2l+1$。这些表示可以通过球谐函数实现。*

例 8.1.33. *设 V_n 是次数为 n 的二元齐次多项式空间，其元素形式为：*

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k z_2^{n-k}$$

其中 z_1, z_2 是复变量，a_k 是复系数。

对于 $\mathrm{SU}(2)$ 的元素 $g = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$（满足 $|a|^2 + |b|^2 = 1$），定义其在 V_n 上的作用为：

$$(\rho_n(g)f)(z_1, z_2) = f(az_1 + bz_2, -\bar{b}z_1 + \bar{a}z_2)$$

这个作用给出了 SU(2) 的一个表示 (ρ_n, V_n)，表示的维数为 $\dim V_n = n+1$。

可以证明，对于每个非负整数 n，表示 (ρ_n, V_n) 是 SU(2) 的不可约表示，且所有 SU(2) 的有限维不可约表示都等价于某个 (ρ_n, V_n)。在物理中，通常使用自旋量子数 $j = n/2$，此时维数为 $2j+1$。

定义 8.1.28 表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 的**特征**是函数 $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ 定义为：

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$$

特征具有以下重要性质：

1. $\chi_\rho(e) = \dim V$
2. $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$（类函数）
3. 等价的表示有相同的特征
4. 对于有限群的不可约表示，特征满足正交关系：
$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \delta_{ij}$$

例 8.1.34. S_3 的共轭类有三个：

- 单位元类：$\{e\}$。
- *3* 个对换：$\{(12),(23),(13)\}$。
- *2* 个三循环：$\{(123),(132)\}$。

其不可约表示的特征表如下：

	e	(12)	(123)
平凡表示	*1*	*1*	*1*
符号表示	*1*	*-1*	*1*
二维表示	*2*	*0*	*-1*

例 8.1.35. 考虑 SU(2) 的不可约表示 (ρ_n, V_n)（自旋 $j = n/2$）。若群元素为

$$\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix},$$

则其特征为

$$\chi_{\rho_n}(\theta) = \frac{\sin((2j+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

8.2 矩阵 Lie 群

粗略的说，具有连续结构的群称为 Lie 群，其描述连续对称性。我们这一节讨论由矩阵构成的 Lie 群。

8.2.1 常见的矩阵 Lie 群

我们用 K 表示一个实数 $\mathbb{R}$ 或者复数 $\mathbb{C}$，用 K^* 表示其中非零元素组成的乘法群。一个 K 取值的 $n \times n$ 的矩阵可以写为 $A = (a_{ij})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in K$$

所有 K 取值的 $n \times n$ 的矩阵的集合记为 $M_n(K)$。

一般线性群

我们定义

$$\mathrm{GL}(n, K) = \{A \in M_n(K) | A\text{可逆}\}$$

为 $M_n(K)$ 中可逆矩阵构成的集合。$\mathrm{GL}(n, K)$ 在矩阵的乘法运算下形成一个群，称为 n 阶一般线性群 (general linear group)。其中，行列式为 1 的可逆矩阵构成的子群

$$\mathrm{SL}(n, K) = \{A \in \mathrm{GL}(n, K) | \det A = 1\}$$

称为 n 阶特殊线性群 (general linear group)。

命题 8.2.1 行列式给出了一个群同态

$$\det : \mathrm{GL}(n, K) \to K^*$$

正交群

n 阶实方阵 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 称为一个正交矩阵，如果

$$A^T \cdot A = I_n$$

这里 A^T 是 A 的转置矩阵，I_n 是 n 阶单位矩阵。所有 n 阶正交矩阵构成的集合

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) | A^T \cdot A = I_n\}$$

在矩阵乘法下形成一个群，称为 n 阶正交群 (orthogonal group)。其中，行列式为 1 的正交矩阵构成的子群

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) | \det(A) = 1\}$$

称为 n 阶特殊正交群 (special orthogonal group)。

酉群

n 阶复方阵 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 称为酉矩阵，如果它满足

$$\bar{A}^T A = I_n$$

其中 $\bar{A}^T$ 表示 A 的共轭转置，I_n 是 n 阶单位矩阵。所有 n 阶酉矩阵组成的集合

$$\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | \bar{A}^T A = I_n\}$$

在矩阵乘法下形成一个群，称为 n 阶酉群 (unitary group)。其中，行列式为 1 的酉矩阵构成的子群

$$\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{U}(n) | \det A = 1\}$$

称为 n 阶特殊酉群 (special unitary group)。

辛群

设 J 是 $2n$ 阶标准辛形式矩阵，定义为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

其中 I_n 是 n 阶单位矩阵。$2n$ 阶实方阵 $A \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ 称为一个辛矩阵，如果

$$A^T \cdot J \cdot A = J$$

所有 $2n$ 阶辛矩阵构成的集合

$$\mathrm{Sp}(2n) = \{A \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid A^T \cdot J \cdot A = J\}$$

在矩阵乘法下形成一个群，称为 $2n$ 阶辛群（symplectic group）。所有辛矩阵的行列式均为 1，因此辛群是特殊线性群 $\mathrm{SL}(2n, \mathbb{R})$ 的子群。

辛群在力学中扮演了极为重要的角色。

例 8.2.1. 对于 $n = 1$，$\mathrm{Sp}(2) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$。

洛伦兹群

设 $n \geq 2$ 为整数，η 是 n 阶 Minkowski 度规矩阵，定义为

$$\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, \ldots, -1)$$

n 阶实方阵 $\Lambda \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 称为一个洛伦兹变换，如果

$$\Lambda^T \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta$$

所有满足此条件的 n 阶矩阵构成的集合

$$\mathrm{O}(1, n-1) = \{\Lambda \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta\}$$

在矩阵乘法下形成一个群，称为广义洛伦兹群或 n 维洛伦兹群 (Lorentz group)。通常洛伦兹变换 Λ 的矩阵元记作

$$\Lambda = (\Lambda_{ij}), \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

其中 $i = 0$ 表示时间的方向，$i = 1, \cdots, n-1$ 表示空间方向的指标。行列式为 1 且时间方向为正（即 $\Lambda^0_0 \geq 1$）的洛伦兹变换构成的子群

$$\mathrm{SO}^+(1, n-1) = \{\Lambda \in \mathrm{O}(1, n-1) \mid \det(\Lambda) = 1,\ \Lambda^0_0 \geq 1\}$$

是洛伦兹群的一个连通分支。洛伦兹群 $O(1,3)$ 是时空相对论的基本结构。

欧几里得群

设 I_n 是 n 阶单位矩阵，表示 n 维欧几里得空间的标准内积。考虑 $n+1$ 维扩展空间中的变换，形如

$$\begin{bmatrix} R & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $R \in \mathrm{O}(n)$ 是一个正交变换，$a \in \mathbb{R}^n$ 是一个平移向量。所有此类变换构成的集合

$$\mathrm{IO}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} R & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| R \in \mathrm{O}(n),\ a \in \mathbb{R}^n \right\}$$

在矩阵乘法下形成一个群，称为 n 维欧几里得群（Euclidean group）。其中，R 属于特殊正交群 $\mathrm{SO}(n)$ 构成的子群

$$\mathrm{ISO}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} R & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| R \in \mathrm{SO}(n),\ a \in \mathbb{R}^n \right\}$$

称为特殊欧几里得群（special Euclidean group）或定向保持欧几里得群（orientation-preserving Euclidean group），由所有保持定向的刚体运动组成。

欧几里得群是 n 维欧几里得空间的等距群，包含了旋转（或反射）和平移变换。

庞加莱群

设 η 是 n 阶 Minkowski 度规矩阵，定义为

$$\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, \ldots, -1)$$

考虑 $n+1$ 维扩展空间中的变换，形如

$$\begin{bmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 $\Lambda \in \mathrm{O}(1, n-1)$ 是一个 n 维洛伦兹变换，$a \in \mathbb{R}^n$ 是一个平移向量。所有此类变换构成的集合

$$\mathrm{IO}(1, n-1) = \left\{ \begin{bmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \Lambda \in \mathrm{O}(1, n-1),\ a \in \mathbb{R}^n \right\}$$

在矩阵乘法下形成一个群，称为 n 维庞加莱群（Poincaré group）或非齐次洛伦兹群（inhomogeneous Lorentz group）。其中，

$$\mathrm{ISO}^+(1,n-1)=\left\{\begin{bmatrix}\Lambda & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle|\Lambda\in\mathrm{SO}^+(1,n-1),\ a\in\mathbb{R}^n\right\}$$

是庞加莱群的一个连通分支。

8.2.2 矩阵群的 Lie 代数

设 G 是一个矩阵 Lie 群。G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 定义为 G 在单位元处的切空间：

$$\mathfrak{g}=\{X\in M_n(K)\mid e^{tX}\in G\ \text{对所有}t\in\mathbb{R}\ \text{成立}\}$$

其中 $K=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，$e^{(-)}$ 是指数矩阵。直观地说，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 群 G 的无穷小生成元，刻画了连续对称性的无穷小（微分）形式。指数矩阵给出了从无穷小变换生成为群作用的方式。

$\mathfrak{g}$ 称为是一个 Lie 代数，因为它有一个 Lie 括号的结构，在矩阵的情况为对易子：

$$[X,Y]=XY-YX$$

可以证明，$\mathfrak{g}$ 在这个运算下封闭，即：

$$[-,-]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$

并且这个 Lie 括号运算满足以下性质（这些性质刻画了 “Lie 代数”）：

1. 双线性性：$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$
2. 反对称性：$[X,Y]=-[Y,X]$
3. Jacobi 恒等式：$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$

两个 Lie 代数间的线性映射 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 称为 Lie 代数同态，如果它保持 Lie 括号：

$$\phi([X,Y])=[\phi(X),\phi(Y)]$$

一般线性群的 Lie

$\mathrm{GL}(n,K)$ 的 Lie 代数为

$$\mathfrak{gl}(n,K)=M_n(K)$$

实际上，对于任何 $X\in M_n(K)$，指数矩阵 e^X 都是可逆的，其逆为

$$(e^X)^{-1}=e^{-X}$$

特殊线性群的 Lie 代数

$\mathrm{SL}(n,K)$ 的 Lie 代数为

$$\mathfrak{sl}(n,K)=\{X\in M_n(K)\mid \operatorname{Tr}X=0\}$$

这可以通过如下公式来证明

$$\det e^X=e^{\operatorname{Tr}X}$$

对于任意两个矩阵 X,Y

$$\operatorname{Tr}[X,Y]=\operatorname{Tr}(XY-YX)=0$$

因此 $\mathfrak{sl}(n,K)$ 的确在 Lie 括号下封闭。

正交群的 Lie 代数

$\mathrm{O}(n)$ 和 $\mathrm{SO}(n)$ 的 Lie 代数均为（$\mathrm{SO}(n)$ 是 $\mathrm{O}(n)$ 包含单位元的连通分支）

$$\mathfrak{so}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{R})\mid X^T=-X\}$$

即所有反对称实矩阵的集合。实际上

$$(e^X)^Te^X=e^{X^T}e^X=1\quad\Longrightarrow\quad X^T+X=0$$

对于任意 $X,Y\in\mathfrak{so}(n)$，它们的对易子

$$[X,Y]^T=-[Y^T,X^T]=-[Y,X]\quad\Longrightarrow\quad[X,Y]\in\mathfrak{so}(n)$$

酉群的 Lie 代数

$\mathrm{U}(n)$ 的 Lie 代数为

$$\mathfrak{u}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{C})\mid X^\dagger=-X\}$$

即所有反厄米矩阵的集合。

特殊酉群的 Lie 代数

$\mathrm{SU}(n)$ 的 Lie 代数为

$$\mathfrak{su}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{C})\mid X^\dagger=-X,\operatorname{Tr}X=0\}$$

即所有迹为零的反厄米矩阵的集合。

例 8.2.2. $\mathfrak{su}(2)$ 的一组生成元为泡利矩阵：

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad\sigma_2=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\quad\sigma_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

Lie 括号关系为：

$$[\sigma_i,\sigma_j]=2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

其中 ϵ_{ijk} 是 *Levi-Civita* 符号。

辛群的 Lie 代数

$\mathrm{Sp}(2n)$ 的 Lie 代数为

$$\mathfrak{sp}(2n) = \{X \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^T J + JX = 0\}$$

其中 $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ 是标准辛形式。

例 8.2.3. *对于 $n = 1$，由 $\mathrm{Sp}(2) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 知 $\mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$。这也可以直接计算验证。*

洛伦兹群的 Lie 代数

$\mathrm{O}(1, n-1)$ 的 Lie 代数为

$$\mathfrak{so}(1, n-1) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^T \eta + \eta X = 0\}$$

其中 $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, \cdots, -1)$ 是 Minkowski 度规。

例 8.2.4. *洛伦兹代数 $\mathfrak{so}(1, 3)$ 的一组基由 boost 生成元 K_i 和旋转生成元 J_i 组成：*

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lie 括号关系为：

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} J_k$$

其中 ϵ_{ijk} 是 Levi-Civita 符号。

8.2.3 指数与对数映射

矩阵的指数与对数映射是连接 Lie 代数与 Lie 群的重要工具，在微分方程、量子力学、控制系统和计算机图形学等领域有广泛应用。它们提供了从线性空间（Lie 代数）到流形（Lie 群）的局部微分同胚。

