Traitement des Signaux Aléatoires
Estimation Spectrale

4 ETI – CPE Lyon

Travaux Pratiques TSA

Noms, Prénoms : Taider Silia

Groupe : A

Date : 13/10/2021

Objectifs du TP

- Comprendre la notion de densité spectrale d'énergie ou de puissance moyenne
- Manipuler différents estimateurs empiriques (à partir d'une série temporelle de taille finie) de DSE/DSPM
- Etudier l'effet du compromis biais-variance d'un estimateur

1 Préparation

Question 1 Comment peut-on calculer simplement la densité spectrale d'énergie (DSE) d'un signal certain d'énergie finie ?

réponse

La densité spectrale d'énergie d'un signal certain d'énergie finie est la TF de l'autocorrélation du signal, ou bien le module carré de la TF du signal lui-même. □

Question 2 Comment est définie la densité spectrale de puissance moyenne (DSPM) d'un processus aléatoire ?

réponse

La DSPM est définie comme étant la TF de l'autocorrélation de la réalisation $X(t)$ de la grandeur à caractériser dont on dispose. □

Question 3 Quelles sont les grandeurs qui permettent de chiffrer la qualité d'une estimation dans le cas général ? et la qualité de l'estimation spectrale en particulier.

réponse

Les estimateurs en général sont caractérisés par leur biais et leur variance, ainsi que leur precision d'estimation.
Les estimateurs spectraux sont caractérisés par leur biais, variance, précision d'éstimation ainsi que leur résolution fréquentielle. □

Question 4 Exprimer la densité spectrale de puissance moyenne (DSPM) GB (f) d'un bruit blanc stationnaire centré.

réponse

$GAMMAx(nu) = TF(gammax(to))$ ☐

Question 6 En une phrase (sans formule), décrire le procédé de calcul de la DSPM estimée G1 (f) d'une séquence aléatoire via l'estimateur simple.

réponse

On estime d'abbord la fonction d'autocorrélation et on en calcule la TF sur nfft points. On prend le module, on l'élève au carré et on divise par N. ☐

Question 7 Rappeler le mode de graduation d'une TFD-N points en fréquences réduites.

réponse

En fréquences réduites, les graduations vont de 0 à $1 - Deltaf$ avec un pas de $Deltaf = \frac{1}{N}$ ☐

Question 8 Décrire (avec une phrase) le procédé de calcul de la DSPM estimée G2 (f) d'une séquence aléatoire via l'estimateur moyenné.

réponse

Le but de l'estimateur moyenné est de diminuer la variance de l'estimateur simple. On segmente donc notre signal et on applique un estimateur simple à chaque tranche, pour en calculer ensuite la moyenne (avec l'hypothèse que les L segments sont des réalisations indépendantes et identiquement distribuées). ☐

Question 9 Que signifie le terme «compromis biais-variance» dans le cas de l'estimateur moyenné ?

réponse

Dans le cas de l'estimateur moyenné :
pour diminuer la variance, on augmente le nombre de tranches L.
En augmentant le nombre de tranches, M diminue et le biais augmente.
Le compromis biais-variance dans ce cas là est le suivant :
A L fixé, on augmente N, et M augmente avec. ☐

Question 10 Quelles modifications sont apportées au procédé de calcul de l'estimateur de Welch par rapport à l'estimateur moyenné ?

réponse

2 modifications ont été apportées à l'estimateur de Welch :
1 Chaque tranche L est pondérée par une fenêtre h.
2 Les tranches peuvent se recouvrir. ☐

3 Estimation de la DSPM d'un bruit blanc gaussien filtré

3.1 Génération du bruit à analyser

A quoi sert l'entier permettant d'initialiser le générateur ?

réponse ci-dessous

La fonction qu'on utilise génère une séquence aléatoire à chaque fois qu'on la relance. Par ailleurs, en fixant notre entier "seed", nous initialisons notre générateur de manière à ce qu'il nous génère la même séquence aléatoire à chaque fois qu'on le relance (reproductibilité). Ceci est très utile notamment pour retrouver nos valeurs (de moyenne et variance par exemple) quand on relance, et pour garantir qu'on travaille toujours sur le même signal aléatoire. □

