

函数的概念

一、变量

我们在观察各种自然现象或研究实际问题的时候，会遇到许多的量，这些量一般可分为两种：一种是在我们所考察的过程中保持不变的量，这种量称为常量。还有一种是在这一过程中废弃变化的量，称为变量。例如，自由落体的下降时间和下降距离是变量，而落体的质量在这一过程可以看作常量。再如，将一密封容器内的气体加热，气体的体积和分子数目显然是常量，而气体的温度和压力是变量。在数学中，我们常抽去变量或常量的具体意义来研究某一过程中这些量在数值上的关系。但尽管如此，在研究过程中有时还是需要注意它们的具体意义。这些量，例如时间、质量、压力、温度、分子数等，都可以用实数来表示，所以应该称它们为实变量或实常量。

在中学代数里已经知道，实数包括有理数和无理数两种。所有整数、所有分数统称为有理数。换句话说，凡能表示为 $\frac{p}{q}$ （这里的 p, q 为整数， $q > 0$ ，且设 p 和 q 无公因子）形式的数就是有理数。除了这些形式的数以外，还存在着不能表示为上述形式的数，如 $\sqrt{2}$ ，圆周率 π 等等，称为无理数。（注意：如 $\frac{\pi}{2}$ ， $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 等属于无理数）。关于实数的严密理论，这里不再叙述了，仅列举如下几个重要性质，提请读者注意：

- (i) 实数和直线上的点有着——对应的关系，并称这条直线为实数轴。今后我们将经常利用数轴上的点来表示实数，而把点和实数统一起来，不加区别。
- (ii) 有理数在实数中是稠密的，也就是说，在任何两个不同的实数之间必存在着有理数。同样无理数也是稠密的，在任何两个不同的实数之间也必定存在着无理数。
- (iii) 有理数与有理数的和或差为有理数。有理数与无理数的和或差为无理数。无理数与无理数的和或差可能仍为无理数，也可能为有理数。

在观察各种运动过程的时候，我们还发现，有些变量具有一定的变化范围。例如自由落体的下降时间和距离只有在落体落到地面以前才有意义。

变量的变化范围，也就是变量的取值范围，在取实数值的时候，我们往往用区间表示：设 a, b 是有限数， $a < b$ ，满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的 x 全体组成一个闭区间，记为 $[a, b]$ （在数轴上用实心点表示），也可以说：变量 x 的变化范围为闭区间 $[a, b]$ ，满足不等式 $a < x < b$ 的 x 全体组成开区间 (a, b) （在数轴上用空心点表示）。而满足不等式 $a < x \leq b$ 或 $a \leq x < b$ 的 x 全体组成半开半闭的区间 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ ；如果变量 x 能够取实数轴上所有的数，我们把它的变化范围记为 $(-\infty, +\infty)$ ，在这里“ ∞ ”并不表示数量，它只不过是一个记号，前面的“+”，“-”表示方向。有时候，在并不一定要指明是开的或闭的场合，我们也常用 X, Y 等来表示区间。

<https://silly-20081126.github.io/math/display/?articleID=../math/54b39a2cee3>



二、函数

在初一的代数中我们都接触过代数式：由运算符和括号把数或字母连接而成的式子叫做代数式

像 x 、 $a^2 + b^2$ 、 $e^{i\pi} + 1$ 等都是代数式，函数的解析式也和代数式类似。

以 $2^y = x$ 为例，即 $y = \log_2 x$ ，在这个等式中， x 的值是可以变化的， y 的值会随着 x 的值而变化。我们把 x 称为自变量，把会随着 x 的值变化而变化的 y 称为是因变量

当 x 等于1的时候， y 的值等于0

当 x 等于2的时候， y 的值等于1

当 x 等于5的时候， y 的值约为2.321928094887362

当 x 等于1024的时候， y 的值约为10

当 x 等于4294967296的时候， y 的值是32

当 x 等于18446744073709551616的时候， y 的值是64

当 x 等于20081126的时候， y 的值约为24.259336831362322

.....

y 和 x 之间存在确定的依赖关系，对于某个范围内 X 内的每一个实数 x ，可以按确定的规律 f ，得到 Y 内唯一一个实数 y 与这个 x 对应，我们就称 f 在 X 上的函数，它在 x 的数值（称为函数值）是 y ，记为 $f(x)$ ，即 $y = f(x)$

我们把表示 x 和 y 之间的数学式子称为函数解析式。

注：在初中数学课本这样定义函数：

在某个变化过程中由两个变量，设为 x 和 y ，如果在变量 x 的允许取值范围内，变量 y 随着 x 的变化而变化，它们之间存在确定的依赖关系，那么变量 y 叫做变量 x 的函数， x 叫做自变量

这种表示两个变量之间依赖关系的数学式子称为函数解析式

我们称 x 是自变量， y 是因变量，又称 X 是函数 f 的定义域，它表示对 X 内的任何实数 x ，在 f 的作用下是有意义的，简单地说， $f(x)$ 是有意义的，当 x 遍取 X 内的任何实数时，相应的函数值 $f(x)$ 所组成的范围就做函数 f 的值域，要注意的是：值域并不一定就是 Y ，它当然不会比 Y 大，但它可能比 Y 小

如果变量 y 是变量 x 的函数，那么对于 x 在定义域内取定的一个值 a ，变量 y 的对应值叫做当 $x = a$ 时的函数值

<https://silly-20081126.github.io/math/display/?articleID=../math/54b39a2cee3>