矩阵指数映射

对于任意 $n \times n$ 矩阵 A，其指数映射定义为：

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

这个级数对任意矩阵都收敛。Lie 群和 Lie 代数之间通过指数映射相联系：

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \quad X \to e^X$$

矩阵对数映射

矩阵对数是矩阵指数的逆运算。对于矩阵 X，其对数 $\log(X)$ 是满足 $e^A = X$ 的矩阵 A。对数映射在 $\|X - I\| < 1$ 时可通过级数定义：

$$\log(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(X - I)^k$$

矩阵对数不一定唯一存在。当 X 可逆且没有负实特征值时，存在唯一的主对数分支。

例 8.2.5 (对角矩阵)**.** 对于对角矩阵 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$：

$$e^A = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$$
$$\log(A) = \mathrm{diag}(\log(\lambda_1), \ldots, \log(\lambda_n)) \quad (\text{如果}\lambda_i > 0)$$

例 8.2.6. 考虑 $A = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix}$，这是一个反对称矩阵，即 $\mathfrak{so}(2)$ 中的元素。计算知

$$A^2 = -\theta^2 I, \quad A^3 = -\theta^3 A, \quad A^4 = \theta^4 I, \quad \cdots$$

因此

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) I + \left(1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \cdots\right) A \\ &= \cos\theta \cdot I + \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这正是 $\mathrm{SO}(2)$ 的旋转矩阵。

例 8.2.7 ($\mathfrak{so}(3)$ 的指数映射)**.** $\mathfrak{so}(3)$ 中的元素可以表示为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

其指数映射给出 $\mathrm{SO}(3)$ 中的旋转矩阵，可用 *Rodrigues* 公式计算：

$$\exp(\theta A) = I + (\sin\theta)A + (1 - \cos\theta)A^2$$

命题 8.2.2 设 $A(t)$ 是 n 阶方阵函数。则有如下的矩阵指数求导公式

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = e^{A(t)}\frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_A}}{\mathrm{ad}_A}\frac{dA}{dt}$$

其中 $\mathrm{ad}_A(B) = AB - BA$。

证明：

$$e^{-A}\frac{d}{dt}e^A = e^{-\mathrm{ad}_A}(\frac{d}{dt})I_n = \frac{e^{-\mathrm{ad}_A} - 1}{\mathrm{ad}_A}\mathrm{ad}_A(\frac{d}{dt}) = \frac{e^{-\mathrm{ad}_A} - 1}{\mathrm{ad}_A}(-\frac{dA}{dt}) = e^A\frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_A}}{\mathrm{ad}_A}\frac{dA}{dt}$$

□

8.2.4 Baker-Campbell-Hausdorff 公式

Baker-Campbell-Hausdorff 公式（简称 BCH 公式）是 Lie 群和 Lie 代数理论中的一个基本结果，它提供了两个算符（或矩阵）的指数乘积的对数展开式。具体而言，对于两个不一定交换的算符 X 和 Y，BCH 公式给出了一个表达式：

$$e^X e^Y = e^Z$$

其中 Z 可以表示为 X, Y 和它们的 Lie 括号的级数。这个公式在量子力学、微分几何和数值分析中都有广泛应用。

BCH 公式表明，存在一个形式幂级数 Z，使得：

$$Z = \log(e^X e^Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) - \frac{1}{24}[X, [Y, [X, Y]]] + \cdots$$

这个级数由 X 和 Y 以及它们的 Lie 括号组成。这个级数在一般情况下是无穷级数，且收敛性需要在一定条件下保证（例如，当 X 和 Y 的范数足够小）。

为了证明 BCH 公式，考虑矩阵函数：

$$Z(t) = \log(e^X e^{tY}) \quad \text{即} \quad e^{Z(t)} = e^X e^{tY}$$

直接对 t 求导：

$$\frac{d}{dt} e^{Z(t)} = e^X \cdot Y e^{tY} = e^X e^{tY} Y = e^{Z(t)} Y$$

另一方面，利用矩阵指数的导数公式（命题8.2.2）：

$$\frac{d}{dt} e^{Z(t)} = e^{Z(t)} \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}} \frac{dZ}{dt}$$

比较两式得到：

$$\frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}} \frac{dZ}{dt} = Y \quad \text{即} \quad \frac{dZ}{dt} = \left(\frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}} \right)^{-1} Y$$

考虑

$$g(z) = \frac{\log z}{1 - z^{-1}}$$

函数 $g(z)$ 在圆盘 $\{|z - 1| < 1\}$ 解析，可以展开为幂级数

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - 1)^k$$

其收敛半径为 1。因此对于任何满足范数 $\|A - I\| < 1$ 的方阵，可以定义方阵

$$g(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - I)^k$$

代入上述关于 $\frac{dZ}{dt}$ 的方程，得

$$\frac{dZ(t)}{dt} = g(e^{\mathrm{ad}_{Z(t)}}) Y$$

两边对 t 从 0 到 1 积分得：

$$Z = \log(e^X e^Y) = X + \int_0^1 dt\ g(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y})Y$$

展开即是 BCH 公式。

Dynkin 给出了 BCH 公式的一个显式表达式：

$$\log(e^X e^Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_1,s_1,\ldots,r_n,s_n \geq 0 \\ r_i+s_i>0}} \frac{[X^{r_1}Y^{s_1}\cdots X^{r_n}Y^{s_n}]}{(r_1+s_1+\cdots+r_n+s_n)\,r_1!s_1!\cdots r_n!s_n!}$$

这里

$$[X^{r_1}Y^{s_1}\cdots X^{r_n}Y^{s_n}] = \underbrace{[X,[X,\cdots,[X,}_{r_1}\underbrace{[Y,[Y,\cdots,[Y,}_{s_1}\cdots\underbrace{[X,[X,\cdots,[X,}_{r_n}\underbrace{[Y,[Y,\cdots,Y]]}_{s_n}\cdots]$$

并且约定 $[X]=X,[Y]=Y$。

虽然其封闭形式表达式复杂，但通过前几项已经能够解决很多问题。在实际应用中，我们往往根据精度要求截断级数。

第九章　线性规划

我们在前面章节中讨论了如何解线性方程组

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

这一章我们围绕数学优化中的线性规划理论讨论线性不等式

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

9.1　凸集

9.1.1　凸集与分离定理

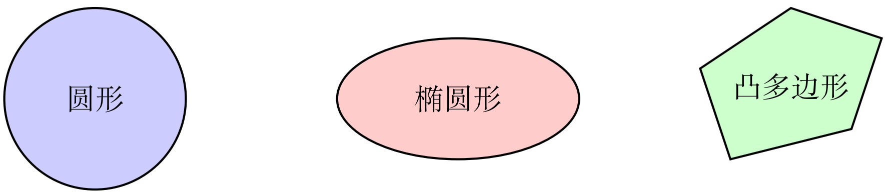


图 9.1: 凸集示例

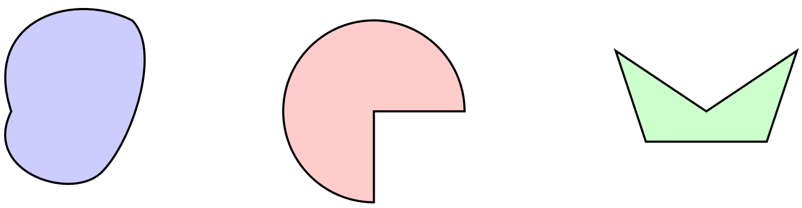


图 9.2: 非凸集示例

定义 9.1.1　$\mathbb{R}^n$ 中的一个子集称为凸集，如果其中任意两点之间线段上的所有点都位于该集合内。具体而言，集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸的，如果对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ 和任意 $\lambda \in [0, 1]$，

$$\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in C$$

凸集具有非常好的性质。一个极为重要的性质是如下关于凸集的分离定理。

定理 9.1.2. [超平面分离定理] 设 C 和 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个非空凸集，且 $C \cap D = \varnothing$。则存在非零向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 和标量 $b \in \mathbb{R}$，使得：

$$\mathbf{a}^T\mathbf{x} \le b \quad \forall \mathbf{x} \in C, \quad \text{且} \quad \mathbf{a}^T\mathbf{x} \ge b \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

此外，如果 C 和 D 都是闭集且至少有一个是紧集，则分离可以是严格的：

$$\mathbf{a}^T\mathbf{x} < b \quad \forall \mathbf{x} \in C, \quad \text{且} \quad \mathbf{a}^T\mathbf{x} > b \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

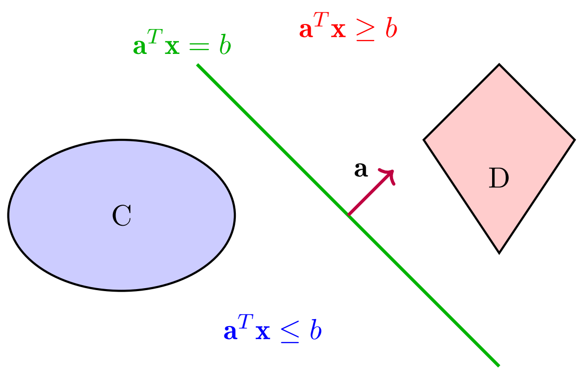


图 9.3: 超平面分离定理

9.1.2 Farkas 引理

命题 9.1.3. [Farkas 引理] 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$。那么下列两个集合中恰好有一个是非空 (即有解) 一个是空集 (即无解)：

(1) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0\}$

(2) $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | A^T\mathbf{y} \ge 0, \mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0\}$

这里向量 $\mathbf{x} \ge 0$ 指的是每个分量都大于等于 0。

证明: 假设 (1) 有解，即存在 $\mathbf{x} \ge 0$ 使得 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$。那么对于任何满足 $A^T\mathbf{y} \ge 0$ 的 $\mathbf{y}$，有：

$$\mathbf{b}^T\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T A^T\mathbf{y} \ge 0$$

因为 $\mathbf{x} \ge 0$ 且 $A^T\mathbf{y} \ge 0$。因此 (2) 无解。

现在假设 (1) 无解。考虑集合

$$C = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{z} = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \ge 0\}$$

C 是一个闭凸集 (为什么？)。由假设 $\mathbf{b} \notin C$，根据超平面分离定理，存在非零向量 $\mathbf{y}$ 和标量 r 使得：

$$\mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) \ge r \quad \forall \mathbf{x} \ge 0, \quad \text{且} \quad \mathbf{y}^T\mathbf{b} < r$$

由于 C 包含原点，$r \le 0$。实际上可以取 $r = 0$，这是因为如果存在 $\mathbf{x} \ge 0$ 使得

$$\mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) = \epsilon < 0$$

则可以取充分大的 $\lambda > 0$ 使得 $\mathbf{y}^T(A(\lambda\mathbf{x})) = \lambda\epsilon < r$，矛盾。因此

$$\mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) \ge 0 \quad \forall \mathbf{x} \ge 0, \quad \text{且} \quad \mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0$$

第一个不等式意味着 $A^T\mathbf{y} \ge 0$（否则我们可以选择 $\mathbf{x}$ 使得 $\mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) < 0$），因此 (2) 有解。

□

推论 9.1.4. [Farkas 引理'] 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$。那么下列两个集合中恰好有一个是非空 (即有解) 一个是空集 (即无解):

(1) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0\}$

(2) $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | A^T\mathbf{y} \ge 0, \mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0, \mathbf{y} \ge 0\}$

证明: (1) 可以写成

$$\begin{bmatrix} A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{b}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \ge 0$$

(2) 可以写成

$$\begin{bmatrix} A^T \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} \ge 0, \qquad \mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0$$

由 Farkas 引理既得证。 □

9.2 线性规划

9.2.1 线性规划问题

线性规划是数学优化中的一个分支，研究在线性约束条件下最大化或最小化线性目标函数的问题。标准形式的线性规划问题可以写为:

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & c^T x \\ \text{满足} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是决策变量向量, $c \in \mathbb{R}^n$ 是系数向量，$c^T x$ 称为目标函数, A 是 $m \times n$ 约束矩阵, $b \in \mathbb{R}^m$ 是右边值向量。满足约束条件的集合

$$S = \{x : Ax \le b, x \ge 0\}$$

称为可行域，其中的元素称为可行解。线性规划问题是要在可行解中找到一个最优解, 使得目标函数取最大值。

例 9.2.1. *考虑一个生产计划问题：一家公司生产两种产品 A 和 B，每单位产品 A 利润为 3 万元，每单位产品 B 利润为 5 万元。生产受到以下限制：*

- *机器时间：每单位 A 需要 1 小时，每单位 B 需要 2 小时，总可用时间为 10 小时*
- *原材料：每单位 A 需要 2 吨，每单位 B 需要 3 吨，总可用原材料为 16 吨*
- *运输能力：每单位 A 需要 2 车，每单位 B 需要 1 车，总可用卡车为 12 辆*

问题是如何设计 A 和 B 的生产量使得利润最大？这个问题可以建模为线性规划：

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{满足} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

其中 x_1 和 x_2 分别表示产品 A 和 B 的生产量。

定理 9.2.1. [线性规划解存在性定理] 假设可行域非空，并且目标函数在可行域上有上界，则最优解存在（即目标函数可以取到最大值）。

证明: 记目标函数在可行域的上确界为

$$z_* = \sup\{c^T x : x \in S\}$$

我们需要证明存在 $x_* \in S$ 使得 $c^T x_* = z_*$，即目标函数的值可以取到上确界。

假设不存在这样的 x_*，则系统

$$Ax \leq b, \quad c^T x \geq z_*, \quad x \geq 0$$

没有解。把这个系统写成

$$\begin{bmatrix} A \\ -c^T \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -z_* \end{bmatrix}, \quad x \geq 0$$

由 Farkars 引理9.1.4, 存在 $y_* \geq 0, \lambda \geq 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} A^T & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_* \\ \lambda \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} b^T & -z_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_* \\ \lambda \end{bmatrix} < 0$$