3.2 Estimateur spectral simple

3.2.1 Script de la fonction `Matlab` développée

code ci-dessous

```
function [gamma1, f1, N]=est_simple(x, nd, nf, nfft);

f1 = [0:1/nfft:(1-1/nfft)];

N = nf - nd;
gamma1 = (abs(fft(x,nfft)).^2)/N;

[Gth,Gbiais,f] = sptheo(N,'simple');

figure(2);
hold on;
grid;
plot(f1,10*log10(gamma1),'r',f,Gth,'g',f,Gbiais,'b','LineWidth',2);
axis([0 0.5 -50 10]);
title(['Estimateur simple: affichage de de la mesure, de la DSPM et du biais sur un signal de ',num2str(N),' points']);
legend('DSPM estimee','DSPM theorique','Biais');


end
```

□

3.2.2 Expérimentation

A. Etude du biais et de la variance en fonction du nombre N d'échantillons de bruit

Commentaires.

réponse ci-dessous

En changeant la valeur de N, on est entrain de changer la valeur de nfft (on fait donc varier N en concervant la condition $N > nfft$. On remarque que plus N augmente, plus le biais tend vers 0 (le biais étant l'écart entre la courbe verte -la courbe théorique- et la courbe bleue -la modélisation de notre estimateur-). D'un autre côté, cela n'a pas d'impact sur la variance. On peut donc diminuer notre biais comme on veut sans pour autant faire bouger la variance car la formule théorique du biais d'un estimateur simple dépend directement de $\frac{1}{N}$, contrairement à celle de la variance où on voit que le N n'intervient que à l'interieur du sinus. $\square$