假设 $\lambda = 0$，则

$$A^T y_* \geq 0, \quad b^T y_* < 0, \quad y_* \geq 0$$

由 Farkars 引理9.1.4说明系统

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

无解，即可行域 S 是空集，矛盾。因此 $\lambda > 0$。不妨设 $\lambda = 1$，则 y_* 满足

$$A^T y_* \geq c, \quad b^T y_* < z_*, \quad y_* \geq 0$$

现在对可行域 S 中的任意元素 x, 有

$$c^T x \le y_*^T A x \le y_*^T b$$

左边对 x 取 sup 得到

$$\sup\{c^T x : x \in S\} \le b^T y_* < z_*$$

矛盾！由反证法，这说明了存在最优解 x_*。 □

因此线性规划问题没有最优解只有两种情况：

1. 可行域为空：没有任何向量满足约束条件
2. 目标函数在可行域上无界：对于最大化问题，目标函数值可以无限增大

9.2.2 单纯形法

求解线性规划的一个常用方法是单纯形法，其沿着可行域的顶点移动，逐步改进目标函数值。我们通过例子9.2.1简要说明一下单纯形法的求解思路和过程。

例子 *9.2.1*：解. 引入新变量 x_3, x_4, x_5，将不等式约束转化为等式约束：

$$\begin{aligned}
\text{最大化} \quad & z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{满足} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 16 \\
& 2x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{aligned}$$

选一个初始值，比如 $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 10, x_4 = 16, x_5 = 12$，此时 $z = 0$ 不是最大值。我们的目标是尽可能让 z 的值变大。z 的表达式中 x_2 的系数最大，我们选择让 x_2 增大，$x_1 = 0$ 保持不变，来增大 z 的值。此时由

$$\begin{cases}
2x_2 + x_3 = 10 \\
3x_2 + x_4 = 16 \\
x_2 + x_5 = 12 \\
x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x_2 \le 5$$

因此我们可以把 x_2 增大到最大值 5 使得 z 的值增长为 $z = 25$, 此时

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 7$$

为了分析 $z = 25$ 是否达到最大值，观察到此时 $x_1 = x_3 = 0$。我们利用线性关系把 z 写成关于 x_1, x_3 的函数，得到等价的问题

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & z = 25 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_3 \\ \text{满足} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 16 \\ & 2x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

可以看到 z 关于 x_1 的系数是正的，这个使得我们可以通过增加 x_1 来增大 z 的值。在保持 $x_3 = 0$ 的情况下，约束

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 16 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ x_2, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \implies \quad x_1 \leq 2$$

因此 z_1 最多能增长到 2，z 的值增长到 $z = 26$。此时

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 4$$

观察到此时 $x_3 = x_4 = 0$。我们把 z 转化为 x_3, x_4 的函数，得到等价的问题

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & z = 26 - x_3 - x_4 \\ \text{满足} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 16 \\ & 2x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

由 $z = 26 - x_3 - x_4$ 以及 $x_3, x_4 \geq 0$，知 $z = 26$ 达到最大值，如上知在 $x_1 = 2, x_2 = 4$ 取到。因此生产 2 个单位的产品 A 和 4 个单位的产品 B 能使得利润最大化。 $\square$

这个例子里线性规划的约束条件给出的是一个凸集（凸多边形），如下图所示。线性函数 $z = 3x_1 + 5x_2$ 的最大值一定在这个凸区域的顶点处取到（如果最优解存在）。上述单纯形法求解过程就是在寻找凸多边形的顶点并比较函数值 z 的过程。

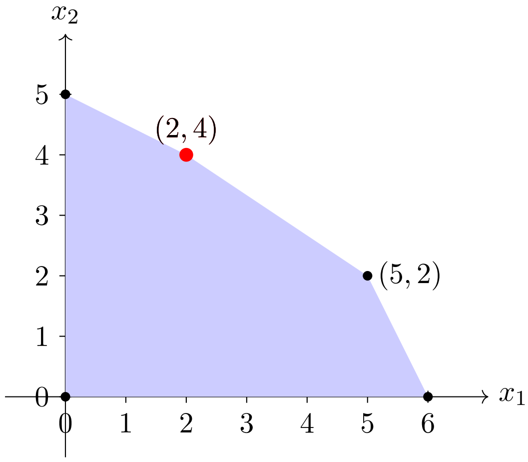


图 9.4: 约束区域，红色点为最优解

9.2.3 对偶理论

线性规划问题（称为**原问题**，Primal）都有一个与之紧密关联的另一个线性规划问题，称为**对偶问题**（Dual）。

定义 9.2.2. [对偶] 对于原始线性规划问题：

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & c^T x \\ \text{满足} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

其对偶问题为：

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & b^T y \\ \text{满足} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

例 9.2.2. 线性优化问题

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{满足} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

的对偶问题为

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & 10y_1 + 16y_2 + 12y_3 \\ \text{满足} \quad & y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ & 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 5 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

定理 9.2.3. [弱对偶定理] 如果 x 是原始问题的可行解，y 是对偶问题的可行解，则

$$c^T x \leq b^T y$$

证明: 由于 x 和 y 都是可行解,

$$c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T A x \leq y^T b = b^T y$$

第一个不等式源于 $A^T y \geq c$ 和 $x \geq 0$，第二个不等式源于 $Ax \leq b$ 和 $y \geq 0$。 □

定理 9.2.4. [强对偶定理] 如果原始问题存在最优解，则对偶问题也存在最优解，且最优值相等，即

$$\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0\}$$

证明: 设原始问题的最优值为 $z_* = c^T x_*$。假设对偶问题没有可行解，即

$$\{y : (-A^T)y \leq -c, \quad y \geq 0\}$$

是空集，由 Farkars 引理9.1.4知

$$(-A)x \geq 0, \quad (-c)^T x < 0, \quad x \geq 0$$

有解，即存在 $\tilde{x} \geq 0$ 使得 $A\tilde{x} \leq 0, c^T \tilde{x} > 0$。则对任意 $\lambda \geq 0$, $x_* + \lambda \tilde{x}$ 都是原问题的一个可行解，但是其对应的目标函数在 $\lambda \to +\infty$ 时无上界，与假设矛盾。这说明对偶问题的可行域非空。另一方面，由弱对偶定理知，z_* 是对偶问题目标函数在可行域上的一个下界，因此对偶问题一定存在最优解 y_* 且 $b^T y_* \geq z_*$。我们下面证明 $b^T y_* = z_*$.

考虑系统:

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad c^T x \geq z_* + \epsilon$$

由 z_* 的定义知对于任意 $\epsilon > 0$，此系统无解。将其重写为:

$$\begin{bmatrix} A \\ -c^T \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -z^* - \epsilon \end{bmatrix}, \quad x \geq 0$$

根据 Farkars 引理9.1.4，存在非负向量 (y, α) 使得:

$$\begin{bmatrix} A^T & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} b^T & -z^* - \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} < 0$$

如果 $\alpha=0$, 即存在 $y\geq 0$ 使得 $A^Ty\geq 0, b^Ty<0$。同上可证此时对偶问题目标函数在可行域上无下界，矛盾。因此 $\alpha>0$，不妨设 $\alpha=1$。于是有：

$$A^Ty\geq c, \quad b^Ty<z_*+\epsilon$$

因此最优解 y_* 满足

$$b^Ty_*<z_*+\epsilon$$

由 $\epsilon>0$ 的任意性 $\Longrightarrow b^Ty_*\leq z_*$。结合下界条件 $b^Ty_*\geq z_*$, 即得 $b^Ty_*=z_*$。 □

9.3 在博弈论中的应用

博弈论是研究决策者之间策略互动的数学理论。博弈论中有两个重要的概念称为纯策略和混合策略。纯策略提供了简单明确的决策框架，但在某些情况下存在局限性。混合策略通过引入概率分布，扩展了策略空间，保证了纳什均衡的存在性。Minimax 定理则表明，在两人零和博弈中，玩家可以通过混合策略保证自己的最小收益最大化。这些概念和定理不仅在理论上有重要意义，而且在实际应用中有广泛用途，如经济学、计算机科学和军事战略等领域。

9.3.1 双人博弈与纳什均衡

双人博弈是博弈论中最基本的研究模型，指恰好有两个参与者（称为玩家）的决策场景。每个玩家的最终收益（或效用）不仅取决于自己选择的策略，也取决于另一个玩家所选择的策略。一个标准的双人博弈通常由以下三个要素定义：

1. 玩家：两个理性的决策主体，通常称为玩家 1 和玩家 2。

2. 策略：每个玩家可供选择的所有可能行动方案的集合。

   - 玩家 1 的策略集记为 S_1
   - 玩家 2 的策略集记为 S_2

   策略可以是简单的（如“出石头”），也可以是复杂的（如“如果对方合作，我就合作；如果对方背叛，我就背叛”）。

3. 收益：对于每一个可能的策略组合 (s_1,s_2)（其中 $s_1\in S_1$, $s_2\in S_2$），都有一个对应的收益结果，表示该策略组合下各玩家的得失。收益通常用矩阵来表示, 其中：

   - 行：代表玩家 1 的可选策略
   - 列：代表玩家 2 的可选策略
   - 单元格内的数字对 (u_1,u_2) 表示当玩家 1 选择该行策略、玩家 2 选择该列策略时，玩家 1 的收益为 u_1，玩家 2 的收益为 u_2

在博弈中，策略组合 (s_1^*,s_2^*) 称为是一个纳什均衡，如果没有玩家可以通过单方面改变自己的策略来获得更高的收益，即：

$$u_1(s_1^*,s_2^*)\geq u_1(s_1,s_2^*) \quad \forall s_1\in S_1$$

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2$$

简单说，纳什均衡是一个稳定的策略组合，在这个组合下，每个人都针对对方的选择做出了当前最好的回应，没有人愿意单方面改变自己的策略。

例 9.3.1 (囚徒困境)**.** *考虑经典的囚徒困境博弈。在这个博弈中：*

- *如果双方都保持沉默，各获得-1 年刑期*
- *如果一方背叛而另一方沉默，背叛者获释（0 年），沉默者获刑-3 年*
- *如果双方都背叛，各获得-2 年刑期*

收益矩阵可以表达为：

	沉默	背叛
沉默	$(-1, -1)$	$(-3, 0)$
背叛	$(0, -3)$	$(-2, -2)$

唯一的纳什均衡是（背叛，背叛），尽管这个结果对双方不是最优的。

零和博弈

零和博弈是指所有参与者的收益之和为零的博弈。在双人零和博弈中，一个参与者的收益恰好等于另一个参与者的损失，即

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$$

对所有策略组合 (s_1, s_2) 成立。此时受益矩阵可以用一个矩阵 $A = (a_{ij})$ 表示，其中

$$u_1(i, j) = a_{ij}, \quad u_2(i, j) = -a_{ij}$$

囚徒困境的例子不是一个零和博弈。

9.3.2 纯策略与混合策略

纯策略

纯策略是指玩家从可用策略集合中选择一个确定的、特定的策略。对于玩家 i，一个纯策略是其策略集 S_i 中的一个特定元素 s_i。

例 9.3.2. *囚徒困境就是一个纯策略的例子。在这个例子中纯策略纳什均衡是（背叛，背叛），收益为 (-2,-2)。*

在纯策略博弈中，有可能不存在纳什均衡，如下例所示。

例 9.3.3 (猜硬币游戏-纯策略)**.** *考虑猜硬币：两个玩家同时选择“正面”或“反面”*

- *如果选择相同，玩家 2 支付 1 元给玩家 1*
- *如果选择不同，玩家 1 支付 1 元给玩家 2*

这是一个零和博弈，收益矩阵为：

	玩家 2：正面	**玩家 2：反面**
玩家 1：正面	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
玩家 1：反面	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

在纯策略下，这个博弈没有纳什均衡：

- *如果玩家 1 选择正面，玩家 2 最好选择反面*
- *如果玩家 2 选择反面，玩家 1 最好选择反面*
- *如果玩家 1 选择反面，玩家 2 最好选择正面*
- *如果玩家 2 选择正面，玩家 1 最好选择正面*

这是一个循环，没有稳定的纯策略组合。

混合策略

混合策略是指玩家以某种概率分布在其纯策略集合上进行随机化选择。形式上，对于玩家 i，一个混合策略是其策略集 S_i 上的一个概率分布。

具体而言，假设玩家 i 有 n 个纯策略，其混合策略是一个概率向量

$$\sigma_i = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \qquad p_k \geq 0 \quad \forall k, \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

每个 p_k 表示选择第 k 个纯策略的概率。

当玩家使用混合策略时，收益不再是确定的值，而是期望值。对于两个玩家的博弈，如果玩家 1 使用混合策略 σ_1，玩家 2 使用混合策略 σ_2，则玩家 1 的期望收益为：

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j \cdot u_1(s_i, t_j)$$

其中 p_i 是玩家 1 选择纯策略 s_i 的概率，q_j 是玩家 2 选择纯策略 t_j 的概率。

混合策略组合 (σ_1^*, σ_2^*) 是一个纳什均衡，如果：

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq u_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \quad \forall \sigma_1 \in \Sigma_1$$

$$u_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq u_2(\sigma_1^*, \sigma_2) \quad \forall \sigma_2 \in \Sigma_2$$

其中 Σ_i 是玩家 i 的混合策略空间。

例 9.3.4 (猜硬币游戏-混合策略). 收益矩阵：

	玩家 2：正面	**玩家 2：反面**
玩家 1：正面	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
玩家 1：反面	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

我们知道在纯策略下，这个博弈没有纳什均衡。现在考虑混合策略。设玩家 *1* 以概率 p 选择正面，玩家 *2* 以概率 q 选择正面。玩家 *1* 的期望收益为：

$$u_1(p,q) = p[q \cdot 1 + (1-q) \cdot (-1)] + (1-p)[q \cdot (-1) + (1-q) \cdot 1] = (2p-1)(2q-1)$$

由于是零和博弈，玩家 *2* 的期望收益为

$$u_2(p,q) = -u_1(p,q) = -(2p-1)(2q-1)$$

对于固定的 p，玩家 *2* 会选择 q 来最小化玩家 *1* 的收益。因此玩家 *1* 要最大化自己的最小收益，即寻找

$$\max_{0 \le p \le 1} \min_{0 \le q \le 1} (2p-1)(2q-1)$$

- 如果 $2p-1 > 0$，玩家 *2* 选择 $q = 0$，收益为 $-(2p-1)$
- 如果 $2p-1 < 0$，玩家 *2* 选择 $q = 1$，收益为 $-(2p-1)$
- 如果 $2p-1 = 0$，收益为 0

因此，玩家 *1* 的最小收益为 $-|2p-1|$。为了最大化这个最小值，玩家 *1* 应选择 $p = 1/2$，此时最小收益为 0。

类似地，玩家 *2* 要最小化自己的最大损失：

$$\min_{0 \le q \le 1} \max_{0 \le p \le 1} (2p-1)(2q-1)$$

对于固定的 q，玩家 *1* 会选择 p 来最大化收益：

- 如果 $2q-1 > 0$，玩家 *1* 选择 $p = 1$，收益为 $2q-1$
- 如果 $2q-1 < 0$，玩家 *1* 选择 $p = 0$，收益为 $-(2q-1)$
- 如果 $2q-1 = 0$，收益为 0

因此，玩家 *2* 的最大损失为 $|2q-1|$。为了最小化这个最大值，玩家 *2* 应选择 $q = 1/2$，此时最大损失为 0。

这样，混合策略纳什均衡是：

- 玩家 *1* 以 $1/2$ 概率选择正面，$1/2$ 概率选择反面
- 玩家 *2* 以 $1/2$ 概率选择正面，$1/2$ 概率选择反面

博弈的值为 0。

9.3.3 Minimax 定理

下面我们考虑两人零和博弈。设博弈收益由 $m\times n$ 矩阵为 $A=(a_{ij})$ 来描述，即

$$u_1(i,j)=a_{ij},\quad u_2(i,j)=-a_{ij}$$

在混合策略中，玩家 1 要最大化自己的最小收益，即寻找

$$\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n}x^TAy$$

玩家 2 要最小化自己的最大损失，即寻找

$$\min_{y\in\Delta_n}\max_{x\in\Delta_m}x^TAy$$

其中 Δ_k 表示 k 维概率单纯形，即所有 k 维概率分布的集合。

定理 9.3.1. [Minimax 定理] 在双人零和博弈，存在一个值 v（称为博弈的值），使得：

$$\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n}x^TAy=\min_{y\in\Delta_n}\max_{x\in\Delta_m}x^TAy=v$$

证明: 观察到

$$\min_{y\in\Delta_n}x^TAy=\min_j\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$$

因此玩家 1 的优化问题等价为

$$\max_{x\in\Delta_m}\min_j\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$$

这可以进一步表述为线性规划问题:

$$\begin{aligned}\text{最大化}\quad & v\\ \text{满足}\quad & \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i\ge v,\quad j=1,\dots,n\\ & \sum_{i=1}^m x_i=1\\ & x_i\ge 0\end{aligned}$$

我们可以假设 $A>0$，不然可以同时把 A 的所有矩阵元平移一个常数，不改变博弈结构（为什么?）。此时我们可以添加假设 $v\ge 0$。将其转化为标准线性规划形式

$$\begin{aligned}\text{最大化}\quad & \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix}\\ \text{满足}\quad & \begin{bmatrix}-A^T & \mathbf{1}_n\\ \mathbf{1}_m^T & 0\\ -\mathbf{1}_m^T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}\\ & x\ge 0,\quad v\ge 0\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{1}_n$ 是 n 维全 1 向量。其对偶问题为:

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ \text{满足} \quad & \begin{bmatrix} -A & \mathbf{1}_m & -\mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & y \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0 \end{aligned}$$

简化得

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & u \\ \text{满足} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq u, \quad i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j \geq 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

这里 $u = \alpha - \beta$。由假设 $A > 0$，这个线性规划问题等价于

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & u \\ \text{满足} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq u, \quad i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

这个等价为优化问题

$$\min_{y \in \Delta_n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \min_{y \in \Delta_n} \max_{x \in \Delta_m} x^T A y$$

根据线性规划强对偶定理，原问题和对偶问题的最优值相等，即:

$$\max_{x \in \Delta_m} \min_{y \in \Delta_n} x^T A y = \min_{y \in \Delta_n} \max_{x \in \Delta_m} x^T A y$$

这就证明了 Minimax 定理。 □

定理 9.3.2 对于有限策略的两人零和博弈，混合策略纳什均衡总是存在的。

证明: 由 Minimax 定理，

$$\max_{x \in \Delta_m} \min_{y \in \Delta_n} x^T A y = \min_{y \in \Delta_n} \max_{x \in \Delta_m} x^T A y = v$$

设 x_*, y_* 满足

$$\min_{y\in\Delta_n} x_*^T Ay = \max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n} x^T Ay, \qquad \max_{x\in\Delta_m} x^T Ay_* = \min_{y\in\Delta_n}\max_{x\in\Delta_m} x^T Ay$$

则

$$v = \min_{y\in\Delta_n} x_*^T Ay \le x_*^T Ay_* \le \max_{x\in\Delta_m} x^T Ay_* = v$$

由此得

$$\min_{y\in\Delta_n} x_*^T Ay = x_*^T Ay_* = \max_{x\in\Delta_m} x^T Ay_*$$

即 (x_*, y_*) 是混合策略纳什均衡。 $\square$

这说明混合策略纳什均衡正是使得这两个优化问题有相同解的策略组合。

第十章　量子论简介

10.1　量子力学基本原理

10.1.1　量子态

在经典力学中，系统的状态由位置和速度等物理量完全确定。例如，一个粒子的状态可以用 (x, v) 或 (x, p) 来描述，其中 x 是位置，v 是速度，p 是动量。这种描述方式是确定性的，即给定初始状态和受力作用，我们可以精确预测系统未来的演化。

在量子力学中，系统的状态由一个完备的酉空间 V 来描述（即希尔伯特空间）。在具体的量子系统中，V 可以是有限维的（如自旋系统），但通常是无穷维的（如波函数）。

作为一个复线性空间，对任意两个量子态 $u_1, u_2 \in V$ 以及 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$，线性组合

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in V$$

仍然是一个量子态，这个性质称为线性叠加原理。这是量子力学中最基本的原理之一，也是量子理论区别于经典理论的一个本质差别。它意味着量子系统可以处于多个特定状态的线性组合中，是产生例如量子干涉、量子纠缠等现象的基础。

作为一个酉空间，V 上赋予了一个厄米内积的结构，这个结构构成了例如量子测量、不确定性原理、量子跃迁等现象的基础。

Dirac 符号

量子力学中通常用 Dirac 符号来表示态向量和内积，其中：

- $|\psi\rangle$ 表示一个态向量，称为 “ket”
- $\langle\phi|$ 表示一个对偶向量，称为 “bra”
- $\langle\phi|\psi\rangle$ 表示两个向量的厄米内积，称为 “bracket”。厄米性质表述为

$$\langle\phi|\lambda\psi\rangle = \lambda\langle\phi|\psi\rangle, \quad \langle\lambda\phi|\psi\rangle = \bar{\lambda}\langle\phi|\psi\rangle, \quad \overline{\langle\phi|\psi\rangle} = \langle\psi|\phi\rangle$$

这里 $\phi, \psi \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$。

量子态的线性叠加在 Dirac 符号下表示为：

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle + \cdots + c_n|\psi_n\rangle$$

其中 $c_i \in \mathbb{C}$ 是复数系数。

10.1.2 观测量与量子算符

在量子力学中，物理观测量（如位置、动量、自旋、能量等）对应于线性映射

$$A : V \to V$$

也称为线性算符。我们可以利用内积定义算符 A 的对偶，也称为伴随算符。

定义 10.1.1 算符 A 的伴随算符 $A^\dagger$ 定义为满足以下条件的算符：

$$\langle A^\dagger \phi | \psi \rangle = \langle \phi | A\psi \rangle, \quad \forall \phi, \psi \in V$$

算符 A 称为自伴算符（也称为厄米算符），如果满足 $A = A^\dagger$。

例 10.1.1. 设 $V = \mathbb{C}^n$ 是 n 维标准酉空间。两个向量

$$u = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

的标准厄米内积为

$$\langle u | v \rangle := \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} w_i$$

此时一个量子算符 A 对应于 n 阶复方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

伴随算符 $A^\dagger$ 对应于方阵的共轭转置

$$A^\dagger = \overline{A}^T$$

厄米算符对应于厄米方阵。

命题 10.1.2 厄米算符的特征值都是实数。

证明: 设 A 是厄米算符，$|\psi\rangle$ 是其特征向量，对应特征值 λ，即 $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$。那么：

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \psi | \lambda | \psi \rangle = \lambda \langle \psi | \psi \rangle$$

另一方面，

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle A^\dagger \psi | \psi \rangle = \langle A\psi | \psi \rangle = \langle \lambda \psi | \psi \rangle = \overline{\lambda} \langle \psi | \psi \rangle$$

由于 $\langle \psi | \psi \rangle \neq 0$，比较两式可得 $\lambda = \overline{\lambda}$，即 λ 是实数。 $\square$

命题 10.1.3 厄米算符的属于不同特征值的特征向量相互正交。

证明: 设 $A|\psi_1\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle$，$A|\psi_2\rangle = \lambda_2|\psi_2\rangle$，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，λ_i 是实数。计算

$$\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\lambda_2|\psi_2\rangle = \lambda_2\langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

另一方面，

$$\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle = \langle A\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\lambda_1\psi_1|\psi_2\rangle = \lambda_1\langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

因此，

$$\lambda_2\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \lambda_1\langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，必有 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$，即 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 正交。 □

10.1.3 量子测量与概率诠释

量子测量是量子力学中最微妙的概念之一，与经典测量有本质区别。

特征值解释

量子力学中的可观测量 A 对应于厄米算符，其测量结果为 A 的某个特征值（我们知道是一个实数）。取可观测量 A 的一组正交归一的特征向量为 $\{|\psi_a\rangle\}_a$

$$A|\psi_a\rangle = \lambda_a|\psi_a\rangle, \quad \langle\psi_a|\psi_b\rangle = \delta_{ab}$$

它们构成 V 的一组标准正交基。A 的测量值具体是哪个 λ_a 并不是确定的，而是以概率的方式呈现（见如下 Born 规则）。

归一化与概率分布

在量子力学中对量子态 $|\psi\rangle$ 作测量与 $c|\psi\rangle$ 是等价的，c 是非零复数。因此我们通常考虑归一态，即满足归一化条件

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

将量子态 $|\psi\rangle$ 按 A 的特征向量展开：

$$|\psi\rangle = \sum_a c_a|\psi_a\rangle, \quad c_a = \langle\psi_a|\psi\rangle$$

则归一化条件等价于

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{a,b} \overline{c_a}c_b\langle\psi_a|\psi_b\rangle = \sum_a |c_a|^2 = 1$$

即 $|c_a|^2$ 给出了一个概率分布。

概率诠释 (Born 规则)

Born 规则：在归一化量子态 $|\psi\rangle$ 中对 A 作测量，则测量结果是 λ 的概率是

$$\sum_{\lambda_a=\lambda} |c_a|^2$$

归一化条件 $\sum_a |c_a|^2 = 1$ 保证了概率解释的一致性。

根据测量的概率诠释，物理量 A 在归一态 $|\psi\rangle$ 下的期望值为：

$$\langle A\rangle_\psi = \sum_a \lambda_a |c_a|^2 = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

这个结果可以通过直接计算验证：

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \sum_{a,b} \overline{c_a} c_b \langle\psi_a|A|\psi_b\rangle = \sum_{a,b} \overline{c_a} c_b \lambda_b \langle\psi_a|\psi_b\rangle = \sum_a |c_a|^2 \lambda_a$$

对于非归一化态，期望值定义为：

$$\langle A\rangle_\psi := \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

量子态坍缩

如果在量子态 $|\psi\rangle$ 测量 A 得到结果 λ_a，测量后量子态 $|\psi\rangle$ 坍缩到对应的特征态 $|\psi_a\rangle$。量子态的坍缩对测量的本质提出了深刻的挑战，引发了很多的探讨和争议，历史上也提出了其他理论来解释这个现象（例如多宇宙理论等）。

10.1.4 不确定性原理

定义 10.1.4 厄米算符 A 在态 $|\psi\rangle$ 下的测量方差（或不确定性）定义为：

$$(\Delta_\psi A)^2 := \langle (A - \langle A\rangle_\psi)^2\rangle_\psi$$

对于归一化态，这可以写为：

$$(\Delta_\psi A)^2 = \langle\psi|(A - \langle A\rangle_\psi)^2|\psi\rangle = \langle (A - \langle A\rangle_\psi)\psi|(A - \langle A\rangle_\psi)\psi\rangle$$