figures ci-dessous

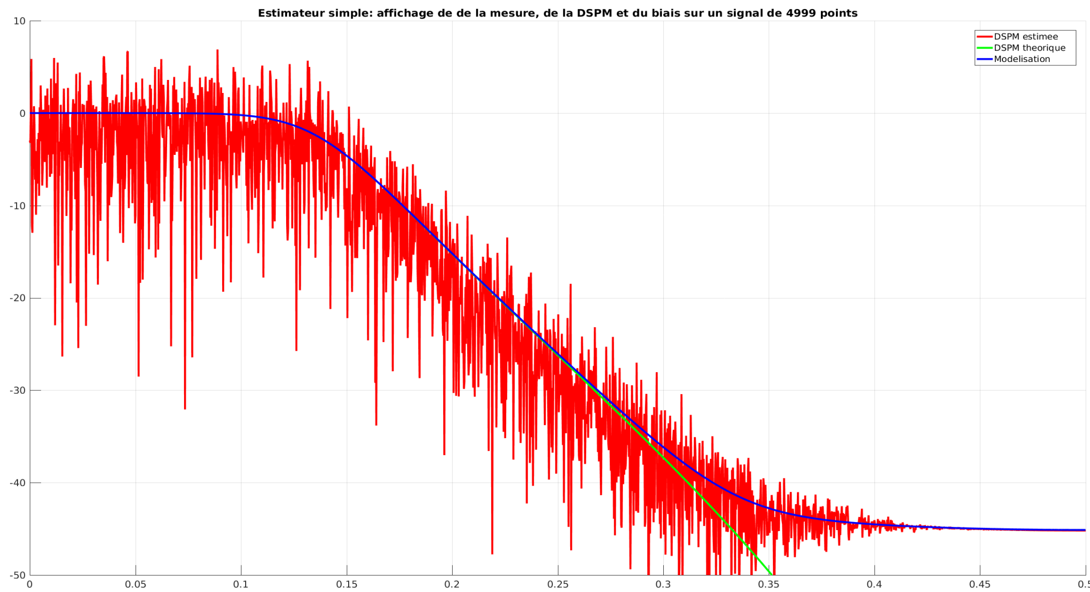

FIGURE 1 – N faible – indice de début de la séquence à 4590

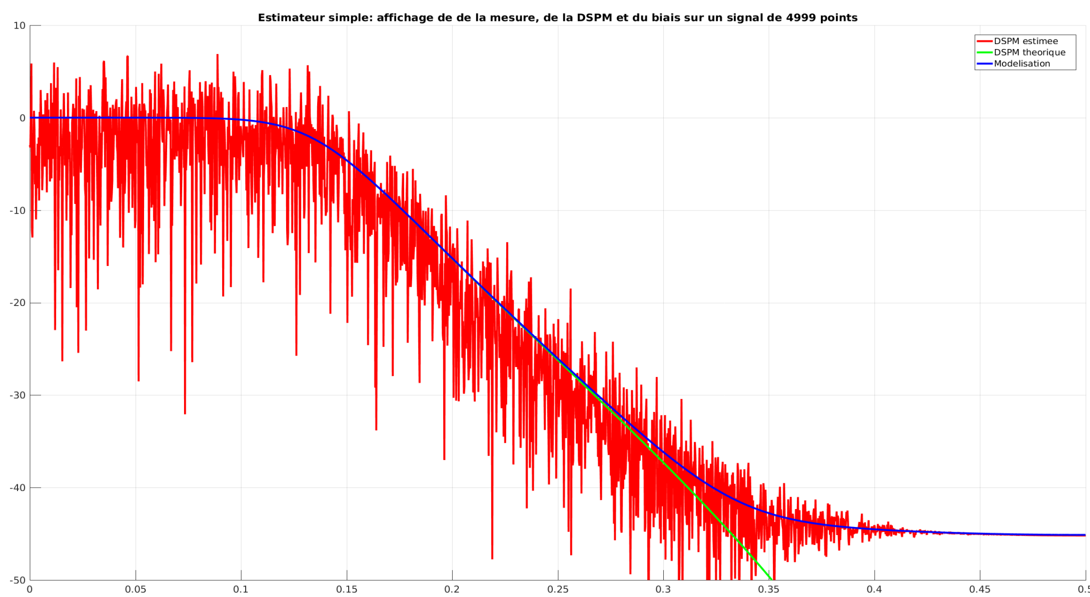

FIGURE 2 – N élevé – indice de début de la séquence à 1

B. Etude du biais et de la variance en fonction de la réalisation considérée, à N fixé

figures ci-dessous

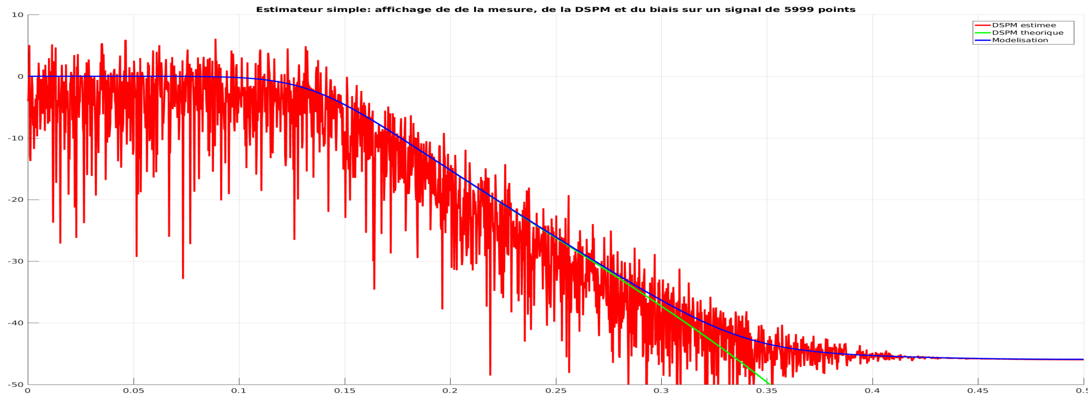

FIGURE 3 – $N \sim 1000$ – indice de début de la séquence à 1

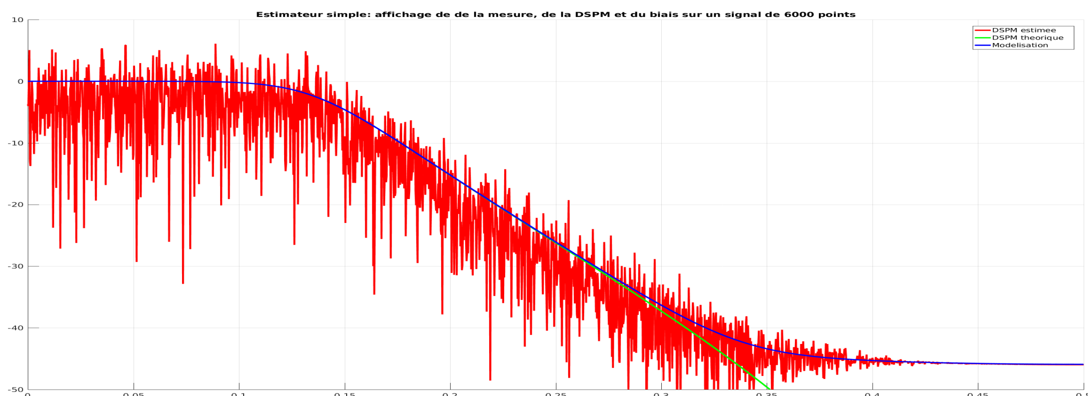

FIGURE 4 – $N \sim 1000$ – indice de début de la séquence fixé à une autre position ($\gg 1000$) dans la séquence

□

Commentaires.

réponse ci-dessous

Les images sont identiques. A N fixé, déplacer la séquence d'échantillons n'affecte ni le biais ni la variance, ça reste un signal de N points. □

C. Etude du biais et de la variance en fonction du nombre $NFFT$ de FFT

figures ci-dessous

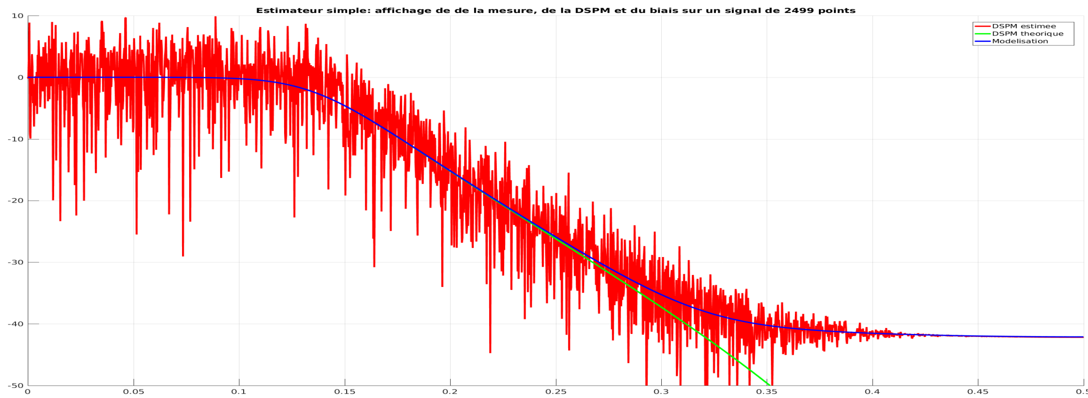

FIGURE 5 – N constant – indice de début de la séquence à 1 – $NFFT \gg N$

☐

Commentaires.

réponse ci-dessous

Augmenter nfft fait augmenter la variance. ☐

D. Conclusion Quel est le principal défaut de l'estimateur simple ?

réponse ci-dessous

L'estimateur simple est un estimateur de mauvaise qualité. Il est non fiable d'une réalisation à une autre.

3.3 Estimateur spectral moyenné

On fixera N = 4096 dans tout ce qui suit.

3.3.1 Script de la fonction `Matlab` développé

code ci-dessous

```matlab
function [gamma2, f2] = est_moyenne(x, N, M, nfft);

X = x(1:N);

[gamma2,f2] = pwelch(X,rectwin(M),0,nfft,1,'twosided');

[Gth,Gbiais,f] = sptheo(M,'moyenne','rectwin');

figure(2);
hold on;
grid;
plot(f2,10*log10(gamma2),'r',f,Gth,'g',f,Gbiais,'b','LineWidth',2);
axis([0 0.5 -50 10]);
title(['Estimateur moyenne: DSPM estimee sur ', num2str(nfft), ' points et un signal de ', num2str(N), ' echantillons segmentes en tranches de taille ', num2str(M)]);
xlabel('frequence reduite');
ylabel('amplitude en dB');
legend('DSPM estimee','DSPM theorique','Biais');


end
```