方差为零的条件是：

$$\Delta_\psi A = 0 \iff (A - \langle A\rangle_\psi)|\psi\rangle = 0$$

即 $|\psi\rangle$ 是 A 的特征向量，根据测量的概率诠释，此时 A 在特征向量 $|\psi\rangle$ 上的测量值是确定的，即对应特征值。因此方差刻画了测量的不确定性。

定理 10.1.5. [不确定性原理] 对于任意两个厄米算符 A 和 B，以及任意态 $|\psi\rangle$，有：

$$(\Delta_\psi A)^2 (\Delta_\psi B)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B]\rangle_\psi|^2$$

其中 $[A, B] = AB - BA$ 是算符的对易子。

注 10.1.1. 对于无穷维态空间，严格意义上需要假设 $|\psi\rangle$ 属于 AB 和 BA 的定义域。

证明*:* 令 $|u\rangle = (A - \langle A\rangle_\psi)|\psi\rangle$，$|v\rangle = (B - \langle B\rangle_\psi)|\psi\rangle$，则：

$$(\Delta_\psi A)^2 = \langle u|u\rangle, \quad (\Delta_\psi B)^2 = \langle v|v\rangle$$

由柯西-施瓦茨不等式：

$$\langle u|u\rangle\langle v|v\rangle \geq |\langle u|v\rangle|^2$$

令 $C = A - \langle A\rangle_\psi$，$D = B - \langle B\rangle_\psi$，则 $[C,D] = [A,B]$，且

$$\langle u|v\rangle = \langle\psi|CD|\psi\rangle$$

注意到：

$$|\langle u|v\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\langle\psi|[C,D]|\psi\rangle + \frac{1}{2}\langle\psi|\{C,D\}|\psi\rangle\right|^2$$

其中 $\{C,D\} = CD + DC$ 是反对易子。由于 $[C,D]$ 是反厄米的（其期望值是纯虚数），而 $\{C,D\}$ 是厄米的（其期望值是实数），所以：

$$|\langle u|v\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle[C,D]\rangle_\psi|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{C,D\}\rangle_\psi|^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[C,D]\rangle_\psi|^2 = \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\psi|^2$$

即

$$(\Delta_\psi A)^2(\Delta_\psi B)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\psi|^2$$

□

特别地，对于位置和动量算符，有 $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$，这里 $\hbar$ 是普朗克常数。所以：

$$(\Delta_\psi\hat{x})(\Delta_\psi\hat{p}) \geq \frac{\hbar}{2}$$

这就是海森堡不确定性原理的精确数学表述。

10.1.5 复合系统

当系统由多个粒子组成时，复合系统的希尔伯特态空间是各粒子希尔伯特态空间的张量积。例如对于分别由态空间 V_1, V_2 描述的两个粒子系统，复合系统态空间为

$$V_1 \otimes V_2$$

其中的态可以写为：

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij}|\phi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$$

这里 $\{|\phi_i\rangle\}$ 和 $\{|\chi_j\rangle\}$ 分别是 V_1 和 V_2 的基。类似的，对于 N 个粒子系统，态空间为

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_N$$

10.2 自旋系统

我们这一节通过一个简单的有限维量子系统的例子，来讨论量子力学中的一些重要的现象。这个系统称为二维自旋系统，态空间为标准的二维酉空间

$$V = \mathbb{C}^2$$

10.2.1 Pauli 矩阵与自旋算符

考虑 $V = \mathbb{C}^2$ 上的厄米算符 A。假设

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

自伴条件 $A = A^\dagger$ 要求：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a, d \in \mathbb{R}, \quad b = \overline{c}$$

因此 A 可以唯一的表达为

$$A = \alpha_0 I_2 + \alpha_1 \sigma_x + \alpha_2 \sigma_y + \alpha_3 \sigma_z, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

这里 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是单位阵，$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 称为 Pauli 矩阵

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pauli 矩阵满足：

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I_2 \\ \sigma_x \sigma_y = i\sigma_z = -\sigma_y \sigma_x \\ \sigma_y \sigma_z = i\sigma_x = -\sigma_z \sigma_y \\ \sigma_z \sigma_x = i\sigma_y = -\sigma_x \sigma_z \end{cases}$$

并且 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 的特征值均为 ± 1。

更一般的，我们也可以构造沿着任意方向的自旋算符

定义 10.2.1 对于 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$，定义：

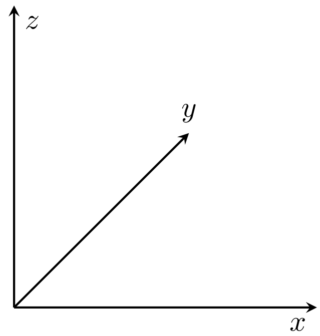
$$\sigma_{\vec{n}} := \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$$

$\sigma_{\vec{n}}$ 满足性质：

$$\sigma_{\vec{n}}^2 = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) I_2 = I_2$$

且 $\sigma_{\vec{n}}$ 特征值均为 ± 1。

10.2.2 自旋态



自旋系统 V 中常见的一组基矢为：

- σ_z 的特征向量

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z|u\rangle = |u\rangle, \quad \sigma_z|d\rangle = -|d\rangle$$

其中 u 表示 “up”，即自旋向上；d 表示 “down”，即自旋向下。

- σ_x 的特征向量

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x|r\rangle = |r\rangle, \quad \sigma_x|l\rangle = -|l\rangle$$

其中 r 表示 “right”，即自旋向右；l 表示 “left”，即自旋向左。

- σ_y 的特征向量

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad |o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\sigma_y|i\rangle = |i\rangle, \quad \sigma_y|o\rangle = -|o\rangle$$

其中 i 表示 “in”，即自旋向内；o 表示 “out”，即自旋向外。

这三组基本都是正交归一的，之间的基变换关系为：

$$\begin{cases} |r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle \\ |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle \end{cases} \qquad \begin{cases} |i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle \\ |o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle \end{cases}$$

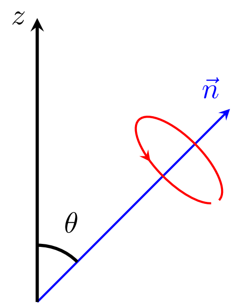
更一般的，沿着单位向量 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 自旋的量子态为 $\sigma_{\vec{n}}$ 的特征向量。

例 10.2.1. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量 $\vec{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$，其对应的自旋算符为

$$\sigma_{\vec{n}} = \sin\theta \cdot \sigma_x + \cos\theta \cdot \sigma_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

特征值 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$ 对应的特征向量为

$$|\lambda_1\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad |\lambda_2\rangle = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$



我们考虑在自旋态 $|u\rangle$ 中测量算符 $\sigma_{\vec{n}}$。由测量的概率诠释，测量值可能是 λ_1 或者 λ_2，其概率分别为

$$P(\lambda_1) = |\langle\lambda_1|u\rangle|^2 = \cos^2(\theta/2)$$
$$P(\lambda_2) = |\langle\lambda_2|u\rangle|^2 = \sin^2(\theta/2)$$

如果我们计算算符 $\sigma_{\vec{n}}$ 在自旋态 $|u\rangle$ 中的期望值（平均值）：

$$\langle u|\sigma_{\vec{n}}|u\rangle = \lambda_1\cos^2(\theta/2) + \lambda_2\sin^2(\theta/2) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = \cos\theta$$

这个平均值反应了 $\vec{n}$ 与 z 轴夹角是 θ。

命题 10.2.2 对于任意归一化态 $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$，存在单位向量 $\vec{n}$ 使得 $\langle\sigma_{\vec{n}}\rangle_\psi = 1$。

证明: 设 $|\psi\rangle$ 与 $|\psi^\perp\rangle$ 构成 $\mathbb{C}^2$ 的标准正交基。在这组基下定义算符:

$$A : |\psi\rangle \mapsto |\psi\rangle, \quad |\psi^\perp\rangle \mapsto -|\psi^\perp\rangle$$

A 是厄米算子且 $\mathrm{Tr}(A) = 0$，故可写为:

$$A = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z = \vec{n}\cdot\vec{\sigma}$$

由 $A^2 = I$ 得 $\vec{n}$ 是单位向量。由

$$A|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\sigma_{\vec{n}}\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle = 1$$

□

10.3 量子纠缠

10.3.1 双自旋系统与纠缠态

考虑由两个自旋粒子构成的复合系统，其态空间由张量积给出

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

它的一组基为

$$
\begin{aligned}
|uu\rangle &= |u\rangle \otimes |u\rangle \\
|ud\rangle &= |u\rangle \otimes |d\rangle \\
|du\rangle &= |d\rangle \otimes |u\rangle \\
|dd\rangle &= |d\rangle \otimes |d\rangle
\end{aligned}
$$

在这组基下，$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 中的态 $|\psi\rangle$ 可以表示

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}|\alpha\beta\rangle, \quad \alpha, \beta \in \{u, d\}, \quad c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$$

定义 10.3.1 若 $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 可以写成

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$$

则称其为乘积态。不能表示为乘积态的态称为纠缠态。

例 10.3.1. 量子态

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|uu\rangle - \frac{1}{2}|ud\rangle + \frac{1}{2}|du\rangle - \frac{1}{2}|dd\rangle$$

是乘积态。可以验证

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle\right) = |r\rangle \otimes |l\rangle$$

例 10.3.2. 单重态（*singlet state*）：

$$|s\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle)$$

是纠缠态。

证明： 假设 $|s\rangle = (\alpha_1|u\rangle + \alpha_2|d\rangle) \otimes (\beta_1|u\rangle + \beta_2|d\rangle)$，展开得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle) = \alpha_1\beta_1|uu\rangle + \alpha_1\beta_2|ud\rangle + \alpha_2\beta_1|du\rangle + \alpha_2\beta_2|dd\rangle$$

比较系数：

$$\begin{cases} \alpha_1\beta_1 = 0 \\ \alpha_1\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha_2\beta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha_2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

矛盾，故 $|s\rangle$ 为纠缠态。 □

可以验证，$|s\rangle$ 也可以表达为

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|lr\rangle - |rl\rangle) = \frac{i}{\sqrt{2}}(|io\rangle - |oi\rangle)$$

10.3.2 EPR 佯谬

下面我们考虑 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 上的量子算符。定义自旋算符在双自旋系统中的扩展:

$$\sigma_\alpha^{(1)} := \sigma_\alpha \otimes I_2, \quad \sigma_\alpha^{(2)} := I_2 \otimes \sigma_\alpha, \quad \alpha = x, y, z$$

其在符合态空间 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 上的作用方式为

$$\sigma_\alpha^{(1)}(|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle) = (\sigma_\alpha|\phi_1\rangle) \otimes |\phi_2\rangle$$

$$\sigma_\alpha^{(2)}(|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle) = |\phi_1\rangle \otimes (\sigma_\alpha|\phi_2\rangle)$$

考虑在单重态 $|s\rangle$ 下对其中一个分量测量自旋。直接计算知

$$\langle\sigma_x^{(1)}\rangle_s = \langle\sigma_y^{(1)}\rangle_s = \langle\sigma_z^{(1)}\rangle_s = 0$$

因此对任意方向 $\vec{n}$:

$$\langle\vec{\sigma}_{\vec{n}}^{(1)}\rangle_s = 0$$

同理

$$\langle\vec{\sigma}_{\vec{n}}^{(2)}\rangle_s = 0$$

这说明如果只对纠缠态 $|s\rangle$ 中某一个粒子测量自旋，任何方向的测量期望值都是零!

下面考虑将处于纠缠态 $|s\rangle$ 的两个粒子分离到相互很远的位置，两边分别由 Alice 和 Bob 来进行测量。根据量子力学的基本原理

1. 当 Alice 测量 $\sigma_z^{(1)}$ 时, 如果测量结果为 $+1$（即 $\sigma_z^{(1)} = +1$），由特征向量分解

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle)$$

知量子态坍缩为 $|ud\rangle$。此时 Bob 的系统变为 $|d\rangle$ 态，测量 $\sigma_z^{(2)}$ 将得到 -1。即

$$\sigma_z^{(1)} = +1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z^{(2)} = -1$$

类似地，如果 Alice 测量 $\sigma_z^{(1)}$ 得到 -1，则量子态坍缩为 $|du\rangle$，Bob 测量 $\sigma_z^{(2)}$ 将得到 $+1$。即

$$\sigma_z^{(1)} = -1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z^{(2)} = +1$$

2. 同理，由

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|lr\rangle - |rl\rangle)$$

知，如果 Alice 测量 $\sigma_x^{(1)} = \pm 1$，则 Bob 测量 $\sigma_x^{(2)} = \mp 1$。

3. 类似地，对于 σ_y 测量，也有 $\sigma_y^{(1)} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_y^{(2)} = \mp 1$。

上述计算表明，无论纠缠态 $|s\rangle$ 中的两个粒子相隔多远，虽然测量单独粒子自旋的平均期望是 0，但是只要 Alice 作出自旋测量，那么 Bob 处粒子在这个方向的自旋就立刻完全确定了。这就是著名的 Einstein-Podolsky-Rosen（EPR）佯谬：对纠缠态的一个粒子测量会瞬间影响另一个粒子。Einstein 称其为“鬼魅般的超距作用”（“spooky action at a distance”）。

EPR 因此质疑了量子力学的不完备性。Einstein 倡导隐变量理论，认为存在尚未发现的隐变量 λ，其决定了测量结果，避免掉任何不确定性或随机性。例如，对于态：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$

可能存在隐变量 λ，比如满足：

$$\sigma_z(\lambda) = \begin{cases} +1 & \text{如果} 0 \le \lambda \le \frac{1}{2} \\ -1 & \text{如果} \frac{1}{2} \le \lambda \le 1 \end{cases}$$