□

3.3.2 Expérimentation

En précisant bien la valeur des paramètres utilisés pour les essais, affichez les figures correspondantes aux conditions indiquées.

figure ci-dessous

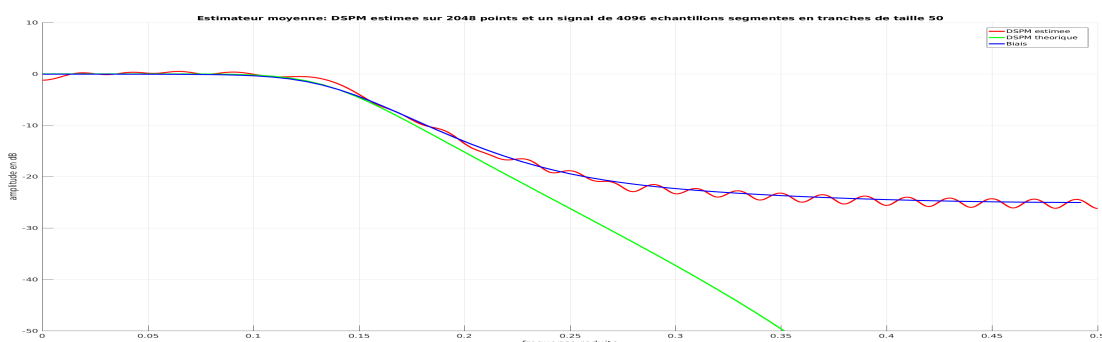

Figure 6 – $N = 4096$ – tranches courtes $M = 50$, $NFFT = 2048$

□

Commentaires

réponse ci-dessous

A N fixé, pour des tranches courtes, la modélisation suit bien la DSPM théorique (biais tend vers 0), en revanche la variance de la DSPM est encore élevée. □

figure ci-dessous

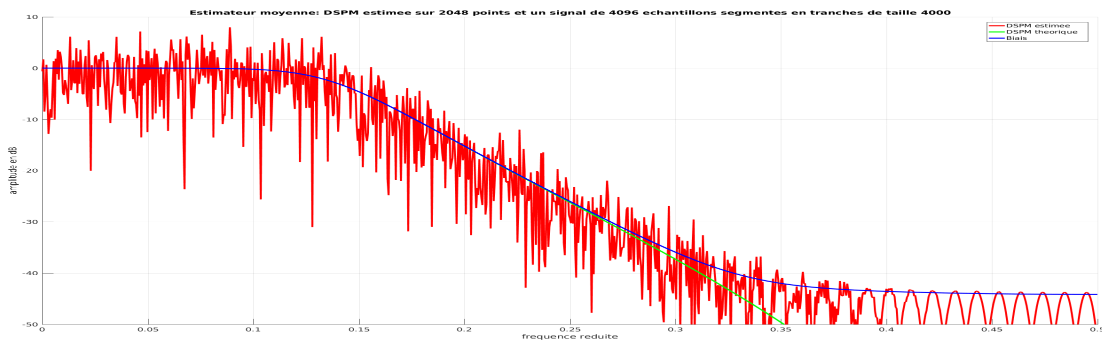

FIGURE 7 – $N = 4096$ – tranches longues $M = 4000$, $NFFT = 2048$

□

Commentaires

réponse ci-dessous

On a diminué considérablement le nombre d'échantillons en augmentant la longueur des tranches. On constate ainsi que la variance de la DSPM devient très faible et que le biais s'écarte de la DSPM théorique (moins d'échantillons = moins de précision). □

Quelle information permettrait d'obtenir le meilleur compromis biais-variance ?

réponse ci-dessous

On fait varier la valeur de M. Plus M est grand plus la variance est importante et le biais faible ; plus M est petit plus la variance est faible et le biais plus élevé. Le compromis le plus adapté dépend de l'application souhaité. Pour ce signal là nous avons pris M = 500, selon nos observations de plusieurs réalisations.

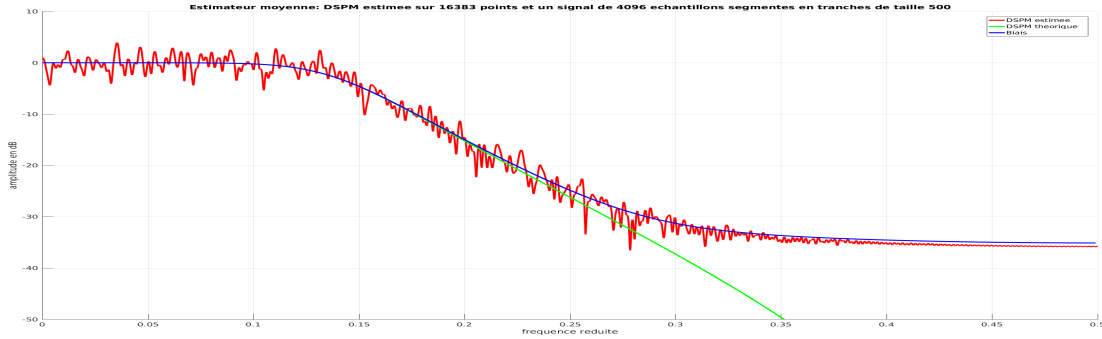

FIGURE 8 – $N = 4096$ – « Meilleur »compromis biais variance atteint pour $M = 500$, $NFFT = 16383$

□

4 Estimateur de Welch

4.1 Etude préalable des fenêtres

Quelles différences de comportement fréquentiel peut-on observer pour les 6 fenêtres proposées (lobe principal, lobes latéraux…).

réponse ci-dessous

En executant la commande fenêtre, on étudie 6 fenêtres proposées, selon 2 critères importants :
La resolution fréquentielle : critère selon lequel la fenêtre rectangulaire est la meilleure vu qu'elle a le lobe principal le plus étroit.
Le taux d'ondulation : critère selon lequel la fenêtre la Blackman est la meilleur vu qu'elle n'a aucun lobe secondaire.
Un compromis pourrait être la fenêtre de Hann. □

4.1.1 Script de la fonction `Matlab` développée

code ci-dessous

```
function [gamma2, f2] = est_moyenne(x, N, M, nfft);

X = x(1:N);

[gamma2,f2] = pwelch(X,rectwin(M),0,nfft,1,'twosided');

[Gth,Gbiais,f] = sptheo(M,'moyenne','rectwin');

figure(2);
hold on;
grid;
plot(f2,10*log10(gamma2),'r',f,Gth,'g',f,Gbiais,'b','LineWidth',2);
axis([0 0.5 -50 10]);
title(['Estimateur moyenne: DSPM estimee sur ', num2str(nfft), ' points et un signal de ', num2str(N), ' echantillons segmentes en tranches de taille ', num2str(M)]);
xlabel('frequence reduite');
ylabel('amplitude en dB');
legend('DSPM estimee','DSPM theorique','Biais');


end
```

□

4.1.2 Expérimentation

A. Etude du biais et de la variance en fonction du taux de recouvrement entre tranches
Pour N, M et $NFFT$ fixés et pour une fenêtre choisie, tracez les figures correspondantes aux conditions indiquées ci-dessous.
Que permet le recouvrement entre tranches ?

réponse ci-dessous

Le recouvrement permet, comme on peut le remarquer graphiquement, de diminuer la variance de la DSPM estimé, car il augmente le nombre de tranches. □