如果知道 λ，则测量结果是确定的，测量的随机性是由于我们对于隐变量的未知造成的。并且隐变量满足定域性条件，即对一个粒子的测量不会瞬时影响另一个粒子。

10.3.3 贝尔不等式

Bell (1964) 提出了著名的贝尔不等式，给出了区分量子力学与隐变量理论的预测的一个具体可行方案。随后，贝尔不等式的实验验证表明，量子力学的预言是正确的，而任何定域隐变量理论都无法解释量子纠缠的非经典关联。

量子力学计算

考虑在单重态 $|s\rangle$ 下测量算符 $\sigma_{\vec{n}_1}^{(1)}\sigma_{\vec{n}_2}^{(2)} = \sigma_{\vec{n}_1} \otimes \sigma_{\vec{n}_2}$ 的期望值：

$$P(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \langle s|\sigma_{\vec{n}_1}^{(1)}\sigma_{\vec{n}_2}^{(2)}|s\rangle$$

由 Alice 和 Bob 的讨论，我们知道单重态 $|s\rangle$ 具有以下性质：

$$\begin{cases} \sigma_x^{(1)}|s\rangle = -\sigma_x^{(2)}|s\rangle \\ \sigma_y^{(1)}|s\rangle = -\sigma_y^{(2)}|s\rangle \\ \sigma_z^{(1)}|s\rangle = -\sigma_z^{(2)}|s\rangle \end{cases}$$

因此，对于任意方向 $\vec{n}$：

$$\sigma_{\vec{n}}^{(2)}|s\rangle = -\sigma_{\vec{n}}^{(1)}|s\rangle$$

由此可得

$$P(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \langle s|\sigma_{\vec{n}_1}^{(1)}\sigma_{\vec{n}_2}^{(2)}|s\rangle = -\langle s|\sigma_{\vec{n}_1}^{(1)}\sigma_{\vec{n}_2}^{(1)}|s\rangle = -(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)\langle s|s\rangle = -(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)$$

隐变量理论计算

假设存在隐变量 λ，满足：

$$A(\vec{n},\lambda)=\pm 1,\quad B(\vec{n},\lambda)=\pm 1$$

并且满足（根据如上实验测量结果）

$$A(\vec{n},\lambda)=-B(\vec{n},\lambda)$$

解释在纠缠态 $|s\rangle$ 中，隐变量服从概率分布 $p(\lambda)$，即满足：

$$\sum_i p(\lambda_i)=1$$

通过隐变量理论计算 $\sigma^{(1)}_{\vec{n}_1}\sigma^{(2)}_{\vec{n}_2}$ 的结果

$$\tilde{P}(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\sum_i p(\lambda_i)A(\vec{n}_1,\lambda_i)B(\vec{n}_2,\lambda_i)=-\sum_i p(\lambda_i)A(\vec{n}_1,\lambda_i)A(\vec{n}_2,\lambda_i)$$

考虑三个单位向量 $\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3$，计算：

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\vec{n}_1,\vec{n}_2)-\tilde{P}(\vec{n}_1,\vec{n}_3)&=-\sum_i p(\lambda_i)A(\vec{n}_1,\lambda_i)[A(\vec{n}_2,\lambda_i)-A(\vec{n}_3,\lambda_i)]\\&=-\sum_i p(\lambda_i)[1-A(\vec{n}_2,\lambda_i)A(\vec{n}_3,\lambda_i)]A(\vec{n}_1,\lambda_i)A(\vec{n}_2,\lambda_i)\end{aligned}$$

这里用到 $[A(\vec{n},\lambda)]^2=1$。因此

$$|\tilde{P}(\vec{n}_1,\vec{n}_2)-\tilde{P}(\vec{n}_1,\vec{n}_3)|\leq\sum_i p(\lambda_i)[1-A(\vec{n}_2,\lambda_i)A(\vec{n}_3,\lambda_i)]=1+\tilde{P}(\vec{n}_2,\vec{n}_3)$$

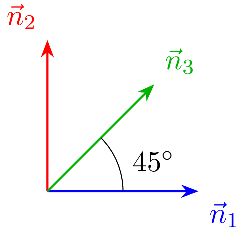
即得到

$$\text{贝尔不等式：}\quad |\tilde{P}(\vec{n}_1,\vec{n}_2)-\tilde{P}(\vec{n}_1,\vec{n}_3)|\leq 1+\tilde{P}(\vec{n}_2,\vec{n}_3)$$

量子力学与隐变量理论的比较

选择如下三个特定的方向：

$$\vec{n}_1=(1,0,0),\quad \vec{n}_2=(0,1,0),\quad \vec{n}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$$



量子力学预言：

$$P(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0, \quad P(\vec{n}_1, \vec{n}_3) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad P(\vec{n}_2, \vec{n}_3) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

于是

$$|P(\vec{n}_1, \vec{n}_3) - P(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1 + P(\vec{n}_2, \vec{n}_3) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.2929$$

由于 $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071 > 0.2929$，量子力学的预言违反了贝尔不等式。实验结果表明量子力学的预言是正确的，从而排除了定域隐变量理论。

附录 A　几何与对称

本文来源于作者 2018 年在清华大学为首届丘成桐英才班开设的教改课程《几何与对称》的部分内容 [1]，通过几何直观和棋盘游戏实例来解释“群”这个重要数学概念的一些基本思想和应用方法。我们把部分内容作为附录放在这份讲义里，希望能帮助读者更好地了解我们在定义行列式时使用的置换变换，并初步了解群这个概念。

引言

大学数学系里通常有一门基础课称为“抽象代数”，主要内容是群、环、域等这些现代代数学中的基本概念和方法。读书的时候感觉这些概念初学起来的确很“抽象”，就像这门课的名称一样。随着不断学习和积累，逐渐发现这些概念其实非常直观，朋友们也经常笑谈到这门课应该被教为“非抽象代数”。本文通过一个具体的数字游戏来聊聊非抽象代数。

我们探讨的这个经典例子称为数字推盘问题，玩法类似于华容道。考虑一个 4×4 的方形棋盘以及标记 $1-15$ 的数字方块。游戏者每次移动一个数字方块到相邻空白格，例如

15	2	1	12
8	5	6	11
4	9		7
3	14	13	10

15	2	1	12
8	5	6	11
4		9	7
3	14	13	10

问题：是否可以由下图左还原到下图右的原始状态？

15	2	1	12
8	5	6	11
4	9	10	7
3	14	13	

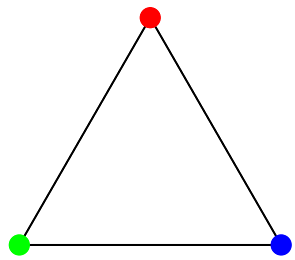
$\xrightarrow{?}$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

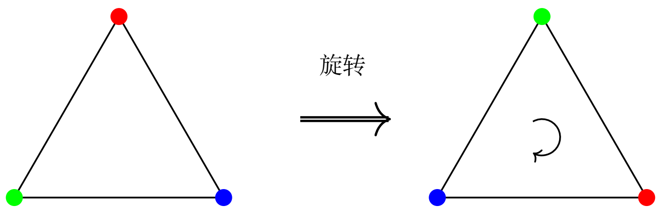
我们将围绕如何解决这个经典问题来解释“群”这个基本数学概念。

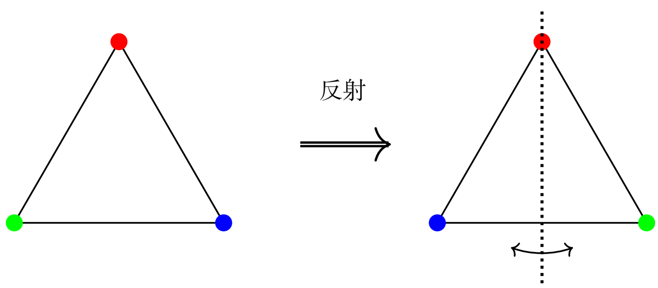
几何变换与对称性

具有几何对称的物体通常都有强烈美感和丰富结构，“群”即刻画如此。考虑等边三角形

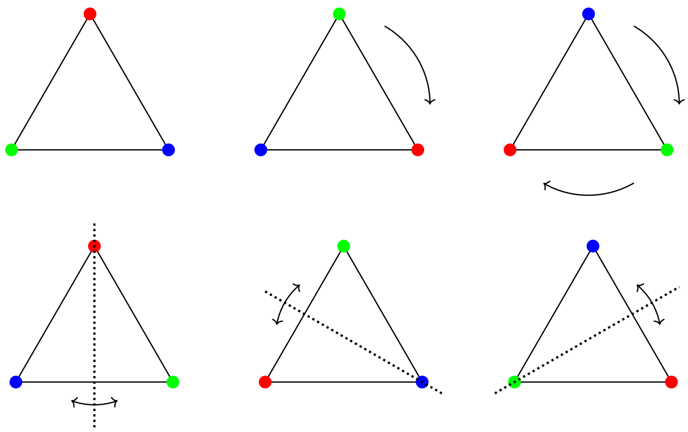


这个图形具有很强的几何对称性：我们可以通过如下的几何变换把三角形变换到它自己



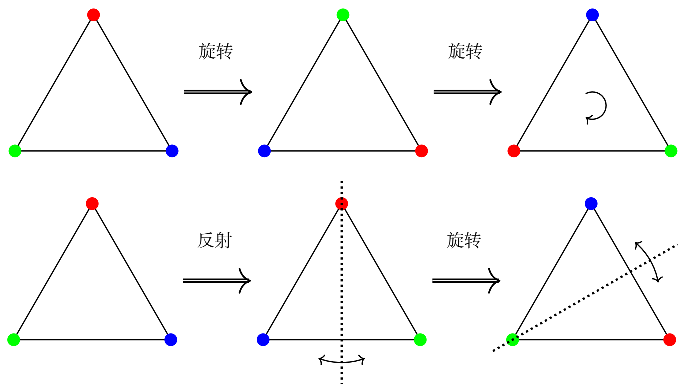


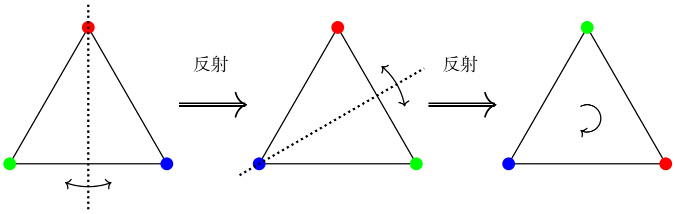
我们总共得到如下 6 个对称变换



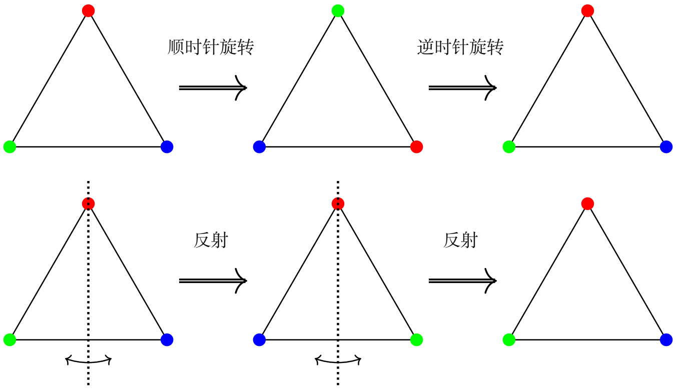
观察到这些几何变换满足如下两个重要性质：

1. 对称变换的复合还是对称变换





2. 对称变换可以由逆变换来还原



群的概念

几何对称变换的这些性质构成的数学对象称为“群”。

抽象定义而言，一个群由一个集合 G 和满足结合律的二元运算

$$\bullet : G \times G \to G$$

（称为群 G 中的乘积）组成，满足

- 单位元：存在单位元1_G，使得：$1_G \bullet g = g \bullet 1_G = g$
- 可逆性：对任一元素 g，存在逆元g^{-1} 使得：$g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = 1_G$

例如：

1. $G = \mathbb{R} - \{0\}$，$\bullet$ 为实数的乘法 $a \bullet b := ab$

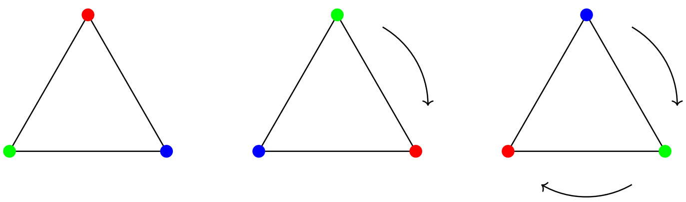
$$\text{单位元} = 1, \qquad a \text{ 的逆元是 } \tfrac{1}{a}$$

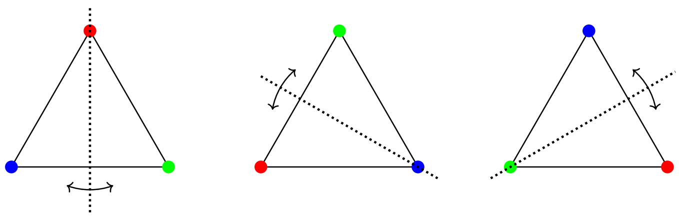
2. $G = \mathbb{Z}$，$\bullet$ 为整数的加法 $m \bullet n := m + n$

$$\text{单位元} = 0, \qquad m \text{ 的逆元是 } -m$$

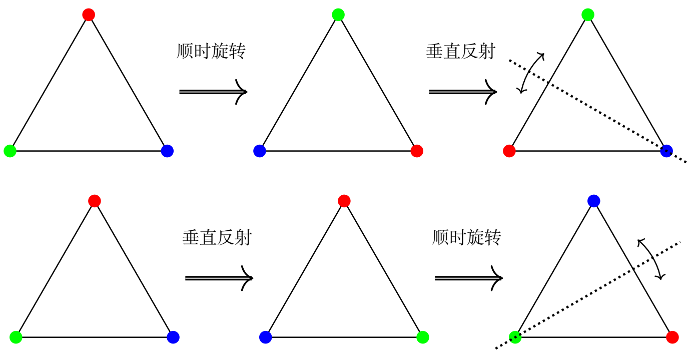
上述例子中 $\bullet$ 是交换的，即满足：$a \bullet b = b \bullet a$。乘积满足交换性质的群称为阿贝尔群。