figure ci-dessous

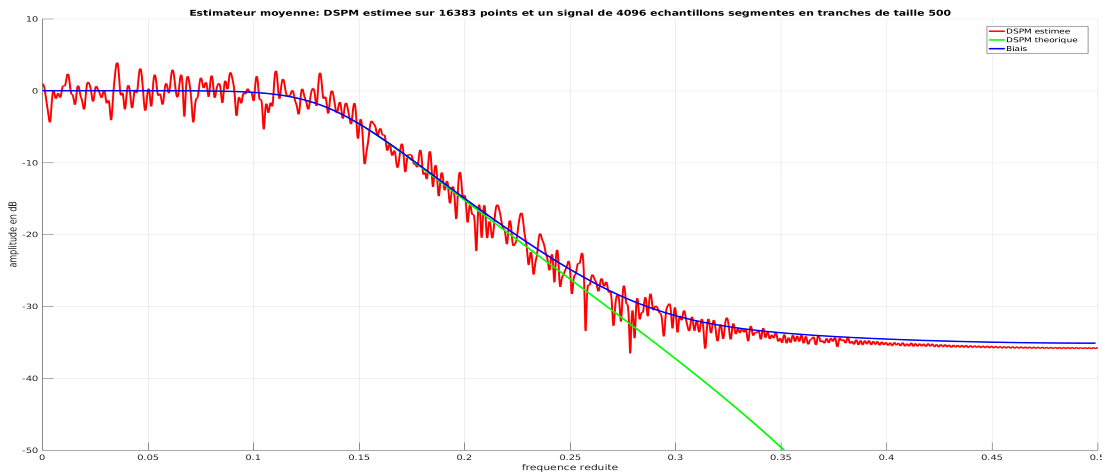

FIGURE 9 – $N = 4096$ – $M = 500$, $NFFT = 16384$. Choix de fenêtre = Hann – Recouvrement de 0%

figure ci-dessous

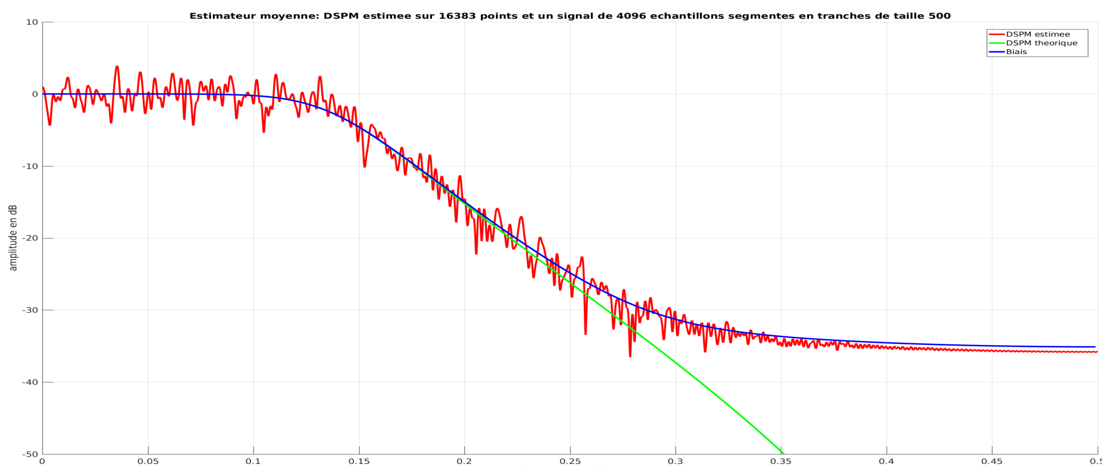

FIGURE 10 – $N = 4096$ – $M = 500$, $NFFT = 16384$. Choix de fenêtre = Hann – Recouvrement de 50%

□

B. Etude du biais et de la variance en fonction de la fenêtre utilisée

Pour N, M et $NFFT$ fixés et pour différents choix de fenêtre, tracez les figures correspondantes aux conditions indiquées ci-dessous.

figure ci-dessous

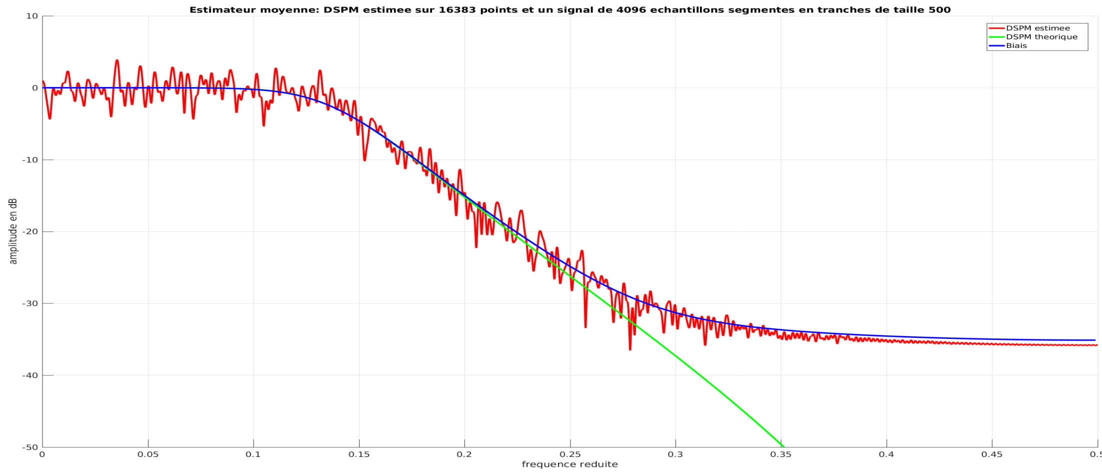

FIGURE 11 – $N = 4096$ – $M = 500$, $NFFT = 16384$. Fenêtre Rectangle – Recouvrement de 50%

figure ci-dessous

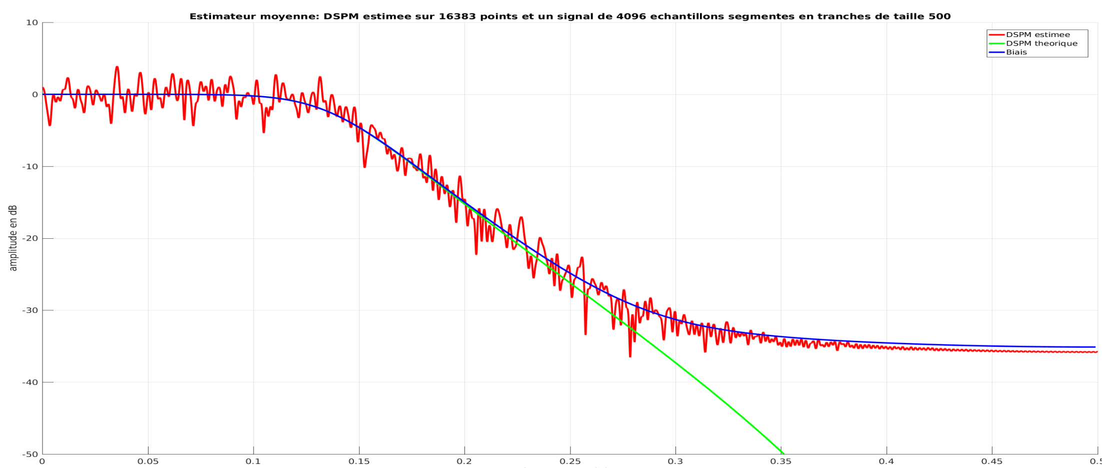

FIGURE 12 – $N = 4096$ – $M = 500$, $NFFT = 16384$. Fenêtre blackman – Recouvrement de 50%

☐

Que permet l'utilisation d'une fenêtre autre que rectangulaire ? Expliquer.

réponse ci-dessous

Cela permet d'améliorer le biais de l'estimateur. ☐

Pour quelles valeurs des paramètres d'analyse obtenez vous le « meilleur »résultat (celui qui vous parait le plus satisfaisant) ?

réponse ci-dessous

Longueur de la séquence analysée $N = 10000$
Longueur des tranches $M = 500$
Type de fenêtre = Hann
Taux de recouvrement = 50%
Nombre de points de transformée de Fourier $NFFT = 16384$

□

5 Script du main

code ci-dessous

```
clear all;
close all;
clc;

% 1 = estimateur simple
% 2 = estimateur moyenne
% 3 = estimateur de welch

% seed = 6

question = 1;

switch question

    case 1

        x = genbrfil();

        nd = 1;
        nf = 5000;
        nfft = 4096;

        [gamma1, f1, N]=est_simple(x, nd, nf, nfft);


    case 2

        x = genbrfil();

        N = 4096;
        M = 500;
        nfft = 16383;

        [gamma2, f2]=est_moyenne(x, N, M, nfft);


     case 3

        x = genbrfil();
        N = 10000;
        M = 500;
        nfft = 16384;
        NOVERLAP = 5000;
```

```
    [gamma3, f3] = est_welch(x,N,'hann',M,NOVERLAP,nfft);

end
```

□