例如：如下 6 个几何变换组合成一个群（称为二面体群D_3）

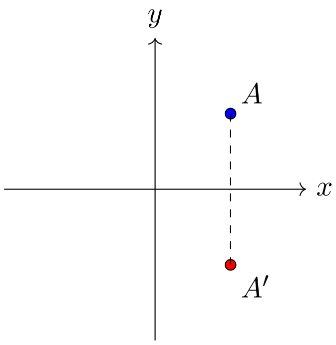


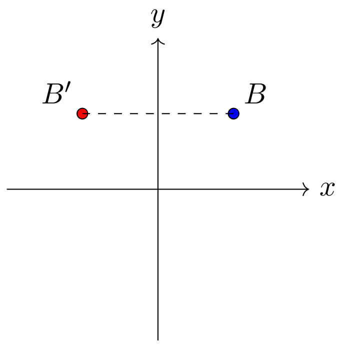


D_3 是非阿贝尔群：旋转和反射不交换！



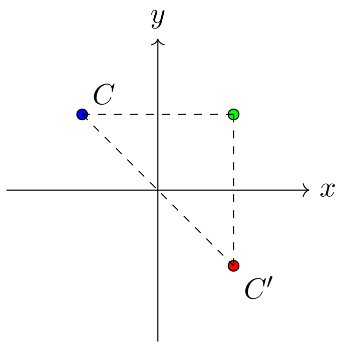
例如：考虑平面上的几何变换





σ_x= 沿 x-轴作镜像反射　　　　σ_y= 沿 y-轴作镜像反射

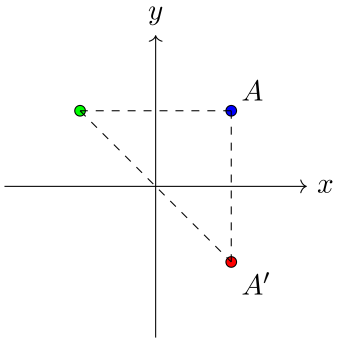
这两个变换满足 $\sigma_x \cdot \sigma_x = \sigma_y \cdot \sigma_y =$ 恒等变换。我们将两个变换 σ_x, σ_y 相复合，记为 σ_{xy}。



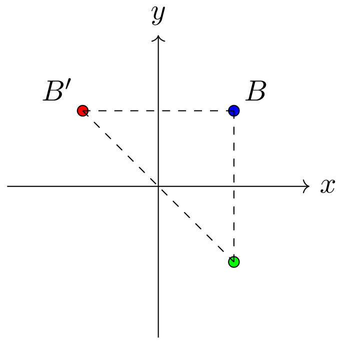
σ_{xy}= 沿原点作对径映射

$\sigma_{xy} = \sigma_x \cdot \sigma_y = \sigma_y \cdot \sigma_x$ 且 $\sigma_{xy} \cdot \sigma_{xy} =$ 恒等变换。

我们考虑变换 σ_{xy} 与 σ_x 以及 σ_y 的复合



$\sigma_{xy} \cdot \sigma_y = \sigma_x$



$\sigma_{xy} \cdot \sigma_x = \sigma_y$

我们得到如下的变换复合关系:

$$\sigma_x \cdot \sigma_x = \sigma_y \cdot \sigma_y = \sigma_{xy} \cdot \sigma_{xy} = \text{恒等变换}$$

$$\sigma_x \cdot \sigma_y = \sigma_y \cdot \sigma_x = \sigma_{xy}$$

$$\sigma_y \cdot \sigma_{xy} = \sigma_{xy} \cdot \sigma_y = \sigma_x$$

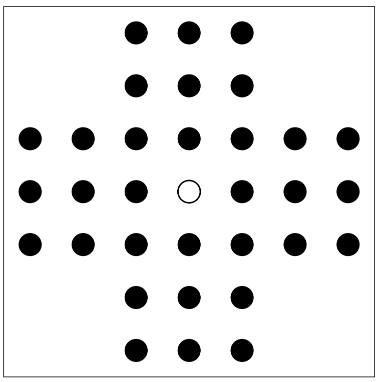
$$\sigma_{xy} \cdot \sigma_x = \sigma_x \cdot \sigma_{xy} = \sigma_y$$

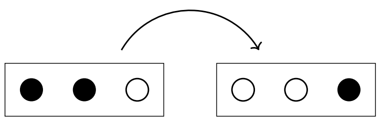
这些变换 $\{1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\}$ 构成一个阿贝尔群，称为Klein 四元群。特别的我们有

$$\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_{xy} = \text{恒等变换（单位元 1）}$$

一个古老的游戏 (Peg Solitaire)

群的结构表现为变换。在实际运用中，一个重要的思想是在一系列丰富的变换中找到不变的对象。作为一个例子，我们考虑一个古老的游戏:

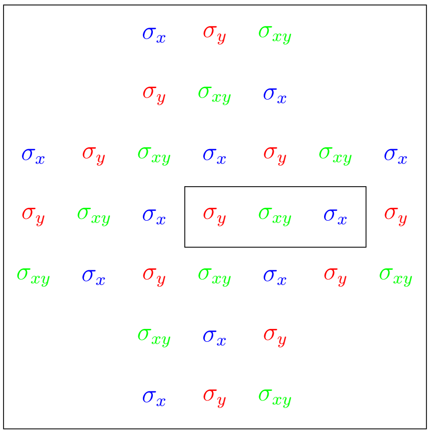




游戏规则: 每次把一个黑子隔着相邻 (水平或者垂直) 的另一个黑子跳到空白处，同时移除被跳过的黑子。如上图。

问题: 是否可以使得棋盘上最后只剩下一个黑子? 如果可以，这个黑子落在哪里?

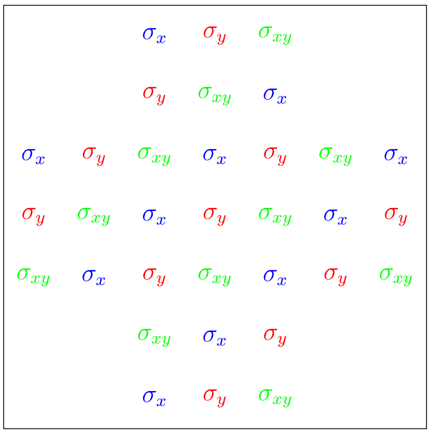
通过实践很容易发现第一问的答案是肯定的，我们用群论方法来分析第二问。把 Klein 四元群元素如下标记到棋盘中

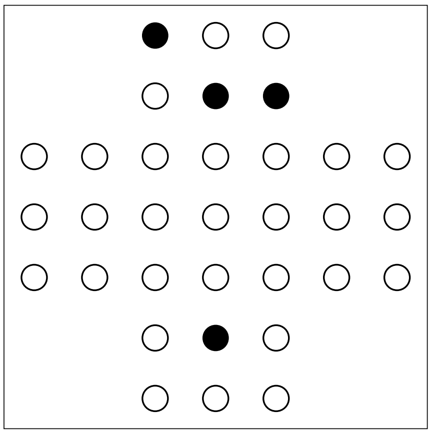


这个标记方法使得直线上任意三个相邻元素的乘积都是恒等变换单位元 1。

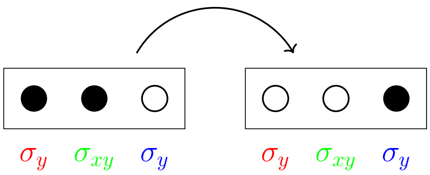
设 C 是棋盘上的一个黑子分布。定义 C 的权为

$$[C] = \text{所有的黑子位置上的 Klein 四元群元素相乘}$$





上图右的权 $=\sigma_x \cdot \sigma_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_x = \sigma_y$



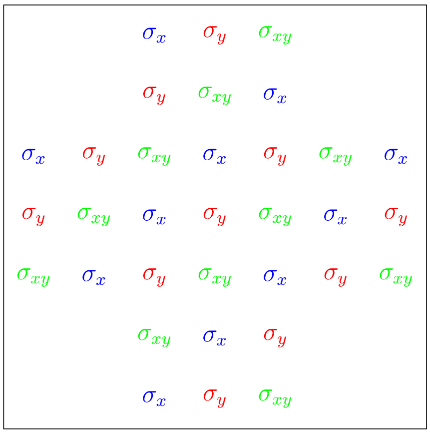
$\sigma_y \cdot \sigma_{xy} = \sigma_x$

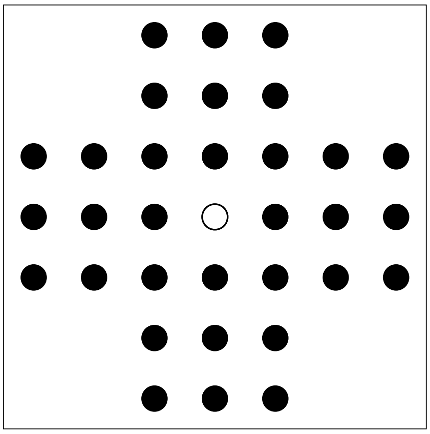
观察到：如果 C 走一步得到 C'，则

$$[C] = [C']$$

具有相同的权。因此“权”为游戏过程中的一个不变量。

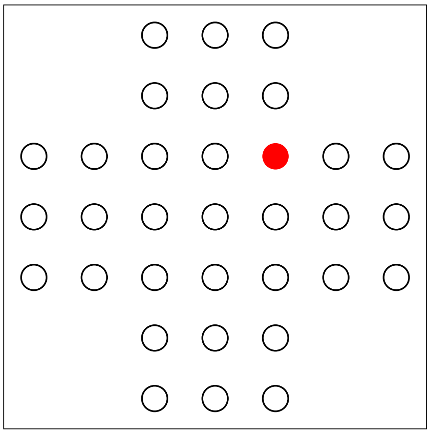
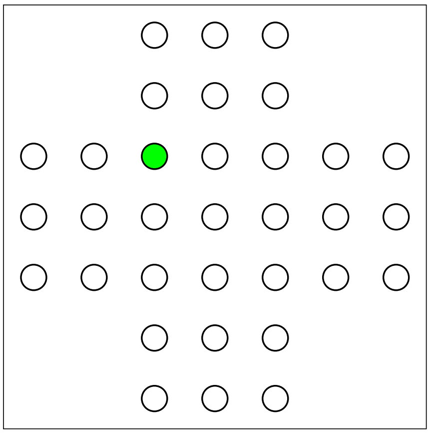
容易计算初始黑子分布的权为 σ_y



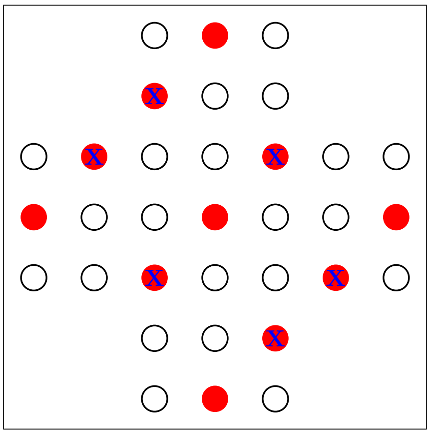


因此最后一个黑子只可能落在标记为 σ_y 的位置。

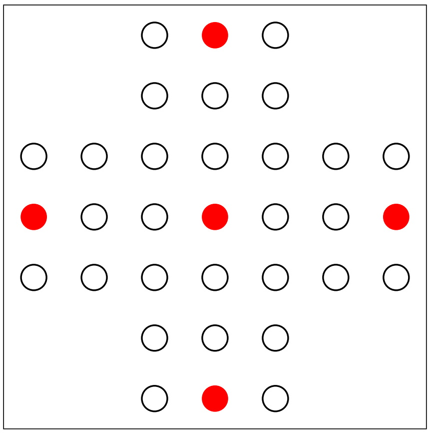
黑子最后不可能落在如下右图绿点的位置 (权为σ_{xy})。由左右对称性，可以排除最后一个黑子落在如下左图的可能性（否则可以采取左右镜像的走法使得最后落在右图绿点）。

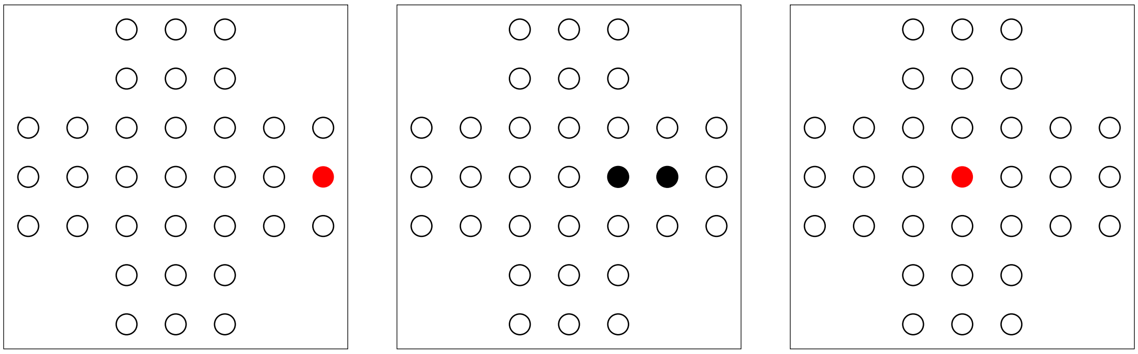
类似对称性分析，我们可以共排除如下 6 种可能



最后一个黑子只能落在如下图中的某个位置



实际上这 5 种可能性都可以达到，而且我们总可以使得最后一个黑子落在正中间。假如最后一个黑子落在如下左图的位置，则上一步如中间图。可以改变走法使得最后一个黑子落在右图的位置。这样我们就完整地解决了这个问题。



置换群

集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 到自己的一个一一映射称为一个n 元置换。例如：如下映射 σ 是一个 5 元置换

$$\sigma : 1, 2, 3, 4, 5 \to 3, 1, 5, 2, 4$$

两个置换的复合也是置换。所有 n 元置换构成一个群 (称置换群)，记为 S_n。

一个 n 元置换 σ 可以记为

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix}$$

σ 表示将 1 变成 i_1，2 变成 i_2，...，n 变成 i_n。例如

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

表示置换 $\sigma : 1, 2, 3, 4, 5 \to 3, 1, 5, 2, 4$。乘积 $\alpha\beta$ 表示先作用 β 置换，再作用 α 置换。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

如果置换 σ 把其中 k 个元素映射为

$$\sigma : i_1, i_2, i_3, \cdots, i_k \to i_2, i_3, \cdots, i_k, i_1$$

而把其他元素映射到自己，我们称 σ 是一个长度为 k 的轮换，并把 σ 简化标记为

$$\sigma = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)$$

例如：

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} = (2\ 3\ 5)$$

任意一个置换总可以表示为一些轮换的乘积，例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = (1)(24)(365) = (24)(365)$$

其中 (1) 表示的是恒等置换，可以省略不记。

交错群（偶置换群）

长度为 2 的轮换 $(i\ j)$ 称为一个对换。例如

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = (2\ 5)$$

每个轮换均可以表示为一些对换的乘积，但是这种表达方式不唯一。例如

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2)(2\ 3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

由于每个置换总可以表示为一些轮换的乘积，因此每个置换也总可以表示成一些对换的乘积。虽然表达法不唯一，但是容易发现不同表达法里包含的对换个数的奇偶性是确定不变的，称为该置换的奇偶性。例如：长度 k 的轮换可以写成 $k-1$ 个对换相乘

$$(1\ 2\ 3\ \ldots\ k) = (1\ k)(1\ k-1)\cdots(1\ 3)(1\ 2)$$

因此我们知道奇长度的轮换是偶置换，偶长度的轮换是奇置换。例如

$$\begin{aligned} \text{奇置换：}\quad & (2\ 3), \quad (1\ 3\ 4\ 7) = (1\ 7)(1\ 4)(1\ 3) \\ \text{偶置换：}\quad & (1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2), \quad (4\ 3\ 2\ 1\ 6) \end{aligned}$$

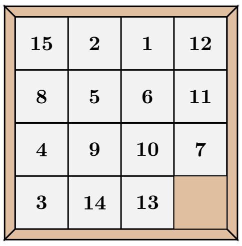
置换的复合满足

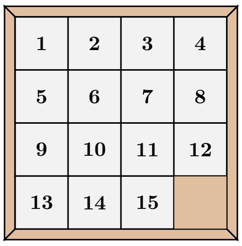
$$\begin{aligned} &\text{奇置换} \times \text{奇置换} \to \text{偶置换} \\ &\text{奇置换} \times \text{偶置换} \to \text{奇置换} \\ &\text{偶置换} \times \text{偶置换} \to \text{偶置换} \end{aligned}$$

因此 S_n 中所有偶置换构成一个群（称为交错群），记为 A_n 。

数字推盘问题的解-必要条件

问题: 是否可以由图左还原到图右原始位置?



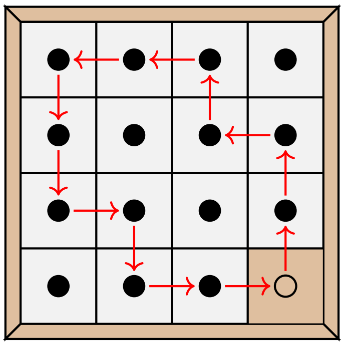


上图左对应于一个置换

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 15 & 2 & 1 & 12 & 8 & 5 & 6 & 11 & 4 & 9 & 10 & 7 & 3 & 14 & 13 & 16 \end{bmatrix}$$

这里我们把空白标记为 16。

如果棋盘的布置可以从原始的位置（上图右）移动得到，它对应的置换 σ 应该满足什么性质？移动过程可以通过记录空白位置的走动来标志



每个移动为 S_{16} 中的一个对换 (空白标志为 16)。如果要求将空白移回到出发点，则

往上走步数＝往下走步数，往左走步数＝往右走步数

总共要移动偶数步! 因此数字推盘问题可解的一个必要条件是

推盘对应的数字置换是偶置换

回到这节开始的问题，推盘对应的置换

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 15 & 2 & 1 & 12 & 8 & 5 & 6 & 11 & 4 & 9 & 10 & 7 & 3 & 14 & 13 & 16 \end{bmatrix} \\ &= (1\ 15\ 13\ 3)(4\ 12\ 7\ 6\ 5\ 8\ 11\ 10\ 9) \end{aligned}$$

是奇置换，因此我们知道它对应的数字推盘不可能还原到原始状态。

进一步，我们可以考虑

问题：如果数字推盘对应的数字置换是偶置换，是否一定可以还原?

答案是肯定的。为了证明这个结论，我们需要引入群的生成元的概念。

群的生成元

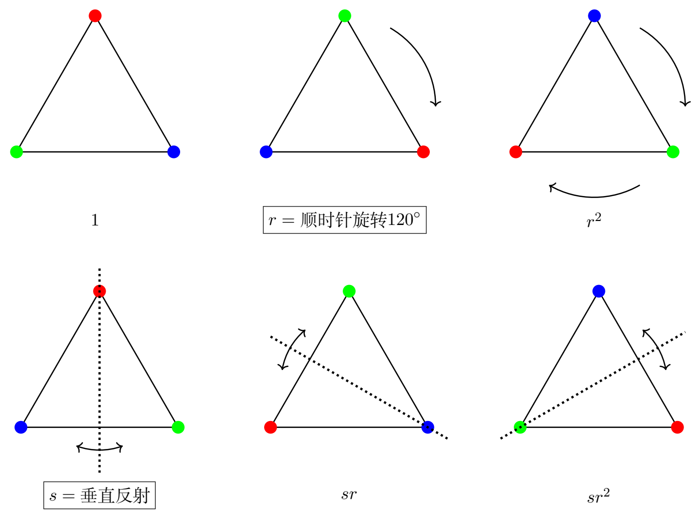
群 G 的一组元素称为生成元，如果 G 中每个元素都可以通过这组元素反复相乘得到。
例如：Klein 群　$K = \{1, a, b, c\}$

$$a \bullet b = c \qquad b \bullet c = a \qquad c \bullet a = b$$
$$a^2 = 1 \qquad b^2 = 1 \qquad c^2 = 1$$

- $\{a, b\}$ 是一组生成元。比如 1 可以由 $a \bullet a$ 得到，c 可以由 $a \bullet b$ 得到。
- $\{b, c\}$ 也是一组生成元。因此生成元的选法并不唯一。

例如：二面体群 D_3 的一组生成元是 $\{r, s\}$，它们满足

$$r^3 = 1, \quad s^2 = 1, \quad sr = r^2 s$$



例如：置换群 S_n 可以由如下对换生成

$$(1\ 2), \quad (1\ 3) \quad , \quad \cdots \quad , \quad (1\ n)$$

比如任意的置换 $(i\ j)$ 可以写成

$$(i\ j) = (1\ j)(1\ i)(1\ j)$$

由此可以生成所有的置换。类似的，给定其他一个数比如 3，如下对换

$$(3\ 1), \quad (3\ 2) \quad , (3\ 4) \quad \cdots \quad , \quad (3\ n)$$

也构成 S_n 的一组生成元。
例如：交错群 A_n (即 S_n 中的偶置换) 的一组生成元是

$$(1\ 2\ 3), \quad (1\ 2\ 4) \quad , \quad \cdots \quad , \quad (1\ 2\ n)$$

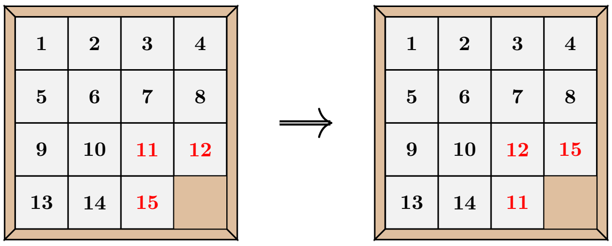
类似的，给定其他两个数比如 2, 4，如下轮换

$$(2\ 4\ 1), \quad (2\ 4\ 3) \quad , (2\ 4\ 5) \quad \cdots \quad , \quad (2\ 4\ n)$$

也构成 A_n 的一组生成元。读者可以尝试着证明这个结论。

数字推盘问题的解-充分条件

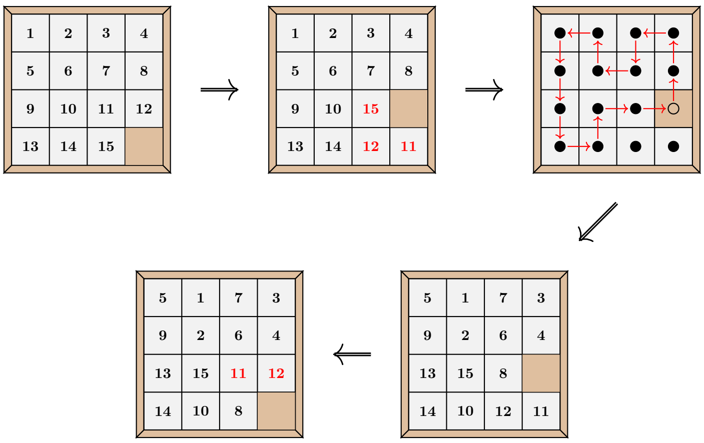
我们下面来分析求解数字推盘问题的充分条件。首先我们考虑两个特殊的移动。第一个移动为：



通过如上移动，我们知道如下置换是可以还原的

$$\tau = (11\ \ 12\ \ 15)$$

第二个移动为：



通过如上移动，我们知道如下置换是可以还原的

$$\begin{aligned}\rho &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 9 & 2 & 6 & 4 & 13 & 15 & 11 & 12 & 14 & 10 & 8 \end{bmatrix} \\ &= (1\ 5\ 9\ 13\ 14\ 10\ 15\ 8\ 4\ 3\ 7\ 6\ 2)\end{aligned}$$

观察到：如果置换 σ_1, σ_2 可以还原，那么

- $\sigma_1\sigma_2$ 可以还原：通过复合操作实现
- σ_1^{-1} 可以还原：通过逆向操作实现

换言之，所有可以还原的置换构成了一个群。

通过上述两个移动，我们知道如下两个置换是可以还原的

$$\tau = (11\ \ 12\ \ 15), \quad \rho = (1\ 5\ 9\ 13\ 14\ 10\ 15\ 8\ 4\ 3\ 7\ 6\ 2)$$

因此由它们及其逆元复合生成的置换均可还原。直接计算发现

$$\tau, \quad \rho\tau\rho^{-1}, \quad \rho^2\tau\rho^{-2}, \quad \cdots \quad , \rho^{12}\tau\rho^{-12}$$

恰好构成集合（顺序不一致）

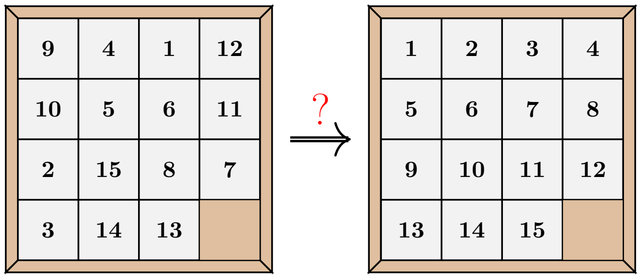
$$(11\ 12\ 1), \cdots (11\ 12\ 10), (11\ 12\ 13), (11\ 12\ 14), (11\ 12\ 15)$$

因此这些置换均可以被还原。由上述讨论，我们知道元素

$$(11\ 12\ 1), \cdots (11\ 12\ 10), (11\ 12\ 13), (11\ 12\ 14), (11\ 12\ 15)$$

生成所有的 15 元的偶置换。因此任意一个对应于偶置换的数字推盘均可以还原！总结上述讨论，我们通过置换群的结构证明了如下结论：

定理 数字推盘可以被还原到初始状态当且仅当其对应的数字置换是偶置换。



例如对于上面这个问题，它对应的置换

$$\begin{aligned}\sigma =&\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15\\ 9 & 4 & 1 & 12 & 10 & 5 & 6 & 11 & 2 & 15 & 8 & 7 & 3 & 14 & 13\end{bmatrix}\\ =&(1\ 9\ 2\ 4\ 12\ 7\ 6\ 5\ 10\ 15\ 13\ 3)(8\ 11)\end{aligned}$$

是偶置换，因此我们知道它一定可以被还原。

参考文献

[1] Li, Si. https://sili-math.github.io/